



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
CHIAPAS



FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

“FÍSICA DE ANYONES Y EL  
EFECTO HALL CUÁNTICO  
FRACCIONARIO”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:

ANDRES AUGUSTO MORALES ESPONDA X150065

DIRECTOR DE TESIS:

DR. SENDIC ESTRADA JIMÉNEZ

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS,  
DICIEMBRE 2023.



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas  
23 de Noviembre de 2023  
Oficio No. FCFM/0494/23

Dr. Sendic Estrada Jiménez  
Director de Tesis  
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

***“FÍSICA DE ANYONES Y EL EFECTO HALL CUÁNTICO FRACCIONARIO”.***

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestría en Ciencias Físicas del Lic. Andrés Augusto Morales Sponda con matrícula escolar X150065.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente  
“Por la conciencia de la necesidad de servir”

Dr. Orlando Díaz Hernández  
Director



C. c. p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM  
Lic. Juan Manuel Aguiar Gámez, Encargado del Control Escolar Posgrado de la FCFM  
Archivo  
ODH/jmag



*Para mi, en un futuro.*

# Agradecimientos

En este espacio me gustaría expresar mi agradecimiento a CONAHCYT por otorgarme la beca y así poder realizar la maestría en ciencias físicas. Así mismo, agradezco a mi asesor de tesis el Dr. Sendic Estrada Jiménez por la paciencia y el tiempo brindado, al Dr. Pavel Castro Villarreal, Dr. Vázquez Rodríguez Óscar y al Dr. Arceo Reyes Roberto, por las correcciones hechas, gracias a eso hoy puedo culminar mi posgrado.

# Resumen.

A nivel cuántico, los espacios dos dimensionales presentan propiedades muy interesantes. Ejemplo de esto es el efecto Hall cuántico, que se origina a partir de montar el efecto Hall clásico en condiciones ambientales más extremas. El efecto Hall clásico surge del reacomodo de cargas en una placa rectangular de material conductor debido a la presencia de un campo magnético. Por otro lado, en la teoría de dos dimensiones se encuentran los anyones. Estas son cuasipartículas que tienen la peculiaridad de seguir estadística fraccionaria, la cual interpola entre las estadísticas Bose-Einstein y Fermi-Dirac. Los anyones presentan un camino para explicar el efecto Hall cuántico, sumando a la teoría de Chern-Simons. Todo esto será abordado en la presente Tesis.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
Resumen . . . . .	III
<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>1. Un mundo en dos dimensiones.</b>	<b>3</b>
1.1. Preliminares en topología. . . . .	3
1.1.1. Número de devanado . . . . .	4
1.1.2. Vórtice y el campo escalar complejo. . . . .	5
1.2. Estadística fraccionaria. . . . .	8
1.2.1. Espacio de configuraciones $X^N/S_N$ . . . . .	8
1.2.2. Intercambio de dos partículas. . . . .	9
1.2.3. Grupo de rotaciones, flujo magnético y momento angular. . . . .	16
<b>2. Anyones.</b>	<b>19</b>
2.1. Anyones abelianos. . . . .	20
2.2. Anyones no abelianos. . . . .	21
2.3. Teoría de anyones no abelianos. . . . .	22
2.3.1. Tipos de anyones . . . . .	27
2.3.1.1. Anyones de Fibonacci. . . . .	27
2.3.1.2. Anyones de Yang-Lee . . . . .	30
2.3.1.3. Anyones de Ising . . . . .	31
2.3.2. Grupo de trenzas. . . . .	31
<b>3. El Efecto Hall y sus tres presentaciones.</b>	<b>36</b>
3.1. Efecto Hall Clásico. . . . .	37

3.2. Efecto Hall Cuántico Entero. . . . .	41
3.3. Efecto Hall Cuántico Fraccionario. . . . .	47
3.3.1. Función de onda de Laughlin . . . . .	49
<b>4. El efecto Hall cuántico fraccionario y la teoría de norma de Chern-Simons.</b>	<b>53</b>
4.1. Término de Chern-Simons . . . . .	53
4.2. Teoría de Chern-Simons. . . . .	54
4.3. Estado de Laughlin . . . . .	55
4.4. Teoría de campo de vórtices. . . . .	56
4.5. Jerarquía de Haldane. . . . .	64

# Índice de figuras

1.1. Potencial de simetría rota, imagen tomada de [1]. . . . .	6
1.2. Vórtice en dos dimensiones, imagen tomada de [1]. . . . .	7
1.3. Movimiento de una partícula en (a), imagen tomada de [5]. . . . .	10
1.4. Movimiento de una partícula en (b), imagen tomada de [5]. . . . .	11
1.5. Movimiento de una partícula en (c), imagen tomada de [5]. . . . .	11
2.1. Fusión de anyones abelianos, imagen tomada de [13]. . . . .	23
2.2. Anyones de Fibonacci fusionándose de izquierda a derecha, imagen tomada de [10]. . . . .	24
2.3. Anyones de Fibonacci fusionándose a pares, imagen tomada de [10]. . . . .	24
2.4. F-matriz, imagen tomada de [13]. . . . .	25
2.5. Relación del pentágono, imagen tomada de [10]. . . . .	26
2.6. R-matriz, imagen tomada de [10]. . . . .	26
2.7. Relación hexagonal, imagen tomada de [10]. . . . .	27
2.8. Pares de anyones de Fibonacci, imagen tomada de [10]. . . . .	28
2.9. F-matriz para anyones de Fibonacci, imagen tomada de [10]. . . . .	29
2.10. Ejemplo de una trenza, imagen tomada de [4]. . . . .	32
2.11. Representación gráfica de $\sigma_i$ , imagen tomada de [4]. . . . .	32
2.12. Representación gráfica de $\sigma_i^{-1}$ , imagen tomada de [4]. . . . .	33
2.13. Primera relación de Artin, ecuación (2.6), imagen tomada de [4]. . . . .	33
2.14. Segunda relación de Artin o Yang-Baxter, ecuación (2.7), imagen tomada de [4]. . . . .	33
2.15. Multiplicación de trenzas, imagen tomada de [14]. . . . .	34
2.16. Representación gráfica de $\sigma_0$ , imagen tomada de [14]. . . . .	34
2.17. Dos elementos diferentes de $B_N$ , imagen tomada de [4]. . . . .	35

3.1. Experimento del Efecto Hall Clásico. . . . .	37
3.2. Gráfica obtenida del efecto Hall clásico, imagen tomada de [26]. . . . .	40
3.3. Radios, imagen tomada de [29]. . . . .	43
3.4. Niveles de Landau, imagen tomada de [29]. . . . .	43
3.5. Gráfica obtenida del efecto Hall cuántico entero, imagen tomada de [23].	45
3.6. Gráfica obtenida del efecto Hall cuántico fraccionario, imagen tomada de [23]. . . . .	48

# Introducción.

En física, mayormente tratamos problemas que involucran sistemas que se mueven a través de las tres coordenadas espaciales, en ocasiones podemos ignorar una de las coordenadas debido a que el sistema está moviéndose completamente sobre un plano o ignorar dos coordenadas, si es que el sistema evoluciona en una línea recta. Será de particular interés aquí estudiar espacios dos dimensionales a nivel cuántico, es decir, partículas que se mueven en un espacio donde el movimiento en la tercera dimensión está completamente restringido. Bajo estas condiciones surgen fenómenos muy interesantes.

Uno de estos es el efecto Hall cuántico fraccionario. Pero antes, el efecto Hall clásico es un fenómeno que surge del reacomodo de cargas en una placa delgada rectangular de material conductor o semiconductor debido a la interacción de estas con un campo magnético que incide de manera perpendicular al plano de la placa. Este efecto permite relacionar la corriente y el campo magnético, con la aparición de una diferencia de potencial en el material, en función de algunas de las propiedades de composición y tamaño de este. Este proceso se lleva a cabo en condiciones normales, es decir, a temperatura ambiente y con campos magnéticos de alrededor de 1 Tesla. Ahora bien, existe su contra parte cuántica dividida en dos, el efecto Hall cuántico entero y el efecto Hall cuántico fraccionario, que se originan a partir de montar el experimento en condiciones más extremas, es decir, a temperaturas muy bajas de unos pocos kelvins y con campos magnéticos muy intensos de hasta 30 Teslas. Esto es explicado por la cuantización de Landau hasta el efecto Hall cuántico entero, para después pasar por la función de onda de Laughlin, la jerarquía de Haldane y la teoría de Chern-Simons.

Aquí es donde la cosa se pone particularmente interesante, porque el reacomodo de cargas evoluciona al surgimiento de quasipartículas a partir del movimiento correlacionado de muchos electrones en dos dimensiones. Estas quasipartículas son conocidas como anyones. La teoría sugiere que tienen características tales como seguir estadística

fraccionaria y tener carga y espín fraccionario. En particular, la estadística fraccionaria tiene la propiedad de almacenar más información, ya que al intercambiar dos partículas ya no solo los puntos inicial y final importan, sino todo el camino. Todo esto se genera de la restricción del movimiento en la tercera dimensión, ya que altera el intercambio de partículas indistinguibles. Se pueden clasificar además en anyones abelianos y no abelianos, dependiendo del comportamiento de este intercambio. También presentan una explicación natural al efecto Hall cuántico fraccionario y la superconductividad de anyones, en donde un gas compuesto de anyones se superconduce cuando está acoplado al electromagnetismo; en particular, en esta tesis nos enfocaremos en el primer fenómeno.

En el capítulo 1 repasaremos algunos conceptos de topología que tienen relación con la estadística fraccionaria que describe el intercambio de partículas en dos dimensiones. En el capítulo 2 describiremos la física que rige a los anyones y daremos algunos ejemplos. En el capítulo 3 se hará un repaso de los efectos previos al FQHE y de las formulaciones que lo explican. Finalmente, en el capítulo 4 aplicaremos la teoría de Chern-Simons al efecto Hall cuántico fraccionario para obtener algunos cálculos y la jerarquía de Haldane.

# Capítulo 1

## Un mundo en dos dimensiones.

Uno puede apreciar, que vivimos en un mundo con tres dimensiones, basta con tomar el objeto más cercano que posea altura. Podríamos decir que una hoja es un objeto que solo tiene dos dimensiones, ya que el grosor para fines prácticos es insignificante. Pero, eso no es suficiente para considerarlo un objeto de dos dimensiones. Los materiales dos dimensionales son aquellos materiales que tienen solo una molécula o átomo de espesor. Bajo el régimen de tres dimensiones, las partículas encontradas se clasifican en dos grupos, fermiones y bosones. Los fermiones son partículas que siguen la estadística de Fermi-Dirac y cumplen el Principio de Exclusión de Pauli. Un ejemplo de fermiones son los electrones. Los bosones, por su parte, son partículas que siguen la estadística de Bose-Einstein y no cumplen el Principio de Exclusión de Pauli. Ejemplo de ellos son los fotones. Describen funciones de onda asimétricas y simétricas respectivamente, esto bajo el intercambio a pares de partículas idénticas. En dos dimensiones las partículas se comportan de diferente manera manifestando objetos llamados cuasipartículas, comunes en las teorías realizadas en dimensiones espacio-tiempo  $2 + 1$ , serán descritas más adelante.

### 1.1. Preliminares en topología.

La topología a lo largo de los años ha venido teniendo relevancia en la física, siendo una herramienta útil para abrirnos paso a nuevos campos de estudio. Tal es el caso del efecto Hall cuántico fraccionario. Es por eso que para poder comprender la terminología de esta tesis, repasaremos algunos conceptos de topología empleada en la física.

### 1.1.1. Número de devanado

Consideremos un solitón en (1+1)-dimensiones espacio-tiempo que tiene condiciones de frontera periódicas en el espacio, es decir, que se repiten en el espacio. Debido a esto, podemos deformar la línea espacial hasta formar una circunferencia de radio  $R = L/(2\pi)$ , donde  $L$  es la longitud total del espacio involucrado. Entonces, la variedad espacial puede tomarse como la circunferencia  $S^1$ . Por lo que la variedad espacio-tiempo es  $S^1 \times \mathbb{R}$  donde  $\mathbb{R}$  es la variedad temporal.

Definimos la configuración estática clásica para un campo complejo de la forma  $\phi(x) = \phi_0 e^{i\theta(x)}$ , donde  $\phi_0$  es constante y  $\theta(x) \in [0, 2\pi)$ , como un mapeo de cada punto de la variedad espacial (espacio base) isomorfa a  $S^1$ , a los posibles valores de la fase  $\theta(x)$  (espacio objetivo).

La fase  $\theta(x)$  está definida *mod*  $2\pi$ , por lo que el espacio objetivo es isomorfo a  $S^1$ . Por lo tanto, en este caso, las configuraciones clásicas estáticas para  $\phi$  son de la forma

$$\phi : S^1 \longrightarrow S^1 \tag{1.1}$$

que son mapeos del espacio base  $S^1$  en el espacio objetivo  $S^1$ . Notemos que es posible sumar las fases  $\theta(x)$ , entonces también existen aquí configuraciones suaves, es decir que la posibilidad de adición nos dice que las asignaciones uniformes de  $S^1$  en  $S^1$  forman un grupo, al menos bajo la suma. Estas aplicaciones suaves se denominan homotopías. Se dice que si dos mapeos son homotópicos entre sí, o sea que se pueden deformar uno para obtener el otro, entonces son topológicamente equivalentes [1]. Que los mapeos puedan deformarse suavemente entre sí significa que poseen una relación de equivalencia entre mapeos y pertenecen a la misma clase de equivalencia o clase de homotopía. Esto quiere decir que las asignaciones pueden ser clasificadas.

Para poder clasificar los mapeos  $\theta(x)$  recurrimos a una cantidad de valor entero llamado número de devanado, definido como el cambio total del campo de fase  $\theta(x)$  en la base  $S^1$  en unidades de  $2\pi$ ,

$$N = \frac{(\Delta\theta)_L}{2\pi} = \frac{\theta(L) - \theta(0)}{2\pi}. \tag{1.2}$$

Se requiere que las configuraciones tengan condiciones de contorno periódicas *mod*  $2\pi$  en  $S^1$ , es decir

$$\theta(x + L) = \theta(x) + 2\pi k. \quad (1.3)$$

Sin pérdida de generalidad podemos asignar el valor  $x = 0$  del espacio base, al espacio objetivo  $\theta(0) = 0$ ; se deduce que el número de devanado  $N$  es un número entero  $k \in \mathbb{Z}$ . Al ser  $N$  un número entero, este no puede cambiar continuamente bajo una deformación suave de  $\theta(x)$ , y al no poder cambiar continuamente puede ser usado como invariante topológico para clasificar las configuraciones en clases de homotopía de mapeos de  $S^1$  a  $S^1$ , las cuales son isomorfas a  $\mathbb{Z}$  por ser  $N$  un entero. Esto puede representarse como  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  que establece que estas clases de equivalencia son isomorfas a  $\mathbb{Z}$ . Entonces, las clases de homotopía forman un grupo, conocido como grupo de homotopía denotado en general por  $\pi_n(X)$ , donde el subíndice indica que la base es  $S^n$  y el argumento  $X$  es el espacio objetivo. En particular, en esta tesis nos enfocaremos en el primer grupo de homotopía que hace aplicaciones de  $S^1$  a la  $n$ -esfera  $S^n$ , es decir,  $\pi_1(S^n)$  también conocido como grupo fundamental.

### 1.1.2. Vórtice y el campo escalar complejo.

En la vida cotidiana es común que nos encontremos entidades conocidas como vórtices, en los que una región circular de un fluido gira alrededor de un eje, tal como el remolino que hace un inodoro al jalar de la palanca. Sucede que objetos similares existen a nivel cuántico. Describiremos entonces la noción topológica de vórtice.

Para empezar, consideremos el grupo unitario  $U(1)$  actuando en una teoría con simetría continua global, cuya acción es

$$S = \int dx^2 \left( \frac{1}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + U(\phi) \right) \quad (1.4)$$

donde el potencial es  $U(\phi) = u(|\phi|^2 - \phi_0^2)^2$  con  $u > 0$  (figura 1.1). Esta acción es invariante bajo la simetría global  $U(1)$ ,

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x) \exp(i\varphi). \quad (1.5)$$

En ese caso, el campo de materia es un campo escalar complejo denotado por  $\phi(x) \in \mathbb{C}$

y el potencial tiene un mínimo en  $|\phi(x)| = \phi_0$ .

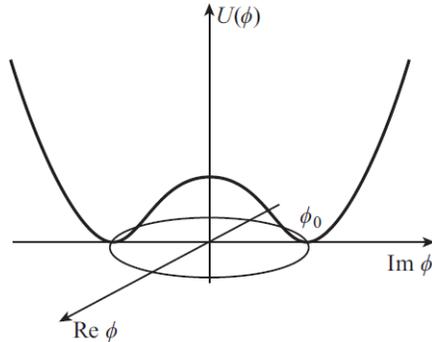


Figura 1.1: Potencial de simetría rota, imagen tomada de [1].

Para tener nuestro vórtice cuántico debemos calcular la fase  $\phi(x)$  en la que ocurre un rompimiento espontáneo de simetría  $U(1)$ . Es posible aproximar dicha fase con un campo complejo de módulo fijo, lo que es conocido como modelo sigma no lineal. Parametrizamos el campo complejo con ayuda de dos campos reales, amplitud  $\rho(x)$  y fase  $\theta(x)$ ,

$$\phi(x) = \rho(x) \exp(i\theta(x)) \quad (1.6)$$

donde la fase  $\theta(x) \in [0, 2\pi)$  es un campo de fase compacto o bosón de Goldstone de  $U(1)$  con rompimiento espontáneo de simetría. El bosón de Goldstone es un bosón que aparece en la teoría cuántica de campos en modelos donde la simetría ha sido rota espontáneamente. Por ende está asociado a generadores de la simetría rota. Una configuración de sistema como esta que posee un grupo de simetría compacto, ya sea global o local, es clasificado por los grupos de homotopía.

Como la simetría  $U(1)$  se rompe, suponemos que a grandes distancias la amplitud  $\rho(x)$  se aproxima a  $\phi_0$ , es decir

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \phi_0 \quad (1.7)$$

donde  $\phi_0$  es el valor esperado de vacío en la fase de simetría rota. Por lo que la fase  $\phi(x)$  de simetría rota es

$$\phi(x) = \phi_0 e^{i\theta(x)}. \quad (1.8)$$

Consideremos ahora una circunferencia  $C(R)$  (figura 1.2) con radio  $R$  lo suficientemente grande como para que se pueda aproximar  $\rho(x) \simeq \phi_0$ . A diferencia de la amplitud  $\rho(x)$  que está esencialmente fijada al valor  $\phi_0$ , la fase  $\theta(x)$  sí cambia en  $C(R)$ . En este límite

$$\phi(x) = \phi_0 \exp(i\theta(x)) \quad \text{con } x \in C(R). \quad (1.9)$$

Por lo tanto, el valor del campo  $\phi(x)$  en la circunferencia  $C(R)$  define un mapa de los puntos  $C(R)$  etiquetados por  $\varphi \in [0, 2\pi)$  a los valores de  $\theta$  del campo  $\phi$ . De la subsección anterior, estos no son más que los mapeos  $S^1 \mapsto S^1$  y como sabemos, estos mapeos se pueden clasificar por  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ , con cada clase identificada por un número de devanado al que llamaremos vorticidad. La configuración definida por esta topología se denomina vórtice.

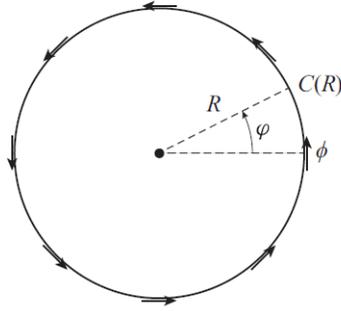


Figura 1.2: Vórtice en dos dimensiones, imagen tomada de [1].

Algo más que agregar es que si la configuración  $\phi(x)$  tiene una vorticidad no nula, el campo debe desaparecer en algún lugar del interior del círculo con circunferencia  $C(R)$ , que de manera conveniente será el centro. De no hacer esto  $\phi(x)$  tendrá una singularidad. La amplitud  $\rho(x)$  debe desaparecer como  $x \rightarrow 0$  para que los términos de gradiente en la acción sean lo suficientemente pequeños para que la acción no diverja.

Como ejemplo, supongamos que  $U(\phi)$  es de tal manera que la amplitud  $\rho(x) \simeq \phi_0$  sea para casi todos los valores de  $x$ , excepto dentro de un pequeño círculo de radio  $a$ . Aquí  $\rho(x)$  se desvanece lo suficientemente rápido como para que no haya singularidad, al precio de una contribución finita a la acción cortada por el tamaño del círculo pequeño. Por lo tanto, para todos los valores de puntos fuera de  $|x| > a$ , podemos establecer  $\phi(x) = \phi_0 \exp(i\theta(x))$  [1].

## 1.2. Estadística fraccionaria.

En física, la estadística de intercambio se refiere a la fase que adquiere la función de onda cuando dos partículas idénticas son intercambiadas. En tres dimensiones estas estadísticas están bien definidas y si se tiene un sistema de partículas idénticas siempre hay manera de que al realizar un intercambio podamos distinguir las partículas. En los espacios de dimensión espacio-tiempo  $2+1$  suceden cosas un tanto anormales, aquí surge de manera natural la estadística fraccionaria y uno no puede distinguir el intercambio de partículas idénticas, lo que representa un problema en la distinción de configuraciones del sistema. Es necesario construir un espacio de configuraciones para  $N$  partículas idénticas en donde se eliminen aquellas configuraciones que describen el mismo estado del sistema.

### 1.2.1. Espacio de configuraciones $X^N/S_N$ .

Para construir un espacio de configuraciones para  $N$  partículas idénticas que excluya las configuraciones que describen el mismo estado del sistema, supongamos que  $X$  es el espacio de coordenadas de una partícula, y consideremos el punto

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

que vive en  $X^N$  y cada componente  $x_i \in X$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Tomamos en cuenta también otro punto  $x'$  que se obtenga de realizar la permutación  $P$  de los subíndices  $i$ , es decir

$$x' = P(x) = (x_{P^{-1}(1)}, x_{P^{-1}(2)}, \dots, x_{P^{-1}(N)}).$$

Usualmente, podríamos decir que el espacio de configuraciones para nuestro propósito es simplemente  $X^N$ , sin embargo, debido a que estamos tratando con partículas estrictamente idénticas, no podemos distinguir entre los puntos de  $X^N$  que difieren solo en el orden de las coordenadas de las partículas, como es el caso de los puntos anteriores  $x$  y  $x'$ , y al no haber esta distinción ambos puntos describen la misma configuración del sistema. Entonces hemos de identificar dichos estados equivalentes, los cuales pueden ser descritos por el grupo simétrico  $S_N$ , al que llamaremos espacio de identificación, es un grupo discreto y finito obtenido de la permutación de  $N$  partículas idénticas. Por lo que la configuración real del sistema debe ser  $X^N/S_N$ , que se obtiene de quitar los

puntos en  $X^N$  que representan la misma configuración; estos puntos serán singulares en  $X^N/S_N$  y al excluirlos se podrá determinar si dos partículas han sido intercambiadas o no [2].

Ahora, tomando a  $X$  como un espacio de coordenadas euclidiano  $R^n$ , para esta configuración  $X^N/S_N$  se tiene que el centro de masa para  $N$ -partículas  $x_1, x_2, \dots, x_N$  es

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \in R^n \quad (1.10)$$

esta expresión permanece invariante bajo la aplicación de  $S_N$ . Entonces, el espacio de  $N$ -partículas se puede escribir como un producto cartesiano de dos espacios, que son:

$$\frac{X^N}{S_N} = R^n \times r(n, N) \quad (1.11)$$

donde  $r(n, N)$  se conoce como configuración relativa y representa  $n(N-1)$  grados de libertad del movimiento relativo de las partículas, que se obtiene de  $R^{n(N-1)}$  identificando los puntos conectados a través de un elemento de  $S_N$ . [3]

### 1.2.2. Intercambio de dos partículas.

Una vez identificado el espacio de configuraciones en el que se debe trabajar, procedemos a estudiar el intercambio de dos partículas, al que definimos como el transporte adiabático arbitrario de cada partícula a la posición previa de la otra partícula.

Consideremos un sistema de dos partículas (caso  $N = 2$ ) indistinguibles en las posiciones  $r_1$  y  $r_2$ , cuyo centro de masa es  $R = (r_1 + r_2)/2$  el cual como sabemos es invariante bajo permutación. El sistema es descrito por la función de onda  $\psi(r_1, r_2)$ . El espacio relativo o configuración relativa es  $r(n, 2)$ , donde  $n$  es la dimensión del espacio, y está categorizada por el vector  $r = r_1 - r_2$ , mientras que el espacio de identificación es  $r = 0$ . Como las partículas son indistinguibles,  $r$  y  $-r = r_2 - r_1$  representan la misma configuración, así que podemos identificar  $r$  con  $-r$ . Entonces debemos tomar el cociente del espacio por  $Z_2 = (1, -1)$ , el cual es un grupo de dos elementos. Además, fijamos  $|r| \neq 0$ , de manera que las partículas no se intersecan. Entonces el espacio de configuración de dos partículas idénticas en  $n$  dimensiones es

$$\frac{X^2}{S_2} = \frac{(R^n - \{0\})}{Z_2} = P_{n-1} \times \langle 0, \infty \rangle \quad (1.12)$$

donde  $\{0\}$  nos dice que hay que excluir la coordenada relativa  $r = 0$ ,  $Z_2$  que  $r$  debe identificarse con  $-r$ ,  $\langle 0, \infty \rangle$  se refiere a la recta real sin el número 0 y  $P_{n-1}$  es el espacio proyectado real de dimensión  $(n - 1)$  hacia la dirección  $\pm \hat{r}$  de  $r$  [4]. Para  $n = 1$ ,  $P_0$  es un punto. Sí  $n = 2$ ,  $P_1$  es la circunferencia  $S^1$ , la cual no es simplemente conexa. Esto significa que existen lazos cerrados que no se pueden contraer a un punto.  $P_2$  es simplemente conexo, es decir cualquier lazo cerrado es reducible a un punto, para  $n = 3$  y representa la esfera  $S^2$ .

Lo que sigue es proponer la dimensión en la que se intercambiaran estas dos partículas, por lo que de aquí podemos considerar dos casos: el caso donde los intercambios han sido arduamente estudiados, que es el de tres dimensiones, y el más ambiguo y aún desconocido, el de dos dimensiones espaciales; analicémoslas por separado.

Cuando hay tres dimensiones,  $n = 3$ . Claramente, el espacio de configuraciones relativo es  $r(3, 2) = P_2 \times \langle 0, \infty \rangle$ , este espacio representa la superficie de una esfera  $S^2$  con los puntos diametralmente opuestos identificados. Vamos a calcular cuál es la fase de intercambio entre las dos partículas que acumulará la función de onda y para ello identificamos los posibles caminos. Existen tres posibilidades:

- (a) Sin intercambios: dejamos sin mover a las partículas, esto es descrito por un camino cerrado que puede contraerse hasta un punto  $((r_1(t_2), r_2(t_2)))$  y genera una fase trivial con valor de  $\eta_0 = 1$ , por lo que no altera la fase de la función de onda asociada al sistema.

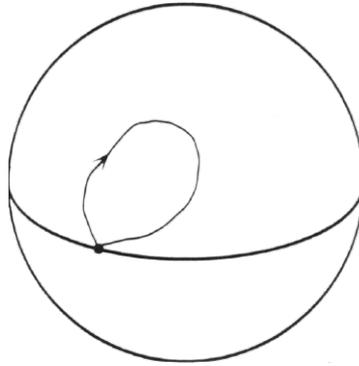


Figura 1.3: Movimiento de una partícula en (a), imagen tomada de [5].

- (b) Un intercambio: movemos cada una de las partículas desde un punto en la superficie de esfera hasta su punto diametralmente opuesto, lo que causa una fase de intercambio no trivial  $\eta = e^{i\theta}$  debido a que al fijar los dos puntos finales no es posible reducir este camino a un punto.

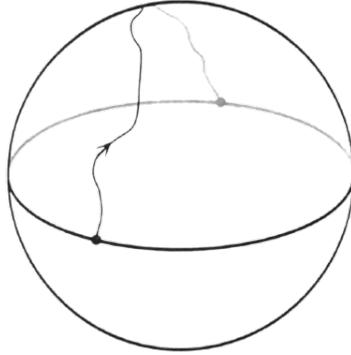


Figura 1.4: Movimiento de una partícula en (b), imagen tomada de [5].

- (c) Dos intercambios: movemos las dos partículas a un punto diametralmente opuesto y de regreso, esto se puede ver como un lazo alrededor de la esfera. Este intercambio hace que ambas regresen a su posición original, haciendo posible que describan un camino cerrado que se puede reducir continuamente a un punto. Adquiriendo una fase trivial  $\eta^2 = 1$ , la misma que en el caso (a).

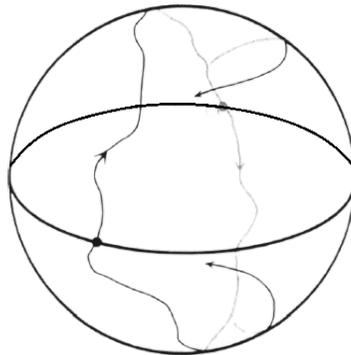


Figura 1.5: Movimiento de una partícula en (c), imagen tomada de [5].

Entonces, las únicas dos posibles configuraciones finales son  $(r_2(t_2), r_1(t_2))$  y  $((r_1(t_2), r_2(t_2)))$ , esto significa que las partículas sí se intercambiaron en una configuración y en la otra no. Aun así, ya que intercambiar las partículas dos veces equivale a no moverlas, las configuraciones describen el mismo sistema debido a que las partículas son idénticas.

Por lo tanto, podemos decir que cuando  $n = 3$  solo son posibles dos tipos de caminos correspondientes a realizar un intercambio, como en el inciso (b), o ningún intercambio, como en el inciso (a). En todo caso, las partículas que se mueven a través de la superficie esférica al lugar diametralmente opuesto y regresan a su posición original describen una curva cerrada que se puede contraer continuamente a un punto sin tener que pasar por algún punto singular, pues para este valor de  $n$  el espacio de configuraciones es simplemente conexo. Aun así, prestemos especial atención al caso (c) [5].

Como las partículas se intercambiaron dos veces en (c), las hemos movido en un camino cerrado y han quedado en el mismo lugar de donde salieron, por lo que el sistema queda invariante. En tres dimensiones esto es equivalente al lazo trivial. Entonces la función de onda debe ser invariante bajo este doble intercambio. Por lo que la fase acumulada  $e^{i2\theta}$  debe satisfacer la siguiente restricción:

$$\psi(r_1, r_2) = e^{i2\theta} \psi(r_1, r_2). \quad (1.13)$$

Recordemos que la fase asignada a un intercambio es  $\eta = e^{i\theta}$  y que  $\eta^2 = e^{i2\theta} = 1$ , por lo que  $e^{i\theta} = \pm 1$ . Esto sugiere que el valor de  $\theta$  debe ser  $\theta = n\pi$  para algún entero  $n$ . Si  $n$  es un entero par, decimos que la función de onda es simétrica o que es invariante bajo intercambios y tendremos estadística bosónica. Si  $n$  es un entero impar, la función de onda es antisimétrica y será multiplicada por un signo negativo cuando se efectúe un intercambio, entonces tendremos estadística fermiónica. Entonces  $\eta = +1$  y  $\eta = -1$  corresponden a las estadísticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac respectivamente. Finalmente, lo que sucede para este caso, sucede para  $n > 3$ , donde el espacio de configuraciones  $r(n, 2)$  es una superficie esférica  $S^{n-1}$  con los puntos diametralmente identificados.

Ahora analicemos cuando solo hay dos dimensiones,  $n = 2$ . En este caso el espacio de configuraciones relativo es  $r(2, 2) = P_1 \times \langle 0, \infty \rangle$ , este espacio representa la circunferencia  $S^1$  con los puntos diametralmente opuestos identificados. Analizamos nuevamente los tres tipos de intercambio posibles:

- (a) Sin intercambios: de la misma forma que en el caso anterior en 3D, este intercambio describe un camino cerrado, quiere decir que el punto de llegada coincide con el punto de partida. Esto es reducible a un punto y genera una fase trivial  $\eta_0 = 1$ .

- (b) Un intercambio: al igual que en el caso anterior, en 3D, este intercambio es no contraíble por la misma razón de que los puntos finales están fijos, y tiene una fase de intercambio no trivial  $\eta = e^{i\theta}$ .
- (c) Dos intercambios: a diferencia del caso anterior en 3D, este intercambio resulta ser no contraíble y es posible distinguir entre sentido horario y antihorario.

Nuevamente, nos enfocamos en el intercambio (c), el cual en esta dimensión en general no es equivalente al lazo trivial, por lo que el sistema no se reinicia. Aquí generalmente no es cierto que  $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ , ya que podemos distinguir entre el sentido antihorario y sentido horario que corresponden a las fases  $\theta$  y  $-\theta$  respectivamente. Por lo tanto, en dos dimensiones es necesario especificar como las trayectorias se entrelazan entre sí, ya que no es suficiente especificar la configuración inicial y final para caracterizar un sistema, por lo que hay que incluir la evolución temporal entre los puntos de partida y llegada.

En esencia, ambos casos difieren en que excluir el origen  $x = 0$  en tres dimensiones mantiene el espacio simplemente conexo. Por lo que todo camino cerrado que este dentro del espacio puede deformarse de forma continua hasta convertirse en un punto; mientras que para dos dimensiones el espacio no es simplemente conexo. Si  $x = 0$  se hubiera incluido, entonces en ambos casos el espacio de configuraciones es simplemente conexo [3]. Este hecho tiene profundas consecuencias cuando cuantizamos un sistema de partículas idénticas en dos dimensiones, y es la razón de porque es posible definir caminos orientados (sentido horario y antihorario) que serpentean alrededor del origen, un número arbitrario de veces contadas. Este número ya ha sido identificado como número de devanado  $N = k \in \mathbb{Z}$ , y funciona para etiquetar los diferentes caminos. Entonces la razón de aparecer de la estadística fraccionaria es que los puntos que corresponden a la coincidencia de la posición de dos o más partículas son puntos singulares en el espacio de configuraciones y por esa razón deben ser excluidos.

Entonces, dado que el espacio de configuraciones de  $N$  partículas indistinguibles en dos dimensiones no es simplemente conexo, existen caminos que no se pueden deformar continuamente entre sí. Por lo que el intercambio de partículas idénticas de este espacio tiene la misma estructura que las clases de homotopía de lazos en un espacio de configuraciones, analizada en la sección anterior. Entonces, para expresar esto matemáticamente, recurrimos a este primer grupo de homotopía o grupo fundamental  $\pi_1(X)$ .

Retomando la ecuación (1.12). Para  $n = 3$

$$\pi_1(P_2 \times \langle 0, \infty \rangle) = \mathbb{Z}_2$$

que es un grupo de dos elementos  $(1, -1)$ , lo que nos dice que solo existen dos fases, correspondientes a las estadísticas halladas en tres dimensiones. Y para  $n = 2$

$$\pi_1(P_1 \times \langle 0, \infty \rangle) = \mathbb{Z}.$$

quiere decir que se puede tener cualquier fase en dos dimensiones.

Entonces, para la generalización se tiene que para partículas indistinguibles el espacio de configuraciones es solo  $(R^n)^N = R^n \cdots R^n$ ,  $N$  veces. Pero, para partículas indistinguibles no hay distinción física entre los puntos en  $(R^n)^N$  que difieren entre sí solo en el orden de los índices de partículas. Así, de la misma manera que en la subsección 1.2.1, los puntos en  $(R^n)^N$  que estén bajo la acción del grupo simétrico de  $N$  objetos,  $S_N$ , deben identificarse. Entonces, los puntos diagonales en  $(R^n)^N$ ,  $\Delta = \{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, : \vec{r}_I = \vec{r}_J \text{ para } I \neq J\}$  deben ser excluidos. Por lo tanto, el espacio de configuraciones de  $N$ -partículas en  $n$ -dimensiones es

$$\frac{X^N}{S_N} = \frac{(R^n)^N - \Delta}{S_N}$$

Ahora, para continuar, debemos encontrar el primer grupo de homotopía de este espacio, esto es, un problema de topología algebraica que ya ha sido resuelto con anterioridad en un artículo matemático que pertenece a otro autor y no será incluido aquí [6]. En respuesta a esto, el primer grupo de homotopía está dado por:

$$\pi_1(X^N/S_N) = \begin{cases} S_N & \text{si } n = 3 \\ B_N & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

donde  $S_N$  es el grupo de permutación que ya hemos mencionado y  $B_N$  es el grupo de trenzado de  $N$  objetos (es un grupo que contiene a  $S_N$ ).  $B_N$  acepta una familia de parámetros unidimensionales, los cuales están etiquetados con  $\theta$ , mientras que  $S_N$  solo tiene las dos representaciones unidimensionales que ya identificamos anteriormente,

la idéntica y la que alterna de signo, correspondientes a las estadísticas bosónica y fermiónica respectivamente.

De acuerdo con la formulación cuántica de la integral de trayectoria de Feynman, en la trayectoria de una partícula, cada camino que lleve de un punto a otro contribuye con el factor de peso apropiado. Consideramos una suma sobre todos los caminos continuos en el espacio de configuraciones conectando el estado inicial  $x_1$  con el estado final  $x_N$ . Es decir, consideremos una transición de  $(x_1, t_1)$  a  $(x_N, t_N)$ , cuyo propagador es

$$K(x_N, t_N; x_1, t_1) \propto \sum_{o.a.p.} \exp\left(i \int_{t_1}^{t_N} L dt\right) \quad (1.14)$$

donde *o.a.p.* significa “sobre todos los caminos” (over all paths). Sin pérdida de generalidad podemos considerar solo los caminos cerrados, es decir  $x_N = x_1$ , cada uno será un lazo cerrado en el espacio de configuraciones.

Como podemos ver en la ecuación (1.14) la amplitud de transición es proporcional a la expresión de la derecha, entonces hace falta una constante de proporcionalidad, la cual denotaremos como  $\chi(\beta)$ . Esta constante tiene que ver con el factor de peso de cada camino y debe agregarse debido a que el espacio de configuraciones no es simplemente conexo, con esto se organiza la suma de todos los lazos en una suma de clases de homotopía:

$$K(x_N, t_N; x_1, t_1) = \sum_{\beta \in \pi_1} \chi(\beta) \sum_{q(t) \in \beta} \exp\left(i \int_{t_1}^{t_N} L(q, \dot{q}) dt\right) \quad (1.15)$$

Entonces, realmente en este caso, hay que sumar sobre las amplitudes parciales, cada una de las cuales es una suma sobre los caminos que pertenecen a una clase de homotopía distinta. Estas clases de homotopía  $\beta$  de caminos que van de  $x_1$  a  $x_N$  pueden identificarse con los elementos de  $\pi_1(S^n)$  [7]. Además, según la mecánica cuántica se debe cumplir que el desarrollo temporal total de  $t_0$  a  $t_2$  debe tener la misma amplitud que los desarrollos temporales en los tiempos de  $t_0$  a  $t_1$  y de  $t_1$  a  $t_2$  juntos, esto implica que:

$$\chi(\beta_1 \beta_2) = \chi(\beta_1) \chi(\beta_2) \quad (1.16)$$

esta ecuación sugiere que  $\chi(\beta)$  debe ser una representación unidimensional del primer

grupo de homotopía  $\pi_1$  y tiene como solución:

$$\chi(\beta) = e^{\pm i\theta}, \quad \pi \geq \theta \geq 0 \quad (1.17)$$

entonces en dos dimensiones es posible asignar cualquier valor a la fase de intercambio. Para fines prácticos suele asignarse  $e^{i\theta}$  al intercambio en sentido antihorario y  $e^{-i\theta}$  para el intercambio en sentido horario. Aquí  $\theta$  puede tomar cualquier valor, teniendo como casos particulares a  $\theta = \pi, 0$  que se relacionan con las estadísticas fermiónica y bosónica, respectivamente. Se dice que estas partículas obedecen una estadística fraccionaria [4].

### 1.2.3. Grupo de rotaciones, flujo magnético y momento angular.

Se pueden hacer cosas interesantes con los espacios dos dimensionales y el grupo de rotaciones, como por ejemplo el estudio de la mecánica cuántica de momento angular; y es que el grupo de rotaciones tiene distinta construcción dependiendo de la dimensión en la que se trabaje. Si estamos en tres dimensiones o más, el grupo de rotación es no-abeliano y los eigenvalores del operador de momento angular están cuantizados en unidades de  $\hbar/2$ , cuantización que se logra considerando el álgebra de Lie de rotaciones infinitesimales, que es un álgebra no conmutativa. En contraste con esto, en dos dimensiones el álgebra es conmutativa y, por tanto, el grupo de rotación es un grupo abeliano trivial conformado por un solo elemento, el cual conmuta consigo mismo y los eigenvalores toman un valor arbitrario. Entonces no hay una cuantización análoga del momento angular, ya que la consideración de rotaciones infinitesimales no cuantiza el momento angular.

Uno puede pensar en considerar rotaciones finitas. Supongamos la rotación  $2\pi$ , la cual debería actuar dejando invariantes a las cantidades físicas; en general, esto no siempre pasa así. Otro aspecto a considerar es que los vectores estado por sí solos no representan directamente aspectos físicos, pero al considerar combinaciones lineales de estados, se puede expresar superposiciones en términos de magnitudes.

Construimos entonces un operador  $U(2\pi)$  asociado a la rotación descrita arriba, cuyo eigenvalor al actuar sobre un estado es un número complejo arbitrario de módulo uno, digamos  $\lambda$ .  $U(2\pi)$  solo requiere la condición de que el estado caracterizado por un valor

propio diferente  $\lambda'$  es ortogonal al estado caracterizado por  $\lambda$ . Es decir, como pedimos que la rotación generada a través de  $2\pi$  deje invariante cualquier observable local, los operadores correspondientes deben conmutar, de manera que ningún observable local puede conectar estados caracterizados por valores diferentes de  $\lambda$ .

Resulta que de cierta manera estos estados existen en mundos completamente diferentes, decimos que pertenecen a distintos sectores de superselección. Dentro de cada sector de superselección, etiquetado por  $\lambda = e^{i\theta}$ , el momento angular se cuantiza en unidades de  $\hbar(\frac{\theta}{2\pi} + \text{entero})$  [8].

Como ejemplo de un modelo con un momento angular fraccional tenemos lo siguiente. Consideremos una partícula con carga  $q$  orbitando a distancia  $r$  a un solenoide que se extiende a lo largo del eje  $z$ . En primera instancia no fluye corriente a través del solenoide, por lo que el momento angular orbital de la carga toma valores de múltiplos enteros de  $\hbar$ .

Ahora, si una corriente se enciende lentamente en él, la partícula sentirá un campo eléctrico. De acuerdo con la ley de Maxwell-Faraday

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int \frac{\partial B}{\partial t} d^2\mathbf{r} = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.18)$$

donde  $\phi$  es el flujo en el solenoide. Se tiene entonces

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r E_\theta = -\dot{\phi}. \quad (1.19)$$

Por lo que el campo eléctrico que siente la partícula en la dirección azimutal, es

$$\mathbf{E}_\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\dot{\phi}}{2\pi r}(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}). \quad (1.20)$$

Esto da como resultado un torque o cambio respecto al tiempo del momento angular de la partícula cargada. La relación entre el torque y el cambio, también en el tiempo, del flujo magnético viene dado por:

$$\frac{dl_z}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (q\mathbf{E}) = - \left( \frac{q}{2\pi} \right) \frac{d\phi}{dt}.$$

Al resolver la ecuación obtenemos

$$\Delta l_z = -\frac{q\phi}{2\pi},$$

es decir, el cambio total en el momento angular debido al flujo en el solenoide depende sólo de él en sí. Por lo tanto, el momento angular orbital final, luego de que el flujo corra a través solenoide, se cuantiza en unidades de:

$$l_z = n\hbar - \frac{q\Phi}{2\pi}$$

donde  $n$  es un entero no negativo. Si  $l_z$  es un entero o medio entero, la estadística será la usual, o sea fermiónica o bosónica.

En el sistema que se considera en el ejemplo se tiene un tubo de flujo y una partícula cargada que órbita alrededor del tubo. Este tipo de composiciones en general tendrá una fracción de momento angular o espín. En el límite donde la distancia entre la partícula cargada y el solenoide se reduce a cero, el sistema puede considerarse como un único objeto compuesto al que llamaremos partícula compuesta (flujo-tubo-partícula).

Entonces este modelo de un objeto compuesto con momento angular fraccionario puede considerarse como un modelo físico de un anyon. Los anyones son una clase de cuasi-partícula que obedece una estadística fraccionaria y que viven en sistemas planos. Serán descritos con más detalle en el siguiente capítulo.

# Capítulo 2

## Anyones.

Siguiendo con comparaciones entre dimensiones y recapitulando, en el espacio tridimensional es posible clasificar a las partículas en dos tipos, bosones o fermiones. Estas partículas son distinguibles por su espín, las estadísticas de interacción al intercambiar dos partículas idénticas y el principio de exclusión de Pauli. El espín está cuantizado en múltiplos enteros de  $\frac{\hbar}{2}$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , para bosones  $S = 0, 1, 2, \dots$  y para fermiones  $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ , donde  $\hbar = 1$ . También existen tres operadores de espín, ya que hay tres formas de rotar de manera independiente; estos operadores satisfacen un álgebra no abeliana. Las estadísticas involucradas en el intercambio son muy simples, ya que si una partícula que se mueve alrededor de otra y regresa a su posición original, esta se desplaza en un camino topológicamente equivalente a no moverla, pues podemos deformar a este sobre la partícula estacionaria en un bucle arbitrariamente pequeño. Para los bosones la operación de intercambio (intercambiar las coordenadas de dos partículas) volverá a la misma función de onda y para los fermiones esta operación volverá a la misma función de onda con un signo negativo, esto produce un cambio de fase  $2\pi$  o  $\pi$  respectivamente, quiere decir que dependiendo del tipo de partícula el intercambio afectará a la función de onda total por un signo  $+$  o  $-$ . Esto también se relaciona con el intercambio de  $n$  partículas en tres o más dimensiones, se describe por el grupo simétrico  $S_n$  el cual tiene dos representaciones unidimensionales que son  $\pm 1$  que corresponden a las estadísticas de Bose y Fermi. Por último, el principio de exclusión de Pauli nos dice que un solo estado no puede ser ocupado por más de un fermión, pero sí cualquier número de bosones. [9].

Por otro lado, en dos dimensiones, al existir un solo eje de rotación, es posible tener espín fraccionario. Por ejemplo, si tomamos el plano  $x - y$ , el único operador sería  $S_z$  que en este caso sería abeliano, ya que solo podría conmutar consigo mismo y su eigenvalor asociado será arbitrario. En cuanto a las estadísticas, al tener la misma situación descrita arriba, el camino ya no es topológicamente trivial. Entonces se puede tener cualquier cambio de fase asociada con el intercambio, el cual no es ni  $\pi$  ni  $2\pi$ , sino un valor fraccionario, lo que hace posibles estadísticas de intercambio más exóticas llamadas estadísticas fraccionarias, las cuales son descritas por el grupo trenzado  $B_n$ , que será visto con detalle más adelante [10]. Las partículas que obedecen estas reglas son conocidas en el mundo de la física de baja dimensionalidad como “anyones”. El nombre que se le da a estas partículas viene del término “any” del inglés que significa “cualquiera”. Se le da este nombre, ya que los anyones tienen la peculiaridad de tener cualquier espín y obedecen cualquier estadística y como ya sabemos, viven solo en sistemas bidimensionales [11]. Y en lo que al principio de Pauli respecta, los anyones dependiendo de la teoría que los modele, podrían o no cumplir tal principio.

Los anyones y grupos de anyones, llevan una carga o espín como cantidad asociada. Para una partícula individual, esto simplemente indica el tipo de partícula. Para grupos de anyones, esto denota el tipo de partícula resultante si todos esos anyones se fusionan [10]. Sumado a esto, los anyones violan las simetrías de paridad  $\mathbf{P}$ , esto es, por qué en dos dimensiones la paridad corresponde a la operación  $x \rightarrow -x, y \rightarrow y$  o  $x \rightarrow x, y \rightarrow -y$  y no  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$  como es en tres dimensiones que equivale a una rotación. Además, rompe con la invariancia de inversión de tiempo  $\mathbf{T}$ , ya que si el devanado antihorario es revertido en el tiempo, será igual al devanado horario.

## 2.1. Anyones abelianos.

Ahora que entendemos un poco de lo que son los anyones, debemos saber que es posible clasificarlos en dos tipos dependiendo de su comportamiento en la matemática usada. El primer tipo, los anyones abelianos, son tales que al intercambiar posiciones de dos partículas, resulta en un cambio de fase; quiere decir que las operaciones producidas al intercambiar dos anyones conmutan, lo que da lugar a operaciones sencillas. Además, para los anyones abelianos, el fusionar dos de ellos da lugar a solo un posible resultado.

Resulta conveniente resolver la dinámica de anyones en términos de partículas compues-

tas, ya que un anyon puede ser representado como un fermión compuesto o un bosón compuesto portador de flujo, según sea conveniente en la teoría; el flujo es descrito por la teoría de Chern-Simons y son llamados fermiones compuestos o bosones compuestos. Esta teoría se construye usando un campo de partículas compuestas y un campo de norma de Chern-Simons.

Cuando los electrones están confinados a un plano bajo ciertas características, se comportan como anyones y es conveniente tratarlos como fermiones compuestos [12]. Un ejemplo destacado de anyones proviene del estado de Hall cuántico fraccional con un llenado de  $1/3$ . Para este factor de llenado fraccional, las partículas en un sentido son un tercio de un fermión compuesto, es decir, un electrón y tres cuantos de flujo. Entonces, estas partículas compuestas tendrán una carga de  $e/3$  [9]. Estas cuasipartículas son abelianas, quiere decir que el operador de intercambio se representa mediante un factor de fase. Por lo tanto, los anyones abelianos forman representaciones unidimensionales del grupo de trenzas.

## 2.2. Anyones no abelianos.

El otro tipo de anyones, y el más interesante, son los anyones no abelianos. El intercambio de dos de estas cuasipartículas no solo queda en cambios de fase, sino que resulte en operaciones más complejas, por lo general representado por una matriz. Es decir, las operaciones producidas por el intercambio de los anyones no abelianos en general no conmuta. También, para los anyones no abelianos, el fusionar dos de ellos se tiene múltiples resultados de esa fusión. Ya que los anyones son un conglomerado de muchos electrones, el fusionar de dos de ellos físicamente significa juntar esos dos conjuntos de formando un nuevo todo, que sería otro anyon. Modelos con anyones no abelianos tendrán el estado fundamental degenerado, esto quiere decir que un mismo nivel energético estará asociado a varios estados [10].

Supongamos  $N$  estados degenerados. Cada estado está etiquetado con un  $\psi_\alpha$  representando a  $N$  partículas, es decir,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ . Como ya se mencionó, si realizamos un intercambio de dos partículas, a las que etiquetamos digamos con 1 y 2, entonces el intercambio dará más que una fase, ya que estamos tratando con anyones no abelianos. Ahora el intercambio puede rotar el estado a otra función de onda en el mismo espacio degenerado. Es decir, aplica a un vector la transformación

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = U\psi$$

donde  $U \equiv U_{\alpha\beta}$  es una matriz unitaria de  $N \times N$ . Ahora, si tomamos otras dos partículas etiquetadas con 2 y 3 y las intercambiamos, entonces

$$\psi \rightarrow \psi' = V\psi$$

con  $V$  otra matriz unitaria de  $N \times N$ .

Para tener estadística no abeliana se necesitan al menos dos estados degenerados, de lo contrario  $U$  y  $V$  son solo fases y conmutan y los anyones son solamente abelianos. Si  $U$  y  $V$  no conmuta entonces se dice que las partículas tienen estadística no abeliana, es entonces cuando decimos que tenemos excitaciones no abelianas.

### 2.3. Teoría de anyones no abelianos.

Como sabemos un anyon se modela como una partícula compuesta por una carga que orbita un cuánto de flujo magnético, este modelo funciona bien para el caso abeliano, pero para el caso no abeliano es necesario construir un modelo abstracto.

Los elementos necesarios para una teoría de anyones no abelianos son:

- Identificar los tipos de partículas presentes en el modelo.
- Reglas de fusión de partículas.
- Reglas de intercambio de partículas o de trenzado.

Para comenzar a construir el modelo hay que identificar a las partículas presentes. Hacemos un listado del tipo de partículas a las que etiquetamos con  $a, b, c, \dots$  e incluimos el vacío etiquetado con  $\mathbf{0}$ , así el modelo sería abarcado por el conjunto de partículas  $M = \{\mathbf{0}, a, b, c, \dots\}$ . Estas etiquetas pueden ser ocupadas por los distintos tipos de anyones no abelianos, como por ejemplo anyones de Fibonacci [13]. El siguiente paso es definir la regla de fusión o álgebra de fusión, cuya forma es la siguiente

$$a \otimes b = \sum_{c \in M} N_{ab}^c c.$$

Aquí hay 3 opciones:

- Si  $N_{ab}^c = 0$  entonces la partícula  $c$  no se obtiene.
- Si  $N_{ab}^c = 1$  entonces solo hay una forma de obtener la partícula  $c$  y es mediante la fusión de parejas  $a$  y  $b$ .
- Si  $N_{ab}^c > 1$  entonces hay más de una manera de obtener a  $c$ , tantas como el valor de  $N_{ab}^c$ .

El primer caso es trivial y no presenta ninguna relevancia. Mientras que  $N_{ab}^c = 1$  es para anyones abelianos, representado por la siguiente figura

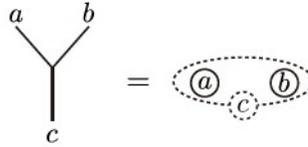


Figura 2.1: Fusión de anyones abelianos, imagen tomada de [13].

Esto es que un anyon  $a$  con parámetro estadístico  $\alpha_1$  fusionado con otro anyon  $b$  de parámetro  $\alpha_2$  da lugar a otro anyon  $c$  con parámetro estadístico  $\alpha_3$ , esto es, que la tercera partícula se obtiene a partir de las dos primeras.

Los anyones no abelianos se caracterizan por  $N_{ab}^c > 1$ , es decir, dos o más coeficientes, pues la fusión puede dar diferentes tipos de partículas con diferente probabilidad. Como la fusión no conduce a una sola respuesta, los enteros  $N_{ab}^c$  definen la probabilidad del resultado.

Estos resultados variados de fusión, y, por lo tanto, los estados básicos del espacio vectorial, se representan visualmente mediante dos maneras, la notación de elipse, o los diagramas de árbol. En la notación de elipse, los anyones están encerrados por elipses, en esta elipse se marca la carga neta de los anyones encerrados. Es decir, la carga que debe resultar de su fusión. En este diagrama, cuando se realiza la fusión, cualquiera que esté dentro de una elipse se fusionará antes de fusionarse con cualquiera que esté fuera de esa elipse. En la notación de árbol, se marcan las líneas de mundo de los anyones

y el resultado de cada fusión se da y está marcado en cada vértice. Como ejemplo de esto, consideremos un conjunto de cuatro anyones de Fibonacci, que serán descritos más adelante, que poseen carga total neta cero donde los anyones se fusionan de izquierda a derecha.

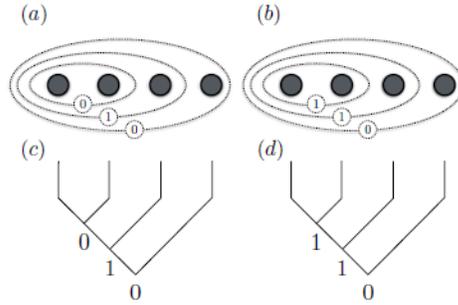


Figura 2.2: Anyones de Fibonacci fusionándose de izquierda a derecha, imagen tomada de [10].

En la figura de arriba se presentan diagramas de dos posibles resultados de fusión, (a) y (b) describen los anyones con notación circular. (c) y (d) describen los anyones con diagramas de árbol, donde el tiempo va de arriba hacia abajo. (a) y (c) se refieren a la misma fusión, al igual que (b) y (d).

Sin embargo, la elección del orden en el que se fusionan los anyones es realmente arbitraria, no hay una razón a priori para que se fusionen en ese orden. La figura anterior muestra la base cuando la fusión se realiza de izquierda a derecha. Pero también podemos considerar la base cuando la fusión se realiza en pares, como en la figura 2.3.

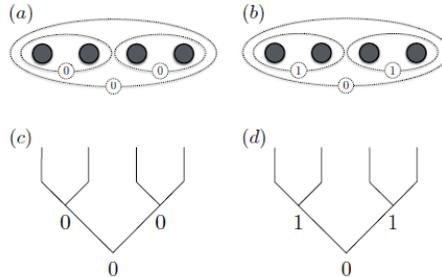


Figura 2.3: Anyones de Fibonacci fusionándose a pares, imagen tomada de [10].

Ambas son opciones válidas para los estados base del sistema. El cambio entre estas bases y cualquier otro conjunto de bases se realiza mediante una matriz conocida como F-matriz [10].

Consideremos la fusión de tres anyones  $a$ ,  $b$ , y  $c$  en un anyon  $d$ . El resultado del proceso de fusión es independiente del orden en que se van a fusionar los anyones, esto implica que el proceso de fusión obedece a la ley asociativa,  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ , y se caracteriza por la  $F$ -matriz [11, 14]. La  $F$ -matriz, como se mencionó, representa la transformación entre diferentes bases de fusión o la elección del orden de fusión. Se expresa como se muestra en la figura

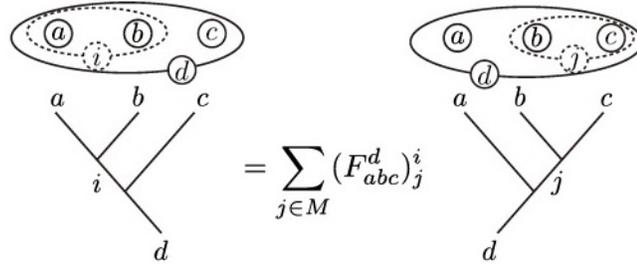


Figura 2.4: F-matriz, imagen tomada de [13].

donde la suma se hace bajo las partículas, es decir  $j \in M = \{\mathbf{0}, a, b, c, \dots\}$ , y  $(F_{abc}^d)_j^i$  es un F-coeficiente. Entonces, para realizar estos cálculos hace falta conocer los F-coeficientes, los cuales restringimos para que sean una operación unitaria.

Para encontrar los valores de cualquier coeficiente no trivial es necesario resolver una relación de consistencia conocida como relación del pentágono, que ilustra lo que llamaremos movimiento F como en la figura 2.5. Esta relación muestra dos combinaciones diferentes de movimientos F para ir de una base particular a otra.

El movimiento F actúa localmente en cualquier segmento de un diagrama de árbol de fusión y se pide que realice una operación unitaria. También se aplica cuando se reflejan los diagramas de árbol con las etiquetas correspondientes, por lo que el movimiento F es su propio inverso [15].

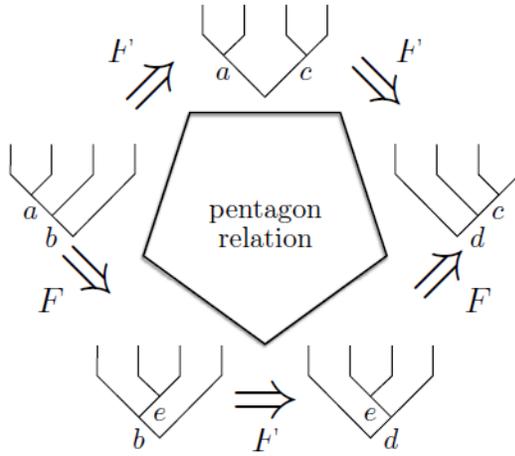


Figura 2.5: Relación del pentágono, imagen tomada de [10].

Ahora definimos lo que es la R-matriz, que al igual que la F-matriz, realiza un movimiento R unitario. Como sabemos, cuando un anyon se mueve alrededor del otro, los anyones por pares adquieren una fase. La R-matriz describe una fase resultante del intercambio de anyones  $a$  y  $b$  que se fusionan en un anyon  $c$ . Por lo que este movimiento R cuantiza el efecto del intercambio de dos partículas para encontrar el efecto del trenzado. Se representa esquemáticamente de la siguiente manera

$$\begin{array}{c} a & b \\ \diagdown & / \\ & \text{cross} \\ / & \diagdown \\ & c \end{array} = R_c^{ab} \begin{array}{c} a & b \\ \diagdown & / \\ & c \end{array} ,$$

Figura 2.6: R-matriz, imagen tomada de [10].

donde  $R_c^{ab}$  es un coeficiente R. La R-matriz actúa sobre una trenza inmediatamente anterior a una fusión. El movimiento inverso del R actúa como un giro en la dirección opuesta de la que se observa en la figura. En cuanto a los R-coeficientes, al igual que con los otros movimientos F, son su propio inverso.

Para determinar cualquier R-coeficiente no trivial podemos usar la siguiente relación de consistencia conocida como relación hexagonal, mostrada en la figura 2.7.

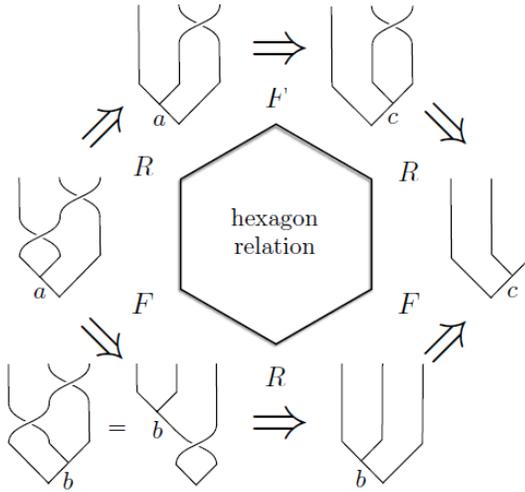


Figura 2.7: Relación hexagonal, imagen tomada de [10].

Para los anyones no abelianos, las condiciones impuestas por las relaciones del pentágono y del hexágono encapsulan todas las consistencias topológicas requeridas y no hace falta ninguna otra relación. Junto con las reglas de fusión, son suficientes para derivar los coeficientes  $F$  y  $R$ , los cuales forman la  $F$ -matriz y la  $R$ -matriz respectivamente. Estos son los componentes básicos para construir el grupo trenzado en múltiples sistemas de anyones [15].

Restaría solo definir las reglas de trenzado, que serán vistas en la siguiente sección. Pero antes, veremos que estas reglas de fusión pueden ser aplicadas a distintos tipos de anyones, como por ejemplo los que veremos a continuación.

### 2.3.1. Tipos de anyones

#### 2.3.1.1. Anyones de Fibonacci.

El modelo de anyones no abelianos más simple consiste en dos elementos identificados como el vacío (el cual es la ausencia de partículas) con carga,  $0$  el cual denotaremos por,  $\mathbf{0}$  y el anyon no trivial con carga  $1$  denotada por  $\tau$ , los cuales obedecen las reglas de fusión

$$\begin{aligned}
\tau \otimes \tau &= \mathbf{0} \oplus \tau \\
\mathbf{0} \otimes \mathbf{0} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \otimes \tau &= \tau \\
\tau \otimes \mathbf{0} &= \tau
\end{aligned}$$

donde  $\otimes$  denota la fusión de dos anyon y  $\oplus$  denota resultados posibles. Esto lo podemos compactar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\tau \otimes \tau &= \mathbf{0} \oplus \tau \\
\mathbf{0} \otimes x &= x
\end{aligned} \tag{2.1}$$

la primera regla nos dice que la fusión de un anyon de Fibonacci puede fusionarse con otro anyon de Fibonacci para dar como resultado la aniquilación ( $\mathbf{0}$ ) o la creación ( $\tau$ ) de un anyon de Fibonacci. Esto hace posible que un anyon de Fibonacci pueda ser su propia antipartícula. La segunda regla es para cuando  $x \in \{\mathbf{0}, \tau\}$ , significa que la fusión con el vacío no hace nada [10].

Si realizamos un trenzado podemos cambiar las probabilidades de estos resultados de fusión. Por ejemplo, consideremos cuatro anyones de Fibonacci seguidos en un espacio de 2+1 dimensiones, creados a pares del vacío dispuestos de la siguiente manera

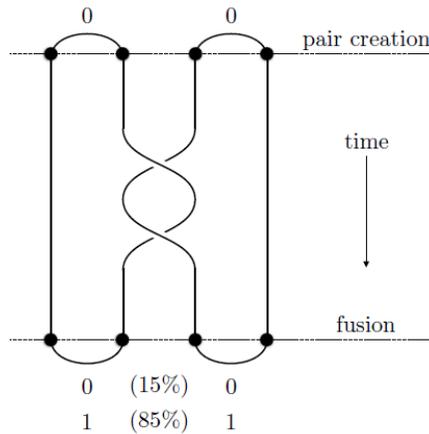


Figura 2.8: Pares de anyones de Fibonacci, imagen tomada de [10].

y ya que los pares son creados del vacío, su carga neta es de 0. Si dejamos así los anyones, sin trenzar, entonces los dos pares se fusionarían individualmente al vacío de donde salieron originalmente. Pero, si realizamos un trenzado, digamos que el segundo y tercer anyon se intercambian dos veces en sentido antihorario, y luego fusionamos las partículas, existe una probabilidad distinta de cero de que la fusión pueda dar 1 en lugar de 0. Luego de que los pares de anyones se vuelven a fusionar, existe aproximadamente un 85 % de probabilidad de que los anyones no se aniquilen y en su lugar produzcan otro anyon  $\tau$  con carga 1. Sin embargo, la carga neta de todo el sistema no se ve afectada debido al trenzado, por lo que sigue siendo 0. Entonces, si las dos anyones restantes son fusionados, deben dar el vacío  $0$ .

Para este tipo de anyones la suma de la figura 2.4 se puede expresar como

$$\begin{array}{c} a & b & c \\ | & | & | \\ \diagdown & / & | \\ & i & \\ | & & \\ \diagdown & / & \\ & d & \end{array} = F(abcd)_0^i \begin{array}{c} a & b & c \\ | & | & | \\ \diagdown & / & | \\ & 0 & \\ | & & \\ \diagdown & / & \\ & d & \end{array} + F(abcd)_1^i \begin{array}{c} a & b & c \\ | & | & | \\ \diagdown & / & | \\ & 1 & \\ | & & \\ \diagdown & / & \\ & d & \end{array}$$

Figura 2.9: F-matriz para anyones de Fibonacci, imagen tomada de [10].

donde  $a, b, c, d$  e  $i$  pueden tener valores de 0 o 1. Si el diagrama de fusión desobedece las reglas de fusión Ec. (2.1), entonces el coeficiente  $F$  correspondiente es cero. Esto reduce la figura anterior 2.3.1.1 a un solo término en el lado derecho. Para este modelo, los únicos coeficientes  $F$  que no pueden resolverse trivialmente son los correspondientes a los casos donde  $(abcd) = (1111)$ .

Matemáticamente, la relación del pentágono para anyones de Fibonacci da la ecuación

$$F(11c1)_a^d F(a111)_b^c = \sum_{e=\{0,1\}} F(111d)_e^c F(1e11)_b^d F(111b)_a^e. \quad (2.2)$$

Usando esto, los resultados triviales y la restricción de que el movimiento  $F$  debe ser una operación unitaria, los coeficientes  $F$  restantes son

$$\begin{aligned}
F(1111)_0^0 &= 1/\phi, \\
F(1111)_0^1 &= F(1111)_1^0 = 1/\sqrt{\phi}, \\
F(1111)_0^2 &= -1/\phi,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

donde  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  es la proporción áurea [16]. Estos coeficientes pueden ser expresados en una matriz de la forma

$$F(1111) = \begin{pmatrix} \phi^{-1} & \phi^{-1/2} \\ \phi^{-1/2} & -\phi^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Esta matriz es útil para el caso de tres anyones, cuando se consideran más anyones es más práctico trabajar con los coeficientes.

Para anyones de Fibonacci en lo que respecta a movimientos R, los únicos R-coeficientes que no pueden resolverse de manera trivial son aquellos donde  $ab = 11$ . Estos valores se pueden encontrar mediante la teoría cuántica de campos topológica y relación hexagonal [17]. Los R-coeficientes son los siguientes

$$\begin{aligned}
R_0^{11} &= e^{-i4\pi/5}, \\
R_1^{11} &= e^{-i3\pi/5}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Entonces la R-matriz se vería de la forma

$$R^{11} = \begin{pmatrix} R_0^{11} & 0 \\ o & R_1^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i4\pi/5} & 0 \\ o & -e^{i3\pi/5} \end{pmatrix}.$$

Este tipo de anyones no abelianos están presentes en algunos estados de llenado del efecto Hall cuántico fraccionario [10].

### 2.3.1.2. Anyones de Yang-Lee

Estos anyones obedecen la misma regla de fusión que los anyones de Fibonacci. Como vimos arriba, la  $F$ -matriz de los anyones de Fibonacci está dada por la proporción

área, solución a la ecuación  $x^2 = 1 + x$  que es análogamente algebraica a su regla de fusión. Su  $R$ -matriz es

$$R = \begin{pmatrix} R_1^{\tau\tau} & 0 \\ o & R_\tau^{\tau\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i2\pi/5} & 0 \\ o & e^{i\pi/5} \end{pmatrix}.$$

La  $F$ -matriz para los anyones de Yang-Lee se obtiene reemplazando  $\phi \rightarrow -1/\phi$ , donde  $-1/\phi$  es la otra solución de la ecuación  $x^2 = 1 + x$ . Entonces, la  $F$ -matriz de Fibonacci es

$$F_{\tau\tau\tau}^{\tau} = \begin{pmatrix} -\phi & i\sqrt{\phi} \\ i\sqrt{\phi} & \phi \end{pmatrix}.$$

### 2.3.1.3. Anyones de Ising

Este modelo de anyones consiste en tres elementos principales, el vacío 1, anyones de Ising  $\sigma$  y campos complejos de fermiones de Dirac  $\psi$  que siguen las siguientes reglas de fusión

$$\sigma \otimes \sigma = 1 \oplus \psi, \sigma \otimes \psi = \sigma, \psi \otimes \psi = 1, 1 \otimes x = x,$$

donde  $x \in \{1, \sigma, \psi\}$ . La  $R$ -matriz y la  $F$ -matriz están dadas por

$$R = \begin{pmatrix} R_1^{\sigma\sigma} & 0 \\ o & R_\psi^{\sigma\sigma} \end{pmatrix} = e^{-i\pi/8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$F_{\sigma\sigma\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.2. Grupo de trenzas.

Ahora veamos con detalle el grupo matemático que está asociado con el intercambio de partículas en dos dimensiones, el grupo de trenzas. El grupo  $B_N$  o grupo de trenzado de  $N$  cuerdas es un grupo infinito que tiene  $N - 1$  generadores denotados por  $\sigma_i$ , donde  $1 \leq i \leq N - 1$ . Para representar correctamente un elemento de este grupo, es decir, una trenza, debemos trazar la posición sobre el eje horizontal, el tiempo a lo largo del eje

vertical y graficar la trayectoria de la partícula a medida que se mueve adiabáticamente entre los sitios.

Las trenzas solo pueden avanzar con el tiempo y no pueden intersectarse dos de ellas. Sin embargo, pueden cruzarse entre sí, lo que corresponde a un intercambio de partículas, aunque cada trenza solo puede intercambiarse con una trenza en un sitio adyacente.

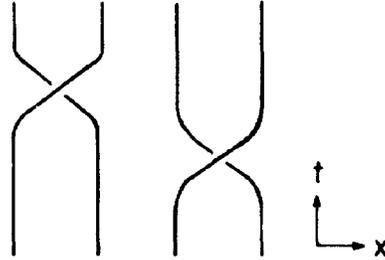


Figura 2.10: Ejemplo de una trenza, imagen tomada de [4].

Por otro lado, consideremos un sistema de  $n$  partículas que siguen estadísticas fraccionarias cuyas posiciones respecto al centro de masa son  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}^2$ , este es descrito por la función de onda  $\psi(r_1, \dots, r_n)$  y suponemos una permutación  $P$  arbitraria de modo que las partículas tengan las posiciones finales  $\psi(r_{P(1)}, \dots, r_{P(n)})$ . Solo podemos realizar este intercambio con las partículas numéricamente adyacentes, cada uno de los cuales puede ser un intercambio en el sentido antihorario o en sentido horario.

Entonces, definimos el generador  $\sigma_i$  que corresponde al trenzado de la  $i$ -ésima cuerda alrededor de la  $(i+1)$ -ésima en sentido antihorario, ver figura 2.11. También definimos la inversa  $\sigma_i^{-1}$  como un trenzado en sentido horario, ver figura 2.12.

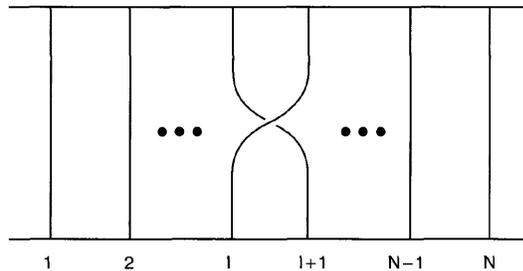


Figura 2.11: Representación gráfica de  $\sigma_i$ , imagen tomada de [4].

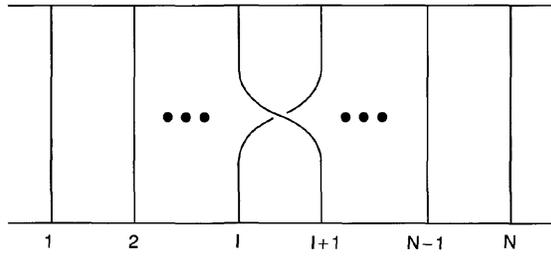


Figura 2.12: Representación gráfica de  $\sigma_i^{-1}$ , imagen tomada de [4].

Los generadores  $\sigma_i$  satisfacen las dos relaciones que determinan las posibles representaciones unidimensionales del grupo de trenzado, llamadas relaciones de Artin [18]. Las relaciones y sus representaciones son las siguientes.

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{para} \quad |i - j| \geq 2 \quad (2.6)$$

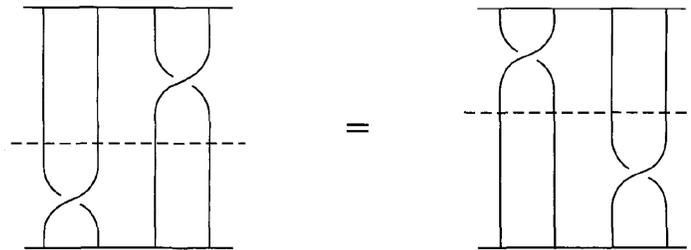


Figura 2.13: Primera relación de Artin, ecuación (2.6), imagen tomada de [4].

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, N - 2 \quad (2.7)$$

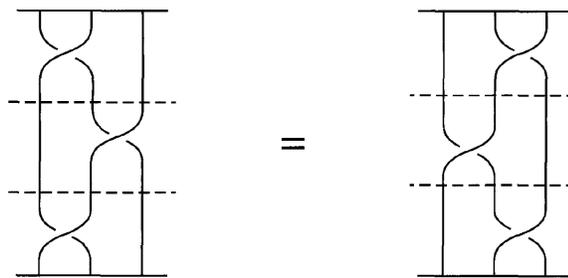


Figura 2.14: Segunda relación de Artin o Yang-Baxter, ecuación (2.7), imagen tomada de [4].

En tres dimensiones la construcción es parecida, pero con la constricción adicional que  $\sigma_i^2 = 1$ , lo que reduce el grupo de trenzado  $B_N$  al grupo de permutación  $S_N$ . Ahora es más claro que  $S_N$  sea un subgrupo de  $B_N$ . Quiere decir que la ausencia de la relación  $\sigma_i^2 = 1$  permite las estadísticas fraccionarias.

Ahora, de acuerdo a como definimos los generadores, un cruce se llamara antihorario si la partícula en la posición  $i$  cruza sobre la partícula en la posición  $i + 1$  y decimos que un cruce en sentido horario si la partícula en la posición  $i$  cruza por debajo de la partícula en la posición  $i+1$ , estos cruces corresponden a intercambios. La multiplicación de dos trenzas se define como recorrer caminos por sucesión, es decir “apilamos” los caminos, si el primer diagrama termina en el momento  $t_1$ , entonces el segundo diagrama seguirá en este momento  $t_1$ . Se dice que dos diagramas de trenza son equivalentes si las cuerdas de uno se pueden deformar continuamente en las cuerdas del otro sin intersectar dos cuerdas. Dicho de otra manera, que dos caminos de intercambio de partículas son iguales si son topológicamente equivalentes entre sí [19].

También se define la multiplicación de dos elementos del grupo como seguir una trayectoria por otra en el tiempo

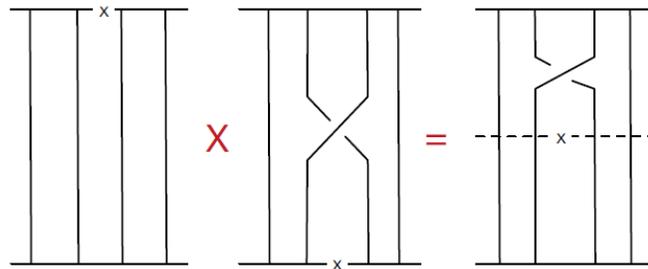


Figura 2.15: Multiplicación de trenzas, imagen tomada de [14].

Con esto es fácil ver que también existe el elemento identidad  $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_0$  que equivale al no intercambio

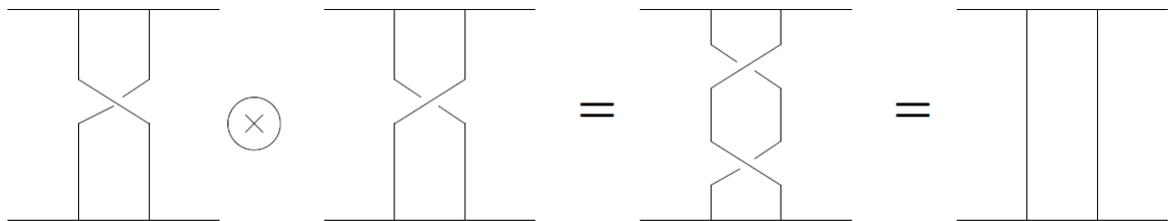


Figura 2.16: Representación gráfica de  $\sigma_0$ , imagen tomada de [14].

Como ejemplo, para ilustrar más la diferencia que hay entre hacer intercambios o no, consideremos dos partículas a las que etiquetamos con los números 1 y 2 en las dos configuraciones de la figura 2.3.2.

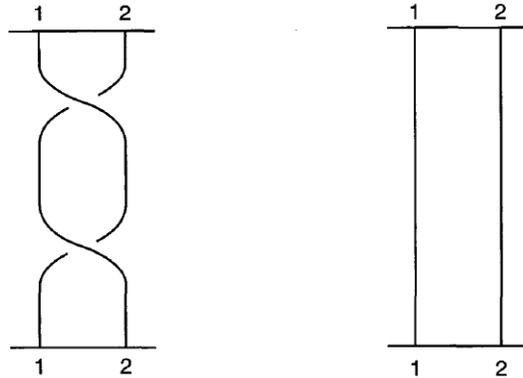


Figura 2.17: Dos elementos diferentes de  $B_N$ , imagen tomada de [4].

Como se puede observar en el dibujo, los puntos iniciales y finales de las partículas son los mismos, por lo que aunque se halla hecho dos permutaciones  $\sigma_i^{-1}$  en el dibujo de la izquierda, en lo que respecta al grupo de permutación, ambos pertenecen a la representación de la identidad y, por lo tanto, el grupo de permutación  $S_N$  no puede distinguirlos. Sin embargo, las dos trayectorias son elementos distintos del grupo trenzado  $B_N$ , el primer dibujo sería el elemento  $\sigma_i^{-1}\sigma_i^{-1}$  y el segundo el elemento  $\sigma_0$ .

## Capítulo 3

# El Efecto Hall y sus tres presentaciones.

En 1879, el físico estadounidense Edwin H. Hall, mientras se encontraba realizando su tesis doctoral en la Universidad de Johns Hopkins en Baltimore, Estados Unidos, realizó el descubrimiento del fenómeno electromagnético nombrado en su honor, el efecto Hall [20]. Tiempo después, en 1980, en una noche a principios del mes de febrero, en el laboratorio de Campo Magnético Intenso de Grenoble, Francia, el físico alemán Klaus von Klitzing descubrió una de las manifestaciones cuánticas del efecto Hall, el efecto Hall cuántico entero [21]. Gracias al descubrimiento de este efecto cuántico, en 1985 von Klitzing recibió el premio Nobel de Física y el 20 de mayo de 2019, Día Mundial de la Metrología, fue invitado por la Fundación Ramón Areces y la Real Sociedad Española de Física a explicar el alcance de sus investigaciones. Durante su intervención, reclamó un mayor apoyo a la ciencia básica y puso como ejemplo que el descubrimiento del efecto de Hall cuántico fue un "hallazgo totalmente inesperado" [20].

Como última presentación, el efecto Hall regresó en 1982 con una simple, pero significativa alteración que describiremos más adelante. Este nuevo fenómeno se llamó efecto Hall cuántico fraccionario. Fue descubierto por Daniel C. Tsui de la Universidad de Columbia y Horst Störmer de la Universidad de Princeton, en muestras de gran pureza de arseniuro de galio, donde los electrones pueden moverse grandes distancias sin a penas dispersión por las impurezas; muestras preparadas por Arthur Stone Gossard cuando todos ellos investigaban en los Laboratorios Bell en Murray Hill, New Jersey, Estados

Unidos [22, 23]. Gracias al descubrimiento de este efecto y al desarrollo teórico hecho, Laughlin, Störmer y Tsui compartieron el premio Nobel de Física en 1998 [20]. En este capítulo daremos un repaso de lo realizado por los ya mencionados.

### 3.1. Efecto Hall Clásico.

El efecto Hall clásico estudia el comportamiento de la conducción eléctrica en los materiales conductores y semiconductores, analizando una lámina rectangular delgada a la cual se le induce una corriente paralela al lado más largo de esta. A su vez, interactúa con un campo magnético que incide de manera perpendicular al plano de la muestra, creando un exceso de carga en los bordes (de acuerdo con la ley de Lorentz) y generando así una diferencia de potencial. Normalmente, la diferencia es proporcional al campo magnético aplicado. Esto es conocido como el efecto Hall. Este efecto permite caracterizar materiales conductores o semiconductores en términos de conducción eléctrica, ya que se puede relacionar la corriente y el campo magnético, con la nueva diferencia de potencial. Además, el voltaje es proporcional a la densidad de portadores carga, lo que permite medir las densidades de carga. Cabe señalar que, el experimento es montado a temperatura ambiente y con campos magnéticos de alrededor de 1 Tesla.

Ahora, de manera detallada, el experimento consiste en construir un sistema en donde a través de la placa de largo  $L$  y ancho  $w$ , de algún material conductor o semiconductor, hacemos circular una corriente  $I$  constante en dirección  $x$ . Al mismo tiempo la sometemos a un campo magnético  $B_z$ , que incide perpendicular a su superficie.

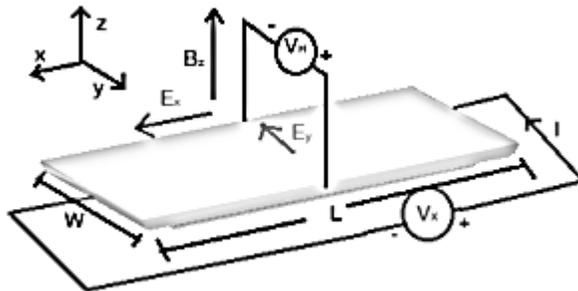


Figura 3.1: Experimento del Efecto Hall Clásico.

Asumiendo que las cargas  $q$  en movimiento son negativas, es decir  $q = -e$ , de manera

general la fuerza de Lorentz se ve como:

$$\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.1)$$

Por su parte, las cargas experimentan una fuerza magnética  $\mathbf{F}_m = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  que va en dirección y sentido del eje- $y$  negativo. La fuerza  $F_m$  desplaza las cargas hacia un borde de la placa, lo cual provoca una diferencia de potencial ( $V_H$  en la figura) en el eje- $y$ , conocido como voltaje Hall y su consiguiente campo eléctrico en la misma dirección que la fuerza magnética.

Como consecuencia de su existencia, el campo eléctrico ejerce sobre las cargas una fuerza eléctrica  $\mathbf{F}_e = -e\mathbf{E}$  que se opone a la fuerza magnética. El sistema evoluciona hasta que la fuerza de Lorentz se anula y se llega al equilibrio entre las fuerzas eléctrica y magnética, esto es:

$$e\mathbf{E} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.2)$$

Entonces el valor del campo eléctrico es dado por  $eE_y = ev_x B_z$ . [24] Multiplicando la última expresión por el número de portadores de carga  $n$ , considerando solo magnitudes, se obtiene:

$$neE = nevB = jB \quad (3.3)$$

con  $j = nev$  la densidad de corriente [20]. Ahora multiplicando por el ancho  $w$  de la muestra

$$neEw = jBw. \quad (3.4)$$

Podemos expresar el voltaje de Hall de la forma  $V_H = Ew$  y la corriente se puede ver como  $I = jw$ , sustituyendo esto tenemos

$$neV_H = IB \quad (3.5)$$

Por otro lado, la ley de Ohm implica que la corriente a través de una resistencia es

proporcional al voltaje aplicado y su representación matemática más simple tiene la forma  $I = V/R$ .

Entonces definimos las resistencias longitudinal y de Hall como  $R_L \equiv V_L/I$  y  $R_H \equiv V_H/I$ . Usando esto tenemos:

$$R_H = \frac{B}{ne}. \quad (3.6)$$

Esto relaciona la densidad de los portadores de carga o número de portadores por unidad de área  $n$  y el signo de la carga con la intensidad del campo magnético. Vemos que este resultado depende solamente del campo magnético y de la densidad de portadores, por lo que es independiente de los aspectos geométricos de la muestra y de su tipo. Sin embargo, hay características geométricas del experimento que hay que considerar, tales como la relación existente entre las componentes longitudinales y transversales de resistividad y el campo eléctrico. Dichas relaciones requieren el uso de tensores y se debe tomar en cuenta el sistema de referencia.

La ley de Ohm en su forma más fundamental es:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.7)$$

donde  $\sigma$  es la constante de proporcionalidad llamada conductividad, y no es un número, sino una matriz debido a que está en presencia de un campo magnético [25]. Esta matriz tiene componentes diagonales idénticas e iguales, pero opuestas en signo fuera de la diagonal, es decir, tiene la siguiente estructura

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

En el caso ideal en la que las cargas no colisionan entre sí y tampoco lo hacen contra impurezas, tenemos que  $\sigma_{xx} = 0$ , esto no es así en caso contrario. Ahora bien, sabemos que los electrones en este modelo cumplen con la siguiente relación  $e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e\mathbf{E}$ , si tomamos en cuenta que la corriente se puede ver como  $\mathbf{J} = ne\mathbf{v}$  entonces

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -ne\mathbf{E} \quad (3.9)$$

podemos entonces identificar las componentes del tensor de conductividad  $\sigma$  [26, 27].

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{ne}{B} \\ -\frac{ne}{B} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

La resistividad se define como la inversa de la conductividad. Esto sigue siendo cierto cuando ambas son matrices, entonces

$$\rho = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{B}{ne} \\ \frac{B}{ne} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Normalmente, la resistencia  $R$  difiere de la resistividad  $\rho$  por factores geométricos. Sin embargo, para  $\rho_{xy}$ , esto no es así. Vemos que  $\rho_{xy} = B/ne$ , por lo tanto, podemos decir que la resistividad y la resistencia de Hall están definidas de la misma manera.

Como último punto a tratar en esta sección. Analizamos la gráfica de las resistividades transversal  $\rho_{xy}$  y longitudinal  $\rho_{xx}$  contra la intensidad del campo magnético.

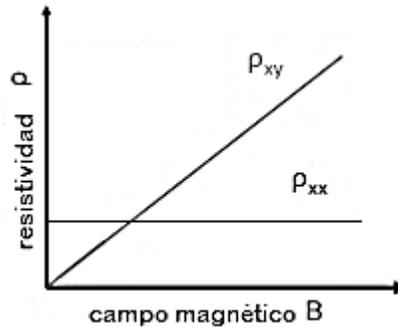


Figura 3.2: Gráfica obtenida del efecto Hall clásico, imagen tomada de [26].

Se puede ver claramente como  $\rho_{xy}$ , que es la resistencia de Hall, crece linealmente con respecto a  $B$ . En cambio, la resistencia longitudinal  $\rho_{xx}$  no depende de  $B$ , depende de la geometría del sistema. Se debe mencionar también que la aplicación más importante del efecto Hall clásico es la determinación del signo y densidad de los portadores de carga, así como la de obtener medidas de magnetización en diferentes materiales [27].

## 3.2. Efecto Hall Cuántico Entero.

El efecto Hall cuántico entero se realizó en interfaces de Silicio ( $Si$ ) y compuestos de Silicio ( $SiO_2$ ) (suplantando la lámina delgada de material conductor o semiconductor), en un arreglo donde se establecen capas finas tal que el movimiento de los electrones en la tercera dimensión está restringido, teniendo así un sistema preciso de dos dimensiones [21]. No solo se cambió el medio en el que los electrones se transportan, también se llevó a cabo en condiciones más extremas, usando campos magnéticos de mayor magnitud a los del efecto clásico (mayores a 10 Teslas) y al mismo se trabajaba a temperaturas muy bajas, aproximadamente a la temperatura del helio líquido ( $4,2K$ ). Al analizar la gráfica resultante del campo magnético  $B$  contra la resistencia  $R_H$ , se encontró que la resistencia de Hall ya no varía linealmente con la intensidad de  $B$  como pasa en su antecesor clásico, sino que ahora depende de constantes universales tales como la carga del electrón y la constante de Planck; haciendo que presenten una serie de mesetas o escalones con un valor de  $R_H = h/ne^2$  (con  $n$  entero) en cada salto, valor que claramente es independiente de  $B$  por lo que no hace falta conocerlo con exactitud y que tampoco depende de las características físicas del material, tales como la forma o tamaño de la muestra.[20]. También pueden formarse estos sistemas aproximadamente bidimensionales en la superficie de separación entre los semiconductores arseniuro de galio (AsGa) y arseniuro de galio aluminio (AsGaAl) [23].

En general, lo que sucede en el efecto Hall cuántico es que el campo magnético produce una cuantización en la energía cinética de las cargas eléctricas, esto es, cuantiza su movimiento. Clásicamente, las cargas se mueven en órbitas circulares perpendiculares al flujo del campo. En este caso sucede que existen valores cuantizados del radio de las órbitas, estos valores corresponden a niveles discretos de energía, conocidos como niveles de Landau. Cada uno de estos niveles puede albergar electrones por unidad de área con la misma energía y están separados por brechas de energía de ciclotrón proporcionales a la intensidad del campo magnético  $B$ , y solo se manifiestan en capas bidimensionales de electrones [23].

Este efecto puede comprenderse al considerar que los electrones no interaccionan entre sí y que además se encuentran bajo la acción de un potencial aleatorio [20]. Es decir, puede explicarse teniendo en cuenta solo el comportamiento individual cuántico de los electrones (considerar los electrones libres) bidimensionales en campos magnéticos. Este arreglo físico ya ha sido descrito en términos de la mecánica cuántica del oscilador

armónico por el físico Lev Landau, quien formulo los mencionados niveles de Landau, los cuales describen íntegramente el efecto Hall cuántico entero [22].

Consideramos el hamiltoniano que describe un electrón  $e$  confinado en un espacio de dos dimensiones, digamos el plano  $x - y$ , y que también está sometido a un campo magnético  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  perpendicular al plano. Se tiene entonces

$$H = \frac{1}{2m_e}(\vec{p} + e\vec{A})^2 \quad (3.12)$$

donde  $\vec{p}$  es el momento canónico y  $\vec{A}$  un potencial cualquiera.

Por simplicidad elegimos la norma de Landau  $\vec{A} = Bx\hat{y}$ . Con esta norma el hamiltoniano pasa a ser

$$H = \frac{p_x^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e}(p_y + eBx)^2.$$

Debido a nuestra elección del campo de norma, el operador  $y$  no está presente, entonces el operador  $p_y$  conmuta con este hamiltoniano y puede ser reemplazado por su eigenvalor  $\hbar k_y = \hbar k$

$$H = \frac{p_x^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e}(\hbar k + eBx)^2.$$

Usando la frecuencia de ciclotrón  $\omega_B = eB/m_e$  y la longitud magnética,  $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$ , la cual funge como radio mínimo para las órbitas ciclotrónicas. Llegamos a

$$H = \frac{p_x^2}{2m_e} + \frac{1}{2}m_e\omega_B^2(x + kl_B^2)^2.$$

Que no es más que el hamiltoniano para el oscilador armónico, con la excepción de que su mínimo potencial está desplazado por  $kl_B^2$ . Desplazar el potencial no afecta las energías, por lo que este hamiltoniano posee los mismos eigenestados que un oscilador armónico estándar, que son

$$E_n = \hbar\omega_B(n + \frac{1}{2}) \quad (3.13)$$

donde  $\omega_B$  es la frecuencia de ciclotrón de las órbitas clásicas usada arriba y el número cuántico  $n = 1, 2, 3, \dots$ , se encarga de determinar la energía del estado. Hemos encontra-

do niveles de energía de una partícula en presencia de un campo magnético igualmente espaciados por una cantidad proporcional a dicho campo. Estos niveles de energía son conocidos como los niveles de Landau [28].

Las funciones de onda  $\psi_0$  en el nivel de Landau cero pueden ser descritas por los estados base

$$\psi_m = \sqrt{N_m} z^m e^{-|z|^2/4l_B^2},$$

que tiene forma de anillo. La posición del máximo de  $|\psi_m|$  es a  $|z| = r_m = \sqrt{2m}l_B$ . Es decir que el anillo del  $m$ -ésimo estado tiene un área de  $\pi r_m^2 = 2\pi l_B^2 m$  y encierra  $m$  cuantos de flujo. Por lo tanto, hay un estado para cada cuanto de flujo, y el número

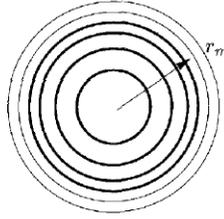


Figura 3.3: Radios, imagen tomada de [29].

de estados en el nivel cero de Landau es igual al número de cuantos de flujo. Entonces, cuando  $\nu = 1$ , cada estado en el nivel cero de Landau está ocupado por un electrón. Esto nos da una brecha finita  $\Delta = \hbar\omega_c$  para las excitaciones. La incompresibilidad se debe al principio de exclusión de Pauli. Cada electrón ocupa la misma área  $\pi r_{m+1}^2 - \pi r_m^2 = 2\pi l_B^2$  [29].

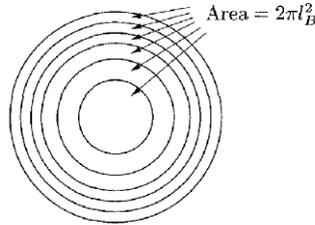


Figura 3.4: Niveles de Landau, imagen tomada de [29].

Como vemos en la ecuación (3.13) los niveles de Landau están etiquetados con el número  $n$  y cada uno de ellos está degenerado en energía, esto quiere decir que en un mismo

nivel de energía se tiene más de un estado asociado; dicho de otra manera, los niveles pueden albergar muchos electrones por unidad de área de la muestra, todos ellos con la misma energía. Sin embargo, debido a la naturaleza fermiónica de los electrones y a la existencia de un radio mínimo, los electrones no pueden “amontonarse” todos en un mismo nivel. A esta situación es posible asociarle una cantidad llamada degeneración de Landau. Tratamos a los estados de Landau como discos de área  $2\pi l_B^2$ , entonces la degeneración de cada nivel de Landau es:

$$N_L = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{eB}{h} \quad (3.14)$$

esta cantidad se define como el número de estados en un nivel por unidad de área de muestra, también llamada densidad de Landau.

Cuando la densidad de Landau  $N_L$  tiene el mismo valor que la densidad electrónica  $N_e$  (número de electrones por unidad de área) y el campo alcanza un valor  $B_1$ , es decir  $N_L = eB_1/h = N_e$ , el nivel más bajo de energía de Landau etiquetado con  $n = 0$  se llena totalmente. Para pasar al siguiente nivel  $n = 1$  hay que hacer un gasto de energía finito  $\Delta = \hbar\omega_c$ . Al tener una densidad  $N_L$  que es la mitad de la densidad  $N_e$  y un campo  $B_2$ , o sea  $N_L = eB_2/h = N_e/2$ , el segundo nivel de Landau estará completamente lleno. En general, podríamos decir que para cuando el campo magnético alcanza un valor de

$$B_i = \frac{N_e h}{ei} = \frac{N_e}{i} \Phi_0 \quad (3.15)$$

siendo  $i$  un número entero y  $\Phi_0 = h/e$  es conocido como el cuánta de flujo magnético, el  $i$ -ésimo nivel de Landau esta completamente lleno. Los cuántos de flujo magnético están asociados al campo magnético, ya que de la misma forma en que una densidad uniforme de carga es el resultado de muchos electrones, un campo magnético proviene de un conjunto discreto de cuántos.

Podemos definir el factor de llenado o de ocupación de los niveles de Landau como:

$$i = \frac{N_e h}{eB_i} \longrightarrow \nu = \frac{N_e}{N_L}. \quad (3.16)$$

Esta cantidad refleja cuantos niveles están ocupados, de modo que un valor entero de  $\nu$  corresponde a un llenado completo de los  $\nu$  primeros niveles y los niveles superiores

vacíos. Debido a que  $\nu$  se mide como un número entero con una precisión tan notable, el efecto Hall cuántico entero ahora se usa como base para medir la relación de constantes fundamentales, a veces denominado constante de Von Klitzing [26].

Ahora, si en la ecuación clásica para la resistencia de Hall  $R_H = B/en$ , con  $n = N_e$ , sustituimos el valor de  $B$  en función de la densidad de Landau  $N_L$  y hacemos uso del factor de llenado, obtenemos:

$$R_H = \frac{B}{eN_e} = \frac{hN_L}{e} \frac{1}{eN_e} = \frac{h}{e^2} \frac{N_L}{N_e} = \frac{h}{e^2\nu}. \quad (3.17)$$

Estos son los valores que toma  $R_H$  en las inesperadas mesetas, las cuales ocurren en el rango de  $B$  donde  $\nu \approx i$ , mostradas en la figura 3.5 que resulta de graficar la resistencia Hall  $R_H$  y la resistencia longitudinal  $R_L$  contra la intensidad del campo  $B$ , y como tal, es una ecuación que describe íntegramente el efecto Hall cuántico entero [22]. Cuando  $\nu = i$  un entero, el estado fundamental es simple, esto quiere decir que  $N$  electrones ocupan las  $N$  órbitas de partículas individuales de los  $n$  niveles más bajos de Landau. Esta cantidad mostrada en la ecuación (3.17) se llama cuanto de resistividad y se utiliza como estándar para medir la resistividad. Podemos decir también que la cuantización de  $R_H$  es una propiedad universal de un sistema macroscópico completamente independiente de los materiales, tipo de muestra o de su geometría, también es resistente a variaciones temporales y a niveles de desorden lo suficientemente pequeños.[25]

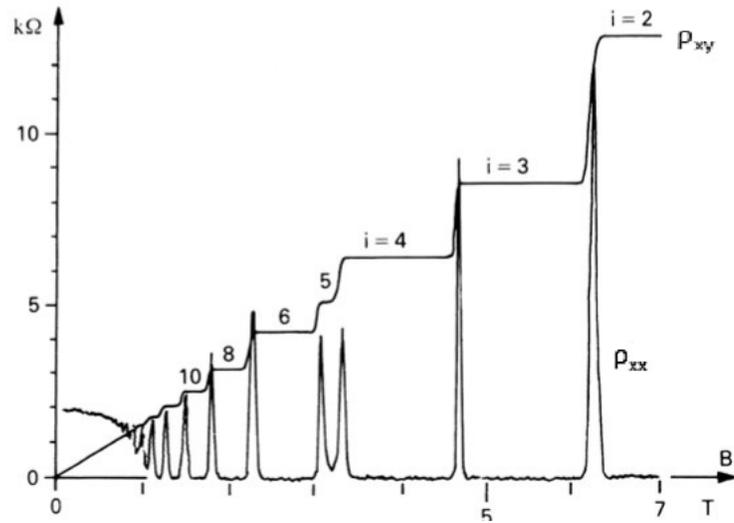


Figura 3.5: Gráfica obtenida del efecto Hall cuántico entero, imagen tomada de [23].

Algo más que resaltar de la gráfica es que para los valores de campo magnético que describan una meseta,  $R_L$  se desvanece, ya que la resistencia se anula cuando los electrones no pueden ser dispersados a otros niveles de energía y se dispara solo cuando  $R_H$  salta a la siguiente meseta. Esto quiere decir que las variaciones en la intensidad respecto al valor de  $B_i$  harán variar el número de electrones atrapados, pero no el de los niveles de Landau ocupados.

Por lo general, pensaríamos en un sistema con  $R_L = \rho_{xx} = 0$  como un conductor perfecto. Pero hay algo un poco contrario a la intuición acerca de la desaparición de esta resistividad en presencia de un campo magnético. Para ver esto, podemos usar la ecuación (3.11) que, en componentes, nos dice

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \quad y \quad \sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}. \quad (3.18)$$

Si  $\rho_{xy} = 0$  entonces obtenemos la relación familiar entre conductividad y resistividad  $\sigma_{xx} = 1/\rho_{xx}$ . Pero sí  $\rho_{xy} \neq 0$ , entonces tenemos una relación más interesante. Vemos que si

$$\rho_{xx} = 0 \quad \implies \quad \sigma_{xx} = 0 \quad (\rho_{xy} \neq 0). \quad (3.19)$$

Normalmente, a un sistema con  $\rho_{xx} = 0$  se llamaría un conductor perfecto y generalmente llamaríamos a un sistema con  $\sigma_{xx} = 0$  un aislante perfecto.

Esta particular sorpresa tiene más que ver con las palabras que usamos para describir los fenómenos que con la física subyacente. En particular, no tiene nada que ver con la mecánica cuántica. En esta situación, la corriente fluye perpendicular al campo eléctrico aplicado, por lo que  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0$ . Pero  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$  se interpreta como el trabajo realizado al acelerar las cargas. El hecho de que esto desaparezca significa que tenemos una corriente constante que fluye sin realizar ningún trabajo y, en consecuencia, sin ninguna disipación. El hecho de que  $\sigma_{xx} = 0$  nos dice que no fluye corriente en la dirección longitudinal (como un aislante) mientras que el hecho de que  $\rho_{xx} = 0$  nos dice que no hay disipación de energía (como en un conductor perfecto).

Hay una pista en los datos experimentales sobre el origen de las mesetas. Los sistemas experimentales suelen estar sucios, llenos de impurezas. El nombre técnico para esto

es desorden. Por lo general, uno quiere eliminar esta suciedad para llegar a la física subyacente. Sin embargo, en el efecto Hall cuántico, a medida que aumenta la cantidad de desorden (dentro de lo razonable), las mesetas se vuelven más prominentes, no menos. De hecho, en ausencia de desorden, se espera que las mesetas desaparezcan por completo [26]. Así pues, nos enfrentamos a un hecho paradójico: la existencia de las mesetas en la curva de  $R_H$  es debida a las imperfecciones presentes en el material, mientras que su valor en dichas mesetas es una constante universal independiente de las características del material [23].

### 3.3. Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

El efecto Hall cuántico fraccional tiene la particularidad de que el factor de llenado  $\nu$  en la expresión de  $R_H$  que describe las mesetas ya no es un valor entero positivo, sino que ahora es un valor fraccionario. Además, las interacciones electrón-electrón son importantes y se requiere de una muestra libre de impurezas. Resulta que para estos nuevos valores fraccionarios del factor de llenado  $\nu$ , la resistencia de Hall muestra nuevos comportamientos inusuales e interesantes. Debido a las características ya mencionadas, el experimento debe hacerse en condiciones con temperaturas inferiores a  $1K$ , temperaturas aún más bajas que en el efecto Hall cuántico entero, y utilizar campos magnéticos mucho más intensos que podían ser de hasta  $30T$ .

Al momento de su descubrimiento, lo que se encontró fueron mesetas cuyas condensaciones se daban en un inesperado factor de llenado fraccionario  $\nu = 1/3$ . Es decir que el valor para la resistencia de Hall para esa meseta era de:

$$R_H = \frac{h}{e^2/3}. \quad (3.20)$$

Esta resistencia de Hall se da cuando el nivel más bajo de Landau está aproximadamente  $1/3$  lleno, es decir, como se mencionó antes  $\nu \approx 1/3$ . Este nuevo valor de condensación dio indicios de la existencia de estados electrónicos cuya carga eléctrica es fraccionaria. Entonces, para comprender este fenómeno hace falta un mecanismo que seleccione fracciones de llenado racional de la densidad electrónica del nivel de Landau.

Intuitivamente, la teoría establecida por Landau no sería capaz de describir este nuevo fenómeno, ya que el valor de llenado fraccional encontrado no presenta nada verda-

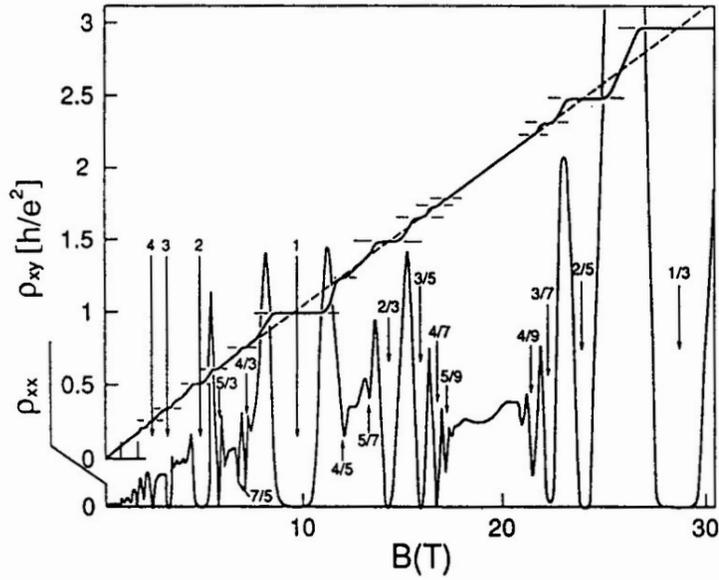


Figura 3.6: Gráfica obtenida del efecto Hall cuántico fraccionario, imagen tomada de [23].

deramente relevante y tampoco hay razón alguna de que deba existir una brecha a  $\nu$  fraccionario. Y es que el experimento sugiere que el efecto Hall cuántico fraccionario se da cuando el número de electrones es menor que el número de estados cuánticos posibles en el menor valor de energía del nivel de Landau [20]. Todo esto ocurre en un régimen de campo magnético intenso en sistemas para los cuales la interacción electrón-electrón no puede ser despreciada. Es decir que la diferencia sustancial entre el efecto entero y el fraccionario es que el segundo no puede ser explicado sin tomar en cuenta la interacción coulombiana entre electrones. Por lo que un modelo capaz de abordar el efecto Hall cuántico fraccionario de manera adecuada debía tener en cuenta la repulsión coulombiana entre los electrones, las posibles interacciones con los iones de la red y también con los cuantos de flujo magnético. De modo que el Hamiltoniano que describe tal configuración vendría expresado de la siguiente manera:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_e} (p_i - eA_i)^2 + V(r_i) + \sum_{i<j} \frac{e^2}{|r_i - r_j|} \quad (3.21)$$

donde él  $V(\mathbf{r}_i)$  es el potencial generado por el resto de los iones de la red. En el momento del surgimiento de este razonamiento, el Hamiltoniano construido no era posible de

resolver y aun en nuestros tiempos con computadoras tampoco se puede hallar una solución analítica salvo para un número pequeño de electrones.

### 3.3.1. Función de onda de Laughlin

Fue un año después del descubrimiento, en 1983, que el físico Robert B. Laughlin explico este efecto a través de una función de onda variacional para el estado fundamental del Hamiltoniano (3.21) que combina estadística fermiónica y la analiticidad de la función de onda del nivel más bajo de Landau, esto mantiene a los electrones aparte. Esta separación baja la energía de coulomb y da a la función de onda una gran coincidencia con el estado fundamental.

Para construir esta ecuación de onda, Laughlin hizo las siguientes consideraciones:

- La energía se debe minimizar, entonces la función de onda debería construirse a partir de la función de onda de un único electrón en el nivel de Landau más bajo.
- Como los estados de una partícula son polinomiales en  $z$ , la función de onda estaría formada por los estados de una partícula. Así, el estado de muchas partículas también debía ser polinomial en  $z$ .
- La función de onda deberá ser un autoestado del momento angular total. Esta condición se satisface si el estado fundamental es no degenerado.
- Por último, la función de onda debería ser antisimétrica, los valores de  $m$  están limitados a enteros impares que sean consistentes con la ausencia de mesetas a factores de llenado  $\nu = 1/m$ , con  $m$  par [20].

Sin entrar en detalles, iremos construyendo la función de onda de Laughlin [26]. Para empezar, las funciones de onda de una sola partícula en el nivel más bajo de Landau tienen la forma

$$\psi_m \sim z^m e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

donde  $z = x - iy$  y el índice  $m$  etiqueta el momento angular. Ahora, si consideramos dos partículas interactuando en el nivel más bajo de Landau bajo cualquier potencial, los eigenestados de dos partículas deben tomar la forma

$$\psi \sim (z_1 + z_2)^M (z_1 - z_2)^m e^{-(|z_1|^2 + |z_2|^2)/4l_B^2}$$

donde  $M, m$  son enteros positivos, con  $m$  el momento angular relativo y  $M$  el momento angular del centro de masa. Aunque con argumentos similares a los anteriores no es posible determinar de manera única los eigenestados para más de dos partículas, si podemos decir que cualquier función de onda de nivel Landau más bajo debe tomar la forma

$$\psi(z_i) = f(z_i) \exp\left(-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2\right) \quad (3.22)$$

con  $f(z_i)$  alguna función analítica, la cual debe ser antisimétrica bajo intercambio de cualquier par de partículas. Laughlin propuso una función analítica con valor de

$$f(z_i) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m$$

Se debe encontrar un balance entre la propiedad de esta función que se desvanece cuando dos electrones se juntan y la característica del término exponencial en (3.22) de decaer a cero cuando los electrones se alejan del origen.

Finalmente, la función de onda de muchos cuerpos para el nivel más bajo de Landau es la siguiente:

$$\psi(z_i) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2\right) \quad (3.23)$$

en donde los  $z_i = (x_i - iy_i)/l_m$  son las coordenadas espaciales en dos dimensiones del  $i$ -ésimo electrón visto como un número complejo dividido por la longitud magnética y  $m$  debe ser elegido como un número impar entero para asegurar la antisimetría, la cual es una característica fermiónica de los electrones [22].

Consideremos la función analítica que propuso Laughlin para una partícula  $z_1$ . Entonces, los términos que dependen de  $z_1$  son

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \sim \prod_{i=2}^N (z_1 - z_j)^m$$

esto nos dice que existen  $m(N - 1)$  potencias de  $z_1$ , esto significa que el momento angular máximo de  $z_1$  es  $m(N - 1)$  y el radio máximo es  $R \approx \sqrt{2m(N - 1)}l_B$ . entonces el área que corresponde es  $A = \pi R^2 \approx 2\pi m(N - 1)l_B^2$ . Por lo que, para este caso, el número de estados en el nivel de Landau lleno es

$$N_L = \frac{A}{2\pi l_b^2} = m(N - 1)$$

por lo que el factor de llenado, para  $N$  muy grande, es

$$\nu = \frac{N}{N_L} = \frac{N}{m(N - 1)} \approx \frac{1}{m}.$$

En efecto, la ecuación (3.23) logra capturar la física de llenados fraccionarios  $\nu = 1/m$  [28].

Por su parte, el matemático Bertrand Halperin elaboró una interpretación de (3.23) que permiten entender las propiedades de las excitaciones generadas en el efecto. Dicha interpretación consiste en que la densidad de ceros presentes en la ecuación de onda debe ser igual a la densidad de cuantos elementales de flujo magnético en el campo magnético exterior. Un cuanto de flujo  $\phi_0$  es la mínima cantidad de flujo magnético transportada por un vórtice. Es posible demostrar que para  $\nu = 1/m$  se forma un estado ligado de un electrón y  $m$  cuantos de flujo, el cual se comporta de forma efectiva como un bosón. La función de onda de Laughlin describe el condensado de estos bosones y las excitaciones del estado de Laughlin se pueden ver como la creación de vórtices en este condensado [23].

Si uno toma la norma  $|\psi_m|^2$  de la función de onda (3.23), es posible establecer una analogía entre el efecto Hall cuántico fraccionario y un plasma clásico de electrones de carga  $m$  que se repelen con un potencial logarítmico y que están inmersos en un fondo de carga positiva de densidad  $1/2\pi l_m^2$ . La energía potencial del plasma se minimiza y es estable cuando  $m = 1/\nu$  [22]. En resumidas cuentas, la función de Laughlin es para el estado fundamental de un gas electrónico en dos dimensiones en un campo magnético uniforme en un medio ambiente uniforme, cuando el factor de llenado del nivel más bajo de Landau es un entero impar [21].

Por último, en este efecto los electrones se condensan en nuevos líquidos cuánticos que conducen a números cuánticos fraccionarios racionales y a portadores con carga

exactamente fraccionada. El estado descrito por la ecuación (3.23) es incompresible y las excitaciones que acá se producen tienen cargas fraccionarias con valor de  $e/m$ . Debido a esta propiedad de incompresibilidad, la existencia de mesetas para otros valores de  $\nu = p/q$  son explicadas gracias a una jerarquía de líquidos cuánticos incompresibles [22].

Se ha demostrado también que adicionalmente a la propiedad de tener cargas eléctricas fraccionarias, las excitaciones también exhiben estadística fraccionaria. El estado de Laughlin alberga excitaciones de cuasi-partículas del tipo de vórtices topológicos, tiene carga y estadística fraccionaria, la cual tiene la particularidad de oscilar entre bosones y fermiones. Estas nuevas cuasipartículas son conocidas también como “anyones” del inglés ‘cualquiera’, debido a su peculiar naturaleza, ya que no se comportan como bosones (partículas con espín entero) ni tampoco entran en la categoría de fermiones (partículas con espín medio entero), sino que oscilan entre esas dos estadísticas. Todo esto ha sido discutido en el capítulo 2. Estas propiedades surgen del movimiento fuertemente correlacionado de muchos electrones que interactúan con un campo externo, los cuales colaboran y crean estos extraños objetos [30].

# Capítulo 4

## El efecto Hall cuántico fraccionario y la teoría de norma de Chern-Simons.

Para los estados fundamentales degenerados de los líquidos del efecto Hall cuántico fraccionario es necesaria la teoría de Chern-Simons (C-S). En esta teoría se considera un campo de norma  $A_\mu$  como un parámetro que indica si estamos considerando un campo eléctrico o magnético. También describe perturbaciones alrededor de un único estado de Hall en específico que mantiene su estado cuántico, aunque se le aplique un campo eléctrico o se perturbe el campo magnético [26]. En este capítulo, se construirá un modelo para el efecto Hall cuántico fraccionario que involucra anyones abelianos.

### 4.1. Término de Chern-Simons

En un sistema con  $d = 2 + 1$  la teoría de campos topológicos requiere un campo de norma  $a_\mu$  del grupo unitario,  $U(1)$  este campo de norma surge del comportamiento colectivo de los electrones. La dinámica de un campo de norma se puede describir por la acción de Maxwell que está escrita como:

$$S_M = -\frac{1}{4g^2} \int d^3x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

donde  $g^2$  es una constante de acoplamiento y  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ . Esta acción de Maxwell sobre el grupo  $U(1)$  describe un único grado de libertad sin masa, que en este caso sería un campo sin masa.

Por otro lado, la conductancia de Hall puede existir en un espacio de dimensión  $d = 2+1$ , descrito por  $U(1)$ . Entonces, adaptando la teoría de Maxwell al problema del efecto Hall cuántico, se puede escribir un término con invariancia rotacional, definido como:

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\lambda\nu\sigma} a_\lambda \partial_\nu a_\sigma \quad (4.2)$$

donde  $k$  es denominado el nivel de término de C-S. Toda la ecuación es conocida como el término de Chern-Simons, y es una invariante de norma. Este término rompe con la invariancia de paridad y temporal, esto significa que la acción de Chern-Simons con  $k \neq 0$  solo puede existir en sistemas que rompan la paridad, y los sistemas con conductividad de Hall rompen la paridad, debido a la interacción con el campo magnético externo [26].

## 4.2. Teoría de Chern-Simons.

A través de la teoría de C-S podemos dar una descripción unificada del efecto Hall cuántico fraccionario, explotando un método de campo-teórico que introduce campos de vórtice para describir excitaciones, para ello seguiremos muy de cerca el procedimiento de [31].

El modelo se construye a partir de un lagrangiano para un campo bosónico cargado  $\psi$  y un campo de norma estadístico de C-S  $a_\lambda$  en la presencia de un campo electromagnético externo  $A_\lambda$

$$\mathcal{L} = \psi^* iD_0 \psi - \frac{1}{2m} |D_k \psi|^2 + \mu \psi^* \psi - \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} a_\lambda \partial_\nu a_\sigma. \quad (4.3)$$

donde los índices latinos corren sobre 1, 2 y los índices griegos sobre 0, 1, 2. La derivada covariante se define como  $iD_\lambda = i\partial_\lambda - eA_\lambda + a_\lambda$ . El potencial químico  $\mu$  es determinado por la densidad numérica  $\rho$  de partículas descritas por  $\psi$ , es decir,  $\langle \psi^* \psi \rangle = \rho$ .

Aquí el campo  $\psi$  tiene la estadística  $\alpha_\psi$  debido al término de C-S del campo estadístico  $a_\lambda$ . Entonces, retomando lo visto en el capítulo 1 luego de la ecuación (1.13), si elegimos

$\alpha_\psi = k\pi$  donde  $k$  es un entero impar, entonces  $\psi$  se comportará como un campo fermiónico. Esto hace que el lagrangiano sea útil para construir un modelo capaz de describir el efecto Hall cuántico fraccionario.

### 4.3. Estado de Laughlin

Existe una solución clásica, la cual describe un campo  $\psi$  que puede ser condensado bajo un campo magnético uniforme cuyo valor es  $B = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2$ , que es:

$$\psi = \sqrt{\rho}, \quad \mu = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_k = eA_k \quad (4.4)$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (4.3) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sqrt{\rho}(i\partial_0 - eA_0 + \not{a})\sqrt{\rho} - \frac{1}{2m}|(\partial_k + ieA_k - ia_k)\sqrt{\rho}|^2 + \mu\psi^*\psi \\ & - \frac{1}{4\alpha_\psi}e^2[A_0(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) - A_1(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) + A_2(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora calculamos la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange para el campo  $A_0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_0)} \right] = 0.$$

Por un lado,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = -e\rho - \frac{1}{4\alpha_\psi}e^2(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)$$

por otro lado,

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_0)} \right] = -\frac{1}{4\alpha_\psi}e^2(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2).$$

Restando ambos resultados

$$-e\rho - \frac{1}{4\alpha_\psi} e^2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + \frac{1}{4\alpha_\psi} e^2 (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) = 0$$

$$-e\rho + \frac{1}{2\alpha_\psi} e^2 (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) = 0$$

Entonces la solución (4.4) es válida solo cuando la siguiente relación se mantiene

$$\rho = \frac{e}{2\pi} \frac{\pi}{\alpha_\psi} B = \frac{e\nu^{(0)} B}{2\pi} \quad (4.6)$$

donde  $\nu^{(0)} = \pi/\alpha_\psi$ .

Por lo tanto, el factor de llenado es dado por

$$\nu^{(0)} = \nu \equiv 2\pi \frac{\rho}{eB}. \quad (4.7)$$

## 4.4. Teoría de campo de vórtices.

Existe una excitación de vórtice en la fase condensada de lo campo  $\psi$ . Correspondiente a una unidad de flujo estadístico, el comportamiento asintótico de la configuración del vórtice se ve:

$$\psi \simeq \sqrt{\rho} e^{i\theta}, \quad a_\lambda \simeq A_\lambda + \partial_\lambda \theta$$

y los demás campos configurados como en (4.2). Se tiene que

$$Q = \int d^2x \Delta \psi^* \psi = \frac{1}{2\alpha_\psi} \oint dx_j \partial_j \theta$$

donde

$$\oint dx_j \partial_j \theta = \oint dx_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \oint d\theta = 2\pi,$$

entonces este vórtice lleva la carga estadística  $Q = \pi/\alpha_\psi$ . La estadística  $\alpha_\phi$  del vórtice estada dada por la relación recíproca [31]

$$\frac{\alpha_\phi}{\pi} = \pm \frac{\pi}{\alpha_\psi}. \quad (4.8)$$

Como mencionamos, los anyones son cuasipartículas, y estas cuasipartículas son objetos estables que llevan cargas eléctricas que pueden ser representados como vórtices similares al estudiado en el capítulo 1 [12]. Entonces, se construye una teoría de campo de vórtices para representar los anyones. Realizamos una transformación de norma al campo  $\psi$  y hacemos una variación en los campos  $a_\lambda$ :

$$\psi = \psi^r e^{i\chi}, \quad a_\lambda = a_\lambda^r + \partial_\lambda \chi \quad (4.9)$$

donde  $\chi$  es el campo de Goldstone mencionado en el capítulo 1, usado para describir vórtices cuánticos. Sustituimos estas igualdades en la ecuación (4.1). Sustituyendo término a término:

$$\begin{aligned} \psi^* iD_0 \psi &= \psi^r e^{-i\chi} (i\partial_0 - eA_0 + a_0^r + \partial_0 \chi) \psi^r e^{i\chi} \\ &= \psi^r e^{-i\chi} (i\partial_0) \psi^r e^{i\chi} + \psi^r e^{-i\chi} (-eA_0 + a_0^r + \partial_0 \chi) \psi^r e^{i\chi} \\ &= \psi^r e^{-i\chi} [(i\partial_0 \psi^r) e^{i\chi} + \psi^r (i^2 \partial_0 \chi e^{i\chi})] + \psi^r e^{-i\chi} (-eA_0 + a_0^r + \partial_0 \chi) \psi^r e^{i\chi} \\ &= \psi^r e^{-i\chi} (i\partial_0 - \partial_0 \chi - eA_0 + a_0^r + \partial_0 \chi) \psi^r e^{i\chi} \\ &= \psi^r (i\partial_0 - eA_0 + a_0^r) \psi^r = \psi^r iD_0^r \psi^r \end{aligned}$$

de manera similar

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} |D_k \psi|^2 &= \frac{1}{2m} (\partial_k + ieA_k - ia_k^r - i\partial_k \chi) \psi^r e^{i\chi} (\partial_k - ieA_k + ia_k^r + i\partial_k \chi) \psi^r e^{-i\chi} \\ &= \frac{1}{2m} (\partial_k + ieA_k - ia_k^r) \psi^r (\partial_k - ieA_k + ia_k^r) \psi^r = \frac{1}{2m} |D_k \psi^r|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \psi^* \psi &= \mu \psi^r e^{-i\chi} \psi^r e^{i\chi} \\ &= \mu \psi^r \psi^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} a_\lambda \partial_\nu a_\sigma &= \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} (a_\lambda^r + \partial_\lambda \chi) \partial_\nu (a_\sigma^r + \partial_\sigma \chi) \\ &= \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} [a_\lambda^r \partial_\nu a_\sigma^r + \partial_\lambda \chi \partial_\nu a_\sigma^r + a_\lambda^r \partial_\nu \partial_\sigma \chi + \partial_\lambda \chi \partial_\nu \partial_\sigma \chi]. \end{aligned}$$

Sabemos que  $\epsilon^{\lambda\nu\sigma}\partial_\nu(\partial_\lambda\chi a_\sigma^r) = \epsilon^{\lambda\nu\sigma}(\partial_\nu\partial_\lambda\chi)a_\sigma^r + \epsilon^{\lambda\nu\sigma}\partial_\lambda\chi(\partial_\nu a_\sigma^r)$ , entonces

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\lambda\nu\sigma}\partial_\lambda\chi(\partial_\nu a_\sigma^r) &= \epsilon^{\lambda\nu\sigma}\partial_\nu(\partial_\lambda\chi a_\sigma^r) - \epsilon^{\lambda\nu\sigma}(\partial_\nu\partial_\lambda\chi)a_\sigma^r & \nu \longleftrightarrow \sigma \\
&= \epsilon^{\lambda\nu\sigma}\partial_\nu(\partial_\lambda\chi a_\sigma^r) + \epsilon^{\lambda\sigma\nu}a_\sigma^r(\partial_\nu\partial_\lambda\chi) & \lambda \longleftrightarrow \sigma \\
&= \epsilon^{\lambda\nu\sigma}\partial_\nu(\partial_\lambda\chi a_\sigma^r) - \epsilon^{\sigma\lambda\nu}a_\sigma^r(\partial_\nu\partial_\lambda\chi) & \lambda \longleftrightarrow \nu \\
&= \epsilon^{\lambda\nu\sigma}\partial_\nu(\partial_\lambda\chi a_\sigma^r) + \epsilon^{\sigma\nu\lambda}a_\sigma^r(\partial_\nu\partial_\lambda\chi) & \sigma \longrightarrow \lambda \\
&= \epsilon^{\lambda\nu\sigma}\partial_\nu(\partial_\lambda\chi a_\sigma^r) + \epsilon^{\lambda\nu\sigma}a_\lambda^r(\partial_\nu\partial_\sigma\chi)
\end{aligned}$$

donde los distintos  $\longleftrightarrow$  indican permutaciones del símbolo de Levi-Civita y  $\longrightarrow$  es un renombramiento. Observamos que  $\partial_\nu(\partial_\lambda\chi a_\sigma^r)$  es un término de frontera, el cual podemos ignorar, entonces técnicamente

$$\epsilon^{\lambda\nu\sigma}\partial_\lambda\chi\partial_\nu a_\sigma^r = \epsilon^{\lambda\nu\sigma}a_\lambda^r(\partial_\nu\partial_\sigma\chi)$$

usando esto en el último término que se substituyó

$$\frac{1}{4\alpha_\psi}\epsilon^{\lambda\nu\sigma}a_\lambda\partial_\nu a_\sigma = \frac{1}{4\alpha_\psi}\epsilon^{\lambda\nu\sigma}[a_\lambda^r\partial_\nu a_\sigma^r + 2a_\lambda^r\partial_\nu\partial_\sigma\chi + \partial_\lambda\chi\partial_\nu\partial_\sigma\chi].$$

Construimos con los valores encontrados el nuevo lagrangiano

$$\mathcal{L} = \psi^r i D_\sigma \psi^r - \frac{1}{2m} |D_k \psi^r|^2 + \mu \psi^r \psi^r - \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} [a_\lambda^r \partial_\nu a_\sigma^r + 2a_\lambda^r \partial_\nu \partial_\sigma \chi + \partial_\lambda \chi \partial_\nu \partial_\sigma \chi] \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left[ \psi^r i D_\sigma \psi^r - \frac{1}{2m} |D_k \psi^r|^2 + \mu \psi^r \psi^r - \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} a_\lambda^r \partial_\nu a_\sigma^r \right] \\
&\quad - \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} [2a_\lambda^r \partial_\nu \partial_\sigma \chi + \partial_\lambda \chi \partial_\nu \partial_\sigma \chi] \\
&= \mathcal{L}_\psi^r - \frac{\pi}{\alpha_\psi} a_\lambda^r \left[ \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma \chi \right] - \frac{\pi^2}{\alpha_\psi} \left[ \frac{1}{4\pi^2} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} \partial_\lambda \chi \partial_\nu \partial_\sigma \chi \right] \\
&= \mathcal{L}_\psi^r - \frac{\pi}{\alpha_\psi} a_\lambda^r K^\lambda + \alpha_\phi L.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi^r - \frac{\pi}{\alpha_\psi} a_\lambda^r K^\lambda + \alpha_\phi L, \quad (4.11)$$

donde  $\alpha_\phi = -\pi^2/\alpha_\psi$  y  $\mathcal{L}_\psi^r$  es el lagrangiano (5.1) pero con  $a_\lambda$  y  $\psi$  siendo reemplazados por  $a_\lambda^r$  y  $\psi^r$ .

Además

$$K^\lambda = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma \chi, \quad L = \frac{1}{4\pi^2} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} \partial_\lambda \chi \partial_\nu \partial_\sigma \chi \quad (4.12)$$

a pesar de la existencia de un término antisimétrico, la segunda igualdad no desaparece, ya que existen lazos que no se pueden deformar hasta un punto debido a que rodean el origen, el cual es un punto singular, haciendo que  $\chi$  sea multivaluada. Al ser  $\chi$  multivaluada deja defectos topológicos que describen vórtices.

Calculamos las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange del lagrangiano (4.3) respecto a los campos  $\psi^r$ ,  $\chi$  y  $a_\eta^r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^r} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}^r} \right) &= iD_0 \psi^r + \psi^r (-eA_0 + a_0^r + \partial_0 \chi) - \frac{1}{m} D_k \psi^r (ieA_k - ia_k^r - i\partial_k \chi) \\ &+ 2\mu \psi^r - \partial_\mu \left[ \psi^r i\delta_{0\mu} - \frac{1}{m} D_k \psi^r \delta_{k\mu} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_{,\mu}} \right) = -\partial_\mu \left[ -\frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} \delta_{\lambda\mu} \partial_\nu \partial_\sigma \chi \right] = \partial_\mu \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma \chi \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_\eta^r} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{\eta,\mu}^r} \right) &= \psi^r \delta_{0\eta} \psi^r - \frac{1}{m} D_k \psi^r (i\delta_{k\eta} \psi^r) - \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} \delta_{\lambda\eta} (\partial_\nu a_\sigma^r + 2\partial_\nu \partial_\sigma \chi) \\ &+ \partial_\mu \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} a_\lambda^r \delta_{\nu\mu} \delta_{\sigma\eta} \right] \\ &= \psi^r \delta_{0\eta} \psi^r - \frac{1}{m} D_k \psi^r (i\delta_{k\eta} \psi^r) - \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\eta\nu\sigma} (\partial_\nu a_\sigma^r + 2\partial_\nu \partial_\sigma \chi) \\ &+ \partial_\mu \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\mu\eta} a_\lambda^r \right]. \end{aligned}$$

Haciendo un renombramiento  $\lambda \rightarrow \sigma$ ,  $\mu \rightarrow \nu$  y luego permutamos  $\sigma \leftrightarrow \eta$  en el último

término de la última ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_\eta^r} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{\eta,\mu}^r} \right) &= \psi^r \delta_{0\eta} \psi^r - \frac{1}{m} D_k \psi^r (i \delta_{k\eta} \psi^r) - \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\eta\nu\sigma} (\partial_\nu a_\sigma^r + 2\partial_\nu \partial_\sigma \chi) \\
&- \partial_\nu \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\eta\nu\sigma} a_\sigma^r \right] \\
&= \psi^r \delta_{0\eta} \psi^r - \frac{1}{m} D_k \psi^r (i \delta_{k\eta} \psi^r) - \frac{1}{2\alpha_\psi} \epsilon^{\eta\nu\sigma} (\partial_\nu a_\sigma^r + \partial_\nu \partial_\sigma \chi).
\end{aligned}$$

Ahora, como en esta teoría estamos considerando un bosón de Goldstone, se presume a priori que existe una simetría de norma y por ende una corriente conservada. Para lo cual con ayuda del Teorema de Nöether calculamos las corrientes conservadas y después el tensor de energía-momento. El Teorema de Nöether se enuncia como sigue:

Si bajo una transformación continua de las variables independientes y las componentes  $\phi$  de la acción

$$S = \int_R \mathcal{L}(\phi_\eta, \phi_{\eta,\nu}, x^\nu) dx^\nu,$$

(donde  $R$  es una región arbitraria) el cambio en la acción toma la forma  $\delta S = 0$ , entonces existe una simetría en el sistema. Entonces a esa transformación le corresponde una corriente conservada

$$J_s^\mu \equiv \mathcal{L} \Omega_s^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\eta,\mu}} (\Theta_{s\eta} - \phi_{\eta,\sigma} \Omega_s^\sigma). \quad (4.13)$$

donde  $\Theta_{s\eta}$  representa variaciones en los campos y  $\Omega_s^\sigma$  representa variaciones en cada coordenada de los mismos [32].  $J_s^\mu$  nos proporciona las  $s$  corrientes conservadas [33], pero al tener nosotros un solo campo de Goldstone esperamos una única corriente, entonces podemos descartar el subíndice  $s$ .

Nosotros hemos realizado transformaciones (ecuación (4.9)) únicamente sobre los campos, entonces  $\Omega^\sigma = 0$ . Por lo que la corriente conservada o corriente de Nöether se reduce a

$$J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\eta,\mu}} \Theta_\eta. \quad (4.14)$$

Calculamos las corrientes de Nöether para cada campo variado, es decir  $\psi^r$  y  $a_\eta^r$ . Para el cambio en el campo  $\psi^r$ , realizamos una expansión en la exponencial de tal manera que  $\psi^r e^{i\chi} \approx \psi^r(1 + i\chi)$ , por lo que la variación del campo es  $\Theta_\eta = \psi^r i\chi$  la corriente es

$$J_\psi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}^r} \Theta_\eta = \left( \psi^r i\delta_{0\mu} - \frac{1}{m} D_k \psi^r \delta_{k\mu} \right) \psi^r i\chi. \quad (4.15)$$

El campo  $a_\eta^r$  tiene la variación  $\Theta_{s\eta} = \partial_\eta \chi_s$ , por lo que la corriente conservada es

$$J_{a_\eta^r}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{\eta,\mu}^r} \Theta_\eta = -\frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\mu\eta} a_\lambda^r \partial_\eta \chi. \quad (4.16)$$

Considerando el lagrangiano de C-S (4.10) es evidente que  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Lo que indica que esta simetría de norma tiene una corriente conservada.

Ahora calculamos el tensor de energía momento

$$T_\rho^\mu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\eta,\mu}} \phi_{\eta,\rho}, \quad (4.17)$$

para todos los campos. Entonces para el campo  $\psi^r$

$$T_\rho^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}^r} \psi_{,\rho}^r = -\left[ \psi^r i\delta_{0\mu} - \frac{1}{m} D_k \psi^r \delta_{k\mu} \right] \psi_{,\rho}^r, \quad (4.18)$$

para el campo  $\chi$

$$T_\rho^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_{,\mu}} \chi_{,\rho} = \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma \chi \right] \chi_{,\rho}, \quad (4.19)$$

para el campo  $a_\eta^r$

$$T_\rho^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{\eta,\mu}^r} a_{\eta,\rho} = \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda\mu\eta} a_\lambda \right] a_{\eta,\rho} \quad (4.20)$$

y la carga conservada asociada a este tensor es

$$Q_\rho \equiv \int_R dx^3 T_\rho^0.$$

En particular, el funcional de energía del sistema es

$$Q_0 = E = \int_R dx^3 T_0^0 = \int dx^3 \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\eta,0}} \phi_{\eta,0} \right). \quad (4.21)$$

Mientras que el de momento lineal, para  $k = 1, 2$ , es

$$Q_k = P_k = \int_R dx^3 T_k^0 = \int dx^3 \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\eta,0}} \phi_{\eta,k} \right). \quad (4.22)$$

Para el campo  $\psi^r$  se tiene

$$T_0^0 = - \left[ \psi^r i \delta_{00} - \frac{1}{m} D_k \psi^r \delta_{k0} \right] \psi_{,0}^r = -\psi^r i \psi_{,0}^r \quad (4.23)$$

$$T_k^0 = - \left[ \psi^r i \delta_{00} - \frac{1}{m} D_k \psi^r \delta_{k0} \right] \psi_{,k}^r = -\psi^r i \psi_{,k}^r. \quad (4.24)$$

Para el campo  $\chi$

$$T_0^0 = \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{0\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma \chi \right] \chi_{,0}, \quad (4.25)$$

$$T_k^0 = \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{0\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma \chi \right] \chi_{,k}. \quad (4.26)$$

Para el campo  $a_\eta^r$

$$T_0^0 = \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda 0 \eta} a_\lambda \right] a_{\eta,0}, \quad (4.27)$$

$$T_k^0 = \left[ \frac{1}{4\alpha_\psi} \epsilon^{\lambda 0 \eta} a_\lambda \right] a_{\eta, k}. \quad (4.28)$$

Esto será usado en un estudio posterior.

Consideremos ahora un conjunto de  $N$  vórtices con las posiciones  $x^\lambda = x_s^\lambda$ , donde  $s = 1, 2, \dots, N$ . En la amplitud de transición de vacío a vacío se crea un par de vórtice y antivórtice, que se aniquila después de viajar. Esto crea un bucle en el espacio-tiempo de (2+1) dimensiones. Podemos establecer  $\chi = \sum_s \varepsilon_s \theta_s$ , donde  $\varepsilon_s = \pm 1$  y  $\theta_s$  es el ángulo azimutal de él  $s$ -ésimo vórtice. Tomando la ecuación (4.12) tenemos que

$$L = \sum_{s,l} \frac{\varepsilon_s \varepsilon_l}{4\pi^2} \varepsilon^{\lambda\nu\sigma} \partial_\lambda \theta_s \partial_\nu \partial_\sigma \theta_l. \quad (4.29)$$

La integral en el espacio  $\int d^3x L$  de este lagrangiano no es más que el número de devanado de Gauss. Al igual que pasa con el número de devanado del capítulo 1, es un invariante topológico y cuenta cuántas veces un camino rodea a otro camino, por lo que toma un valor entero. La contribución del término de devanado  $\alpha_\phi \int d^3x L$  de la ecuación (4.11) a la integral funcional depende de la relación mutua de trayectorias de los vórtices sí  $\alpha_\psi/\pi = k$ ; es un número entero impar. Para explicar la vinculación de vórtices anyonicos introducimos un nuevo campo de norma de Chern-Simons  $b_\mu$ , como un campo auxiliar para tomar en cuenta nuevas excitaciones de vórtice. A través de la ecuación [31]

$$\exp(i \int d^3x \alpha L) = \int D b_\mu \exp[-i \int d^3x (b_\mu K^\mu + \frac{1}{4\alpha} \varepsilon^{\lambda\nu\sigma} b_\lambda \partial_\nu b_\sigma)], \quad (4.30)$$

esto es válido para cualquier valor de  $\alpha$ . También implica que la estadística de la excitación del vórtice es definida  $mod 2\pi$  ya que  $\int d^3x L$  un número entero. Entonces la relación recíproca (4.8) puede generalizarse como

$$\frac{\alpha_\phi^{(1)}}{\pi} = -\frac{\pi}{\alpha_\psi} + 2p^{(1)}, \quad (4.31)$$

donde  $p^{(1)}$  es un entero, esto resume la contribución de vórtice. Reemplazamos el término de devanado en la ecuación (4.11) por el nuevo campo  $b_\mu$ . Con esto tenemos que

$$\widehat{\mathcal{L}}_{FQHE} = \mathcal{L}_\psi^r - \left(\frac{1}{k}a_\lambda^r + b_\lambda^r\right)K^\lambda - \frac{1}{4\alpha_\phi^{(1)}}\epsilon^{\lambda\nu\sigma}b_\lambda\partial_\nu b_\sigma. \quad (4.32)$$

Analicemos el término  $(\frac{1}{k}a_\lambda^r + b_\lambda^r)K^\lambda$  (En lo que sigue suprimiremos el superíndice r). Aquí tenemos una descripción de línea de mundo de Feynman de partículas que son vórtices. Resumiendo todas estas configuraciones en el formalismo funcional, se obtiene la dualidad campo-partícula [34]:

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \prod_{k=1}^N Dx_k \exp(-i \int d^3x (\frac{1}{k}a_\lambda + b_\lambda)K^\lambda) = \int D\phi \exp(i \int d^3x \mathcal{L}_{FQHE}^{vortex}) \quad (4.33)$$

con

$$\mathcal{L}_{FQHE}^{vortex} = |(i\partial_\lambda + \frac{1}{k}a_\lambda + b_\lambda)\phi|^2 - M^2\phi * \phi - \frac{1}{4\alpha_\phi^{(1)}}\epsilon^{\lambda\nu\sigma}b_\lambda\partial_\nu b_\sigma \quad (4.34)$$

donde  $\phi$  denota el campo del vórtice y el segundo sumando añade masa al término de vórtice. Por lo tanto, el lagrangiano que incluye la contribución del vórtice es

$$\mathcal{L}_{FQHE} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{FQHE}^{vortex} \quad (4.35)$$

para  $\alpha_\psi/\pi \equiv k$  un entero impar.

## 4.5. Jerarquía de Haldane.

Usando este lagrangiano analizaremos la jerarquía del efecto Hall cuántico fraccionario cuando  $\alpha_\psi/\pi \equiv k$  es un entero impar. Para ello mostraremos que las condensaciones de los campos  $\psi$  y  $\phi$  ocurren al mismo tiempo. Reescribimos la ecuación (4.34) como

$$\mathcal{L}_{FQHE}^{(1)vortex} = |(i\partial_\lambda + \frac{1}{k}a_\lambda + b_\lambda^{(1)})\phi^{(1)}|^2 - M^{(1)2}\phi^{(1)} * \phi^{(1)} - \frac{1}{4\alpha_\phi^{(1)}}\epsilon^{\lambda\nu\sigma}b_\lambda^{(1)}\partial_\nu b_\sigma^{(1)}, \quad (4.36)$$

donde hemos hecho  $\phi^{(1)} = \phi$ ,  $b^{(1)} = b$ , y  $M^{(1)} = M$ . Existen dos soluciones clásicas para este sistema. Una es la solución trivial que ya conocemos dada por las condiciones de la ecuación (4.4) junto con  $\phi^{(1)} = b^{(1)} = 0$ , y describe el mismo estado de Laughlin. La segunda solución está dada por

$$\begin{aligned} \psi &= \sqrt{\rho}, & \phi^{(1)} &= \langle \phi^{(1)} \rangle, & \mu &= 0, \\ a^0 &= 0, & b_0^{(1)} &= M, & a^k &= -\frac{\alpha_\psi}{\pi} b^{(1)k} = eA^k, \end{aligned} \tag{4.37}$$

donde  $\langle \psi^{(1)} \rangle = \sqrt{\rho/4Mp^{(1)}}$ , siempre que  $\rho = eB\nu^{(1)}/2\pi$  (ecuación (4.6)). Entonces, realizando un cálculo similar al de la sección 4.3, obtenemos el factor de llenado

$$\nu^{(1)} = \frac{\pi}{\alpha_\psi} \left( 1 + \frac{\pi}{\alpha_\psi} \frac{\pi}{\alpha_\phi^{(1)}} \right) = \frac{1}{k + \frac{-1}{2p^{(1)}}}.$$

En esta fase condensada hay nuevamente una excitación de vórtice, entonces retomando lo visto en la sección anterior, el comportamiento asintótico de esta configuración de vórtice viene dado por

$$\phi^{(1)} \simeq \langle \phi^{(1)} \rangle e^{i\theta}, \quad b^{(1)k} \simeq -\frac{\pi}{\alpha_\psi} eA^k + \partial^k \theta, \tag{4.38}$$

con los otros campos teniendo las configuraciones en (4.37) como comportamientos asintóticos. Por el mismo razonamiento anterior, esta nueva excitación de vórtice posee un estadístico  $\alpha_\phi^{(2)}$  que satisface la relación recíproca generalizada

$$\frac{\alpha_\phi^{(2)}}{\pi} = -\frac{\pi}{\alpha_\phi^{(1)}} + 2p^{(2)}, \tag{4.39}$$

donde  $p^{(2)}$  es un entero. Esto resume las contribuciones de este nuevo vórtice.

Teniendo en cuenta esto en el formalismo funcional, obtenemos un campo de vórtice  $\phi^{(2)}$  que las describe junto con el campo de Chern-Simons  $b_\lambda^{(2)}$  que explica la vinculación de este campo de vórtice. Luego, podemos discutir las condensaciones de  $\psi$ ,  $\phi^{(1)}$  y  $\phi^{(2)}$ ,

y sucesivamente encontramos una nueva excitación de vórtice en su condensado. El procedimiento continúa así hasta donde se quiera llegar. Esto nos lleva a la jerarquía de Haldane.

El lagrangiano efectivo en el  $s$ -ésimo nivel es

$$\mathcal{L}_{FQHE}^{(s)} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{FQHE}^{(1)vortex} + \sum_{i \geq 2}^s \mathcal{L}_{FQHE}^{(i)vortex} \quad (4.40)$$

donde

$$\mathcal{L}_{FQHE}^{(i)vortex} = |(i\partial_\lambda + \frac{\pi}{\alpha_\phi^{(i-1)}} b_\lambda^{(i-1)} + b_\lambda^{(i)})\phi^{(i)}|^2 - M^{(i)2} \phi^{(i)} * \phi^{(i)} - \frac{1}{4\alpha_\phi^{(i)}} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} b_\lambda^{(i)} \partial_\nu b_\sigma^{(i)}. \quad (4.41)$$

Para este sistema existen  $(s+1)$  soluciones clásicas correspondientes a los  $(s+1)$  niveles de la jerarquía. La solución en el  $j$ -ésimo nivel se caracteriza por  $\langle \phi^{(i)} \rangle \neq 0$  para  $i \leq j$  y  $\langle \phi^{(i)} \rangle = 0$  para  $i > j$ , donde  $j = 1, 2, \dots, s$ ; tal solución existe sólo cuando el factor de llenado está dado por

$$\nu^{(j)} = \frac{1}{k + \frac{-1}{2p^{(1)} + \frac{-1}{2p^{(2)} + \frac{1}{\ddots + \frac{-1}{2p^{(j)}}}}} \quad (4.42)$$

Esta última ecuación describe una jerarquía para los factores de llenado y describe el efecto Hall cuántico fraccionario, terminando con el modelo.

# Conclusiones

Luego de hacer una revisión minuciosa sobre el estudio del intercambio de partículas cuánticas indistinguibles en dos dimensiones y de las propiedades de esto, que son descritas por la topología, podemos comprender como se construye la teoría de anyones, su estadística, cuál es su comportamiento al intercambiarse, como se modifican las operaciones, tales como la fusión de dos de estos, etc. También revisamos la física del efecto Hall cuántico fraccionario, y a través de la teoría cuántica de campos, podemos intuir que los anyones podrían explicar completamente este efecto para cualquier factor de llenado. Aunado a esto, la teoría de Chern-Simons, la cual es una teoría topológica en  $2+1$ , resulta una ser útil para describir este efecto y se infiere que, de alguna manera, teorías de este tipo podría funcionar para diferentes patrones de factores de llenado.

El efecto Hall cuántico fraccionario, visto como un fenómeno emergente, lo podemos entender como una consecuencia de tener niveles de Landau llenos de partículas cargadas que se encuentran bajo un campo magnético ficticio, dentro de un nivel de Landau parcialmente lleno perteneciente al campo magnético verdadero. Este campo magnético ficticio, que se origina por el campo de Chern-Simons, surge del comportamiento colectivo de los electrones.

Para entender como funciona de manera explícita esto reproducimos algunos resultados del artículo [31] y verificamos que la introducción del rompimiento de una simetría de norma mediante la introducción de un bosón de Goldstone es una manera de construir una teoría de campo para vórtices, los cuales sabemos que si hacemos girar uno respecto a otro obtendremos estadística fraccionaria, esto en el límite para fermiones. Entendiendo de esta manera la importancia de los defectos topológicos para la descripción de fenómenos bidimensionales como es el efecto Hall cuántico fraccionario en términos de los anyones.

Se calculó la corriente para el campo de norma y se demostró que esta es conservada cuando el bosón de Goldstone no es multivaluado. De la misma manera se expresan los tensores de energía momento por completéz.

Como trabajo a futuro se pretende realizar la construcción de un modelo efectivo mediante la teoría cuántica de los campos de para explicar el comportamiento de los anyones no abelianos en sistemas bidimensionales. Esto podría ser de utilidad para poder tener control de estas partículas, que se presupone son útiles para computación cuántica.

# Bibliografía

- [1] Eduardo Fradkin. *Quantum field theory: an integrated approach*. Princeton University Press, 2021.
- [2] Avinash Khare. Quantum mechanics and statistical mechanics of anyons. *Current Science*, pages 826–831, 1991.
- [3] JM Leinaas and J Myrheim. On the theory of identical particles. *Il nuovo cimento*, 37:132, 1977.
- [4] Avinash Khare. *Fractional statistics and quantum theory*. World Scientific, 2005.
- [5] GS Canright and Steven M Girvin. Fractional statistics: quantum possibilities in two dimensions. *Science*, 247(4947):1197–1205, 1990.
- [6] Ralph Fox and Lee Neuwirth. The braid groups. *Mathematica Scandinavica*, 10:119–126, 1962.
- [7] Yong-Shi Wu. General theory for quantum statistics in two dimensions. *Physical Review Letters*, 52(24):2103, 1984.
- [8] Frank Wilczek. *Fractional statistics and anyon superconductivity*, volume 5. World scientific, 1990.
- [9] Rui-Rui Du. Braided anyons. *Nature Physics*, 16(9):899–900, 2020.
- [10] Bernard Field and Tapio Simula. Introduction to topological quantum computation with non-abelian anyons. *Quantum Science and Technology*, 3(4):045004, 2018.
- [11] Sumathi Rao. An anyon primer. *arXiv preprint hep-th/9209066*, 1992.
- [12] Zyun Francis Ezawa. *Quantum Hall effects: Field theoretical approach and related topics*. World Scientific Publishing Company, 2008.

- [13] Yusuke Masaki, Takeshi Mizushima, and Muneto Nitta. Non-abelian anyons and non-abelian vortices in topological superconductors. *arXiv preprint arXiv:2301.11614*, 2023.
- [14] Sumathi Rao. Introduction to abelian and non-abelian anyons. *Topology and condensed matter physics*, pages 399–437, 2017.
- [15] John Preskill. Lecture notes for physics 219: Quantum computation. *Caltech Lecture Notes*, 7, 1999.
- [16] Simon Trebst, Matthias Troyer, Zhenghan Wang, and Andreas WW Ludwig. A short introduction to fibonacci anyon models. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 176:384–407, 2008.
- [17] Chetan Nayak, Steven H Simon, Ady Stern, Michael Freedman, and Sankar Das Sarma. Non-abelian anyons and topological quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):1083, 2008.
- [18] V Ya Lin. Artin braids and the groups and spaces connected with them. *Journal of Soviet Mathematics*, 18:736–788, 1982.
- [19] Oskar Weinberger. *The braid group, representations and non-abelian anyons*. PhD thesis, BSc thesis, KTH, 2015, <http://urn.kb.se/resolve>, 2015.
- [20] Manuel Antonio Villarreal Uzcategui, Gladys Gutiérrez Nieto, Jesús Ramón Briceno Barrios, Hebert Elías Lobo Sosa, and Frank Daboín. El efecto de hall en tres tiempos (clásico, cuántico entero y cuántico fraccionario) desde un contexto histórico-experimental. *Latin-American Journal of Physics Education*, 14(3):8, 2020.
- [21] Víctor Rodríguez. El efecto hall cuántico y sus contextos. *Scientiae Studia*, 11:141–158, 2013.
- [22] Germán Sierra and Miguel Angel Martín-Delgado Alcántara. El efecto hall fraccionario: un nuevo líquido cuántico. *Anales de Química de la RSEQ*, 2:50–53, 1999.
- [23] Miguel Giménez Murria. Efecto hall cuántico fraccionario: un nuevo líquido cuántico. *100cias UNED*, 2:64–68, 1999.

- [24] Ahmed Houari. Useful pedagogical applications of the classical hall effect. *Physics Education*, 42(6):603, 2007.
- [25] Jainendra K Jain. *Composite fermions*. Cambridge University Press, 2007.
- [26] David Tong. Lectures on the quantum hall effect. *arXiv preprint arXiv:1606.06687*, 2016.
- [27] Ludwing Marengo. *Estudio de los Aniones y el efecto Hall cuántico*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2014.
- [28] Madhav Mohan. Characterizing fractional quantum hall states in lattice models. Master’s thesis, University of Zürich, 2021.
- [29] Xiao-Gang Wen. *Quantum field theory of many-body systems: from the origin of sound to an origin of light and electrons*. OUP Oxford, 2004.
- [30] Horst L Stormer, Daniel C Tsui, and Arthur C Gossard. The fractional quantum hall effect. *Reviews of Modern Physics*, 71(2):S298, 1999.
- [31] ZF Ezawa and A Iwazaki. Chern-simons gauge theories for the fractional-quantum-hall-effect hierarchy and anyon superconductivity. *Physical Review B*, 43(4):2637, 1991.
- [32] Andrés Esponda. Cargas conservadas y simetrías en teoría clásica de campos. Master’s thesis, Universidad Autónoma de Chiapas, 2019.
- [33] Herbert Goldstein, Charles P Poole, and John L Safko. *Classical mechanics*. 3rd, 2002.
- [34] Jonathan Bain. Against particle/field duality: Asymptotic particle states and interpolating fields in interacting qft (or: Who’s afraid of haag’s theorem?). *Erkenntnis*, 53(3):375–406, 2000.