Universidad Autónoma de Chiapas

Facultad de Ciencias en
Física y Matemáticas
campus I

"EQUIVALENCIA ENTRE LAS SOLUCIONES KAM-DÉBILES Y DE VISCOSIDAD PARA HAMILTONIANOS NO-AUTÓNOMOS"

T E S I S

Que para obtener el grado de:
Maestra en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Araceli del Carmen Martínez Pérez X130049

Directora de tesis:

Dra. Eddaly Guerra Velasco

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Diciembre 2022.

Apoyado con beca CONACyT y apoyado parcialmente por CIMPA.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
05 de Diciembre de 2022
Oficio No. FCFM/0542/22

Dra. Eddaly Guerra Velasco
Directora de Tesis

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"EQUIVALENCIA ENTRE LAS SOLUCIONES KAM-DÉBILES Y DE VISCOSIDAD PARA HAMILTONIANOS NO-AUTÓNOMOS".

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestra en Ciencias Matemáticas de la **Lic. Araceli del Carmen Martínez Pérez** con matrícula escolar X130049.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

ATENTAMENTE
"POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR"

UNACH
DIRECCIÓN
FCFM

DRA. KAREN SALOMÉ CABALLERO MORA
DIRECTORA

C.c.p. CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
FCV /jmag

FCFM- UNACH – Ciudad Universitaria, Carretera Emiliano Zapata Km 8, Rancho San Francisco, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. C. P. 29050.
Correo electrónico: fcfm.posgrado@gmail.com Tel. 61 7 80 00 ext. 8104

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
SECRETARÍA ACADÉMICA
COORDINACIÓN DE BIBLIOTECAS UNIVERSITARIAS

Código: FO-113-05-05	
Revisión: 0	

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) **Lic. Araceli del Carmen Martínez Pérez**,
Autor (a) de la tesis bajo el título de "**"Equivalencia entre las soluciones KAM-débiles y de viscosidad para Hamiltonianos no-autónomos**," presentada y aprobada en el año **2022** como requisito para obtener el título o grado de **Maestra en Ciencias Matemáticas**, autorizo licencia a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), para que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para su consulta, reproducción parcial y/o total, citando la fuente, que contribuya a la divulgación del conocimiento humanístico, científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 05 días del mes de diciembre del año 2022

Araceli del Carmen Martínez Pérez
Nombre y firma del Tesista o Tesistas

Boulevard Belisario Domínguez Km 1081, Sin Número. Terán. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. México. C.P. 29050 Teléfono (961) 615 55 04 y (961) 615 13 21 www.biblioteca.unach.mx arturo.sanchez@unach.mx

Dedicado a mis sobrinos:

Alberto, Axel y Marcos.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por las oportunidades que me ha brindado, por estar presente en mi vida y ser mi guía en los momentos díficiles.

A mis padres, por su apoyo en cada decisión tomada, por sus consejos y amor. A Eduardo, por apoyarme, por su tiempo y comprensión.

A mi asesora de tesis, la Dra. Eddaly Guerra Velasco, por su compromiso en la realización de este trabajo, por su apoyo, su paciencia y los consejos académicos y personales que me ha brindado. A los sinodales Dr. Aldo Martínez, Dr. Armando Mendoza por el tiempo dedicado en la revisión de este trabajo, en especial al Dr. Armando Mendoza, Dr. Boris Percino y Dr. Saúl Campos, por su apoyo académico y personal, les estoy infinitamente agradecida.

A todos los profesores que aportaron a mi formación académica, por siempre tener el tiempo para escuchar mis dudas; en especial, al Dr. Florencio Corona, Dr. Homero Gallegos y Dr. Hugo Villanueva.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y al Centro Internacional de Matemáticas Puras y Aplicadas (CIMPA) por el apoyo otrogado para la realización de este trabajo

Índice general

Introducción

Los sistemas dinámicos lagrangianos tienen su origen en la física clásica, especialmente en la mecánica celeste. El método de Hamilton-Jacobi es una forma de obtener trayectorias de un sistema lagrangiano a través de soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H(x, d_x u(x)) = c.$$

Sin embargo, las soluciones de esta ecuación fácilmente desarrollan singularidades. Por lo tanto, durante mucho tiempo, sólo se obtuvieron resultados locales.

Desde la década de los 50's, se han producido varios desarrollos importantes con respecto a este problema, tanto en los sistemas dinámicos como en las ecuaciones diferenciales parciales. En la década de los 80's, por parte de los sistemas dinámicos estaba la teoría de Aubry-Mather para los "twist maps", descubierta independientemente por Serge Aubry [1] y John Mather [11] y su generalización a una dimensión superior por John Mather en el marco de los sistemas lagrangianos [10], [12]. Por otro lado, en el marco de las ecuaciones diferenciales parciales, en 1983 Pierre-Louis Lions y Michael Grain Crandall introducen la noción de solución de viscosidad [4].

En 1996, se encontró la conexión entre estos resultados aparentemente no relacionados: los conjuntos de Aubry-Mather se pueden obtener de las soluciones globales débiles (viscosidad). Y a partir de esto se encuentra la equivalencia entre las llamadas soluciones KAM-débiles y de viscosidad para hamiltonianos autónomos.

Cabe mencionar que la equivalencia de las soluciones para hamiltonianos no-autónomos es un hecho que hasta cierto punto se ha asumido pero no se ha demostrado.

El objetivo de este trabajo consiste en encontrar hipótesis que nos permitan garantizar la equivalencia entre las soluciones de viscosidad y las soluciones KAM-débiles para la ecuación de Hamilton-Jacobi no-autónoma

$$u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = c,$$

con c una constante.

Como una convención, a partir de ahora, a no ser que se diga lo contrario, vamos a trabajar con lagrangianos y hamiltonianos no-autónomos.

Este trabajo consta de cuatro capítulos, en cada uno de ellos se establecen resultados importantes para lograr el objetivo.

En el Capítulo 1 se establecen los conceptos de solución KAM-débil y solución de viscosidad; surge la necesidad de introducir el semigrupo de Lax-Oleinik para establecer la relación que existe entre este y las soluciones de viscosidad. Además, mostramos algunas propiedades de la barrera extendida de Peierls, una de estas propiedades nos muestra la diferencia entre el caso autónomo y no-autónomo.

En el Capítulo 2 estudiamos algunas de las propiedades de las soluciones KAM-débiles.

En el Capítulo 3 estudiamos las propiedades de las soluciones de viscosidad. Enunciamos el principio del máximo, el cual nos ayuda a demostrar la unicidad de las soluciones de viscosidad, este es el resultado más importante en este capítulo.

En el Capítulo 4 finalmente se enuncia el resultado que establece la equivalencia de las soluciones de viscosidad y las soluciones KAM-débiles para la ecuación de Hamilton-Jacobi no-autónoma.

Capítulo 1

Preliminares

Comenzamos definiendo los conceptos necesarios para establecer la definición de las soluciones KAM-débiles y las soluciones de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Una vez establecidos estos conceptos, estudiamos algunas propiedades tales como su relación con el semigrupo de Lax-Oleinik. Los conceptos y resultados enunciados en este capítulo pueden ser consultados en [3] y [6].

Sea M una variedad compacta C^∞ y sin fronteras. Denotamos por TM a su haz tangente, T^*M a su haz cotangente, $\pi : TM \longrightarrow M$ la proyección canónica y $L : TM \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞, la cual es llamada lagrangiano y suponemos que satisface las siguientes hipótesis:

(P1) Convexo. L restringido a T_xM debe tener Hessiano positivo definido.

(P2) Superlineal. Para alguna métrica Riemanniana tenemos

$$\lim_{|v| \longrightarrow \infty} \frac{L(x, v, t)}{|v|} = \infty, \tag{1.1}$$

uniformemente en x y t.

(P3) Periódico. L debe ser periódico en el tiempo, es decir

$$L(x, v, t+1) = L(x, v, t),$$

para todo x, v, t.

(P4) Completo. El flujo de Euler-Lagrange asociado al lagrangiano debe ser completo.

Notamos que la condición (**P2**) es equivalente a pedir que para $A \in \mathbb{R}$ existe $B(A) \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v, t) \geq A|v| - B(A), \qquad (x, v) \in TM.$$

Para demostrar esto, primero notamos que si

$$\lim_{|v| \longrightarrow \infty} \frac{L(x, v, t)}{|v|} = \infty,$$

entonces $L(x, v, t)$ crece más rápido que una ecuación lineal dependiente de $|v|$, es decir

$$L(x, v, t) \geq A|v| - B,$$

para toda $A \in \mathbb{R}$.

Por otro lado si se cumple que

$$L(x, v, t) \geq A|v| - B, \tag{1.2}$$

para toda $A \in \mathbb{R}$, si dividimos por $|v|$ a la ecuación (1.2) y tomamos el límite cuando $|v|$ tiende a infinito tenemos

$$\lim_{|v| \longrightarrow \infty} \frac{L(x, v, t)}{|v|} \geq \lim_{|v| \longrightarrow \infty} \left(\frac{A|v|}{|v|} - \frac{B}{|v|} \right) = A,$$

para toda $A \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$\lim_{|v| \longrightarrow \infty} \frac{L(x,v,t)}{|v|} = \infty.$$

También consideramos la función $H : T^*M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ asociada al lagrangiano L dada por

$$H(x,p,t) = \max_{v \in T_x M} \{pv - L(x,v,t)\}. \tag{1.3}$$

la cual es llamada hamiltoniano. De esta definición se satisface que

$$pv \leq L(x,v,t) + H(x,p,t), \tag{1.4}$$

llamada desigualdad de Fenchel.

Nos interesa estudiar la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada al hamiltoniano H, la cual está dada por

$$u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = c, \tag{H-J}$$

donde c es una constante.

Es posible dar una formulación variacional al problema de encontrar soluciones de (H-J), para ello damos el concepto de acción.

1.0.1 Definición. *Para cualquier $k \in \mathbb{R}$ se define la $(L+k)-$**acción** de una curva absolutamente continua $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ como*

$$A_{L+k}(\gamma) = \int_a^b (L+k)(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau), \tau)\ d\tau.$$

Para $t \in \mathbb{R}$ denotamos por $[t]$ el punto correspondiente en $\mathbb{S}^1$ y para cada par de puntos $(x,[s]), (y,[t])$ en $M \times \mathbb{S}^1$ y n un entero no negativo, denotamos por

$$\mathcal{C}((x,[s]),(y,[t]);n),$$

como el conjunto de curvas absolutamente continuas $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ con $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$ tal que $[a] = [s]$ y $[b] = [t]$, y la parte entera de $b - a$ es n.

Estamos interesados en curvas que minimicen la acción.

1.0.2 Definición. *(1) Se dice que una curva absolutamente continua*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow M$$

es una ***minimizante*** *si*

$$A_{L+k}(\gamma) \leq A_{L+k}(\eta)$$

para cualquier curva absolutamente continua η con $\gamma(a) = \eta(a)$ y $\gamma(b) = \eta(b)$.

(2) Una curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ es llamada ***cerrada*** *si $\gamma(a) = \gamma(b)$ y $b - a$ es un entero.*

Observamos que toda curva minimizante es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} L_v(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) = L_x(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t).$$

1.0.3 Definición. *Sea Φ_k^n la función real valuada definida en $M \times \mathbb{S}^1 \times M \times \mathbb{S}^1$ como*

$$\Phi_k^n((x,[s]),(y,[t])) = \min_{\gamma \in \mathcal{C}((x,[s]),(y,[t]);n)} \{A_{L+k}(\gamma)\},$$

tal que $\Phi_k^n = \Phi_0^n + kn$.

El ***funcional de acción*** *está definido por*

$$\Phi_k = \inf_n \Phi_k^n.$$

Para el caso autónomo, si consideramos un lagrangiano convexo, superlineal y completo en una variedad compacta M, existe un mínimo valor de k para el cual se minimiza la acción, este valor es llamado valor crítico de L y se denota como $c(L)$ [6].

Al igual que en el caso autónomo Gonzalo Contreras, Renato Iturriaga y Héctor Sánchez Morgado demostraron en [3] que existe un valor crítico $c(L)$ para el caso no-autónomo, dado por la siguiente proposición.

1.0.4 Proposición. *(1) Si $k < c(L)$ entonces $\Phi_k((x,[s]),(y,[t])) = -\infty$ para todo $(x,[s]),(y,[t]))$ en $M \times \mathbb{S}^1$.*

(2) $c(L) = \text{mín}\{k : A_{L+k}(\gamma) \geq 0$ para toda curva cerrada $\gamma\}$.

(3) Si $k \geq c(L)$ entonces $\Phi_k((x,[s]),(y,[t])) > -\infty$ para todo $(x,[s]),(y,[t]))$ en $M \times \mathbb{S}^1$.

Demostración. Primero notamos que si $\Phi_k((x,[s]),(y,[t])) = -\infty$ para algún par de puntos en $M \times \mathbb{S}^1$ entonces $\Phi_k \equiv -\infty$.

Como k es un número real, si k es tal que $L + k$ es positivo, tenemos que $\Phi_k \geq 0$.

Tomamos

$$c(L) = \sup\{k \in \mathbb{R} : \Phi_k = -\infty\}.$$

Si $k < c(L)$, existe $(x,[s])$ en $M \times \mathbb{S}^1$ tal que $\Phi_k((x,[s]),(x,[s])) = -\infty$, por lo tanto existen curvas cerradas con acción negativa, es decir, $A_{L+k}(\gamma) < 0$. Si consideramos la curva formada al concatenar copias de esta curva obtenemos una sucesión (γ_n) tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} A_{L+k} = -\infty,$$

luego

$$\Phi_k((x,[s]),(y,[t])) = -\infty. \tag{1.5}$$

Si $k \geq c(L)$ y si γ es una curva cerrada, entonces $A_{L+k} \geq 0$, de lo contrario, si suponemos que $A_{L+k} < 0$, existen $(x,[s]),(y,[t])$ en $M \times \mathbb{S}^1$ tal que $\Phi_k \leq -\infty$, lo cual es una contradicción pues cuando $\Phi_k \equiv -\infty$ tenemos que $A_{L+k} \geq 0$.

Ahora bien, como Φ_k crece con respecto a k, para demostrar el resultado basta considerar $k = c(L)$.

Observamos que si $\Phi_{c(L)} \equiv -\infty$ entonces podemos encontrar una curva cerrada $\gamma : [0,n] \longrightarrow M$ tal que $A_{L+k} < 0$, lo cual no puede ser, ya que en el caso que $k = c(L)$, $A_{L+k} \geq 0$, así, si $k \geq c(L)$ entonces $\Phi_k((x,[s]),(y,[t])) > -\infty$. $\square$

Podemos caracterizar al valor crítico en términos del potencial de acción de la siguiente manera.

1.0.5 Observación.

$$\begin{aligned} c(L) &= \sup\{k \in \mathbb{R} : \Phi_k = -\infty\} \\ &= \text{ínf}\{k \in \mathbb{R} : \textit{ existe una curva cerrada } \gamma \textit{ con } A_{L+k} \geq 0\} \\ &= \sup\{k \in \mathbb{R} : \textit{ existe una curva cerrada } \gamma \textit{ con } A_{L+k} < 0\} \\ &= \text{ínf}\{k \in \mathbb{R} : \Phi_k > -\infty\}. \end{aligned}$$

El siguiente lema, debido a Mather [10], nos ayuda a dar una caracterización más del valor crítico $c(L)$.

1.0.6 Lema. *Existe $A > 0$ tal que si $b - a \geq 1$ y $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ es una minimizante, entonces*

$$|\dot{\gamma}(t)| \leq A,$$

para toda $t \in [a, b]$.

Mather definió la función $\alpha : H^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\alpha([\omega]) = -\text{mín}\left\{ \int (L - \omega)\ d\mu : \mu \in \mathcal{M}(L) \right\},$$

donde $H^1(M, \mathbb{R})$ es la clase de cohomología de De Rham (ver Definición A.0.9) y $\mathcal{M}(L)$ el conjunto de medidas de probabilidad en la σ-álgebra de Borel de $TM \times \mathbb{S}^1$ que tienen soporte compacto y que son invariantes bajo el flujo de Euler- Lagrange φ_t.

Al igual que en el caso autónomo el valor crítico tiene la misma caracterización en términos de la función α de Mather.

1.0.7 Teorema.

$$\begin{aligned} c(L) &= -\text{mín}\left\{ \int L\ d\mu : \mu \textit{ es una medida de probabilidad invariante} \right\} \\ &= \alpha(0) = \alpha_0. \end{aligned}$$

Demostración. Sea μ una medida de probabilidad de Borel invariante (ver Definición A.0.3) tal que $\int L\ d\mu$ toma su valor mínimo, esto es $-\alpha(0)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que μ es una medida ergódica (ver Definición A.0.4).

Sea $\mu_n : [0, m_n] \longrightarrow M$ una sucesión de curvas cerradas tales que

$$A_L(\mu_n) \longrightarrow A_L(\mu).$$

Como estamos considerando curvas cerradas, de la demostración de la Proposición 1.0.4 tenemos que

$$\int_0^{m_n} L(\mu_n, \dot{\mu}_n, s) ds + m_n c(L) \geq 0, \tag{1.6}$$

si dividimos (1.6) por m_n y tomamos el límite cuando n tiende a infinito

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^{m_n}\frac{L(\mu_n,\dot{\mu}_n,s)ds}{m_n}+\lim_{n\longrightarrow\infty}c(L)\geq 0$$

obtenemos que

$$A_L(\mu)+c(L)\geq 0. \tag{1.7}$$

Sea $k<c(L)$ y consideramos $\mu_n:[0,m_n]\longrightarrow M$ una sucesión de curvas tales que

$$A_{L+k}(\mu_n)\longrightarrow -\infty.$$

De la ecuación (1.7) podemos notar que L está acotada por debajo cuando m_n tiende a infinito.

Sea $\sigma_n:[0,m_n]\longrightarrow M$ una minimizante que une los puntos finales de μ_n. Ya que σ_n es una minimizante entonces es solución de la ecuación de Euler-Lagrange, luego por el Lema 1.0.6 tenemos que $|\dot{\sigma}_n|$ está acotada.

Sea ν_n la medida de probabilidad uniformemente soportada en $(\sigma_n,\dot{\sigma}_n,id)$. Notamos que cuando n tiende a infinito ν_n contiene una subsucesión convergente, la cual converge a una medida invariante μ y se tiene que $A_L(\mu)+k\leq 0$. Luego, para $k<c(L)$ tenemos que

$$A_L+c(L)\leq 0. \tag{1.8}$$

Así de (1.7) y (1.8) tenemos que

$$A_L=-c(L).$$

□

1.0.8 Comentario. *De ahora en adelante tomamos $c=c(L)$ y por la igualdad dada en el Teorema 1.0.7 tenemos las siguientes igualdades $c=c(L)=\alpha_0$.*

1.1. Soluciones KAM-débiles

Definamos ahora la barrera extendida de Peierls, la cual esta relacionada con el funcional de acción.

1.1.1. La barrera extendida de Peierls y sus propiedades

1.1.1 Definición. *La **barrera extendida de Peierls** está definida por*

$$h_k = \liminf_{n \longrightarrow \infty} \Phi_k^n.$$

De la Definición 1.0.3 podemos observar que

$$\Phi_k \leq h_k. \tag{1.9}$$

Para demostrar algunas propiedades de la barrera extendendida de Peierls utilizamos el siguiente lema.

1.1.2 Lema. *Sea (X, Σ, ν) un espacio de probabilidad, f una medida de probabilidad ergódica que preserva transformaciones, $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y $\tilde{F}$ su promedio. Dado $A \in \Sigma$ con $\nu(A) > 0$, denotamos por $\hat{A}$ al conjunto de puntos $p \in A$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero $N > 0$ tal que $f^N(p) \in A$ y*

$$\left| \sum_{j=0}^{N-1} F(f^j(x)) - N\tilde{F}(x) \right| < \epsilon.$$

Entonces $\nu(\hat{A}) = \nu(A)$.

Una de las propiedades que marca la diferencia que existe entre el caso autónomo y el caso no-autónomo es la desigualdad del triángulo para la barrera extendida de Peierls, la cual ocurre en el caso autónomo, sin embargo para el caso no-autónomo no. Enunciamos ahora algunas propiedades de la barrera extendida de Peierls.

1.1.3 Proposición. *La barrera extendida de Peierls tiene las siguientes propiedades,*

(a) Si $k < c$ entonces $h_k \equiv -\infty$.

(b) Si $k > c$ entonces $h_k \equiv \infty$.

(c) h_c es finito.

(d) $h_c((x,[s]),(z,[\tau])) \leq h_c((x,[s]),(y,[t])) + \Phi_c((y,[t]),(z,[\tau]))$.

Demostración. (a) Notamos que si $h_k((x,[s]),(y,[t])) = -\infty$ para este par de puntos, entonces $h_k \equiv -\infty$.

Si $k < c$, de la demostración de la Proposición 1.0.4 sabemos que existen curvas cerradas γ con acción negativa, es decir, $A_{L+k}(\gamma) < 0$.

Si consideramos una curva formada al concatenar copias de esta curva, obtenemos una sucesión de curvas (γ_n) tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_{L+k}(\gamma_n) = -\infty.$$

(b) Notamos que $\Phi_c^n \geq \Phi_c > -\infty$ para toda n, entonces para $k > c$

$$\begin{aligned}\Phi_k^n &> \Phi_c^n + (k-c)n \\ &\geq \Phi_c + (k-c)n\end{aligned}$$

luego tomando el límite inferior cuando n tiende a infinito tenemos

$$\begin{aligned}\liminf_{n\longrightarrow\infty}\Phi_k^n &> \liminf_{n\longrightarrow\infty}\left[\Phi_c^n+(k-c)n\right]\\ &\geq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\left[\Phi_c+(k-c)n\right],\end{aligned}$$

así

$$h_k\equiv\infty.$$

(c) De la desigualdad (1.9) tenemos que $h_c\geq\Phi_c$. Sea μ una medida de probabilidad ergódica (ver Definición A.0.4) e invariante bajo el flujo de Euler-Lagrange

$$\varphi_t : TM\times\mathbb{S}^1\longrightarrow TM\times\mathbb{S}^1.$$

Por el Lema 1.1.2, existe un conjunto con medida total que consiste de los puntos (θ,s) para los cuales existe una sucesión T_n que tiende a infinito tal que $\varphi_{T_n}(\theta,s)$ converge a (θ,s) y

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^{T_n}L(\varphi_t(\theta,s))+c\;dt=0. \tag{1.10}$$

Sea $\gamma_n:[s,s+T_n]\longrightarrow M$ tal que

$$\varphi_t(\theta,s)=(\gamma_n(t+s),\dot{\gamma}_n(t+s),t+s)$$

luego de (1.10) tenemos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}A_{L+c}(\gamma_n)=0.$$

Sea $\beta_n:[s+T_n,s+(T_n+2)]\longrightarrow M$ una geodésica minimizante que une $\gamma_n(s+T_n)$ a $\gamma_n(s)$, luego

$$\|\dot{\beta}_n\|\leq d(\gamma_n(s),\gamma_n(s+T_n))$$

además

$$d(\gamma_n(s), \gamma_n(s+T_n)) \longrightarrow 0.$$

Sea $\beta_n * \gamma_n$ la unión de las curvas β_n con γ_n. Como β_n está acotada, entonces $(A_{L+c}(\beta_n))$ está acotada y de la definición de γ_n, se sigue que la sucesión $(A_{L+c}(\beta_n * \gamma_n))$ también lo está.

Recordamos que (θ, s) es el punto de convergencia de $\varphi_{T_n}(\theta, s)$ entonces si nos fijamos en $h_c(\pi(\theta), \pi(\theta))$, tenemos que

$$h_c(\pi(\theta), \pi(\theta)) < \infty, \tag{1.11}$$

es decir, h_c es finita en el punto de convergencia, luego es finita en los demás puntos, por lo tanto h_c es finita en general.

(d) Sean $(x, [s]), (y, [t]), (z, [\tau])$ en $M \times \mathbb{S}^1$. Consideramos curvas que unen $(x, [s])$ con $(y, [t])$ y $(y, [t])$ con $(z, [\tau])$. Al tomar la curva que une a $(x, [s])$ con $(z, [\tau])$, no podemos garantizar que la curva se cierre, como podemos observar en la Figura 1.1, ya que trabajamos con clases de equivalencia en la parte temporal al tomar los elementos en $\mathbb{S}^1$.

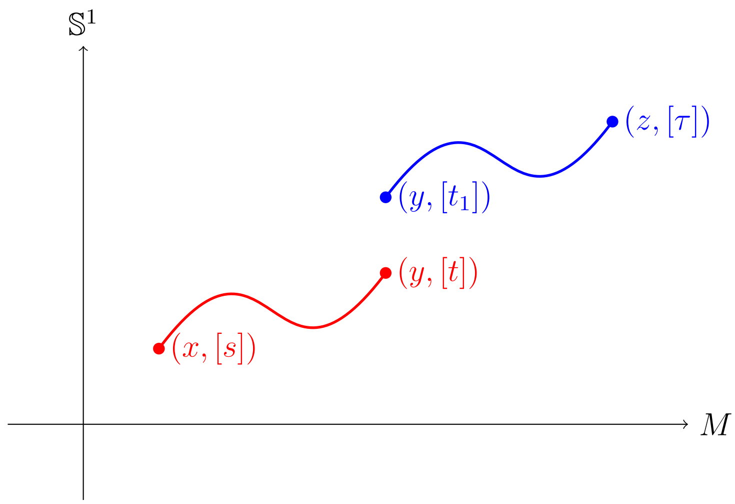


Figura 1.1

Introducimos $\delta \in [0,1]$ de tal manera que permita que la curva que une $(x,[s])$ con $(z,[\tau])$ se cierre.

Notamos que

$$\mathcal{C}((x,[s]),(y,[t]);n) \cup \mathcal{C}((y,[t]),(z,[\tau]);m) \subsetneq \mathcal{C}((x,[s]),(z,[\tau]);n+m+\delta) \tag{1.12}$$

para $m, n \in \mathbb{N}$ y $\delta \in [0,1]$. Así

$$\Phi_c^{n+m+\delta}((x,[s]),(z,[\tau])) \leq \Phi_c^n((x,[s]),(y,[t])) + \Phi_c^m((y,[t]),(z,[\tau])) \tag{1.13}$$

tomando el límite inferior cuando n tiende a infinito en (1.13)

$$\begin{aligned} \liminf_{n\longrightarrow\infty} \Phi_c^{n+m+\delta}((x,[s]),(z,[\tau])) \leq & \liminf_{n\longrightarrow\infty} \Phi_c^n((x,[s]),(y,[t])) \\ & + \liminf_{n\longrightarrow\infty} \Phi_c^m((y,[t]),(z,[\tau])) \end{aligned}$$

obtenemos

$$h_c((x,[s]),(z,[\tau])) \leq h_c((x,[s]),(y,[t])) + \Phi_c^m((y,[t]),(z,[\tau]))$$

y tomando el ínfimo sobre m obtenemos

$$\inf_m h_c((x,[s]),(z,[\tau])) \leq \inf_m h_c((x,[s]),(y,[t])) + \inf_m \Phi_c^m((y,[t]),(z,[\tau]))$$

obtenemos

$$h_c((x,[s]),(z,[\tau])) \leq h_c((x,[s]),(y,[t])) + \Phi_c((y,[t]),(z,[\tau])).$$

$\square$

El hecho que la desigualdad del triángulo para la barrera extendida de Peierls no se satisface, se sigue de la contención propia (1.12) ya que no es posible garantizar que la curva coincida en la parte temporal.

Ahora vamos a definir que es una solución KAM-débil, para esto utilizamos la establecida por Gonzalo Contreras, Renato Iturriaga y Héctor Sánchez Morgado en [3].

1.1.4 Definición. $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una* ***solución KAM-débil de tipo negativo*** *si*

(1) u está dominada por $L + c$, es decir

$$u(y,[t]) - u(x,[s]) \leq \Phi_c((x,[s]),(y,[t])),$$

y usamos la notación $u \prec L + c$.

(2) Para cada $(x,[s]) \in M \times \mathbb{S}^1$ existe una curva $\gamma : (-\infty, s) \longrightarrow M$ tal que

$$u(x,[s]) - u(\gamma(t),[t]) = A_{L+c}(\gamma|_{[t,s]}),$$

en tal caso diremos que γ es una curva $(u, L, c)-$calibrada.

De manera análoga definamos las soluciones KAM-débiles de tipo positivo, u es una solución KAM-débil de tipo positivo si

(1) u está dominada por $L + c$.

(2) Para cada $(x, [s]) \in M \times \mathbb{S}^1$ existe una curva $\gamma : (s, \infty) \longrightarrow M$ tal que

$$u(\gamma(t), [t]) - u(x, [s]) = A_{L+c}(\gamma|_{[s,t]}).$$

Denotamos por $\mathcal{S}^-$ (respectivamente $\mathcal{S}^+$) al conjunto de soluciones KAM-débiles de tipo negativo (respectivamente de tipo positivo) y a los elementos de $\mathcal{S}^-$ (respectivamente $\mathcal{S}^+$) los denotamos como u_- (respectivamente u_+).

1.1.5 Definición. *Una solución se dice* ***KAM-débil*** *si* $u \in \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^-$.

Estudiamos ahora el concepto de solución de viscosidad.

1.2. Soluciones de viscosidad

En general no es posible encontrar soluciones globales de clase C^1 de la ecuación de Hamilton-Jacobi autónoma $H(x, d_x u(x)) = c$, eso motiva a pensar en funciones más generales, un primer intento fue tomar funciones Lipschitz que satisfacen la ecuación en casi todo punto, sin embargo al ser muy general se obtienen demasiadas soluciones [6].

Es por ello que es necesario definir una noción más estricta de solución. En 1983, Pierre-Louis Lions y Michael Grain Crandall introducen la noción de solución de viscosidad [4].

Una vez dada esta pequeña introducción acerca de como surge la definición de solución de viscosidad, procedemos a enunciarla para hamiltonianos no-autónomos.

1.2.1 Definición. *Una función continua $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **subsolución de viscosidad** de* (H-J) *si para cada función ϕ de clase C^1 tal que $u - \phi$ tiene un máximo local en $(x, [t])$ entonces*

$$\phi_t(x, [t]) + H(x, d_x\phi(x, [t]), t) \leq c.$$

*De manera análoga, decimos que $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **supersolución de viscosidad** de* (H-J) *si para cada función ψ de clase C^1 tal que $u - \psi$ tiene un mínimo local en $(x, [t])$ entonces*

$$\psi_t(x, [t]) + H(x, d_x\psi(x, [t]), t) \geq c.$$

*Finalmente decimos que una función $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **solución de viscosidad** de* (H-J) *si es una subsolución y una supersolución de viscosidad.*

En la siguiente sección caracterizamos a estas soluciones mediante el semigrupo de Lax-Oleinik.

1.2.1. El semigrupo de Lax-Oleinik

Consideramos el operador

$$T_t^- : C^0(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(M, \mathbb{R})$$

definido por

$$T_t^- u(x) = \inf_{\gamma} \left\{ u(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s)\ ds \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas absolutamente continuas C^1 a trozos $\gamma : [0, t] \longrightarrow M$ con $\gamma(t) = x$.

Ya que L es periódico en el tiempo tenemos que

$$T^-_{t+1} = T^-_t \circ T^-_1,$$

luego $\{T^-_n\}_{n=0,\dots}$ es un semigrupo, llamado el **semigrupo de Lax-Oleinik**.

Es claro de la definición de solución KAM-débil y solución de viscosidad que son conceptos distintos y aparentemente ajenos; sin embargo, para el caso autónomo es bien sabido que existe una equivalencia entre estas soluciones. Nuestro objetivo es obtener hipótesis que nos permitan establecer la equivalencia para el caso no-autónomo.

El siguiente resultado es uno de los más importantes para establecer la equivalencia de las soluciones, de manera más precisa, nos ayuda a demostrar que una solución de viscosidad es una solución KAM-débil.

1.2.2 Teorema. *Supongamos que L es un lagrangiano que satisface las hipótesis* $(\mathbf{P1}) - (\mathbf{P4})$ *en una variedad compacta M. Si $u \in C^0(M, \mathbb{R})$ entonces la función continua $U : M \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$U(x, t) = T^-_t u(x),$$

es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$U_t(x, t) + H(x, d_x U(x, t), t) = 0,$$

sobre el conjunto abierto $M \times [0, \infty)$ donde H es el hamiltoniano asociado a L.

Demostración. Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$. Notamos que

$$T_b^-(u) = T_{b-a}^-\left[T_a^-(u)\right],$$

luego si consideramos $\gamma(a) \in M$ tenemos

$$T_b^-(\gamma(a)) = T_{b-a}^-\left[T_a^-(\gamma(a))\right] \leq T_a^-(\gamma(a)) + \int_a^b L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)\ ds,$$

despejando

$$\begin{aligned} U(\gamma(b),b) - U(\gamma(a),a) &= T_b^-(\gamma(a)) - T_a^-(\gamma(a)) \\ &\leq \int_a^b L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)\ ds. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Mostramos ahora que U es una solución de viscosidad, para ello vemos primero que es una subsolución de viscosidad.

Sea ϕ una función de clase C^1 tal que $U - \phi$ tiene un máximo local en (x_0, t_0), es decir, que para todo $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$ se tiene que

$$\phi(x_0,t_0) - \phi(x,t) \leq U(x_0,t_0) - U(x,t), \tag{1.15}$$

donde $t_0 > 0$.

Sea $v \in T_{x_0}M$ y una curva C^1 $\gamma : [0,t_0] \longrightarrow M$ tal que $\gamma(t_0) = x_0$ y $\dot{\gamma}(t_0) = v$. Si $0 \leq t \leq t_0$, por (1.14) tenemos

$$U(\gamma(t_0),t_0) - U(\gamma(t),t) \leq \int_t^{t_0} L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)\ ds. \tag{1.16}$$

Como $\gamma(t_0) = x_0$, de (1.15) y (1.16) se sigue que

$$\phi(\gamma(t_0),t_0) - \phi(\gamma(t),t) \leq \int_t^{t_0} L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)\ ds,$$

para toda $t \in (0,t_0)$. Notamos que $-(t-t_0) > 0$, así

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\phi(\gamma(t),t) - \phi(\gamma(t_0),t_0)}{t - t_0} \leq \lim_{t \longrightarrow t_0} \int_t^{t_0} \frac{L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)ds}{-(t-t_0)}$$

obtenemos

$$\phi_t(x_0,t_0) + d_x\phi(x_0,t_0)\cdot v \leq L(x_0,v,t),$$

para toda $v \in T_{x_0}M$. Luego por la desigualdad de Fenchel (1.4)

$$\begin{aligned}\phi_t(x_0,t_0) + H(x_0, d_x\phi(x_0,t_0),t) &\leq \phi_t(x_0,t_0) + d_x\phi(x_0,t_0)\cdot v - L(x_0,v,t)\\ &\leq 0\end{aligned}$$

con lo que U es una subsolución de viscosidad.

Veamos que U es supersolución de viscosidad. Sea ψ una función de clase C^1 tal que $U-\psi$ tiene un mínimo local en (x_0,t_0), es decir, para todo $(x,t)\in M\times\mathbb{R}$ se tiene que

$$\psi(x_0,t_0) - \psi(x,t) \geq U(x_0,t_0) - U(x,t). \tag{1.17}$$

Sean $\gamma : [0,t_0] \longrightarrow M$ una curva C^1 tal que $\gamma(t_0) = x_0$ y

$$U(x_0,t_0) = T^-_{t_0}(x_0) = u(\gamma(0)) + \int_0^{t_0} L(\gamma(s),\dot\gamma(s),s)ds. \tag{1.18}$$

Notamos que

$$U(\gamma(0),0) = u(\gamma(0)) \tag{1.19}$$

luego, restando (1.19) de (1.18), tenemos

$$U(x_0,t_0) - U(\gamma(0),0) = \int_0^{t_0} L(\gamma(s),\dot\gamma(s),s)ds. \tag{1.20}$$

Por otro lado, de (1.14) se satisface que

$$U(x_0,t_0) - U(\gamma(t),t) \leq \int_t^{t_0} L(\gamma(s)\dot\gamma(s),s)ds \tag{1.21}$$

y

$$U(\gamma(t),t) - U(\gamma(0),0) \leq \int_0^{t} L(\gamma(s)\dot\gamma(s),s)ds$$

o equivalentemente

$$U(\gamma(0),0) - U(\gamma(t),t) \geq \int_t^0 L(\gamma(s)\dot{\gamma}(s),s)ds, \tag{1.22}$$

sumando (1.20) y (1.22) tenemos

$$U(x_0,t_0) - U(\gamma(t),t) \geq \int_t^{t_0} L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)ds. \tag{1.23}$$

Ahora bien, de (1.21) y (1.23) y del hecho que $\gamma(t_0) = x_0$ se sigue

$$U(\gamma(t_0),t_0) - U(\gamma(t),t) = \int_t^{t_0} L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)ds, \tag{1.24}$$

para toda $t \in [0,t_0]$.

Ya que (1.17) se satisface y de (1.24) tenemos que

$$\psi(\gamma(t_0),t_0) - \psi(\gamma(t),t) \geq \int_t^{t_0} L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)ds.$$

Como $-(t-t_0) > 0$, luego

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\psi(\gamma(t),t) - \psi(\gamma(t_0),t_0)}{t-t_0} \geq \lim_{t \longrightarrow t_0} \int_t^{t_0} \frac{L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)ds}{-(t-t_0)}$$

obtenemos

$$\psi_t(x_0,t_0) + d_x\psi(x_0,t_0)\cdot(\dot{\gamma}(t_0)) \geq L(x_0,\dot{\gamma}(t_0),t),$$

y por la desigualdad de Fenchel (1.4)

$$\begin{aligned}\psi_t(x_0,t_0) + H(x_0,d_x\psi(x_0,t_0),t) &\geq \psi_t(x_0,t_0) + d_x\psi(x_0,t_0)\cdot(\dot{\gamma}(t_0)) - L(x_0,\dot{\gamma}(t_0),t)\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

con lo que U es supersolución de viscosidad.

Con todo se sigue que U es una solución de viscosidad. □

Gracias a este resultado podemos trabajar con el semigrupo de Lax-Oleinik para estudiar algunas propiedades que cumplen las soluciones de viscosidad.

Capítulo 2

Propiedades de las soluciones KAM-débiles

En este capítulo vamos a estudiar algunas propiedades de las soluciones KAM-débiles. Mostramos que las soluciones KAM-débiles son funciones Lipschitz y que satisfacen la ecuación de Hamilton-Jacobi. Presentamos además una relación entre la barrera extendida de Peierls con las soluciones KAM-débiles. Los resultados enunciados en este capítulo pueden ser consultados en [3].

La importancia de las soluciones KAM-débiles es que poseen diversas propiedades, una de estas es que es Lipschitz, con la cual garantizamos que la solución KAM-débil es diferenciable en casi todo punto, debido al teorema de Rademacher.

2.0.1 Proposición. *Si $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución KAM-débil entonces es Lipschitz. Más aún la constante de Lipschitz no depende de u, es* *decir, u es equilipschitz.*

Demostración. Del teorema de Weierstrass, el cual enuncia que para cualquier constante c existe ε tal que si $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ y $d(w, x) < c(t - t_0)$ entonces existe una curva $\alpha : [t_0, t] \longrightarrow M$ estrictamente minimizante de la acción con

$$\alpha(t_0) = w \ \text{ y } \ \alpha(t) = x.$$

Más aún α es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange.

Sea ε la longitud del intervalo $c = 2A$, donde A es la cota dada por el Lema de Mather 1.0.6 y definamos δ como $4A\delta = \varepsilon$.

Supongamos que $u \in \mathcal{S}^-$. Sean $(x, [t_0]), (y, [s_0])$ en $M \times \mathbb{S}^1$ puntos cercanos tales que $|s_0 - t_0| < \delta/4$ y $d(x, y) < \varepsilon/10$. Sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ una geodésica minimizante que une a x con y y sea $\tau(r) = t_0 + r(s_0 - t_0)$ con $r \in [0, 1]$. Consideramos también $z : [t_0 - \delta, t_0] \longrightarrow M$ tal que

$$u(x, [t_0]) = u(z(t), [t]) + \int_t^{t_0} L(z, \dot{z}, t) + c \; dt,$$

notamos que en particular para $t_0 - \delta$ tenemos

$$u(x, [t_0]) = u(z(t_0 - \delta), [t_0 - \delta]) + \int_{t_0 - \delta}^{t_0} L(z, \dot{z}, t) + c \; dt. \tag{2.1}$$

Para $r \in [0, 1]$, sea $\eta(r, t)$ con $t \in [t_0 - \delta, \tau(r)]$, la minimizante de la acción tal que $\eta(r, t_0 - \delta) = z(t_0 - \delta)$ y $\eta(r, \tau(r)) = \gamma(r)$.

Gracias al teorema de Weierstrass y de la elección de las constantes, $\eta(r, t)$ está bien definida, además al ser η minimizante de la acción se sigue que es C^∞. Como u es solución KAM-débil está dominada por $L + c$ entonces

$$u(\gamma(r), [\tau(r)]) \leq u(z(t_0 - \delta), [t_0 - \delta]) + \int_{t_0 - \delta}^{\tau(r)} L\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right) + c \; dt. \tag{2.2}$$

cuando $r = 0$, (2.2) toma la forma

$$u(\gamma(0), [t_0]) = u(z(t_0 - \delta), [t_0 - \delta]) + \int_{t_0-\delta}^{t_0} L\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right) + c\ dt. \tag{2.3}$$

Restando (2.1) de (2.3) obtenemos

$$u(\gamma(0), [t_0]) - u(x, [t_0]) \leq \int_{t_0-\delta}^{t_0} L\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right) + c\ dt - \int_{t_0-\delta}^{t_0} L(z, \dot{z}, t) + c\ dt, \tag{2.4}$$

notamos que la ecuación (2.4) es válida si $s_0 \leq t_0$ o $t_0 \leq s_0$.

Si nos fijamos en el lado derecho de la ecuación (2.4) podemos ver que

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0} L\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right) + c\ dt - \int_{t_0-\delta}^{t_0} L(z, \dot{z}, t) + c\ dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0} L\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right) + c\ dt \tag{2.5}$$

debido a que $\eta(r, t_0 - \delta) = z(t_0 - \delta)$.

Derivando la ecuación (2.5) e integrando por partes, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\int_{t_0-\delta}^{t_0} L\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right) + c\ dt \\
&= \left[L\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right)\Big|_{(r,\tau(r))} + c\right](s_0 - t_0) + \int_{t_0-\delta}^{t_0} L_x \frac{\partial \eta}{\partial r} + L_v \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial r}\ dt \\
&= \left[L\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right)\Big|_{(r,\tau(r))} + c\right](s_0 - t_0) + \frac{\partial L}{\partial v}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right)\Big|_{(r,\tau(r))} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial r}\Big|_{(r,\tau(r))} dt.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Como η es minimizante de la acción entonces por el Lema de Mather 1.0.6 se sigue que $\left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}(\cdot, t)\right\|$ son uniformemente acotadas por una constante M, cabe mencionar que la condición de que el tiempo sea mayor que 1 puede ser reemplazada al pedir que la longitud del intervalo sea mayor que $9\delta/10$.

Con todo, existe una constante uniforme $K_1 > 0$ tal que

$$\left|L\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right) + c\right| \leq K_1 \quad \text{y} \quad \left\|\frac{\partial L}{\partial v}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right)\right\| < K_1. \tag{2.7}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\frac{d}{dr}\eta\Big|_{(r,\tau(r))} = \frac{\partial\eta}{\partial r} + \frac{\partial\eta}{\partial t}(s_0 - t_0) = \dot{\gamma}(r),$$

luego

$$\left\|\frac{\partial\eta}{\partial r}\right\| \leq \left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\||s_0 - t_0| + \left\|\dot{\gamma}(r)\right\|. \tag{2.8}$$

Tomando lado derecho de la ecuación (2.6), de las ecuaciones (2.7) y (2.8) tenemos

$$\begin{aligned}&\left[L\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}, t\right)\Big|_{(r,\tau(r))} + c\right](s_0 - t_0) + \frac{\partial L}{\partial v}\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}, t\right)\Big|_{(r,\tau(r))} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial r}\Big|_{(r,\tau(r))}\\ &\leq K_1|s_0 - t_0| + K_1\Big[M|s_0 - t_0| + \Big] + \left\|\dot{\gamma}(r)\right\|.\end{aligned} \tag{2.9}$$

De la ecuación (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\left[\int_{t_0-\delta}^{t_0} L\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}, t\right) + c\ dt - \int_{t_0-\delta}^{t_0} L(z, \dot{z}, t) + c\ dt\right]\\ &= \frac{d}{dr}\left[\int_{t_0-\delta}^{t_0} L\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}, t\right) + c\ dt\right]\\ &\underbrace{=}_{(2.6)} \left[L\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}, t\right)\Big|_{(r,\tau(r))} + c\right](s_0 - t_0) + \frac{\partial L}{\partial v}\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}, t\right)\Big|_{(r,\tau(r))} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial r}\Big|_{(r,\tau(r))}\\ &\underbrace{\leq}_{(2.9)} K_1|s_0 - t_0| + K_1\Big[M|s_0 - t_0| + \Big] + \left\|\dot{\gamma}(r)\right\|,\end{aligned}$$

así

$$\frac{d}{dr}\left[\int_{t_0-\delta}^{t_0} (L + c)\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}, t\right)\ dt\right] \leq K_1|s_0 - t_0| + K_1\Big[M|s_0 - t_0| + \Big] + \left\|\dot{\gamma}(r)\right\|, \tag{2.10}$$

tomando la integral de 0 a 1 de (2.10) obtenemos

$$\begin{aligned}u(y, [s_0]) - u(x, [t_0]) &\leq K_1|s_0 - t_0| + K_1M|s_0 - t_0| + K_1 d(x, y)\\ &\leq K\big(|s_0 - t_0| + d(x, y)\big)\end{aligned}$$

para K uniforme.

Intercambiando los papeles de $(x, [t_0])$ y $(y, [s_0])$ obtenemos finalmente que u es Lipschitz. $\square$

De este resultado obtenemos que las soluciones KAM-débiles son diferenciables en casi todo punto. Ahora vamos a demostrar una propiedad sobre funciones dominadas que son diferenciables.

2.0.2 Lema. *Sea $k \geq c$. Si $f : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $(x, [t])$ de $M \times \mathbb{S}^1$ y f satisface*

$$f(y, [t_2]) - f(x, [t_1]) \leq \Phi_k((x, [t_1]), (y, [t_2]))$$

para toda y en una vecindad de x entonces

$$f_t + H(x, d_x f, t) \leq k.$$

Demostración. Sea γ una curva diferenciable en M con $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) = (x, v, [t])$. Por hipótesis

$$f(\gamma(t), [t]) - f(x, [t_1]) \leq \int_{t_1}^{t} (L + k)(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s) \; ds,$$

luego dividiendo entre $t - t_1$ y tomando límite cuando t tiende a t_1 tenemos

$$\lim_{t \longrightarrow t_1} \frac{f(\gamma(t), [t]) - f(x, [t_1])}{t - t_1} \leq \lim_{t \longrightarrow t_1} \int_{t_1}^{t} \frac{(L + k)(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s)}{t - t_1} \; ds,$$

tomando en cuenta que $\gamma(t) = x$ y $\dot{\gamma}(t) = v$

$$d_x f(x, [t_1]) \cdot v + f_t(x, [t_1]) \leq L(x, v, t) + k \tag{2.11}$$

para toda $v \in T_x M$.

Por la definición del hamiltoniano (1.3), sustituyendo en (2.11) tenemos que

$$H(x, d_x f, t) + f_t \leq k. \tag{2.12}$$

□

La siguiente afirmación nos garantiza que una solución KAM-débil diferenciable satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi.

2.0.3 Teorema. *Si $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución KAM-débil entonces u es Lipschitz y satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = c$$

en cualquier punto de diferenciabilidad. Más aún $d_x u$ y $\dot{\gamma}$ son Legendre conjugados (ver Definición A.0.11).

Demostración. Al ser u una solución KAM-débil, por el Lema 2.0.1 tenemos que u es Lipschitz y por lo tanto u es diferenciable en casi todo punto. Sea $(x,[t])$ un punto de diferenciabilidad.

De la condición de dominación, por el Lema 2.0.2 tenemos que

$$u_t + H(x, d_x u, t) \leq c. \tag{2.13}$$

Sea $\gamma : [t, \infty) \longrightarrow M$ tal que

$$u(\gamma(s),[s]) - u(x,[t]) = \int_t^s (L+c)(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s)\ ds,$$

dividiendo ente $s-t$ y tomando límite cuando s tiende a t tenemos

$$\lim_{s \longrightarrow t} \frac{u(\gamma(s),[s]) - u(x,[t])}{s-t} \leq \lim_{s \longrightarrow t} \int_t^s \frac{(L+c)(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s)}{s-t}\ ds,$$

por lo tanto

$$d_x u(x,[t])\dot{\gamma} + u_t(x,[t]) = L(x, \dot{\gamma}, t) + c$$

luego de (2.13) y la desigualdad de Fenchel (1.4),

$$c = d_x u(x,[t])\dot{\gamma} - L(x,\dot{\gamma},t) + u_t(x,[t]) \leq H(x,d_x u,t) + u_t(x,[t]) \leq c$$

por lo tanto

$$H(x,d_x u,t) + u_t(x,[t]) = c$$

es decir, u satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi en $(x,[t])$ y $d_x u$ y $\dot{\gamma}$ están relacionadas por la transformada de Legendre de L. $\square$

La siguiente propiedad nos dice que la barrera de Peierls define soluciones KAM-débiles.

2.0.4 Proposición. *Dado $(z,[\tau])$ en $M \times \mathbb{S}^1$ definamos*

$$u(x,[t]) = h_c((z,[\tau]),(x,[t]))$$
$$v(x,[t]) = -h_c((x,[t]),(z,[\tau]))$$

entonces $u \in \mathcal{S}^-$ y $v \in \mathcal{S}^+$.

Demostración. Vamos a demostrar que $u \in \mathcal{S}^-$.
Por el inciso *(d)* de la Proposición 1.1.3 tenemos que

$$h_c((z,[\tau]),(x,[t])) - h_c((z,[\tau]),(y,[s])) \leq \Phi_c((y,[s]),(x,[t]))$$

para toda $(y,[s]),(x,[t]) \in M \times \mathbb{S}^1$, luego de la definición de u y la desigualdad dada en el inciso *(d)* de la Proposición 1.1.3, tenemos

$$u(x,[t]) - u(y,[s]) \leq \Phi_c((y,[s]),(x,[t])),$$

con lo u está dominada por $L + c$.
Por otro lado, sea $(x,[t])$ en $M \times \mathbb{S}^1$ y sean n_k una sucesión tal que n_k tiende

a infinito, $n_k \in \mathbb{Z}$ y $(x, v_k) \in T_xM$ tal que

$$h_c((z,[\tau]),(x,[t])) = \lim_k A_{L+c}\left(\gamma_k\Big|_{[\tau-n_k,t]}\right),$$

donde

$$\gamma_k(s) = \pi \circ \phi_{s-t}(x, v_k, t), \tag{2.14}$$

es la solución de la ecuación de Euler-Lagrange tal que

$$(\gamma_k(t), \dot{\gamma}_k(t)) = (x, v_k).$$

Por el Lema de Mather 1.0.6, sabemos que $\|v_k\|$ es uniformemente acotada, así existe una subsucesión convergente v_k que converge a w.

Definamos

$$\eta(s) = \pi \circ \phi_{s-t}(x, w, t),$$

por lo que para $s < 0$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
h_c((z,[\tau]),(x,[t])) &= \lim_k \left[A_{L+c}\left(\gamma_k\Big|_{[\tau-n_k,s]}\right) + A_{L+c}\left(\gamma_k\Big|_{[s,t]}\right)\right] \\
&\leq \lim_k \left[h_c((z,[\tau]),(\gamma_k(s),[s])\right] + A_{L+c}\left(\gamma_k\Big|_{[s,t]}\right) \\
&= h_c((z,[\tau]),(\eta(s),[s])) + A_{L+c}\left(\eta\Big|_{[s,t]}\right) \\
&\leq h_c((z,[\tau]),(x,[t]))
\end{aligned}$$

en particular

$$h_c((z,[\tau]),(x,[t])) = h_c((z,[\tau]),(\eta(s),[s])) + A_{L+c}\left(\eta\Big|_{[s,t]}\right)$$

y de la definición de u tenemos

$$u(x,[t]) - u(\eta(s),[s]) = A_{L+c}\left(\eta\Big|_{[s,t]}\right)$$

para $s < 0$, así η es una curva $(u, L, c)-$calibrada.

Con todo u es una solución KAM-débil de tipo negativo. Demostrar que v es una solución KAM-débil de tipo positivo es análogo. $\square$

Se sigue de la proposición anterior que h_c es Lipschitz.

2.0.5 Corolario. h_c *es Lipschitz.*

Demostración. Definamos las funciones $f, g : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f((y,[t])) = h_c((x,[s]),(y,[t]))$$
$$g((x,[s])) = h_c((x,[s]),(y,[t])).$$

las cuales son soluciones KAM-débiles gracias al Lema 2.0.4 y por el Teorema 2.0.3 tenemos que f y g son Lipschitz, así h_c es Lipschitz.

$\square$

En resumen, mostramos que las soluciones KAM-débiles son funciones Lipschitz y por lo tanto son diferenciables en casi todo punto y que en cada punto de diferenciabilidad se satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi, más aún la barrera extendida de Peierls ayuda a definir soluciones KAM-débiles.

Capítulo 3

Propiedades de las soluciones de viscosidad

En este capítulo estudiamos algunas propiedades de las soluciones de viscosidad. Enunciamos el principio del máximo, posteriormente demostramos la unicidad de las soluciones de viscosidad en $\mathbb{R}^k \times [t_0, t_1)$. Finalmente extendemos este resultado y demostramos la unicidad en $M \times \mathbb{S}^1$. Los resultados enunciados en este capítulo pueden ser consultados en [8].

Sean $Q = O \times [t_0, t_1)$, donde O es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$ y

$$\partial^* Q = (\partial O \times [t_0, t_1)) \cup (O \times \{t_1\})$$

la frontera parabólica de la región cilíndrica de Q. Para $(x, t) \in Q$ sea la ecuación

$$-u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = 0. \tag{3.1}$$

Vamos a suponer que H satisface la siguiente hipótesis:

(P5) Existe una constante K y $h \in C([0,\infty))$ con $h(0) = 0$, tal que para todo $(x,t),(y,s) \in \bar{Q}$ y $p, \bar{p} \in \mathbb{R}^k$, se satisface

$$|H(x,p,t) - H(y,\bar{p},t)| \leq h\Big(|t-s| + |x-y|\Big) + h\Big(|t-s|\Big)|p| + K|x-y||p| + K|p-\bar{p}|. \tag{3.2}$$

Para demostrar la unicidad de las soluciones de viscosidad, es necesario demostrar el principio del máximo.

3.0.1 Teorema (Principio del máximo). *Sean u y v subsolución y supersolución de viscosidad de* (3.1) *en Q, respectivamente. Si Q no está acotada y suponemos que u y v están acotadas y son uniformemente continuas en $\bar{Q}$ entonces*

$$\sup_{\bar{Q}}[u-v] = \sup_{\partial^* Q}[u-v]. \tag{3.3}$$

Demostración. Consideramos la ecuación

$$-v_t(x,t) + H(dv(x,t)) = 0, \quad (x,t) \in Q.$$

Supongamos que Q está acotado y que

$$u(x,t) \leq v(x,t),$$

para todo $(x,t) \in \partial^* Q$. Vamos a demostrar primero que $u \leq v$ en $\bar{Q}$.

Definamos la función $\psi : \bar{Q} \times \bar{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\psi(x,t;y,s) = u(x,t) - v(y,s) - \frac{1}{2\varepsilon}\left(|t-s|^2 + |x-y|^2\right) + \beta(s-t_1) \tag{3.4}$$

para todo $(x,t),(y,s)\in\bar{Q}$ y $\beta,\varepsilon>0$.

Como $\bar{Q}=[t_0,t_1]\times\bar{O}$ es compacto y ψ es una función continua entonces alcanza su máximo. Consideramos $(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})\in\bar{Q}\times\bar{Q}$ el máximo de ψ, es decir

$$\psi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})=\max_{\bar{Q}\times\bar{Q}}\psi(x,t;y,s),$$

luego

$$\psi(x,t;x,t)\leq\psi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}),$$

para todo $(x,t)\in\bar{Q}$, o equivalentemente

$$u(x,t)-v(x,t)\leq\psi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})+\beta(t_1-t),$$

por lo tanto, para mostrar que $u\leq v$ en $\bar{Q}$, es suficiente que

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\psi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})\leq 0,$$

para toda $\beta>0$, esto ya que podemos hacer tender β a cero.
Primero supongamos que $(\bar{x},\bar{t}),(\bar{y},\bar{s})\in Q$ y sea la aplicación

$$\star:(x,t)\longmapsto\psi(x,t;\bar{y},\bar{s}).$$

Como $(\bar{x},\bar{t})\in Q$, si evaluamos tenemos $\star(\bar{x},\bar{t})=\psi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})$, entonces $\star$ tiene un máximo en el punto $(\bar{x},\bar{t})$.
Sea

$$w(x,t)=\frac{1}{2\varepsilon}[|t-\bar{s}|^2+|x-\bar{y}|^2],\quad(x,t)\in\bar{Q},$$

entonces $u-w$ tiene un máximo en $(\bar{x},\bar{t})\in Q$ y como u es una subsolución de viscosidad tenemos que

$$-w_t(\bar{x},\bar{t})+H(d_xw(\bar{x},\bar{t}))\leq 0.$$

Si $q_\varepsilon = w_t(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{t}-\bar{s})$ y $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{x}-\bar{y})$, reescribiendo la desigualdad anterior obtenemos

$$-q_\varepsilon + H(p_\varepsilon) \leq 0. \tag{3.5}$$

De manera similar, definamos la función

$$\clubsuit : (y,s) \longmapsto -\psi(\bar{x},\bar{t};y,s),$$

donde

$$\psi(\bar{x},\bar{t};y,s) = v(y,s) - \left[-\frac{1}{2\varepsilon}\left(|\bar{t}-s|^2 + |\bar{x}-y|^2\right) + \beta(s-t_1) + u(\bar{x},\bar{t})\right].$$

Tomando

$$\tilde{w}(y,s) = -\frac{1}{2\varepsilon}\left(|\bar{t}-s|^2 + |\bar{x}-y|^2\right) + \beta(s-t_1) \quad (y,s) \in \bar{Q},$$

tenemos que $v - \tilde{w}$ tiene un mínimo en $(\bar{y},\bar{s})$. Ya que v es supersolución de viscosidad tenemos que

$$-\tilde{w}_s(\bar{y},\bar{s}) + H(d_y\tilde{w}(\bar{y},\bar{s})) \geq 0.$$

Reescribiendo la ecuación anterior tenemos que

$$\tilde{w}_s(\bar{y},\bar{s}) = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{t}-\bar{s}) + \beta = q_\varepsilon + \beta \quad \text{ y } \quad d_y\tilde{w}(\bar{y},\bar{s}) = p_\varepsilon$$

así

$$-\beta - q_\varepsilon + H(p_\varepsilon) \geq 0. \tag{3.6}$$

De (3.5) y (3.6) tenemos que

$$q_\varepsilon - H(p_\varepsilon) \geq 0,$$
$$-\beta - q_\varepsilon + H(p_\varepsilon) \geq 0,$$

luego sumando estas dos desigualdades tenemos que $\beta \leq 0$.
Por lo tanto si $(\bar{x}, \bar{t})$ y $(\bar{y}, \bar{s})$ pertenecen a Q, entonces $\beta \leq 0$, lo cual es una contradicción pues $\beta > 0$. Por lo tanto $(\bar{x}, \bar{t})$ o $(\bar{y}, \bar{s})$ pertenecen a $\partial^* Q$.

Ahora bien, veamos que sucede con el límite superior de $\psi(\bar{x}, \bar{t}; \bar{y}, \bar{s})$ cuando ε tiende a 0. Afirmamos que $|\bar{t} - \bar{s}|, |\bar{x} - \bar{y}|$ tienden a cero. En efecto, como u y v están acotados, entonces

$$|\bar{t} - \bar{s}|, |\bar{x} - \bar{y}| = O(\varepsilon).$$

Si consideramos $|t - \bar{s}|, |x - \bar{y}|$, del hecho que u y v son acotados tenemos que existe una constante c tal que a partir de los valores $\bar{t}$ y $\bar{x}$ respectivamente tenemos que

$$|\bar{t} - \bar{s}|, |\bar{x} - \bar{y}| \leq c\varepsilon,$$

luego tomando el límite cuando ε tiende a cero obtenemos lo deseado.

Ya que u y v son continuas y $u \leq v$ en $\partial^* Q$, es claro que

$$u(\bar{x}, \bar{t}) \leq v(\bar{x}, \bar{t}),$$
$$u(\bar{y}, \bar{s}) \leq v(\bar{y}, \bar{s}),$$

para $(\bar{x}, \bar{t}), (\bar{y}, \bar{s})$ en $\partial^* Q$, más aún, tenemos que $u(\bar{x}, \bar{t}) \leq v(\bar{y}, \bar{s})$, esto ya que u y v son subsolución y supersolución de viscosidad respectivamente.

Así $u(\bar{x}, \bar{t}) - v(\bar{y}, \bar{s}) \leq 0$. Por último si hacemos β tender a cero tenemos que

$$\limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} \psi(\bar{x}, \bar{t}; \bar{y}, \bar{s}) \leq 0,$$

para toda $\beta > 0$. Por lo tanto $u \leq v$ en $\bar{Q}$.

Veamos que pasa en el caso en el que $\bar{Q}$ es acotado.

Trabajemos ahora con la ecuación

$$-v_t(x,t) + H(x, d_x v(x,t), t) = 0. \tag{3.7}$$

Definamos

$$\Phi(x,t;y,s) = u(x,t) - v(y,s) - \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 - \frac{1}{2\delta}|t-s|^2 + \beta(s-t_1), \quad (x,t),(y,s) \in \bar{Q}, \tag{3.8}$$

con $\varepsilon, \delta, \beta > 0$ suficientemente pequeños. Ya que $\bar{Q}$ es compacto y Φ es una función continua, entonces admite un máximo en $\bar{Q} \times \bar{Q}$. Sea $(\bar{x}, \bar{t}; \bar{y}, \bar{s}) \in \bar{Q} \times \bar{Q}$ el máximo de Φ, es decir

$$\Phi(\bar{x}, \bar{t}; \bar{y}, \bar{s}) = \max_{\bar{Q} \times \bar{Q}} \Phi(x,t;y,s).$$

Para $\rho \geq 0$, definamos el conjunto

$$D_\rho = \{((x,t),(y,s)) \in \bar{Q} \times \bar{Q} : |t-s|^2 + |x-y|^2 \leq \rho\}, \tag{3.9}$$

y las cantidades

$$\begin{aligned} m_u(\rho) &= 2 \sup \left\{ \left| u(x,t) - u(y,s) \right| : ((x,t),(y,s)) \in D_\rho \right\}, \\ m_v(\rho) &= 2 \sup \left\{ \left| v(x,t) - v(y,s) \right| : ((x,t),(y,s)) \in D_\rho \right\}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

y

$$K_1 = \sup\{m_u(\rho) : \rho \geq 0\}.$$

Ya que u y v son funciones continuas sobre el conjunto compacto $\bar{Q}$ entonces u y v son uniformemente continuas en $\bar{Q}$. Por lo tanto $m_u, m_v \in C([0,\infty))$ con $m_u(0) = m_v(0) = 0$.

Afirmamos que

$$|\bar{t}-\bar{s}| \leq \sqrt{K_1\delta}, \tag{3.11}$$

y

$$|\bar{x}-\bar{y}| \leq \sqrt{\varepsilon m_u(K_1(\varepsilon+\delta))}. \tag{3.12}$$

En efecto, como Φ tiene un máximo en el punto $(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})$ tenemos que

$$\Phi(\bar{y},\bar{s};\bar{y},\bar{s}) \leq \Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}),$$

luego de (3.8), obtenemos

$$u(\bar{y},\bar{s}) \leq u(\bar{x},\bar{t}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 - \frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2,$$

así

$$\frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 + \frac{1}{\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 \leq 2\Big(u(\bar{x},\bar{t}) - u(\bar{y},\bar{s})\Big).$$

Ahora bien, si $\rho = |\bar{t}-\bar{s}|^2 + |\bar{x}-\bar{y}|^2$, luego

$$\begin{aligned} D_\rho &= \{((\bar{x},\bar{t}),(\bar{y},\bar{s})) \in \bar{Q}\times\bar{Q} : |\bar{t}-\bar{s}|^2 + |\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq |\bar{t}-\bar{s}|^2 + |\bar{x}-\bar{y}|^2\}, \\ m_u(|\bar{t}-\bar{s}|^2 + |\bar{x}-\bar{y}|^2) &= 2\sup\left\{\left|u(\bar{x},\bar{t}) - u(\bar{y},\bar{s})\right| : ((\bar{x},\bar{t}),(\bar{y},\bar{s})) \in D_\rho\right\}, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 + \frac{1}{\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 &\leq 2\Big(u(\bar{x},\bar{t}) - u(\bar{y},\bar{s})\Big) \\ &\leq m_u\Big(|\bar{t}-\bar{s}|^2 + |\bar{x}-\bar{y}|^2\Big). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Como $K_1 = \sup\{m_u(\rho) : \rho \geq 0\}$ entonces $m_u(\cdot)$ está acotado superiormente por K_1, de (3.13) tenemos que

$$\frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 + \frac{1}{\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 \leq K_1,$$

así

$$|\bar{t}-\bar{s}|^2 \leq K_1\delta \quad \text{y} \quad |\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq K_1\varepsilon \tag{3.14}$$

por lo tanto

$$|\bar{t}-\bar{s}| \leq \sqrt{K_1\delta}.$$

De (3.13) tenemos que

$$\frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq m_u\Big(|\bar{t}-\bar{s}|^2+|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big), \tag{3.15}$$

luego de (3.14) y de la monotonia de m_u obtenemos

$$m_u\Big(|\bar{t}-\bar{s}|^2+|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big) \leq m_u(K_1(\varepsilon+\delta)) \tag{3.16}$$

así de (3.15) y (3.16)

$$|\bar{x}-\bar{y}| \leq \sqrt{\varepsilon m_u(K_1(\varepsilon+\delta))}.$$

Supongamos que $(\bar{x},\bar{t}) \in \partial^* Q$. Como Φ tiene un punto máximo en $(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})$ tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(x,t;y,s) &\leq \Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})\\ &= u(\bar{x},\bar{t})-v(\bar{y},\bar{s})-\frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2-\frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2+\beta(\bar{s}-t_1)\\ &\leq v(\bar{x},\bar{t})-v(\bar{y},\bar{s})-\frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2-\frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2+\beta(\bar{s}-t_1)\\ &+\sup_{\partial^* Q}[u-v]\\ &\leq \frac{1}{2}m_v\Big(|\bar{t}-\bar{s}|^2+|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big)-\frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2-\frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2+\beta(\bar{s}-t_1)\\ &+\sup_{\partial^* Q}[u-v]\\ &\leq \frac{1}{2}m_v(K_1(\varepsilon+\delta))-\frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2-\frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2+\beta(\bar{s}-t_1)\\ &+\sup_{\partial^* Q}[u-v].\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ahora supongamos que $(\bar{y},\bar{s}) \in \partial^* Q$. Procediendo del mismo modo que en (3.17), de (3.11) y (3.12) tenemos que

$$\Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) \leq \frac{1}{2}m_u(K_1(\varepsilon+\delta)) - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 - \frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 + \beta(\bar{s}-t_1) + \sup_{\partial^* Q}[u-v]. \tag{3.18}$$

Supongamos que $(\bar{x},\bar{t}),(\bar{y},\bar{s}) \in Q$ y sea

$$w(x,t) = \frac{1}{2\delta}|t-\bar{s}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|x-\bar{y}|^2, \quad (x,t) \in \bar{Q}$$

entonces $u-w$ tiene un punto máximo en $(\bar{x},\bar{t})$, así $(\bar{x},\bar{t}) \in \arg\max\{u(x,t)-w(x,t) : (x,t) \in \bar{Q}\}$ (ver Definición A.0.10). De la definición de subsolución de viscosidad

$$-w_t(\bar{x},\bar{t}) + H(\bar{x}, d_x w(\bar{x},\bar{t}), \bar{t}) \leq 0.$$

Si $q_\delta = w_t(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\delta}(\bar{t}-\bar{s})$ y $p_\varepsilon = d_x w(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{x}-\bar{y})$, reescribiendo la desigualdad anterior obtenemos

$$-q_\delta + H(\bar{x}, p_\varepsilon, \bar{t}) \leq 0. \tag{3.19}$$

Ahora consideramos la función

$$\tilde{w}(y,s) = -\frac{1}{2\delta}|\bar{t}-s|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-y|^2 + \beta(s-t_1), \quad (y,s) \in \bar{Q}$$

entonces $v-\tilde{w}$ tiene un punto mínimo en $(\bar{y},\bar{s})$, así $(\bar{y},\bar{s}) \in \arg\min\{v(y,s)-\tilde{w}(y,s) : (y,s) \in \bar{Q}\}$ (ver Definición A.0.10). De la definición de supersolución de viscosidad

$$-\tilde{w}_s(\bar{y},\bar{s}) + H(\bar{y}, d_y\tilde{w}(\bar{y},\bar{s}), \bar{s}) \geq 0,$$

reescribiendo esta ecuación tenemos

$$\beta + q_\delta - H(\bar{y}, p_\varepsilon, \bar{s}) \leq 0. \tag{3.20}$$

Sumando (3.19) y (3.20) tenemos

$$\beta \leq H(\bar{y}, p_\varepsilon, \bar{s}) - H(\bar{x}, p_\varepsilon, \bar{t}). \tag{3.21}$$

Por la hipótesis (3.2) y de la desigualdad (3.21) tenemos

$$\beta \leq h\Big(|\bar{t} - \bar{s}| + |\bar{x} - \bar{y}|\Big) + h\Big(|\bar{t} - \bar{s}|\Big)|p_\varepsilon| + K|\bar{x} - \bar{y}||p_\varepsilon|. \tag{3.22}$$

Ahora bien de (3.14)

$$|p_\varepsilon| = \frac{1}{\varepsilon}|\bar{x} - \bar{y}| \leq \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{K_1\varepsilon} = \sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon}}, \tag{3.23}$$

y de (3.12)

$$|\bar{x} - \bar{y}||p_\varepsilon| = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|^2}{\varepsilon} \leq m_u(K_1(\varepsilon + \delta)), \tag{3.24}$$

así (3.22) queda como sigue

$$\beta \leq h\left(\sqrt{K_1\varepsilon} + \sqrt{K_1\delta}\right) + h\left(\sqrt{K_1\delta}\right)\sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon}} + Km_u(K_1(\varepsilon + \delta)). \tag{3.25}$$

Definimos

$$k(\varepsilon, \delta) = h\left(\sqrt{K_1\varepsilon} + \sqrt{K_1\delta}\right) + h\left(\sqrt{K_1\delta}\right)\sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon}} + Km_u(K_1(\varepsilon + \delta)).$$

Notamos que $k(\varepsilon, \delta) \geq 0$, de lo contrario, si $k(\varepsilon, \delta) < 0$, entonces $\beta \leq 0$ lo cual es una contradicción, ya que $\beta > 0$. Además, como $h, m_u, m_v \in C([0, \infty])$ entonces

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \lim_{\delta \longrightarrow 0} k(\varepsilon, \delta) = 0.$$

De la definición de límite, para todo $\beta > 0$ existen $\varepsilon(\beta) > 0$ y $\delta(\varepsilon, \beta) > 0$ tales que, para toda ϵ y δ, si $\varepsilon < \varepsilon(\beta)$ y $\delta < \delta(\varepsilon, \beta)$, entonces $k(\varepsilon, \delta) < \beta$, lo que contradice (3.25), por lo tanto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \partial^* Q$ o $(\bar{y}, \bar{s}) \in \partial^* Q$ o ambos.

Notemos que, del hecho que u y v están acotados, entonces

$$|\bar{t}-\bar{s}|, |\bar{x}-\bar{y}| = O(\varepsilon),$$

por lo tanto $|\bar{t}-\bar{s}|$ y $|\bar{x}-\bar{y}|$ tienden a cero cuando δ y ε tienden a cero, respectivamente.

Considerando (3.17) y (3.18) obtenemos

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) \leq \sup_{\partial^* Q}[u-v],$$

para todo $\beta > 0$, luego tomando el límite cuando β tiende a cero obtenemos

$$\sup_{\bar{Q}}[u-v] \leq \sup_{\partial^* Q}[u-v]. \tag{3.26}$$

Ahora bien para cualesquiera $\varepsilon, \delta, \beta > 0$ y $(\bar{x},\bar{t}) \in \partial^* Q$ tenemos que

$$u(\bar{x},\bar{t}) - v(\bar{x},\bar{t}) + \beta(\bar{t}-t_1) = \Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{x},\bar{t}) \leq \Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}),$$

luego

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\left(u(\bar{x},\bar{t}) - v(\bar{x},\bar{t}) + \beta(\bar{t}-t_1)\right) \leq \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}),$$

así

$$\sup_{\partial^* Q}[u-v] + \beta(\bar{t}-t_1) \leq \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}),$$

tomando el límite cuando β tiende a cero obtenemos

$$\sup_{\partial^* Q}[u-v] \leq \sup_{\bar{Q}}[u-v]. \tag{3.27}$$

Por lo tanto de (3.26) y (3.27) se tiene la igualdad (3.3).

Veamos que pasa en el caso en el que $\bar{Q}$ es no acotado.

Ya que u y v son acotados, para todo $\gamma > 0$ existen $(x_\gamma, t_\gamma), (y_\gamma, s_\gamma) \in \bar{Q}$ que satisface

$$\Phi(x_\gamma, t_\gamma; y_\gamma, s_\gamma) \geq \sup_{\bar{Q}\times\bar{Q}} \Phi - \gamma. \tag{3.28}$$

Perturbando la función Φ

$$\Phi_\gamma(x, t; y, s) = \Phi(x, t; y, s) - \frac{\gamma}{2}\left[|t - t_\gamma|^2 + |s - s_\gamma|^2 + |x - x_\gamma|^2 + |y - y_\gamma|^2\right]$$

para $(x, t), (y, s) \in \bar{Q}$. Afirmamos que Φ_γ alcanza su punto máximo en $\bar{Q}\times\bar{Q}$, al cual denotamos $(\bar{x}, \bar{t}; \bar{y}, \bar{s})$.

Ahora, si $|t - t_\gamma|^2 + |s - s_\gamma|^2 + |x - x_\gamma|^2 + |y - y_\gamma|^2 > 2$ entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_\gamma(x, t; y, s) &= \Phi(x, t; y, s) - \frac{\gamma}{2}\left[|t - t_\gamma|^2 + |s - s_\gamma|^2 + |x - x_\gamma|^2 + |y - y_\gamma|^2\right] \\
&\leq \Phi(x, t; y, s) - \frac{\gamma}{2}(2) \\
&= \Phi(x, t; y, s) - \gamma \\
&\underbrace{\leq}_{(3.28)} \Phi(x_\gamma, t_\gamma; y_\gamma, s_\gamma) \\
&= \Phi_\gamma(x_\gamma, t_\gamma; y_\gamma, s_\gamma).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Si evaluamos la desigualdad anterior en el punto máximo $(\bar{x}, \bar{t}; \bar{y}, \bar{s})$, obtenemos que

$$|\bar{t} - t_\gamma|^2 + |\bar{s} - s_\gamma|^2 + |\bar{x} - x_\gamma|^2 + |\bar{y} - y_\gamma|^2 \leq 2 \tag{3.30}$$

pues de lo contrario, es decir, si $|\bar{t} - t_\gamma|^2 + |\bar{s} - s_\gamma|^2 + |\bar{x} - x_\gamma|^2 + |\bar{y} - y_\gamma|^2 > 2$

tenemos por (3.29) que

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) &= \Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) - \frac{\gamma}{2}\left[|\bar{t}-t_\gamma|^2 + |\bar{s}-s_\gamma|^2 + |\bar{x}-x_\gamma|^2 + |\bar{y}-y_\gamma|^2\right] \\ &\leq \Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) - \frac{\gamma}{2}(2) \\ &\leq \Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) - \gamma. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Lo que contradice el hecho que $(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})$ es un punto máximo de Φ_γ.

Vamos a considerar m_u, m_v y K_1 como en (3.10). Además recordamos que u y v son funciones acotadas y uniformemente continuas sobre $\bar{Q}$, K_1 es finito y $m_u, m_v \in C([0,\infty))$ con $m_u(0) = m_v(0) = 0$.

Notamos que de (3.30)

$$|\bar{t}-t_\gamma|^2, |\bar{s}-s_\gamma|^2, |\bar{x}-x_\gamma|^2, |\bar{y}-y_\gamma|^2 \leq 2.$$

Para continuar con la demostración damos la siguiente afirmación.

3.0.2 Afirmación. *Para* $\gamma \leq \frac{1}{2}, \delta \leq \frac{1}{2}$ *y* $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$,

$$|\bar{t}-\bar{s}| \leq \sqrt{2(K_1+1)\delta} \tag{3.32}$$

y

$$|\bar{x}-\bar{y}| \leq \sqrt{\varepsilon}\sqrt{2(2\gamma + m_u(2(K_1+1)\varepsilon))}. \tag{3.33}$$

Demostración. Como Φ_γ tiene un máximo en $(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})$ tenemos que

$$\Phi_\gamma(\bar{x},\bar{s};\bar{y},\bar{s}) \leq \Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})$$

y de la definición de Φ_γ,

$$u(\bar{x},\bar{s}) - \frac{\gamma}{2}|\bar{s}-t_\gamma|^2 \quad \leq u(\bar{x},\bar{t}) - \frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 - \frac{\gamma}{2}|\bar{t}-t_\gamma|^2.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 &\leq u(\bar{x},\bar{t}) - u(\bar{x},\bar{s}) + \frac{\gamma}{2}\left[|\bar{s}-t_\gamma|^2 - |\bar{t}-t_\gamma|^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2}K_1 + \gamma|\bar{t}-\bar{s}|^2 + \frac{\gamma}{2}|\bar{t}-t_\gamma|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}K_1 + \gamma|\bar{t}-\bar{s}|^2 + \gamma,
\end{aligned}
$$

del hecho que $\gamma, \delta \leq \frac{1}{2}$ se sigue que

$$\frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 \leq \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}|\bar{t}-\bar{s}|^2 + \frac{1}{2},$$

luego

$$\frac{(1-\delta)}{\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 \leq K_1 + 1,$$

de aquí que

$$|\bar{t}-\bar{s}|^2 \leq \frac{\delta\,(K_1+1)}{(1-\delta)} \leq 2\delta(K_1+1),$$

por lo tanto

$$|\bar{t}-\bar{s}| \leq \sqrt{2\delta(K_1+1)}, \tag{3.34}$$

obteniendo así (3.32).

Para mostrar la otra desigualdad, tomamos en cuenta que

$$\Phi_\gamma(\bar{y},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) \leq \Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})$$

y de la definición de Φ_γ,

$$u(\bar{y},\bar{t}) - \frac{\gamma}{2}|\bar{y}-x_\gamma|^2 \quad \leq u(\bar{x},\bar{t}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 - \frac{\gamma}{2}|\bar{x}-x_\gamma|^2,$$

así del hecho que $\delta \leq \frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 &\leq u(\bar{x},\bar{t})-u(\bar{y},\bar{t})+\frac{\gamma}{2}\left[|\bar{y}-x_\gamma|^2-|\bar{x}-x_\gamma|^2\right]\\
&\leq \frac{1}{2}m_u\left(|\bar{x}-\bar{y}|^2\right)+\gamma|\bar{x}-\bar{y}|^2+\frac{\gamma}{2}|\bar{x}-x_\gamma|^2\\
&\leq \frac{1}{2}m_u\left(|\bar{x}-\bar{y}|^2\right)+\frac{1}{2}|\bar{x}-\bar{y}|^2+\gamma.
\end{aligned}
$$

Como $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ se sigue que

$$\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq m_u\left(|\bar{x}-\bar{y}|^2\right)+2\gamma,$$

luego

$$\frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)}\left(m_u\left(|\bar{x}-\bar{y}|^2\right)+2\gamma\right) \leq 2\left(m_u\left(|\bar{x}-\bar{y}|^2\right)+2\gamma\right), \quad (3.35)$$

así

$$\frac{1}{4\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq \frac{1}{2}m_u\left(|\bar{x}-\bar{y}|^2\right)+\gamma.$$

Como $K_1 = \sup\{m_u(\rho) : \rho \geq 0\}$ tenemos que

$$|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq 4\varepsilon\left(\frac{1}{2}K_1+\frac{1}{2}\right) = 2\varepsilon(K_1+1), \quad (3.36)$$

por lo tanto de (3.35)

$$|\bar{x}-\bar{y}| \leq \sqrt{\varepsilon}\sqrt{2[2\gamma+m_u(2(K_1+1)\varepsilon)]}$$

probándose (3.33). $\square$

Supongamos que $(\bar{x},\bar{t}) \in \partial^* Q$. Como Φ_γ tiene un punto máximo en

$(\bar{x}, \bar{t}; \bar{y}, \bar{s})$ y procediendo análogamente como en (3.17)

$$
\begin{aligned}
\Phi_\gamma(x,t;y,s) &\leq \Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) \\
&= \Phi(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) - \frac{\gamma}{2}\left[|\bar{t}-t_\gamma|^2 + |\bar{s}-s_\gamma|^2 + |\bar{x}-x_\gamma|^2 + |\bar{y}-y_\gamma|^2\right] \\
&\leq u(\bar{x},\bar{t}) - v(\bar{y},\bar{s}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 - \frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 + \beta(\bar{s}-t_1) \\
&- \frac{\gamma}{2}\left[|\bar{t}-t_\gamma|^2 + |\bar{s}-s_\gamma|^2 + |\bar{x}-x_\gamma|^2 + |\bar{y}-y_\gamma|^2\right] \\
&\leq v(\bar{x},\bar{t}) - v(\bar{y},\bar{s}) + \sup_{\partial^* Q}[u-v] - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 - \frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 \\
&+ \beta(\bar{s}-t_1) - \frac{\gamma}{2}\left[|\bar{t}-t_\gamma|^2 + |\bar{s}-s_\gamma|^2 + |\bar{x}-x_\gamma|^2 + |\bar{y}-y_\gamma|^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2}m_v\Big(|\bar{t}-\bar{s}|^2 + |\bar{x}-\bar{y}|^2\Big) + \sup_{\partial^* Q}[u-v] - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 - \frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 \\
&+ \beta(\bar{s}-t_1) - \frac{\gamma}{2}\left[|\bar{t}-t_\gamma|^2 + |\bar{s}-s_\gamma|^2 + |\bar{x}-x_\gamma|^2 + |\bar{y}-y_\gamma|^2\right],
\end{aligned}
$$

de (3.34) y (3.36) tenemos

$$
\begin{aligned}
\Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) &\leq \frac{1}{2}m_v(2(K_1+1)(\varepsilon+\delta)) + \sup_{\partial^* Q}[u-v] - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 - \frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 \\
&+ \beta(\bar{s}-t_1) - \frac{\gamma}{2}\left[|\bar{t}-t_\gamma|^2 + |\bar{s}-s_\gamma|^2 + |\bar{x}-x_\gamma|^2 + |\bar{y}-y_\gamma|^2\right].
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

Ahora supongamos que $(\bar{y}, \bar{s}) \in \partial^* Q$. Procediendo como en (3.37) tenemos

$$
\begin{aligned}
\Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}) &\leq \frac{1}{2}m_u(2(K_1+1)(\varepsilon+\delta)) + \sup_{\partial^* Q}[u-v] - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2 - \frac{1}{2\delta}|\bar{t}-\bar{s}|^2 \\
&+ \beta(\bar{s}-t_1) - \frac{\gamma}{2}\left[|\bar{t}-t_\gamma|^2 + |\bar{s}-s_\gamma|^2 + |\bar{x}-x_\gamma|^2 + |\bar{y}-y_\gamma|^2\right].
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

Supongamos que $(\bar{x}, \bar{t}), (\bar{y}, \bar{s}) \in Q$ y sea la función

$$
\tilde{w}(x,t) = \frac{1}{2\delta}|t-\bar{s}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|x-\bar{y}|^2 + \frac{\gamma}{2}|t-t_\gamma|^2 + \frac{\gamma}{2}|x-x_\gamma|^2, \quad (x,t) \in \bar{Q},
$$

entonces $u - \tilde{w}$ tiene un punto máximo en $(\bar{x}, \bar{t})$, así $(\bar{x}, \bar{t}) \in \arg\max\{u(x,t) -$

$\tilde{w}(x,t) : (x,t) \in \bar{Q}\}$ y de la definición de subsolución de viscosidad

$$-\tilde{w}_t(\bar{x},\bar{t}) + H(\bar{x}, d_x\tilde{w}(\bar{x},\bar{t}),\bar{t}) \leq 0.$$

Si $\tilde{w}_t(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\delta}(\bar{t}-\bar{s}) + \gamma(\bar{t}-t_\gamma)$ y $d_x\tilde{w}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{x}-\bar{y}) + \gamma(\bar{x}-x_\gamma)$ y $q_\delta = \frac{1}{\delta}(\bar{t}-\bar{s}), q_\gamma = \gamma(\bar{t}-t_\gamma), p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{x}-\bar{y})$ y $p_\gamma = \gamma(\bar{x}-x_\gamma)$, reescribiendo la desigualdad anterior obtenemos

$$-q_\delta - q_\gamma + H(\bar{x}, p_\varepsilon + p_\gamma, \bar{t}) \leq 0. \tag{3.39}$$

Ahora consideramos la función

$$w^*(y,s) = -\frac{1}{2\delta}|\bar{t}-s|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}|\bar{x}-y|^2 - \frac{\gamma}{2}|s-s_\gamma|^2 - \frac{\gamma}{2}|y-y_\gamma|^2 + \beta(s-t_1), \quad (y,s) \in \bar{Q}$$

entonces $v - w^*$ tiene un punto mínimo en $(\bar{y},\bar{s})$, así $(\bar{y},\bar{s}) \in \arg\min\{v(y,s) - w^*(y,s) : (y,s) \in \bar{Q}\}$ y de la definición de supersolución de viscosidad

$$-w^*_s(\bar{y},\bar{s}) + H(\bar{y}, d_y w^*(\bar{y},\bar{s}),\bar{s}) \geq 0.$$

Si $w^*_s(\bar{y},\bar{s}) = \frac{1}{\delta}(\bar{t}-\bar{s}) + \gamma(s_\gamma - \bar{s}) + \beta$ y $d_y w^*(\bar{y},\bar{s}) = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{x}-\bar{y}) + \gamma(y_\gamma - \bar{y})$, y definamos $q_\delta = \frac{1}{\delta}(\bar{t}-\bar{s}), \bar{q}_\gamma = \gamma(s_\gamma - \bar{s}), p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\bar{x}-\bar{y})$ y $\bar{p}_\gamma = \gamma(y_\gamma - \bar{y})$, reescribiendo la desigualdad anterior obtenemos

$$-\beta - q_\delta - \bar{q}_\gamma + H(\bar{y}, p_\varepsilon + \bar{p}_\gamma, \bar{s}) \geq 0,$$

o equivalentemente

$$\beta + q_\delta + \bar{q}_\gamma - H(\bar{y}, p_\varepsilon + \bar{p}_\gamma, \bar{s}) \leq 0. \tag{3.40}$$

Sumando (3.39) y (3.40) tenemos

$$\beta \leq H(\bar{y}, p_\varepsilon + \bar{p}_\gamma, \bar{s}) - H(\bar{x}, p_\varepsilon + p_\gamma, \bar{t}) + q_\gamma - \bar{q}_\gamma.$$

Por la hipótesis (3.2) tenemos

$$\begin{aligned}\beta &\leq h\Big(|\bar{t}-\bar{s}|+|\bar{x}-\bar{y}|\Big)+h\Big(|\bar{t}-\bar{s}|\Big)\left(|p_\varepsilon|+|\bar{p}_\gamma|\right)+K|\bar{x}-\bar{y}|\left(|p_\varepsilon|+|\bar{p}_\gamma|\right)\\ &+K|(p_\varepsilon+\bar{p}_\gamma)-(p_\varepsilon+p_\gamma)|+q_\gamma-\bar{q}_\gamma\\ &=h\Big(|\bar{t}-\bar{s}|+|\bar{x}-\bar{y}|\Big)+h\Big(|\bar{t}-\bar{s}|\Big)\left(|p_\varepsilon|+|\bar{p}_\gamma|\right)+K|\bar{x}-\bar{y}|\left(|p_\varepsilon|+|\bar{p}_\gamma|\right)\\ &+K|\bar{p}_\gamma-p_\gamma|+q_\gamma-\bar{q}_\gamma.\end{aligned}$$

Ahora bien de (3.36)

$$|p_\varepsilon|=\frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|\leq\sqrt{\frac{2(K_1+1)}{\varepsilon}} \tag{3.41}$$

y de (3.33)

$$|p_\varepsilon||\bar{x}-\bar{y}|=\frac{1}{\varepsilon}|\bar{x}-\bar{y}|^2=2(2\gamma+m_u(2(K_1+1)\varepsilon)), \tag{3.42}$$

y de (3.30) y la definición de $p_\gamma,\bar{p}_\gamma,q_\gamma,\bar{q}_\gamma$ tenemos

$$|p_\gamma|,|\bar{p}_\gamma|,|q_\gamma|,|\bar{q}_\gamma|\leq 2\gamma. \tag{3.43}$$

Combinamos (3.32), (3.33),(3.36), (3.41), (3.42) y (3.43), luego

$$\begin{aligned}\beta &\leq h\left(\left[\sqrt{2(K_1+1)}\right]\left[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\delta}\right]\right)+h\left(\sqrt{2(K_1+1)\delta}\right)\left(\frac{\sqrt{2(K_1+1)}}{\varepsilon}+2\gamma\right)\\ &+2K\left(2\gamma+m_u(2(K_1+1)\varepsilon)+\gamma\sqrt{2(K_1+1)\varepsilon}\right)+2(K+1)\gamma.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Definamos

$$\begin{aligned}k(\varepsilon,\delta,\gamma)&=h\left(\left[\sqrt{2(K_1+1)}\right]\left[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\delta}\right]\right)\\ &+h\left(\sqrt{2(K_1+1)\delta}\right)\left(\frac{\sqrt{2(K_1+1)}}{\varepsilon}+2\gamma\right)\\ &+2K\left(2\gamma+m_u(2(K_1+1)\varepsilon)+\gamma\sqrt{2(K_1+1)\varepsilon}\right)+2(K+1)\gamma.\end{aligned}$$

Notamos que $k(\varepsilon,\delta,\gamma)\geq 0$ y del hecho que $h, m_u, m_v \in C([0,\infty])$ entonces

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\limsup_{\gamma\longrightarrow 0} k(\varepsilon,\delta,\gamma)=0.$$

De la definición de límite, para todo $\beta>0$ existen $\varepsilon(\beta)>0$, $\delta(\varepsilon,\beta)>0$ y $\gamma(\varepsilon,\delta,\beta)>0$ tales que, para toda ϵ, δ y γ, si $\varepsilon<\varepsilon(\beta)$, $\delta<\delta(\varepsilon,\beta)$ y $\gamma<\gamma(\varepsilon,\delta,\beta)$, entonces $k(\varepsilon,\delta,\gamma)<\beta$, lo que contradice (3.44), por lo tanto $(\bar{x},\bar{t})\in\partial^*Q$ o $(\bar{y},\bar{s})\in\partial^*Q$ o ambos.

Como antes, del hecho que u y v están acotados, entonces

$$|\bar{t}-\bar{s}|, |\bar{x}-\bar{y}|=O(\varepsilon),$$

por lo tanto $|\bar{t}-\bar{s}|$ y $|\bar{x}-\bar{y}|$ tienden a cero cuando δ y ε tienden a cero, respectivamente.

Ahora bien, de (3.37) y (3.38) obtenemos

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\limsup_{\gamma\longrightarrow 0}\Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})\leq\sup_{\partial^*Q}[u-v]$$

para todo $\beta>0$, luego tomando el límite cuando β tiende a cero obtenemos

$$\sup_{\bar{Q}}[u-v]\leq\sup_{\partial^*Q}[u-v]. \tag{3.45}$$

Ahora bien, para cualesquiera $\varepsilon,\delta,\gamma,\beta>0$ y $(\bar{x},\bar{t})\in\partial^*Q$ tenemos que

$$u(\bar{x},\bar{t})-v(\bar{x},\bar{t})+\beta(\bar{t}-t_1)-\frac{\gamma}{2}\left[|\bar{t}-t_\gamma|^2+|\bar{t}-s_\gamma|^2+|\bar{x}-x_\gamma|^2+|\bar{x}-y_\gamma|^2\right]$$
$$=\Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{x},\bar{t})\leq\Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}),$$

luego

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\limsup_{\gamma\longrightarrow 0}\ \Big(u(\bar{x},\bar{t})-v(\bar{x},\bar{t})+\beta(\bar{t}-t_1)-\frac{\gamma}{2}\left[|\bar{t}-t_\gamma|^2+|\bar{t}-s_\gamma|^2\right.$$
$$\left.+\ |\bar{x}-x_\gamma|^2+|\bar{x}-y_\gamma|^2\right]\Big)\leq\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\limsup_{\gamma\longrightarrow 0}\Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s})$$

así

$$\sup_{\partial^* Q}[u-v] + \beta(\bar{t}-t_1) \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\sup \lim_{\delta \longrightarrow 0}\sup \lim_{\gamma \longrightarrow 0}\sup \Phi_\gamma(\bar{x},\bar{t};\bar{y},\bar{s}),$$

luego tomando el límite cuando β tiende a cero obtenemos

$$\sup_{\partial^* Q}[u-v] \leq \sup_{\bar{Q}}[u-v]. \tag{3.46}$$

Por lo tanto de (3.45) y (3.46) obtenemos (3.3). □

Vamos a demostrar ahora la unicidad de las soluciones de viscosidad.

3.0.3 Corolario (Unicidad). *Sea L un lagrangiano que satisface las hipótesis* (**P1**) − (**P4**) *en una variedad compacta M y H el hamiltoniano asociado, que satisface la hipótesis* (**P5**)*. Existe a lo más una solución de viscosidad de la ecuación* (3.1)

$$-u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = 0, \quad (x,t) \in Q,$$

la cual es acotada y uniformemente continua en $\bar{Q}$ y satisface las condiciones

(a) $u(x,t) = g(x,t)$, para toda $(x,t) \in \partial O \times [t_0,t_1)$.

(b) $u(x,t_1) = \psi(x)$ para todo $x \in \bar{O}$.

Demostración. Recordemos que $Q = O \times [t_0,t_1)$ donde O es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$ y $\partial^* Q = (\partial O \times [t_0,t_1)) \cup (O \times \{t_1\})$.

Supongamos que existen dos soluciones de viscosidad u y v en Q y consideramos la resta de estas soluciones, es decir, $z = u - v$ y $\tilde{z} = v - u$. Como u y v satisfacen las condiciones (a) y (b), entonces $z = \tilde{z} = 0$ en $\partial^* Q$.

Por otro lado, como u y v están acotadas y son continuas en $\bar{Q}$ entonces son uniformemente continuas en $\bar{Q}$, por el principio del máximo 3.0.1 se sigue que

$$\sup_{\bar{Q}} |u - v| = \sup_{\partial^* Q} |u - v| = 0,$$

es decir, tenemos que $u = v$ en $\bar{Q}$. $\square$

El corolario de unicidad que demostramos está dado en Q, con ayuda de este resultado podemos garantizar la unicidad de la solución de viscosidad en $M \times \mathbb{S}^1$, con M una variedad compacta.
Sea $K \subset M \times \mathbb{S}^1$ una vecindad del punto (x,t), donde $K = K_1 \times [t_0, t_1)$ donde K_1 es un subconjunto abierto de M.

3.0.4 Corolario. *Sea L un lagrangiano que satisface las hipótesis* $(\mathbf{P1}) - (\mathbf{P4})$ *en una variedad compacta M y H el hamiltoniano asociado, que satisface la hipótesis* $(\mathbf{P5})$.

Existe a lo más una solución de viscosidad de

$$-u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = 0, \quad (x,t) \in K, \tag{3.47}$$

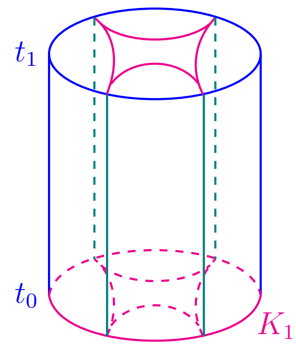
la cual es acotada y uniformemente continua en $\bar{K}$ y satisface las condiciones

(1) $u(x,t) = g(x,t)$, para toda $(x,t) \in \partial K_1 \times [t_0, t_1)$.

(2) $u(x,t_1) = \psi(x)$ para todo $x \in \bar{K}_1$.

Demostración. De la compacidad de M, existe una cantidad finita de cartas coordenadas (U_i, Ω_i), donde U_i son abiertos de M y $\Omega_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^k$ con $\Omega_i(U_i) = O_i$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^k$.

Como K_1 es un subconjunto abierto de M es posible tomar solamente a las cartas coordenadas que cubren a K_1. Sea



$$\mathcal{B} = \{U_i : U_i \cap K_1 \neq \emptyset\}$$

los subconjuntos abiertos de M que cubren a K_1.

Podemos identificar $U_i \times \mathbb{S}^1 \approx O_i \times [t_0, t_1)$, para cada subconjunto abierto $U_i \in \mathcal{B}$. Ahora bien, si nos fijamos en los subconjuntos abiertos $O_i \times [t_0, t_1)$ tenemos que garantizar que las condiciones estén bien definidas en cada subjunto abierto, para ello identificamos dos casos:

(a) Cuando $\tilde{O}_i = \partial O_i \cap \partial K_1 \neq \emptyset$ consideramos las condiciones

(1')
$$g_i(x,t) = \begin{cases} g(x,t), & \forall (x,t) \in \tilde{O}_i \times [t_0, t_1) \\ \psi(x), & \forall (x,t) \in \left(\partial O_i \setminus \tilde{O}_i\right) \times [t_0, t_1) \end{cases}$$

(2') $\psi_i(x, t_1) = \psi(x), \forall (x,t) \in \bar{O}_i$.

(b) Cuando $\partial O_i \cap \partial K_1 = \emptyset$ podemos tomar la condición

(2') $\psi_i(x, t_1) = \psi(x), \forall (x,t) \in \bar{O}_i$.

Por otro lado, sean $(U_\alpha, \Omega_\alpha), (U_\beta, \Omega_\beta)$ dos cartas coordenadas cualesquiera de $\mathcal{B}$ y supongamos que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Identificamos $U_\alpha \times \mathbb{S}^1 \approx O_\alpha \times [t_0, t_1)$ y $U_\beta \times \mathbb{S}^1 \approx O_\beta \times [t_0, t_1)$, luego por el Corolario 3.0.3, existe a lo más una solución de viscosidad en cada carta coordenada, a las cuales denotamos por u_α y u_β respectivamente, que satisfacen las condiciones del caso (a) o (b).

Sea una carta coordenada de $\mathcal{B}$, en $U_\alpha \cap U_\beta$ con $\Omega_\beta\Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, donde identificamos $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{S}^1 \approx O_\gamma \times [t_0, t_1)$, luego por el Corolario 3.0.3 en la intersección existe a lo más una solución de viscosidad, la cual denotamos por u_w. La condición que satisface u_w depende de la que satisfacen u_α y u_β. Si ambas satisfacen la misma condición, u_w satisface esa condición. Si suponemos sin pérdida de generalidad que u_α satisface las condiciones del caso (a) y u_β la condición del caso (b), entonces u_w satisface las condiciones del caso (a), pues (2') es la misma en ambos casos.

Luego $u_\alpha = u_w$ en $O_\alpha \times [t_0, t_1)$, de manera análoga obtenemos que $u_\beta = u_w$ en $O_\beta \times [t_0, t_1)$, así $u_\alpha = u_w = u_\beta$. Como consideramos dos cartas coordenadas cualesquiera se sigue que la solución de viscosidad es única en $K \subset M \times \mathbb{S}^1$.

$\square$

El corolario de unicidad 3.0.4 es válido para la ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J)

$$u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = c,$$

ya que podemos reducir la ecuación (H-J) a la ecuación (3.47), reemplazando el hamiltoniano H por H_c definido por $H_c(x,p,t) = -H(x,p,t) + c$.

Con esto demostramos que existe a lo más una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J) en $M \times \mathbb{S}^1$.

Recordemos que el objetivo de estre trabajo consiste en encontrar hipótesis que nos permitan garantizar la equivalencia entre las soluciones de viscosidad y las soluciones KAM-débiles para la ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J). Las propiedades que hemos estudiado hasta ahora serán útiles para demostrar dicha equivalencia.

Capítulo 4

Equivalencia entre las soluciones KAM-débiles y de viscosidad

En este capítulo enunciamos el resultado que nos afirma que toda solución KAM-débil es solución de viscosidad. Para el caso autónomo, demostrar el recíproco de la afirmación implica pedir al hamiltoniano ser coercitivo, sin embargo, para el caso no-autónomo esto no es suficiente. Para establecer que una solución de viscosidad es solución KAM-débil debemos demostrar que la solución de viscosidad está dominada y la existencia de una curva calibrada. Finalmente complementamos estos resultados para demostrar la equivalencia entre las soluciones.

Bajo ciertas hipótesis sobre el lagrangiano, podemos demostrar que si u es solución KAM-débil entonces u es solución de viscosidad.

4.0.1 Teorema. *Sea L un lagrangiano que satisface las hipótesis* $(\mathbf{P1})-(\mathbf{P4})$ *en una variedad compacta M y H el hamiltoniano asociado.*

Sea $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces cualquier solución KAM-débil de tipo negativo es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = c. \tag{H-J}$$

Demostración. Sea u_- una solución KAM-débil de tipo negativo. Para demostrar que u_- es una solución de viscosidad, veremos que es una subsolución y una supersolución de viscosidad.

Veamos que u_- es una subsolución de viscosidad.

Sea $\phi : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $u_- - \phi$ tiene un máximo local en $(x_0, [t_0])$, es decir que para toda $(x, [t]) \in M \times \mathbb{S}^1$

$$u_-(x,[t]) - \phi(x,[t]) \leq u_-(x_0,[t_0]) - \phi(x_0,[t_0]),$$

luego

$$\phi(x_0,[t_0]) - \phi(x,[t]) \leq u_-(x_0,[t_0]) - u_-(x,[t]). \tag{4.1}$$

Al ser u_- una solución KAM-débil de tipo negativo, para $(x_0,[t_0])$ existe una curva $\gamma : (-\infty, t_0) \longrightarrow M$ con $\gamma(t_0) = x_0$ y de la condición de dominación

$$u_-(x_0,[t_0]) - u_-(\gamma(t),[t]) \leq \int_t^{t_0} (L+c)(\gamma(s), \dot\gamma(s), s) ds \tag{4.2}$$

luego de (4.1) y (4.2) tenemos que

$$\phi(\gamma(t_0),[t_0]) - \phi(\gamma(t),[t]) \leq \int_t^{t_0} (L+c)(\gamma(s), \dot\gamma(s), s)\ ds. \tag{4.3}$$

Como $t \leq t_0$ entonces $t - t_0 \leq 0$ así $-(t-t_0) \geq 0$; dividiendo (4.3) entre $-(t-t_0)$ y tomando límite cuando t tiende a t_0 tenemos

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\phi(\gamma(t),[t]) - \phi(\gamma(t_0),[t_0])}{t - t_0} \leq \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{1}{-(t-t_0)} \int_t^{t_0} (L+c)(\gamma(s), \dot\gamma(s), s)\ ds$$

luego

$$d_{\gamma(t_0)}\phi(\gamma(t_0),[t_0])\cdot(\dot{\gamma}(t_0))+d_t\phi(\gamma(t_0),[t_0])\leq L(\gamma(t_0),\dot{\gamma}(t_0),t_0)+c \quad (4.4)$$

de la desigualdda de Fenchel (1.4) y considerando la ecuación (4.4) tenemos que

$$H(\gamma(t_0),d_{\gamma(t_0)}\phi(\gamma(t_0),[t_0]),t_0)+d_t\phi(\gamma(t_0),[t_0])\leq c$$

Por lo tanto u_- es una subsolución de viscosidad.

Ahora veamos que u_- es una supersolución de viscosidad.
Sea $\psi : M\times\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $u_- - \psi$ tiene un mínimo local en $(x_0,[t_0])$, es decir que para toda $(x,[t])\in M\times\mathbb{S}^1$

$$u_-(x,[t])-\psi(x,[t])\geq u_-(x_0,[t_0])-\psi(x_0,[t_0]),$$

así

$$\psi(x_0,[t_0])-\psi(x,[t])\geq u_-(x_0,[t_0])-u_-(x,[t]). \quad (4.5)$$

Como u_- es una solución KAM-débil de tipo negativo, para $(x_0,[t_0])$ existe una curva $\gamma : (-\infty,t_0)\longrightarrow M$ con $\gamma(t_0)=x_0$ tal que

$$u_-(x_0,[t_0])-u_-(\gamma(t),[t])=\int_t^{t_0}(L+c)(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)\ ds \quad (4.6)$$

luego de (4.5) y (4.6) tenemos que

$$\psi(\gamma(t_0),[t_0])-\psi(\gamma(t),[t])\geq\int_t^{t_0}(L+c)(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)ds. \quad (4.7)$$

Como $t\leq t_0$ entonces $t-t_0\leq 0$ así $-(t-t_0)\geq 0$; dividiendo (4.7) entre $-(t-t_0)$ y tomando límite cuando t tiende a t_0 tenemos

$$\lim_{t\longrightarrow t_0}\frac{\psi(\gamma(t),[t])-\psi(\gamma(t_0),[t_0])}{t-t_0}\geq\lim_{t\longrightarrow t_0}\frac{1}{-(t-t_0)}\int_t^{t_0}(L+c)(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)\ ds$$

luego

$$d_{\gamma(t_0)}\psi(\gamma(t_0),[t_0])\cdot(\dot{\gamma}(t_0))+d_t\psi(\gamma(t_0),[t_0])\geq L(\gamma(t_0),\dot{\gamma}(t_0),t_0)+c \quad (4.8)$$

de la desigualdad de Fenchel (1.4) y considerando la ecuación (4.8) tenemos que

$$H(\gamma(t_0),d_{\gamma(t_0)}\psi(\gamma(t_0),[t_0]),t_0)+d_t\psi(x_0,[t_0])\geq c$$

Por lo tanto u_- es una supersolución de viscosidad.
Así u_- es una subsolución y supersolución de viscosidad, por lo tanto cualquier solución KAM-débil de tipo negativo es una solución de viscosidad.

De la demostración del Teorema (4.0.1) se sigue que si u está dominada entonces es una subsolución de viscosidad.

4.0.2 Corolario. *Sea L un lagrangiano que satisface las hipótesis* (**P1**) $-$ (**P4**) *en una variedad compacta M y H el hamiltoniano asociado.*

Sea $u : M\times\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{R}$, si u está $L+c-$dominada entonces es subsolución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J).

□

Ya que una solución u es KAM-débil si $u\in\mathcal{S}^+\cup\mathcal{S}^-$, gracias al Teorema 4.0.1 cualquier solución KAM-débil es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J).

Para el caso autónomo el resultado que garantiza que si u es una solución de viscosidad entonces u es una solución KAM-débil está demostrado en el libro no publicado de Fathi [6]. Nuestra idea primitiva fue retomar los resultados para el caso autónomo y adaptarlos para el caso no-autónomo. El libro de Fathi utiliza dos resultados para demostrar la equivalencia, los cuales presentamos a continuación.

4.0.3 Teorema (Caso autónomo)**.** *Sea $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano convexo, superlineal y completo en una variedad compacta M. Denotemos por $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ al hamiltoniano asociado. Una función continua $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución de viscosidad de $H(x, d_x u) = c$ si y sólo si es Lipschitz y $u = T_t^- u + ct$, para cada $t \geq 0$, donde $T_t^- u$ denota el semigrupo de Lax-Oleinik.*

Para demostrar este teorema Fathi enunció otros resultados, uno de ellos dice lo siguiente:

4.0.4 Teorema (Caso autónomo)**.** *Supongamos que $H : T^*M \longrightarrow R$ es coercitivo en subconjuntos compactos, entonces una subsolución de viscosidad de $H(x, d_x u) = c$ es necesariamente localmente Lipschitz, y por lo tanto satisface $H(x, d_x u) \leq c$ casi en todas partes.*

En el Teorema 4.0.4 el hamitoniano debe satisfacer la condición de ser coercitivo, esta condición garantiza que las subsoluciones de viscosidad son localmente Lipschitz, sin embargo, para el caso no-autónomo que el hamiltoniano sea coercitivo no es suficiente. Para poder ejemplificar este hecho necesitamos introducir la noción de diferencial inferior y superior.

4.1. Diferencial inferior y superior

En esta sección damos el concepto de diferencial inferior y superior. Al tomar un punto en el conjunto de diferenciales superiores podemos garantizar la existencia de una función que satisface ciertas propiedades.

4.1.1 Definición. *Sea $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces (p,t) es un* ***diferencial inferior*** *de u en (x,t) si*

$$\liminf_{(y,t)\longrightarrow(x,t)} \frac{u(y,t) - u(x,t) - (p,t)\left[(y,t) - (x,t)\right]}{\|(y,t) - (x,t)\|} \geq 0.$$

De manera análoga, (p,t) es un ***diferencial superior*** *de u en (x,t) si*

$$\limsup_{(y,t)\longrightarrow(x,t)} \frac{u(y,t) - u(x,t) - (p,t)\left[(y,t) - (x,t)\right]}{\|(y,t) - (x,t)\|} \leq 0.$$

Denotamos por $D^-u(x,t)$ y $D^+u(x,t)$ al conjunto de diferenciales inferiores y superiores respectivamente.

Tenemos ahora el siguiente resultado que establece la existencia de una función que satisface tres propiedades, estas son llamadas funciones de prueba.

4.1.2 Lema. *Sea $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(p,t) \in D^+u(x,t)$, existe una función $\phi : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(x,t) = u(x,t), D_x\phi = p$ y $\phi(y,t) > u(y,t)$ para $(y,t) \neq (x,t)$.*

Demostración. Supongamos que $M = \mathbb{R}^{k+1}$ y consideramos la siguiente función $(y,t) \longrightarrow u(x,t) + (p,t)[(y,t) - (x,t)]$ donde $x = (x_1, \ldots, x_k)$ y $y = (y_1, \ldots, y_k)$ representan la parte espacial y t la parte temporal.
Si $(p,t) \in D^+u(x,t)$, entonces por definición

$$\limsup_{(y,t)\longrightarrow(x,t)} \frac{u(y,t) - u(x,t) - (p,t)\left[(y,t) - (x,t)\right]}{\|(y,t) - (x,t)\|} \leq 0. \tag{4.9}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad y con el fin de simplificar la notación que $(x,t) = (0,0), u(0,0) = (0,0)$ y $(p,t) = (0,0)$. Tomando en cuenta estas consideraciones (4.9) está dado por

$$\limsup_{(y,t)\longrightarrow(0,0)} \frac{u(y,t)}{\|(y,t)\|} \leq 0.$$

Si tomamos la parte no negativa de $u(y,t)$, la cual denotamos por $u^+(y,t) = \max\{u(y,t), 0\}$, luego

$$\lim_{(y,t)\longrightarrow(0,0)} \frac{u^+(y,t)}{\|(y,t)\|} = 0. \tag{4.10}$$

Por otro lado, definamos

$$c_n = \sup\{u^+(y,t) : 2^{-(n+1)} \leq \|(y,t)\| \leq 2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}. \tag{4.11}$$

Ya que por hipótesis se tiene que u es continua, luego $u^+(y,t)$ es continua, así tenemos que c_n es finita y además $u^+(y,t) \geq 0$, así $c_n \geq 0$.
De la definición de c_n tenemos que $\|(y,t)\|^{-1} \geq 2^n$, así

$$\frac{u^+(y,t)}{\|(y,t)\|} \geq u^+(y,t)\ 2^n,$$

si tomamos el límite cuando (y,t) tiende a $(0,0)$ y tomando en cuenta (4.10) tenemos

$$0 \geq \lim_{(y,t)\longrightarrow(0,0)} u^+(y,t)\ 2^n, \tag{4.12}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left[\sup_{m\geq n} 2^m\ c_m\right] = 0. \tag{4.13}$$

Si tomamos una función salto $\theta : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta = 1$ en el conjunto

$$A = \left\{(y,t) \in \mathbb{R}^{k+1} : \frac{1}{2} \leq \|(y,t)\| \leq 1\right\},$$

y cuyo soporte esté en el conjunto

$$B = \left\{(y,t) \in \mathbb{R}^{k+1} : \frac{1}{4} \leq \|(y,t)\| \leq 2\right\}.$$

Tomando en cuenta estos conjuntos, definamos la función

$$\psi : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde

$$\psi(y,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n + 2^{-n})\theta(2^n(y,t)). \tag{4.14}$$

Si $(y,t) = (0,0)$ entonces

$$\psi(0,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n + 2^{-n})\theta(2^n(0,0)),$$

de esto, podemos notar que el valor de $\psi(0,0)$ se reduce a saber cuánto es el valor de $\theta(0,0)$. Notemos que $\theta(0,0)$ pues $(0,0) \notin B$.

Ahora bien, si $(y,t) \neq (0,0)$ tenemos que $\theta(2^n(y,t)) \neq 0$ si y solamente si $2^n(y,t) \in B$, esto es

$$\frac{1}{4} \leq \|2^n(y,t)\| \leq 2,$$

y tomando logaritmo base 2 tenemos

$$\log_2 2^{-2} \leq \log_2 (2^n\|(y,t)\|) \leq \log_2 2,$$

o equivalentemente

$$-2\log_2 2 \leq n\log_2 2 + \log_2 \|(y,t)\| \leq \log_2 2,$$

es decir

$$-2 \leq n + \log_2 \|(y,t)\| \leq 1$$

de aquí

$$-2 - \log_2 \|(y,t)\| \leq n \leq 1 - \log_2 \|(y,t)\|. \tag{4.15}$$

Recordemos que estamos considerando el caso en el que $1/4 \leq \|(y,t)\| \leq 2$, luego

$$-2 \leq \log_2 \|(y,t)\| \leq 1,$$

y de (4.15) tenemos que

$$-3 \leq n \leq 3,$$

así (4.15) ocurre para a lo más 3 enteros consecutivos. Por lo tanto la suma está bien definida para $(y,t) \neq (0,0)$, pues hay una cantidad finita de sumandos en (4.14).

Por otro lado, si nos fijamos en la siguiente vecindad

$$V_y = \{(z,t) \neq (0,0) : -1 - \log_2 \|(y,t)\| < -\log_2 \|(z,t)\| < 1 - \log_2 \|(y,t)\|\},$$

la cual es una vecindad de (y,t) y para toda $(z,t) \in V_y$ tomamos

$$\psi(z,t) = \sum_{-3-\log_2 \|(y,t)\| < n < 2-\log_2 \|(y,t)\|} \left(c_n + 2^{-2n}\right) \theta(2^n(z,t)), \tag{4.16}$$

esta suma es finita con a lo más 5 términos, por lo que está bien definida. Más aún, recordando que θ es C^∞ y ya que $\psi(z,t)$ siempre es finita, se sigue que ψ es C^∞ en $\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$.
Ahora verifiquemos que ψ es continua en cero. Por definición

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi(y,t) &\leq \sum_{-3-\log_2 \|(y,t)\| < n < 2-\log_2 \|(y,t)\|} \left(c_n + 2^{-2n}\right) \\ &\leq 5 \sup_{n > -3-\log_2 \|(y,t)\|} \left(c_n + 2^{-2n}\right), \end{aligned}$$

tomando el límite cuando (y,t) tiende a $(0,0)$ se sigue que

$$0 \leq \lim_{(y,t) \longrightarrow (0,0)} \psi(y,t) \leq \lim_{(y,t) \longrightarrow (0,0)} \left[5 \sup_{n > -3-\log_2 \|(y,t)\|} \left(c_n + 2^{-2n}\right) \right] = 0 \tag{4.17}$$

así

$$\lim_{(y,t)\longrightarrow(0,0)} \psi(y,t) = 0,$$

mostrándose la continuidad de ψ.

Veamos ahora que ψ es C^1 en todo $\mathbb{R}^{k+1}$ y tal que su derivada en cero es cero, para ello es suficiente mostrar que la derivada de ψ tiende a cero cuando $\|(y,t)\|$ tiende a cero.

Derivando la ecuación (4.16) obtenemos

$$d_{(y,t)}\psi = \sum_{-3-\log_2\|(y,t)\|<n<2-\log_2\|(y,t)\|} \left(c_n + 2^{-2n}\right) 2^n d_{2^n(y,t)}\theta. \tag{4.18}$$

Ya que θ tiene soporte compacto entonces existe K finito tal que

$$K = \sup_{(y,t)\in\mathbb{R}^{k+1}} \|d_{(y,t)}\theta\|$$

de (4.18) y la igualdad anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\|d_{(y,t)}\psi\| &\leq \sum_{-3-\log_2\|(y,t)\|<n<2-\log_2\|(y,t)\|} \left(c_n + 2^{-2n}\right) 2^n \|d_{2^n(y,t)}\theta\| \\
&\leq \sum_{-3-\log_2\|(y,t)\|<n<2-\log_2\|(y,t)\|} \left(c_n + 2^{-2n}\right) 2^n \ K \\
&\leq 5K \sup_{n>-3-\log_2\|(y,t)\|} \left(c_n + 2^{-2n}\right) 2^n.
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\|(y,t)\|$ tiende a cero, por (4.17) tenemos que

$$\lim_{\|(y,t)\|\longrightarrow(0,0)} \|d_{(y,t)}\psi\| = 0.$$

Demostramos ahora que $\psi((y,t)) > u((y,t))$ para $(y,t) \neq (0,0)$.

Notemos que existe un número entero n_0 tal que $\|(y,t)\| \in \left[2^{-(n_0+1)}, 2^{n_0}\right]$, por tanto $\theta\left(2^{n_0}(y,t)\right) = 1$ y

$$\begin{aligned}
\psi(y,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(c_n + 2^{-2n}\right)\theta\left(2^n(y,t)\right) \\
&\geq \left(c_{n_0} + 2^{-2n_0}\right)\theta\left(2^{n_0}(y,t)\right) \\
&= \left(c_{n_0} + 2^{-2n_0}\right),
\end{aligned} \tag{4.19}$$

por otro lado, recordemos que

$$c_{n_0} = \sup\left\{u^+(y,t) : 2^{-(n_0+1)} \leq \|(y,t)\| \leq 2^{-n_0}\right\}$$

de aquí que

$$c_{n_0} > u^+(y,t) \geq u(y,t) \tag{4.20}$$

así de (4.19) y (4.20) tenemos que

$$\psi(y,t) \geq u(y,t).$$

Con lo que se sigue el resultado. □

Con la función de prueba ϕ, del Lema 4.1.2 y bajo ciertas ciertas condiciones, podemos demostrar que una función no creciente es subsolución de viscosidad.

4.2. Hamiltonianos coercitivos

4.2.1 Definición. *Una función continua $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice* ***coercitiva*** *en subconjuntos compactos, si para cada subconjunto compacto $K \subset M$ y cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{(x,p) \in T^*M : x \in K, H(x,p) \leq c\}$ es compacto.*

Haciendo la elección de cualquier métrica sobre M, podemos demostrar que H es coercitivo en subconjuntos compactos si y sólo si para cada subconjunto compacto $K \subset M$ tenemos que

$$\lim_{\|p\| \longrightarrow \infty} H(x,p) = +\infty, \tag{4.21}$$

donde el límite es uniforme para $x \in K$.

En efecto, tomamos $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y consideramos $M = \mathbb{R}^k$. Vamos a suponer que H es coercitivo, es decir, para cada subconjunto compacto $K \subset M$ y $c \in \mathbb{R}$, se sigue que el conjunto

$$A = \{(x,p) \in T^*M : x \in K, H(x,p) \leq c\},$$

es compacto.
Supongamos (por el contrario) que $\lim_{\|p\| \longrightarrow \infty} H(x,p)$ no es infinito, esto es, existe $R > 0$ tal que para todo $N > 0$ con $\|p\| > N$ entonces $H(x,p) < R$.
Y sea una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|p_n\| = +\infty$$

y $\Big(H(x,p_n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$.
Tomamos una subsucesión $\Big(H(x,p_{n_i})\Big)_{i \in I}$ que este acotada superiormente, entonces existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\{(x,p_{n_i}) : i \in I\} \subset \{(x,p) \in T^*M : x \in K, H(x,p) \leq c_1\}$$

lo cual es una contradicción pues $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|p_n\| = \infty$.
Por lo tanto $\Big(H(x,p_{n_i})\Big)_{i \in I}$ no está acotado, con lo que $\Big(H(x,p_n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ no

contiene una subsucesión acotada, es decir

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} H(x,p_n) = +\infty.$$

así

$$\lim_{\|p\|\longrightarrow\infty} H(x,p) = +\infty.$$

Recordemos que estamos considerando $M = \mathbb{R}^k$, luego H es una función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^k$. Supongamos ahora que se satisface la ecuación (4.21), entonces para toda $R > 0$ existe $N > 0$ tal que si $\|p\| > N$ entonces $H(x,p) > R$. Luego notemos que los puntos que satisfacen (4.21) no pertenecen a A.

Si nos fijamos en los puntos de A, tenemos que $H(x,p) \leq R$ y considerando una sucesión $\big(H(x,p_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en A tenemos que

$$\lim_{\|n\|\longrightarrow\infty} H(x,p_n) < +\infty.$$

Más aún, si consideramos una subsucesión $\Big(H(x,p_{n_i})\Big)_{i\in I}$ de la sucesión $\big(H(x,p_n)\big)$ tenemos que

$$\lim_{\|i\|\longrightarrow\infty} H(x,p_{n_i}) < +\infty.$$

Así toda sucesión contenida en A posee una subsucesión convergente, con lo que A es compacto. Mostrándose así la afirmación.

Para demostrar el Teorema 4.0.4, en el caso autónomo, el hecho de que el hamiltoniano sea coercitivo, nos garantiza que las soluciones de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi autónoma son necesariamente localmente

Lipschitz.

Sin embargo, es importante notar que para el caso no-autónomo existen subsoluciones que no son localmente Lipschitz, incluso cuando el hamiltoniano es coercitivo. Para ejemplificar esto consideramos el hamiltoniano $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2. \tag{4.22}$$

Si $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función no creciente, podemos verificar que H es coercitivo y que $u(x,t) = \rho(t)$ es subsolución de viscosidad de la ecuación

$$u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t)) = 0. \tag{4.23}$$

Además podemos dar un ejemplo de una función ρ que no sea localmente Lipschitz.

Mostramos primero que H es coercitivo. En efecto, basta ver que se satiface la ecuación (4.21), lo cual es claro pues

$$\lim_{\|p\| \longrightarrow \infty} H(x,p) = \lim_{\|p\| \longrightarrow \infty} \frac{1}{2}\|p\|_x^2 = +\infty.$$

así se cumple que $\lim_{\|p\| \longrightarrow \infty} H(x,p) = +\infty$.

Sea $u(x,t) = \rho(t)$ donde ρ es no creciente, es decir, $\rho_t(t) \leq 0$ y consideramos $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

Tomamos $(x,t) \in M \times \mathbb{S}^1$ y $(p,t) \in D^+u(x,t)$ luego de la continuidad de u y por el Lema (4.1.2) existe una función ϕ tal que $\phi(x,t) = u(x,t)$, $d_x\phi = p$ y $\phi(y,t) > u(y,t)$ para $(y,t) \neq (x,t)$. De $\phi(x,t) = u(x,t)$ y $\phi(y,t) > u(y,t)$

tenemos que

$$\phi(y,t) - \phi(x,t) \geq u(y,t) - u(x,t),$$

y por lo tanto

$$u(x,t) - \phi(x,t) \geq u(y,t) - \phi(y,t),$$

esto es, $u - \phi$ tiene un máximo local en el punto (x,t).

Por otro lado, como $u(x,t) = \rho(t)$ entonces

$$d_x u(x,t) = d_x \rho(t) = 0, \tag{4.24}$$

y

$$u_t(x,t) = \rho_t. \tag{4.25}$$

Ahora bien

$$u_t + H(x,p) = u_t + H(x, d_x\phi) = u_t + H(x, d_x u),$$

sustituyendo $H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2$ en la igualdad anterior

$$u_t + H(x, d_x u) = u_t + \frac{1}{2}\|d_x u\|_x^2,$$

luego de (4.24) y (4.25) tenemos

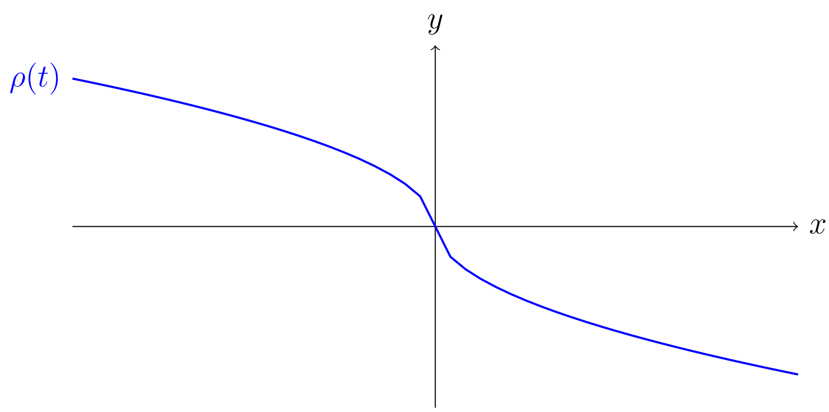
$$u_t + H(x, d_x u) = u_t + \frac{1}{2}\|d_x u\|_x^2 = \rho_t \leq 0,$$

por lo tanto $u_t + H(x, d_x\phi) \leq 0$. Con todo tenemos que $u(x,t) = \rho(t)$ es una subsolución de viscosidad de (4.23).

Por último veamos que existe una función ρ no creciente que no es localmente Lipschitz. Consideramos la función $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$\rho(t) = \begin{cases} -\sqrt{t} & si \quad t \geq 0 \\ \sqrt{|t|} & si \quad t < 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es



donde podemos observar que ρ es no creciente.

Supongamos (por el contrario) que $\rho : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Lipschitz, luego existe $K > 0$ tal que para toda $t \in [0,1]$ se tiene que

$$|\rho_t(t)| \leq K$$

es decir

$$\left| -\frac{1}{2\sqrt{t}} \right| \leq K,$$

lo cual es una contradicción, ya que cuando t tiende a 0 tenemos que $\left| -\frac{1}{2\sqrt{t}} \right|$ tiende a infinito, por lo que la derivada de ρ no está acotada. Por lo tanto ρ no es una función Lipschitz.

Como para el caso no-autónomo el hecho de que el hamiltoniano sea coercitivo no es suficiente, no fue posible adaptar los resultados del caso autónomo y optamos por recorrer otro camino.

Para demostrar que toda solución de viscosidad es una solución KAM-débil debemos mostrar que la solución de viscosidad debe satisfacer dos propiedades, la primera es que la solución está dominada y la segunda es que existe una curva calibrada.

4.3. Función dominada

El resultado siguiente nos garantiza que si u es una solución de viscosidad entonces u está dominada.

4.3.1 Proposición. *Sea L un lagrangiano que satisface las hipótesis* (**P1**) $-$ (**P4**) *en una variedad compacta M y H el hamiltoniano asociado. La función continua $u \in C(M \times \mathbb{S}^1)$ es una subsolución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = c \tag{H-J}$$

si y sólo si está $L + c-$dominada.

Demostración. Supongamos que $u \in C(M \times \mathbb{S}^1)$ es una subsolución de viscosidad de (H-J) y sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ y $\phi \in C(M \times \mathbb{S}^1)$ tal que $(\gamma(a), [a])$ es un máximo de $u - \phi$, esto lo podemos hacer ya que estamos trabajando sobre $\mathcal{C}((x,[s]),(y,[t]);n)$, el conjunto de curvas absolutamente continuas $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ con $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ y es tal que $[a] = [s]$ y $[b] = [t]$. Entonces

$$u(\gamma(b),[b]) - \phi(\gamma(b),[b]) \leq u(\gamma(a),[a]) - \phi(\gamma(a),[a]),$$

o equivalentemente

$$u(\gamma(b),[b]) - u(\gamma(a),[a]) \leq \phi(\gamma(b),[b]) - \phi(\gamma(a),[a]).$$

Luego

$$\begin{aligned}
u(\gamma(b),[b]) - u(\gamma(a),[a]) &\leq \phi(\gamma(b),[b]) - \phi(\gamma(a),[a]) \\
&= \int_a^b \phi_t(\gamma(t),[t]) + d_x\phi(\gamma(t),[t]) \cdot \dot{\gamma}(t)\ dt \\
&\leq \int_a^b [\phi_t(\gamma(t),[t]) + L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t),t) \\
&+ H(x, d_x\phi(\gamma(t),[t]),t)]\ \ dt,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de Fenchel (1.4). Como u es subsolución de viscosidad se cumple que

$$\phi_t + H(x, d_x\phi, t) \leq c,$$

así

$$u(\gamma(b),[b]) - u(\gamma(a),[a]) \leq \int_a^b L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t),t) + c\ dt,$$

con lo que u está $L+c-$dominada.

El recíproco se sigue del Corolario 4.0.2. □

Con este resultado garantizamos que si u es una solución de viscosidad entonces u está $L+c-$dominada. Ahora solo falta mostrar la existencia de una curva calibrada.

4.4. Existencia de la curva calibrada

No es tan inmediato demostrar la existencia de una curva calibrada, esta demostración se irá construyendo a partir de otros resultados.

Siguiendo a Mather en [12] definamos la función

$$h_L^t : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

de la siguiente manera

$$h_L^t(x, x') = \alpha_0 + \inf_{\gamma} \left\{ \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s)\ ds \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre $\mathcal{C}((x, [0]), (x', [t]); n)$.

4.4.1 Observación. *El semigrupo de Lax-Oleinik T_t^- y h_L^t satisface la siguiente relación*

$$T_t^- u(x) + \alpha_0 = \inf_{x \in M} \left\{ u(x) + h_L^t(x, x') \right\}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} T_t^- u(x) + \alpha_0 &= \inf_{\gamma} \left\{ u(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s)\ ds \right\} + \alpha_0 \\ &= \inf_{x \in M} \inf_{\gamma} \left\{ u(x) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s)\ ds \right\} + \alpha_0 \\ &= \inf_{x \in M} \left\{ u(x) + \left[\alpha_0 + \inf_{\gamma} \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s)\ ds \right] \right\} \\ &= \inf_{x \in M} \left\{ u(x) + h_L^t(x, x') \right\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, la hipótesis de que el flujo de Euler-Lagrange sea completo es muy importante para el caso no-autónomo, ya que esta hipótesis garantiza que es válido el teorema de Tonelli en este caso.

4.4.2 Teorema (Tonelli)**.** *Sea L un lagrangiano que satisface las hipótesis* $(\mathbf{P1}) - (\mathbf{P4})$ *en una variedad compacta M. Para toda a, b en $\mathbb{R}$ con $a < b$ y $(x, [0]), (x', [t])$ en $M \times \mathbb{S}^1$, existe en el conjunto de curvas absolutamente continuas $\mathcal{C}((x, [0]), (x', [t]); n)$ una curva que minimiza la acción.*

La demostración de este teorema podemos encontrarla en [10].
Gracias al teorema de Tonelli podemos garantizar la existencia de una curva minimizante.

4.4.3 Observación. *Para $t > 0$ y x, x' en M existe una curva minimizante $\gamma : [0,t] \longrightarrow M$ con $\gamma(0) = x$, $\gamma(t) = x'$ y tal que*

$$h_L^t(x,x') = \alpha_0 + \int_0^t L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s),s)\ ds. \tag{4.26}$$

Esta observación nos permite establecer el siguiente resultado.

4.4.4 Proposición. *Para cada $u \in C(M \times \mathbb{S}^1)$, $(x,[t]) \in M \times \mathbb{S}^1$ y cada $t > 0$ podemos encontrar una curva C^1 a trozos*

$$\gamma_{x,t} : [0,t] \longrightarrow M,$$

y tal que $\gamma_{x,t}(t) = x'$ y

$$\begin{aligned} T_t^- u(x) &= u(\gamma_{x,t}(0),[0]) + h_L^t(\gamma_{x,t}(0),\gamma_{x,t}(t)) \\ &= u(\gamma_{x,[t]}(0),[0]) + \int_0^t L(\gamma_{x,t}(s),\dot{\gamma}_{x,t}(s),s)\ ds. \end{aligned}$$

Demostración. De la Observación 4.4.1 tenemos que

$$T_t^- u(x) + \alpha_0 = \inf_{x\in M} \left\{u(x) + h_L^t(x,x')\right\}.$$

Sea

$$x \longmapsto u(x) + h_L^t(x,x')$$

la cual es una función continua sobre subconjuntos compactos, entonces existe $(y_x,[t]) \in M \times \mathbb{S}^1$ tal que

$$T_t^- u(x) + \alpha_0 = u(y_x,[0]) + h_L^t(y_x,x'). \tag{4.27}$$

Por otro lado de la Observación 4.4.3 para $t > 0$ existe una curva minimizante $\gamma_{x,t} : [0,t] \longrightarrow M$ con $\gamma_{x,t}(0) = y_x$ y $\gamma_{x,t}(t) = x'$ y tal que

$$h_L^t(y_x, x') = \alpha_0 + \int_0^t L(\gamma_{x,t}(s), \dot{\gamma}_{x,t}(s), s)\ ds, \tag{4.28}$$

así (4.27) queda dado como

$$T_t^- u(x) + \alpha_0 = u(\gamma_{x,t}(0), [0]) + h_L^t(\gamma_{x,t}(0), \gamma_{x,t}(t)). \tag{4.29}$$

Luego de (4.28) y (4.29)

$$T_t^- u(x) = u(y_x, [0]) + \int_0^t L(\gamma_{x,t}(s), \dot{\gamma}_{x,t}(s), s)\ ds.$$

□

Podemos establecer una cota para la acción.

4.4.5 Lema. *Sea $\tau > 0$. Existe una constante C_τ tal que para cada a en $\mathbb{R}$, x, y en M existe una curva*

$$\gamma : [a, a+\tau] \longrightarrow M$$

tal que $\gamma(a) = x, \gamma(a+\tau) = y$ y

$$A_L(\gamma(t)) \leq C_\tau.$$

Demostración. Por la compacidad de M, podemos considerar una curva geodésica minimizante $\gamma : [a, a+\tau] \longrightarrow M$ que conecta a x con y, cuya longitud es $d(x,y)$. Recordemos que al ser γ una curva geodésica entonces $\frac{d\gamma'(t)}{dt} = 0$, esto implica que $\|\dot{\gamma}(t)\| = cte$, así para cada $t \in [a, a+\tau]$ tenemos

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{d(x,y)}{\tau} \leq \frac{diam(M)}{\tau}. \tag{4.30}$$

Definamos

$$A_\tau = \left\{ L(x,v,[s]) : (x,v,[s]) \in TM \times \mathbb{S}^1, \|v\| < \frac{diam(M)}{\tau} \right\}$$

el cual es compacto, además por (4.30) $(\gamma(t), \dot\gamma(t), [t]) \in A_\tau$.
Si hacemos $\tilde{C}_\tau = \text{máx}\, A_\tau$ y tomando $\tau \tilde{C}_\tau = C_\tau$ obtenemos

$$A_L(\gamma(t)) = \int_a^{a+\tau} L(\gamma(s), \dot\gamma(s), s)\; ds \leq \tau \tilde{C}_\tau = C_\tau,$$

así

$$A_L(\gamma(t)) \leq C_\tau.$$

□

Ahora enunciamos una proposición de Compacidad a priori.

4.4.6 Proposición (Compacidad a priori)**.** *Para $\tau > 0$ existe un conjunto compacto $K_\tau \subset TM \times \mathbb{S}^1$ tal que para cada curva minimizante $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ con $b - a \geq \tau$ tenemos que, para cada $s \in [a,b]$*

$$(\gamma(s), \dot\gamma(s), s) \in K_\tau.$$

Demostración. Podemos suponer que $b - a = \tau$ pues para $t \in [a,b]$ existe $c \in (a,b)$ tal que $t \in [c, c+\tau] \subset [a,b]$.
Luego por el Lema 4.4.5, para una curva minimizante

$$\gamma : [a, a+\tau] \longrightarrow M$$

existe una constante C_τ tal que

$$A_L(\gamma(t)) \leq C_\tau.$$

Como $t \longmapsto L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)$ es continua, por el teorema de valor medio para integrales se sigue que existe $t_0 \in [a, a+\tau]$ tal que

$$L(\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0), t_0) = \frac{1}{\tau}\int_a^{a+\tau} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), s)\ ds \leq C_\tau.$$

Por otro lado, sea

$$B = \{\theta \in TM \times \mathbb{S}^1 : L(\theta) \leq C_\tau\}$$

el cual es un conjunto compacto y de la continuidad del flujo de Euler-Lagrange, $\phi_t(\theta)$, el conjunto

$$K_\tau = \bigcup_{|s|<t} \phi_s(B)$$

es compacto, por lo tanto existe $t_0 \in [a, a+\tau]$ tal que

$$(\gamma(t), \gamma(t), t) \in \phi_{t-t_0}(B) \subset K_\tau.$$

con lo que se sigue la afirmación. $\square$

Ahora ya es posible enunciar el resultado que nos garantiza la existencia de una curva calibrada.

4.4.7 Proposición. *Supongamos que $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $u(x,t) = T_t^- u(x) + ct$ para cada $t \in [0, \infty)$ entonces para cada $x \in M$, existe una curva γ_-^x, $(u, L, c)-$calibrada con*

$$\gamma_-^x : (-\infty, 0] \longrightarrow M$$

y tal que $\gamma_-^x(0) = x$.

Demostración. Por la Proposición 4.4.4 tenemos que para cada $t > 0$ existe una curva C^1 a trozos

$$\gamma_t : [0, t] \longrightarrow M$$

con $\gamma_t(t) = x$ y

$$T_t^- u(x) = (\gamma_t(0), 0) + \int_0^t L(\gamma_t(s), \dot{\gamma}_t(s), s)\ ds. \tag{4.31}$$

Como $u(x,t) = T_t^- u(x) + ct$, luego $u(x,t) - ct = T_t^- u(x)$ y así de (4.31) tenemos

$$u(x,t) - ct = (\gamma_t(0), 0) + \int_0^t L(\gamma_t(s), \dot{\gamma}_t(s), s)\ ds.$$

Ahora definamos $\tilde{\gamma}_t : [-t, 0] \longrightarrow M$ donde $\tilde{\gamma}_t(s) = \gamma_t(s+t)$, entonces $\tilde{\gamma}_t(0) = \gamma_t(t) = x$ y

$$\begin{aligned} u(\tilde{\gamma}_t(0), 0) - u(\tilde{\gamma}_t(-t), -t) &= ct + \int_{-t}^0 L(\tilde{\gamma}_t(s), \dot{\tilde{\gamma}}_t(s), s)\ ds \\ &= \int_{-t}^0 \big(L(\tilde{\gamma}_t(s), \dot{\tilde{\gamma}}_t(s), s) + c\ \big)\, ds \end{aligned} \tag{4.32}$$

así $\tilde{\gamma}_t$ es una curva $(u, L, c)-$calibrada.

Como las curvas $\tilde{\gamma}_t$ son minimizantes, por la Compacidad a priori 4.4.6 existe un subconjunto compacto $K_1 \subset TM \times \mathbb{S}^1$ tal que para toda $s \in [-t, 0]$ y para toda $t \geq 1$

$$(\tilde{\gamma}_t(s), \dot{\tilde{\gamma}}_t(s), s) \in K_1.$$

Más aún, como

$$\varphi_s(\tilde{\gamma}_t(0), \dot{\tilde{\gamma}}_t(0), 0) = (\tilde{\gamma}_t(s), \dot{\tilde{\gamma}}_t(s), s).$$

tenemos que los puntos $(\tilde{\gamma}_t(0), \dot{\tilde{\gamma}}_t(0), 0) \in K_1$ para todo t, entonces podemos encontrar una sucesión de tiempos $t_n \nearrow +\infty$ tal que

$$(\tilde{\gamma}_{t_n}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_{t_n}(0), 0) = (x, \dot{\tilde{\gamma}}_{t_n}(0), 0)$$

tiende a (x, v_∞, t) cuando n tiende a infinito.

Por otro lado, si consideramos la órbita negativa de $(x, v_\infty, 0)$, es decir, $\varphi_s(x, v_\infty, t)$ para todo $s \leq 0$, la cual es de la forma $(\gamma_-^x(s), \dot{\gamma}_-^x(s), s)$ donde $\gamma_-^x : (-\infty, 0] \longrightarrow M$ es una curva minimizante con $\gamma_-^x(0) = x$.

Más aún si $t' \in (-\infty, 0]$ es fijo, para n suficientemente grande la función

$$s \longmapsto (\tilde{\gamma}_{t_n}(s), \dot{\tilde{\gamma}}_{t_n}(s), s) = \varphi_s(\tilde{\gamma}_{t_n}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_{t_n}(0), 0)$$

está definida en $[t', 0]$ y por la continuidad del flujo de Euler-Lagrange esta sucesión converge uniformemente sobre el intervalo compacto $[t', 0]$ a la transformación

$$s \longmapsto \varphi_s(x, v_\infty, t) = (\gamma_-^x(s), \dot{\gamma}_-^x(s), s).$$

Así, al tomar el límite cuando t tiende a infinito en la igualdad (4.32) obtenemos

$$u(x, 0) - u(\gamma_-^x(t'), t') = -ct' + \int_{t'}^{0} L(\gamma_-^x(s), \dot{\gamma}_-^x(s), s)\ ds.$$

Por lo tanto γ_-^x es una curva $(u, L, c)-$ calibrada. $\square$

Si $u(x, t) = T_t^- u + ct$, podemos garantizar la existencia de una curva calibrada, es decir, existe una curva calibrada siempre que u está dado como el semigrupo de Lax-Oleinik. Para garantizar la existencia de una curva calibrada donde u no posea alguna dependencia, vamos a dar uno de los principales resultados de la tesis.

4.4.8 Teorema. *Sea L un lagrangiano que satisface las hipótesis* $(\mathbf{P1})-(\mathbf{P4})$ *en una variedad compacta M y H el hamiltoniano asociado, que satisface la hipótesis* $(\mathbf{P5})$. *Si una función continua $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución de* *viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = c. \tag{H-J}$$

entonces es solución KAM-débil, es decir

(1) $u \prec L + c$.

(2) Para cada $(x,[s]) \in M \times \mathbb{S}^1$ *existe una curva* $\gamma_-^x : [-\infty, 0] \longrightarrow M$, $(u, L, c)-$ *calibrada y tal que* $\gamma_-^x(0) = x$.

Demostración: Sea u una solución de viscosidad, en particular es subsolución de viscosidad luego por la Proposición 4.3.1 tenemos que u está $L + c-$dominada.
Por otro lado, definamos $v(x) = u(x,0)$ y $W(x,t) = T_t^- v(x) + ct$ la cual es solución de viscosidad por el Teorema 1.2.2, entonces por la Proposición 4.4.7 tenemos que existe una curva $(W, L, c)-$calibrada, γ_-^x tal que $\gamma_-^x(0) = x$. Debido al teorema de unicidad 3.0.4 tenemos que la solución de viscosidad es única, es decir

$$W(x,t) = u(x,t).$$

Con lo que existe la curva γ_-^x, $(u, L, c)-$calibrada, y por lo tanto W es periódica. Por lo tanto u es una solución KAM-débil. □

Si u es una solución de viscosidad, demostramos que u está dominada y que existe una curva $(u, L, c)-$calibrada, con estos resultados podemos establecer finalmente la equivalencia de las soluciones KAM-débiles y las soluciones de viscosidad, este es el resultado principal de nuestra tesis.

4.4.9 Teorema. *Sea L un lagrangiano que satisface las hipótesis* $(\mathbf{P1})-(\mathbf{P4})$ *en una variedad compacta M y H el hamiltoniano asociado, que satisface la hipótesis* $(\mathbf{P5})$. *Una función continua $u : M \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución KAM-débil de la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$u_t(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = c. \tag{H-J}$$

si y sólo si es una solución de viscosidad.

Demostración. Supongamos que u es solución KAM-débil de (H-J), por el Teorema 4.0.1 tenemos que cualquier solución KAM-débil de tipo negativo es solución de viscosidad. De la Definición 1.1.5 tenemos que si $u \in \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^-$ es solución KAM-débil, así concluímos que u es solución de viscosidad.

Recíprocamente, supongamos que u es solución de viscosidad, por el Teorema 4.4.8 se sigue que u es solución KAM-débil. Con lo que se demuestra la equivalencia de las soluciones. □

Es bien sabido que la equivalencia de las soluciones KAM-débiles y las soluciones de viscosidad para hamiltonianos autónomos es válida y con el resultado anterior demostramos que la equivalencia sigue siendo válida para hamiltonianos no-autónomos.

Capítulo 5

Conclusión

En el libro de Fathi [6], se demuestra la equivalencia entre las soluciones KAM-débiles y de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi autónoma.

Es natural cuestionarse que sucede con lagrangianos y hamiltonianos dependientes del tiempo, si al considerar la parte temporal, la equivalencia entre dichas soluciones se satisface.

Al retormar los resultados del libro de Fathi, no fue posible adaptarlos al caso no-autónomo, ya que en este caso se necesitan hipótesis adicionales sobre el lagrangiano y el hamiltoniano, las cuales encontramos al estudiar algunas propiedades de las soluciones KAM-débiles y de viscosidad.

En conclusión, si el lagrangino satisface las hipótesis $(\mathbf{P1}) - (\mathbf{P4})$ y el hamiltoniano asociado H satisface la hipótesis $(\mathbf{P5})$ las soluciones KAM-débiles y de viscosidad son equivalentes.

Apéndice A

Apéndice

Sea μ una medida en un espacio medible (X, Σ) y $\mathcal{M}(L)$ el conjunto de probabilidades de la σ-álgebra de Borel de $TM \times \mathbb{S}^1$ que tienen soporte compacto y que son invariantes bajo el flujo de Euler- Lagrange ϕ_t.

A.0.1 Definición. *Definamos el **soporte de** μ como*

$$supp\ \mu := \{\mathcal{A} \in \Sigma : \mu(\mathcal{A}) > 0\}.$$

A.0.2 Definición. *La **acción** de $\mu \in \mathcal{M}(L)$ está definida por*

$$A_L(\mu) = \int L\ d\mu.$$

A.0.3 Definición. *Dado $f : X \longrightarrow X$ decimos que μ es una **medida invariante** del espacio medible (X, Σ) si*

$$\mu(f^{-1}(\mathcal{A})) = \mu(\mathcal{A})$$

A.0.4 Definición. *Una medida es **ergódica** si los únicos conjuntos invariantes son los que tienen medida total o medida cero.*

A.0.5 Definición. *Una **k-forma diferenciable** es una asociación que a cada punto $p \in M$ le asigna una forma $k-$lineal alternante en T_pM, η_p, es decir*

$$\eta_p : (T_pM)^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una forma multilineal tal que

$$\eta_p(v_1, \ldots, v_i, v_j, \ldots, v_k) = (-1)\eta_p(v_1, \ldots, v_j, v_i, \ldots, v_k)$$

para toda $p \in M$.

A.0.6 Notación.

$$\Lambda_k(M) = \{k - \textit{formas diferenciales en } M\} \tag{A.1}$$

A.0.7 Definición. *Una forma diferencial $\omega \in \Lambda_r(M)$ es **cerrada** si su derivada exterior es cero, es decir, $d\omega = 0$.*

A.0.8 Definición. *Una 1-forma diferencial $\omega \in \Lambda_r(M)$ es **exacta** si existe una función suave $\eta \in \Lambda_{r-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$.*

A.0.9 Definición. *Definamos la clase de **cohomología de De Rham** de la siguiente manera*

$$H^1(M;\mathbb{R}) := \{1 - \textit{formas cerradas}\} \Big/ \{1 - \textit{formas exactas}\}.$$

A.0.10 Definición. *Si F es una función real valuada en un conjunto U que alcanza su punto mínimo y máximo en U, entonces*

$$\arg\min_{v \in U} F(v) = \{v^* \in U : F(v^*) \leq F(v), \forall v \in U\},$$

y

$$\arg\max_{v \in U} F(v) = \{v^* \in U : F(v) \leq F(v^*), \forall v \in U\}.$$

A.0.11 Definición. *Sea L un lagrangiano, definimos la* ***transformada de Legendre*** $\mathcal{L} : TM \times \mathbb{R} \longrightarrow T^*M \times \mathbb{R}$ *asociada a L dada por*

$$\mathcal{L}(x, v, t) = \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v, t) \right). \tag{A.2}$$

Bibliografía

[1] Aubry, S. *The devil's stair case transformation in incommensurate lattices*. In The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications, Springer, Berlin, Heidelberg, 221 – 245, 1982.

[2] Contreras, G., Iturriaga, R., *Global minimizers of autonomous Lagrangians*, 1999.

[3] Contreras, G., Iturriaga, R., y Sanchez-Morgado, H., *Weak solutions of the Hamilton-Jacobi equation for time periodic Lagrangians.*

[4] Crandall, M. G., Lions, P. L., *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society, **277**(1), 1 – 42, 1983.

[5] Crandall, M. G., Evans, L. C., y Lions, P. L., *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society, **282**(2), 487 – 502, 1984.

[6] Fathi, A., *Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics. Versión preliminar.*

[7] Fathi, A., *Weak KAM theory: the connection between Aubry-Mather theory and viscosity solutions of the Hamilton-Jacobi equation*, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 3, $597-621$, 2014.

[8] Fleming, W. H., Soner, H. M., *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Springer Science and Business Media, Vol. 25, 2006.

[9] Mañé, R., *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems. Nonlinearity*, $\mathbf{9}(2), 273$, 1996.

[10] Mather, J. N., *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*, Mathematische Zeitschrift, $\mathbf{207(1)}, 169-207$, 1991.

[11] Mather, J. N., *Existence of quasiperiodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, Topology, 21, $457-467$, 1982.

[12] Mather, J. N., *Variational construction of connecting orbits*, In Annales de línstitut Fourier, Vol. 43, No. 45 ,$1349-1386$, 1993.