UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GALOIS DIFERENCIAL Y EL ALGORITMO DE KOVACIC [a]

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestra en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Diana Mariem Méndez Penagos X140036

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Eddaly Guerra Velasco

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; Diciembre de 2022.

[a]Apoyada con beca CONACYT. Apoyada parcialmemte por CIMPA.

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
05 de Diciembre de 2022
Oficio No. FCFM/0541/22

Dra. Eddaly Guerra Velasco
Directora de Tesis

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GALOIS DIFERENCIAL Y EL ALGORITMO DE KOVACIC".

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestra en Ciencias Matemáticas de la **Lic. Diana Mariem Méndez Penagos** con matrícula escolar X140036.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

ATENTAMENTE
"POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR"

UNACH fΛm FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
FCFM

DRA. KAREN SALOMÉ CABALLERO MORA
DIRECTORA

C.c.p. CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
FCV /jmag

FCFM- UNACH – Ciudad Universitaria, Carretera Emiliano Zapata Km 8, Rancho San Francisco, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. C. P. 29050.
Correo electrónico: fcfm.posgrado@gmail.com Tel. 61 7 80 00 ext. 8104

Código: FO-113-05-05
Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) Diana Mariem Méndez Penagos, Autor (a) de la tesis bajo el título de "Introducción a la teoría de Galois diferencial y el algoritmo de Kovacic" presentada y aprobada en el año 2022 como requisito para obtener el título o grado de Maestra en Ciencias Matemáticas, autorizo licencia a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), para que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para su consulta, reproducción parcial y/o total, citando la fuente, que contribuya a la divulgación del conocimiento humanístico, científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 6 días del mes de Diciembre del año 2022.

Diana Mariem Mendez Penagos

Nombre y firma del Tesista o Tesistas

Agradecimientos

La presente tesis no hubiese sido terminada sin el apoyo de todas las personas que me acompañaron en el recorrido de este trabajo. Por ello en estas líneas quiero expresarles mis agradecimientos.

A mis padres por todo su amor, esfuerzo y sacrificio en estos años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí y cumplir un sueño más. A mis hermanas, por animarme a seguir adelante y llenarme de alegría día a día. Gracias familia por estar siempre conmigo, los amo.

A Ángel, por su paciencia y comprensión en estos años, por apoyarme en las buenas y en las malas, pero sobre todo, por estar siempre a mi lado.

A mi asesora de tesis, la Dra. Eddaly Guerra Velasco, por su valioso tiempo y esfuerzo dedicado a esta tesis, por estar siempre allí atenta de mis avances. Gracias por su paciencia y tolerancia al atender todas y cada una de mis dudas.

A mis sinodales los doctores: Russell Aarón Quiñones Estrella, Boris Asdrubal Percino Figueroa, Eli Vanney Roblero Méndez, Aldo Aparicio Martinez Merino, Armando Felipe Mendoza Pérez, muchas gracias por el tiempo dedicado para leer y corregir esta tesis.

A mis profesores, por haber compartido su sabiduria, conocimientos y apoyo a lo largo de estos años de Maestría.

Finalmente quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Centro Internacional de Matemáticas Puras y Aplicadas (CIMPA) por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo.

Índice general

Introducción **VII**

1 Teoría de Galois Diferencial **1**

1.1 Anillos diferenciales 1
1.2 Anillo de operadores diferenciales 9
1.3 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas 11
1.4 Extensiones de Picard-Vessiot 19
1.4.1 Existencia de las extensiones de Picard-Vessiot 21
1.4.2 Unicidad de las extensiones de Picard-Vessiot 27
1.5 Caracterización de extensiones de Picard-Vessiot 34
1.6 Grupo de Galois diferencial 36

2 El algoritmo de Kovacic **51**

2.1 Soluciones Liouvillianas 51
2.2 Subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$ 57
2.3 Condiciones necesarias de Kovacic 65
2.4 Algoritmo Caso 1. 72
2.4.1 Ejemplo 79
2.5 Algoritmo Caso 2. 81
2.5.1 Ejemplo 89
2.6 Algoritmo Caso 3. 91
2.6.1 Ejemplo 116

Conclusiones **121**

A Geometría algebraica y grupos algebraicos **123**

A.1 Geometría algebraica 123
A.2 Grupos algebraicos 127

B Análisis Complejo **133**

C Álgebra Moderna **135**

Bibliografía **137**

Introducción

Évarist Galois (1811-1832) estudió si era posible expresar las raíces de polinomios usando radicales; sus ideas se convirtieron en lo que hoy llamamos teoría de Galois. Ahora, si en lugar de estudiar a los polinomios y sus raíces, estudiamos a las ecuaciones diferenciales y a sus soluciones, surge una teoría análoga a la clásica, que se conoce como teoría de Galois diferencial, una teoría de Galois para las ecuaciones diferenciales lineales.

Está teoría tuvo su origen en los trabajos de los matemáticos franceses Charles Emile Picard $(1856-1941)$ y Ernest Vessiot $(1865-1952)$. Por esta razón también se llama teoría de Picard-Vessiot. Años más tarde Ellis Kolchin traslado la teoría de Picard Vessiot al lenguaje moderno de las extensiones de campos diferenciales.

Las nociones de la teoría de Galois clásica tales como campo de descomposición, grupo de Galois y solubilidad por radicales son equivalentes, agregando la estructura diferencial, a las nociones de extensión de Picard Vessiot, grupo de Galois diferencial y solubilidad por cuadraturas.

Por otro lado, en 1986 J. Kovacic presentó un algoritmo, llamado el algoritmo de Kovacic, para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes funciones meromorfas. El objetivo del algoritmo es encontrar soluciones solubles por cuadraturas (o también llamadas soluciones Liouvillianas) de dichas ecuaciones. Éste está basado en un teorema de clasificación de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$.

El objetivo de esta tesis es dar una introducción al estudio de la teoría de Galois diferencial y dar a conocer el algoritmo de Kovacic.

Para ello estructuramos la tesis en dos capítulos y un apéndice. A continuación describimos brevemente los contenidos de cada uno.

En el capítulo 1 presentaremos elementos de la teoría de Galois diferencial, tal como la noción de una derivada, para poder definir a los anillos y campos diferenciales, campo de constantes, ideales diferenciales, anillos cocientes diferenciales, morfismos diferenciales, extensiones de campos diferenciales, entre otros. Luego introduciremos a los operadores diferenciales lineales, asociados a las ecuaciones diferenciales lineales, para posteriormente definir a las extensiones de Picard Vessiot. Bajo ciertas hipótesis, mostraremos que dichas extensiones existen y son únicas salvo isomorfismos diferenciales. Finalmente, definiremos al grupo de Galois diferencial de una ecuación diferencial lineal homogénea y veremos que éste es un grupo algebraico lineal.

El segundo capítulo está dedicado al algoritmo de Kovacic. Veremos el algoritmo en sus diferentes casos, los cuales son derivados de la clasificación de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$, así como algunos ejemplos de aplicación de este algoritmo.

Finalmente, incluimos un apéndice con conceptos y resultados fundamentales de la Geometría algebraica y grupos algebraicos. Nos serán necesarios para probar resultados sobre las extensiones de Picard Vessiot, además de que el grupo de Galois difererencial para una ecuación diferencial lineal homogénea resulta tener estructura de grupo algebraico lineal.

Capítulo 1

Teoría de Galois Diferencial

En este capítulo introducimos las ideas básicas de la teoría de Galois diferencial. Presentamos a los anillos diferenciales, extensiones diferenciales, definimos la extensión de Picard-Vessiot y el grupo de Galois diferencial de una ecuación diferencial lineal homogénea.

1.1. Anillos diferenciales

Definición 1.1.1. Una **derivada** de un anillo A es una función $\delta : A \to A$ tal que para todo $a, b \in A$ se satisface lo siguiente

- ◇ $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$,
- ◇ $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ (Regla de Leibniz).

Para las derivadas iteradas usaremos la siguiente notación: Para todo $a, b \in A$, $\delta(\delta(a)) = \delta^2(a)$ y en general $\delta^n(a) = \delta(\delta^{n-1}(a))$.

Si en un anillo A se tiene definida una derivada δ entonces se tienen las siguientes propiedades.

i) Usando inducción, propiedades de la derivada y del coeficiente binomial, la regla de Leibniz se puede generalizar como sigue:

$$\delta^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^{n-i}(a)\delta^i(b).$$

ii) De la misma manera, usando inducción y propiedades de la derivada, se tiene también la siguiente propiedad: Si $\delta(a)b = b\delta(a)$ entonces $\delta(a^n) = na^{n-1}\delta(a)$.

iii) Si A tiene elemento identidad 1 entonces $\delta(1) = 0$ y $\delta(0) = 0$.

En efecto, se tiene

$$\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = \delta(1) + \delta(1) = 2\delta(1),$$

luego esto tiene sentido sólo si $\delta(1) = 0$.

Por otro lado,

$$\delta(0) = \delta(0 + 0) = \delta(0) + \delta(0),$$

despejando se obtiene que $\delta(0) = 0$.

iv) Notemos también lo siguiente: Si $a \in A$ es invertible con inversa $\frac{1}{a}$ entonces

$$0 = \delta(1) = \delta\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \delta(a)\frac{1}{a} + a\delta\left(\frac{1}{a}\right),$$

de donde

$$\delta\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{\delta(a)}{a^2}.$$

Si se considera al campo de fracciones de un dominio entero A, ¿que podemos decir de la derivada?

Proposición 1.1.2. *Si A es un dominio entero, una derivada de A se extiende al campo de fracciones de A, $Frac(A)$, de manera única.*

Demostración. Si δ es la derivada de A, entonces la derivada en $Frac(A)$ se extiende como sigue: Para $\frac{a}{b} \in Frac(A)$ se tiene

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \delta(a)\frac{1}{b} + a\delta\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\delta(a)}{b} + a\left(-\frac{\delta(b)}{b^2}\right) = \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2}.$$

Observe primero que esta derivada está bien definida.

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Frac(A)$ tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Luego $ad = bc$, por lo que

$$\delta(ad) = \delta(a)d + a\delta(d) = \delta(b)c + b\delta(c) = \delta(bc),$$

de donde

$$\delta(a)d - \delta(b)c = b\delta(c) - a\delta(d).$$

Así que

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2} = \frac{\delta(a)bcd - cda\delta(b)}{b^2cd} = \frac{[\delta(a)d - c\delta(b)]bc}{bd(bc)} \\
&= \frac{b\delta(c) - a\delta(d)}{bd} = \frac{bdc\delta(c) - adc\delta(d)}{d^2(bc)} = \frac{[\delta(c)d - c\delta(d)]bc}{d^2bc} \\
&= \frac{\delta(c)d - c\delta(d)}{d^2} = \delta\left(\frac{c}{d}\right).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que la extensión es una derivada

$$\begin{aligned}
\bullet\, \delta\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) &= \delta\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \frac{\delta(ad+bc)bd - (ad+bc)\delta(bd)}{(bd)^2} \\
&= \frac{[\delta(a)d + a\delta(d) + \delta(b)c + b\delta(c)]bd - (ad+bc)[\delta(b)d + b\delta(d)]}{b^2d^2} \\
&= \frac{\delta(a)d^2b + \delta(c)b^2d - ad^2\delta(b) - b^2c\delta(d)}{b^2d^2} \\
&= \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2} + \frac{\delta(c)d - c\delta(d)}{d^2} \\
&= \delta\left(\frac{a}{b}\right) + \delta\left(\frac{c}{d}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\, \delta\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) &= \delta\left(\frac{ac}{bd}\right) = \frac{\delta(ac)bd - ac\delta(bd)}{b^2d^2} \\
&= \frac{[\delta(a)c + a\delta(c)]bd - ac[\delta(b)d + b\delta(d)]}{b^2d^2} \\
&= \frac{[\delta(a)b - a\delta(b)]c}{b^2d} + \frac{[\delta(c)d - c\delta(d)]a}{d^2b} \\
&= \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{\delta(c)d - c\delta(d)}{d^2} \\
&= \delta\left(\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\delta\left(\frac{c}{d}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Observación 1. Si A no es un dominio entero, la generalización de la construcción del campo de cocientes se le llama **localización** respecto a un conjunto multiplicativo, la cual describimos a continuación.

Sea D cualquier subconjunto no vacío de A que es cerrado bajo la multiplicación. Por conveniencia se supondrá que $1 \in D$. Se puede definir una relación de equivalencia en $A \times D$ dada por

$$(a, d) \sim (b, e) \text{ si existe un } f \in D \text{ tal que } aef = bdf.$$

Se denota por $D^{-1}A$ al conjunto de clases de equivalencia y por $\frac{a}{d}$ a la clase de (a, d) y se definen

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} = \frac{ab}{de} \text{ y } \frac{a}{d} + \frac{b}{e} = \frac{ea + db}{de}.$$

Con estas operaciones $D^{-1}A$ es un anillo con $0/1$ como identidad aditiva y $1/1$ como identidad multiplicativa. Este anillo es la **localización** en D.

Si A es un anillo conmutativo sin divisores de cero con una derivada y D es un conjunto multiplicativo de A, entonces siguiendo la prueba de la proposición 1.1.2, se puede extender la derivada de A a la localización $D^{-1}A$ de manera única.

Ya que definimos una derivada en un anillo, se puede ahora agregar la estructura diferencial a los conceptos de anillos, campos, ideales, cocientes y morfismos.

Definición 1.1.3.

- ⋄ Un **anillo diferencial** es un anillo conmutativo con identidad dotado de una derivada. En caso de que el anillo sea un campo se llama **campo diferencial**.

- ⋄ En cualquier anillo diferencial A, el conjunto de elementos $a \in F$ que satisface $\delta(a) = 0$ forma un subanillo que se llama **anillo de constantes de** A y se denota por C_A. En caso de que A sea un campo, C_A es un subcampo de A, que se llama **campo de constantes de** A.

- ⋄ Sea I un ideal de un anillo diferencial A, I es un **ideal diferencial** si para todo $a \in I$ se tiene $\delta(a) \in I$, esto es $\delta(I) \subset I$.

- ⋄ Si I es un ideal diferencial de un anillo diferencial A, se puede definir una derivada en el anillo cociente A/I como sigue:

  $$\delta([a]) = [\delta(a)].$$

  A/I dotado de esta derivada se llama **anillo cociente diferencial**.

◇ Si $(A, \delta), (B, \tilde{\delta})$ son anillos diferenciales, una función $\phi : A \to B$ es un **morfismo diferencial** si para todo $a, b \in A$

1) $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ y $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$
2) $\phi(1) = 1$.
3) $\tilde{\delta}(\phi(a)) = \phi(\delta(a))$.

◇ Un **isomorfismo diferencial** es un morfismo diferencial biyectivo.

◇ Un **automorfismo diferencial** es un isomorfismo diferencial en el que $A = B$.

Observación 2. El anillo cociente diferencial está bien definido.

En efecto, δ es una derivada bien definida:

i) Sean $a, b \in A$ tales que $[a] = [b]$ entonces $a - b \in I$, por definición de ideal diferencial tenemos que $\delta(a - b) \in I$, pero $\delta(a - b) = \delta(a) - \delta(b)$, luego $\delta(a) - \delta(b) \in I$ entonces $[\delta(a)] = [\delta(b)]$, esto es, $\delta([a]) = \delta([b])$. Por lo tanto, la definición de derivada en el cociente no depende de los representantes.

ii) Veamos ahora que esta definición en verdad define una derivada en el cociente.

Sean $[a], [b] \in A/I$,

- $\delta([a] + [b]) = \delta([a + b])$, por la definición de suma de clases
  $= [\delta(a + b)]$,
  $= [\delta(a) + \delta(b)]$, ya que δ es derivada en A
  $= [\delta(a)] + [\delta(b)]$, como $\delta(a), \delta(b) \in A$ aplicamos suma de clases
  $= \delta([a]) + \delta([b])$.

- $\delta([a]\,[b]) = \delta([a\,b])$, por la definición de producto de clases
  $= [\delta(a\,b)]$,
  $= [\delta(a)b + a\delta(b)]$, ya que δ es derivada en A
  $= [\delta(a)][b] + [a][\delta(b)]$, aplicamos suma y producto de clases
  $= \delta([a])[b] + [a]\delta([b])$.

Por lo tanto, el anillo cociente diferencial está bien definido.

A continuación veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.

i) Cualquier anillo conmutativo con identidad A se puede convertir en un anillo diferencial, para esto se define la derivada trivial $\delta : A \to A$ como $\delta(a) = 0$ para todo $a \in A$.

ii) Sea (A, δ) un anillo diferencial y $A[x]$ el anillo de polinomios en una variable. Una derivación en $A[x]$ (que denotaremos por D) que extiende a la de A debería satisfacer, para un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, que

$$D\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n}[D(a_i)x^i + a_i D(x^i)] = \sum_{i=0}^{n}[\delta(a_i)x^i + a_i i x^{i-1} D(x)].$$

Entonces se extiende la derivación de A a $A[x]$ asignando a x un valor arbitrario en $A[x]$.

Análogamente, si A es un campo, se puede extender la derivada de A al campo $A(x)$ de funciones racionales. Por iteración se puede dar una estructura diferencial a $A[x_1, \ldots, x_n]$ y a $A(x_1, \ldots, x_n)$ para un anillo diferencial A.

iii) Como caso particular al ejemplo anterior. Si A es un anillo diferencial con derivada trivial, $A[x]$ con la derivada usual $(D(x) = 1)$ es anillo diferencial. De manera similar, $A(x)$ el conjunto de funciones racionales con la derivada usual foman un campo diferencial.

iv) Sea A un anillo diferencial. Consideremos el anillo $A[x_i]$ de polinomios en las indeterminadas $x_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Un elemento en $A[x_i]$ es una suma finita de la forma $\sum_I a_I x^I$ con $I = (i_1, \ldots, i_N), x^I = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_N^{i_N}, N \in \mathbb{N}$, notemos que

$$\begin{aligned}
D\left(\sum_I a_I x^I\right) &= \sum_I \left[D(a_I)x^I + a_I D(x^I)\right] \\
&= \sum_I \left[D(a_I)x^I + a_I D(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_N^{i_N})\right] \\
&= \sum_I \left[D(a_I)x^I + a_I \left(\sum_{j=1}^{N} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots D(x_j^{i_j}) \cdots x_N^{i_N}\right)\right] \\
&= \sum_I \left[D(a_I)x^I + a_I \left(\sum_{j=1}^{N} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots i_j x_j^{i_j - 1} D(x_j), \ldots, x_N^{i_N}\right)\right].
\end{aligned}$$

Tal como en el inciso *ii*), la derivación de A a $A[x_i]$ se extiende asignando a x_j un valor arbitrario en $A[x_i]$. Definimos una derivación sobre $A[x_i]$ como $D(x_i) = x_{i+1}$.

Ahora escribimos $x = x_0, D^n(x) = x_n$. A este procedimiento se le llama la **adjunción de una indeterminada diferencial** y al anillo diferencial resultante se le denota por $A\{x\}$. Los elementos de $A\{x\}$ se llaman **polinomios diferenciales en** x (son polinomios en x y sus derivadas, es decir, polinomios $p(x, D(x), D^2(x), \ldots, D^n(x), \ldots)$). Por tanto, podemos pensar a este anillo como un anillo polinomial con una sola variable junto con sus derivadas de todos los órdenes.

De manera similar se puede definir el **anillo de polinomios diferenciales en** n **indeterminadas diferenciales** $x_1, \ldots, x_n$ sobre A como sigue: Consideremos el anillo de polinomios $A[x_{ij}]$ con $j = 1, \ldots, n$, $i = 0, 1, \ldots$ y la derivada definida por $D(x_{ij}) = x_{(i+1)j}$. Ahora escribimos $x_j = x_{0j}, D^n(x_j) = x_{nj}, j = 1, \ldots, n$. Denotamos por

$$A\{x_1, \ldots, x_n\} = A[x_1, D(x_1), \ldots, x_n, D(x_n), \ldots] = A[x_{ij}].$$

Si A es un campo diferencial, entonces $A\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un dominio entero diferencial y su derivación se extiende de manera única al campo de fracciones. Denotemos al campo de fracciones por $A\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, sus elementos son funciones racionales diferenciales en $x_1, \ldots, x_n$.

v) El anillo de las funciones holomorfas $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, U un conjunto abierto, con la derivada usual es un anillo diferencial. El campo de las funciones meromorfas sobre el plano complejo, que pueden ser expresadas como el cociente entre dos funciones holomorfas (siempre que la función del denominador no sea cero), con la derivada usual es un campo diferencial.

vi) Sea A un anillo diferencial con derivada δ e I un ideal diferencial de A, entonces el morfismo natural $\varphi : A \to A/I, \varphi(a) = [a]$ es un morfismo diferencial.

En efecto, A/I es un anillo diferencial con derivada δ definida como $\delta([a]) = [\delta(a)]$ para todo $a \in A$. Veamos que φ es un morfismo diferencial: Sean $a, b \in A$ entonces

- $\varphi(a + b) = [a + b] = [a] + [b] = \varphi(a) + \varphi(b)$ y
  $\varphi(a \cdot b) = [a \cdot b] = [a] \cdot [b] = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
  Además $\varphi(1) = [1]$.

- $\varphi(\delta(a)) = [\delta(a)] = \delta([a]) = \delta(\varphi(a))$.

  Por lo tanto, φ es un morfismo diferencial.

El siguiente resultado extiende al primer teorema de isomorfismo de anillos, a los anillos diferenciales.

Proposición 1.1.4. *Si $\phi : A \to B$ es un morfismo diferencial entonces $\operatorname{Ker}\phi$ es un ideal diferencial y el morfismo $\tilde{\phi} : A/\operatorname{Ker}\phi \to \operatorname{Im}\phi$ es un isomorfismo diferencial.*

Demostración. Para la primera parte, es bien sabido que $\operatorname{Ker}\phi$ es un ideal de A. Resta ver que es diferencial, para ello tomemos $a \in \operatorname{Ker}\phi$ entonces $\phi(a) = 0$. Notemos lo siguiente

$$\phi(\delta(a)) = \tilde{\delta}(\phi(a)) = \tilde{\delta}(0) = 0,$$

luego $\delta(a) \in \operatorname{Ker}\phi$.

Bien, ahora de la demostración del primer teorema de isomorfismos se tiene que $\tilde{\phi} : A/\ker\phi \to \operatorname{Im}\phi$ definido como $\tilde{\phi}([a]) = \phi(a)$ es un isomorfismo de anillos bien definido. Falta ver que es diferencial:

$$\tilde{\delta}(\tilde{\phi}([a])) = \tilde{\delta}(\phi(a)) = \phi(\delta(a)) = \tilde{\phi}([\delta(a)]) = \tilde{\phi}(\delta([a])).$$

Con todo $\tilde{\phi} : A/\operatorname{Ker}\phi \to \operatorname{Im}\phi$ es un isomorfismo diferencial. □

El siguiente resultado nos será de utilidad más adelante.

Lema 1.1.5. *Sea F un campo diferencial y $f, g \in F$. Supongamos que*

$$\frac{\delta(f)}{f} = \frac{\delta(g)}{kg}, k \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

entonces $f^k = cg$ para alguna constante $c \in C_F$.

Demostración. De la igualdad (1.1) tenemos que $k\delta(f)g - f\delta(g) = 0$. Notemos ahora lo siguiente

$$\delta\left(\frac{f^k}{g}\right) = \frac{kf^{k-1}\delta(f)g - f^k\delta(g)}{g^2} = \frac{f^{k-1}(k\delta(f)g - f\delta(g))}{g^2} = 0.$$

Así $\frac{f^k}{g} = c$ con $c \in C_F$, de donde $f^k = cg$. □

Definición 1.1.6. Sean (A, δ) y $(B, \tilde{\delta})$ anillos diferenciales.

- Si A es un subanillo de B entonces $A \subset B$ es una **extensión de anillos diferenciales** si $\tilde{\delta}|_A = \delta$. Análogamente una extensión de campos K/F, donde K, F son campos diferenciales, se llama **extensión de campos diferenciales** si la derivada de K restringida a F es la derivada de F.

- Si $S \subset B$, denotaremos por $\mathbf{A}[\mathbf{S}]$ a la $A-$subálgebra diferencial de B generada por S sobre A, es decir, al menor subanillo de B que contiene a A, los elementos de S y sus derivadas.

- Si K/F es una extensión de campos diferenciales y si $S \subset K$, se denota por $\mathbf{F}(\mathbf{S})$ al subcampo diferencial de K generado por S sobre F. Si S es un conjunto finito, se dice que la extensión $F(S)/F$ es **diferencial finitamente generada**.

Recordemos ahora que en teoría de campos se define el concepto de campo de descomposición para un polinomio, más precisamente se tiene una extensión de campos K/F y $f(x)$ un polinomio en $F[x]$. Entonces K es un **campo de descomposición** para el polinomio $f(x)$ si

- K contiene todas las raíces de $f(x)$.

- Si L/F es otro campo que también contiene todas las raíces de $f(x)$ entonces $K \subset L$.

En otras palabras, K es el campo más pequeño que contiene a todas las raíces de $f(x)$.

El objetivo ahora es definir el campo de descomposición diferencial para una ecuación diferencial lineal homogénea. Para ello se necesita introducir el concepto de operador diferencial.

1.2. Anillo de operadores diferenciales

Los operadores diferenciales son una generalización del concepto de diferenciación.

El operador diferencial más simple es el operador D, el cual al actuar sobre una función U da la primera derivada de la función $DU(t) = U'(t)$. La doble derivada de D, D^2, permite obtener la segunda derivada de la función

$D^2U(t) = D(DU(t)) = D(U'(t)) = U''(t)$. De manera similar $D^nU(t) = U^{(n)}(t)$.

Los operadores diferenciales pueden ser más complicados. Por ejemplo, el operador nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Otro ejemplo es el operador de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Enfoquémonos en operadores diferenciales más generales.

Sea F un campo diferencial con derivada no trivial δ.
Convención. Denotaremos de aquí en adelante a la derivada por primas, esto es, $\delta(a) = a', \delta^2(a) = a'', \ldots, \delta^n(a) = a^{(n)}$.

Un **operador diferencial lineal $\mathcal{L}$ con coeficientes en F** es un polinomio en la variable D,

$$\mathcal{L}(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0,\ \ a_i \in F.$$

Si $a_n \neq 0$ se dice que $\mathcal{L}$ tiene grado n. Si $a_n = 1$, se dice que $\mathcal{L}$ es mónico.

Más aún, el **anillo de operadores diferenciales lineales con coeficientes en F** es el anillo no conmutativo

$$F[D] = \{a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0 | a_i \in F, i = 1\ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

de polinomios en la variable D con coeficientes en F donde la variable D satisface la regla $D \cdot a = a' + aD$ para $a \in F$.

Al operador diferencial $\mathcal{L}(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0$ se le asocia la ecuación diferencial lineal de orden n

$$\mathcal{L}(u) = a_nu^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u.$$

Como en la teoría de EDO, se tiene que la ecuación

$$\mathcal{L}(u) = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u = 0$$

puede ser representada como una ecuación diferencial matricial $U' = AU$, con $A \in GL(n, F)$. Para esto se considera

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u^{(2)} \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Aquí hay que notar que la matrices tienen entradas en un campo diferencial. Más aún, si A es un anillo diferencial, se puede definir una derivada en el anillo $M_{n\times n}(A)$ de matrices de $n \times n$ al definir la derivada de una matriz $B = (b_{ij})$ como (b'_{ij}), esto es, como la matriz que resulta de aplicar la derivada de A a cada una de sus entradas. De aquí que $M_{n\times n}(A)$ es un anillo no conmutativo con derivada.

1.3. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

De ahora en adelante, F denotará un campo de característica cero.

Consideremos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas sobre un campo diferencial F

$$\mathcal{L}(u) = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u = 0,\ a_i \in F.$$

Si K/F es una extensión diferencial, el conjunto de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ en K es un C_K-espacio vectorial, donde C_K es el campo de constantes de K. En efecto,

i) Si α y β son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ entonces $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta) = 0$. Como $\mathcal{L}$ es lineal
$$\mathcal{L}(\alpha + \beta) = \mathcal{L}(\alpha) + \mathcal{L}(\beta) = 0.$$

ii) Si α es solución de $\mathcal{L}(u) = 0$ y $a \in C_K$ entonces $(a\alpha)^{(n)} = a\alpha^{(n)}$, luego $\mathcal{L}(a\alpha) = a\mathcal{L}(\alpha) = 0$.

Lo que buscamos ahora es ver que la dimensión de este espacio vectorial es a lo más n, el orden de $\mathcal{L}$. Para ello es necesario introducir el determinante wronskiano.

Definición 1.3.1. Sean $a_1, \ldots, a_n$ elementos en un campo diferencial F. El determinante

$$w = w(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots & a_n \\ a_1' & a_2' \cdots & a_n' \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} \cdots & a_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es el **wronskiano** de $a_1, \ldots, a_n$.

La siguiente propiedad de los determinantes nos servirá más adelante.

Proposición 1.3.2. *Sea F un anillo diferencial, K/F extensión diferencial, $c_{ij} \in C_F, 1 \leq i, j \leq n$ y $z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j$ con $u_j \in K$. Sean $k_1, \ldots, k_n$ enteros no negativos y $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n), \bar{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ entonces*

$$\det(\bar{z}^{(k_1)}, \ldots, \bar{z}^{(k_n)}) = \det(c_{ij}) \det(\bar{u}^{(k_1)}, \ldots, \bar{u}^{(k_n)}).$$

Demostración. Sea C la transpuesta de la matriz (c_{ij}), luego

$$\begin{aligned} \bar{u}C = (u_1 \ldots u_n) & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \\ &= (c_{11}u_1 + \cdots + c_{1n}u_n \cdots c_{n1}u_1 + \cdots + c_{nn}u_n) \\ &= (z_1 \cdots z_n) = \bar{z}. \end{aligned}$$

Ahora como $c_{ij} \in C_F$ tenemos que para cualquier k entero no negativo

$$z_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j^{(k)},$$

de donde

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(k)}C = (u_1^{(k)} \ldots u_n^{(k)}) & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \\ &= (c_{11}u_1^{(k)} + \cdots + c_{1n}u_n^{(k)} \cdots c_{n1}u_1^{(k)} + \cdots + c_{nn}u_n^{(k)}) \\ &= (z_1^{(k)} \cdots z_n^{(k)}) = \bar{z}^{(k)}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^{(k_1)} \\ \vdots \\ \bar{u}^{(k_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}^{(k_1)} \\ \vdots \\ \bar{z}^{(k_n)} \end{pmatrix}.$$

Tomando determinantes ambos lados de la igualdad se sigue el resultado. □

A continuación vemos cómo el wronskiano se relaciona con la independencia lineal de un conjunto de elementos del campo sobre el subcampo de constantes.

Proposición 1.3.3. *Sea F un campo diferencial con campo de constantes C_F y sean $a_1, \ldots, a_n \in F$. Entonces $a_1, \ldots, a_n$ son linealmente independientes sobre C_F si y sólo si $w(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que $a_1, \ldots, a_n$ son linealmente dependientes sobre C_F entonces existen constantes $c_i \in C_F$ no todas ceros tales que $\sum_{i=1}^{n} c_i a_i = 0$. Al derivar $(n-1)$ veces ésta igualdad se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^{(k)} = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

y al no ser todas las c_i cero se obtiene que las columnas del wronskiano son linealmente dependientes, luego $w(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Recíprocamente supongamos que $w(a_1, \ldots, a_n) = 0$ entonces las columnas del wronskiano son linealmente dependientes, por lo que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^{(k)} = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1 \tag{1.2}$$

donde las $c_i \in F$, no son todas cero, $i = 1, \ldots, n$. En particular, para $k = 0$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i = 0. \tag{1.3}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $c_1 \neq 0$, $c_1 = 1$ y $w(a_2, \ldots, a_n) \neq 0$.

Derivando la ecuación (1.2) obtenemos para $k = 0, \ldots, n-2$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i' a_i^{(k)} = 0,$$

pero de (1.2) se sigue que el primer sumando es cero y como $c_1 = 1, c_1' = 0$, luego

$$\sum_{i=2}^{n} c_i' a_i^{(k)} = 0, \text{ para } k = 0, \ldots, n-2.$$

De aquí obtenemos un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en $c_2', \ldots, c_n'$ donde el determinante $w(a_2, \ldots, a_n) \neq 0$, luego $c_2' = \cdots = c_n' = 0$, es decir, las $c_i, i = 1, \ldots, n$ están en el campo de constantes C_F. De aquí y de (1.3) se sigue que $a_1, \ldots, a_n$ son linealmente dependientes sobre C_F. $\square$

La siguiente proposición da una condición necesaria para que el wronskiano sea cero.

Proposición 1.3.4. *Sea $\mathcal{L}(u) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n sobre un campo diferencial F. Si $u_1, \ldots, u_{n+1}$ son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ en una extensión diferencial K de F entonces $w(u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}(u) = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} u' + a_n u$ donde $a_i \in F$ y $u_1, \ldots, u_{n+1}$ soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ en K. Como cada $u_i, i = 1, \ldots, n+1$, es solución de $\mathcal{L}(u) = 0$ entonces $\mathcal{L}(u_i) = u_i^{(n)} + a_1 u_i^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} u_i' + a_n u_i = 0$, luego para cada $i = 1, \ldots, n+1$

$$u_i^{(n)} = -a_1 u_i^{(n-1)} - \cdots - a_{n-1} u_i' - a_n u_i.$$

Por las propiedades del determinante obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
w(u_1,\ldots,u_{n+1}) &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u_{n+1} \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' & u_{n+1}' \\ \vdots & & & & \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} & u_{n+1}^{(n-1)} \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} & u_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_1 & \cdots & u_{n+1} \\ u_1' & \cdots & u_{n+1}' \\ \vdots & & \\ u_1^{(n-1)} & \cdots & u_{n+1}^{(n-1)} \\ -a_1u_1^{(n-1)} - \cdots - a_nu_1 & \cdots & -a_1u_{n+1}^{(n-1)} - \cdots - a_nu_{n+1} \end{vmatrix} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

el determinante es igual a cero, pues los elementos de la última fila son combinación lineal de las otras. □

Con ayuda de la proposición anterior se puede ver que la ecuación diferencial lineal homogénea $\mathcal{L}(u) = 0$ tiene a lo más, el orden de $\mathcal{L}$, soluciones linealmente independientes.

Corolario 1.3.5. $\mathcal{L}(u) = 0$ *tiene a lo más n soluciones en K linealmente independientes en C_K.*

Demostración. Del resultado previo tenemos que si $u_1,\ldots,u_{n+1}$ son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ en K entonces $u_1,\ldots,u_{n+1}$ son linealmente dependientes sobre C_K, es decir, que si tenemos más soluciones que el orden de $\mathcal{L}$ entonces estas son linealmente dependientes sobre C_K. En otras palabras, a lo más podemos tener n soluciones linealmente independientes sobre C_K. □

Reuniendo los resultados 1.3.3 y 1.3.4 se obtiene lo que queriamos ver, que la dimensión del espacio vectorial de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ es a lo más el orden de $\mathcal{L}$.

Teorema 1.3.6. *Sea F un campo diferencial y sea $\mathcal{L}$ un operador diferencial lineal homogéneo mónico de orden n sobre F. Sea K/F una extensión diferencial de campos y sea V el conjunto de soluciones de $\mathcal{L} = 0$ en K. Entonces V es un espacio vectorial sobre C_K con dimensión a lo más n.*

Demostración. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\psi : K &\to K\\ u &\mapsto \mathcal{L}(u).\end{aligned}$$

Por la linealidad de $\mathcal{L}$ tenemos que ψ es una C_K-transformación lineal. Ahora del álgebra lineal sabemos que $V = \operatorname{Ker}\psi$ es un C_K-espacio vectorial. Por la proposición 1.3.4 cualesquiera $n+1$ elementos de V tendrán wronskiano igual a cero y por la proposición 1.3.3 estos elementos serán linealmente dependientes sobre C_K. Por lo tanto, $V = \operatorname{Ker}\psi$ es un espacio vectorial de dimensión finita a lo más n. □

Corolario 1.3.7. *Sea F un campo diferencial y sean $\mathcal{L}_1(u), \mathcal{L}_2(u)$ dos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas mónicos de orden n sobre F. Sea $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset F$ un conjunto linealmente independientes, sobre C_F tal que $\mathcal{L}_i(u_j) = 0$ para $i = 1, 2$ y $j = 1, \ldots, n$. Entonces*

$$\mathcal{L}_1(u) = \mathcal{L}_2(u) = \frac{w(u, u_1, \ldots, u_n)}{w(u_1, \ldots, u_n)}.$$

Demostración. Sean $\mathcal{L}_1(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^{(i)}$ y $\mathcal{L}_2(u) = \sum_{i=0}^n b_i u^{(i)}$ donde $a_n = b_n = 1$. Sea j el mayor subíndice tal que $a_j \neq b_j$. Veamos que tal j no existe. Para ello consideremos a la ecuación

$$\mathcal{L}(u) = (a_j - b_j)^{-1}(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(u) = \sum_{i=0}^{j-1}(a_j - b_j)^{-1}(a_i - b_i)u^{(i)} + u^{(j)}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(u)$ es una ecuación diferencial lineal homogénea, mónico, de orden j. Por otro lado, notemos que $\mathcal{L}(u_i) = 0, i = 1, \ldots, n$, además como $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset F$ es un conjunto linealmente independiente sobre C_F, por el teorema 1.3.6, tenemos que la dimensión del conjunto de soluciones de $\mathcal{L} = 0$ sobre C_F es a lo más n, que es mayor a j, el grado de $\mathcal{L}$, lo cual lleva a una contradicción. Por lo tanto, no existe tal j y así $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, de donde $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Ahora bien, si se desarrolla el determinante por la primera columna vemos que tiene la forma

$$w(u, u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i u^{(i)}$$

con $\bar{a}_i = (-1)^i \det(\ldots, \bar{u}^{(i-1)}, \bar{u}^{(i+1)}, \ldots)$ y $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$.

Consideremos

$$\mathcal{L}_3(u) = \frac{w(u, u_1, \ldots, u_n)}{w(u_1, \ldots, u_n)},$$

este es una ecuación diferencial lineal mónico homogéneo sobre F de grado n y $\mathcal{L}_3(u_i) = 0, i = 1, \ldots, n$, luego por un argumento análogo al anterior obtenemos que $\mathcal{L}_1(u) = \mathcal{L}_2(u) = \mathcal{L}_3(u)$. □

Ejemplo 2.

i) Sea $F = \mathbb{C}(t)$ con la derivada usual y consideremos al operador diferencial $\mathcal{L}(D) = D^2 + \frac{1}{t}D = 0$, haciendo alusión de que a un operador diferencial se le puede asociar una ecuación diferencial, tenemos que la ecuación diferencial asociada a este operador es $\mathcal{L}(u) = u'' + \frac{1}{t}u' = 0$. Por inspección es claro que $u_1 = 1$ y $u_2 = \ln t$ son ambas soluciones de la ecuación.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u_1) &= u_1'' + \frac{1}{t}u_1' = 0 + \frac{1}{t}0 = 0,\\
\mathcal{L}(u_2) &= (\ln t)'' + \frac{1}{t}(\ln t)' = \left(\frac{1}{t}\right)' + \frac{1}{t}\frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} = 0.
\end{aligned}$$

ii) Tomando de nuevo $F = \mathbb{C}(t)$ con la derivada usual y $\mathcal{L}(D) = D^2 + D^0 = 0$, la ecuación diferencial asociada es $\mathcal{L}(u) = u'' + u = 0$. Por inspección $u_1 = \sin t, u_2 = \cos t$ son soluciones . Además $u_3 = e^{it}, u_4 = e^{-it}$ son soluciones también. En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u_1) &= (\sin t)'' + \sin t = (\cos t)' + \sin t = -\sin t + \sin t = 0,\\
\mathcal{L}(u_2) &= (\cos t)'' + \cos t = (-\sin t)' + \cos t = -\cos t + \cos t = 0,\\
\mathcal{L}(u_3) &= (e^{it})'' + e^{it} = (ie^{it})' + e^{it} = i^2e^{it} + e^{it} = -e^{it} + e^{it} = 0,\\
\mathcal{L}(u_4) &= (e^{-it})'' + e^{-it} = (-ie^{-it})' + e^{-it} = (-i)^2e^{-it} + e^{-it}\\
&= -e^{-it} + e^{-it} = 0.
\end{aligned}$$

Hemos visto que $\mathcal{L}(u) = 0$ tiene a lo más n soluciones linealmente independientes en C_L, lo cual nos motiva a la siguiente definición.

Definición 1.3.8. Si F es un campo diferencial, $\mathcal{L}(u) = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes en F y K/F extensión diferencial. Entonces

- ◇ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un **conjunto fundamental de soluciones** de $\mathcal{L}(u) = 0$ en K si y sólo si $\mathcal{L}(u_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y los u_i son linealmente independientes sobre el campo de constantes C_K.

- ◇ Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$, con ecuación matricial asociada $U' = AU$, entonces la **matriz solución fundamental** es

$$\Phi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' \cdots , & u_n' \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} \cdots , & u_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Observación 3.

i) Notemos que una solución a una ecuación diferencial es el equivalente (en este contexto) a la raíz de un polinomio gracias al operador $\mathcal{L}(u)$.

ii) También notemos que si C_F es el campo de constantes de F entonces todas las C_F-combinaciones lineales de las soluciones $u_1, \ldots, u_n$ son también soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$.

iii) Cualquier conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ forma una base para el espacio solución de $\mathcal{L}(u) = 0$.

Ejemplo 3. i) Tomando en cuenta el ejemplo 2 i), $F = \mathbb{C}(t), K = \mathbb{C}(t)(\ln t)$, el conjunto $\{1, \ln t\}$ es un conjunto fundamental para $\mathcal{L}(u) = u'' + \frac{1}{t}u' = 0$, en efecto

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix},$$

con $w(1, \ln t) = \frac{1}{t} \neq 0$ para todo el dominio de $\ln t$.

ii) Tomando en cuenta el ejemplo 2, $F = \mathbb{C}(t), K = \mathbb{C}(t)(\sin t, \cos t)$. El conjunto $\{\sin t, \cos t\}, \{e^{it}, e^{-it}\}$ son cada uno un conjunto fundamental de soluciones para $\mathcal{L}(u) = u'' + u = 0$. En efecto,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Luego $w(\sin t, \cos t) = -(\sin^2 t + \cos^2 t) = -1 \neq 0$.

Por otro lado,

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix}.$$

Y así $w(e^{it}, e^{-it}) = -2i \neq 0$.

1.4. Extensiones de Picard-Vessiot

La siguiente es una definición del campo de descomposición para $\mathcal{L}$ más cercana a la algebraica. La extensión de Picard-Vessiot de $\mathcal{L}(u) = 0$ con coeficientes en un campo diferencial F es el análogo al campo de descomposición del polinomio $p(x)$ sobre F. Es decir, es la menor extensión diferencial de F que contiene un conjunto fundamental de soluciones para $\mathcal{L}(u) = 0$.

Veamos la definición formal.

Definición 1.4.1. Sea $\mathcal{L}(u) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes en un campo diferencial F. Una extensión diferencial diferencial K/F es una **extensión de Picard-Vessiot para $\mathcal{L}$** si

- ⋄ $K = F(u_1, \ldots, u_n)$ donde $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ en K.
- ⋄ K no contiene constantes distintas de las que están en F, es decir, $C_K = C_F$.

Ejemplo 4. i) Sea F el conjunto de funciones meromorfas con la derivada usual. Consideremos la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(z)y' + a_0(z)y = 0$$

donde $a_i(z) \in F$ definidas sobre $U \setminus \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$, U un conjunto abierto acotado, simplemente conexo. Como mencionamos antes, esta ecuación se puede representar como una ecuación matricial $y' = Ay$ y si se tiene $y(x_0) = y_0$. Ahora aplicando el teorema II, capítulo V del libro [W] al problema de valores iniciales entonces existe una única solución $y(z)$ holomorfa en U que satisface la condición inicial, más aún las soluciones del problema general forman un subespacio lineal complejo de dimensión n del espacio de funciones holomorfas. Por lo tanto, tenemos que existen n únicas soluciones holomorfas linealmente independientes de $\mathcal{L}(y) = 0$ definidas sobre U. Sea este conjunto fundamental de soluciones $\{f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)\}$, podemos pensar estas soluciones en el anillo de funciones holomorfas. Entonces tenemos la extensión $K = F(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z))$ de F. Considerando la derivada usual sobre K, K es un campo diferencial. Veamos ahora que $C_F = C_K$. Sea $f(z) \in C_K$, como K esta contenido en el conjunto de funciones meromorfas se sigue que $f(z)$ es constante en F, es decir, $f(z) \in C_F$. Por lo tanto, K es una extensión de Picard-Vessiot de F para $\mathcal{L}(y) = 0$.

Los siguientes ejemplos son casos particulares del ejemplo anterior.

ii) Sea F y la ecuación diferencial $\mathcal{L}(u) = u'' + \frac{1}{t}u' = 0$, hemos visto que $\mathcal{L}(1) = 0$, $\mathcal{L}(\ln t) = 0$ y que $\{1, \ln t\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para $\mathcal{L}$. Entonces una extensión de Picard-Vessiot para $\mathcal{L}$ es $K = F(\ln t)$.

iii) Consideremos F y la ecuación diferencial $\mathcal{L}(u) = u'' + u = 0$. Como vimos en ejemplos anteriores $\mathcal{L}(\cos z) = 0$, $\mathcal{L}(\operatorname{sen} z) = 0$ y $\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. Si hacemos $K = F(\operatorname{sen} z, \cos z)$ entonces $C_F = C_K = \mathbb{C}$ y así K es una extensión de Picard-Vessiot de $\mathbb{C}(z)$ para $\mathcal{L}$.

Sea F un campo diferencial y $K = F(w)$ tal que $w' = w$ y consideremos la ecuación diferencial $u' - u = 0$, por como estamos tomando w claramente es solución de la ecuación. Si se quiere el análogo al campo de descomposición, parece natural pensar que la extensión de Picard-Vessiot de esta ecuación es precisamente el mismo $F(w)$.

Por otro lado, si adjuntamos otra indeterminada z que también sea solución y tomamos $L = K(z)$ con $z' = z$, la extensión L/K satisface la primer condición de la definición de Picard-Vessiot, pero

$$\left(\frac{z}{w}\right)' = \frac{z'w - zw'}{w^2} = \frac{zw - zw}{w^2} = 0.$$

Luego $\frac{z}{w}$ es constante, así L/K añade una nueva constante $\frac{z}{w}$. Por lo tanto, con la segunda condición en la definición de extensión de Picard- Vessiot se busca garantizar la minimalidad de las extensiones.

En el caso cuando F es un campo diferencial con campo de constantes $\mathbf{C_F}$ **algebraicamente cerrado**; veremos que existe una extensión de Picard-vessiot K de F para una ecuación diferencial lineal homogénea

$$\mathcal{L}(u) = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u = 0, \;\; a_i \in F$$

y que es única salvo F-isomorfismos diferenciales.

1.4.1. Existencia de las extensiones de Picard-Vessiot

Para la demostración de la existencia es necesario construir una $F-$álgebra diferencial que contenga un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ y luego hacer el cociente por un ideal diferencial maximal para obtener una extensión sin agregar constantes.

Procedamos a ver la construcción de esta F-álgebra diferencial: consideremos $F[u_{ij}]$, $0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n$ un anillo de polinomios en n^2 indeterminadas, la derivada de F a $F[u_{ij}]$ se extiende definiendo

$$u'_{ij} = u_{i+1,j} \text{ para } 0 \leq i \leq n-2, \tag{1.4}$$

$$u'_{n-1,\,j} = -a_{n-1}u_{n-1,j} - \cdots - a_1u_{1j} - a_0u_{0j}. \tag{1.5}$$

Consideremos el conjunto multiplicativo de las potencias de $w = \det(u_{ij}) = w(u_{01}, \ldots, u_{0n})$. Con esto se define

$$\mathcal{U} := [w^{-1}]F[u_{ij}] = F[u_{ij}][w^{-1}]$$

la localización de $F[u_{ij}]$ por ese conjunto multiplicativo. La derivada del anillo $F[u_{ij}]$ se puede extender a la localización $\mathcal{U}$ de manera única (tal como observamos en 1). De esta manera $\mathcal{U}$ es una $F-$álgebra diferencial la cual se llama **álgebra universal de soluciones de $\mathcal{L}$**.

Veamos algunas propiedades del álgebra universal de soluciones de $\mathcal{L}$. Haremos un abuso de notación, denotaremos a las clases de u_{ij} por u_{ij}.

i) Por la forma en como se definió la derivada en $F[u_{ij}]$, se ha construido soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$. En efecto, de la definición de la derivada en $F[u_{ij}]$ tenemos $u_{0j}^{(i)} = u_{ij}$. Combinando esto con (1.5) tenemos

$$\mathcal{L}(u_{0j}) = u_{0j}^{(n)} + a_{n-1}u_{0j}^{(n-1)} + \cdots + a_1u'_{0j} + a_0u_{0j} = 0, \;\; j = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Por lo que $\{u_{01}, \cdots, u_{0n}\}$ son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ en $\mathcal{U}$.

ii) Del ejemplo 1 inciso *ii*), la derivada sobre $F[u_{ij}]$ está bien definida.

iii) Tenemos que $\mathcal{L}(u_{0i}) = 0$ y además $w = \det(u_{ij}) = w(u_{01}, \ldots, u_{0n}) \neq 0$ en $\mathcal{U}$. Por tanto, $\{u_{01}, \ldots, u_{0n}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L} = 0$ en $\mathcal{U}$.

Procedamos a demostrar la existencia de una extensión de Picard-Vessiot para $\mathcal{L} = 0$.

La idea para construir la extensión será la siguiente:

- De las propiedades del álgebra universal de soluciones $\mathcal{U}$ tenemos que ésta contiene un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L} = 0$, pero $\mathcal{U}$ no es un campo diferencial, es una $F-$álgebra diferencial.

- Si P es un elemento máximo en el conjunto de ideales diferenciales de $\mathcal{U}$, lo que veremos es que P es un ideal primo y por lo tanto $\mathcal{U}/P$ es un dominio entero.

- Como $\mathcal{U}/P$ es dominio entero podemos tomar K su campo de fracciones, probaremos que K tiene el mismo campo de constantes que F, es decir, $C_F = C_K$ y así K sería la extensión de Picard-Vessiot de F para $\mathcal{L}(u) = 0$.

Siguiendo el segundo punto presentamos la proposición.

Proposición 1.4.2. *Sea F un campo diferencial y $\mathcal{U}/F$ una extensión de anillos diferenciales. Sea I un elemento máximo en el conjunto de ideales diferenciales de $\mathcal{U}$ entonces I es un ideal primo.*

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{I : I \text{ es ideal diferencial propio de } \mathcal{U}\}$ parcialmente ordenado por la inclusión, del lema de Zorn, se tiene que $\mathcal{D}$ tiene un elemento máximo, digamos I. Ahora

• $\mathcal{U}/I$ no posee ideales diferenciales no triviales.

En efecto, supongamos por el contrario que $\mathcal{U}/I$ posee ideales diferenciales no triviales, luego existe $\bar{J}$ un ideal diferencial no trivial de $\mathcal{U}/I$, $(0) \neq \bar{J} \lneq \mathcal{U}/I$. Aplicando el teorema de correspondencia obtenemos $J \leq \mathcal{U}$ con $\bar{J} = \pi(J) = \{[j] : j \in J\}$ tal que $I \subsetneq J \subsetneq \mathcal{U}$.

Notemos que J es diferencial: Sea $a \in J$ entonces $[a'] = ([a])' \in \bar{J}$, luego $[a'] = [j]$ con $j \in J$, por lo que $a' - j \in I \subset J$, de donde $a' \in J$. Así J es un ideal diferencial de $\mathcal{U}$ que contiene propiamente a I, lo cual no es posible, pues I es un elemento máximo.

Queremos ver que I es un ideal primo, para ello veremos que

• $\mathcal{U}/I$ es un dominio entero.

Supongamos por el contrario que $\mathcal{U}/I$ tiene divisores de cero, es decir, existen $a, b \in \mathcal{U}/I, a \neq 0, b \neq 0$ tales que $ab = 0$.

a) Afirmamos que $a^{(k)}b^{k+1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En efecto, por inducción:

▪ Para $k = 1$, sabemos que $ab = 0$, luego

$$(ab)' = a'b + ab' = 0 \tag{1.7}$$

multiplicando por b a la ecuación (1.7) obtenemos

$$a'b^2 + ab'b = 0$$

o equivalentemente al ser $\mathcal{U}$ un anillo conmutativo se tiene $a'b^2 = 0$.

▪ Supongamos que

$$a^{(k)}b^{k+1} = 0. \tag{1.8}$$

▪ Para $k + 1$: Derivando la ecuación (1.8) tenemos que

$$a^{(k+1)}b^{k+1} + a^{(k)}(k + 1)b^k b' = 0.$$

Multiplicando por b la última ecuación obtenemos

$$a^{(k+1)}b^{k+2} + a^{(k)}(k + 1)b^{k+1}b' = 0,$$

luego por la hipótesis de inducción tenemos que el segundo sumando es cero, de donde $a^{(k+1)}b^{k+2} = 0$, concluyendo así la afirmación.

Ahora sea J el ideal diferencial generado por a, es decir, el ideal generado por a y sus derivadas.

b) Afirmamos que b es nilpotente.

Por el contrario, supongamos que ninguna potencia de b es cero, esto es, $b^k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Con esta suposición se tiene que todos los elementos de J son divisores de cero: Sea $c \in J$ entonces $c = \sum_{k=0}^{n} c_k a^{(k)}$ con $n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathcal{U}/I$. Si ahora tomamos

$$\begin{aligned}
cb^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{n} c_k a^{(k)}\right) b^{n+1} \\
&= c_0 a^{(0)} b^{n+1} + c_1 a' b^{n+1} + \cdots + c_n a^{(n)} b^{n+1} \\
&= c_0 a^{(0)} b b^n + c_1 a' b^2 b^{n-1} + \cdots + c_n a^{(n)} b^{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

por la afirmación a). Como $b^{n+1} \neq 0$ y c es cualquier elemento de J se sigue que los elementos de J son divisores de cero. Luego $1 \notin J$, se sigue que $J \neq \mathcal{U}/I$. Además como $a \neq 0$ y $a \in J$ tenemos que J es un ideal diferencial propio de $\mathcal{U}/I$, lo cual es una contradicción al primer punto. Notemos que esta contradicción se siguió de suponer que $b^k \neq 0$. Por lo tanto, b es nilpotente.

Como b es un divisor de cero arbitrario, tenemos que todos los divisores de cero en $\mathcal{U}/I$ son nilpotentes, en particular a es nilpotente. Luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m = 0$. Sea $k = \min\{m \in \mathbb{N} | a^m = 0\}$ entonces

$$0 = (a^k)' = ka^{k-1}a'. \tag{1.9}$$

Recordemos que estamos en un campo F con característica cero. Como F es subanillo de $\mathcal{U}$ entonces la característica de $\mathcal{U}$ es cero. Ahora ya que F es campo, de la proposición C.0.2, el morfismo de anillos $\pi \circ i : F \to \mathcal{U}/I$ es inyectivo donde $i : F \hookrightarrow \mathcal{U}$ es el morfismo inclusión y $\pi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/I$ es el morfismo proyección, así $F \subset \mathcal{U}/I$, luego la característica de $\mathcal{U}/I$ también es cero. Como $a^{k-1} \neq 0$ y $\mathcal{U}/I$ es de característica cero se sigue que $ka^{k-1} \neq 0$, luego de (1.9), a' debe ser divisor de cero.

Como a es divisor de cero y encontramos que a' es un divisor de cero, hemos probado que la derivada de un divisor de cero es un divisor de cero. Por lo tanto, a y sus derivadas son divisores de cero y por tanto nilpotentes.

Obtuvimos que J es un ideal diferencial con elementos nilpotentes, entonces no puede contener a 1, de donde $J \neq \mathcal{U}/I$ y así J es un ideal propio de $\mathcal{U}/I$, lo que es una contradicción al primer punto. Por lo tanto, $\mathcal{U}/I$ no tiene divisores de cero, luego es un dominio entero y así I es un ideal primo. □

La próxima proposición ayudará con el tercer punto de la idea.

Proposición 1.4.3. *Sea F un campo diferencial con campo de constantes C_F algebraicamente cerrado y sea $\mathcal{U}/F$ una extensión de anillos diferenciales donde $\mathcal{U}$ es un dominio entero, finitamente generado como $F-$álgebra que no tiene ideales diferenciales propios. Sea $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{U})$ el campo de fracciones de $\mathcal{U}$. Entonces K no contiene nuevas constantes, esto es, $C_K = C_F$.*

Demostración. Como $F \subset \mathcal{U} \subset K$ y la derivada en K restringida a F es la misma que la de F tenemos que $C_F \subset C_K$. Resta ver que $C_K \subset C_F$.

Afirmación 1. Los elementos de $C_K - C_F$ no son algebraicos sobre F. En efecto, sea $\alpha \in C_K - C_F$ y supongamos que es algebraico sobre F. Por tanto, podemos considerar a $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ el polinomio mínimo para α sobre F, luego $p(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$. Derivando y reagrupando obtenemos

$$\begin{aligned} p'(\alpha) &= n\alpha^{(n-1)}\alpha' + a_{n-1}(n-1)\alpha^{(n-2)}\alpha' + \cdots + a_1\alpha' \\ &+ a'_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a'_1\alpha + a'_0 \\ &= (n\alpha^{(n-1)} + a_{n-1}(n-1)\alpha^{(n-2)} + \cdots + a_1)\alpha' + a'_{n-1}\alpha^{n-1} \\ &+ \cdots + a'_1\alpha + a'_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

despejando α' de aquí tenemos

$$\alpha' = -\frac{a'_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a'_1\alpha + a'_0}{n\alpha^{(n-1)} + a_{n-1}(n-1)\alpha^{(n-2)} + \cdots + a_1},$$

pero $\alpha' = 0$ pues $\alpha \in C_K$, luego $a'_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a'_1\alpha + a'_0 = 0$, es decir, α es raíz del polinomio $a'_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a'_1x + a'_0 \in F[x]$ de grado a lo más $(n-1)$. Así por la minimalidad de $p(x)$ se sigue que $a'_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a'_1x + a'_0 = 0$.

Luego al ser $a'_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a'_1x + a'_0 = 0$ se debe cumplir que $a'_i = 0, i = 0, 1, \ldots, n-1$. Como además $a_n = 1 \in C_F$ tenemos que $p(x) \in C_F[x]$, pero α es raíz de $p(x)$ y C_F es algebraicamente cerrado entonces $\alpha \in C_F$, lo que es una contradicción. Luego los elementos en $C_K - C_F$ no son algebraicos.

Afirmación 2. $C_K \subset \mathcal{U}$.

Sea $b \in C_K$, como $b \in K$, $b = \frac{c}{d}$ con $c, d \in \mathcal{U}, d \neq 0$. Sea

$$J = \{h \in \mathcal{U} : hb \in \mathcal{U}\},$$

J es un ideal diferencial de $\mathcal{U}$: Para $h \in J$ tenemos $(hb)' = h'b + hb' = h'b$, como $hb \in \mathcal{U}, h'b = (hb)' \in \mathcal{U}$, así $h' \in J$.

Puesto que $\mathcal{U}$ no contiene ideales diferenciales propios entonces $J = \mathcal{U}$ o $J = \{0\}$. Ya que $b = \frac{c}{d}$ luego $db = c \in \mathcal{U}$, de donde $d \in J$ con $d \neq 0$. Por tanto, J no es el ideal cero. Así $J = \mathcal{U}$, por ende $1 \in J$ y $b = 1 \cdot b \in \mathcal{U}$.

Afirmación 3. $C_K \subset C_F$.

Observemos primero que, si para todo $b \in C_K$ existe un elemento $c \in C_F$ tal que $b - c$ no es invertible en $\mathcal{U}$ entonces el ideal $(b-c)\mathcal{U}$ sería un ideal diferencial diferente de $\mathcal{U}$ y por tanto debería ser cero. De este modo, $b = c \in C_F$ y así se concluiría que $C_K \subset C_F$.

Dicho esto mostremos la observación. Sea $\overline{F}$ la cerradura algebraica de F y $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \otimes_F \overline{F}$. Tenemos que $\mathcal{U}$ y $\overline{F}$ son $F-$álgebras. Luego $\overline{\mathcal{U}}$ es una $F-$álgebra también.

Consideremos las siguientes identificaciones naturales

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U} &\to \overline{\mathcal{U}} & \qquad \phi : F &\to F \otimes_F \overline{F} \\ x &\mapsto x \otimes 1 & y &\mapsto y \otimes 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

De la primera identificación tenemos que, si el elemento $b\otimes 1 - c\otimes 1 = (b-c)\otimes 1$ no es una unidad en $\overline{\mathcal{U}}$, entonces el elemento $b - c$ no es una unidad en $\mathcal{U}$. Tomemos también el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \overline{F} \otimes_F \overline{F} &\to \overline{F} \\ x \otimes y &\mapsto xy. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sea V la variedad algebraica afín con anillo de coordenadas $\overline{\mathcal{U}}$,

$$\overline{\mathcal{U}} = \overline{F}[V] := \overline{F}[x_1, \ldots, x_n]/I(V).$$

Sea $b \in C_K$, por la afirmación 2 de la demostración, obtenemos que $b \in \mathcal{U}$, ahora de la primera identificación en (1.10), podemos identificar a b con $\bar{b} = b \otimes 1 \in \overline{\mathcal{U}}$, entonces $\bar{b}$ define una función $\overline{F}-$valuada f sobre V,

$$f : V \to \overline{F}.$$

Como V y $\overline{F} = \mathbb{A}^1_{\overline{F}}$ son variedades algebraicas afines, por el teorema de Chevalley, A.1.20, tenemos que $f(V)$ es un conjunto construible en $\mathbb{A}^1_{\overline{F}}$. Por lo tanto, $f(V)$ es un conjunto finito de puntos o es el complemento de un conjunto finito de puntos.

Si $f(V)$ es el complemento de un conjunto finito de puntos: Al ser C_F algebraicamente cerrado es infinito, luego existe $c \in C_F$ tal que $f(v) = c$ para algún $v \in V$, pero de la identificación (1.10) tenemos que

$$f(v) = c \otimes 1 \in C_F \otimes \overline{F}$$

para algún $v \in V$, de modo que $f - (c \otimes 1)$ se anula en v.

Consideremos el ideal maximal de v, $m_v = I(\{v\})$, como $f - (c \otimes 1)$ se anula en v entonces $\bar{b} - c \otimes 1 = b \otimes 1 - c \otimes 1$ pertenece a m_v. Por lo tanto, del resultado C.0.1 $b \otimes 1 - c \otimes 1$ no es invertible en $\mathcal{U}$ tal como queriamos mostrar.

Si $f(V)$ es finito: ya que $\overline{\mathcal{U}}$ es dominio entero y $\overline{\mathcal{U}} = \overline{F}[x_1, \ldots, k_n]/I(V)$ tenemos que $I(V)$ es primo, por lo que V es irreducible, de donde $f(V)$ es irreducible. De aquí y del hecho que $f(V)$ es finito obtenemos que consta de un solo punto. Así f es constante, entonces $\overline{b} \in \overline{F}$, luego de la identificación (1.10), b está en F, luego está en C_F.

$\square$

Ahora sí, con ayuda de los resultados previos se puede dar la existencia de las extensiones de Picard-Vessiot.

Teorema 1.4.4. *Sea F un campo diferencial con campo de constantes algebraicamente cerrado C_F. Sea $\mathcal{L}(u) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea definida sobre F. Sea $\mathcal{U}$ el álgebra universal de soluciones para $\mathcal{L}(u)$ y sea P un elemento máximo en el conjunto de ideales diferenciales de $\mathcal{U}$. Entonces, P es un ideal primo y el campo de fracciones del domino $\mathcal{U}/P$ es una extensión de Picard-Vessiot de F para $\mathcal{L}(u)$.*

Demostración. En la proposición 1.4.2 vimos que P es primo. Así $\mathcal{U}/P$ es dominio entero, luego tiene sentido considerar su campo de fracciones que denotaremos por K. Del primer punto de la proposición 1.4.2 tenemos que $\mathcal{U}/P$ no tiene ideales diferenciales propios, se sigue entonces de la proposición 1.4.3 que $C_F = C_K$.

De la tercera propiedad del álgebra universal de soluciones, $\mathcal{U}$ es diferencialmente generado sobre F por soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$. Más aún, K es diferencialmente generado sobre F por soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ y estas forman un conjunto fundamental de soluciones, pues el wronskiano al ser distinto de cero en $\mathcal{U}$, lo es en $\mathcal{U}/P$ y por lo tanto en K. Con todo, K es una extensión de Picard-Vessiot de F para $\mathcal{L}(u)$. $\square$

1.4.2. Unicidad de las extensiones de Picard-Vessiot

Lo que se hará ahora es reunir las condiciones para garantizar la unicidad de la extensión de Picard-Vessiot.

Proposición 1.4.5. *Sean L_1, L_2 extensiones de Picard-Vessiot de F para una ecuación diferencial lineal homogéneo $\mathcal{L}(u) = 0$ de orden n y sea K/F una extensión diferencial con $C_F = C_K$. Sean $\sigma_1 : L_1 \to K, \sigma_2 : L_2 \to K$ dos $F-$morfismos diferenciales, entonces $\sigma_1(L_1) = \sigma_2(L_2)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}(u) = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdot + a_1 u' + a_0 u = 0$ con $a_i \in F$. Consideremos el espacio vectorial $V_i = \{\alpha \in L_i : \mathcal{L}(\alpha) = 0\}, i = 1, 2$. Como $\mathcal{L}$ tiene orden n sobre F y L_1 es una extensión de Picard-Vessiot de $\mathcal{L}$ sobre F entonces V_i es un espacio vectorial sobre el campo $C_K = C_F$ de dimensión n, la cual denotamos por $\dim_{C_F} V_i$. Ahora sea $V = \{\alpha \in K : \mathcal{L}(\alpha) = 0\}$. Como $\mathcal{L}$ es de orden n, por el corolario 1.3.5, se sigue que $\mathcal{L}$ tiene a lo más n soluciones linealmente independientes en el campo de constantes C_F, por lo que $\dim_{C_F} V \leq n$.

Afirmamos que $\sigma_i(V_i) \subset V, i = 1, 2$. En efecto, sea $\alpha \in V_i$ entonces $\mathcal{L}(\alpha) = 0$ y $\alpha \in L_i$. Como σ_i es F-morfismo y además diferencial ($\sigma_i'(\alpha) = \sigma_i(\alpha')$) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sigma_i(\alpha)) &= (\sigma_i(\alpha))^{(n)} + a_{n-1}(\sigma_i(\alpha))^{(n-1)} + \cdots + a_1(\sigma_i(\alpha))' + a_0\sigma_i(\alpha) \\
&= \sigma_i(\alpha^{(n)}) + a_{n-1}\sigma_i(\alpha^{(n-1)}) + \cdots + a_1\sigma_i(\alpha') + a_0\sigma_i(\alpha) \\
&= \sigma_i(\alpha^{(n)}) + \sigma_i(a_{n-1}\alpha^{(n-1)}) + \cdots + \sigma_i(a_1\alpha') + \sigma_i(a_0\alpha) \\
&= \sigma_i(\alpha^{(n)} + a_{n-1}\alpha^{(n-1)} + \cdots + a_1\alpha' + a_0\alpha) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como además $\sigma_i(\alpha) \in \sigma_i(L_i) \subset K$, se tiene que $\sigma_i(\alpha) \in V$. Así obtenemos que

$$n = \dim_{C_F} V_i = \dim_{C_F}(\sigma_i(V_i)) \leq \dim_{C_F} V.$$

Luego $\sigma_1(V_1) = \sigma_2(V_2) = V$. Como L_1 y L_2 son extensiones de Picard- Vessiot de F entonces $L_1 = F(V_1)$ y $L_2 = F(V_2)$. Por lo tanto, $\sigma_1(L_1) = \sigma_2(L_2)$. $\square$

Corolario 1.4.6. *Sean $F \subset K \subset M$ campos diferenciales, K/F una extensión de Picard- Vessiot con $C_F = C_M$. Entonces para todo $F-$automorfismo diferencial $\sigma : M \to M$ se tiene que $\sigma(K) = K$.*

Demostración. Tenemos los $F-$morfismos diferenciales $\sigma : M \to M$ y la inclusión $i : K \to M$. Entonces de la proposición anterior

$$K = i(K) = \sigma|_K(K),$$

por lo cual $K = \sigma(K)$. $\square$

El siguiente resultado trata la unicidad de la extensión de Picard-Vessiot.

Teorema 1.4.7. *Sea F un campo diferencial con C_F algebraicamente cerrado y $\mathcal{L}(u) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea sobre F. Sean L_1, L_2 extensiones de Picard-Vessiot de F para $\mathcal{L}$. Entonces existe un $F-$isomorfismo diferencial de L_1 en L_2.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que L_1 es la extensión de Picard-Vessiot de F construida en el teorema de existencia, es decir, que L_1 es el campo de fracciones de $\mathcal{U}/P$ donde $\mathcal{U} = F[u_{ij}][w^{-1}]$ es el álgebra universal de soluciones de $\mathcal{L}$ y P un elemento máximo en el conjunto de ideales diferenciales de $\mathcal{U}$.

Lo que haremos será construir, a partir de los productos tensoriales, una extensión E/F con $C_E = C_F$ y $F-$morfismos diferenciales $\varphi_1 : L_1 \to E$ y $\varphi_2 : L_2 \to E$ para después aplicar el teorema 1.4.5 y concluir que L_1 y L_2 son isomorfos. Para ello, consideremos el anillo $A := (\mathcal{U}/P) \otimes_F L_2$. Notemos lo siguiente

$$A = (\mathcal{U}/P) \otimes_F L_2 = F[U_{ij}, W^{-1}] \otimes_F L_2 = L_2[U_{ij}, W^{-1}]$$

donde U_{ij} y W^{-1} son las clases de u_{ij} y w^{-1} respectivamente. De aquí A es un anillo diferencial finitamente generado como L_2-álgebra donde su derivada es definida por

$$\begin{aligned} \delta : (\mathcal{U}/P) \otimes_F L_2 &\to (\mathcal{U}/P) \otimes_F L_2 \\ x \otimes y &\mapsto \delta(x) \otimes y + x \otimes \delta(y). \end{aligned}$$

Sea Q un ideal diferencial propio maximal de A y tomemos la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U}/P &\to A \\ a &\mapsto a \otimes 1. \end{aligned}$$

La preimagen de Q bajo φ es

$$\varphi^{-1}(Q) = \{a \in \mathcal{U}/P : \varphi(a) \in Q\} = \{a \in \mathcal{U}/P : a \otimes 1 \in Q\}.$$

Como $\mathcal{U}/P$ no tiene ideales diferenciales propios, $\varphi^{-1}(Q)$ es cero o $\varphi^{-1}(Q)$ es $\mathcal{U}/P$. Si es $\mathcal{U}/P$ entonces $1 \in \varphi^{-1}(Q)$ y así $1 \otimes 1 \in Q$, por lo cual $Q = A$, lo cual no es posible, pues Q es maximal. Por tanto, $\varphi^{-1}(Q)$ es cero. Con esto la función

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{U}/P &\to A/Q \\ a &\mapsto \overline{a \otimes 1} \end{aligned}$$

es inyectiva. En efecto, supongamos que $\psi(a) = \psi(b)$ entonces $\overline{a \otimes 1} = \overline{b \otimes 1}$, luego $a \otimes 1 - b \otimes 1 = (a - b) \otimes 1 \in Q$, por lo que $a - b \in \varphi^{-1}(Q) = 0$, de donde $a = b$. De igual forma podemos probar que la función

$$\begin{aligned} \phi : L_2 &\to A/Q \\ b &\mapsto \overline{1 \otimes b} \end{aligned}$$

es inyectivo, entonces de la proposición 1.1.4 tenemos que $L_2 \simeq \operatorname{Im}\phi \subset A/Q$, luego L_2 esta contenido en A/Q. Dado que Q es maximal, Q es un ideal primo y así A/Q es un dominio entero, consideremos entonces su campo de fracciones E. Tenemos que A es un anillo diferencial finitamente generado como L_2-álgebra, por lo que A/Q también lo es. Además al ser Q maximal, A/Q no tiene ideales diferenciales propios. Como L_2 es extensión de Picard-Vessiot de F tenemos que $C_{L_2} = C_F$ el cual es algebraicamente cerrado. Con todo tenemos, por la proposición 1.4.3, que $C_{L_2} = C_E$.

Por otro lado, consideremos la extensión de ψ a los campos de cocientes $f : L_1 \to E$ la cual también es inyectiva y a la composición de funciones inyectivas

$$L_2 \xrightarrow{\phi} A/Q \xhookrightarrow{h} E.$$

Luego f y $g = h \circ \phi$ son $F-$morfismos diferenciales inyectivos, aplicamos entonces la proposición 1.4.5 para obtener que $f(L_1) = g(L_2)$. Ahora $f : L_1 \to f(L_1), g^{-1}|_{g(L_2)} : g(L_2) \to L_2$ son isomorfismos. Así definimos el isomorfismo diferencial

$$g^{-1}|_{g(L_2)} \circ f : L_1 \to L_2.$$

$\square$

El siguiente teorema es una aplicación directa de los teoremas 1.4.7 y 1.4.4.

Teorema 1.4.8. *Sea F un campo diferencial con C_F campo de constantes algebraicamente cerrado y sea $\mathcal{L}(u) = 0$ definido sobre F. Entonces existe una extensión de Picard-Vessiot K de F para $\mathcal{L}$ que es única salvo F-isomorfismos diferenciales.*

En el siguiente ejemplo veremos que no siempre es posible obtener la existencia de extensiones de Picard-Vessiot sin la hipótesis de que el campo de constantes es algebraicamente cerrado.

Ejemplo 5. Sea $\mathbb{R}$ con la derivada trivial y tomemos $F = \mathbb{R}(a)$ el campo generado por a y sus derivadas donde $a = \frac{i}{2}\operatorname{sen} 2x$, $a' = i\cos 2x$ y $a'' = -2i\operatorname{sen} 2x = -4a$. Como $a'' = -4a$ concluimos que $F = \mathbb{R}(a, a')$. Notemos que a es trascendental sobre $\mathbb{R}$. Si ahora consideramos al polinomio

$$p(x) = x^2 + 4a^2 + 1 \in \mathbb{R}(a)[x]$$

luego tenemos que

$$p(a') = (a')^2 + 4a^2 + 1 = -\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x + 1 = -1 + 1 = 0, \tag{1.12}$$

por lo que a' es algebraico de grado 2 sobre $\mathbb{R}(a)$. Así

$$F = \mathbb{R}(a, a') = \mathbb{R}(a)(a') = \mathbb{R}(a)[a']. \tag{1.13}$$

Lo que ahora se afirma es que $C_F = \mathbb{R}$. Para esto tomemos $c \in C_F$, por (1.13) tenemos que es de la forma $c = p + qa'$ con $p, q \in \mathbb{R}(a)$. Ahora si $g(a) = \alpha_0 + \alpha_1 a + \cdots \alpha_n a^{n-1}, \alpha_i \in \mathbb{R}$, denotaremos $\frac{dg}{da} = \alpha_1 + 2\alpha_2 a + \cdots + n\alpha_n a^{n-1}$, luego para un elemento $f \in \mathbb{R}(a)$ establecemos $f' = a' \cdot \frac{df}{da}$. Dicho esto, al derivar la expresión anterior obtenemos

$$0 = c' = a'\frac{dp}{da} + \frac{dq}{da}(a')^2 + qa''.$$

Sustituyendo (1.12) y $a'' = -4a$ en la última ecuación tenemos que

$$0 = a'\frac{dp}{da} - \frac{dq}{da}(4a^2 + 1) - 4aq.$$

Así

$$\frac{dp}{da} = 0 \tag{1.14}$$

$$\frac{dq}{da}(4a^2 + 1) + 4aq = 0 \tag{1.15}$$

Como a es trascendental sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(a) \simeq \mathbb{R}(x)$ entonces si (1.14) se cumple tenemos que $p \in \mathbb{R}$. Supongamos que $q \neq 0$, de (1.15)

$$\frac{dq}{da} = -\frac{4aq}{4a^2 + 1}.$$

Notemos ahora que

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{da}a' = -\frac{4aa'}{4a^2+1},$$

de donde

$$\frac{q'}{q} = -\frac{(4a^2+1)'}{2(4a^1+1)}.$$

Aplicando el lema 1.1.5 obtenemos que $q^2 = \frac{1}{c(4a^2+1)}$ con $c \in C_F$, contradiciendo el hecho que $q \in \mathbb{R}(a)$. Por lo tanto, $q = 0$ y $c = p \in \mathbb{R}$, luego $C_F = \mathbb{R}$.

Consideremos ahora la ecuación diferencial $\mathcal{L}(u) = u'' + u$ definido en F y sea α una solución no trivial de $\mathcal{L}(u) = 0$. Lo que veremos es que no es posible encontrar una extensión de Picard-Vessiot de F para la ecuación $\mathcal{L}(u)$. Para esto mostraremos que cualquier extensión diferencial que contenga a α agrega constantes. Sea $v = \frac{\alpha'}{\alpha}$, entonces $F(v) \subset F(\alpha)$. Veamos que $F(v)$ contiene una constante que no pertenece a $\mathbb{R}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
v' + v^2 + 1 &= \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 + 1 \\
&= \frac{\alpha''\alpha - (\alpha')^2}{\alpha^2} + \frac{(\alpha')^2}{\alpha^2} + 1 \\
&= \frac{\alpha''\alpha - (\alpha')^2 + (\alpha')^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \\
&= \frac{\alpha''\alpha + \alpha^2}{\alpha^2} \\
&= \frac{\alpha'' + \alpha}{\alpha} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, v satisface la ecuación de Ricatti $v' = -(1+v^2)$. De aquí tenemos los siguientes casos:
Si $v^2 + 1 = 0$ entonces $v = \pm i$ es una nueva constante.
Si $v^2 + 1 \neq 0$,

$$(1+v^2)' = 2vv' = -2v(1+v^2).$$

Tomemos ahora

$$\begin{aligned}(a+a'v-av^2)' &= a'+a''v+a'v'-a'v^2-2av'v\\ &= a'+(-4a)v-a'(1+v^2)-a'v^2+2a(1+v^2)v\\ &= a'-4av-a'-a'v^2-a'v^2+2av+2av^3\\ &= -2av-2a'v^2+2av^3\\ &= -2v(a+a'v-av^2).\end{aligned}$$

Sea

$$c=\frac{a+a'v-av^2}{1+v^2}$$

entonces

$$c'=\frac{(1+v^2)(-2v)(a+a'v-av^2)-(a+a'v-av^2)(-2v)(1+v^2)}{(1+v^2)^2}=0.$$

Si $c\notin\mathbb{R}$ entonces c es una nueva constante.
Si $c\in\mathbb{R}$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}&(c+a)v^2-a'v+(c-a)=\left(\frac{a+a'v-av^2}{1+v^2}+a\right)v^2-a'v\\ &+\left(\frac{a+a'v-av^2}{1+v^2}-a\right)\\ &=\frac{av^2+a'v^3-av^4+a(1+v^2)v^2}{1+v^2}-a'v+\frac{a+a'v-av^2-a(1+v^2)}{1+v^2}\\ &=\frac{a'v^3-av^4+a(1+v^2)v^2+a+a'v-a(1+v^2)}{1+v^2}-a'v\\ &=\frac{a'v^3-av^4+av^2+av^4+a+a'v-a-av^2-a'v-a'v^3}{1+v^2}\\ &=0.\end{aligned}$$

Usando la fórmula general en la ecuación anterior obtenemos que

$$v=\frac{a'\pm\sqrt{(-a')^2-4(c+a)(c-a)}}{2(c+a)},$$

luego $\sqrt{(a')^2-4(c+a)(c-a)}\in F(v)$.

Ahora bien de (1.12)

$$(a')^2-4(c+a)(c-a) = (a')^2-4(c^2-a^2) = ((a')^2+4a^2)-4c^2 = -1-4c^2 < 0,$$

de donde

$$\sqrt{-1-4c^2} = i\sqrt{1+4c^2} \in F(v),$$

pero como $\sqrt{1+4c^2} \in \mathbb{R}$ entonces $i \in F(v)$, que es una nueva constante.

1.5. Caracterización de extensiones de Picard-Vessiot

El teorema 1.4.8 muestra que dado un campo diferencial F con campo de constantes C_F algebraicamente cerrado y una ecuación diferencial $\mathcal{L}(u)$ sobre F existe la extensión de Picard-Vessiot K para $\mathcal{L}(u)$ salvo F-isomorfismos diferenciales. ¿Es posible que K sea la extensión de Picard-Vessiot de F para otro u otros operadores?

Ejemplo 6. Sea $F = \mathbb{C}(x)$ el campo de funciones racionales en la variable x y sea $K = \mathbb{C}(x, e^x)$. Notemos que $C_F = \mathbb{C} = C_K$. Tomemos $\mathcal{L}_1(u) = u' - u$ y $\mathcal{L}_2(u) = u'' - \frac{x+1}{x}u'$. Como $K = F(e^x)$, y $\{e^x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para $\mathcal{L}_1(u) = 0$, luego K es una extensión de Picard- Vessiot de F para $\mathcal{L}_1(u)$. Por otro lado, $K = F((x-1)e^x)$ y $\{1, (x-1)e^x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para $\mathcal{L}_2(u) = 0$. Por tanto, K es también una extensión de Picard- Vessiot de F para $\mathcal{L}_2(u)$.

Seria útil tener una caracterización de las extensiones de Picard-Vessiot que no dependa explícitamente de la ecuación diferencial $\mathcal{L}(u)$. Por ello se tiene la siguiente definición.

Definición 1.5.1. Sea K/F una extensión de campos diferenciales donde C_F es algebraicamente cerrado. Se dice que K/F es una **extensión de Picard-Vessiot** si

- ⋄ Existe un espacio vectorial con campo de escalares C_F, de dimensión finita, $V \subset K$ tal que $K = F(V)$.
- ⋄ Existe un grupo G de automorfismos diferenciales de K con

  $$G(V) = \{\sigma(v) : \sigma \in G, v \in V\} \subset V$$

  tal que $K^G = F$.

- $\diamond$ $C_F = C_K$.

Observación 4. La extensión en la definición 1.5.1 nos permite construir una ecuación diferencial $\mathcal{L}(u)$: Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V sobre C_F entonces K es una extensión de Picard-Vessiot de F para

$$\mathcal{L}(u) = \frac{w(u, u_1, \ldots, u_n)}{w(u_1, \ldots, u_n)}. \tag{1.16}$$

En efecto, como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independientes sobre $C_F = C_K$, $w(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$, luego (1.16) está bien definido. Desarrollando la expansión por cofactores por la primera columna vemos que

$$w(u, u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i u^{(i)}$$

con $\bar{a}_i = (-1)^i \det(\ldots, \bar{u}^{(i-1)}, \bar{u}^{(i+1)}, \ldots)$ y $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. En particular,

$$\bar{a_n} = (-1)^n \det(\ldots, \bar{u}^{(i-1)}, \bar{u}^{(i+1)}, \ldots) = w(u_1, \ldots, u_n).$$

Así

$$\mathcal{L}(u) = \frac{w(u, u_1, \ldots, u_n)}{w(u_1, \ldots, u_n)} = \sum_{i=0}^{n} (\bar{a_n})^{-1} \bar{a}_i u^{(i)},$$

es una ecuación diferencial lineal mónico sobre K de grado n. Observemos además que $\mathcal{L}(u_i) = 0$ pues tenemos una columna repetida en el wronskiano del numerador y también observemos que

$$K = F(V) = F(u_1, \ldots, u_n).$$

Si probamos que los coeficientes de $\mathcal{L}(u)$ realmente están en F entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ en K y como por hipótesis $C_K = C_F$ se seguiría que K es extensión de Picard-Vessiot para $\mathcal{L}(u)$ sobre F. Por tanto, mostraremos que $(\bar{a_n})^{-1}\bar{a}_i \in F$. Para ello tomemos $\sigma \in G$ y $z_i = \sigma(u_i)$. Por la segunda condición de la definición 1.5.1 tenemos que $\sigma(V) \subset V$, de donde $z_i \in V$, luego $z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j$ con $c_{ij} \in C_F$. Ahora

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{a}_i) &= (-1)^i \det(\ldots, \sigma(\bar{u})^{(i-1)}, \sigma(\bar{u})^{(i+1)}, \ldots) \\
&= (-1)^i \det(\ldots \bar{z}^{(i-1)}, \bar{z}^{(i+1)} \ldots) \\
&= (-1)^i \det(c_{ij}) \det(\ldots \bar{u}^{(i-1)}, \bar{u}^{i+1}, \ldots) \text{ esto por proposición 1.3.2} \\
&= \det(c_{ij}) \bar{a}_i.
\end{aligned}$$

Luego

$$\sigma((\bar{a_n})^{-1}\bar{a_i}) = \sigma(\bar{a_n})^{-1}\sigma(\bar{a_i}) = (\det(c_{ij})\bar{a_n})^{-1}\det(c_{ij})\bar{a_i} = (\bar{a_n})^{-1}\bar{a_i}$$

para $1 \leq i \leq n$. Como esto vale para todo $\sigma \in G$ concluimos que $(\bar{a_n})^{-1}\bar{a_i} \in K^G = F$. De aquí que $\mathcal{L}(u)$ tiene coeficientes en F.

1.6. Grupo de Galois diferencial

En esta sección definiremos el grupo de Galois diferencial de una ecuación diferencial lineal homogénea y veremos que tiene estructura de grupo algebraico lineal sobre el campo de constantes del campo diferencial sobre el que se define la ecuación.

Definición 1.6.1. Si K/F es una extensión diferencial de campos, el grupo

$$G(K/F) = \{\sigma : K \to K : \sigma \text{ es isomorfismo diferencial y } \sigma|_F = id_F\}$$

es el **grupo de Galois diferencial de la extensión $\mathbf{K/F}$**. Cuando K/F es una extensión de Picard-Vessiot para una ecuación diferencial $\mathcal{L}(u) = 0$, el grupo $G(K/F)$ también se llama **grupo de Galois de $\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$** sobre F. En este caso se usa la notación $\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ o bien $\mathrm{Gal}(\mathcal{L})$ si es claro el campo base.

Observación 5. Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ entonces para todo $\sigma \in \mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ y para todo $i = 1, \dots, n$ tenemos que $\sigma(u_i)$ también es una solución de $\mathcal{L}(u) = 0$.

En efecto, como u_i es solución de $\mathcal{L}(u_i) = 0$ entonces $u_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j u_i^{(j)} = 0$ con $a_j \in F$, luego

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma(0) \\
&= \sigma\left(u_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j u_i^{(j)}\right) = \sigma(u_i^{(n)}) + \sum_{j=0}^{n-1} \sigma\left(a_j u_i^{(j)}\right) \\
&= \sigma(u_i)^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} \sigma(a_j)\sigma(u_i)^{(j)} = \sigma(u_i)^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \sigma(u_i)^{(j)} \\
&= \mathcal{L}(\sigma(u_i)).
\end{aligned}$$

A continuación damos algunos ejemplos de grupos de Galois diferencial.

Ejemplo 7. i) Sea F un campo diferencial y sea $\alpha' = a \in F$ tal que a no es una derivada en F, esto es, $a \neq x'$ para todo $x \in F$. De aquí que $\alpha \notin F$. Consideremos la extensión $K = F(\alpha)$ de F, se dice que **K es obtenido de F por adjunción de una integral**.

- Afirmamos que α es trascendente sobre F. En efecto, supongamos que α es algebraico sobre F, tomemos $p(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ su polinomio mínimo sobre F. Así $p(\alpha) = \alpha^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \alpha^i = 0$ y derivando obtenemos

$$0 = p(\alpha)' = n\alpha^{n-1}\alpha' + \sum_{i=0}^{n-1}(b_i'\alpha^i + ib_i\alpha^{i-1}\alpha') = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i((i+1)b_{i+1}\alpha' + b_i').$$

Como $p(x)$ es el polinomio mínimo de α y la derivada de $p(x)$ tiene grado menor que n se sigue que $n\alpha' + b_{n-1}' = 0$ o equivalentemente $na + b_{n-1}' = 0$, de donde $a = \left(-\frac{b_{n-1}}{n}\right)'$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, α es trascendente sobre F.

- Afirmamos también que K es una extensión de Picard- Vessiot para la ecuación diferencial $\mathcal{L}(u) = u'' - \frac{a'}{a}u'$. En efecto, observemos que

$$F(1, \alpha) = F(\alpha) = K$$

y que

$$\mathcal{L}(1) = 0, \quad \mathcal{L}(\alpha) = \alpha'' - \frac{a'}{a}\alpha' = a' - \frac{a'}{a}a = 0.$$

Además $\{1, \alpha\}$ es linealmente independiente sobre C_F, luego $\{1, \alpha\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u)$ en K.

Veamos ahora que $K = F(\alpha)$ no contiene nuevas constantes.

Observación: Supongamos que un polinomio $p(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} b_i\alpha^i, b_i \in F$ es constante. Derivando y reagrupando

$$0 = p(\alpha)' = \sum_{i=0}^{n}(b_i'\alpha^i + ib_i\alpha^{i-1}\alpha') = \sum_{i=0}^{n}\alpha^i((i+1)b_{i+1}\alpha' + b_i'). \quad (1.17)$$

Como α es trascendente entonces todos los coeficientes de (1.17) son cero, en particular $b_n' = 0, nb_n a + b_{n-1}' = 0$, luego

$$a = -\frac{b_{n-1}'}{nb_n} = \left(-\frac{b_{n-1}}{nb_n}\right)',$$

que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $p(\alpha)$ no es constante.

Bien, ahora supongamos que existe un elemento $l \in C_K$. Al tener $l \in F(\alpha)$ y α trascendente, l es de la forma $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ con $f(x), g(x) \in F[x]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que g es mónico de grado mayor o igual a 1, mínimo. Derivando se obtiene

$$0 = l' = \frac{f(\alpha)'g(\alpha)\alpha' - f(\alpha)g(\alpha)'\alpha'}{g(\alpha)^2}. \tag{1.18}$$

De la observación previa $g(\alpha)$ no es constante, con lo que $g(\alpha)' \neq 0$, así de (1.18)

$$f(\alpha)'g(\alpha)\alpha' - f(\alpha)g(\alpha)'\alpha' = 0$$

equivalentemente

$$\frac{f(\alpha)'}{g(\alpha)'} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in C_K,$$

pero al ser g mónico $\mathrm{grad}(g') < \mathrm{grad}(g)$, que contradice la minimalidad de g. Por lo que l no es constante, luego $C_F = C_K$ y así K es extensión de Picard-Vessiot de F para $\mathcal{L}$.

- Calculemos ahora su grupo de Galois diferencial. Para esto recordemos que $\{1, \alpha\}$ es un conjunto fundamental de soluciones, entonces

$$\begin{aligned} Gal_F(\mathcal{L}) =& \{\sigma : F(1,\alpha) \to F(1,\alpha) : \sigma \,\text{es un isomorfismo diferencial} \\ & \text{con}\, \sigma|_F = id_F\}. \end{aligned}$$

Ahora como $1, \alpha$ son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$, por la observación 5, $\sigma(1), \sigma(\alpha)$ son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$, por lo mismo existen constantes $c_{ij}, i, j = 1, 2$ tales que

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= c_{11} + c_{21}\alpha \\ \sigma(\alpha) &= c_{12} + c_{22}\alpha. \end{aligned}$$

Queremos ver quienes son $c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{22}$. Como σ es automorfismo diferencial, $\sigma(1) = 1$ entonces $c_{11} + c_{21}\alpha = 1$, luego $(c_{11} - 1) + c_{21}\alpha = 0$ y como $\{1, \alpha\}$ es un conjunto linealmente independientes en C_F, $c_{11} = 1, c_{21} = 0$. También se satisface que $\sigma(\alpha)' = \sigma(\alpha')$ entonces $c_{22}a = c_{22}\alpha' = \sigma(\alpha)' = \sigma(\alpha') = \sigma(a) = id_F(a) = a$, por lo que $c_{22} = 1$.

Así todo $\sigma \in \mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ debe cumplir que $\sigma(\alpha) = c + \alpha$, luego a todo elemento en $\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ le podemos asociar la matriz (c_{ij}), esto es,

$$\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in C_F \right\}.$$

ii) Sea F un campo diferencial y $\frac{\alpha'}{\alpha} = a$ con $a \in F - \{0\}$. Consideremos la extensión $K = F(\alpha)$. Decimos que **K es obtenido de F por adjunción de una integral de la exponencial**.

Aquí supondremos que $C_F = C_K$. Consideremos el operador $\mathcal{L}(u) = u' - au$. Notemos que $\mathcal{L}(\alpha) = \alpha' - a\alpha = \alpha' - \frac{\alpha'}{\alpha}\alpha = 0$, es decir, α es solución de $\mathcal{L}(u) = 0$. Además $\{\alpha\}$ es linealmente independiente en el campo de constantes C_F. Por lo que $K = F(\alpha)$ es una extensión de Picard-Vessiot para $\mathcal{L}$.

Estudiemos con mas profundidad la extensión K.

Si α es algebraico sobre F, sea $p(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ su polinomio mínimo sobre F. Evaluando α y derivando obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= p(\alpha)' \\ &= n\alpha^{n-1}\alpha' + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i'\alpha^i + ia_i\alpha^{i-1}\alpha') \\ &= n\alpha^{n-1}\alpha a + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i'\alpha^i + ia_i\alpha^{i-1}\alpha a) \\ &= n\alpha^n a + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i' + ia_i a)\alpha^i. \end{aligned}$$

Como $p(x)$ es el polinomio mínimo de α, se sigue que $p(\alpha)$ divide a $p(\alpha)'$, es decir, $p(\alpha)' = kp(\alpha)$. Si nos fijamos en el término de grado n de $p(\alpha)$ y de $p(\alpha)'$ tenemos que $an = k$. Ahora si nos fijamos en los términos restantes

$$a_i' + ia_i a = ka_i = ana_i \tag{1.19}$$

luego

$$a_i' = ana_i - ia_i a = a(n-i)a_i$$

para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Así

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha^{n-i}}{a_i}\right)' &= \frac{a_i(\alpha^{n-i})' - a_i'\alpha^{n-i}}{a_i^2}\\
&= \frac{a_i(n-i)\alpha^{n-i-1}\alpha' - a(n-i)a_i\alpha^{n-i}}{a_i^2}\\
&= \frac{a_i(n-i)\alpha^{n-i-1}a\alpha - (n-i)aa_i\alpha^{n-i}}{a_i^2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $i = 0, \ldots, n-1$. En particular para $i = 0$ tenemos que $(\frac{\alpha^n}{a_0})' = 0$ entonces $\frac{\alpha^n}{a_0} = c$ para algún $c \in C_K = C_F$, es decir, $\alpha^n = ca_0$. Como $a_0, c \in F$ se sigue que $\alpha^n \in F$. Por tanto, si α es algebraico entonces $\alpha^n \in F$.

Si α es trascendental sobre F entonces la extensión $K = F(\alpha)$ es puramente trascendental con grado de trascendencia 1.

Tomando esto en cuenta, calculemos el grupo de Galois diferencial. Tenemos que

$$\begin{aligned}
Gal_F(\mathcal{L}) =& \{\sigma : F(\alpha) \to F(\alpha) : \sigma \text{ es un isomorfismo diferencial}\\
& \text{y } \sigma|_F = id_F\}.
\end{aligned}$$

Sea $\sigma \in \mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ entonces

$$\sigma(\alpha)' = \sigma(\alpha') = \sigma(a\alpha) = \sigma(a)\sigma(\alpha) = a\sigma(\alpha)$$

esto pues $a \in F$, luego

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\right)' &= \frac{\alpha\sigma'(\alpha) - \alpha'\sigma(\alpha)}{\alpha^2}\\
&= \frac{\alpha a\sigma(\alpha) - a\alpha\sigma(\alpha)}{\alpha^2}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que, $\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} = c$, de donde

$$\sigma(\alpha) = c\alpha \tag{1.20}$$

para $c \in C_K = C_F$.

Como mecionamos antes, tenemos los siguientes casos:

a) Si α es algebraico, en este caso encontramos $\alpha^n \in F$ para algún n entonces
$$\sigma(\alpha)^n = \sigma(\alpha^n) = id_F(\alpha^n) = \alpha^n,$$
pero de (1.20) $\sigma(\alpha)^n = (c\alpha)^n = \alpha^n$ y por tanto $c^n = 1$.

Así, c es una raíz $n-$ésima de la unidad y por tanto, $\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ es un grupo cíclico finito.

b) Si α es trascendente sobre F de grado 1. Podemos definir un automorfismo diferencial de K por $\alpha \mapsto c\alpha$, entonces $\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L}) \simeq (C_F^*, \cdot)$.

iii) Consideremos $F = \mathbb{C}(z)$ y la ecuación diferencial $\mathcal{L}(u) = u'' + u = 0$. Como vimos en el ejemplo 4 inciso $ii)$, $K = \mathbb{C}(z)(\operatorname{sen} z, \cos z)$ es una extensión de Picard-Vessiot de $\mathbb{C}(z)$ para $\mathcal{L}$.

Encontremos su grupo de Galois diferencial. Como $\operatorname{sen} z, \cos z$ son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$, también $\sigma(\operatorname{sen} z)$ y $\sigma(\cos z)$ son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$, de donde existen constantes $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$ tales que

$$\begin{aligned}\sigma(\operatorname{sen} z) &= c_{11} \operatorname{sen} z + c_{21} \cos z\\ \sigma(\cos z) &= c_{12} \operatorname{sen} z + c_{22} \cos z.\end{aligned}$$

Como σ es automorfismo diferencial $\sigma(\operatorname{sen} z)' = \sigma((\operatorname{sen} z)') = \sigma(\cos z)$, luego $c_{11} \cos z - c_{21} \operatorname{sen} z = c_{12} \operatorname{sen} z + c_{22} \cos z$, por lo que

$$(c_{11} - c_{22}) \cos z - (c_{21} + c_{12}) \operatorname{sen} z = 0,$$

ya que $\{\operatorname{sen} z, \cos z\}$ es un conjunto linealmente independiente se sigue que $c_{11} = c_{22}$ y $c_{12} = -c_{21}$.

Por otro lado, $\sigma(\cos z)' = \sigma((\cos z)') = \sigma(-\operatorname{sen} z) = -\sigma(\operatorname{sen} z)$, luego $c_{12} \cos z - c_{22} \operatorname{sen} z = -(c_{11} \operatorname{sen} z + c_{21} \cos z)$, por lo que

$$(c_{12} + c_{21}) \cos z + (-c_{22} + c_{11}) \operatorname{sen} z = 0,$$

nuevamente ya que $\{\operatorname{sen} z, \cos z\}$ es un conjunto linealmente independiente, se sique que $c_{12} = -c_{21}$ y $c_{11} = c_{22}$.

Ahora como $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ entonces $[\sigma(\operatorname{sen} z)]^2 + [\sigma(\cos z)]^2 = 1$, luego
$$(c_{11} \operatorname{sen} z + c_{21} \cos z)^2 + (c_{12} \operatorname{sen} z + c_{22} \cos z)^2 = 1,$$

finalmente obtenemos $c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ -c_{12} & c_{11} \end{pmatrix} : c_{11}, c_{12} \in \mathbb{C}, c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1 \right\}.$$

iv) Consideremos la ecuación diferencial $\mathcal{L}(u) = u^{(3)} - u' = 0$. Notemos que $\mathcal{L}(1) = 0, \mathcal{L}(e^z) = 0, \mathcal{L}(e^{-z}) = 0$ y que $\{1, e^z, e^{-z}\}$ es linealmente independiente. Sea

$$K = \mathbb{C}(z)(1, e^z, e^{-z}) = \mathbb{C}(1, z, e^z, e^{-z}) = \mathbb{C}(z, e^z),$$

entonces $C_F = C_K = \mathbb{C}$ y así K es una extensión de Picard- Vessiot de $\mathbb{C}(z)$ para $\mathcal{L}$.

Hallemos ahora su grupo de Galois diferencial. Como $\sigma(1), \sigma(e^z), \sigma(e^{-z})$ son soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$, existen $c_{ij} \in \mathbb{C}, i, j = 1, 2, 3$ tales que

$$\begin{aligned}
\sigma(1) &= c_{11} + c_{21}e^z + c_{31}e^{-z} \\
\sigma(e^z) &= c_{12} + c_{22}e^z + c_{32}e^{-z} \\
\sigma(e^{-z}) &= c_{13} + c_{23}e^z + c_{33}e^{-z}.
\end{aligned}$$

Como σ es automorfismo diferencial $\sigma(1) = 1$, luego $c_{11} + c_{21}e^z + c_{31}e^{-z} = 1$, equivalentemente $(c_{11} - 1) + c_{21}e^z + c_{31}e^{-z} = 0$, pero dado que $\{1, e^z, e^{-z}\}$ es linealmente independientes se tiene que $c_{11} = 1, c_{21} = 0, c_{31} = 0$. Además $\sigma(e^z)' = \sigma((e^z)') = \sigma(e^z)$, por lo que

$$c_{22}e^z - c_{32}e^{-z} = c_{12} + c_{22}e^z + c_{32}e^{-z},$$

luego

$$2c_{32}e^{-z} + c_{12} = 0,$$

por lo tanto $c_{12} = 0, c_{32} = 0$.

Ahora $\sigma(e^{-z})' = \sigma((e^{-z})') = \sigma(-e^{-z})$, por lo que

$$c_{23}e^z - c_{33}e^{-z} = -c_{13} - c_{23}e^z - c_{33}e^{-z},$$

luego

$$2c_{23}e^z + c_{13} = 0,$$

por lo tanto $c_{13} = 0, c_{23} = 0$.

Por otro lado, sabemos que $e^z e^{-z} = 1$ entonces

$$\sigma(e^z)\sigma(e^{-z}) = \sigma(e^z e^{-z}) = \sigma(1) = 1.$$

Por lo que

$$(c_{12} + c_{22}e^z + c_{32}e^{-z})(c_{13} + c_{23}e^z + c_{33}e^{-z}) = 1,$$

luego $c_{22}e^z c_{33}e^{-z} = 1$, es decir, $c_{33} = \frac{1}{c_{22}}$.

Con todo

$$\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_{22}} \end{pmatrix} : c_{22} \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Como hemos observado en algunos de los ejemplos previos, el grupo de Galois diferencial, resultó ser algún subconjunto del grupo general lineal. De manera general tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.6.2. *Sea F un campo diferencial y $\mathcal{L}(u) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n definida sobre F entonces el grupo de Galois diferencial de $\mathcal{L}(u) = 0$ es isomorfo a un subgrupo del grupo general lineal $GL(n, C_F)$ salvo conjugación.*

Demostración. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ entonces cualquier otra solución es una combinación lineal de estos elementos sobre C_F. Ya que para todo $\sigma \in \mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ y para cada $j = 1, \ldots, n$ tenemos que $\sigma(u_i)$ es también una solución de $\mathcal{L}(u) = 0$, por lo que

$$\sigma(u_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}u_i,\ c_{ij} \in C_F.$$

Ahora como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente entonces $\{\sigma(u_1), \ldots, \sigma(u_n)\}$ también lo es, por lo que $w(\sigma(u_1), \ldots, \sigma(u_n)) \neq 0$, pero como $w(\sigma(u_1), \ldots, \sigma(u_n)) = w(u_1, \ldots, u_n)|c_{ij}|$ se sigue que $|c_{ij}| \neq 0$, de donde $(c_{ij}) \in GL(n, C_F)$. Por lo tanto, a cada $\sigma \in \mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ le podemos asociar la matriz $(c_{ij}) \in GL(n, C_F)$. Más aún, como $K = F(u_1, \ldots, u_n)$, un F-automorfismo de K está determinado por las imagenes de los u_j, luego se obtiene el siguiente morfismo inyectivo

$$\varphi : \mathrm{Gal}_F(\mathcal{L}) \to GL(n, C_F)$$
$$\sigma \mapsto (c_{ij})$$

Ahora bien, si $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es otro conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ entonces

$$\sigma(w_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i,\ a_{ij} \in C_F.$$

Luego las matrices $C = (c_{ij})$ y $A = (a_{ij})$ satisfacen

$$C = P^{-1} A P$$

donde P es la matriz de cambio de base entre ambos conjuntos fundamentales (si $u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} w_i$ entonces $P = (\lambda_{ij})$).

Con todo, podemos identificar el grupo $\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ con un subgrupo de $GL(n, C_F)$ (a saber $\varphi(\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L}))$) de manera única salvo conjugación. $\square$

Lo que nos proponemos a mostrar enseguida es que $\mathrm{Gal}_F(\mathcal{L})$ es cerrado en $GL(n, C_F)$ con respecto a la topología de Zariski, por lo que sería un grupo algebraico lineal.

Proposición 1.6.3. *Sea F un campo diferencial con campo de constantes C_F y $K = F(u_1, \ldots, u_n)$ una extensión de Picard-Vessiot de F. Entonces existe un conjunto S de polinomios $P(x_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ con coeficientes en C_F tal que*

i) Si σ es un $F-$automorfismo diferencial de K y $\sigma(u_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i$ entonces $P(c_{ij}) = 0$ para todo $P \in S$.

ii) Dada una matriz $(c_{ij}) \in GL(n, C_F)$ con $P(c_{ij}) = 0$ para todo $P \in S$, existe un $F-$automorfismo diferencial σ de K tal que $\sigma(u_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i$.

Demostración. Sea $F\{x_1, \ldots, x_n\}$ el anillo de polinomios diferenciales en n indeterminadas diferenciales sobre F. Definamos el $F-$morfismo diferencial

$$\begin{aligned} \varphi : F\{x_1, \ldots, x_n\} &\to K \\ x_i &\mapsto u_i. \end{aligned}$$

Del teorema 1.1.4 tenemos que $\Gamma := \ker \varphi$ es un ideal diferencial de $F\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $F\{x_1, \ldots, x_n\}/\Gamma \simeq \mathrm{Im}\,\varphi$, al ser $\mathrm{Im}\,\varphi$ subanillo de un campo es un dominio entero, luego Γ es un ideal diferencial primo de $F\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Sea $K[x_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$ el anillo de polinomios en las indeterminadas x_{ij} con la derivación definida por $x'_{ij} = 0$. Definamos un F-morfismo diferencial

$$\begin{aligned} \psi : F\{x_1, \ldots, x_n\} &\to K[x_{ij}] \\ x_j &\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_{ij} u_i \end{aligned}$$

Sea

$$\Delta := \psi(\Gamma) = \{q(x_{ij}) \in K[x_{ij}] : \exists\ p \in \Gamma \text{ con } \psi(p) = q(x_{ij})\}.$$

Sea $\{w_k\}$ una base para el C_F-espacio vectorial K.

Afirmación 1. Cada polinomio en Δ se puede escribir como una combinación lineal de los w_k con coeficientes polinomiales en $C_F[x_{ij}]$:

Sea $q(x_{ij}) \in \Delta$ entonces existe

$$p = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \\ 0 \leq s_m \leq n}} a_{k_1, \ldots, k_n} (x_{s_1}^{(k_1)})^{i_{k_1 1}} \cdots (x_{s_n}^{(k_n)})^{i_{k_n n}} \in \Gamma \text{ (con } a_{k_1, \ldots, k_n} \in F)$$

tal que $\psi(p) = q(x_{ij})$. Notemos que

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \psi\left(\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \\ 0 \leq s_j \leq n}} a_{k_1, \ldots, k_n} \left(x_{s_1}^{(k_1)}\right)^{i_{k_1 1}} \cdots \left(x_{s_n}^{(k_n)}\right)^{i_{k_n n}} \right) \\ &= \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \\ 0 \leq s_j \leq n}} a_{k_1, \ldots, k_n} \psi\left(\left(x_{s_1}^{(k_1)}\right)^{i_{k_1 1}}\right) \cdots \psi\left(\left(x_{s_n}^{(k_n)}\right)^{i_{k_n n}}\right) \\ &= \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \\ 0 \leq s_j \leq n}} a_{k_1, \ldots, k_n} \psi\left(x_{s_1}^{(k_1)}\right)^{i_{k_1 1}} \cdots \psi\left(x_{s_n}^{(k_n)}\right)^{i_{k_n n}} \end{aligned}$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned} \psi(x'_{s_j}) = \psi(x_{s_j})' &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_{is_j} u_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} (x'_{is_j} u_i + x_{is_j} u'_i) = \sum_{i=1}^{n} x_{is_j} u'_i \\ \psi(x''_{s_j}) = \psi(x_{s_j})'' &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_{is_j} u'_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} (x'_{is_j} u_i + x_{is_j} u''_i) = \sum_{i=1}^{n} x_{is_j} u''_i \end{aligned}$$

y así sucesivamente

$$\psi(x_{s_j})^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_{is_j} u_i^{(k)},$$

luego

$$\psi\left(x_{s_j}^{(k_j)}\right)^{i_{k_j j}} = \left(\psi(x_{s_j})^{(k_j)}\right)^{i_{k_j j}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{is_j} u_i^{(k_j)}\right)^{i_{k_j j}} = \sum_r q_{rj}(x_{is_j}) p_{rj}(u_i)$$

donde $q_{rj}(x_{is_j}) \in K[x_{ij}], 0 \leq s_j \leq n, p_{rj}(u_i) \in K = F(u_1, \ldots, u_n)$ son cada uno de los monomios obtenidos al desarrollar la potencia. Así

$$\begin{aligned}\psi(p) &= \sum_{k_1,\ldots,k_n} a_{k_1,\ldots,k_n} \left(\sum_r q_{r1}(x_{ij}) p_{r1}(u_i)\right) \cdots \left(\sum_{\bar{r}} q_{rn}(x_{ij}) p_{rn}(u_i)\right) \\ &= \sum_{k_1,\ldots,k_n} \sum_s q_s(x_{ij}) p_s(u_i),\end{aligned}$$

donde los polinomios $q_s(x_{ij}) \in K[x_{ij}]$, $p_s(u_i) \in K$ son productos de los polinomios q_{rj}, $a_{k_1 \ldots k_n} p_{rj}$ respectivamente. Como w_k es base para el C_F-espacio vectorial K tenemos que

$$p_s(u_i) = \sum_{l=1} \alpha_l^s w_l, \text{ con } \alpha_l^s \in C_F,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\psi(p) &= \sum_{k_1,\ldots,k_n} \sum_s q_s(x_{ij}) \left(\sum_{l=1} \alpha_l^s w_l\right) \\ &= \sum_{l=1} \left(\sum_{k_1,\ldots,k_n} \sum_s \alpha_l^s q_s(x_{ij})\right) w_l \\ &= \sum_{l=1} P_l(x_{ij}) w_l\end{aligned}$$

con $p_l(x_{ij}) = \sum_{k_1,\ldots,k_n} \sum_s \alpha_l^s q_s(x_{ij}) \in C_F[x_{ij}]$. Probándose así la afirmación.

Tomemos a S como la colección de estos coeficientes, es decir, la colección de polinomios $P_l(x_{ij})$.

Bien ahora probemos los incisos del teorema.

i) Sea σ un $F-$automorfismo diferencial de K tal que $\sigma(u_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}u_i$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F\{x_1,\dots,x_n\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & K \arrow[d, "\sigma"] \\ K[x_{ij}] \arrow[r, "\nu"'] & K \end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned} \nu : K[x_{ij}] &\to K \\ x_{ij} &\mapsto c_{ij}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\sigma\circ\varphi(x_j) = \sigma(u_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}u_i = \nu\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}u_i\right) = \nu\circ\psi(x_j),$$

por lo que el diagrama anterior es conmutativo. Ahora

$$\begin{aligned} \sigma\circ\varphi(\Gamma) &= \{a\in K : \exists\ p\in\Gamma \text{ con } \sigma\circ\varphi(p) = a\} \\ &= \{a\in K : \exists\ p\in\Gamma \text{ con } \sigma(0) = a\} \\ &= \{a\in K : \exists\ p\in\Gamma \text{ con } 0 = a\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

De aquí y de la conmutatividad del diagrama obtenemos

$$\{0\} = \nu\circ\psi(\Gamma) = \nu(\Delta),$$

es decir, la imagen de Γ bajo $\nu\circ\psi$ es Δ evaluada en c_{ij} y así todos los polinomios de Δ se anulan en c_{ij}. Escribamos esto en la base $\{w_k\}$, entonces si $q(x_{ij})\in\Delta$ tenemos que

$$q(c_{ij}) = \sum_{k=1}^{m} P_k(c_{ij})w_k = 0$$

pero como $\{w_k\}$ es base, en particular es linealmente independiente sobre C_F, luego cada $P_k(c_{ij}) = 0$. Por tanto, los polinomios de S se anulan en c_{ij}.

ii) Sea una matriz $(c_{ij}) \in GL(n, C_F)$ con $P(c_{ij}) = 0$ para todo $P \in S$. Consideremos el morfismo diferencial

$$\begin{aligned} \nu \circ \psi : F\{x_1, \ldots, x_n\} &\to F[u_1, \ldots, u_n] \\ x_j &\mapsto \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i. \end{aligned}$$

Afirmación 2. $\Gamma \subset \ker(\nu \circ \psi)$.

En efecto, sea $p \in \Gamma$, luego $\psi(p) \in \Delta$, por lo que

$$\nu \circ \psi(p) = \nu(\psi(p)) = \nu\left(\sum_{k=1}^{m} P_k(x_{ij}) w_k\right) = \sum_{k=1}^{m} P_k(c_{ij}) w_k$$

donde $P_k(x_{ij}) \in S$. De la hipótesis de (c_{ij}) obtenemos que $P_k(c_{ij}) = 0$. Por lo tanto, $\nu \circ \psi(p) = 0$, de donde $p \in \ker(\nu \circ \psi)$.

Notemos que

$$F[u_1, \ldots, u_n] = F\{x_1, \ldots, x_n\}/\Gamma,$$

luego por la afirmación 2 y aplicando la propiedad universal del cociente, existe un único $F-$morfismo diferencial

$$\begin{aligned} \sigma : F[u_1, \ldots, u_n] &\to F[u_1, \ldots, u_n] \\ u_j &\mapsto \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i. \end{aligned}$$

Afirmación 3. σ es biyectiva.

Suprayectiva: Ya que la matriz (c_{ij}) es invertible existe su matriz inversa $(\overline{c_{ij}})$ tal que $\overline{c_{1j}} c_{k1} + \overline{c_{2j}} c_{k2} + \cdots + \overline{c_{nj}} c_{kn} = 1$ si $j = k$ y es cero si $j \neq k$. Dicho esto, notemos que la imagen de σ contiene a $u_1, \ldots, u_n$, pues para $j = 1, \ldots, n$ basta tomar $\sum_{i=1}^{n} \overline{c_{ij}} u_i$ y observar que

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{c_{ij}} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{c_{ij}} \sigma(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{c_{ij}} \left[\sum_{k=1}^{n} c_{ki} u_k\right] = \sum_{k=1}^{n} u_k \left[\sum_{i=1}^{n} \overline{c_{ij}} c_{ki}\right] = u_j.$$

Así σ es suprayectiva.

Inyectiva:

Supongamos que $\mathrm{grtras}[F[u_1,\ldots,u_n]:F]=k$, entonces sea $w_1,\ldots,w_k\in F[u_1,\ldots,u_n]$ un conjunto algebraicamente independiente sobre F. Como σ es suprayectiva, para cada w_i existe $v_i\in F[u_1,\ldots,u_n]$ tal que $w_i=\sigma(v_i)$, para todo $i=1,\ldots,k$.

Sea $u\in\operatorname{Ker}\sigma$ distinto de cero, como $\mathrm{grtras}[F[u_1,\ldots,u_n]:F]=k$ tenemos que $u,v_1,\ldots,v_k$ son algebraicamente dependientes, por lo que existe un polinomio no cero $p(x,x_1,\ldots,x_k)\in F[x,x_1,\ldots,x_k]$ de tal manera que $p(u,v_1,\ldots,v_k)=0$. Elijamos p de tal forma que $\mathrm{grad}_x(p)$ sea mínimo. Definamos $h(x_1,\ldots,x_k)=p(0,x_1,\ldots,x_k)\in F[x_1,\ldots,x_k]$, entonces h es un polinomio no cero, de lo contrario $p(x,x_1,\ldots,x_k)=xp_1(x,x_1,\ldots,x_k)$ con $\mathrm{grad}_x(p_1)<\mathrm{grad}_x(p)$ y como $u\neq 0$ tendriamos que $p_1(u,v_1,\ldots,v_k)=0$ contradiciendo la elección de p.

Ya que σ es morfismo

$$\begin{aligned}0&=\sigma(0)=\sigma(p(u,v_1,\ldots,v_k))=p(\sigma(u),\sigma(v_1),\ldots,\sigma(v_k))\\&=p(0,w_1,\ldots,w_k)=h(w_1,\ldots,w_k)\end{aligned}$$

de aquí y dado que h no es el polinomio cero, se contradice que $w_1,\ldots,w_k$ son algebraicamente independientes. Por consiguiente $u=0$, de donde $\operatorname{Ker}\sigma=\{0\}$ y así σ es inyectiva.

De modo que σ es biyectiva y podemos extenderlo a un automorfismo

$$\sigma:F\left(u_1,\ldots,u_n\right)\to F\left(u_1,\ldots,u_n\right)$$

tal como queriamos. □

Concluimos este capítulo con el resultado anterior, en el siguiente capítulo nos centramos en resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 con coeficientes funciones racionales. Sin embargo, cabe mencionar que la teoría de Galois diferencial abarca mucho más, por ejemplo al igual que en la teoría de Galois clásica existe un teorema fundamental de la teoría de Galois diferencial, así como también existe una versión del problema inverso de Galois a la teoría de Galois diferencial (ver [M]).

Capítulo 2

El algoritmo de Kovacic

En este capítulo presentamos un algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden dos con coeficientes funciones racionales en una variable sobre el campo de los números complejos. El objetivo del algoritmo es encontrar soluciones liouvillianas de dichas ecuaciones. El algoritmo consta de cuatro casos, los tres primeros casos determinan la solubilidad de las ecuaciones en términos liouvillianos, mientras que en el cuarto caso el algoritmo no funciona y por tanto las ecuaciones no tienen soluciones liouvillianas. Usaremos como referencia principal al artículo [Kov].

2.1. Soluciones Liouvillianas

Lo primero que haremos será introducir a las soluciones liouvillianas, para este fin hagamos la siguiente observación.

De manera análoga al ejemplo 7. Si F, K son campos diferenciales que contiene a $\mathbb{C}(z)$, se dice que K es obtenido de F por adjunción de una integral, si $K = F(\eta)$ donde $\eta' = a \in F$. Denotaremos por $\eta = \int a$ a una solución a la ecuación diferencial $\eta' = a$.

De manera análoga, se dice que K es obtenido de F por adjunción de la exponencial de una integral, si $K = F(\eta)$ donde $\frac{\eta'}{\eta} = a \in F$. Note que es necesario hacer una elección de una solución de tal ecuación, por lo que estamos suponiendo el axioma de elección, una vez elegida una solución esta será denotada por, $\eta = e^{\int a}$. No es difícil ver que ésta exponencial satisface las mismas propiedades algebraicas que la exponencial usual.

Definición 2.1.1. Sea K una extensión diferencial de $\mathbb{C}(z)$. Una solución η de una ecuación diferencial definida sobre $\mathbb{C}(z)$ se denomina **liouvilliana, soluble por cuadraturas** o que tiene **solución en forma cerrada**, si existe una cadena de campos diferenciales

$$\mathbb{C}(z) = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = K$$

con $\eta \in K$ y tal que para $i = 0, \ldots, m-1$, F_{i+1} se obtiene de F_i ya sea por adjunción de una integral o por adjunción de la exponencial de una integral o F_{i+1} es algebraico sobre F_i.

La ecuación diferencial a resolver es de la forma

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = 0, a_1, a_0 \in \mathbb{C}(z). \tag{2.1}$$

El siguiente teorema nos permite eliminar el coeficiente de u' en la ecuación diferencial lineal (2.1).

Teorema 2.1.2. *La ecuación diferencial*

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = 0,\ a_i \in \mathbb{C}(z)$$

se puede transformar en la ecuación diferencial

$$y'' = ry \text{ con } r = \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_0$$

mediante el cambio $u = yf$ *donde* $f = e^{-\frac{1}{2}\int a_1}$.

Demostración. Consideremos primero la ecuación

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = 0. \tag{2.2}$$

Si u_1, u_2 son soluciones de la ecuación entonces $w = u_1 u_2' - u_1' u_2$, derivando $w' = u_1' u_2' + u_1 u_2'' - u_1'' u_2 - u_1' u_2' = u_1 u_2'' - u_1'' u_2$. Tomando en cuenta que u_1 y u_2 son soluciones de (2.2) podemos sustituir u_1'', u_2'' en w' y obtener

$$w' = u_1(-a_1 u_2' - a_0 u_2) - (-a_1 u_1' - a_0 u_1)u_2 = a_1(u_1' u_2 - u_1 u_2') = -a_1 w,$$

luego

$$w = ce^{-\int a_1}.$$

Si hacemos $u = yf$ entonces $u' = y'f + yf', u'' = y''f + 2y'f' + yf''$. Sustituyendo en la ecuación (2.2) queda

$$y''f + (2f' + a_1 f)y' + (f'' + a_1 f' + a_0 f)y = 0.$$

Queremos que $2f' + a_1 f = 0$, resolviendo esta ecuación encontramos que $f = e^{-\frac{1}{2}\int a_1}$. Así con $f = e^{-\frac{1}{2}\int a_1}$ se tiene la ecuación

$$y''f = -(f'' + a_1 f + a_0 f)y.$$

Notemos ahora que $f' = -\frac{1}{2}a_1 f$ y $f'' = \frac{1}{4}a_1^2 f - \frac{1}{2}a_1' f$. En consecuencia

$$\begin{aligned} -(f'' + a_1 f' + a_0 f) &= -\left(\frac{1}{4}a_1^2 f - \frac{1}{2}a_1' f - \frac{1}{2}a_1^2 f + a_0 f\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_0\right) f. \end{aligned}$$

Con lo que $y''f = \left(\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_0\right) fy$ y así

$$y'' = \left(\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_0\right) y.$$

□

Teorema 2.1.3. *Si la ecuación*

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = 0, \quad a_1, a_0 \in \mathbb{C}(z)$$

tiene solución liouvilliana entonces toda solución es liouvilliana.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que u_1 es una solución liouvilliana, lo que ahora queremos es encontrar otra solución u_2 que determinamos a continuación. Como vimos en el teorema anterior

$$u_1 u_2' - u_1' u_2 = w = ce^{-\int a_1},$$

despejando u_2'

$$u_2' = \frac{u_1'}{u_1} u_2 + \frac{1}{u_1} ce^{-\int a_1} = pu_2 + q,$$

que es una EDO de orden 1 no homogénea. Una solución a la ecuación homogénea es

$$u_c = c_0 e^{\int p}.$$

Aplicando el método de variación de parametros obtenemos que

$$u_2 = e^{\int p}\left(c_0 + \int c_0^{-1} q e^{-\int p}\right).$$

Como u_1 es liouvilliana existe un cadena de campos diferenciales

$$\mathbb{C}(z) \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = K$$

con $u_1 \in K$. Si hacemos $\beta = e^{\int \frac{u_1'}{u_1}}, \overline{\beta} = e^{-\int \frac{u_1'}{u_1}}, \gamma = e^{-\int a_1}, \alpha = \int c_0^{-1} c \frac{1}{u_1} \gamma \overline{\beta}$, al tomar la cadena

$$\mathbb{C}(z) \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = K \subset F_{m+1} = K(\gamma) \subset F_{m+2} = F_{m+1}(\beta) \subset F_{m+2}(\alpha),$$

obtenemos que u_2 es también una solución liouvilliana. $\square$

Teorema 2.1.4. *La ecuación diferencial*

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = 0, \quad a_1, a_0 \in \mathbb{C}(z)$$

se transforma en la ecuación de Ricatti

$$v' = r - v^2 \text{ donde } r = \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_0.$$

Demostración. Notemos que

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - (y')^2}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2,$$

luego haciendo $v = \frac{y'}{y}$ y usando el hecho que la ecuación $u'' + a_1 u' + a_0 u = 0$ se transforma en la ecuación $y'' = ry$ obtenemos

$$v' = \frac{ry}{y} - v^2 = r - v^2,$$

donde $r = \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_0$. $\square$

De acuerdo al teorema 2.1.2, cualquier ecuación diferencial de la forma $u'' + a_1 u' + a_0 u$, mediante el cambio $u = ye^{-\frac{1}{2}\int a_1}$, se puede transformar en la ecuación diferencial

$$y'' = ry \text{ donde } r = \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_0. \tag{2.3}$$

A esta última ecuación la llamamos **ecuación diferencial reducida** y la abreviamos como **EDR**.

La siguiente afirmación da una relación entre las soluciones liouvillianas de la ecuación 2.1 y las soluciones liouvillianas de la EDR asociada.

Afirmación 4. Las soluciones de (2.1) son liouvillianas si y sólo si las soluciones de (2.3) son liouvillianas.

En efecto, supongamos que u es solución liouvilliana de (2.1). Ahora sea $y = ue^{\frac{1}{2}\int a_1}, y' = u'e^{\frac{1}{2}\int a_1} + \frac{1}{2}a_1 ue^{\frac{1}{2}\int a_1}, y'' = e^{\frac{1}{2}\int a_1}\left(u'' + a_1 u' + u(\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1')\right)$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} y'' - ry &= e^{\frac{1}{2}\int a_1}\left[u'' + a_1u' + u\left(\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1'\right) - u\left(\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_0\right)\right] \\ &= e^{\frac{1}{2}\int a_1}(u'' + a_1u' + a_0u) = 0. \end{aligned}$$

De donde y así definida es solución de la EDR. Más aún, como u es liouvilliana existe una cadena de campos diferenciales $\mathbb{C}(z) \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = K$ tal que $u \in K$. Sea $g = e^{\frac{1}{2}\int a_1}$ entonces $\frac{g'}{g} = \frac{1}{2}a_1 \in \mathbb{C}(z)$ luego podemos tomar la extensión

$$\mathbb{C}(z) \subset F_1 \subset \cdots \subset K \subset K(g),$$

donde g es del tipo integral de una exponencial. Por tanto, y es también una solución liouvilliana.

Recíprocamente supongamos que y es una solución liouvilliana de (2.3). Sea $u = yf$ con $f = e^{-\frac{1}{2}\int a_1}$, luego $u' = y'f + yf', u'' = y''f + 2y'f' + yf''$ con $f' = -\frac{1}{2}a_1 f, f'' = \frac{1}{4}a_1^2 f - \frac{1}{2}a_1' f$. Así

$$\begin{aligned} u'' + a_1u' + a_0u &= y''f + 2y'f' + yf'' + a_1(y'f + yf') + a_0yf \\ &= y''f + 2y'\left(-\frac{1}{2}a_1f\right) + y\left(\frac{1}{4}a_1^2f - \frac{1}{2}a_1'f\right) \\ &+ a_1\left(y'f + y\left(-\frac{1}{2}a_1f\right)\right) + a_0yf \\ &= f\left(y'' - a_1y' + \frac{1}{4}a_1^2y - \frac{1}{2}a_1'y + a_1y' - \frac{1}{2}a_1^2y + a_0y\right) \\ &= f\left(y'' + \left(-\frac{1}{4}a_1^2 - \frac{1}{2}a_1' + a_0\right)y\right) \\ &= f\,(y'' - ry) = 0, \end{aligned}$$

pues y es solución de la EDR. Por ello u es solución de (2.1). Más aún, como y es liouvilliana existe una cadena de campos diferenciales $\mathbb{C}(z) \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = K$ con $y \in K$. Como $\frac{f'}{f} = \frac{1}{2}a_1 \in \mathbb{C}(z)$ luego al considerar la cadena

$$\mathbb{C}(z) \subset F_1 \subset \cdots \subset K \subset K(f),$$

donde f es del tipo integral de una exponencial obtenemos que u es solución liouvilliana.

Por esta razón, de ahora en adelante la ecuación a resolver será la EDR.

Notemos que podemos aplicar el teorema 1.6.2 a la EDR $\mathcal{L}(y) = y'' - ry = 0$. Más aún, con el siguiente resultado obtenemos que el grupo de Galois diferencial de la EDR es (bajo isomorfismo) un subgrupo algebraico afín de $SL(2, \mathbb{C})$.

Teorema 2.1.5. *Para la EDR,* $\varphi(\mathrm{Gal}_{\mathbb{C}(z)}(\mathcal{L})) \subset SL(2, \mathbb{C})$ *donde* φ *es la obtenida en el teorema 1.6.2.*

Demostración. Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial reducida. Por tanto, $y_1'' = ry_1, y_2'' = ry_2$ donde el wronskiano está dado por $w = y_1y_2' - y_1'y_2$, derivando obtenemos

$$w' = y_1y_2'' - y_1''y_2 = ry_1y_2 - ry_1y_2 = 0.$$

Esto indica que $w \in \mathbb{C}$ y así para $\sigma \in \mathrm{Gal}_{\mathbb{C}(z)}(\mathcal{L})$ se tiene $w = \sigma(w)$, además como $\sigma(y_1), \sigma(y_2)$ son soluciones también se tiene que $\sigma(y_1) = c_{11}y_1 + c_{21}y_2$ y $\sigma(y_2) = c_{12}y_1 + c_{22}y_2$. Como σ es automorfismo diferencial se cumple que $\sigma(y_1') = \sigma(y_1)' = c_{11}y_1' + c_{21}y_2'$ y $\sigma(y_2') = \sigma(y_2)' = c_{12}y_1' + c_{22}y_2'$, entonces

$$\begin{aligned}
w &= \sigma(w) \\
&= \sigma\left(\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} \sigma(y_1) & \sigma(y_2) \\ \sigma(y_1') & \sigma(y_2') \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} c_{11}y_1 + c_{21}y_2 & c_{12}y_1 + c_{22}y_2 \\ c_{11}y_1' + c_{21}y_2' & c_{12}y_1' + c_{22}y_2' \end{pmatrix} \\
&= \det\left[\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right] \\
&= \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= w\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} = 1,$$

luego $\varphi(\sigma) \in SL(2,\mathbb{C})$. □

Enunciemos ahora un teorema importante, el teorema de Lie-Kolchin, no daremos la prueba del teorema, pero el lector interesado puede consultar el libro [Kol]. Para ello recordemos que G^0 denota a la componente irreducible de G que contiene a la identidad.

Teorema 2.1.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) Toda solución de la EDR es liouvilliana.

ii) G^0 *es soluble, es decir, que existe una cadena de subgrupos normales*

$$\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G^0$$

tal que el cociente G_i/G_j *es abeliano para todo* $0 \leq j \leq i \leq n$.

iii) G^0 *es triangulable.*

Este resultado convierte el problema de encontrar soluciones liouvillianas a un problema de teoría de grupos.

En la próxima sección veremos la clasificación de los subgrupos del grupo especial lineal $SL(2,\mathbb{C})$.

2.2. Subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$

El algoritmo de Kovacic está basado en la clasificación de los subgrupos algebraicos del grupo $SL(2,\mathbb{C})$, es de aquí donde se desprenden los cuatro casos que conformarán el algoritmo de Kovacic. A continuación damos dicha clasificación en el siguiente teorema cuya demostración omitiremos, pues involucra conceptos más profundos que superan el objetivo de esta tesis, pero el lector interesado puede consultar [Kov].

Teorema 2.2.1. *Sea* G *un subgrupo algebraico afín de* $SL(2,\mathbb{C})$ *entonces exclusivamente uno de los siguientes casos puede ocurrir*

1. G *es triangulable.*

2. *G es el conjugado de un subgrupo de*

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\}$$

   y el caso 1 *no se da. Esto es, existe un* $x \in G$ *tal que para cada* $g \in G$, xgx^{-1} *es una matriz diagonal o una matriz anti-diagonal, pero no existe* $x \in G$ *tal que* xgx^{-1} *es triangular.*

3. *G es finito y los casos* 1 *y* 2 *no se dan.*

4. $G = SL(2, \mathbb{C})$.

En el siguiente teorema determinamos los subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$ (ver [A], [CH], [Kov]).

Teorema 2.2.2. *De acuerdo con el teorema 2.2.1, excepto por conjugación hay tres grupos en el caso* 3.

i) *El grupo* ***tetraedro****. Este grupo es de orden* 24 *y está generado por*

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \frac{1}{3}(2e^{\frac{k\pi i}{3}} - 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

ii) *El grupo* ***octaedro****. Este grupo es de orden* 48 *y está generado por*

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{4}} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}e^{\frac{k\pi i}{4}}(e^{\frac{k\pi i}{2}} + 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii) *El grupo* ***icosaedro****. Este es de orden* 120 *y está generado por*

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \psi & -\phi \end{pmatrix}$$

   siendo ϕ *y* ψ *definidas como*

$$\phi = \frac{1}{5}(e^{\frac{3k\pi i}{5}} - e^{\frac{2k\pi i}{5}} + 4e^{\frac{k\pi i}{5}} - 2)$$

$$\psi = \frac{1}{5}(e^{\frac{3k\pi i}{5}} + 3e^{\frac{2k\pi i}{5}} - 2e^{\frac{k\pi i}{5}} + 1)$$

   donde $0 \leq k \leq 5$.

Enseguida definimos lo que es un elemento invariante y semi -invariante.

Definición 2.2.3. Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la EDR en K. Sea $p(x_1, x_2)$ un polinomio homogéneo con coeficientes en $\mathbb{C}(z)$. Se dice que p es un **invariante** si para todo $\sigma \in \mathrm{Gal}_{\mathbb{C}(z)}(\mathcal{L})$,

$$\sigma(p(y_1, y_2)) = p(y_1, y_2).$$

En este caso $p(y_1, y_2) \in \mathbb{C}(z)$. Ahora p es **semi-invariante** si para todo $\sigma \in \mathrm{Gal}_{\mathbb{C}(z)}(\mathcal{L})$ se tiene que

$$\sigma(p(y_1, y_2)) = cp(y_1, y_2), c \in \mathbb{C}.$$

Si $G = \mathrm{Gal}_{\mathbb{C}(z)}(\mathcal{L})$ es el grupo de Galois diferencial de la EDR, diremos que G esta en una de las formas **canónicas** del teorema 2.2.1 si

1. G es un subgrupo de $\mathcal{T}(n, \mathbb{C})$ o
2. G es un subgrupo de $\mathcal{D}$ y el caso 1 no ocurre o
3. G es finito y los casos 1 y 2 no se dan o
4. $G = SL(2, \mathbb{C})$.

El siguiente teorema muestra una relación entre los primeros tres casos de subgrupos algebraicos de $SL(2,\mathbb{C})$ con los elementos invariantes y semi-invariantes.

Teorema 2.2.4. *Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la EDR de tal manera que en la base $\{y_1, y_2\}$, el grupo $\mathrm{Gal}_{\mathbb{C}(z)}(\mathcal{L})$ se escribe en una de las primeras tres formas canónicas del teorema 2.2.1. Entonces uno de los siguientes casos puede ocurrir*

1. *$\sigma(y_1) = cy_1, c \in \mathbb{C}$ para todo σ, es decir, y_1 es semi-invariante.*
2. *$\sigma(y_1) = cy_1$ y $\sigma(y_2) = c^{-1}y_2$ o $\sigma(y_1) = cy_2$ y $\sigma(y_2) = -c^{-1}y_1$ para todo σ. Además y_1y_2 es semi-invariante y $(y_1y_2)^2$ es invariante.*
3. *En el grupo tetraedro $(y_1^4 + 8y_1y_2^3)^3$ es un invariante.*

   En el grupo octaedro $(y_1^5y_2 - y_1y_2^5)^2$ es un invariante.

   En el grupo icosaedro $y_1^{11}y_2 - 11y_1^6y_2^6 - y_1y_2^{11}$ es un invariante.

Demostración. Denotemos por $G = \mathrm{Gal}_{\mathbb{C}(z)}(\mathcal{L})$.

1. Si
$$G < \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\},$$
luego
$$\sigma(y_1) = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
de donde $\sigma(y_1) = cy_1$, por lo que y_1 es semi-invariante.

2. Si G es un subgrupo de $\mathcal{D}$ y el caso 1 no se da. En el caso del primer conjunto
$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy_1 \\ c^{-1}y_2 \end{pmatrix},$$
de aquí que $\sigma(y_1) = cy_1, \sigma(y_2) = c^{-1}y_2$.

   Para el caso del segundo conjunto
$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy_2 \\ -c^{-1}y_1 \end{pmatrix},$$
luego $\sigma(y_1) = cy_2, \sigma(y_2) = -c^{-1}y_1$.

   Mostremos ahora que y_1y_2 es semi-invariante. Si $\sigma(y_1) = cy_1, \sigma(y_2) = c^{-1}y_2$ se tiene que
$$\sigma(y_1y_2) = \sigma(y_1)\sigma(y_2) = cy_1c^{-1}y_2 = y_1y_2.$$
Si $\sigma(y_1) = cy_2, \sigma(y_2) = -c^{-1}y_1$ se sigue que
$$\sigma(y_1y_2) = \sigma(y_1)\sigma(y_2) = cy_2(-c^{-1}y_1) = -y_1y_2.$$

   Por otro lado, si $\sigma(y_1) = cy_1, \sigma(y_2) = c^{-1}y_2$

   $\sigma\left((y_1y_2)^2\right) = \sigma\left(y_1^2y_2^2\right) = \sigma(y_1)^2\sigma(y_2)^2 = c^2y_1^2c^{-2}y_2^2 = c^2c^{-2}y_1^2y_2^2 = (y_1y_2)^2,$

   de manera análoga cuando $\sigma(y_1) = cy_2, \sigma(y_2) = -c^{-1}y_1$ se tiene que
$$\sigma\left((y_1y_2)^2\right) = (y_1y_2)^2.$$
Por lo que $(y_1y_2)^2$ es invariante.

3. Para el caso 3, puede ocurrir tres casos:

i) Sea G es el grupo tetraedro con generadores

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \frac{1}{3}(2e^{\frac{k\pi i}{3}} - 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hagamos $\zeta = e^{\frac{k\pi i}{3}}, \phi = \frac{1}{3}(2e^{\frac{k\pi i}{3}} - 1)$ y $p(y_1, y_2) = y_1^4 + 8y_1y_2^3$ entonces $\zeta^3 = -1, \zeta^{-6} = \zeta^{12} = 1, \zeta^2 = \zeta - 1$ y $3\phi = 2\zeta - 1$. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta y_1 \\ \zeta^{-1}y_2 \end{pmatrix}.$$

Así

$$p\left(\begin{pmatrix} \zeta y_1 \\ \zeta^{-1}y_2 \end{pmatrix}\right) = (\zeta^4 y_1^4 + 8y_1y_2^3\zeta^{-2}) = \zeta^4(y_1^4 + 8y_1y_2^3).$$

Luego

$$p\left(\begin{pmatrix} \zeta y_1 \\ \zeta^{-1}y_2 \end{pmatrix}\right)^3 = (y_1^4 + 8y_1y_2^3)^3.$$

Por otro lado, notemos que

$$y_1^4 + 8y_1y_2^3 = y_1(y_1 + 2y_2)(y_1 + 2\zeta^2 y_2)(y_1 - 2\zeta y_2).$$

Por lo que

$$\phi\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(y_1 + y_2) \\ \phi(2y_1 - y_2) \end{pmatrix}.$$

Así

$$\begin{aligned} p\left(\begin{pmatrix} \phi(y_1 + y_2) \\ \phi(2y_1 - y_2) \end{pmatrix}\right) =& \phi(y_1 + 2y_2) \cdot 3\phi y_1 \cdot \phi(2\zeta - 1)(y_1 - 2\zeta y_2)\cdot \\ & \phi(1 - 2\zeta)(y_1 + 2\zeta^2 y_2) \\ & = -3\phi^4(2\zeta - 1)^2(y_1^4 + 8y_1y_2^3) \\ & = -3\left(-\frac{1}{3}\right)^2(-3)(y_1^4 + 8y_1y_2^3) \\ & = y_1^4 + 8y_1y_2^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p\left(\begin{pmatrix}\phi(y_1+y_2)\\ \phi(2y_1-y_2)\end{pmatrix}\right)^3=(y_1^4+8y_1y_2^3)^3.$$

Como esto se cumple para los generadores se sigue que $(y_1^4+8y_1y_2^3)^3$ es invariante bajo G y así está en $\mathbb{C}(z)$.

Análogamente se obtienen resultados similares para el grupo octaedro y el grupo icosaedro.

□

Observación 6. Si $G=SL(2,\mathbb{C})$ no tenemos información sobre existencia de semi-invariantes.

Observación 7. La EDR tiene solución de la forma $\eta=e^{\int w}$ si y solo si w satisface la ecuación de Riccati $w'+w^2=r$.

En efecto, supongamos primero que η es solución de la EDR entonces $\eta''=r\eta$. Ya que

$$\eta=e^{\int w},\eta'=we^{\int w},\eta''=w'e^{\int w}+w^2e^{\int w},$$

obtenemos

$$w'\eta+w^2\eta=r\eta,$$

dividiendo por $\eta=e^{\int w}$ (ya que no es cero) concluimos que $w'+w^2=r$.

Recíprocamente, supongamos que $w'+w^2=r$. Definamos $\eta=e^{\int w}$, por lo que $\eta'=w\eta$, entonces

$$\eta''=e^{\int w}(w'+w^2)=e^{\int w}r=\eta r.$$

Concluyendo así la observación.

Tenemos que el grupo de Galois diferencial de la EDR es un subgrupo algebraico de $SL(2,\mathbb{C})$. Por tanto, podemos considerarlo en una de las formas canónicas del teorema 2.2.1 y ver que relevancia tiene para las soluciones de la EDR.

Teorema 2.2.5. *Con respecto a la existencia de una solución liouvilliana de la EDR, cuatro posibles casos pueden ocurrir.*

1. *La EDR tiene una solución de la forma $e^{\int w}$ donde $w \in \mathbb{C}(z)$.*
2. *La EDR tiene una solución de la forma $e^{\int w}$ donde w es algebraico sobre $\mathbb{C}(z)$ de grado 2 y el caso uno no ocurre.*
3. *Todas las soluciones de la EDR son algebraicas sobre $\mathbb{C}(z)$ y los casos uno y dos no ocurren.*
4. *La EDR no tiene solución liouvilliana.*

Demostración. Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la EDR, $K = \mathbb{C}(z)(y_1, y_2)$ y $G \subset SL(2,\mathbb{C})$ el grupo de Galois diferencial de la EDR relativa a la base $\{y_1, y_2\}$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si G es un subgrupo de $\mathcal{T}(n,\mathbb{C})$, para cada $\sigma \in G$, sabemos que $\sigma(y_1) = cy_1$ y así $\sigma(y_1') = cy_1'$. Si $w = \frac{y_1'}{y_1}$ entonces

$$\sigma(w) = \sigma\left(\frac{y_1'}{y_1}\right) = \frac{\sigma(y_1)'}{\sigma(y_1)} = \frac{cy_1'}{cy_1} = \frac{y_1'}{y_1} = w,$$

lo cual implica que $w \in \mathbb{C}(z)$.

Ahora si $\eta := e^{\int w}$ entonces $\eta' = we^{\int w}, \eta'' = w'e^{\int w} + w^2 e^{\int w}$, luego

$$\begin{aligned}
\eta'' &= e^{\int w}(w^2 + w') \\
&= e^{\int w}\left(\frac{(y_1')^2}{y_1^2} + \frac{y_1'' y_1}{y_1^2} - \frac{(y_1')^2}{y_1^2}\right) = e^{\int w}\left(\frac{y_1''}{y_1}\right) \\
&= e^{\int w}\left(\frac{r y_1}{y_1}\right) = r\eta.
\end{aligned}$$

2. Si G es un subgrupo de $\mathcal{D}$. Sean $w = \frac{y_1'}{y_1}$ y $w_2 = \frac{y_2'}{y_2}$. Notemos que para σ que está en el segundo uniendo de $\mathcal{D}$ se tiene que

$$\sigma w = \frac{\sigma(y_1)'}{\sigma(y_1)} = \frac{cy_2'}{cy_2} = w_2 \qquad \sigma w_2 = \frac{\sigma(y_2)'}{\sigma(y_2)} = \frac{-c^{-1}y_1'}{-c^{-1}y_1} = w,$$

por lo que w, w_2 no están en $\mathbb{C}(z)$.

Por otro lado, consideremos al polinomio

$$(x - w)(x - w_2) = x^2 - x(w + w_2) + ww_2. \qquad (2.4)$$

Si σ está en el primer uniendo de $\mathcal{D}$ se tiene que

$$\sigma w = \frac{\sigma(y_1)'}{\sigma(y_1)} = \frac{cy_1'}{cy_1} = w \qquad \sigma w_2 = \frac{\sigma(y_2)'}{\sigma(y_2)} = \frac{c^{-1}y_2'}{c^{-1}y_2} = w_2.$$

Así

$$\sigma(ww_2) = \sigma(w)\sigma(w_2) = ww_2 \qquad \sigma(w + w_2) = \sigma(w) + \sigma(w_2) = w + w_2.$$

Para el segundo uniendo tenemos

$$\sigma(ww_2) = \sigma(w)\sigma(w_2) = w_2 w \qquad \sigma(w + w_2) = \sigma(w) + \sigma(w_2) = w_2 + w.$$

En ambos casos obtenemos que $ww_2, w + w_2$ son invariantes, luego $ww_2, w + w_2 \in \mathbb{C}(z)$.

Con todo, el polinomio 2.4, es un polinomio irreducible que tiene coeficientes en $\mathbb{C}(z)$, del cual w y w_2 son raíces. por lo que w, w_2 son algebraicos de grado 2 sobre $\mathbb{C}(z)$.

3. Si G es finito existe solo un número finito de automorfismos diferenciales $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Afirmamos que los polinomios simétricos elementales [1] de las funciones $\sigma_1(y_i), \ldots, \sigma_n(y_i)$, los cuales denotamos por $s_k = s_k(\sigma_1(y_i), \ldots, \sigma_n(y_i)), k = 0, \ldots, n,\ i = 1, 2$, son invariantes bajo cualquier $\sigma_j \in G$. En efecto, ya que $\sigma_j \cdot \sigma_i \in G$ para toda σ_i (pues G es grupo) tenemos que

$$\sigma_j(s_k) = \sigma_j \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \sigma_{i_1}(y_i) \cdots \sigma_{i_k}(y_i) \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \sigma_{i_1}(y_i) \cdots \sigma_{i_k}(y_i).$$

Por lo tanto, todos estos polinomios simétricos elementales, al ser invariantes, se encuentran en $\mathbb{C}(z)$.

Consideremos el polinomio

$$(x - \sigma_1(y_i)) \cdots (x - \sigma_n(y_i)) = x^n - s_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n.$$

Este es un polinomio con coeficentes en $\mathbb{C}(z)$. Por otro lado, ya que G es grupo tiene al automofismo identidad, luego la descomposición del

[1] Para más información sobre los polinomios simétricos elementales puede consultar [L], página 190.

polinomio anterior tiene al factor $(x - y_i)$, por lo que el polinomio se anula en $y_i, i = 1, 2$.

Así las soluciones de la ecuación diferencial EDR, y_1, y_2, son algebraicos sobre $\mathbb{C}(z)$ y al ser estos algebraicos todas las soluciones de la EDR lo son también.

4. Aquí suponemos que $G = SL(2, \mathbb{C})$. Supongamos por contradicción que la EDR tiene una solución liouvilliana entonces por el teorema 2.1.3 todas sus soluciones son liouvillianas. Ahora del teorema de Lie-Kolchin, 2.1.6, ya que se cumple i) tendriamos que o bien $G = SL(2, \mathbb{C})$ es soluble, lo cual vimos en el ejemplo 15 que no es cierto, o bien G es triangulable lo cual tampoco es posible pues el caso 1 no se cumple. Por tanto, la EDR no tiene soluciones liouvillianas. □

2.3. Condiciones necesarias de Kovacic

Para reducir el trabajo que implica resolver la EDR, $y'' = ry$, $r \in \mathbb{C}(z)$, Kovacic estableció condiciones necesarias sobre la función r para que se cumpla cada uno de los tres primeros casos del teorema 2.2.5, es decir, para que exista una solución liouvilliana. Estas condiciones son necesarias pero no son suficientes, pues si las condiciones se cumplen, el algoritmo puede tener éxito o no.

Ya que r es una función racional en $\mathbb{C}(z)$, podemos hablar de sus polos, por lo que nos referiremos a los polos en el plano complejo $\mathbb{C}$. Si $r = \frac{r_1}{r_2}$ con $r_1, r_2 \in \mathbb{C}[z]$ primos relativos entonces los polos de r son los ceros de r_2 y el **orden del polo** es la multiplicidad del cero de r_2. Por el **orden de r en infinito** entenderemos el orden de infinito como un cero de r, por lo que $o(r_\infty) = \mathrm{grad}(r_2) - \mathrm{grad}(r_1)$.

A partir de aquí fijamos una EDR, $y'' = ry$ y consideramos su grupo de Galois diferencial G en una de las formas canónicas del teorema 2.2.1.

Kovacic proporcionó condiciones necesarias para que cada uno de los tres primeros casos del teorema 2.2.1 se cumplan.

Teorema 2.3.1 (Condiciones necesarias de Kovacic)**.** *Las siguientes condiciones son necesarias para que cada uno de los respectivos casos en el teorema 2.2.1 ocurra.*

caso 1. Cada polo de r debe tener orden par o tener orden 1. El orden de r en ∞ debe ser par o si no ser mayor que 2.

caso 2. r debe tener al menos un polo que o bien tiene orden impar mayor que 2 o si no es de orden 2.

caso 3. El orden de un polo de r no puede exceder a 2 (es decir es 1 o 2) y el orden de r en infinito debe ser al menos 2. Si la expansión en fracciones parciales de r es

$$r = \sum_i \frac{\alpha_i}{(z - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{z - d_j},$$

entonces $\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q}$ para cada i, $\sum_j \beta_j = 0$ y si $\gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j$ entonces $\sqrt{1 + 4\gamma} \in \mathbb{Q}$.

Demostración.

caso 1. De acuerdo al teorema 2.2.5, en este caso la ecuación tiene una solución de la forma $y = e^{\int w}$ donde $w \in \mathbb{C}(z)$, luego w satisface la ecuación de Ricatti $w' + w^2 = r$. Aquí ambos w y r tiene expansiones de Laurent alrededor de cualquier punto del plano complejo. Para simplificar notación haremos la expansión en serie de Laurent de w y r en $z = 0$, luego

$$w = \sum_{m \geq \mu} a_m z^m, \ m \in \mathbb{Z}, a_m \in \mathbb{C}, a_\mu \neq 0, \tag{2.5}$$

$$r = \sum_{n \geq \nu} b_n z^n \ n \in \mathbb{Z}, b_n \in \mathbb{C}, b_\nu \neq 0. \tag{2.6}$$

Si sustituimos (2.5) y (2.6) en la ecuación de Ricatti obtenemos

$$\mu a_\mu z^{\mu-1} + \cdots + a_\mu^2 z^{2\mu} + \cdots = b_\nu z^\nu + \cdots \tag{2.7}$$

Queremos mostrar que cada polo de r es de orden 1 o bien de orden par. Si ν no es -1 o -2 entonces $\nu \leq -3$, si esto pasa veremos que ν es par. Tenemos que $b_\nu \neq 0$, además de la igualdad (2.7)

$$\nu \geq \min(\mu - 1, 2\mu),$$

con lo que

$$-3 \geq \nu \geq \text{mín}(\mu - 1, 2\mu),$$

luego $\mu < -1$ y $2\mu < \mu - 1$. Ya que $a_\mu^2 \neq 0$ y el menor orden del lado derecho de 2.6 es ν entonces $\nu = 2\mu$, esto es, ν es par.

Si ahora consideramos la serie de Laurent de w y r en infinito se tiene

$$w = \sum_{m \leq \mu} a_m z^m, \ m \in \mathbb{Z}, a_m \in \mathbb{C}, a_\mu \neq 0, \tag{2.8}$$

$$r = \sum_{n \leq \nu} b_n z^n \ n \in \mathbb{Z}, b_n \in \mathbb{C}, b_\nu \neq 0. \tag{2.9}$$

Como debemos mostrar que el orden de r en infinito es mayor o igual que 3 o par, podemos suponer que $\nu \geq -1$; de lo contrario si $\nu < -1$, el orden de r en infinito seria mayor o igual a 2. Si $\nu = -2$ entonces ν es par y si es menor a -3, r tiene orden mayor a 2. Por tanto, vamos a ver que si $\nu \geq -1$ entonces el orden debe ser par. Sustituyendo en la ecuación de Ricatti obtenemos

$$\mu a_\mu z^{\mu-1} + \cdots + a_\mu^2 z^{2\mu} + \cdots = b_\nu z^\nu + \cdots,$$

como en el caso anterior

$$-1 \leq \nu \leq \text{máx}(\mu - 1, 2\mu),$$

luego $\mu > -1$ y $2\mu > \mu - 1$, como $a_\mu^2 \neq 0$ entonces

$$2\mu = \nu \tag{2.10}$$

con lo que ν es par. Con esto hemos obtenido las condiciones necesarias para que el caso i) ocurra.

caso 2. En este caso sabemos que el grupo de Galois diferencial G es un subgrupo no triangulable de $\mathcal{D}$. También sabemos del teorema 2.2.4 que si $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la EDR entonces $\sigma(y_1) = cy_1$ y $\sigma(y_2) = c^{-1}y_2$ o $\sigma(y_1) = cy_2$ y $\sigma(y_2) = -c^{-1}y_1$. Además $(y_1y_2)^2$ es invariante, por lo que pertenece a $\mathbb{C}(z)$, también y_1y_2 es semi-invariante de donde $y_1y_2 \notin \mathbb{C}(z)$, de lo contrario $\sigma(y_1y_2) = y_1y_2 = cy_1c^{-1}y_2$ y entonces G sería un subgrupo del grupo diagonal.

Ahora como $(y_1y_2)^2 \in \mathbb{C}(z)$ se tiene que

$$(y_1y_2)^2 = y_1^2 y_2^2 = \prod (z - c_i)^{e_i}$$

con $e_i \in \mathbb{Z}, c_i \in \mathbb{C}$. Notemos que al menos uno de los exponentes debe ser impar pues si todos fueran pares entonces y_1y_2 podría escribirse en la forma $\prod(z-c_i)^{\frac{e_i}{2}}$ con $\frac{e_i}{2} \in \mathbb{Z}$ implicando que $y_1y_2 \in \mathbb{C}(z)$ lo cual no es posible. Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$y_1^2y_2^2 = z^e \prod(z-c_i)^{e_i},$$

con e impar y el c_i en el factor correspondiente a e es 0. Hagamos

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{(y_1y_2)'}{y_1y_2} = \frac{(y_1y_2' + y_1'y_2)(y_1y_2)}{(y_1y_2)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(2y_1^2y_2y_2' + 2y_1y_1'y_2^2)}{(y_1y_2)^2} = \frac{\frac{1}{2}(y_1^2y_2^2)'}{(y_1y_2)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}[z^e\prod(z-c_i)^{e_i}]'}{z^e\prod(z-c_i)^{e_i}} = \frac{1}{2}ez^{-1} + \frac{1}{2}\frac{[\prod(z-c_i)^{e_i}]'}{\prod(z-c_i)^{e_i}} \\
&= \frac{1}{2}ez^{-1} + \cdots,
\end{aligned}$$

donde los puntos representan términos de orden mayor a -1 en z. Como $y_1'' = ry_1$ y $y_2'' = ry_2$ entonces

$$\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 = 4r\theta + 2r'. \tag{2.11}$$

Sea $r = \sum_{n\geq\nu} b_nz^n, n \in \mathbb{Z}, b_\nu \neq 0$, la expansión en serie de Laurent de r en 0. Queremos probar que r tiene un polo de orden impar mayor que 2 o de orden 2, esto es, $\nu < -2$ con ν impar o $\nu = -2$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\theta' &= -\frac{1}{2}ez^{-2} + \cdots & \theta'' &= ez^{-3} + \cdots \\
3\theta\theta' &= -\frac{3}{4}e^2z^{-3} + \cdots & \theta^3 &= \frac{1}{8}e^3z^{-3} + \cdots
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores en (2.11) obtenemos

$$\left(e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3\right)z^{-3} + \cdots = 2b_\nu(e+\nu)z^{\nu-1} + \cdots. \tag{2.12}$$

Si $\nu > -2$ entonces

$$0 = e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3 = \frac{1}{8}(8e - 6e^2 + e^3) = \frac{1}{8}e(e-4)(e-2),$$

de aquí $e = 0, e = 2$ o $e = 4$, que contradice el hecho que e es impar. Por lo tanto, $\nu \leq -2$. Si $\nu < -2$, por la igualdad (2.12) se tiene que $e + \nu = 0$ de lo cual ν es impar. Así $\nu = -2$ o $\nu < -2$ con ν impar.

caso 3. Para este caso la EDR tiene una solución y que es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$. Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado y de característica cero entonces por el teorema de Puiseux B.0.2 se tiene que la cerradura algebraica de $\mathbb{C}((z))$ es isomorfa a $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}((z^{\frac{1}{i}}))$. Ya que $\mathbb{C}(z) \subset \mathbb{C}((z))$, y se puede expander en una serie de Puiseux alrededor de cualquier $c \in \mathbb{C}$. Con el fin de facilitar la notación supongamos que $c = 0$, entonces

$$y = az^{\mu} + \cdots \tag{2.13}$$

donde $a \in \mathbb{C}, a \neq 0, \mu \in \mathbb{Q}$ y los puntos representan términos de orden mayor a μ en z. Consideremos también el desarrollo en serie de Laurent de r en 0

$$r = \alpha z^{\nu} + \cdots \tag{2.14}$$

donde $\alpha \neq 0, \nu \in \mathbb{Z}$ y los puntos representan términos de orden mayor a ν en z. Aquí queremos mostrar que el orden de un polo de r es 1 o es 2.

Utilizando que y satisface la EDR y (2.13) y (2.14)

$$\mu(\mu - 1)az^{\mu-2} + \cdots = \alpha a z^{\nu+\mu} + \cdots .$$

El término de menor orden de lado derecho al ser producto de los términos de menor orden de las series de y y r, no puede ser cero, por lo que $\mu+\nu \geq \mu-2$, luego $\nu \geq -2$, es decir, los polos de r tienen orden 1 o 2.

Si $\nu = -2$ entonces $\mu(\mu-1)a = \alpha a$, ya que $a \neq 0$ se tiene que $\mu(\mu-1) = \alpha$ y así $\mu^2 - \mu - \alpha = 0$, por lo que

$$\mu = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}.$$

Como $\mu \in \mathbb{Q}$ se tiene que $\sqrt{1 + 4\alpha} \in \mathbb{Q}$.

Hasta aquí hemos probado que el orden de un polo de r no puede exceder a 2, por lo cual del teorema B.0.1, r es de la forma

$$r = \sum_i \frac{\alpha_i}{(z - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{z - d_j} + P,$$

donde $P \in \mathbb{C}[z]$ y $\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q}$ para cada i.

Tomemos ahora las expansiones de y y r en infinito

$$y = \sum_{m \leq \mu} a_m z^m, \ m \in \mathbb{Q}, a_m \in \mathbb{C}, a_\mu \neq 0,$$
$$r = \sum_{n \leq \nu} b_n z^n, \ n \in \mathbb{Z}, b_n \in \mathbb{C}, b_\nu \neq 0.$$

Ahora queremos ver que el orden de r en infinito es al menos 2. Sustituyendo en la EDR obtenemos

$$\mu(\mu - 1) a_\mu z^{\mu-2} + \cdots = b_\nu a_\mu z^{\nu+\mu} + \cdots .$$

Así como antes se obtiene que $\nu \leq -2$, por lo que $P = 0$. Consecuentemente

$$r = \sum_i \frac{\alpha_i}{(z - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{z - d_j}. \tag{2.15}$$

Ahora

$$\frac{\beta_j}{z - d_j} = \frac{\beta_j}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{d_j}{z}} \right) = \frac{\beta_j}{z} \left(1 + \frac{d_j}{z} + \frac{d_j^2}{z^2} + \cdots \right) = \frac{\beta_j}{z} + \frac{\beta_j d_j}{z^2} + \frac{\beta_j d_j^2}{z^3} + \cdots \tag{2.16}$$

Por otro lado,

$$\alpha_j \left(\frac{1}{z - c_j} \right)^2 = \alpha_j \left(\frac{1}{z\left(1 - \frac{c_j}{z}\right)} \right)^2 = \frac{\alpha_j}{z^2} \frac{1}{(1 - \frac{c_j}{z})^2} = \frac{\alpha_j}{z^2} \left(1 + 2\frac{c_j}{z} + 3\frac{c_j^2}{z^2} + \cdots \right) \tag{2.17}$$

Sustituyendo (2.16) y (2.17) en (2.15) obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \sum_j \left(\frac{\beta_j}{z} + \frac{\beta_j d_j}{z^2} + \frac{\beta_j d_j^2}{z^3} + \cdots \right) + \sum_i \frac{\alpha_i}{z^2} \left(1 + \frac{2c_i}{z} + \frac{2c_i^2}{z^2} + \cdots \right) \\ &= \sum_j \beta_j z^{-1} + \left(\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j \right) z^{-2} + \cdots \\ &= \sum_j \beta_j z^{-1} + \gamma z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

donde $\gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j$. Como el orden de r en infinito debe ser al menos 2 se sigue que $\sum_j \beta_j = 0$ y $b_{-2} = \gamma$, por lo que

$$\mu(\mu-1)a_\mu z^{\mu-2} + \cdots = \gamma a_\mu z^{-2+\mu} + \cdots .$$

Igualando términos tenemos que $\mu(\mu-1) = \gamma$ y dado que $\mu \in \mathbb{Q}$ entonces $\sqrt{1+4\gamma} \in \mathbb{Q}$. □

A continuación damos algunos ejemplos de como aplicar las condiciones del teorema anterior.

Ejemplo 8. i) Sea $y'' = zy$ la ecuación de Airy. Como $r = z$ tiene orden -1 en infinito entonces observemos que el caso 1 no se cumple, ni el 2, ni el caso 3. Por lo tanto, el grupo de Galois diferencial de la ecuación de Airy debe ser $SL(2,\mathbb{C})$ y así la ecuación no tiene soluciones liouvillianas.

ii) Sea $y'' = ry$ donde

$$\begin{aligned} r &= \frac{4z^6 - 8z^5 + 12z^4 + 4z^3 + 7z^2 - 20z + 4}{4z^4} \\ &= z^2 - 2z + 3 + z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} - 5z^{-3} + z^{-4}. \end{aligned}$$

Aquí tenemos un polo en cero que es de orden 4 y el orden de r en infinito es -2 entonces el caso 1 ocurre.

iii) Sea $y'' = ry$ con

$$r = \frac{101 - 81z^2}{48(1+3z^2)^2}.$$

Los polos de r son $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}i$, que son de orden 2 y el orden de r en infinito es 2, por lo que el caso 1 es aplicable. También notemos que los casos 2 y 3 son aplicables.

iv) Dada la ecuación diferencial $y'' = ry$ con

$$r = \frac{-128z^2 + 155z - 135}{576z^2(z-1)^2}.$$

Aquí los polos son $z = 0$ y $z = 1$ ambos de orden 2 y el orden de r en infinito es 2. Por lo tanto, las condiciones necesarias para los tres casos se cumplen.

v) Tomemos $y'' = ry$ con

$$r = \frac{3(25z^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}z + 19)}{16(5z^2 - 1)^2}.$$

Los polos son $\pm(\sqrt{5})^{-1}$ de orden 2 y el orden de r en infinito es 2, luego se cumplen todos los casos de las condiciones.

Ya que determinamos cuales de los casos dados en el teorema 2.3.1 pueden ocurrir para la EDR, lo que ahora haremos es tratar de encontrar alguna solución de la forma dada en el teorema 2.2.5. El algoritmo solamente encuentra una solución y una segunda solución se puede encontrar por el método de variación de parámetros.

Enseguida describimos el algoritmo para cada uno de los casos.

2.4. Algoritmo Caso 1.

En este caso, el objetivo del algoritmo es encontrar una solución de la EDR de la forma $y = Pe^{\int w}$ donde $P \in \mathbb{C}[z], w \in \mathbb{C}(z)$. Notemos que y puede escribirse como $e^{\int(\frac{P'}{P}+w)}$ que es la forma descrita en el teorema 2.2.5 para el caso 1.

A continuación introducimos algunas notaciones. Sea g una función racional, si la expansión en fracciones parciales de g es

$$g = Q + \sum_c \sum_{j=1}^{\nu_c} \frac{a_{c_j}}{(z-c)^j}, \text{ con } Q \in \mathbb{C}[z],$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{\nu_c} \frac{a_{c_j}}{(z-c)^j}$$

es la suma de los términos de grado negativo de la expansión en serie de Laurent de g en el polo c. Nos referiremos a ella como la expansión en fracciones parciales de g en c. Además la suma de los términos de grado no negativo del desarrollo en serie de Laurent de g en infinito es igual al polinomio Q.

Sea $g = \sum_{m\geq\mu} a_m(z-c)^m$, $m \in \mathbb{Z}$ la expansión en serie de Laurent de una función meromorfa g en un polo c.

Siguiendo a Kovacic usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
[g]_c &= \sum_{\mu \leq m \leq -2} a_m (z-c)^m, \\
\alpha_c &= a_{-1}, \text{ el residuo de } g \text{ en } c, \\
\bar{g}_c &= \sum_{m \geq 0} a_m (z-c)^m.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Así

$$g = [g]_c + \frac{\alpha_c}{z-c} + \bar{g}_c.$$

Si $g = \sum_{m \leq \mu} a_m z^m$, $m \in \mathbb{Z}$ es la expansión en serie de una función meromorfa g en infinito, fijamos

$$\begin{aligned}
[g]_\infty &= \sum_{0 \leq m \leq \mu} a_m z^m, \\
\alpha_\infty &= a_{-1}, \\
\bar{g}_\infty &= \sum_{m \leq -2} a_m z^m.
\end{aligned}$$

Supongamos que existe una solución a la EDR $y = Pe^{\int w}$ donde $P \in \mathbb{C}[z], w \in \mathbb{C}(z)$ están por determinarse. De aquí en adelante Γ denota el conjunto de polos de r en el plano complejo. El algoritmo de Kovacic para este caso se resume en los siguientes pasos

- El primer paso del algoritmo consiste en determinar partes de la expansión de w, especificamente los posibles valores para $[w]_c$ y el residuo de w en c para $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$.

- El segundo paso es descartar algunas de las combinaciones de datos utilizando la relación entre los residuos de una función meromorfa en sus polos diferentes para después formar un candidato para w con las posibilidades restantes.

- Para estas posibilidades restantes el tercer paso es tratar de encontrar un polinomio P adecuado, si es encontrado entonces tenemos la solución deseada a la EDR. Si, para cada candidato para w, no podemos encontrar un polinomio P adecuado entonces el caso 1 no es posible.

Describamos ahora el algoritmo para este caso.

Teorema 2.4.1 (Algoritmo de Kovacic caso 1)**.** *Sea $r \in \mathbb{C}(z)$ que satisface las condiciones necesarias para el caso 1 dadas en el teorema 2.3.1. Sea Γ el conjunto de polos de r en el plano complejo.*

Paso 1. *Para cada $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ la función racional $[w]_c$ y los números complejos α_c^+, son descritos a continuación*

(c_1) *Si $c \in \Gamma$ y c es un polo de orden 1 entonces*

$$[w]_c = 0 \text{ y } \alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1.$$

(c_2) *Si $c \in \Gamma$ y c es un polo de orden 2 entonces*

$$[w]_c = 0 \text{ y } \alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b},$$

donde b es el coeficiente de $(z-c)^{-2}$ en la expansión de fracciones parciales para r.

(c_3) *Si $c \in \Gamma$ y c es un polo de orden $2\nu \geq 4$ entonces*

$$[w]_c = \pm[\sqrt{r}]_c \text{ y } \alpha_c^\pm = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} + \nu\right),$$

donde a es el coeficiente de $(z-c)^{-\nu}$ en $[\sqrt{r}]_c$ y b es el coeficiente de $(z-c)^{-\nu-1}$ en $r - [\sqrt{r}]_c^2$.

(∞_1) *Si el orden de r en ∞ es mayor que 2 entonces*

$$[w]_\infty = 0 \text{ y } \alpha_\infty^+ = 0, \alpha_\infty^- = 1.$$

(∞_2) *Si el orden de r en ∞ es 2 entonces*

$$[w]_\infty = 0 \text{ y } \alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b},$$

donde b es el coeficiente de z^{-2} en la expansión en la serie de Laurent de r en infinito.

(∞_3) *Si el orden de r en ∞ es $-2\nu \leq 0$ entonces*

$$[w]_\infty = \pm\left[\sqrt{r}\right]_\infty \text{ y } \alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} - \nu\right),$$

donde a es el coeficiente de z^ν en la expansión de serie de Laurent de $\sqrt{r}$ en infinito y b es el coeficiente de $z^{\nu-1}$ en $r - [\sqrt{r}]_\infty^2$.

Paso 2. *Para cada familia* $s = (s(c))_{c \in \Gamma \cup \{\infty\}}$ *donde* $s(c) \in \{+, -\}$, *sea*

$$d_s = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \sum_{c \in \Gamma} \alpha_c^{s(c)}.$$

Si d_s *es un entero no negativo sea*

$$\theta_s = \sum_{c \in \Gamma} \left(s(c)[w]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{z - c} \right) + s(\infty)[w]_\infty.$$

Paso 3. *Para cada uno de los* θ_s *considerados en el paso* 2 *se busca un polinomio* P_s *de grado* d_s *que satisfaga la ecuación diferencial*

$$P_s'' + 2\theta_s P_s' + (\theta_s' + \theta_s^2 - r)P_s = 0. \tag{2.19}$$

Si tal polinomio existe para algún s *entonces* $y = Pe^{\int w}$ *es una solución de la EDR con* $P = P_s$ *y* $w = \theta_s$.

Si d_s *no es un entero no negativo para cuaquiera de las familias* s *consideradas en el paso* 2 *o no existe un polinomio que satisfaga la ecuación* (2.19) *para ninguna de las familias* s *retenidas en el paso* 3 *entonces la EDR no tiene solución de la forma* $y = e^{\int w}$ *con* $w \in \mathbb{C}(z)$.

Demostración. Primero demostramos que si $y = e^{\int w}$ es una solución a EDR entonces la expansión en fracciones parciales $\sum_{i=1}^{\nu} \frac{a_i}{(z-c)^i}$ de w en c con $c \in \Gamma (c = \infty)$ tiene alguna de las formas descritas en el paso 1 correspondiente a cada subcaso. Recordamos que EDR en el caso 1 al tener una solución de la forma $y = e^{\int w}$, w satisface la ecuación de Ricatti

$$w' + w^2 = r.$$

Sea $c \in \Gamma$, por un cambio de variable, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c = 0$ y por lo mismo despreciamos los subíndices en las notaciones 2.18.

Como $w \in \mathbb{C}(z)$ podemos escribir su serie de Laurent sobre 0, su derivada y su cuadrado como

$$\begin{aligned}
w &= [w] + \frac{\alpha}{z} + \bar{w} = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{a_i}{z^i} + \frac{\alpha}{z} + \bar{w}, \\
w' &= -\frac{\alpha}{z^2} - \frac{a_2}{z^3} - \cdots - \frac{\nu a_\nu}{z^{\nu+1}} + \cdots \\
w^2 &= \frac{\alpha^2}{z^2} + \frac{2\alpha a_\nu}{z^{\nu+1}} + \frac{a_\nu^2}{z^{2\nu}} + \cdots
\end{aligned}$$

(c_1) Supongamos que 0 es un polo de r de orden 1 entonces

$$r = \frac{b}{z} + \cdots$$

con $b \neq 0$. Supongamos además que $[w] \neq 0$, luego $\nu \geq 2$ y $a_\nu \neq 0$.

Sustituyendo las expresiones de r y w en la ecuación de Ricatti obtenemos

$$\frac{-\nu a_\nu}{z^{\nu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu^2}{z^{2\nu}} + \cdots = \frac{b}{z} + \cdots \tag{2.20}$$

Como $\nu \geq 2$ entonces $\text{mín}(\nu+1, 2\nu) = \nu + 1$, de 2.20, $\nu + 1 = 1$ luego $\nu = 0$ lo cual es una contradicción. Así $[w] = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{a_i}{z^i} = 0$. Con lo que

$$w = \frac{\alpha}{z} + \bar{w}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación de Ricatti obtenemos

$$-\frac{\alpha}{z^2} + \bar{w}' + \frac{\alpha^2}{z^2} + 2\frac{\alpha}{z}\bar{w} + \bar{w}^2 = \frac{b_1}{z} + \cdots$$

Por lo tanto, comparando ambos lados de la igualdad tenemos que $-\alpha + \alpha^2 = \alpha(-1+\alpha) = 0$, luego o bien $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$. Pero si $\alpha = 0$, 0 no sería un polo en el lado izquierdo de la igualdad y del lado derecho de la igualdad sí, por lo que $\alpha = 1$. Por lo tanto, $[w] = 0$ y el residuo α de w en cero es 1, concluyendo así la prueba para (c_1).

(c_2) Si 0 es un polo de r de orden 2 entonces

$$r = \frac{b}{z^2} + \cdots,$$

con $b \neq 0$. Procedemos de igual manera que en (c_1), supongamos que $[w] \neq 0$. Sustituyendo las expresiones de r y w en la ecuación de Ricatti obtenemos

$$\frac{-\nu a_\nu}{z^{\nu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu^2}{z^{2\nu}} + \cdots = \frac{b}{z^2} + \cdots.$$

Como $\nu \geq 2$ entonces $\text{mín}(\nu+1, 2\nu) = \nu + 1$, por lo que en este caso, $\nu + 1 = 2$, que contradice wel hecho que $\nu \geq 2$. Así de nuevo obtenemos $[w] = 0$. Con lo que $w = \frac{\alpha}{z} + \bar{w}$. Sustituyendo esto en la ecuación de Ricatti obtenemos

$$-\frac{\alpha}{z^2} + \bar{w}' + \frac{\alpha^2}{z^2} + 2\frac{\alpha}{z}\bar{w} + \bar{w}^2 = \frac{b}{z^2} + \cdots$$

Por lo tanto, comparando ambos lados de la igualdad tenemos que $-\alpha+\alpha^2 = b$ y así $\alpha^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4b}}{2}$. Hemos visto que $[w]=0$ y el residuo α de w en cero es $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4b}}{2}$ donde b es el coeficiente de z^{-2} en la expansión de fracciones parciales para r.

(c_3) Si 0 es un polo de r de orden $\beta = 2\nu \geq 4$, de la ecuación 2.10, en la demostración del teorema de condiciones necesarias de Kovacic para el caso 1, tenemos que w debe tener un polo de orden $\nu = \frac{\beta}{2}$, es decir, $[w] = \sum_{i=2}^{\frac{\beta}{2}} \frac{a_i}{z^i}$. Ahora si definimos $\tilde{r} = \sqrt{r} - [\sqrt{r}]$ entonces $r = (\tilde{r} + [\sqrt{r}])^2 = \tilde{r}^2 + 2\tilde{r}[\sqrt{r}] + [\sqrt{r}]^2$, equivalentemente

$$r - [\sqrt{r}]^2 = \tilde{r}^2 + 2\tilde{r}[\sqrt{r}].$$

De esta última igualdad, el hecho que $w = [w] + \frac{\alpha}{z} + \bar{w}$, de la ecuación de Ricatti y después de algunos cálculos algebraicos se sigue que

$$([w] + [\sqrt{r}])([w] - [\sqrt{r}]) =$$
$$-[w]' + \frac{\alpha}{z^2} - \bar{w}' - \frac{2\alpha}{z}[w] - 2\bar{w}[w] - \frac{\alpha^2}{z^2} - \frac{2\alpha}{z}\bar{w} - \bar{w}^2 + 2\tilde{r}[\sqrt{r}] + \tilde{r}^2,$$

donde el lado derecho tiene términos que involucran términos de la forma $\frac{1}{z^i}$, $i = 1, \ldots, \frac{\beta}{2} + 1$ y términos polinomiales en z. Por lo tanto, el lado izquierdo debe ser cero, de lo contrario uno de los factores debe tener un término de la forma $\frac{1}{z^\nu}$ y el otro factor tiene términos de la forma $\frac{1}{z^i}$ con $i \geq 2$. Luego el producto debe tener términos de la forma $\frac{1}{z^{\nu+i}}, i \geq 2$, que es una contradicción. Por lo tanto, o bien $[w] = [\sqrt{r}]$ o bien $[w] = -[\sqrt{r}]$. Así

$$w = \pm[\sqrt{r}] + \frac{\alpha}{z} + \bar{w}.$$

Usando estas expresiones, la ecuación de Ricatti y después de varios cálculos obtenemos

$$\pm\frac{a \cdot \frac{\beta}{2}}{z^{\frac{\beta}{2}+1}} + \cdots + \frac{\alpha}{z^2} - (\bar{w})' + \frac{b}{z^{\frac{\beta}{2}+1}} + \cdots + \frac{\mp 2a\alpha}{z^{\frac{\beta}{2}+1}} - \frac{\alpha^2}{z^2} - \frac{2\alpha\bar{w}}{z} \mp \frac{2\bar{w}a}{z^{\frac{\beta}{2}}} + \cdots = 0.$$

Donde a es el coeficiente de $z^{-\nu}$ en $[\sqrt{r}]$ y b es el coeficiente de $z^{-\nu-1}$ en $r - [\sqrt{r}]^2$. Asociando los coeficientes de $\frac{1}{z^{\frac{\beta}{2}+1}}$ obtenemos que $\pm a \cdot \frac{\beta}{2} + b \mp 2a\alpha = 0$, por lo tanto despejando a α tenemos que

$$\alpha^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2} \pm \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{2} \pm \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\nu \pm \frac{b}{a}\right).$$

Concluyendo así este subcaso.

Ahora para el caso cuando 0 es un punto ordinario de r, es decir, no es un polo entonces r es un polinomio en z. Si se expande w alrededor de 0, usando la ecuación de Ricatti y argumentando de manera similar a (c_1) se puede demostrar que $[w] = 0$ y $-\alpha + \alpha^2 = \alpha(-1+\alpha) = 0$, contrario a la situación en (c_1) no podemos concluir que $\alpha \neq 0$. Por consiguiente $w = \frac{\alpha}{z} + \bar{w}$ donde α es 0 o es 1.

Consideremos ahora la expansión en serie de Laurent de w en infinito.

(∞_1) Si r tiene orden $\nu > 2$ en infinito entonces $r = \sum_{i\geq\nu} \frac{b_\nu}{z^\nu}$ y así tenemos, por la ecuación de Ricatti, que $[w]_\infty = 0$ y $-\alpha_\infty + \alpha_\infty^2 = 0$ por lo que contrario a (c_1) obtenemos que $\alpha_\infty = 0$ o $\alpha_\infty = 1$.

(∞_2) Si r tiene orden 2 en infinito entonces $r = \sum_{i\geq 2} \frac{b_\nu}{z^\nu}$, la ecuación de Ricatti implica que $[w]_\infty = 0$ y $-\alpha_\infty + \alpha_\infty^2 = b_2$ y así $\alpha_\infty = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b_2}$.

(∞_3) En el otro caso, el orden de r en infinito debe ser par, por las condiciones necesarias en el teorema de Kovacic. Razonando análogamente a lo que se hizo en el caso (c_3) encontramos que $[w]_\infty = \pm[\sqrt{r}]$, $\alpha_\infty = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} - \nu\right)$ donde a es el coeficiente de z^ν en $[\sqrt{r}]_\infty$ y b es el coeficiente de $z^{\nu-1}$ en $r - [\sqrt{r}]_\infty^2$.

Recopilando lo que hemos demostrado hasta ahora, si Γ es el conjunto de polos de r entonces

$$w = \sum_{c\in\Gamma}\left(s(c)[w] + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{z-c}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-d_i} + R,$$

donde $R \in \mathbb{C}[z], s(c) \in \{+,-\}$ y $[w]_c, \alpha_s^{s(c)}$ son como en el enunciado.

Si añadimos los valores al infinito R es determinado por $[w]_\infty$, luego

$$w = \sum_{c\in\Gamma}\left(s(c)[w]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{z-c}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-d_i} + s(\alpha)[w]_\infty.$$

Aplicando el teorema del residuo a la 1-forma wdz tenemos que

$$\sum_{c\in\Gamma} \alpha_c + n - \alpha_\infty = 0,$$

luego $n = \alpha_\infty - \sum_{c\in\Gamma} \alpha_c \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Sea $d_s = \alpha_\infty - \sum_{c\in\Gamma}\alpha_c \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\theta = \sum_{c\in\Gamma}\left(s(c)[w]_c + \frac{\alpha_s^{s(c)}}{z-c}\right) + s(\infty)[w]_\infty \quad \text{y} \quad P = \prod_{i=1}^{n}(z-d_i).$$

Notamos que w se puede escribir como $w = \theta + \frac{P'}{P}$, derivando y elevando al cuadrado a w obtenemos

$$w' = \theta' + \frac{PP'' - (P')^2}{P^2}, \quad w^2 = \theta^2 + 2\theta\frac{P'}{P} + \frac{(P')^2}{P^2}.$$

Sustituyendo w' y w^2 en la ecuación de Ricatti tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= w' + w^2 - r \\
&= \theta' + \frac{PP'' - (P')^2}{P^2} + \theta^2 + 2\theta\frac{P'}{P} + \frac{(P')^2}{P^2} - r \\
&= \theta' + \frac{P''}{P} + \theta^2 + \frac{2\theta P'}{P} - r \\
&= P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - r)P.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si P satisface esta ecuación entonces regresando obtenemos que $w = \theta + \frac{P'}{P}$ satisface la ecuación de Ricatti. Por lo tanto, de la observación 7 se sigue que $y = e^{\int w}$ es una solución de la EDR. □

2.4.1. Ejemplo

Ejemplo 9. Sea $y'' = ry$ donde

$$\begin{aligned}
r &= \frac{4z^6 - 8z^5 + 12z^4 + 4z^3 + 7z^2 - 20z + 4}{4z^4} \\
&= z^2 - 2z + 3 + z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} - 5z^{-3} + z^{-4}.
\end{aligned}$$

Paso 1. Tenemos que 0 es un polo de orden $4 = 2\nu$, $\nu = 2$ y el orden de r en ∞ es $-2 = -2\nu$, $\nu = 1$. De las condiciones necesarias de Kovacic tenemos que la EDR cae en el caso 1, subcaso (c_3) e (∞_3). Observemos que los casos 2 y 3 no son aplicables.

Tenemos

$$[\sqrt{r}]_0 = \frac{1}{z^2},$$

por lo que

$$r - [\sqrt{r}]_0^2 = z^2 - 2z + 3 + z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} - 5z^{-3}.$$

Por (c_3) tenemos que $a = 1$ y $b = -5$. Con esto $\alpha_0^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{(-5)}{1} + 2\right)$ y así

$$\alpha_0^+ = -\frac{3}{2} \text{ y } \alpha_0^- = \frac{7}{2}.$$

Para el caso (∞_3) tenemos que

$$[\sqrt{r}]_\infty = z - 1.$$

Luego

$$r - [\sqrt{r}]_\infty^2 = 2 + z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} - 5z^{-3} + z^{-4}.$$

Por (∞_3) tenemos que $a = 1$ y $b = 2$. Con esto $\alpha_\infty^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{2}{1} - 1\right)$ y así

$$\alpha_\infty^+ = \frac{1}{2} \text{ y } \alpha_\infty^- = -\frac{3}{2}.$$

Paso 2. Para encontrar d_s se tienen los siguientes casos:

$$\begin{aligned} s(0) = +, s(\infty) = +, \quad & d_s = \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 2 \\ s(0) = +, s(\infty) = -, \quad & d_s = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \\ s(0) = -, s(\infty) = +, \quad & d_s = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -3 \\ s(0) = -, s(\infty) = -, \quad & d_s = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5. \end{aligned}$$

Como queremos no-negativos nos interesa $d_s = 0$ y $d_s = 2$.
Para $d_s = 0$,

$$\theta_s = [\sqrt{r}]_0 + \frac{\alpha_0^+}{z} - [\sqrt{r}]_\infty = \frac{1}{z^2} - \frac{3}{2z} - z + 1.$$

Para $d_s = 2$,

$$\theta_s = [\sqrt{r}]_0 + \frac{\alpha_0^+}{z} + [\sqrt{r}]_\infty = \frac{1}{z^2} - \frac{3}{2z} + z - 1.$$

Paso 3. Para $d_s = 0$, sea $P_s = 1$, luego la ec. nos queda

$$\theta_s' + \theta_s^2 - r = \frac{4}{z^2} - \frac{6}{z},$$

luego no satisface la ec. diferencial.

Para $d_s = 2$, sea $P_s = z^2 + a_1 z + a_2$ entonces la ecuación nos queda $P_s'' + 2\theta_s P_s' + (\theta_s' + \theta_s^2 - r)P_s = -4 + 2a_1 - 4a_2 + \frac{4-3a_1+4a_2}{z} - 2a_1 z$, luego para que la ec. nos de cero debemos tener $a_1 = 0$ y $a_2 = -1$. Por tanto, del algoritmo de Kovacic tenemos que una solución de la ec. está dada por

$$\begin{aligned} y = Pe^{\int w} &= (z^2-1)e^{\int (\frac{1}{z^2} - \frac{3}{2z} + z - 1)dz} \\ &= (z^2-1)e^{-\frac{1}{z} - \frac{3}{2}\operatorname{In} z + \frac{z^2}{2} - z} \\ &= (z^2-1)z^{-3/2}e^{-\frac{1}{z} + \frac{z^2}{2} - z}. \end{aligned}$$

2.5. Algoritmo Caso 2.

El objetivo para el caso 2 es encontrar alguna solución a la EDR de la forma $y = e^{\int w}$ donde w es algebraico de grado 2 sobre $\mathbb{C}(z)$. Al igual que en el caso 1, el algoritmo para este caso se resume en tres pasos.

- En el primer paso recopilaremos datos locales en los polos de r y en ∞, la forma de estos datos será un conjunto E_c (o E_∞).
- En el paso 2 descartamos algunos de estos datos y retenemos otros, para después formar candidatos para una función racional θ.
- En el paso 3, para cada uno de estos candidatos, buscamos un polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ de cierto grado que satisfaga una ecuación diferencial. Si no existe tal polinomio para cualquier familia, entonces el caso 2 no se puede cumplir. Si tal polinomio existe, entonces w se obtendrá como raíz de una ecuación cuadrática cuyos coeficientes están dados en términos de la función racional $\phi = \theta + \frac{P'}{P}$.

Enseguida describimos el algoritmo para este caso.

Teorema 2.5.1 (Algoritmo de Kovacic caso 2)**.** *Sea $r \in \mathbb{C}(z)$ que satisface las condiciones necesarias para el caso 2 dadas en el teorema 2.3.1. Sea Γ el conjunto de polos de r en el plano complejo.*

Paso 1. *Para cada $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ definimos un conjunto E_c como sigue:*

(c_1) *Si $c \in \Gamma$ y c es un polo de orden 1 entonces*

$$E_c = \{4\}.$$

(c_2) *Si* $c \in \Gamma$ *y* c *es un polo de orden* 2*, entonces*

$$E_c = \{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\} \cap \mathbb{Z},$$

para b *el coeficiente de* $(z-c)^{-2}$ *en la expansión en fracciones parciales para* r*.*

(c_3) *Si* $c \in \Gamma$ *es un polo de orden* $\nu > 2$ *entonces*

$$E_c = \{\nu\}.$$

(∞_1) *Si el orden de* r *en* ∞ *es mayor que* 2 *entonces*

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

(∞_2) *Si el orden de* r *en* ∞ *es* 2 *entonces*

$$E_\infty = \{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\} \cap \mathbb{Z},$$

donde b *es el coeficiente de* z^{-2} *en la expansión en serie de Laurent de* r *en infinito.*

(∞_3) *Si el orden de* r *en* ∞ *es* $\nu < 2$ *entonces*

$$E_\infty = \{\nu\}.$$

Paso 2. *Consideramos las familias* $(e_c)_{c\in\Gamma\cup\{\infty\}}$ *con* $e_c \in E_c$*. Para cada familia sea*

$$d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma} e_c\right),$$

si d *es un entero no negativo, sea*

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma}\frac{e_c}{z-c}.$$

Paso 3. *Para cada uno de los* θ *considerados en el paso 2 se busca un polinomio* P *de grado* d *que satisfaga la ecuación diferencial*

$$P''' + 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r)P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r')P = 0. \quad (2.21)$$

Si tal polinomio existe para algún (e_c) *entonces se establece* $\phi = \theta + \frac{P'}{P}$ *y se busca* w *una solución de la ecuación cuadrática*

$$w^2 - \phi w + \left(\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - r\right) = 0. \tag{2.22}$$

Entonces una solución a la EDR está dada por $y = e^{\int w}$ *donde* w *es solución a la ecuación 2.22.*

Si d *no es un entero no negativo para cualquiera de las familias* (e_c) *consideradas en el paso* 2) *o no existe tal polinomio en* (2.21) *para ninguna de las familias* (e_c) *retenidas en el paso* 3)*, entonces la EDR no tiene solución de la forma* $y = e^{\int w}$*, con* w *algebraica de grado* 2 *sobre* $\mathbb{C}(z)$*.*

Demostración. En este caso el grupo de Galois diferencial G de la EDR es un subgrupo de $\mathcal{D}$ el cual no es triangulable. Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de EDR correspondiente al subgrupo. Sabemos que para cada automorfismo σ de $\mathbb{C}(z)(y_1, y_2)$ sobre $\mathbb{C}(z)$ se tiene $\sigma(y_1) = cy_1, \sigma(y_2) = c^{-1}y_2$ o $\sigma(y_1) = cy_2, \sigma(y_2) = -c^{-1}y_1$ para alguna constante $c \in \mathbb{C}$ y también que $(y_1y_2)^2$ es invariante, y_1y_2 es semi invariante, por lo que $(y_1y_2)^2 \in \mathbb{C}(z)$ y $y_1y_2 \notin \mathbb{C}(z)$.

Por tanto,

$$(y_1y_2)^2 = \prod_{c\in\Gamma}(z-c)^{e_c}\prod_{i=1}^{m}(z-d_i)^{f_i}$$

donde e_c y f_i son enteros. Nuestro objetivo es determinar estos exponentes.

Sea

$$\phi = \frac{(y_1y_2)'}{y_1y_2} = \frac{(y_1^2y_2^2)'}{2y_1^2y_2^2} = \frac{[(y_1y_2)^2]'}{2y_1^2y_2^2} = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma}\frac{e_c}{z-c} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{fi}{z-d_i}. \tag{2.23}$$

Por otro lado, en el teorema de las condiciones necesarias de Kovacic vimos que

$$\phi'' + 3\phi\phi' + \phi^3 = 4r\phi + 2r'. \tag{2.24}$$

Para demostrar los subcasos primero determinamos los e_c con $c \in \Gamma$, observando los polos de r y la expansión en serie de Laurent de r y ϕ sobre los polos. Al igual que en el caso pasado, para simplificar notación vamos a suponer que $c = 0$.

(c_1) Supongamos que 0 es un polo de r de orden 1. La expansión en serie de Laurent de r y ϕ son de la forma

$$r = b_{-1}z^{-1} + \cdots \quad (b_{-1} \neq 0),$$
$$\phi = \frac{1}{2}ez^{-1} + \frac{1}{2}f + \cdots \quad (e \in \mathbb{Z}, f \in \mathbb{C}),$$

entonces

$$\phi' = -\frac{1}{2}ez^{-2} + \cdots \qquad \phi'' = ez^{-3} + \cdots$$
$$3\phi\phi' = -\frac{3}{4}e^2z^{-3} - \frac{3}{4}efz^{-2} + \cdots \qquad \phi^3 = \frac{1}{8}e^3z^{-3} + \frac{3}{8}e^2fz^{-2} + \cdots$$
$$r' = -b_{-1}z^{-2} + \cdots \qquad 4r\phi = 2b_{-1}ez^{-2} + 2b_{-1}fz^{-1} + \cdots$$

Luego

$$4r\phi + 2r' = 2b_{-1}ez^{-2} + 2b_{-1}fz^{-1} + \cdots - 2b_{-1}z^{-2} + \cdots \tag{2.25}$$
$$\begin{aligned}\phi'' + 3\phi\phi' + \phi^3 &= ez^{-3} + \cdots - \frac{3}{4}e^2z^{-3} + \cdots + \frac{1}{8}e^3z^{-3} + \cdots \\ &\quad - \frac{3}{4}efz^{-2} + \frac{3}{8}e^2fz^{-2} + \cdots\end{aligned} \tag{2.26}$$

Así de (2.25) y (2.26), la ecuación (2.24) se escribe como

$$\begin{aligned}ez^{-3} + \cdots - \frac{3}{4}e^2z^{-3} + \cdots + \frac{1}{8}e^3z^{-3} + \cdots - \frac{3}{4}efz^{-2} + \frac{3}{8}e^2fz^{-2} + \cdots \\ = 2b_{-1}ez^{-2} - 2b_{-1}z^{-2} + \cdots\end{aligned}$$

equivalentemente

$$\left(e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3\right)z^{-3} + \left(-\frac{3}{4}ef + \frac{3}{8}e^2f\right)z^{-2} + \cdots = (2b_{-1}e - 2b_{-1})z^{-2} + \cdots$$

De donde

$$e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3 = 0, \tag{2.27}$$

es decir, $e(1 - \frac{3}{4}e + \frac{1}{8}e^2) = 0$, luego o bien $e = 0$ o bien $1 - \frac{3}{4}e + \frac{1}{8}e^2 = 0$, en este último caso obtenemos que $e = 4, e = 2$. Así $e = 0, e = 4, e = 2$.

Ahora del segundo sumando se sigue que $-\frac{3}{4}ef + \frac{3}{8}e^2f = 2b_{-1}(e - 1)$. Como $b_{-1} \neq 0$ entonces e no puede ser cero. Si $e = 2$ entonces al sustituir obtenemos $2b_{-1} = 0$ lo cual no es posible. Con lo que $e = 4$ luego $E = \{4\}$. Por lo tanto, si 0 es un polo de orden 1, entonces $E = \{4\}$.

(c_2) Supongamos que 0 es un polo de orden 2 entonces

$$r = b_{-2}z^{-2} + \cdots \quad (b_{-2} \neq 0)$$
$$\phi = \frac{1}{2}ez^{-1} + \cdots \quad (e \in \mathbb{Z}).$$

De la ecuación (2.24) tenemos

$$ez^{-3} + \cdots - \frac{3}{4}e^2z^{-3} + \cdots + \frac{1}{8}e^3z^{-3} + \cdots = (2eb_{-2} - 4b_{-2})z^{-3} + \cdots$$

luego $e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3 = 2eb_{-2} - 4b_{-2}$ o lo que es igual $\frac{1}{8}e^3 - \frac{3}{4}e^2 + (1-2b_{-2})e + 4b_{-2} = 0$, sacando las raíces tenemos que $e = 2, e = 2 \pm 2\sqrt{1+4b_{-2}}$. En este caso, ya que e_c se supone un número entero, las raíces se pueden despreciar si no son enteros. Por lo tanto, si 0 es un polo de orden 2 entonces

$$E_c = \{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\} \cap \mathbb{Z},$$

para b el coeficiente de z^{-2} en la expansión en fracciones parciales para r.

(c_3) Supongamos que 0 es un polo de orden $\nu > 2$ entonces

$$r = b_{-\nu}z^{-\nu} + \cdots \quad (b_{-\nu} \neq 0)$$
$$\phi = \frac{1}{2}ez^{-1} + \cdots \quad (e \in \mathbb{Z}).$$

Sustituyendo r y ϕ en la ecuación (2.24) se sigue que

$$\left(e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3\right)z^{-3} + \left(-\frac{3}{4}ef + \frac{3}{8}e^2f\right)z^{-2} + \cdots = (2eb_{-\nu} - 2\nu b_{-\nu})z^{-\nu-1} + \cdots \tag{2.28}$$

Como $\nu > 2$ entonces $-\nu - 1 < -3$, así comparando ambos lados de la igualdad de la ecuación (2.28) se sigue que $2eb_{-\nu} - 2\nu b_{-\nu} = 0$, esto es, $2b_{-\nu}(e - \nu) = 0$. Ya que $b_{-\nu} \neq 0$ tenemos que $e - \nu = 0$, es decir, $e = \nu$. Por lo tanto, si 0 es un polo de orden $\nu > 2$ entonces

$$E_c = \{\nu\}.$$

Ahora bien, si nos fijamos en los polos de ϕ pero que son puntos regulares de r, entonces suponemos 0 es un punto regular de r, luego el desarrollo de r es un polinomio en z y

$$\phi = \frac{1}{2}\frac{f_i}{z} + k + \text{polinomio en } z, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, la ecuación (2.24) toma la forma

$$f_i z^{-3} + \cdots - \frac{3}{4} f_i^2 z^{-3} + \cdots + \frac{1}{8} f_i^3 z^{-3} = b_0 + \cdots .$$

Por tanto no hay términos z^{-3} en el lado derecho y así

$$f_i - \frac{3}{4} f_i^2 + \frac{1}{8} f_i^3 = 0.$$

Procediendo de la misma forma que hicimos para 2.27, en el caso (c_1), concluimos que $f_i = 0, 2, 4$. Así todos los f_i son pares. Por lo tanto, podemos escribir

$$(y_1 y_2)^2 = \prod_{c \in \Gamma'} (z - c)^{e_c} P^2,$$

donde $e_c \in E_c, P \in \mathbb{C}[z]$ y $P^2 = \prod_{i=1}^n (z - d_i)^{f_i}$.

Si hacemos

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{z - c},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{2}\frac{(y_1^2 y_2^2)'}{y_1^2 y_2^2} = \frac{[\prod (z-c)^{e_c} P^2]'}{2[\prod (z-c)^{e_c} P^2]} \\
&= \frac{[\prod (z-c)^{e_c}]' P^2 + \prod (z-c)^{e_c} 2PP'}{2 \prod (z-c)^{e_c} P^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{z-c} + \frac{\prod (z-c)^{e_c} 2PP'}{2 \prod (z-c)^{e_c} P^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{z-c} + \frac{P'}{P} = \theta + \frac{P'}{P}.
\end{aligned}$$

El siguiente paso de la demostración es determinar el grado d de P. Para ello usemos la expansión en serie de Laurent de ϕ en infinito

$$\phi = \frac{1}{2}\frac{e_\infty}{z} + \cdots = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{z} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{f_i}{z},$$

por lo que

$$\frac{1}{2}e_\infty = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma} e_c + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} f_i. \tag{2.29}$$

Si d es el grado de P entonces $2d = \sum_{i=1}^{m} f_i$, por lo que de (2.29) se sigue

$$e_\infty = \sum_{c\in\Gamma} e_c + 2d.$$

Despejando d obtenemos que

$$d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma} e_c\right).$$

Ahora bien, por argumentos completamente análogos a los casos $(c_1), (c_2), (c_3)$ obtenemos que

(∞_1) Si el orden de r en infinito es 1, como en el caso (c_1), se deduce que $e_\infty = 0, 2, 4$.

(∞_2) Si el orden de r en infinito es 2, como en el caso (c_2), encontramos que $e_\infty = 2, 2 \pm 2\sqrt{1+4b_{-2}}$ donde b_{-2} es el coeficiente de z^{-2} en la serie de Laurent de ϕ en ∞ y e_∞ debe ser entero.

(∞_3) Si el orden de r en infinito es $\nu < 2$, como en el caso (c_3), encontramos que $e_\infty = \nu$.

Hay que recordar que al menos uno de los e_c es impar pues de lo contrario $y_1 y_2 \in \mathbb{C}(z)$.

Usando que $\phi = \theta + \frac{P'}{P}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi\phi' &= \left(\theta + \frac{P'}{P}\right)\left(\theta' + \frac{P''}{P} - \frac{(P')^2}{P^2}\right)\\
&= \theta\theta' + \theta\frac{P''}{P} - \frac{\theta(P')^2}{P^2} + \theta'\frac{P'}{P} + \frac{P''P'}{P^2} - \frac{(P')^3}{P^3}.\\
\phi'' &= \theta'' - \frac{3P'P''}{P^2} + \frac{P'''}{P} + \frac{2(P')^3}{P^3}.\\
\phi^3 &= \theta^3 + 3\theta^2\frac{P'}{P} + 3\theta\frac{(P')^2}{P^2} + \frac{(P')^3}{P^3}.
\end{aligned}$$

De aquí y usando (2.24) tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \phi'' + 3\phi\phi' + \phi^3 - 4r\phi - 2r' \\
&= \theta'' - \frac{3P'P''}{P^2} + \frac{P'''}{P} + \frac{2(P')^3}{P^3} + 3\theta\theta' + 3\theta\frac{P''}{P} - \frac{3\theta(P')^2}{P^2} + 3\theta'\frac{P'}{P} \\
&+ \frac{3P''P'}{P^2} - \frac{3(P')^3}{P^3} + \theta^3 + 3\theta^2\frac{P'}{P} + 3\theta\frac{(P')^2}{P^2} + \frac{(P')^3}{P^3} - 4r\theta - 4r\frac{P'}{P} - 2r' \\
&= \frac{P'''}{P} + 3\theta\frac{P''}{P} + \frac{P'}{P}\left[3\theta' + 3\theta^2 - 4r\right] + \theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r'.
\end{aligned}$$

Multiplicando por P la ecuación anterior tenemos que P satisface la ecuación diferencial

$$P''' + 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r)P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r')P = 0.$$

Sea w una solución de la ecuación cuadrática

$$w^2 - \phi w + \frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - r = 0. \tag{2.30}$$

Lo que haremos ahora es mostrar que $y = e^{\int w}$ es una solución de la EDR y para ello usamos la observación 7.

Derivando la ecuación (2.30) encontramos $2ww' - \phi w' - \phi' w + \frac{1}{2}\phi'' + \phi\phi' - r' = 0$ o equivalentemente $(2w - \phi)w' = \phi' w - \frac{1}{2}\phi'' - \phi\phi' + r'$, con lo cual

$$2(2w - \phi)w' = 2\phi' w - \phi'' - 2\phi\phi' + 2r'. \tag{2.31}$$

Además de la ecuación (2.30) tenemos

$$w^2 - r = \phi w - \frac{1}{2}\phi' - \frac{1}{2}\phi^2. \tag{2.32}$$

Sustituyendo (2.32) y (2.31) y usando la ecuación (2.30) obtenemos

$$\begin{aligned}
&2(2w - \phi)(w' + w^2 - r) = 2(2w - \phi)w' + 2(2w - \phi)(w^2 - r) \\
&= 2\phi' w - \phi'' - 2\phi\phi' + 2r' + 2(2w - \phi)\left(\phi w - \frac{1}{2}\phi' - \frac{1}{2}\phi^2\right) \\
&= 2\phi' w - \phi'' - 2\phi\phi' + 2r' + 4w^2\phi - 2\phi^2 w - 2w\phi' + \phi\phi' - 2w\phi^2 + \phi^3 \\
&= -\phi'' - 2\phi\phi' + 2r' + 4\phi\left(w^2 - \phi w + \frac{1}{2}\phi\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - r\right) - \phi\phi' - \phi^3 \\
&+ 4\phi r \\
&= -(\phi'' + 3\phi\phi' + \phi^3 - 2r' - 4\phi r) \\
&= 0, \text{ por (2.24).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $2(2w-\phi)(w'+w^2-r)=0$. De aquí

$$2w-\phi=0 \quad \text{o} \quad w'+w^2-r=0.$$

Si $\phi=2w$, sustituyendo en (2.30) obtenemos

$$w'+w^2-r=0$$

que es la ecuación de Ricatti.

En ambos casos obtenemos la ecuación de Ricatti pero si $\phi=2w$ entonces $w=\frac{1}{2}\phi\in\mathbb{C}(z)$, lo cual nos llevaría al caso 1 y recordemos que para estar en el caso 2, el caso 1 no debe ocurrir. Por lo tanto, $w'+w^2-r=0$, de donde $y_1=e^{\int w}$ es una solución a la EDR donde w satisface la ecuación cuadrática (2.30) Completando así la demostración para el caso 2). □

2.5.1. Ejemplo

Ejemplo 10. Sea $y''=ry$ donde

$$r=\frac{1}{z}-\frac{3}{16z^2}=\frac{16z-3}{16z^2}.$$

Paso 1. Tenemos que 0 es un polo de r de orden 2 y el orden de r en infinito es 1. Notemos que, de las condiciones necesarias de Kovacic, los casos 1 y 3 no son aplicables, pero sí lo es el caso 2, estamos en los subcasos (c_2) y (∞_3).

Como $r=\frac{1}{z}-\frac{3}{16z^2}$, el coeficiente de $\frac{1}{z^2}$ en la expansión de fracciones paciales de r es $b=-\frac{3}{16}$. Así del subcaso (c_2)

$$E_0=\left\{2+k\sqrt{1+4\left(-\frac{3}{16}\right)}:k=0,\pm 2\right\}=\{1,2,3\}.$$

Para (∞_3),

$$E_\infty=\{1\}.$$

Paso 2. Tenemos las siguientes familias

$$\begin{aligned}
e_0=1,e_\infty=1,\quad d&=\frac{1}{2}(1-1)=0\in\mathbb{Z}^+\\
e_0=2,e_\infty=1,\quad d&=\frac{1}{2}(1-2)=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}^+\\
e_0=3,e_\infty=1,\quad d&=\frac{1}{2}(1-3)=-1\notin\mathbb{Z}^+.
\end{aligned}$$

Consideramos entonces solo la primera familia y para esta construimos la función racional

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2z}.$$

Paso 3. Buscamos un polinomio mónico de grado $d = 0$. De aquí el único candidato a P es $P = 1$, por lo que $P' = P'' = P''' = 0$, luego

$$\begin{aligned} P''' &+ 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r)P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r')P \\ &= \theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r' \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{3}{4z^3} + \frac{1}{8z^3} - \frac{2}{z^2} + \frac{3}{8z^3} + \frac{2}{z^2} - \frac{3}{4z^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente $P = 1$ es el polinomio deseado. De modo que formamos

$$\phi = \theta + \frac{P'}{P} = \frac{1}{2z}.$$

Se busca w tal que

$$w^2 - \frac{1}{2z}w + \left(\frac{1}{16z^2} - \frac{1}{z}\right) = 0.$$

En consecuencia

$$w = \frac{1}{4z} \pm \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

Por lo tanto, hay dos soluciones de la EDR dadas por

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\int \left(\frac{1}{4z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)dz} = z^{\frac{1}{4}} e^{2\sqrt{z}}, \\ y_2 &= e^{\int \left(\frac{1}{4z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)dz} = z^{\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

2.6. Algoritmo Caso 3.

Hemos visto que para este caso el grupo de Galois de la ecuacion diferencial es o bien el grupo tetraedro, el grupo octaedro o el grupo icosaedro. El objetivo del algoritmo para este caso es encontrar un polinomio irreducible $A \in \mathbb{C}(z)[T]$ tal que si w es raíz de A entonces $y = e^{\int w}$ es solución a la EDR.

Antes de dar la descripción del algoritmo para este caso veremos algunos resultados que nos serán de utilidad para la prueba del algoritmo.

Comenzamos con la siguiente proposición que indica como encontrar los coeficientes del polinomio A. Recordemos, de la observación 7, que $y = e^{\int w}$ siendo solución de $y'' = ry$ es equivalente a que w sea una solución a la ecuación de Riccati $w' + w^2 = r$.

Proposición 2.6.1. *Sea w que satisface la ecuación de Ricatti y*

$$T^n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(n-i)!} T^i,$$

el polinomio mínimo de w sobre $\mathbb{C}(z)$, entonces los coeficientes a_i satisfacen

$$(n-i)(i+1) r a_{i+1} + a_{i-1} + a_i' + s a_i = 0,$$

donde $s = a_{n-1}$ y $a_n = -1, a_{-1} = 0$.

Demostración. Sea $A = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(n-i)!} T^i$ con $a_n = -1$. Ahora tomemos

$$B = \frac{\partial A}{\partial T}(r - T^2) + \frac{\partial A}{\partial z} + (nT + s)A,$$

donde $s = a_{n-1}$. Tenemos que

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i a_i}{(n-i)!} T^{i-1},$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i'}{(n-i)!} T^i,$$

por lo que

$$B(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ia_i}{(n-i)!} T^{i-1}(r - T^2) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i'}{(n-i)!} T^i + (nT + s) \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(n-i)!} T^i.$$

El coeficiente de T^{n+1} en B es $-na_n + na_n = 0$. El coeficiente de T^n en B es

$$-(n-1)a_{n-1} + a_n' + na_{n-1} + sa_n = a_{n-1} - s = 0,$$

pues $a_n = -1, a_n' = 0$ y $s = a_{n-1}, sa_n = -a_{n-1}$. Por lo tanto, no tenemos terminos T^{n+1} o T^n en B, de donde, B tiene grado menor que n en T. Ahora bien, como $A(w) = 0$ se sigue que

$$\begin{aligned}
B(w) &= \frac{\partial A(w)}{\partial T}(r - w^2) + \frac{\partial A}{\partial z}(w) + (nw + s)A(w) \\
&= \frac{\partial A(w)}{\partial T} w' + \frac{\partial A}{\partial z}(w) + (nw + s)A(w) \\
&= \frac{dA(w)}{dz} + (nw + s)A(w) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

luego w es raíz del polinomio B, que es de grado menor a n, lo cual no es posible ya que A es el polinomio mínimo de w, por lo que $B = 0$. En consecuencia todos los coeficiente de B son cero, esto es,

$$\begin{aligned}
0 &= (i+1)\frac{a_{i+1}}{(n-1-i)!} r - (i-1)\frac{a_{i-1}}{(n+1-i)!} + \frac{a_i'}{(n-i)!} \\
&\quad + n\frac{a_{i-1}}{(n+1-i)!} + s\frac{a_i}{(n-i)!} \\
&= (i+1)\frac{a_{i+1}}{(n-1-i)!} r + (n-i+1)\frac{a_{i-1}}{(n+1-i)!} + \frac{a_i'}{(n-i)!} + s\frac{a_i}{(n-i)!} \\
&= \frac{1}{(n-i)!}((n-i)(i+1)ra_{i+1} + a_{i-1} + a_i' + sa_i).
\end{aligned}$$

Por tanto, $(n-i)(i+1)ra_{i+1} + a_{i-1} + a_i' + sa_i = 0$ para todo $i = 0, \ldots, n$ donde $a_{-1} = 0$. $\square$

Nuestro objetivo ahora es dar una afirmación recíproca de la proposición 2.6.1. Para lograr esto consideremos la ecuación diferencial recursiva

$$
\begin{aligned}
a_n &= -1, \\
a_{i-1} &= -a_i' - sa_i - (n-i)(i+1)ra_{i+1}, \quad i = n, \ldots, 0
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

y definamos una solución de (2.33) como un $s \in \mathbb{C}(z)$ tal que cuando $a_n, \ldots, a_{-1}$ se definen como en (2.33) entonces se sigue que a_{-1} es exactamente cero.

Proposición 2.6.2. *Sea s una solución de* (2.33) *para alguna n y sea w cualquier raíz del polinomio*

$$A = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(n-i)!} T^i,$$

entonces $y = e^{\int w}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' = ry$.

Demostración. Afirmamos que

$$\frac{\partial^{k+1} A}{\partial T^{k+1}}(T^2 - r) = \frac{\partial^{k+1} A}{\partial T^k \partial z} + ((n-2k)T + s) \cdot \frac{\partial^k A}{\partial T^k} + k(n-k+1)\frac{\partial^{k-1} A}{\partial T^{k-1}}. \tag{2.34}$$

Procedamos por inducción sobre k:

- Para k=0 tenemos

$$\frac{\partial A}{\partial T}(T^2-r)=\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{ia_i}{(n-i)!}T^{i-1}\right)(T^2-r)$$
$$=\left(\frac{na_n}{(n-n)!}T^{n-1}\right)(T^2-r)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{ia_i}{(n-i)!}T^{i-1}(T^2-r)$$
$$=na_nT^{n+1}-na_nT^{n-1}r+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{ia_i}{(n-i)!}T^{i+1}-r\sum_{i=0}^{n-1}\frac{ia_i}{(n-i)!}T^{i-1}$$
$$=na_nT^{n+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{ia_i}{(n-i)!}T^{i+1}-\sum_{i=0}^{n}\frac{ia_ir}{(n-i)!}T^{i-1}$$
$$=na_nT^{n+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{ia_i}{(n-i)!}T^{i+1}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+1)a_{i+1}r}{(n-1-i)!}T^{i}$$
$$=na_nT^{n+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{ia_i}{(n-i)!}T^{i+1}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-i)(i+1)a_{i+1}r}{(n-i)!}T^{i}$$
$$=na_nT^{n+1}+n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i}{(n-i)!}T^{i+1}-n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i}{(n-i)!}T^{i+1}$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{ia_i}{(n-i)!}T^{i+1}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-i)(i+1)a_{i+1}r}{(n-i)!}T^{i}$$
$$=n\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{(n-i)!}T^{i}\cdot T-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-i)a_i}{(n-i)!}T^{i+1}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-i)(i+1)a_{i+1}r}{(n-i)!}T^{i}$$
$$=nAT+a_{n-1}A-\sum_{i=0}^{n}\frac{a_{n-1}a_i}{(n-i)!}T^{i}-\sum_{i=0}^{n}\frac{a_{i-1}}{(n-i)!}T^{i}$$
$$-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-i)(i+1)a_{i+1}r}{(n-i)!}T^{i}$$
$$=A(nT+a_{n-1})-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)!}(a_{n-1}a_i+a_{i-1}+(n-i)(i+1)a_{i+1}r)T^{i}$$
$$=A(nT+s)-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)!}(-a_i')T^{i}$$
$$=A(nT+s)+\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i'}{(n-i)!}T^{i}$$
$$=A(nT+s)+\frac{\partial A}{\partial z}\cdot$$

- Supongamos que se cumple para k, es decir, supongamos que

$$\frac{\partial^k A}{\partial T^k}(T^2 - r) = \frac{\partial^k A}{\partial T^{k-1}\partial z} + ((n-2(k-1))T + s)\frac{\partial^{k-1} A}{\partial T^{k-1}} + (k-1)(n-(k-1)+1)\frac{\partial^{k-2} A}{\partial T^{k-2}}. \tag{2.35}$$

- Veamos se cumple para $k+1$.

Derivemos (2.35) respecto a T para obtener

$$\frac{\partial^{k+1} A}{\partial T^{k+1}}(T^2 - r) = \frac{\partial^{k+1} A}{\partial T^k \partial z} + ((n-2k)T + s)\frac{\partial^k A}{\partial T^k} + k(n-k+1)\frac{\partial^{k-1} A}{\partial T^{k-1}}.$$

Por lo tanto la afirmación se cumple.

Ahora para demostrar que $y = e^{\int w}$ es una solución de la EDR usamos el hecho que ello es equivalente a mostrar que $w' + w^2 = r$, lo cual haremos por contradición. Supongamos entonces que $w' + w^2 - r \neq 0$.

Ya que $A(w) = 0$ tenemos lo siguiente

$$\frac{dA(w)}{dz} = \frac{\partial A}{\partial T}(w)w' + \frac{\partial A}{\partial z}(w) = 0. \tag{2.36}$$

Por lo tanto, de (2.36) y (2.34) (cuando $k = 0$) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial T}(w)(w' + w^2 - r) &= \frac{\partial A}{\partial T}(w)w' + \frac{\partial A}{\partial T}(w)(w^2 - r)\\ &= -\frac{\partial A}{\partial z}(w) + A(w)(nw + s) + \frac{\partial A}{\partial z}(w)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Como estamos suponiendo $w' + w^2 - r \neq 0$, $\frac{\partial A}{\partial T}(w)$ debe ser cero.

Ahora afirmamos que

$$\frac{\partial^k A}{\partial T^k}(w) = 0 \quad \text{para todo } k.$$

Hagamos esto por inducción

- Hemos mostrado que $A(w) = 0$ y $\frac{\partial A}{\partial T}(w) = 0$.

- Supongamos
$$\frac{\partial^{k-1}A}{\partial T^{k-1}}(w) = \frac{\partial^k A}{\partial T^k}(w) = 0.$$
- Mostremos que la afirmación vale para $k+1$.
  Como $\frac{\partial^k A}{\partial T^k}(w) = 0$ entonces
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial^k A}{\partial T^k}(w)\right) = \frac{\partial^{k+1}A}{\partial T^{k+1}}(w)w' + \frac{\partial^{k+1}A}{\partial T^k \partial z}(w) = 0.$$
  De aquí y de (2.34) (para $k+1$) obtenemos
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{k+1}A}{\partial T^{k+1}}(w)(w' + w^2 - r) = \frac{\partial^{k+1}A}{\partial T^{k+1}}(w)w' + \frac{\partial^{k+1}A}{\partial T^{k+1}}(w^2 - r)\\
&= -\frac{\partial^{k+1}A}{\partial T^k \partial z}(w) + \frac{\partial^{k+1}A}{\partial T^k \partial z}(w) + ((n-2k)w + s)\frac{\partial^k A}{\partial T^k}(w)\\
&+ k(n-k+1)\frac{\partial^{k-1}A}{\partial T^{k-1}}(w)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $w' + w^2 - r \neq 0$, luego $\frac{\partial^{k+1}A}{\partial T^{k+1}}(w) = 0$. Cumpliendose así la afirmación.

Pero
$$\frac{\partial^n A}{\partial T^n}(w) = n!a_n = -n! \neq 0,$$
por lo que hemos llegado a una contradicción y así la proposición se vale. □

Las siguientes proposiciones nos dan información sobre el grado del polinomio mínimo sobre $\mathbb{C}(z)$ de un elemento $w = \frac{y'}{y}$ con y solución de la EDR.

No damos demostración de la primera proposición, pues se sale de los objetivos de la tesis, pero puede consultarse en [CH].

Proposición 2.6.3. *Sea y una solución de la EDR y $w = \frac{y'}{y}$. Sea G el grupo de Galois diferencial de la ecuación*

i) Si G es el grupo tetraedro entonces $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}(z)} w \geq 4$ y tenemos la igualdad para alguna solución y.

ii) Si G es el grupo octaedro entonces $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}(z)} w \geq 6$ y tenemos la igualdad para alguna solución y.

iii) Si G es el grupo icosaedro entonces $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}(z)} w \geq 12$ y tenemos la igualdad para alguna solución y.

Proposición 2.6.4. *i) Supongase que* (2.33) *tiene una solución* $s \in \mathbb{C}(z)$ *para* $n = 4$ *entonces el polinomio*

$$T^4 - \sum_{i=0}^{3} \frac{a_i}{(4-i)!} T^i \in \mathbb{C}(z)[T] \tag{2.37}$$

es irreducible sobre $\mathbb{C}(z)$.

ii) Supongase que (2.33) *tiene una solución* $s \in \mathbb{C}(z)$ *para* $n = 6$ *entonces el polinomio*

$$T^6 - \sum_{i=0}^{5} \frac{a_i}{(6-i)!} T^i \in \mathbb{C}(z)[T] \tag{2.38}$$

es irreducible sobre $\mathbb{C}(z)$.

iii) Supongase que (2.33) *tiene una solución* $s \in \mathbb{C}(z)$ *para* $n = 12$ *y que no tiene solución en* $\mathbb{C}(z)$ *para* $n = 4$ *y* $n = 6$ *entonces el polinomio*

$$T^{12} - \sum_{i=0}^{11} \frac{a_i}{(12-i)!} T^i \in \mathbb{C}(z)[T] \tag{2.39}$$

es irreducible sobre $\mathbb{C}(z)$.

Demostración. Por la proposición 2.6.2, cualquier raíz w de uno de los tres polinomios (2.37), (2.38), (2.39) satisface que $e^{\int w}$ es una solución a la EDR. Por ende, de la proposición 2.6.3 tenemos que $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}(z)} w \geq 4$, es decir, que w satisface un polinomio de grado mayor o igual que 4 en $\mathbb{C}(z)$. Los polinomios (2.37), (2.38) son irreducibles, de lo contrario tendrían un factor de grado menor que 3, lo cual no es posible pues w satisfaría un polinomio de grado menor que 4. Ahora para el caso *iii*), si el polinomio (2.39) fuera reducible tendría algún factor de grado menor que 12, luego de la proposición 2.6.3 el grupo de Galois asociado a EDR o bien es el tetraedro o bien es el octaedro. Por la proposición 2.6.1 tenemos que la ecuación (2.33) podría tener una solución para $n = 4$ y $n = 6$, lo cual no es posible. Por tanto, (2.39) es irreducible.

Lo que ahora queremos es encontrar una solución a (2.33).

Proposición 2.6.5. *Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la EDR y F es cualquier polinomio homogéneo de grado n en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ entonces $s = \frac{F'}{F}$ es una solución de 2.33:*

$$\begin{aligned} a_n &= -1 \\ a_{i-1} &= -a_i' - s a_i - (n-i)(i+1) r a_{i+1}, \quad i = n, \ldots, 0 \end{aligned}$$

.

Demostración.

1) Primero demostramos que si F_1, F_2 son elementos de una extensión diferencial de $\mathbb{C}(z)$ tal que si $s_1 = \frac{F_1'}{F_1}$ y $s_2 = \frac{F_2'}{F_2}$ son soluciones de (2.33) para n entonces $s_3 = \frac{(c_1F_1 + c_2F_2)'}{c_1F_1 + c_2F_2}$ es una solución de (2.33) para n y cualesquiera $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Sean $a_i^1, a_i^2, a_i^3, i = n, n-1, \ldots$ las sucesiones determinadas por la ecuación (2.33) para s_1, s_2, s_3 respectivamente.

1.1) Afirmamos que

$$(c_1F_1 + c_2F_2)a_i^3 = c_1F_1a_i^1 + c_2F_2a_i^2.$$

En efecto, procedamos por inducción

- Si $i = n$, $a_n^1 = -1, a_n^2 = -1, a_n^3 = -1$, luego $(c_1F_1 + c_2F_2)(-1) = c_1F_1(-1) + c_2F_2(-1)$.
- Supongamos que la afirmación es cierta para $j \geq i$, es decir, $(c_1F_1 + c_2F_2)a_j^3 = c_1F_1a_j^1 + c_2F_2a_j^2$ para $j \geq i$.
- Demostremos que la afirmación es válida para $i-1$.

$$\begin{aligned} &(c_1F_1 + c_2F_2)a_{i-1}^3 = (c_1F_1 + c_2F_2)(-(a_i^3)' - s_3a_i^3 - (n-i)(i+1)ra_{i+1}^3) \\ &= (c_1F_1 + c_2F_2)(-(a_i^3)') - (c_1F_1 + c_2F_2)\frac{(c_1F_1 + c_2F_2)'}{c_1F_1 + c_2F_2}a_i^3 \\ &- (c_1F_1 + c_2F_2)(n-i)(i+1)ra_{i+1}^3 \\ &= -[(c_1F_1 + c_2F_2)(a_i^3)]' - (c_1F_1 + c_2F_2)(n-i)(i+1)ra_{i+1}^3 \\ &= -[c_1F_1a_i^1 + c_2F_2a_i^2]' - (n-i)(i+1)r(c_1F_1a_{i+1}^1 + c_2F_2a_{i+1}^2) \\ &= [-c_1F_1(a_i^1)' - c_1\frac{F_1'}{F_1}(F_1a_i^1) - (n-i)(i+1)rc_1F_1a_{i+1}^1] \\ &+ [-c_2F_2(a_i^2)' - c_2F_2'a_i^2 - (n-i)(i+1)rc_2F_2a_{i+1}^2] \\ &= c_1F_1a_{i-1}^1 + c_2F_2a_{i-1}^2. \end{aligned}$$

Cumpliendose así la afirmación.

Por lo tanto, para $i=-1$ tenemos

$$(c_1F_1+c_2F_2)a^3_{-1}=c_1F_1a^1_{-1}+c_2F_2a^2_{-1}=0,\ \text{ pues } a^1_{-1}=a^2_{-1}=0.$$

De donde $a^3_{-1}=0$ y así s_3 es solución de (2.33).

2) Para seguir con la demostración de la proposición supongamos que

$$F=\prod_{i=1}^{n} y_i,$$

donde $y_1,y_2,\ldots,y_n$ son soluciones de la EDR. Sean $w_i=\frac{y_i'}{y_i}$ y denotamos por σ_{mk} al $k-$ésimo polinomio simétrico de $w_1,\ldots,w_m$, es decir,

$$\sigma_{mk}=\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq m} w_{i_1}w_{i_2}\ldots w_{i_k},\ \ 1\leq k\leq m$$

y $\sigma_{mk}=0$ para $k>m,\sigma_{m0}=1$.

2.1) Afirmamos que

$$\sigma'_{mk}=(m+1-k)r\sigma_{m,k-1}-\sigma_{m1}\sigma_{mk}+(k+1)\sigma_{m,k+1}.$$

Damos la demostración por inducción sobre m:

- Para $m=1$, tenemos $\sigma_{11}=w_1,\sigma_{10}=1$. Ya que w_1 satisface la ecuación de Ricatti obtenemos la afirmación:

$$\sigma'_{11}=w'_1=r-w_1^2=r-\sigma_{11}^2+2\sigma_{12}=(1+1-1)r\sigma_{1,0}-\sigma_{11}\sigma_{11}+(1+1)\sigma_{12}.$$

- Supongamos que la afirmación es verdadera para $m-1$, es decir,

$$\sigma'_{m-1,k}=(m-k)r\sigma_{m-1,k-1}-\sigma_{m-1,1}\sigma_{m-1,k}+(k+1)\sigma_{m-1,k+1}.$$

- Veamos la afirmación es válida para m.

$$\begin{aligned}
\sigma'_{mk} &= (\sigma_{m-1,k} + \sigma_{m-1,k-1}w_m)' \\
&= \sigma'_{m-1,k} + \sigma'_{m-1,k-1}w_m + \sigma_{m-1,k-1}w'_m \\
&= [(m-k)r\sigma_{m-1,k-1} - \sigma_{m-1,1}\sigma_{m-1,k} + (k+1)\sigma_{m-1,k+1}] \\
&+ [(m+1-k)r\sigma_{m-1,k-2} - \sigma_{m-1,1}\sigma_{m-1,k-1} + k\sigma_{m-1,k}]w_m \\
&+ \sigma_{m-1,k-1}(r - w_m^2) \\
&= (m+1-k)r(\sigma_{m-1,k-1} + \sigma_{m-1,k-2}w_m) \\
&- (\sigma_{m-1,1} + w_m)(\sigma_{m-1,k} + \sigma_{m-1,k-1}w_m) \\
&+ (k+1)(\sigma_{m-1,k+1} + \sigma_{m-1,k}w_m) \\
&= (m+1-k)r\sigma_{m,k-1} - \sigma_{m,1}\sigma_{mk} + (k+1)\sigma_{m,k+1},
\end{aligned}$$

lo cual completa la inducción.

2.2) Ahora, con ayuda de la afirmación 2,1 y usando de nuevo inducción, mostremos que

$$a_i = (-1)^{n-i+1}(n-i)!\sigma_{n,n-i}.$$

- Para $i = n-1$ tenemos, por la ecuación (2.33), que

$$\begin{aligned}
a_{n-1} = -a'_n - sa_n = s &= \frac{F'}{F} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{y'_i(y_1\cdots y_{i-1}y_{i+1}\cdots y_n)}{y_1\cdots y_{i-1}y_iy_{i+1}\cdots y_n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{y'_i}{y_i} = \sum_{i=1}^{n} w_i = \sigma_{n,1}.
\end{aligned}$$

- Supongamos que la afirmación es válida para $j \geq i$, es decir,

$$a_j = (-1)^{n-j+1}(n-j)!\sigma_{n,n-j}.$$

- Veamos que la afirmación es válida para $i-1$: usando (2.33) obtenemos

$$\begin{aligned}
a_{i-1} &= -a_i' - sa_i - (n-i)(i+1)ra_{i+1} \\
&= -(-1)^{n-i+1}(n-i)!\sigma'_{n,n-i} - \sigma_{n,1}(-1)^{n-i+1}(n-i)!\sigma_{n,n-i} \\
&- (n-i)(i+1)r(-1)^{n-i}(n-1-i)!\sigma_{n,n-1-i} \\
&= (-1)^{n-i+2}(n-i)!\sigma'_{n,n-i} + \sigma_{n,1}(-1)^{n-i+2}(n-i)!\sigma_{n,n-i} \\
&- (n-i)(i+1)r(-1)^{n-i}(n-1-i)!\sigma_{n,n-1-i} \\
&= (-1)^{n-i+2}(n-i)!\{\sigma'_{n,n-i} + \sigma_{n,1}\sigma_{n,n-i} - (i+1)r\sigma_{n,n-1-i}\} \\
&= (-1)^{n-i+2}(n-i)!\{[(n+1-(n-i))r\sigma_{n,n-i-1} - \sigma_{n1}\sigma_{n,n-i} \\
&+ (n-i+1)\sigma_{n,n-i+1}] + \sigma_{n1}\sigma_{n,n-i} - (i+1)r\sigma_{n,n-1-i}\} \\
&\text{esto por la afirmación anterior 2,1.} \\
&= (-1)^{n-i+2}(n-i)!(n-i+1)\sigma_{n,n-i+1} \\
&= (-1)^{n-i+2}(n-i+1)!\sigma_{n,n-i+1},
\end{aligned}$$

concluyendo así la inducción.

Para $i=-1$ tenemos

$$\begin{aligned}
a_{-1} &= (-1)^{n+2}(n+1)!\sigma_{n,n+1} \\
&= (-1)^{n}(n+1)!\sigma_{n,n+1} \\
&= 0 \text{ pues } n+1 > n.
\end{aligned}$$

Con esto hemos mostrado que, para $F = \prod_{i=1}^{n} y_i$ con $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones de la EDR, $s = \frac{F'}{F}$ es solución de (2.33) para n. Por ende si F es cualquier polinomio homogéneo de grado n en soluciones de EDR, con ayuda del punto 1) se completa la demostración de la proposición. □

Gracias a la siguiente proposición podemos encontrar una solución adecuada a (2.33) en cada caso.

Proposición 2.6.6.

a) Si G es el grupo tetraedro, (2.33) *tiene solución $s = \frac{u'}{u}$ donde $u^3 \in \mathbb{C}(z)$ para $n=4$.*

b) Si G es el grupo octaedro, (2.33) *tiene una solución $s = \frac{u'}{u}$ donde $u^2 \in \mathbb{C}(z)$ para $n=6$.*

c) Si G es o bien el grupo tetraedro, el grupo octaedro o el grupo icosaedro entonces (2.33) *tiene una solución $s = \frac{u'}{u}$ donde $u \in \mathbb{C}(z)$ para $n = 12$.*

Demostración. Por el teorema 2.2.4 inciso 3 tenemos que $(y_1^4+8y_1y_2^3)^3, (y_1^5y_2-y_1y_2^5)^2, y_1^{11}y_2 - 11y_1^6y_2^6 - y_1y_2^{11}$ están en $\mathbb{C}(z)$. Observemos que cada uno de estos, $y_1^4 + 8y_1y_2^3, y_1^5y_2 - y_1y_2^5$ y $y_1^{11}y_2 - 11y_1^6y_2^6 - y_1y_2^{11}$ es un polinomio homogéneo de grado $4, 6, 12$ respectivamente donde y_1, y_2 son soluciones de la EDR. Luego de la proposición 2.6.5 tenemos que

$$\frac{(y_1^4 + 8y_1y_2^3)'}{y_1^4 + 8y_1y_2^3}, \frac{(y_1^5y_2 - y_1y_2^5)'}{y_1^5y_2 - y_1y_2^5}, \frac{(y_1^{11}y_2 - 11y_1^6y_2^6 - y_1y_2^{11})'}{y_1^{11}y_2 - 11y_1^6y_2^6 - y_1y_2^{11}},$$

es una solución de (2.33) para $n = 4, n = 6, n = 12$ respectivamente. □

Ahora escribimos

$$u^{12/n} = \prod_{c\in\mathbb{C}} (z - c)^{e_c} \in \mathbb{C}(z),$$

donde $n = 4, 6$ o 12 y $e_c \in \mathbb{Z}$. Al igual que en los otros casos, el algoritmo determina los posibles valores para e_c usando condiciones locales, luego decide que familias dan una solución.

A continuación describimos el algoritmo para el caso 3.

Teorema 2.6.7 (Algoritmo de Kovacic caso 3)**.** *Sea $r \in \mathbb{C}(z)$ que satisface las condiciones necesarias para el caso 3 dadas en el teorema de las condiciones necesarias de Kovacic. Sea Γ el conjunto de polos de r en el plano complejo. Sea n el grado de la ecuación polinomial para w que estamos buscando.*

Paso 1. *Para cada $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ definimos un conjunto E_c de la siguiente manera.*

(c_1) *Si $c \in \Gamma$ y c es un polo de orden 1 entonces*

$$E_c = \{12\}.$$

(c_2) *Si $c \in \Gamma$ y c es un polo de orden 2 entonces*

$$E_c = \left\{6 + \frac{12k}{n}\sqrt{1 + 4b} : k = 0, \pm1, \pm2, \dots, \pm\frac{n}{2}\right\} \cap \mathbb{Z}$$

donde b es el coeficiente de $(z - c)^{-2}$ en la expansión en fracciones parciales para r.

(∞_1) *Si el orden de r en infinito es 2 entonces*

$$E_\infty = \left\{ 6 + \frac{12k}{n}\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n}{2} \right\} \cap \mathbb{Z}$$

donde b es el coeficiente de z^{-2} en la expansión en serie de Laurent de r en infinito.

(∞_2) *Si el orden de r en infinito es mayor a 2 entonces*

$$E_\infty = \left\{ 6 + \frac{12k}{n} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n}{2} \right\} \cap \mathbb{Z}.$$

Paso 2. *Consideremos las familias $(e_c)_{c \in \Gamma \cup \{\infty\}}$ y $e_c \in E_c$. Para cada familia sea*

$$d = \frac{n}{12}\left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c \right).$$

Si d es un entero no negativo, la familia es retenida, de lo contrario, la familia es descartada. Si no se retienen familias, entonces w no puede satisfacer una ecuación polinomial de grado n con coeficientes en $\mathbb{C}(z)$.

Paso 3. *Para cada familia retenida en el paso 2 se construye una función racional θ y un polinomio S definidos como*

$$\theta = \frac{n}{12}\sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{z-c}, \quad S = \prod_{c \in \Gamma}(z-c).$$

Luego se busca un polinomio mónico $P \in \mathbb{C}(z)$ de grado d, tal que cuando definimos los polinomios $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_{-1}$ recursivamente mediante las fórmulas siguientes, entonces P_{-1} es idénticamente cero.

$$\begin{aligned} &P_n = -P, \\ &P_{i-1} = -SP_i' + ((n-i)S' - S\theta)P_i - (n-i)(i+1)S^2 r P_{i+1}, \\ &\textit{para } i = n, n-1, \ldots, 0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Si tal polinomio existe para algún (e_c), sea w una raíz del polinomio

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{S^i P_i}{(n-i)!} w^i = 0, \tag{2.41}$$

entonces $y = e^{\int w}$ es solución de la EDR donde w es solución del polinomio (2.41) que es de grado n. Si no se encuentra ningún polinomio P para ninguna familia retenida del paso 2, entonces la EDR no tiene solución de la forma $y = e^{\int w}$ con w algebraica de grado n sobre $\mathbb{C}(z)$.

Observación 8. Si se logra determinar w con $n = 4$ entonces el grupo de Galois de la EDR es el grupo tetraedro, si se determina que $n = 6$ es el grupo octaedro y si $n = 12$ es el grupo icosaedro.

Demostración. Determinamos los conjuntos E_c en base a los posibles valores de los polos. Para facilitar la notación suponemos que $c = 0$ y escribimos $e = e_0$. Tenemos la expansión de Laurent para

$$s = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{n}{12}\frac{12}{n}u^{\frac{12}{n}-1}u'}{u^{12/n}} = \frac{n}{12}\frac{(u^{12/n})'}{u^{12/n}} = \frac{n}{12}ez^{-1} + \cdots$$

y para r, por las condiciones necesarias de Kovacic de la proposición 2.3.1, r no tiene polo de orden mayor a 2 entonces la serie de Laurent para r es de la forma

$$r = b_{-2}z^{-2} + b_{-1}z^{-1} + \cdots,$$

con $b_{-2}, b_{-1} \in \mathbb{C}$.

Como la demostración es más complicada que en los otros casos, la demostración se dividirá en varios lemas.

Primero consideramos $b_{-2} = 0$ y $b_1 \neq 0$, correspondiente a (c_1) del paso 1 del algoritmo.

Lema 2.6.8. *Si $b_{-2} = 0$ y $b_{-1} \neq 0$ entonces $e = 12$.*

Demostración. Sea

$$s = \frac{n}{12}ez^{-1} + f + \cdots$$

y tratamos a e, f como indeterminadas. Usando (2.33) tenemos que

$$a_n = -1 = -1z^{n-n} + 0z^{n-n+1} + 0fz^{n-n+1},$$

donde

$$A_n = -1, B_n = 0, C_n = 0.$$

Ahora usando (2.33) para $i = n$ obtenemos

$$a_{n-1} = -sa_n = \frac{n}{12}ez^{-1} + f + \cdots,$$

en el cual

$$\begin{aligned}
A_{n-1} &= \frac{n}{12}e = \left(n - n - \frac{n}{12}e\right) A_n,\\
B_{n-1} &= 0 = \left(n - n - 1 - \frac{n}{12}e\right) B_n - (n-n)(n+1)b_{-1}A_{n+1},\\
C_{n-1} &= 1 = \left(n - n - 1 - \frac{n}{12}e\right) C_n - A_n.
\end{aligned}$$

Para $i = n-1$,

$$\begin{aligned}
a_{n-2} &= -\left(-\frac{n}{12}ez^{-2} + \cdots\right) - \left(-\frac{n}{12}ez^{-1} + f + \cdots\right)\left(-\frac{n}{12}ez^{-1} + f + \cdots\right)\\
&\quad - n(b_{-1}z^{-1} + \cdots)(-1)\\
&= \left(-\frac{n}{12}e - \frac{n^2}{12^2}e^2\right) z^{-2} + nb_{-1}z^{-1} - \frac{n}{6}efz^{-1} + \cdots ,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_{n-2} &= \left(\frac{n}{12}e\right)\left(1 - \frac{n}{12}e\right) = \left(n - n + 1 - \frac{n}{12}e\right) A_{n-1},\\
B_{n-2} &= nb_{-1} = (n - n + 1 - 1 - \frac{n}{12}e)B_{n-1} - (n - n + 1)(n - 1 + 1)b_{-1}A_n,\\
C_{n-2} &= -\frac{n}{6}e = \left(n - n + 1 - 1 - \frac{n}{12}e\right) C_{n-1} - A_{n-1}.
\end{aligned}$$

Para $i = n-2$

$$\begin{aligned}
a_{n-3} &= -(-2A_{n-2}z^{-3} - B_{n-2}z^{-2} - fC_{n-2}z^{-2} + \cdots)\\
&\quad - \left(\frac{n}{12}ez^{-1} + f + \cdots\right)(A_{n-2}z^{-2} + B_{n-2}z^{-1} + C_{n-2}fz^{-1})\\
&\quad - 2(n-1)(b_{-1}z^{--1} + \cdots)\left(\frac{n}{12}ez^{-1} + f + \cdots\right)\\
&= \left(2A_{n-2} - \frac{n}{12}eA_{n-2}\right) z^{-3} + \left(B_{n-2} - \frac{n}{12}eB_{n-2} - 2(n-1)b_{-1}\frac{n}{12}e\right) z^{-2}\\
&\quad + \left(C_{n-2} - A_{n-2} - \frac{n}{12}eC_{n-2}\right) fz^{-2} + \cdots ,
\end{aligned}$$

en el cual

$$\begin{aligned}
A_{n-3} &= \left(n - (n-2) - \frac{n}{12}e\right) A_{n-2},\\
B_{n-3} &= \left(n - (n-2) - 1 - \frac{n}{12}e\right) B_{n-2} - (n - (n-2))(n - 2 + 1)b_{-1}A_{n-2+1},\\
C_{n-3} &= \left(n - (n-2) - 1 - \frac{n}{12}e\right) - A_{n-2}\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

En consecuencia usando 2.33, obtenemos que

$$a_i = A_i z^{i-n} + B_i z^{i-n+1} + C_i f z^{i-n+1} + \cdots \tag{2.42}$$

donde A_i, B_i, C_i son polinomios en e con coeficientes en $\mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes relaciones recursivas

$$\begin{aligned}
&A_n = -1,\ \ A_{i-1} = \left(n - i - \frac{n}{12}e\right) A_i,\\
&B_n = 0,\ \ B_{i-1} = \left(n - i - 1 - \frac{n}{12}e\right) B_i - (n-i)(i+1)b_{-1}A_{i+1},\\
&C_n = 0,\ \ C_{i-1} = \left(n - i - 1 - \frac{n}{12}e\right) C_i - A_i,\ \ i = n, \ldots, 0.
\end{aligned}$$

Usando la fómula para A_i tenemos que

$$\begin{aligned}
A_n &= -1\\
A_{n-1} &= \frac{n}{12}e\\
A_{n-2} &= \left(1 - \frac{n}{12}e\right)\left(-\frac{n}{12}e\right)\\
A_{n-3} &= \left(2 - \frac{n}{12}e\right)\left(1 - \frac{n}{12}e\right)\left(0 - \frac{n}{12}e\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

por lo que en general

$$A_i = -\prod_{j=0}^{n-i-1}\left(j - \frac{n}{12}e\right), i = n, \ldots, 0.$$

Ahora usando la fórmula para B_i tenemos

$$
\begin{aligned}
B_n &= 0,\\
B_{n-1} &= \left(n-n-1-\frac{n}{12}e\right)B_n-(n-n)(n+1)b_{-1}A_{n+1}=0,\\
B_{n-2} &= \left(n-n+1-1-\frac{n}{12}e\right)B_{n-1}-(n-n+1)(n-1+1)b_{-1}A_{n-1+1}\\
&= -\frac{n}{12}eB_{n-1}-nb_{-1}A_n\\
&= -nb_{-1},\\
B_{n-3} &= \left(n-(n-2)-1-\frac{n}{12}e\right)B_{n-2}-(n-n+2)(n-2+1)b_{-1}A_{n-2+1}\\
&= \left(1-\frac{n}{12}e\right)(nb_{-1})-2(n-1)b_{-1}\left(\frac{n}{12}e\right)\\
&= \left[(1-\frac{n}{12}e)n-2(n-1)\left(\frac{n}{12}e\right)\right]b_{-1}.\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

En general,

$$
B_i = b_{-1}\sum_{j=0}^{n-i-2}(j+1)(n-j)\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-i-2}\left(k-\frac{n}{12}e\right), i=n,\ldots,0.
$$

Finalmente usando C_i

$$
\begin{aligned}
C_n &= 0,\\
C_{n-1} &= -A_n = 1,\\
C_{n-2} &= \left(n-(n-1)-1-\frac{n}{12}e\right)C_{n-1}-A_{n-1}\\
&= -\frac{n}{6}e\\
&= 2\left(-\frac{n}{12}e\right),\\
C_{n-3} &= \left(n-n+2-1-\frac{n}{12}e\right)C_{n-2}-A_{n-2}\\
&= \left(1-\frac{n}{12}e\right)2\left(-\frac{n}{12}e\right)+\left(1-\frac{n}{12}e\right)\left(-\frac{n}{12}e\right)\\
&= 3\left(1-\frac{n}{12}e\right)\left(-\frac{n}{12}e\right).\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Por lo que en general,

$$C_i = (n-i)\prod_{j=0}^{n-i-2}\left(j - \frac{n}{12}e\right), i = n, \ldots, 0.$$

Por otro lado, como

$$0 = a_{-1} = A_{-1}z^{-1-n} + B_{n-1}z^{-n} + C_{-1}fz^{-n} + \cdots ,$$

obtenemos

$$0 = A_{-1} = -\prod_{j=0}^{n}\left(j - \frac{n}{12}e\right) \tag{2.43}$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= B_{-1} + C_{-1}f \\ &= b_{-1}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1}\left(k - \frac{n}{12}e\right) + f(n+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(k - \frac{n}{12}e\right). \end{aligned} \tag{2.44}$$

De (2.43) podemos suponer que $\left(l - \frac{n}{12}e\right) = 0$ para algún $l = 0, \ldots, n$, esto es $e = \frac{12}{n}l$ para algún $l = 0, \ldots, n$. Supongamos que $l \neq n$ entonces de (2.44)

$$0 = b_{-1}(l+1)(n-l)\prod_{\substack{k=0\\k\neq l}}^{n-1}(k-l),$$

de donde $b_{-1} = 0$, lo cual es una contradicción, luego $l = n$ y así $e = 12$. $\square$

Ahora consideramos cuando $b_{-2} \neq 0$ que corresponde al subcaso (c_1) del paso 1 del algoritmo.

Lema 2.6.9. *Si $b_{-2} \neq 0$ entonces e es un número entero elegido entre*

i) $6 + k\sqrt{1+4b_{-2}}, k = 0, \pm 3, \pm 6$ *si* $n = 4$.

ii) $6 + k\sqrt{1+4b_{-2}}, k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$ *si* $n = 6$.

iii) $6 + k\sqrt{1+4b_{-2}}, k = 0, \pm 1, \ldots, \pm 6$ *si* $n = 12$.

Demostración. Escribimos de nuevo a_i como en (2.42)

$$a_i = A_i z^{i-n} + B_i z^{i-n+1} + C_i f z^{i-n+1} + \cdots$$

y usando (2.33) obtenemos

$$\begin{aligned} A_n &= -1, \\ A_{i-1} &= \left(n - i - \frac{n}{12}e\right) A_i - (n-i)(i+1)b_{-2}A_{i+1}. \end{aligned}$$

Sea y una solución a la EDR, igual que en el teorema de las condiciones necesarias de Kovacic, y tiene un desarrollo en serie de Puiseux

$$y = z^\mu + \cdots$$

Como $y'' = ry$ con $r = b_{-2}z^{-2} + b_{-1}z^{-1} + \cdots$ entonces

$$\mu(\mu-1)z^{\mu-2} + \cdots = (b_{-2}z^{-2} + b_{-1}z^{-1} + \cdots)(z^\mu + \cdots) = b_{-2}z^{\mu-2} + b_{-1}z^{\mu-1} + \cdots$$

de donde $b_{-2} = \mu(\mu-1)$, luego $\mu^2 - \mu - b_{-2} = 0$, por lo que $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b_{-2}}$. Supongamos que $b_{-2} \neq -\frac{1}{4}$. La EDR tiene soluciones, digamos y_1, y_2, con desarrollo en serie de Puiseux

$$\begin{aligned} y_1 &= z^{\mu_1} + \cdots \text{ donde } \mu_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4b_{-2}}, \\ y_2 &= z^{\mu_2} + \cdots \text{ donde } \mu_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4b_{-2}}. \end{aligned}$$

Por la proposición 2.6.5, $\frac{(y_1^i y_2^{n-i})'}{y_1^i y_2^{n-i}}$ es una solución a (2.33) para n, pues $y_1^i y_2^{n-i}$ es un polinomio homogéneo de grado n en soluciones de la EDR. Como

$$\begin{aligned} \frac{(y_1^i y_2^{n-i})'}{y_1^i y_2^{n-i}} &= \frac{(i\mu_1 + (n-i)\mu_2)z^{i\mu_1 + (n-i)\mu_2 - 1} + \cdots}{z^{i\mu_1 + (n-i)\mu_2} + \cdots} \\ &= (i\mu_1 + (n-i)\mu_2)z^{-1} + \cdots \\ &= \left(i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4b_{-2}}\right) + (n-i)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4b_{-2}}\right)\right)z^{-1} \\ &= \left(\frac{n}{2} + (i - \frac{n}{2})\sqrt{1+4b_{-2}}\right)z^{-1} + \cdots \end{aligned}$$

el polinomio A_{-1} debe ser cero para

$$\frac{n}{12}e = \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2} - i\right)\sqrt{1+4b_{-2}}. \tag{2.45}$$

i) En este caso $n = 4$.

- Si $b_{-2} \neq -\frac{1}{4}$, de la ecuación (2.45) obtenemos

$$e = 6 + (3i - 6)\sqrt{1 + 4b_{-2}} \text{ con } i = 4, 3, 2, 1, 0.$$

Si hacemos $k = 3i - 6$ entonces $k = 0, \pm 3, \pm 6$. Por lo que

$$e = 6 + k\sqrt{1 + 4b_{-2}} \text{ con } k = 0, \pm 3, \pm 6.$$

- Si $b_{-2} = -\frac{1}{4}$, usando la fórmula recursiva para A_i conseguimos

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{3}e, \\
A_2 &= -\frac{1}{9}(e^2 - 3e + 9), \\
A_1 &= \frac{1}{27}\left(e^3 - 9e^2 + \frac{81}{2}e - 54\right), \\
A_0 &= -\frac{1}{81}\left(e^4 - 18e^3 + 135e^2 - 459e + \frac{1215}{2}\right), \\
A_{-1} &= \frac{1}{243}(e^5 - 30e^4 + 360e^3 - 2160e^2 + 6480 - 7776) = \frac{1}{243}(e-6)^5.
\end{aligned}$$

ii) En este caso $n = 6$.

- Si $b_{-2} \neq -\frac{1}{4}$, de la ecuación (2.45) obtenemos

$$e = 6 + (2i - 6)\sqrt{1 + 4b_{-2}} \text{ con } i = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.$$

Si hacemos $k = 2i - 6$ entonces $k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$. Por lo que

$$e = 6 + k\sqrt{1 + 4b_{-2}} \text{ con } k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6.$$

- Si $b_{-2} = -\frac{1}{4}$, usando la fórmula recursiva para A_i conseguimos

$$
\begin{aligned}
A_6 &= -1, \\
A_5 &= \frac{1}{2}e, \\
A_4 &= -\frac{1}{4}(e^2 - 2e + 6), \\
A_3 &= \frac{1}{8}(e^3 - 6e^2 + 24e - 24), \\
A_2 &= -\frac{1}{16}(e^4 - 12e^3 + 72e^2 - 192e + 216), \\
A_1 &= \frac{1}{32}(e^5 - 20e^4 + 180e^3 - 840e^2 + 2040e - 2016), \\
A_0 &= -\frac{1}{64}(e^6 - 30e^5 + 390e^4 - 2760e^3 + 11160e^2 + 24336e + 22320), \\
A_{-1} &= \frac{1}{28}(e-6)^7.
\end{aligned}
$$

iii) Finalmente consideramos $n = 12$.

- Si $b_{-2} \neq -\frac{1}{4}$, de la ecuación (2.45) obtenemos

$$e = 6 + (i-6)\sqrt{1 + 4b_{-2}} \text{ con } i = 12, \ldots, 2, 1, 0.$$

Si hacemos $k = i - 6$ entonces $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6$. Por lo que

$$e = 6 + k\sqrt{1 + 4b_{-2}} \text{ con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6.$$

- Si $b_{-2} = -\frac{1}{4}$, usando la fórmula recursiva para A_i obtenemos

$$
\begin{aligned}
A_{12} &= -1,\\
A_{11} &= e,\\
A_{10} &= -e^2 + e - 3,\\
A_9 &= e^3 - 3e^2 + \frac{21}{2}e - 6,\\
A_8 &= -e^4 + 6e^3 - 27e^2 + 45e - \frac{81}{2},\\
A_7 &= e^5 - 10e^4 + 60e^3 - 180e^2 + 315e - 216,\\
A_6 &= -e^6 + 15e^5 - 120e^4 + 540e^3 - 1485e^2 + 2241e - 1485,\\
A_5 &= e^7 - 21e^6 + \frac{441}{2}e^5 - 1365e^4 + 5355e^3 - 13041e^2 + \frac{36477}{2}e - 11178,\\
A_4 &= -e^8 + 28e^7 - 378e^6 + 3066e^5 - 16170e^4 + 56196e^3\\
&\quad - 125118e^2 + 162378e - \frac{187677}{2},\\
A_3 &= e^9 - 36e^8 + 612e^7 - 6300e^6 + 42903e^5 - 199206e^4\\
&\quad + 628236e^3 - 1293732e^2 + \frac{3150495}{2}e - 862488,\\
A_2 &= -e^{10} + 45e^9 - 945e^8 + 12060e^7 - 103005e^6 + 612927e^5 - 2566620e^4\\
&\quad - 7453620e^3 - \frac{28689795}{2}e^2 + \frac{33002235}{2}e - \frac{17213877}{2},\\
A_1 &= e^{11} - 55e^{10} + \frac{2805}{2}e^9 - 21780e^8 + 228195e^7 - 1690227e^6\\
&\quad + \frac{18035325}{2}e^5 - 34613865e^4 + \frac{187185735}{2}e^3 - \frac{339306165}{2}e^2\\
&\quad + \frac{741729879}{4}e - 92538045,\\
A_0 &= -e^{12} + 66e^{11} - 2013e^{10} + 37455e^9 - \frac{945945}{2}e^8\\
&\quad - 28176687e^6 + 137179251e^5 - \frac{976923585}{2}e^4 + 1240169535e^3\\
&\quad - \frac{4261026627}{2}e^2 + \frac{4446102717}{2}e - \frac{4261026627}{4},\\
A_{-1} &= e^{13} - 78e^{12} + 2808e^{11} - 61776e^{10} + 926640e^9 - 10007712e^8\\
&\quad + 80061696e^7 - 480370176e^6 + 2161665792e^5 - 7205552640e^4\\
&\quad + 17293326336e^3 - 28298170368e - 13060694016\\
&= (e-6)^{13}.
\end{aligned}
$$

lo cual prueba el lema. □

Lema 2.6.10. *Si $b_{-2} = b_{-1} = 0$, es decir, tenemos un punto ordinario de r, entonces $\frac{n}{12}e$ es un entero.*

Demostración. Procedamos igual como en la demostración del lema 2.6.8, el término b_{-1} en r aparece en B_i, por lo que obtenemos la misma fórmula para A_i, luego como en el lema 2.6.8 encontramos que $e = \frac{12}{n}l$ para algún $l = 0, \ldots, n$ o lo que es igual $l = \frac{n}{12}e$ con $l = 0, \ldots, n$, de donde $\frac{n}{12}e$ es un entero. □

Sea Γ el conjunto de polos. Para $c \in \Gamma$, b_c denotará el coeficiente de $(z-c)^{-2}$ en la expansión de fracciones parciales para r. Hasta ahora hemos mostrado lo siguiente

i) En el caso tetraedro, (2.33) tiene una solución $s = \frac{u'}{u}$ para $n = 4$, donde

$$u^3 = P^3 \prod_{c\in\Gamma}(z-c)^{e_c},$$

$P \in \mathbb{C}[z]$ y $e_c \in \{6 + k\sqrt{1+4b_c} : k = 0, \pm 3, \pm 6\} \cap \mathbb{Z}$.

ii) En el caso octaedro, (2.33) tiene una solución $s = \frac{u'}{u}$ para $n = 6$, donde

$$u^2 = P^2 \prod_{c\in\Gamma}(z-c)^{e_c},$$

$P \in \mathbb{C}[z]$ y $e_c \in \{6 + k\sqrt{1+4b_c} : k = 0, \pm 2, \pm 4 \pm 6\} \cap \mathbb{Z}$.

iii) Ya sea en el caso tetraedro, el caso octaedro o el caso icosaedro, (2.33) tiene una solución $s = \frac{u'}{u}$ para $n = 12$, donde

$$u = P^2 \prod_{c\in\Gamma}(z-c)^{e_c},$$

$P \in \mathbb{C}[z]$ y $e_c \in \{6 + k\sqrt{1+4b_c} : k = 0, \pm 1, \ldots, \pm 5 \pm 6\} \cap \mathbb{Z}$.

Sea d el grado del polinomio P entonces la serie de Laurent para s en ∞ tiene la forma

$$s = \frac{n}{12}\left(\frac{12}{n}d + \sum_{c\in\Gamma} e_c\right) z^{-1} + \cdots$$

y la serie de Laurent para r en ∞ tiene la forma $r = \gamma z^{-2} + \cdots$ esto pues, de las condiciones necesarias de Kovacic, el orden de r en ∞ es al menos 2.

Sea

$$e_\infty = \frac{12}{n} d + \sum_{c \in \Gamma} e_c,$$

entonces se puede probar como en el lema 2.6.9 que e_∞ satisface las condiciones del enunciado de la proposición 2.6.7. También

$$d = \frac{n}{12} \left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c \right),$$

debe ser un entero no negativo. Esta es la justificación del paso 2 del algoritmo.

Para completar la demostración del algoritmo vamos a mostrar que las relaciones recursivas del paso 3 son idénticas a (2.33). Sea

$$\theta = \frac{n}{12} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{z - c} \;\text{ y }\; S = \prod_{s \in \Gamma} (z - c),$$

entonces $s = \frac{u'}{u} = \frac{P'}{P} + \theta$. También sea $P_i = S^{n-i} P a_i$. Usando (2.33) tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
P_n &= -P \\
P_{i-1} &= S^{n-i+1}Pa_{i-1} \\
&= S^{n-i+1}P(-a_i' - sa_i - (n-i)(i+1)ra_{i+1}) \\
&= -S^{n-i+1}Pa_i' - S^{n-i+1}Psa_i - S^{n-i+1}(n-i)(i+1)rPa_{i+1} \\
&= -(n-i)S^{n-i}Pa_iS' - S^{n-i+1}P'a_i - S^{n-i+1}Pa_i' + (n-i)S^{n-i}S'Pa_i \\
&+ S^{n-i+1}P'a_i - S^{n-i+1}P'a_i - S^{n-i+1}P\left(s - \frac{P'}{P}\right)a_i \\
&- (n-i)(i+1)S^{n-i+1}rPa_{i+1} \\
&= -(n-i)S^{n-i}Pa_iS' - S^{n-i+1}P'a_i - S^{n-i+1}Pa_i' + (n-i)S^{n-i}S'Pa_i \\
&+ S^{n-i+1}P'a_i - S^{n-i+1}P'a_i - S^{n-i+1}P\theta a_i - (n-i)(i+1)S^{n-i+1}rPa_{i+1} \\
&= -S[((n-i)S^{n-i+1}PS' + S^{n-i}P')a_i + S^{n-i}Pa_i'] + (n-i)S^{n-i}S'Pa_i \\
&+ S^{n-i+1}P'a_i - S(P' + P\theta)(S^{n-i}a_i) - (n-i)(i+1)S^2r(S^{n-i-1}Pa_{i+1}) \\
&= -S(S^{n-i}Pa_i)' + (n-i)S^{n-i}S'Pa_i + S^{n-i+1}P'a_i \\
&- S(P' + P\theta)(S^{n-i}a_i) - (n-i)(i+1)S^2r(S^{n-i-1}Pa_{i+1}) \\
&= -S(S^{n-i}Pa_i)' + (n-i)S'(S^{n-i}Pa_i) - S\theta(S^{n-i}Pa_i) \\
&- (n-i)(i+1)S^2r(S^{n-i-1}Pa_{i+1}) \\
&= -SP_i' + (S'(n-i) - S\theta)P_i - (n-i)(i+1)S^2rP_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Esto es exactamente (2.40) en el paso 3 del algoritmo. Finalmente la ecuación

$$w^n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(n-i)!} w^i,$$

podemos reescribirla como sigue

$$
\begin{aligned}
0 &= -S^nPw^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S^nPa_i}{(n-i)!}w^i = -S^n(S^{n-n}Pa_n)w^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S^i(S^{n-i}Pa_i)}{(n-i)!}w^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{S^iP_i}{(n-i)!}w^i.
\end{aligned}
$$

Se sigue de la proposición 2.6.2 que $y = e^{\int w}$ es solución a la EDR. □

Concluimos este capítulo y el documento con el siguiente ejemplo para ilustrar el algoritmo caso 3.

2.6.1. Ejemplo

Ejemplo 11. Consideremos la EDR $y'' = ry$ donde

$$r = -\frac{5z^2 + 27}{36(z^2 - 1)^2}.$$

La expansión en fracciones parciales de r esta dada por

$$r = -\frac{11}{72(z+1)} - \frac{2}{9(z+1)^2} + \frac{11}{72(z-1)} - \frac{2}{9(z-1)^2},$$

y la expansión en serie de Laurent para r alrededor de ∞ está dada por

$$r = -\frac{5}{36z^2} + \cdots$$

Notemos que los polos de r son ± 1 ambos de orden 2. El orden de r en ∞ es también 2. De las condiciones necesarias de Kovacic tenemos que cualquiera de los tres casos son posibles.

Apliquemos el algoritmo para el **caso 1**.

Paso 1.

- Para el polo 1, como 1 es un polo de orden 2, estamos en el subcaso (c_2), así que obtenemos

$$\alpha_1^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\left(-\frac{2}{9}\right)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6},$$

donde $-\frac{2}{9}$ es el coeficiente del término $\frac{1}{(z-1)^2}$ en la expansión de fracciones parciales de r, por lo que

$$\alpha_1^{+} = \frac{2}{3}, \;\; \alpha_1^{-} = \frac{1}{3}.$$

- Para el polo -1, también es de orden 2, estamos en el subcaso (c_2), por tanto

$$\alpha_{-1}^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\left(-\frac{2}{9}\right)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6},$$

donde $-\frac{2}{9}$ es el coeficiente del término $\frac{1}{(z+1)^2}$ en la expansión de fracciones parciales de r, de ahí que

$$\alpha_{-1}^{+} = \frac{2}{3}, \;\; \alpha_{-1}^{-} = \frac{1}{3}.$$

- Para ∞, estamos en el subcaso (∞_2), entonces

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4\left(-\frac{5}{36}\right)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3},$$

donde $-\frac{5}{36}$ es el coeficiente del término $\frac{1}{z^2}$ en la expansión en la serie de Laurent de r en ∞, por lo que

$$\alpha_\infty^+ = \frac{5}{6},\ \ \alpha_\infty^- = \frac{1}{6}.$$

Resulta que ningun $d_s = \alpha_\infty^\pm - \alpha_1^\pm - \alpha_{-1}^\pm$ es un entero no negativo, luego el paso 2 del algoritmo caso 1 **no** es posible.

Aplicamos entonces el algoritmo **caso 2**.

Paso 1.

- Para el polo 1, estamos en el subcaso (c_2), por lo cual

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{2 + k\sqrt{1+4\left(-\frac{2}{9}\right)} : k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z} \\ &= \left\{2 + k\left(\frac{1}{3}\right) : k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z} = \left\{2, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right\} \cap \mathbb{Z} = \{2\}. \end{aligned}$$

- Para el polo -1, de nuevo estamos en el subcaso (c_2), por eso

$$E_{-1} = \left\{2 + k\sqrt{1+4\left(-\frac{2}{9}\right)} : k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z} = \{2\}.$$

- Para ∞, estamos en el subcaso (∞_2), por ello

$$\begin{aligned} E_\infty &= \left\{2 + k\sqrt{1+4\left(-\frac{5}{36}\right)} : k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z} \\ &= \left\{2 + k\left(\frac{4}{6}\right) : k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z} = \left\{2, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right\} \cap \mathbb{Z} = \{2\}. \end{aligned}$$

Paso 2. Tenemos entonces la siguiente familia

$$e_1 = 2, e_{-1} = 2, e_\infty = 2, \quad d = \frac{1}{2}(e_\infty - e_1 - e_{-1}) = -1,$$

en consecuencia no tenemos un entero no negativo, por lo que **no** se satisface el algoritmo caso 2.

Procedamos entonces a aplicar el algoritmo para el **caso 3**.

Paso 1.

- Como 1 es un polo de orden 2, por tanto

$$E_1 = \left\{ 6 + \frac{12k}{n}\sqrt{1 + 4\left(-\frac{2}{9}\right)} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n}{2} \right\} \cap \mathbb{Z}.$$

Utilizamos primero $n = 4$ entonces

$$E_1 = \left\{ 6 + \frac{12k}{4}\left(\frac{1}{3}\right) : k = 0, \pm 1, \pm 2 \right\} \cap \mathbb{Z} = \{4, 5, 6, 7, 8\}.$$

- Para -1, estamos en el subcaso (c_2), con $n = 4$ tenemos

$$E_{-1} = \left\{ 6 + \frac{12k}{4}\left(\frac{1}{3}\right) : k = 0, \pm 1, \pm 2 \right\} \cap \mathbb{Z} = \{4, 5, 6, 7, 8\}.$$

- Para ∞, estamos en el subcaso (∞_1), de aquí que

$$E_\infty = \left\{ 6 + \frac{12k}{4}\sqrt{1 + 4\left(-\frac{5}{36}\right)} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n}{2} \right\} \cap \mathbb{Z}$$

Utilizando $n = 4$ tenemos

$$E_\infty = \left\{ 6 + \frac{12k}{4}\left(\frac{4}{6}\right) : k = 0, \pm 1, \pm 2 \right\} \cap \mathbb{Z} = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Paso 2. Las únicas familias posibles, con d no negativo, son

$$\begin{aligned}
e_\infty = 8, e_1 = 4, e_{-1} = 4, &\quad d = \frac{4}{12}(8 - 4 - 4) = 0,\\
e_\infty = 10, e_1 = 4, e_{-1} = 6, &\quad d = \frac{4}{12}(10 - 4 - 6) = 0,\\
e_\infty = 10, e_1 = 5, e_{-1} = 5, &\quad d = \frac{4}{12}(10 - 5 - 5) = 0,\\
e_\infty = 10, e_1 = 6, e_{-1} = 4, &\quad d = \frac{4}{12}(10 - 6 - 4) = 0.
\end{aligned}$$

Paso 3. Para cada familia retenida del paso 2 construimos la función racional θ y un polinomio S definidos como el algoritmo describe.

Para la primera familia tenemos

$$\theta = \frac{4}{12}\left(\frac{4}{z-1}+\frac{4}{z+1}\right) = \frac{12(z+1)+12(z-1)}{9(z^2-1)} = \frac{8z}{3(z^2-1)},$$
$$S = (z-1)(z+1) = z^2-1.$$

En consecuencia

$$S\theta = (z^2-1)\left(\frac{8z}{3(z^2-1)}\right) = \frac{8}{3}z,$$
$$S' = 2z,$$
$$S^2 r = (z^2-1)^2\left(-\frac{5z^2+27}{36(z^2-1)^2}\right) = -\frac{5z^2+27}{36}.$$

Buscamos un polinomio mónico de grado 0. De aquí el único candidato P es $P=1$. Ahora encontremos P_0, P_1, P_3, P_4 mediante la recurrencia

$$P_4 = -P = -1,$$
$$P_3 = P_{4-1} = -SP_4' - S\theta P_4 = \frac{8}{3}z,$$
$$P_2 = P_{3-1} = -SP_3' + (S'-S\theta)P_3 - 4S^2rP_4 = -\frac{15}{3}z^2 - \frac{1}{3},$$
$$P_1 = P_{2-1} = -SP_2' + (2S'-S\theta)P_2 - 6S^2rP_3 = \frac{50}{9}z^3 + \frac{14}{9}z,$$
$$P_0 = P_{1-1} = -SP_1' + (3S'-S\theta)P_1 - 6S^2rP_2 = -\frac{125}{54}z^4 - \frac{134}{54}z^2 + \frac{3}{54},$$
$$P_{-1} = P_{0-1} = -SP_0' + (4S'-S\theta)P_0 - 4S^2rP_1 = 0z^5 + 0z^3 + 0z = 0.$$

Para la primera familia, $P=1$, cumple que $P_{-1}=0$, luego tomamos w una raíz del polinomio $\sum_{i=0}^{4}\frac{S^iP_i}{(4-i)!}w^i = 0$, esto es, w una solución del polinomio

$$-S^4w^4 + \frac{8}{3}zS^3w^3 + \left(-\frac{15}{6}z^2 - \frac{1}{6}\right)S^2w^2 + \left(\frac{25}{27}z^3 + \frac{7}{27}z\right)Sw$$
$$+\left(-\frac{125}{1296}z^4 - \frac{134}{1296}z^2 + \frac{3}{1296}\right) = 0.$$

De acuerdo al algoritmo de Kovacic caso 3, la solución a la EDR es $e^{\int w}$ donde w satisface el polinomio anterior de grado 4.

EL objetivo del algoritmo es ver que la EDR caiga en alguno de los casos $1, 2$ o 3 y si no es así, entonces ocurre el caso 4, el cual indica que la EDR no tiene soluciones liouvillianas. El algoritmo nos da un procedimiento para encontrar una extensión de Picard-Vessiot.

Conclusiones

A lo largo de esta tesis, nos hemos familiarizado con muchos conceptos y resultados análogos a los de la teoría de Galois clásica. Hemos visto como se extiende esta teoría clásica añadiendo una estructura diferencial. Vimos que dado un campo diferencial F y una ecuación diferencial lineal homogénea

$$\mathcal{L}(u) = a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u, \; a_i \in F,$$

lo análogo a polinomios en la teoría clásica. La extensión de Picard-Vessiot de una ecuación diferencial lineal corresponde al campo de descomposición de un polinomio, por lo que contiene a un conjunto fundamental de soluciones de $\mathcal{L}(u) = 0$ y la minimalidad la obtenemos con la condición de que los campos de constantes del campo base y la extensión coincidan. Mostramos que esta extensión de Picard-Vessiot existe y es única (salvo isomorfismos diferenciales) siempre y cuando F sea de característica cero y el campo de constantes de F sea algebraicamente cerrado.

Al igual que en la teoría de Galois clásica definimos un grupo asociado a la ecuación diferencial lineal, el grupo de Galois diferencial $\mathrm{Gal}_K(\mathcal{L})$. Dedujimos que $\mathrm{Gal}_K(\mathcal{L})$ es subgrupo de $GL(n, C_F)$, más aún es cerrado en $GL(n, C_F)$ con respecto a la topología de Zariski, por lo que $\mathrm{Gal}_K(\mathcal{L})$ tiene estructura de grupo algebraico lineal.

Finalmente nos centramos en las ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{C}(z)$, particularmente en las EDR. Vimos que el grupo de Galois diferencial asociado a una EDR es un subgrupo algebraico afín del grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Gracias a la clasificación de los subgrupos algebraicos afín de $SL(2, \mathbb{C})$ dadas en el teorema 2.2.1, hay cuatros casos que pueden ocurrir con respecto a la existencia de una solución liouvilliana de la EDR (teorema 2.2.5). Es de estos últimos dos resultados donde se desprenden los cuatro casos del algoritmo de Kovacic. Como vimos, este algoritmo es muy impotante, pues es un algoritmo que nos ayuda a encontrar soluciones Liouvillianas de dichas ecuaciones. Los tres primeros casos determinan la solubilidad de la EDR en términos liouvillianos, mientras que en el cuarto caso el algoritmo no funciona, lo que indica que el grupo de Galois de la EDR es exactamente $SL(2, \mathbb{C})$ y por tanto la EDR no tiene soluciones liouvillianas.

Este trabajo es solo una parte de la teoría de Galois diferencial, ha habido un gran desarrollo en esta teoría, por ejemplo Ellis Kolchin mostró como extender la Teoría de Picard-Vessiot a campos diferenciales con derivadas parciales. B. Malgrange ha hecho también aportes sobre la teoría de Galois diferencial no lineal. Los algebristas B. H Matzat y Julia Hartman han contribuido con la version del problema inverso de Galois a la teoría diferencial (el lector interesado puede consultar [Kova], [M]).

También se han desarrollado nuevas teorías relacionadas con la teoría de Galois diferencial. Vessiot en colaboración con Jules Drach estudiaron la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales parciales, formandose así la teoría de Drach-Vessiot. Cassidy y M. F. Singer trabajan en teoría de Picard-Vessiot paramétrica. Otra de ellas es la teoría de Morales-Ramis, ellos son los gestores de la aplicación de la teoría de Galois diferencial al campo de los sistemas dinámicos, haciendo importantes aportes en la mecánica celeste a través de los sistemas Hamiltonianos (ver [Mo]). Cabe mecionar que el algoritmo de Kovacic es esencial en la aplicación efectiva del criterio de Morales-Ramis a la no integrabilidad de los sistemas hamiltonianos. Se ha aplicado a familias paramétricas de ecuaciones diferenciales con el fin de determinar cuándo tienen soluciones liouvillianas.

Apéndice A

Geometría algebraica y grupos algebraicos

En esta parte enunciaremos un conjunto de definiciones y resultados sobre geometría algebraica y grupos algebraicos, los enunciaremos sin demostración, pero pueden consultarse en los libros [CH], [H], [Sh].

A.1. Geometría algebraica

A menos que se especifique lo contrario, F denotará un campo algebraicamente cerrado de característica cero.

Definición A.1.1. Un subconjunto $Y \subset F^n$ es **una variedad algebraica afín** si existe $\emptyset \neq T \subset F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tal que

$$Y = V(T) := \{P \in F^n : f(P) = 0 \ \forall f \in T\}.$$

En el caso en que T sea finito, digamos $T = \{f_1, \ldots f_m\}$ escribiremos $V(f_1, \ldots f_m)$ en lugar de $V(\{f_1, \ldots f_m\})$.

Definición A.1.2. Un variedad algebraica afín de la forma $V(f) \subset F^n$, con $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$ no constante, lo llamamos **hipersuperficie**.

A continuación damos algunos ejemplos.

Ejemplo 12. i) Consideremos al **grupo general lineal**, $GL(n, F)$. Podemos identificar al conjunto de matrices de $n \times n$ sobre F con el espacio

F^{n^2}. Entonces si $A = (x_{ij}) \in GL(n, F)$ podemos tomar a la función polinomial $f(A) = \det A$, $f \in F[x_{ij}]$, luego

$$GL(n, F)^c = \{A \in F^{n^2} : \det A = 0\} = V(f).$$

Por lo que, $GL(n, F)$ es el complemento de una variedad algebraica afín.

ii) Consideremos ahora al **grupo especial lineal**, $SL(n, F)$. Procediendo de la misma manera que el inciso anterior, tomamos a la función polinomial $f(A) = \det A - 1$, luego

$$SL(n, F) = \{A \in C^{n^2} : \det A - 1 = 0\} = V(f).$$

Por lo que $SL(n, F)$ es una hipersupericie.

Observación 9. Las hipersuperficies en F^1 están bien entendidas: Para $f \in F[x]$ tenemos una factorización (por ser F algebraicamente cerrado)

$$f = c(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_d)$$

y así $V(f) = \{r_1, \dots, r_d\}$.

Consecuentemente toda variedad algebraica afín propia en F^1, que no sea vacío, es un conjunto finito.

Lema A.1.3. *La intersección arbitraria de variedades algebraicas afines de F^n es nuevamente una variedad algebraica afín.*

Lema A.1.4. *La unión finita de variedades algebraicas afines en F^n es nuevamente una variedad algebraica afín.*

Notemos que $F^n = V(0)$ y $\emptyset = V(1)$. De aquí y con ayuda de los lemas anteriores podemos ver que

Teorema A.1.5. *Existe una topología sobre F^n para la cual los cerrados son las variedades algebraicas afines.*

Definición A.1.6.

◇ A la topología τ_Z determinada por las variedades algebraicas afines la conocemos como **topología de Zariski**.

◇ $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_F := (F^n, \tau_Z)$ lo llamamos el **espacio afín**.

$\diamond$ Cualquier subconjunto de $\mathbb{A}_F^n$ está dotado de la topología de Zariski como subespacio.

Del ejemplo 12 inciso i) tenemos que $GL(n, F)$ es un abierto de Zariski y del inciso ii) que $SL(n, F)$ es un cerrado de Zariski.

Ya que tenemos una estructura de espacio topológico podemos dar la siguiente definición topológica.

Definición A.1.7. Un espacio topológico X es **irreducible** si no existen cerrados propios $A, B \subset X$ de tal forma que $X = A \cup B$.

Definición A.1.8. Dado $S \subset \mathbb{A}_F^n$ definimos su ideal asociado $\mathbf{I}(\mathbf{S})$ mediante

$$I(S) := \{f \in F[x_1, \ldots, x_n] : f(P) = 0 \ \forall P \in S\}$$

si $S \neq \emptyset$ y la convención $I(\emptyset) = F[x_1, \ldots, x_n]$.

Las siguientes dos proposiciones nos dan caracterizaciones de la irreducibilidad, la primera en relación con la conexidad y la segunda en términos del ideal asociado de la variedad algebraica afín.

Proposición A.1.9. *Para un espacio topológico $X \neq \emptyset$ tenemos que X es irreducible si y solo si todo abierto no vacio $U \subset X$ es conexo. En particular, los espacios irreducibles son conexos.*

Proposición A.1.10. *Una variedad algebraica afín $Y \subset \mathbb{A}_F^n$ es irreducible si y solo si $I(Y)$ es un ideal primo. Consecuentemente el espacio afín $\mathbb{A}_F^n$ es irreducible.*

Otro concepto topológico que nos será de utilidad es el siguiente.

Definición A.1.11. Un espacio topológico X se dice **noetheriano** si toda cadena descendiente de cerrados de X

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots$$

se estaciona, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N = X_{N+1} = \cdots$.

Teorema A.1.12. *Sea X un espacio Noetheriano. Todo cerrado $Z \subset X$ posee una representación única (salvo el orden)*

$$Z = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$$

donde cada X_j es cerrado irreducible y para $i \neq j$ se cumple $X_i \not\subset X_j$.

De aquí obtenemos el siguiente concepto.

Definición A.1.13. Los irreducibles de la descomposición

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$$

$X_i \not\subset X_j$ si $i \neq j$, de un espacio noetheriano X se llaman **componentes irreducibles** de X.

Proposición A.1.14. *Sean X e Y espacios noetherianos y $f : X \to Y$ una función continua. Si $\emptyset \neq A \subset X$ es irreducible entonces $f(A)$ también lo es.*

Definición A.1.15. Para un cerrado de Zariski $X \subset \mathbb{A}_F^n$ llamamos a

$$F[X] := F[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$$

el **anillo de coordenadas** de X.

Observemos que $F[X]$ es una $F-$álgebra finitamente generada. Mediante evaluación, cada $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$ define una funcional $X \to F$, diferentes polinomios pueden definir la misma funcional pero $F[X]$ está en biyección con las funcionales.

Para el caso en que $X \subset \mathbb{A}_F^n$ es cerrado irreducible, tenemos que $I(X)$ es un ideal primo y por tanto, $F[X]$ es un dominio entero. Denotamos por $F(X)$ al campo de fracciones de $F[X]$ y llamamos a sus elementos **funciones racionales** de X. Un elemento $F \in F(X)$ tiene una representacón $F = f/g$ con $f, g \in F[X]$.

Definición A.1.16. Sea $X \subset \mathbb{A}_F^n$ irreducible, $G \in F(X)$ y $P \in X$.

- ⋄ Decimos que G es **regular** en P si existe representación $G = f/g, f, g \in F[X]$, tal que $g(P) \neq 0$.
- ⋄ Definimos el **dominio** de G mediante

$$dom(G) := \{P \in X : G \text{ es regular en } P\}.$$

Es momento de definir lo que es un morfismo entre variedades algebraicas afines.

Definición A.1.17. Sean $X \subset \mathbb{A}_F^n, Y \subset \mathbb{A}_F^m$ variedades algebraicas afines. Una función $\varphi : X \to Y$ es **morfismo** si existen $\varphi_j \in F[X](1 \leq j \leq m)$ de tal forma que para cada $P \in X$ tenemos que $\varphi(P) = (\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P))$. Decimos que φ es **isomorfismo** si existe un morfismo $\psi : Y \to X$ de tal modo que $\varphi \circ \psi = I_Y$ y $\psi \circ \varphi = I_X$, en cuyo caso decimos que X es isomorfo a Y.

Si ahora consideramos funciones sobre una variedad afín irreducible, que no están definidos en todo punto, entonces necesitamos ampliar el concepto de morfismo.

Definición A.1.18. Sea $X \subset \mathbb{A}_F^n$ un cerrado irreducible

- ◇ Un **morfismo racional** $\varphi : X \to \mathbb{A}_F^m$ es una $m-$tupla $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ de funciones racionales $\varphi_j \in F(X)$.
- ◇ Decimos que φ es **regular** en $P \in X$ si $P \in \cap_{1 \leq j \leq m} dom(\varphi_j)$.
- ◇ Llamamos **dominio de** φ al conjunto de puntos de X en donde φ es regular.
- ◇ Sean $X \subset \mathbb{A}_F^n, Y \subset \mathbb{A}_F^m$ cerrados irreducibles. Un **morfismo racional** $\varphi : X \to Y$ es un morfismo racional $\varphi : X \to \mathbb{A}_F^m$ de tal forma que para todo $P \in dom(\varphi)$ tenemos $\varphi(P) \in Y$.

Una última definición que usaremos es

Definición A.1.19. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es

◇ **localmente cerrado** si existen $U \subset X$ abierto y $C \subset X$ cerrado de tal forma que $C \cap U = A$;

◇ **construible** si es unión finita de conjuntos localmente cerrados.

Teorema A.1.20 (Chevalley)**.** *Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas afines. Si $Z \subset X$ es cerrado entonces $\varphi(Z)$ es construible en Y.*

A.2. Grupos algebraicos

Si ahora a una variedad algebraica afin le añadimos una estructura de grupo surge la siguiente definición.

Definición A.2.1. Un **grupo algebraico afín** sobre F es una variedad algebraica afín G definida sobre F junto con una estructura de grupo y de tal modo que las dos funciones $\mu : G \times G \to G, \mu(a, b) = ab$ y $\iota : G \to G, \iota(a) = a^{-1}$ son morfismo racionales.

Enseguida algunos ejemplos.

Ejemplo 13.

i) El **grupo aditivo** $\mathbb{G}_a$ es el espacio afín $\mathbb{A}^1_F$ con los morfismos de grupo $\mu(a, b) = a + b, \iota(a) = -a$ (el neutro es $e = 0$), es un grupo algebraico afín.

ii) El **grupo multiplicativo** $\mathbb{G}_m$ es el abierto básico $D(x) = \mathbb{A}^1_F - \{0\}$ con los morfismos de grupo $\mu(a, b) = ab, \iota(a) = a^{-1}$ (el neutro es $e = 1$), es un grupo algebraico afín.

iii) El **grupo general lineal**, $GL(n, F)$ con la multiplicación usual de matrices es un grupo. Las fórmulas de multiplicación de matrices y de inversa se dan en términos de las entradas de la matriz por polinomios y funciones racionales respectivamente, éstas hacen de $GL(n, F)$ un grupo algebraico afín.

En particular

Definición A.2.2. Un **grupo algebraico lineal** es un subgrupo cerrado de $GL(n, F)$.

Ejemplo 14. El **grupo especial lineal** $SL(n, F)$ es un subgrupo cerrado de $GL(n, F)$, por lo que es un grupo algebraico lineal.

Lema A.2.3. *Sea G un grupo algebraico afín. El elemento neutro $e \in G$ se encuentra sobre exactamente una componente irreducible de G. Dicha componente la denotamos por* $\mathbf{G^0}$.

A continuación damos un pequeño repaso sobre conmutadores y solubilidad de grupos abstractos.

Para un grupo (cualquiera) G y elementos $x, y \in G$ definimos el **conmutador** $[x, y]$ mediante $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Dados $A, B \leq G$ subgrupos definimos $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ como el subgrupo generado por los conmutadores $[a, b]$ con $a \in A$ y $b \in B$.

Ahora para un grupo cualquiera G definimos su **serie derivada** D^iG mediante

$$D^0G := G, \qquad D^{i+1}G = [D^iG, D^iG].$$

Un grupo es **soluble** si la serie derivada $D^G \supset D^1G \supset \cdots$ termina en $\{e\}$ despúes de un número finito de pasos.

Ejemplo 15. Mostraremos que el grupo especial lineal $SL(2, F)$ no es un grupo soluble.

Para ello primero vamos a exhibir una famila de generadores (como grupo abstracto) de $SL(2, F)$.

Sean

$$u_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in F \right\} \qquad \text{y} \qquad u_{21} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} : s \in F \right\}.$$

Notemos primero que u_{12}, u_{21} son subgrupos de $SL(2, F)$. En efecto, sean $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in u_{12}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix} \in u_{21}$ entonces

1. $\det(A) = \det(C) = 1$, por lo que $A, C \in SL(2, F)$.

2. $$AB = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t + t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in u_{12},$$

   pues $t + t_1 \in F$.

   $$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s + s_1 & 1 \end{pmatrix} \in u_{21},$$

   pues $s + s_1 \in F$.

3. Tenemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in u_{12}$ ya que $-t \in F$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \in u_{21}$ ya que $-s \in F$.

Por lo tanto, u_{12}, u_{21} son subgrupos de $SL(2, F)$.

Consideremos ahora G el subgrupo de $SL(2, F)$ generado por la unión $u_{12} \cup u_{21}$. Tenemos entonces las siguientes afirmaciones:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que, $A, B \in G$.

b) Para $a \in C - \{0\}$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}, \end{pmatrix}$$

es decir, el producto es una matriz diagonal en $SL(2, F)$.

c) Si $A \in SL(2, F)$ es triangular superior o inferior entonces $A \in G$. En efecto, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ es triangular superior en $SL(2, F)$ entonces $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, de igual forma $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior en $SL(2, F)$. Así

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

luego aplicando inciso a) obtenemos que $A \in G$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ba & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ba & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces aplicando inciso a) obtenemos que $B \in G$.

Bien ahora tenemos que $G \subset SL(2, F)$. Resta ver que $SL(2, F) \subset G$.

Sea $A \in SL(2, F)$, digamos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. De aquí consideremos los siguientes casos:

I. Supongamos que $a \neq 0$, por la descomposición LDU, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (ad-bc)a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

esto pues $ad - bc = 1$ implica que $a^{-1}(ad - bc) = a^{-1}$. Ahora como tenemos matrices triangulares, superiores y además la matriz diagonal, del inciso c) y del inciso b) obtenemos que $A \in G$.

II. Supongamos que $a = 0$, entonces $b, c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -db^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

aplicando el inciso a), b) se sigue que $A \in G$.

De I, II concluimos que $SL(2, F) \subset G$ y por tanto, $G = SL(2, F)$.

Afirmamos que $[SL(2, F), SL(2, F)] = SL(2, F)$.

En efecto, tenemos que $[SL(2, F), SL(2, F)] \subset SL(2, F)$. Por otro lado, notemos que cada elemento de los subgrupos u_{12}, u_{21} es un conmutador de elementos en $SL(2, F)$: Supongamos que $t, s \in F, t, s \neq -1$ entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{t+1} & 1 \\ 0 & (\sqrt{t+1})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sqrt{t+1})^{-1} & -1 \\ 0 & \sqrt{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{s+1})^{-1} & 0 \\ 1 & \sqrt{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{s+1} & 0 \\ -1 & (\sqrt{s+1})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde aquí estamos tomando la raíz positiva.

Supongamos ahora que $t = s = -1$, luego

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix},$$

aquí tomamos también la raíz positiva. De esto y dado que $G = SL(2, F)$ se sigue que $SL(2, F) \subset [SL(2, F), SL(2, F)]$.

Con todo tenemos que $SL(2, F)$ no es soluble.

Otro conjunto de matrices que utilizaremos es el anillo de matrices triangulares superiores, que denotamos por $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{F})$.

Definición A.2.4. Un subconjunto M de $M(n, F)$ es **triangulable** si existe $x \in GL(n, F)$ tal que

$$xMx^{-1} \subset \mathcal{T}(n, F).$$

Apéndice B

Análisis Complejo

A continuación enunciaremos resultados del análisis complejo que son de utilidad en el segundo capítulo de este documento.

Primero enunciamos un resultado conocido de la teoría de análisis complejo, puede consultar [Ahl].

Teorema B.0.1. *Cada función racional tiene una descomposición en fracciones parciales expresandola como la suma de un polinomio en z y sus partes principales en cada uno de sus polos en el plano complejo.*

Vamos ahora a presentar una generalización de la noción de las series de potencias que permiten exponentes negativos y fracciones.

Para un campo K algebraicamente cerrado, se denota por $K((t))$ al campo de las series de potencias formales sobre K con una cantidad finita de términos con exponentes negativos, es decir, expresiones de la forma $\sum_{\nu \leq i} d_i t^i, d_i \in K, i \in \mathbb{Z}$. Consideremos la unión de todos los conjuntos $K((t^{\frac{1}{i}})), i = 1, 2, \ldots$, este conjunto de series de potencias fraccionarias forma un campo, llamado el **campo de las series de Puiseux**. Un teorema atribuido a Puiseux pero que Newton ya conocia (ver [RV], [WA]) es el siguiente.

Teorema B.0.2. *Si K tiene caracteristica cero entonces la cerradura algebraica de $K((t))$ es isomorfo a*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K((t^{\frac{1}{i}})).$$

Este teorema ayudará a probar uno de los subcasos del algoritmo de Kovacic.

Apéndice C

Álgebra Moderna

Pasemos ahora a recordar algunos resultados de teoría de anillos.

Proposición C.0.1. *Sea A un anillo conmutativo con identidad entonces $a \in A$ es invertible si y solo si $a \in I$, cuando $I \subset A$ no es maximal.*

Demostración. Sea $a \in A$ e I un ideal de A. Supongamos primero que a es invertible y que $a \in I$. Como a es invertible existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$. Ya que I es ideal $aa^{-1} = 1 \in I$, con lo que $I = R$ y así I no es maximal.

Recíprocamente, sea I un ideal de R que no es maximal y $a \in I$. Supongamos por contradicción que a no es invertible entonces (a) es un ideal propio de R, luego existe un ideal maximal M de R conteniendo a (a), por lo que $a \in M$, lo cual no es posible. Consecuentemente a es invertible. $\square$

Para el siguiente resultado puede consultar [Ati].

Proposición C.0.2. *Sea A un anillo distinto de cero. Las siguientes son equivalentes*

i) *A es campo*

ii) *los únicos ideales de A son 0 y el total*

iii) *cada homomorfismo de A en un anillo distinto de cero B es inyectiva.*

Bibliografía

[A] P. B. Acosta, *La teoría de Morales- Ramis y el algoritmo de Kovacic*, Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, Lecturas matemáticas, (2006), 21-56.

[AH] P. B. Acosta, J. Hernando, Una introducción a la teoría de Galois diferencial, Boletín de matemáticas, volumen XI, (2004).

[Ahl] L. V. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill, (1966).

[Ati] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, Introduction to conmutative algebra, Addison-Wesley, (1969).

[CH] T. Crespo, Z. Hajto, Algebraic groups and differential Galois theory, Graduate Studies in Mathematics, volume 122, American mathematical society, (2011).

[G] E. Gonzáles, *Integration and resolution of differential equations in finite terms*, versión preliminar.

[Hu] S. Huaringa, *Teoría de Galois de ecuaciones diferenciales lineales*, versión preliminar.

[HL] J. Hubbard, B. Lundell, *A first look at differential algebra*, versión preliminar.

[H] K. Hulek, Elementary algebraic geometry, Student Mathematical Library, volumen 20, American Mathematical Society, (2003).

[Kol] E. R. Kolchin, Differential algebra and algebraic groups, Academic press, (1973).

[Kov] J. J. Kovacic, *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations*, J. Symbolic Computation, volumen 2, (1986), 3-43.

[Kova] J. J. Kovacic, *The inverse problem in the Galois theory of differential fields*, Ann. of Math. 89 (1969), 583-608.

[L] S. Lang, Algebra, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, (2002).

[M] A. R. Magid, Lectures on Differential Galois Theory, University Lecture Series, American Mathematical Society, Volumen 7.

[Mo] J. J. Morales-Ruiz, Differential Galois Theory and non-integrability of Hamiltonian systems, Progress in Mathematics 179, Birkhäuser, 1999.

[RV] P. Ribenboim, L. Van den Dries, *The absolute Galois group of a rational function field in characteristic zero is semidirect product*, Canad. Math. Bull. 27, (1984), no. 3, 313-315.

[Se] A. Seidenberg, *Contribution to the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear differential equations*, Americal Journal of Mathematics, The Johns Hopkins University Press, Volumen 78, (1956), 808-818.

[Sh] I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 1, Springer, (1994).

[Sm] C. J. Smith, *A discussion and implementation of kovacic's algorithm for ordinary differential equations*, Department of computer science university of Waterloo, Research Report CS-84-35, Waterloo, Ontario, Canada, (1984).

[WA] R. J. Walker, algebraic curves, Springer-Verlag, New York, Reimpresión de 1950 edición, (1978).

[W] W. Wolfgang, Ordinary Differential Equations, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1998).