



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS  
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y  
MATEMÁTICAS



---

# HISTORIA DE COLISIONES ENTRE AGUJEROS NEGROS PRIMORDIALES

---

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS**

P R E S E N T A:

**TADEO DARINEY GOMEZ AGUILAR PS1930**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. JUAN CARLOS HIDALGO CUÉLLAR**

**CO-DIRECTOR DE TESIS:**

**DRA. KAREN SALOMÉ CABALLERO MORA**

Tuxtla Gutierrez, Chiapas; Octubre 2022



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas  
10 de Octubre de 2022  
**Oficio No. FCFM/0449/22**

**Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuéllar**  
**Dr. Karen Salomé Caballero Mora**  
**Director de Tesis**  
**Co-Directora de Tesis**

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

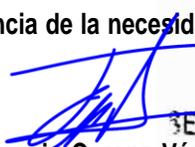
***“HISTORIA DE COLISIONES ENTRE AGUJEROS NEGROS PRIMORDIALES”.***

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestro en Ciencias Físicas del **Lic. Tadeo Dariney Gómez Aguilar** con matrícula escolar PS1930.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

**Atentamente**

“Por la conciencia de la necesidad de servir”



**SECRETARÍA ACADÉMICA**  
**FCFM**  
**Dr. Florencio Corona Vázquez**  
**Secretario Académico**

C.c.p. CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM  
Archivo / Minutario  
FCV /jmag



Código: FO-113-05-05

Revisión: 0

**CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.**

El (la) suscrito (a) TADEO DARINEY GÓMEZ AGUILAR,  
Autor (a) de la tesis bajo el título de “ HISTORIA DE COLISIONES ENTRE  
AGUJEROS NEGROS PRIMORDIALES ”  
presentada y aprobada en el año 20 22 como requisito para obtener el título o grado  
de MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS, autorizo a la  
Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que  
realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que  
contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se  
produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.
- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 19 días del mes de OCTUBRE del año 20 22.

TADEO DARINEY GÓMEZ AGUILAR  
Nombre y firma del Tesista o Tesistas

# Declaración

La presente tesis es el resultado de mi propio trabajo. En este se incluyen conceptos desarrollados por diversos autores quienes han sido citados y cuya referencia puede ser consultada en el apartado de bibliografía. Del mismo modo, las gráficas y tablas que se presentan han sido consultadas en su mayoría, a excepción de las incluidas en los capítulos 3 y 4, en los cuales se hace una revisión y el reporte de resultados, respectivamente.

Los márgenes al igual que el estilo de página y fuente, han sido establecidos por la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas de la Universidad Autónoma de Chiapas.

# Publicaciones

Aquellas partes de esta tesis que han sido publicadas o aceptadas para su publicación son los siguientes:

1. E. Erfani, T. D. Gomez-Aguilar and J. C. Hidalgo, “Hierarchical merger of primordial black holes in dwarf galaxies,” *JCAP* **09**, 034 (2022) doi:10.1088/1475-7516/2022/09/034 [arXiv:2205.08906 [astro-ph.CO]].

# Dedicación

Con mucho cariño para  
Dra. Karen Salomé Caballero Mora.

Al polvo de estrellas cuya consciencia ahora está en el más allá divino  
Fabian A. Cuesta, Martin G., Laila C., Luis E. y Eustolia C.

A mis padres  
G. Jady A. Cuesta y G. Rubisel G. Nigenda.

**En especial a ti.**  
Todos en quienes apoyé mis objetivos,  
y nunca se alejaron lo suficiente de mi,  
haciendo especial las más ocurrentes Ideas.

# Agradecimientos

Agradezco al Mtro. Alejandro Barrientos Alfaro, quien fue la primer persona que me habló sobre lo maravillosa que era estudiar una carrera en ciencias.

Agradezco a mi familia yogurth: LC. Adiel Cruz Alavarez, Lic. Fabiola Guevara Torres, L.A.E. Eduardo de la Cruz Dominguez, al MSc. Pedro Alfonso Valencia Esquipula, quienes han hecho de mi vida una experiencia maravillosa. De la misma manera, agradezco el cariño y amor fraternal de parte de mis grandes camaradas y a quienes puedo llamar mis hermanos de inolvidables momentos: Mtra. R. Carolina, Ing. Victor A. Perez C., Ing. Alejandro A. Gutierrez, Ing. Pablo G. Escobedo, Lic. Juan Alberto Escobar M. y a mi entrañable amigo jamaiquino Ing. Jorge Enrique Reyes Jorge.

Agradezco a mis amigos y vecinos de cuadra: Mtro. Roberto P. Aquino, Pepe Zenteno, Julio Alfaro, Pablo Cervantes, Ivonne Aguilar y Priscila Espinosa, que entre canciones y pequeños momentos, compartieron su tiempo y afecto conmigo.

Agradezco a mis colegas, los ingenieros: Edras A., Edgar, J. Martín, Walter A., Ricardito Aguilar, Alexis, Tacho, Aaron e Ivan. Así mismo a los profesores: Mtro. Carlos, Mtro. Luber, Mtro. Morazan y por supuesto Ing. Eneas.

Agradezco a la familia Cruz Alvarez, quienes me brindaron su apoyo y me dieron cobijo cuando necesite de un hogar. Gracias Mamá Laura, Don Adiel, Bryan y Yancy. Gracias por toda su hospitalidad y cariño.

Agradezco infinitamente a la Dra. Karen Salomé Caballero, por brindarme la oportunidad de trabajar a su lado y aprender así bajo su tutoría, la cual siempre me brindo motivación para continuar en el área de ciencias físicas. Ofrezco este trabajo en su honor.

Agradezco a los profesores quienes me dieron clases durante mi preparación al ingreso de la maestría y durante mi desarrollo en la misma: Dr. Peter Sloane, Dr. Jorge Mastache, Dra. Celia Escamilla, Dr. David Tamayo, Dr. Pavel Castro, Dr. Sendic Estrada, Dr. Cesar Alvarez, Dr. Filiberto y por supuesto gracias Dr. Christian.

Agradezco a mis compañeros y próximos maestros en ciencias físicas; Jeremias, Raul, Victor, Diego y Andrés. Quienes con su expertis en el área siempre estuvieron apoyándome; cuando las tareas se volvían duras o cuando no entendía algún concepto. Gracias totales.

Agradezco a mis amigos de la facultad: Dr. Victor A. Gonzales, al Lic. Wilver y las hijas de la madre Sierra, quienes siempre me permitieron expresarme con la libertad de mi ser. Gracias Dra. Rocio y gracias MSc. Arely.

Agradezco al Dr. Juan Carlos Hidalgo C. y la Dra. Estefanía R. Huitron, por todo su apoyo, consejos, cariño y confianza hacia mi persona. Sin ustedes, mi determinación para lograr mis metas no hubiese sido posible.

Agradezco a la L.G.D.T. J. Deara Gómez por su tiempo y cariño, en todos estos años. De igual modo agradezco a Lyanna y Molly, que con sus huellitas en esta vida brindaron compañía y los más divertidos instantes. En verdad, muchas gracias.

Todas estas experiencias no habrían sido posible sin el apoyo incondicional de mis Padres, cada logro que he cosechado en el trayecto de mi vida, ha sido por esas hermosas decisiones primordiales que tuvieron a bien tomar. Por todo eso y más... les amo con toda mi alma, Gracias totales.

# Resumen

La detección de pares de agujeros negros coalesciendo a través de su emisión de ondas gravitacionales ha abierto una nueva ventana a la astronomía. Los detectores implicados: LIGO, Virgo y KAGRA, se han constituido en una colaboración que registra constantemente eventos por coalescencia de pares de BHs (Abreviación en inglés de Black Holes; Agujeros Negros). De particular interés es el evento GW190521 que corresponde a la fusión de una binaria de BHs con 66 y 88 veces la masa del sol, respectivamente. La fusión produjo un Agujero Negro de 142 masas solares, superando así el límite en la creación de BHs por procesos estelares. Desde un punto de vista astrofísico esta detección nos lleva a replantear los modelos preponderantes de formación de BHs en el Universo. Y desde una perspectiva cosmológica, debe considerarse la posibilidad de que este evento y otros de similar naturaleza pudiera atribuirse a los Agujeros Negros Primordiales (por sus siglas en inglés PBHs; “Primordial Black Holes”). Stephen Hawking, propuso que la alta densidad en el Universo primordial puede sufrir un colapso gravitacional y formar un PBH. El modelo de evolución de estos objetos teóricos, requiere establecer ambientes y condiciones adecuadas para los parámetros orbitales. Peters y Mathews en la Ref. [80] desarrollaron el estudio sobre la producción y emisión de radiación gravitacional en la coalescencia de dos puntos de masa, lo que permite la estimación de parámetros orbitales como son el momento angular y la energía de los objetos astrofísicos que componen la binaria. Según M. Sasaki *et al.* en la Ref. [88], la naturaleza de dichos parámetros es estocástica, eso quiere decir que existirían binarias de PBHs formadas de manera aleatoria en el espacio y el tiempo, esto permite su abundancia y evolución a edades tempranas. Esta evolución implica un crecimiento por acumulación de radiación o bien por acumulación de materia mediante coalescencia con otros PBHs. Dado que la población de objetos detectados por la colaboración LVK (LIGO, Virgo y KAGRA), no es explicada totalmente con las teorías actuales, esto abre la posibilidad de que estos pares de agujeros negros progenitores de eventos de ondas gravitacionales tengan su origen en una población de PBHs.

En la presente tesis exploramos la probabilidad de producir múltiples colisiones de agujeros negros como producto de la evolución de una población monocromática de PBHs, eventualmente esto tiene como objetivo explorar la historia de colisiones y la posible distribución de masas de PBHs en los ambientes mencionados. Lo que permitirá comparar la masa de los productos resultantes de las secuencias de fusión, con los reportados por los detectores de ondas gravitacionales.

# Índice general

<b>1. Introducción a la cosmología</b>	<b>1</b>
1.1. Expansión del universo en distintas épocas . . . . .	1
1.1.1. Principio cosmológico . . . . .	1
1.1.2. Métrica Friedman-Lematrê-Robertson-Walker . . . . .	3
1.1.3. Componentes del universo . . . . .	8
1.2. Horizonte cosmológico . . . . .	15
1.3. Inflación . . . . .	17
1.3.1. Inflación cosmológica . . . . .	19
1.4. Agujeros Negros . . . . .	24
1.4.1. Definición y caracterización . . . . .	24
1.4.2. Singularidad de Schwarzschild . . . . .	25
1.4.3. Agujeros negros astrofísicos . . . . .	26
1.4.4. Agujeros negros primordiales . . . . .	29
1.5. Objetivos . . . . .	34
1.5.1. Objetivo general . . . . .	34
1.5.2. Objetivos específicos . . . . .	34
1.6. Hipótesis . . . . .	34
<b>2. Ondas gravitacionales en binarias de agujeros negros</b>	<b>36</b>
2.1. ¿Qué son las ondas gravitacionales? . . . . .	36
2.2. Propagación de ondas gravitacionales . . . . .	37
2.2.1. Teoría linealizada de la gravedad . . . . .	37
2.2.2. Solución de onda plana en la teoría linealizada . . . . .	39
2.2.3. Reacción de radiación y la formula del cuadrupolo . . . . .	41
2.3. Radiación gravitacional y el movimiento de dos puntos de masa . . . . .	44
2.4. Detección de ondas gravitacionales . . . . .	47
2.4.1. Detectores . . . . .	47
2.4.2. Primera detección . . . . .	49
2.4.3. Catálogos de observaciones . . . . .	51
2.5. Análisis de datos . . . . .	54

<b>3. Binarias de Agujeros Negros Primordiales</b>	<b>56</b>
3.1. Abundancias y distancias comóviles . . . . .	56
3.2. Formación de binarias . . . . .	59
3.3. Tiempos de coalescencia . . . . .	65
3.4. Espín de PBHs . . . . .	67
3.5. Ritmo de colisiones de PBHs . . . . .	69
3.6. Restricciones en abundancias de PBHs . . . . .	74
3.7. Ambientes propicios para múltiples coalescencias de PBHs . . . . .	77
<b>4. Coalescencia jerárquica</b>	<b>86</b>
4.1. Modelo para el ritmo de colisiones . . . . .	86
4.2. Historia de colisiones de agujeros negros primordiales . . . . .	90
4.3. Evolución en $N_{\text{PBH}}$ . . . . .	92
4.4. Evolución en $m_{\text{PBH}}$ . . . . .	94
<b>5. Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>A. Código para el análisis de datos del catalogo de LIGO</b>	<b>99</b>
<b>B. Derivación del ritmo de coalescencia</b>	<b>104</b>
<b>C. Código para el cálculo de múltiples coalescencias</b>	<b>107</b>

# Índice de figuras

1.1. Distribución de anisotropías en la radiación cósmica de fondo. Las inhomogeneidades constituyen desviaciones del valor medio de densidad en una parte por cien mil. . . . .	2
1.2. Mapa de galaxias observadas por 2dF a partir de estos mapas se infiere que a escalas $R \geq 300$ Mpc. Las distintas regiones del Universo repiten el mismo patrón, confirmando las propiedades de homogeneidad e isotropía. . . . .	3
1.3. Unidades de distancia en astronomía. El punto azul representa nuestro planeta, la distancia al sol (representado por el círculo amarillo) es de 1 AU (Unidad Astronómica). Los círculos amarillos en la parte superior representa una colección de estrellas, del mismo modo se ejemplifica a una estrella solitaria separada a 1 pc (parsec) del Sol. . . . .	4
1.4. Tipos de espacio: a) Espacio Plano, b) Curvatura Positiva (Geometría esférica) y c) Curvatura Negativa (Geometría Hiperbólica) . . . . .	5
1.5. La expansión del universo: La distancia física entre coordenadas co-moviles incrementa con el tiempo. . . . .	7
1.6. Periodos del Universo, las líneas representan como evolucionan las distintas densidades (de materia $\rho_m$ y radiación $\rho_r$ ) en función del tiempo, la intersección entre $\rho_r$ y $\rho_m$ representa el periodo de equivalencia; cuando nuestro universo estaba dominado de igual manera por sus componentes de materia y radiación. . . . .	14
1.7. Esquema sobre el comportamiento del radio de Hubble comóvil durante el período inflacionario (dibujado por el círculo rojo). . . . .	19
1.8. Evolución del parámetro de densidad $\Omega_T$ , durante el período inflacionario. $\Omega_T$ tiende a uno. . . . .	21
1.9. Representación del proceso inflacionario debido a la condición de <i>Slow-Roll</i> (por su trad. “Rodamiento lento”). La inflación termina dando lugar una época de recalentamiento. . . . .	22
1.10. Representación de una singularidad tipo agujero negro donde la curvatura diverge en el origen. . . . .	25
1.11. Representación gráfica del colapso gravitacional, las flechas que apuntan hacia el exterior de la esfera representan la fuerza que se opone a la gravedad, mientras que las líneas que inciden a la esfera, representan la fuerza gravitacional que compacta al objeto. . . . .	27

1.12. La formación de un agujero primordial se le atribuye al colapso de sobredensidades en el Universo primigenio. . . . .	30
1.13. El colapso de formación para agujeros negros primordiales se logra cuando se vence la presión de radiación. Esto sucede a masas mayores a un cierto valor umbral (criterio de Jeans) $M > M_J$ en las perturbaciones primigenias este criterio recae sobre la amplitud de las inhomogeneidades de materia $\delta > \delta_{\text{crit}}$ . . . . .	33
2.1. Para una onda gravitacional que se propaga por el eje $z$ , se tiene $A_{xx} \neq 0$ y $A_{xy} = 0$ . A) El anillo de partículas con masa inicialmente en reposo se verá desplazado de dos distintas formas. B) Al estirarse a lo largo del eje $y$ (ovaló verde) y comprimiéndose a lo largo del eje $x$ (el óvalo azul), luego medio ciclo más tarde se comprime y se estira en dirección contraria. A esto se llama el estado de polarización + (más). C) Por el contrario, $A_{xx} = 0$ y $A_{xy} \neq 0$ produce las distorsiones en forma cruzada y por tanto se denomina polarización $\times$ (cruz). . . . .	42
2.2. Elementos de una órbita elíptica . . . . .	45
2.3. Primera detección de ondas gravitacionales. Mediante el análisis de estas señales se puede observar la evolución en el tiempo, lo que permite inferir las masas de los objetos que producen la señal. Mientras que a través de la frecuencia aunado a las masas, se logra inferir la distancia luminosa. . . . .	50
2.4. Diagrama esquemático de eventos registrados por LIGO-Virgo-KAGRA. Los puntos de color oliva ubicados en la parte inferior, representan estrellas de neutrones detectadas por su generación de ondas electromagnéticas. Los puntos anaranjados representan agujeros negros producto de binarias de BHs de menor masa; por ejemplo el evento: GW191219. Los puntos azules representan agujeros negros de masa mucho mayor a $5M_{\odot}$ . . . . .	53
2.5. Histogramas obtenidos por el análisis de datos del catálogo GWTC-3, usando la librería PANDAS incorporada a Python. Se muestra la frecuencia en los valores de cada uno de los eventos reportados. El panel a) masa inicial de la fuente número 1, panel b) masa inicial de la fuente número 2, panel c) redshift de detección de la binaria y el panel d) la masa final resultante como producto de la coalescencia . . . . .	54
2.6. Pares de progenitores detectados, la línea establece el par de binarias, en el eje $x$ se representa la magnitud en $M_{\odot}$ de cada uno de los objetos, mientras que en el eje $y$ el redshift ( $z$ ) al cual se detectó el evento. . . . .	55
3.1. Esquema de una población de agujeros negros primordiales en una región de tamaño $R$ y con separación media $\bar{x}$ . . . . .	57

3.2.	Separación adimensional $\chi = r/x$ entre dos PBHs, reescalado por $\lambda = \frac{1}{f}(x/\bar{x})^3$ , como una función del factor de escala, en el límite cuando $\lambda \ll 1$ . La línea punteada muestra el momento en el que ocurre el desacople, mientras que el punto rojo muestra la separación del semi-eje mayor $a$ , para formar una binaria de PBHs. A su vez esta separación propia oscila con una amplitud $ \chi  \approx 0.2\lambda = 2a/x$ en la primera oscilación y reduce su amplitud (coalesce) en subsecuentes oscilaciones. . . . .	62
3.3.	Mecanismos de formación de binarias de PBHs. <b>a)</b> Formación de binarias en la época de radiación y <b>b)</b> Encuentro cercano de dos PBHs en el presente. . . . .	62
3.4.	Tiempo de coalescencia en pares de agujeros negros progenitores de las fuentes gravitacionales registradas por la colaboración LIGO, Virgo y KAGRA. Los puntos azules representan a los BHs que cuentan con una masa mayor a su complemento en la binaria. Análogamente los puntos naranjas representan a los BHs con menor masa dentro de la binaria. Se puede observar que a menor cantidad de masa el tiempo de coalescencia tiende a incrementar. . . . .	66
3.5.	Esquema de $e = e_{\max}$ como función de $a/a_{\max}$ . Se observa que el máximo valor de $a$ ocurre en $a_{\max} = x_{\max}/(1 + z_{\text{eq}})$ . . . . .	70
3.6.	Ritmo de coalescencia esperada para binarias de PBHs monocromáticos de $30M_{\odot}$ en la actualidad, considerando los dos mecanismos de formación. La curva azul representa el ritmo de coalescencia para los binarios de PBHs formados en la época dominada por radiación; ecuación (3.48). La curva roja para las binarias formadas en el universo actual; ecuación (3.50). La banda naranja es el ritmo de coalescencia $0.6 - 12 \text{ Gyr}^{-3}\text{yr}^{-1}$ requerido para justificar la primera detección de LIGO. . . . .	73
3.7.	Restricciones asociadas con la acumulación de agujeros negros primordiales. Todos estos límites dependen de varios parámetros astrofísicos y características cualitativas, como si uno tiene acreción de disco o esférica Ref. [21]. Los límites de LIGO/Virgo provienen de los ritmos de coalescencia reportados en O1 [11] y O2 [2] (línea continua) y del pequeño número de detecciones de ráfagas (línea discontinua inferior) y la no detección de un GWB estocástico (línea discontinua superior) en O2. . . . .	76
4.1.	Coalescencia jerárquica de agujeros negros primordiales. Ejemplificado para PBHs de $10M_{\odot}$ y tomando en cuenta la energía (masa) radiada en ondas gravitacionales en cada coalescencia. Cada color corresponde a una generación de PBHs y en el diagrama se muestran hasta la cuarta generación en 3 épocas de coalescencia. . . . .	92
4.2.	El número de agujeros negros creados a partir de la coalescencia de una población de agujeros negros primordiales monocromáticos, como función de la edad del Universo, comenzando su interacción en $t_h = 0.18 \text{ Gyr}$ ( $z = 20$ ). Cada periodo de generación está marcado por la línea vertical. Cada panel corresponde a las siguientes valores de masa para la población inicial: (a) $10M_{\odot}$ , (b) $1M_{\odot}$ , (c) $10^{-2}M_{\odot}$ , (d) $10^{-14}M_{\odot}$ . . . . .	93

4.3.	Porcentaje de la masa total en cada población (de una masa dada) para las poblaciones más abundantes. Esto se grafica para el caso donde $m_{\text{PBH}} = 10 M_{\odot}$ pero las fracciones son en gran medida independientes de la masa de PBH. La población original está incluida, donde el resto de la masa está en especies más pequeñas, y 4.7% se pierde por radiación gravitacional. . . . .	95
4.4.	Porcentaje de la masa total en cada población (de una masa dada) para las poblaciones más abundantes. No se incluye la población original, el porcentaje de masa en las tres poblaciones más numerosas generadas es del orden de 10% cada una, mientras que la población más masiva constituye más del 15% de la masa final. Como lo muestra la Figura 4.5 estos porcentajes son los mismos para un rango de masas iniciales de PBH en el cúmulo. . . . .	95
4.5.	Numero de agujeros negros primordiales por unidad de masa. Cada una de las barras azules representa la evolución, a cada época, en la cantidad de numero población inicial de $10 M_{\odot}$ . . . . .	96

# Índice de tablas

1.1. Componentes del universo y sus parámetros cosmológicos: parámetro de densidad $\Omega_i$ , parámetro de la ecuación de estado $\omega_i$ ; y su comportamiento: evolución de la densidad $\rho(a)$ , factor de escala $a(t)$ , parámetro de Hubble $H(t)$ . . . . .	15
2.1. Diferencia entre el monopolo y dipolo, electromagnético y gravitacional. El monopolo de masa en la radiación gravitacional, representa la masa-energía total conservada en un sistema, por lo que no emite radiación en el orden dominante. De manera similar, el dipolo de masa, corresponde al centro de masa de un sistema y su primera derivada representa el impulso, que también es una cantidad conservada, por lo que el dipolo de masa tampoco emite radiación, excepto en órdenes subdominantes. . . . .	43
2.2. Elementos de la base de datos, actualmente se cuenta con 90 eventos registrados de ondas gravitacionales. . . . .	51
4.1. Las columnas primera y segunda, muestran la masa y el número de la población original de PBH, respectivamente. La tercera columna representa la masa restante del núcleo después de cuatro épocas. La última columna muestra el porcentaje final (presente) de la población original de PBH en términos de masa. Es importante notar que los resultados en las columnas 3 y 4 son prácticamente independientes de cada caso considerado. . . . .	93

# Introducción

De manera inmediata, el presente trabajo solo puede beneficiar a aquellos grupos especializados de investigación en el área de ciencias básicas y aplicadas. Las técnicas de programación en el análisis de información, permiten al lector con conocimientos en física o computación, una forma práctica de utilizar las librerías asociadas al lenguaje de programación PYTHON. Debido a que este trabajo ha sido desarrollado bajo la línea de investigación en física teórica y computacional, fundamentamos nuestras ideas con teorías en cosmología primordial, posteriormente modelando el comportamiento de nuestros objetos de estudio con herramientas matemáticas sobre la dinámica estelar, y simulamos a partir de un lenguaje de programación. A continuación se expone una breve descripción de lo que podrá encontrar en el presente trabajo.

El primer capítulo, brinda al lector los conceptos básicos, sobre la cosmología moderna. Describiendo en las secciones: Principios y descripción del universo temprano, definiciones, métricas, unidades de medida, clasificación de agujeros negros debido a su cantidad de masa o bien a su mecanismo de formación, las condiciones para formar un agujero negro. Al finalizar, el lector podrá estar contextualizado para entender los objetivos e hipótesis del trabajo de investigación, que son presentados en las secciones finales de este capítulo.

Con base a la hipótesis, el capítulo 2, ofrece una descripción sobre las ondas gravitacionales, el estudio de estas requiere una caracterización que es dada por las observaciones de los detectores involucrados. Es por ello que la estructura de este capítulo se basa en responder ¿Que son las ondas gravitacionales? ¿Como se producen? ¿Cual es su comportamiento? ¿Como se detectan? ¿Como se clasifican?.

El capítulo 3, extrapola los conceptos básicos sobre agujeros negros primordiales, vistos en el capítulo 1. Combinándolos con el mecanismo de formación de ondas gravitacionales, descritos en el capítulo 2. La revisión de trabajos de investigación de diversos autores, permiten discutir sobre la caracterización en el comportamiento de pares de PBHs, así como también conocer las restricciones referentes a las abundancias de estos objetos, y de igual manera conocer cuáles son los ambientes más propicios para tener un modelo descriptivo que permita validar o refutar nuestra hipótesis.

Tomando en consideración los conceptos vistos y las ideas desarrolladas a lo largo de los capítulos 1, 2 y 3, se presenta, en el capítulo 4, el modelo derivado para llevar a cabo el

estudio sobre coalescencia jerárquica en ambientes dominados por materia oscura en forma de agujeros negros primordiales. Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones a las cuales hemos llegado conforme a los resultados obtenidos mediante cálculos numéricos. Como contenido adicional, se agregan 3 apéndices, en los que se incluyen los códigos desarrollados y empleados para el análisis de datos, así como también para generar las múltiples coalescencias, aunado a una derivación explícita de la ecuación que caracteriza el fenómeno a describir.

# Capítulo 1

## Introducción a la cosmología

Desde la antigüedad el ser humano ha buscado comprender los aspectos de la naturaleza que le rodea, desde aquel hombre primitivo interactuando con el fuego, hasta aquellos que se deleitaron con el cielo nocturno y agenciaron tal majestuosidad a Dioses; el inicio de "Natura naturans". Así, conforme el tiempo avanzaba, la curiosidad y tenacidad de comprender nuestro lugar en el cosmos, surgieron las preguntas más profundas de toda nuestra especie: ¿De donde venimos? ¿Por qué estamos aquí?

Durante el proceso de nuestra propia evolución, y el ferviente deseo de seguir descubriendo, nos ha permitido desarrollar teorías que expliquen como funciona el universo. Un universo que a grandes distancias da la impresión de inmutabilidad. La posición aparente de que las estrellas están estáticas ante el movimiento de nuestro planeta, es un ejemplo de ello. Sin embargo veremos que esta impresión de inmutabilidad es ilusoria. Las observaciones a examinar en este capítulo nos presenta que la naturaleza del Universo se encuentra en un estado en evolución, el presente capítulo tiene como finalidad introducir los conceptos básicos necesarios para la comprensión en el desarrollo de los capítulos subsecuentes.

### 1.1. Expansión del universo en distintas épocas

#### 1.1.1. Principio cosmológico

Citando al astrónomo Carl Sagan “El cosmos es todo lo que es, todo lo que fue y todo lo que será”, desde una perspectiva heurística podemos considerarnos privilegiados por

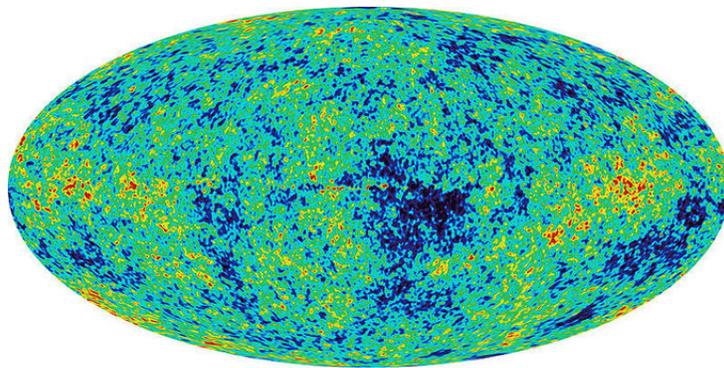
nuestro lugar como espectadores del escenario cósmico, sin embargo la piedra angular de la cosmología moderna es la de considerar que nuestro lugar en el Universo no es para nada especial. Esto, en esencia es conocido como el principio cosmológico; una idea tan poderosa como sencilla.

### **Principio cosmológico**

*A escalas suficientemente grandes, la distribución de materia en el universo es homogénea e isotrópica.*

La *homogeneidad* es la propiedad que el universo se ve idéntico en cada punto en el espacio, mientras que la *isotropía* es la propiedad de que este se vea igual en cada dirección. Matemáticamente, esto significa que si describimos la densidad de materia por una función  $\rho$ , esta no puede ser una función de la posición: Esto debería de ser la misma en cualquier región del espacio, siendo únicamente dependiente del tiempo. Entonces el principio cosmológico puede ser formulado de forma más simple como  $\rho = \rho(t)$  a escalas suficientemente grandes. Si nuestro lugar en el cosmos no es para nada especial, esto podría llevarnos a cuestionarnos acerca del origen del Universo.

En años anteriores se han desarrollado tecnologías para el punto donde el principio cosmológico puede ser probado, a continuación se presentan dos evidencias sobre lo expresado en nuestra definición.

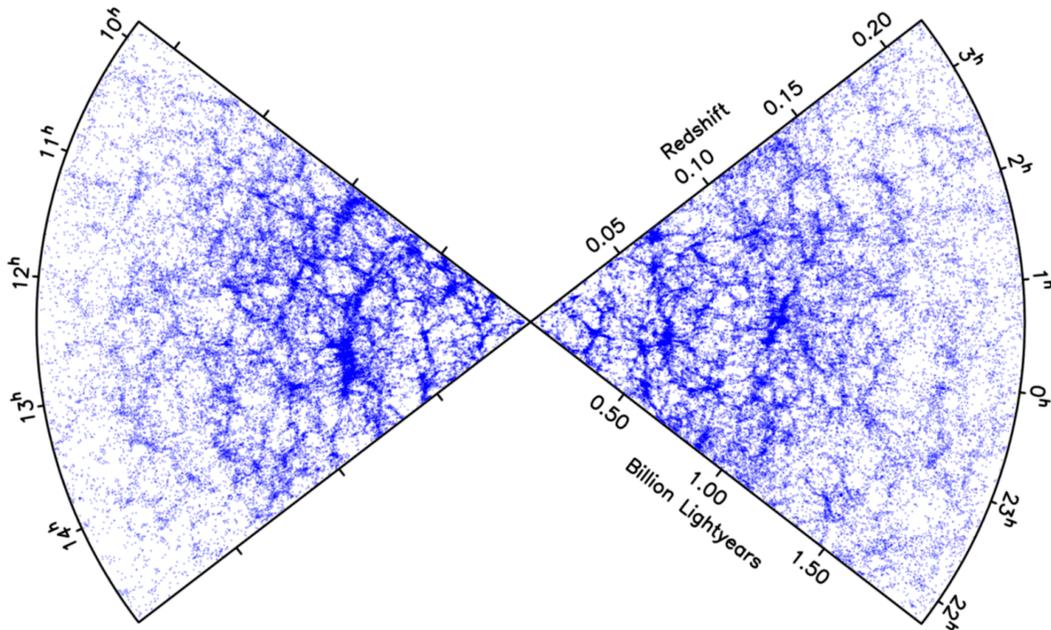


**Figura 1.1:** Distribución de anisotropías en la radiación cósmica de fondo. Las inhomogeneidades constituyen desviaciones del valor medio de densidad en una parte por cien mil.

- La radiación del fondo de micro-ondas (Por sus siglas en ingles CMB; Cosmic Microwave Background Radiation) puede ser considerada como la remanente energética

del Big Bang, además esta compuesto de una cantidad uniforme de fotones que llena todo el espacio y proporciona una imagen del universo primordial, de aproximadamente 14 mil millones de años. La figura 1.1 muestra lo que llamamos *Universo conocido*.

- El estudio del *redshift* (corrimiento al rojo) ha proporcionado un mapeo de como las galaxias se han extendido a distancias cercanas a  $2 \times 10^9$  años luz. Tal como se muestra en la Figura 1.2



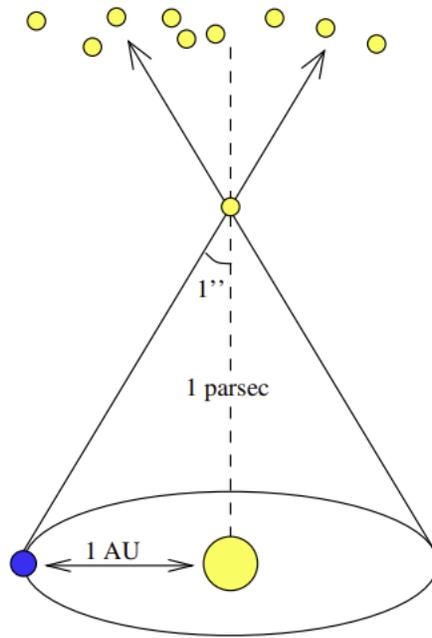
**Figura 1.2:** Mapa de galaxias observadas por 2dF a partir de estos mapas se infiere que a escalas  $R \geq 300$  Mpc. Las distintas regiones del Universo repiten el mismo patrón, confirmando las propiedades de homogeneidad e isotropía.

### 1.1.2. Métrica Friedman-Lematrê-Robertson-Walker

A manera de una definición rigurosa, la métrica dicta la distancia física actual entre dos puntos infinitesimalmente cercanos en el espacio-tiempo definidos en algún sistema arbitrario de coordenadas.

La distribución de materia y radiación en el universo es homogénea e isotópica. Sin embargo antes de entrar en materia, definiremos las distancias en el universo. Primero intro-

duciremos algunas unidades, como es la *Unidad Astronómica* comúnmente denotada AU (De las siglas en Ingles; Astronomical Units)  $1\text{AU} \approx 1.5 \times 10^{11}\text{m}$ . Esta unidad de longitud se obtiene a partir del promedio de la distancia entre la tierra y el sol. No obstante para distancias a objetos que están fuera de nuestro sistema solar es mucho más común usar el *año luz*<sup>1</sup> simbolizado como ly, dado por  $1\text{ly} \approx 9.5 \times 10^{15}\text{m}$ . Sin embargo la mayoría de los astrónomos prefieren usar el *parsec* denotado como pc. Esta última unidad esta definida como la distancia a la cual un astro presenta un arcosegundo de paralelaje en el transcurso de un año, esto es  $1\text{pc} \approx 3.26 \text{ ly}$ .



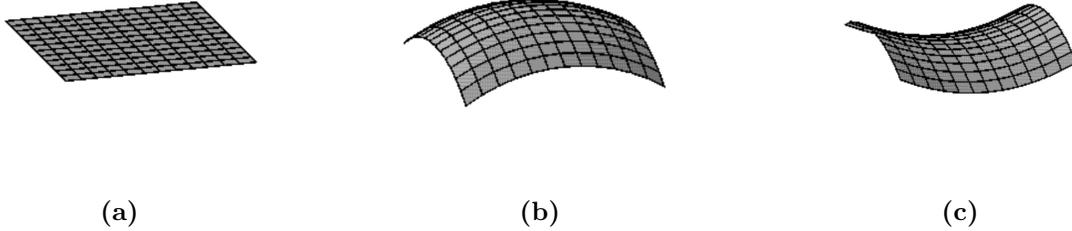
**Figura 1.3:** Unidades de distancia en astronomía. El punto azul representa nuestro planeta, la distancia al sol (representado por el círculo amarillo) es de 1 AU (Unidad Astronómica). Los círculos amarillos en la parte superior representa una colección de estrellas, del mismo modo se ejemplifica a una estrella solitaria separada a 1 pc (parsec) del Sol.

Esta unidades proveen una buena forma de medir distancias, la Figura 1.3, desde la estrella más cercana; Próxima Centauri a una distancia de 1.3 pc o bien la distancia al centro de nuestra galaxia, la Vía Lactea, aproximadamente  $8 \times 10^3$  pc u 8 kpc.

Regresando al tema principal, al hablar de distancia entre dos puntos, es necesario conocer que tipo de geometría es la indicada para describir nuestro universo. Es aquí donde la

<sup>1</sup>Como sabemos, esta unidad representa la distancia que recorre la luz en un año

obra magna de Albert Einstein; la teoría de la relatividad, toma relevancia. Y gracias al principio cosmológico, podemos limitar nuestro modelo de descripción en tres tipos de geometrías espaciales (Ver Figura 1.4).



**Figura 1.4:** Tipos de espacio: a) Espacio Plano, b) Curvatura Positiva (Geometría esférica) y c) Curvatura Negativa (Geometría Hiperbólica)

Es muy útil escribir estas métricas en una forma unificada. Por lo general se utilizan las coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ , del tal manera que:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2/R^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad \text{con } k = \begin{cases} +1 & \text{Esférica} \\ 0 & \text{Euclidiana} \\ -1 & \text{Hiperbólica} \end{cases} \quad (1.1)$$

El uso principal de una métrica es describir la geometría de algún espacio. Sin embargo, un concepto extremadamente útil de la teoría de la relatividad es el espacio-tiempo. La idea es muy simple si queremos describir un suceso que ocurre en cierto lugar y en cierto momento debemos especificar no solo las tres coordenadas espaciales sino también una cuarta “coordenada”, el tiempo en el que ocurre el suceso[44]. El concepto de espacio-tiempo nos indica que las distancias entre eventos están ligadas al intervalo de tiempo entre ellos de la forma en como lo dicta la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Por lo tanto, la métrica de un espacio plano al agregarse la cuarta dimensión temporal, puede ser escrita como:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

donde las letras griegas  $\mu$  y  $\nu$  son usadas para representar las cuatro componentes, las cuales van del rango de 0 a 3. Los índices espaciales denotados comúnmente por letras latinas van de 1 a 3 y convencionalmente se usa 0 para la componente del tiempo, de este modo es posible describir un 4-vector arbitrario como  $A^\mu = (A^0, A^i)$ . Por otro lado, la distinción entre índices como superíndices y subíndices, radica en que los primeros están asociados con vectores contravariantes y los últimos con vectores covariantes. Estos dos tipos de vectores pueden reescribirse mediante la operación de contracción de índices al usar el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , esto es

$$\begin{aligned} A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu \\ A^\mu &= g^{\mu\nu} A_\nu, \end{aligned} \tag{1.3}$$

La relatividad especial es descrita por el espacio-tiempo de Minkowski con la métrica:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  donde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

En particular la métrica de Minkowski está dada por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{1.5}$$

lo que equivale a poner  $\eta_{00} = -1$  y  $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$  en el tensor de métrico de Minkowski ec. (1.4). Equivalentemente se dice que la signatura es  $(-+++)^2$ . Además esta métrica es invariante bajo transformaciones de Lorentz, es decir que no depende de la velocidad u orientación del marco de referencia del evento. Por otro lado, para la descripción del Universo, las ecuaciones de Einstein que rigen la evolución de la métrica indican que para un máximo espacio simétrico que satisface el principio cosmológico, la métrica debe ser consistente para un espacio con secciones espaciales homogéneas e

---

<sup>2</sup>En este trabajo utilizaremos esta signatura  $(-+++)$ . Otra convención, utilizada en otros trabajos consiste en utilizar  $\eta_{00} = 1$  y  $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$ . Entonces la signatura es de la forma  $(+---)$ .

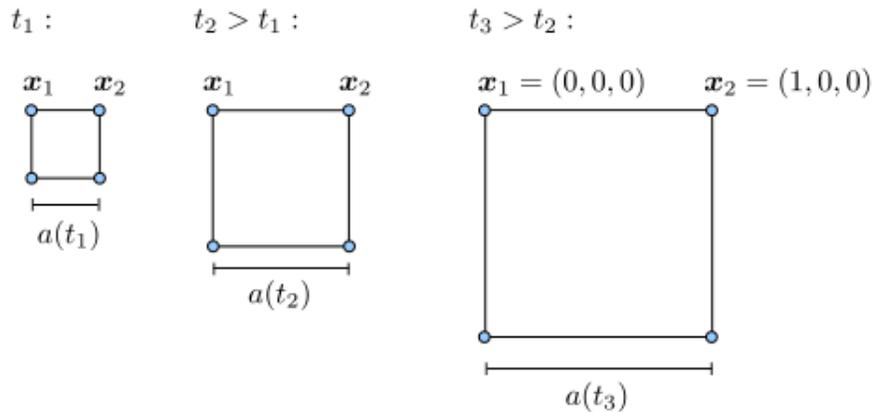
isotrópicas, y esta es conocida como la métrica de Friedman-Lematrêe-Robertson-Walker (por sus siglas FLRW) la cual puede ser escrita:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (1.6)$$

donde  $(r, \theta, \phi)$  son coordenadas co-moviles,  $a(t)$  es el factor de escala; no tiene unidades y permite cambiar distancias a lo largo del tiempo.  $k$  puede tomar los valores  $+1, -1$  o  $0$  como se definió en la ec. (1.1). Una forma conveniente en la cual podemos expresar la métrica FLRW es usando coordenadas normalizadas al tiempo presente, etiquetadas con un subíndice “0”, es decir

$$a(t) \equiv \frac{R(t)}{R_0}, \quad r \equiv R_0 \hat{r}, \quad (1.7)$$

El factor de escala es acorde a lo deseado en cuanto a la evolución que preserva homogeneidad e isotropía. En la actualidad tenemos una evidencia sólida de la expansión uniforme del universo. Esto significa que en épocas tempranas del cosmos, las distancias entre nosotros y las galaxias eran mucho muy pequeñas a las que actualmente medimos. Podemos ejemplificar esta idea usando nuestra intuición, imaginando una especie de plano dividido en áreas cuadradas y cada sección representa una región del espacio-tiempo, a manera que el tiempo fluye, las regiones van creciendo uniformemente pero los objetos mantienen sus coordenadas (ver Figura 1.5).



**Figura 1.5:** La expansión del universo: La distancia física entre coordenadas co-moviles incrementa con el tiempo.

Debido a que toda nuestra información observacional acerca del universo viaja a través de ondas de luz y, más recientemente, ondas gravitacionales. Para interpretar correctamente lo que vemos, es necesario comprender como cada onda viaja en un espacio tiempo en expansión. Es aquí donde el concepto de *redshift* (por su Trad. “corrimiento al rojo”) entra en juego. El *redshift cosmológico* es dependiente de  $a$ ; la expansión general del espacio durante el tiempo de viaje de luz.

El parámetro  $z$  del corrimiento al rojo es definido como el incremento fraccional en la longitud de onda observada,

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1 - a(t_1)}{a(t_1)} \Rightarrow 1 + z = \frac{1}{a(t_1)}, \quad (1.8)$$

donde  $\lambda_0 = \lambda_1(a(t_0)/a(t_1))$ . Esto nos dice que la longitud de onda de la luz observada difiere de la de la luz emitida. A manera de ser consistentes con la literatura relevante se adopta  $a(t_0) = 1$ , y para tiempos tempranos en el Universo, se expresa en términos del redshift  $z$ . Es decir, hoy estamos en  $z = 0$  y entre mayor sea el valor de  $z$  más al pasado nos encontramos<sup>3</sup>.

El ritmo de expansión del universo se caracteriza por la parámetro Hubble el cual depende del factor de escala:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.9)$$

Cuando consideramos el ritmo de expansión actual, es decir  $H(t = t_0)$ , se denomina constante de Hubble  $H_0$ . Como el valor de la constante de Hubble aún no se conoce con mucha precisión, es convencional denotarla mediante el parámetro adimensional  $h$ , tal que  $H_0 = 100 h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [9].

### 1.1.3. Componentes del universo

Las componentes del Universo pueden ser descritas como un fluido perfecto que permea todo el espacio y dicta la expansión del universo. La dinámica del factor de escala está dictada por la densidad de energía  $\rho(t)$  a través de la ecuación de Friedmann la cual

---

<sup>3</sup>Es posible hallar la edad del universo dado un valor de redshift

podemos derivar de la métrica FLRW, definida en la ec. (1.6), utilizando las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

donde  $\Lambda$  es la constante cosmológica,  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein,  $g_{\mu\nu}$ , es el tensor métrico de FLRW, el cual se define como

$$g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, a, a, a), \quad (1.11)$$

$R_{\mu\nu}$  es el tensor de curvatura definido de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu,\rho} - \Gamma^\rho{}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^\rho{}_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}, \quad (1.12)$$

a esta ecuación también se le conoce como tensor de Riemann y cumple con

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta\sigma\rho} = -R_{\beta\alpha\rho\sigma}, \quad (1.13)$$

llamadas identidades de Bianchi.

Usando la definición del tensor métrico ec. (1.11) junto con la ec. (1.12), podemos calcular la traza del tensor de Riemann, es decir, al hacer  $R_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}R_{\gamma\alpha\delta\beta}$ , esto nos provee la definición del escalar de curvatura (también llamado escalar de Ricci):

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \quad (1.14)$$

Por otro lado cada elemento denotado por  $\Gamma$  en la ec. (1.12), se le conoce como símbolos de Christoffel, y se calculan a partir de la derivación del tensor métrico ec. (1.11). Estos son de la forma:

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \quad (1.15)$$

La ec. (1.10) es en general un conjunto complicado de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales acopladas para los diez elementos de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Sin embargo, pueden exhibir soluciones analíticas simples en presencia de simetrías genéricas,

por ejemplo, bajo el supuesto de la métrica FLRW los únicos términos de curvatura que no desaparecen están dados por

$$R_0^0 = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (1.16a)$$

$$R_j^i = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2K}{a^2} \right) \delta_j^i, \quad (1.16b)$$

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right), \quad (1.16c)$$

La geometría del espacio-tiempo está determinada por las ecuaciones (1.16a)-(1.16c), luego para resolver las ecuaciones de Einstein solo necesitamos especificar el contenido de materia bajo consideración. Y recordando nuestra premisa del Universo como fluido perfecto podemos asumir que el tensor de energía momento, denotado por  $T^{\mu\nu}$  es de la forma

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (1.17)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $P$  es la presión isotrópica del fluido, ambas medidas por un observador en un marco inercial local en el que el fluido se encuentra en reposo. Además esto tiene una divergencia covariante nula, es decir  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ . Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein usando estas condiciones, proporcionan dos expresiones independientes, que juntas producen las ecuaciones cosmológicas, en las que  $a(t)$  se calcula en las condiciones antes mencionadas y se les conocen como ecuaciones de Friedmann-Lematrîe-Robertson-Walker; simplemente nos referimos a ellas como ecuaciones de Friedmann.

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{Kc^2}{R^2 a^2} \quad (1.18a)$$

$$\dot{H} + H^2 = -4\pi G(\rho + 3P) \quad (1.18b)$$

Como ya sabemos  $K = -1, 0, +1$  determina la curvatura del espacio,  $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  es la constante gravitacional de Newton y  $R$  algún valor de escala. Sin embargo, la ec. (1.18a) no es suficiente para describir la evolución del cosmos, para ello es necesario otra ecuación, y a partir del tensor de conservación de energía-momento previamente

definido en la ec. (1.17), nos conduce a la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (1.19)$$

Para resolver el conjunto completo de ecuaciones cosmológicas, aún necesitamos especificar una condición adicional, por ejemplo, la presión para cada tipo de elemento que compone el Universo. La suposición habitual, y bien fundamentada, es que existe una contribución de presión asociada a cada densidad de energía, de modo que  $P \equiv P(\rho)$ . Tal relación se conoce como la ecuación de estado. Las ecuaciones de Friedmann (1.18a), la conservación de la energía-momento (1.17) y la ecuación de estado  $P = P(\rho)$  son, por tanto, las expresiones fundamentales que describen la dinámica de un universo homogéneo e isotrópico.

Para comprender las propiedades dinámicas del universo, primero debemos tener en cuenta todo su contenido. Centrémonos en los fluidos perfectos que satisfacen, en general, una ecuación de estado dependiente del tiempo  $\omega(a)$ , de la forma

$$P = \omega(a)\rho \quad (1.20)$$

Para cualquier componente con  $\omega$  constante, la ecuación de continuidad (1.19) puede integrarse fácilmente para dar

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (1.21)$$

Además, en un universo dominado por la densidad de energía  $\rho$ , la ecuación de Friedmann conduce a la evolución temporal del factor de escala:

$$a \propto t^{2/3(1+\omega)}, \quad \forall \omega \neq -1. \quad (1.22)$$

En síntesis, la evolución de un universo descrito como un fluido perfecto a través de sus componentes, se conoce cuando se especifica su ecuación de estado. El modelo estándar  $\Lambda$ -Cold DarkMatter ( $\Lambda$ CDM) se basa en cuatro componentes principales, descritos por radiación (fotones, neutrinos sin masa), materia (bariones), la inclusión de un componente de materia oscura (DM) y energía oscura ( $\Lambda$ ). El comportamiento de cada uno de estos componentes se resume a continuación:

## Radiación

Esta componente relativista dominó durante las primeras etapas del universo. La radiación se caracteriza por una presión asociada  $P_r = \rho_r/3$ , con ecuación de estado  $\omega_r = 1/3$ . La evolución en su densidad de energía y factor de escala quedan dados por<sup>4</sup>:

$$\rho_r(t) \propto a^{-4}, \quad \text{y} \quad a(t) \propto t^{1/2}. \quad (1.24)$$

## Materia

Cualquier tipo de material con una presión insignificante a menudo se denomina “polvo” y está representado por una ecuación de estado  $\omega_m = 0$ , con densidad de energía dada por

$$\rho_m(t) \propto a^{-3}, \quad \text{y} \quad a(t) \propto t^{2/3}. \quad (1.25)$$

El contenido total de materia del universo se presenta en varias formas diferentes. Además de la familiar materia bariónica, sin embargo las observaciones de la estructura a gran escala sugieren que la mayor parte del contenido galáctico se encuentra en forma de materia no bariónica, denominada materia oscura (por sus siglas en inglés DM; “*Dark Matter*”).

La existencia de materia oscura (DM) se ha inferido a partir de sus manifestaciones gravitatorias a través de las curvas de rotación planas de las galaxias, las relaciones masa-luz en los cúmulos de galaxias y las lentes gravitatorias de las fuentes de fondo [15, 90].

## Vacío

A partir de las ecuaciones de Einstein ec. (1.10) es posible asociar a la densidad de energía del vacío, dada por

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (1.26)$$

---

<sup>4</sup>La densidad de energía de radiación total  $\rho_r$  en el universo puede escribirse como la suma de dos contribuciones principales: fotones ( $\gamma$ ) y neutrinos sin masa ( $\nu$ ):

$$\rho_r(t) = \rho_\gamma(t) + \rho_\nu(t). \quad (1.23)$$

Durante la evolución del Universo, mientras la materia y la densidad de radiación se diluyen, la densidad de energía del vacío ha permanecido con el mismo valor constante  $\rho_\Lambda$  (Ver Figura 1.6). La energía del vacío se puede modelar como un fluido perfecto con presión negativa igual a  $P_\Lambda = \rho_\Lambda$ , que corresponde a una ecuación de estado  $\omega_\Lambda = -1$ . La constante cosmológica también puede considerarse como la forma más simple de un componente de la “energía oscura”, comúnmente considerado como el principal candidato para explicar la aceleración actual del universo [23, 79].

## Curvatura

La contribución de la curvatura espacial se puede considerar como cualquier otro componente de energía definiendo una densidad de energía ficticia:

$$\rho_K \equiv -\frac{3K}{8\pi G}a^{-2} \quad (1.27)$$

Esta densidad de energía se describe mediante una ecuación de estado  $\omega_K = -1/3$ , para la cual el factor de escala evoluciona proporcionalmente al tiempo cósmico  $a \propto t$ . Además el valor total de  $\rho$  tal que  $K = 0$  es llamado **la densidad crítica** y tiene la siguiente forma:

$$\rho_{\text{cr}} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.28)$$

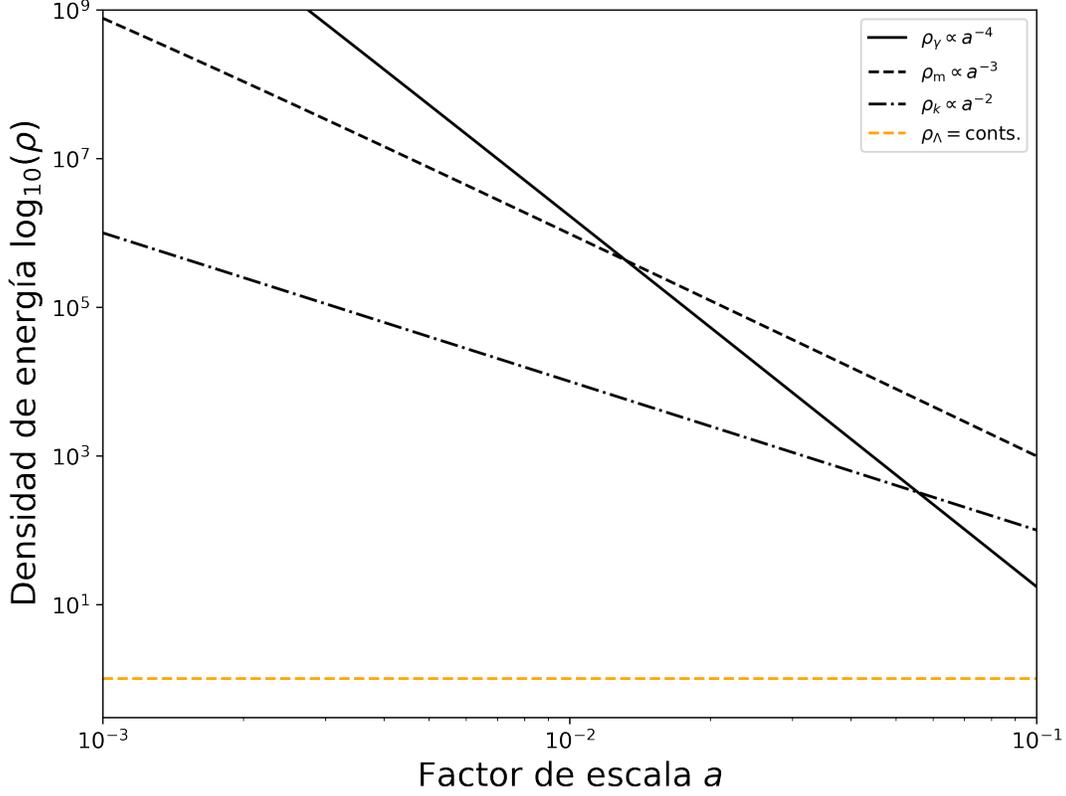
Gracias a las observaciones[9], podemos conocer el valor de  $\rho_{\text{cr},0}$  al día de hoy es de:  $1.878 \times 10^{-26} h^2 \text{kg m}^{-3}$ . Además observaciones recientes a la radiación cósmica de fondo nos permiten concluir que nuestro universo es espacialmente plano, por sorprendente que parezca la densidad actual del Universo es muy cercana a este valor crítico; esto se le conoce como el **problema de la planitud o de curvatura**<sup>5</sup>.

A manera de practicidad es necesario introducir la relación de la energía-densidad relativa a la densidad crítica ec. (1.28), como el parámetro de densidad:

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_{\text{cr}}(t)}, \quad (1.29)$$

---

<sup>5</sup>En la siguiente sección hablaré un poco sobre la teoría inflacionaria, la cual en su desarrollo propone una solución a este problema.



**Figura 1.6:** Periodos del Universo, las líneas representan como evolucionan las distintas densidades (de materia  $\rho_m$  y radiación  $\rho_r$ ) en función del tiempo, la intersección entre  $\rho_r$  y  $\rho_m$  representa el periodo de equivalencia; cuando nuestro universo estaba dominado de igual manera por sus componentes de materia y radiación.

donde el índice “ $i$ ” representa un solo tipo de componente, como materia, radiación, etcétera. Un resumen de los principales componentes del universo, junto con su comportamiento, se muestra en la Tabla 1.1.

Para que los modelos básicos de Friedmann sean más realistas, debemos tener en cuenta la mezcla completa de estos componentes. Supongamos que dentro de la mezcla, los distintos fluidos no interactúan entre sí sino solo a través de su mutua gravitación. Por lo tanto, el tensor de momento de energía total de un fluido de múltiples componentes está dado por

$$T^{\mu\nu} = \sum_i (T^{\mu\nu})_i, \quad (1.30)$$

aquí “ $i$ ” etiqueta la suma de varios componentes, cada uno de ellos modelado individualmente como un único fluido perfecto con  $P_i = \omega_i \rho_i$ . Usando las definiciones presentadas

Componente	$\Omega_i$	$\omega_i$	$\rho(a)$	$a(t)$	$H(t)$
Radiación	$\Omega_r$	1/3	$\propto a^{-4}$	$\propto t^{1/2}$	1/2 t
Materia	$\Omega_m$	0	$\propto a^{-3}$	$\propto t^{2/3}$	2/3 t
Curvatura	$\Omega_K$	-1/3	$\propto a^{-2}$	$\propto t$	1/t
$\Lambda$	$\Omega_\Lambda$	-1	$\propto a^0$	$\propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t\right)$	const.

**Tabla 1.1:** Componentes del universo y sus parámetros cosmológicos: parámetro de densidad  $\Omega_i$ , parámetro de la ecuación de estado  $\omega_i$ ; y su comportamiento: evolución de la densidad  $\rho(a)$ , factor de escala  $a(t)$ , parámetro de Hubble  $H(t)$ .

anteriormente, las ecuaciones de Friedmann (1.18a) y (1.18b) para un universo de múltiples fluidos ahora se escriben de la siguiente manera

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)} + \Omega_{K,0} a^{-2}, \quad (1.31a)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i \rho_i (1 + 3\omega_i). \quad (1.31b)$$

De la misma manera, podemos reescribir

$$\Omega_T \equiv \sum_i \Omega_i = 1 - \Omega_K. \quad (1.32)$$

Dado que el propósito de esta tesis es el estudio de los agujeros negros primordiales, considero necesario aclarar que la evolución de cada uno de los componentes del modelo  $\Lambda$ CDM, ha provisto condiciones iniciales para el estudio de mecanismos para la creación, evolución y coalescencia de estos objetos (por ahora) hipotéticos. Esto será abordado con más detalle en los Capítulos 3 y 4.

## 1.2. Horizonte cosmológico

El horizonte de partículas es la distancia que la luz podría haber viajado desde el origen del universo. Las regiones más alejadas nunca podrían haber estado causalmente conectadas. En un tiempo  $dt$  la luz recorre una distancia comovil  $dx = dt/R$ , por lo que la distancia

comovil total recorrida desde el Big Bang corresponde a

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{R_0} \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \frac{1}{R_0} \int_z^\infty \frac{dz}{H(z)}. \quad (1.33)$$

Ningún haz de luz podría haberse propagado más allá de  $\eta$  en la cuadrícula comóvil (Ver Figura 1.5) desde el comienzo de los tiempos [32], por lo que  $\eta$  se denomina horizonte comóvil. También podemos pensar en  $\eta$  como una variable de tiempo, denominada tiempo conforme. La métrica FLRW ec. (1.6), en términos del tiempo conforme, se convierte en

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - Kr^2} - r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (1.34)$$

Por otro lado al cambiar el orden de integración de (2.42), también podemos definir la distancia comovil  $d_c$ , u horizonte de eventos, la luz podría haber viajado entre una fuente con un factor de escala  $R$  y un observador al día de hoy [32], como

$$d_c = \int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{R_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} = \chi. \quad (1.35)$$

Un concepto relacionado es la *distancia propia*  $d_p$  correspondiente al horizonte de partículas:

$$d_p(t) \equiv R(t) \int_0^t \frac{dt}{R(t)} = R(t)\eta(t). \quad (1.36)$$

Las regiones separadas por distancias mayores que la distancia propia  $d_p$  no están causalmente conectadas. Por otro lado, el *radio de Hubble* o la *distancia de Hubble* se define por

$$d_H(t) = H^{-1}(t). \quad (1.37)$$

La distancia de Hubble  $d_H(t)$ , a menudo descrita simplemente como “*horizonte*”, corresponde a la escala de longitud típica en la que los procesos físicos en el universo operan de manera coherente. También es la escala de longitud en la que los efectos de la relatividad general se vuelven importantes<sup>6</sup> [64].

---

<sup>6</sup>En escalas mucho menores que  $d_H(t)$  (dentro del horizonte), la teoría de Newton suele ser suficiente para describir los efectos de la gravitación.

Así mismo introducimos la distancia comovil de Hubble como:

$$\chi_{\text{H}} = \frac{d_{\text{H}}(t)}{R(t)} = \frac{1}{H(t)R(t)} = \frac{1}{R(t)}, \quad (1.38)$$

lo que da la coordenada  $\chi$  correspondiente a la distancia de Hubble ec. (1.37).

### 1.3. Inflación

A pesar de que el modelo para describir el Universo posee un fuerte apoyo observacional, todavía hay ciertas inconsistencias o características inexplicables con las que lidiar: los problemas de planitud, horizonte y monopolo, entre muchos otros. El modelo inflacionario ofrece la forma más elegante propuesta hasta ahora para resolver estos problemas y, por lo tanto, para comprender por qué el universo está tan notablemente de acuerdo con la cosmología estándar. Este modelo fue introducido inicialmente por Alan Guth [43], seguido por Linde [62]. Para una revisión amplia, nos referimos a los libros [13, 32, 57]. A continuación se examinarán algunos de los problemas de la cosmología estándar.

#### Problema de la curvatura

La ecuación de Friedmann (1.32) se puede ver de la siguiente forma:

$$\Omega_T - 1 = \frac{K}{(aH)^2} \quad (1.39)$$

Escrito de esta manera, notamos que  $\Omega_T = 1$  es un caso muy especial. Si al principio el universo era perfectamente plano, lo seguirá siendo para siempre. Sin embargo, una geometría plana es una situación crítica inestable, es decir, incluso para una pequeña desviación de ella,  $\Omega_T$  habría evolucionado de manera muy diferente y muy rápidamente el universo se volvería más curvo. Esto puede verse como una consecuencia de que  $aH$  es una función decreciente del tiempo durante la época de dominación de radiación o de materia (Ver Tabla 1.1).

Dado que la edad actual del Universo se estima en  $t_0 \simeq 10^{17}\text{s}$  [9], de las ecuaciones anteriores podemos deducir el valor requerido de  $|\Omega_T - 1|$  en diferentes tiempos tempranos

para obtener el valor correcto de la geometría espacial en el momento actual. Por ejemplo, consideremos algunas épocas en la historia del Universo:

- Desacoplamiento ( $t \simeq 10^{13}$  s), se necesita que  $|\Omega_T - 1| \leq 10^{-3}$ .
- Nucleosíntesis ( $t \simeq 1$  s), se necesita que  $|\Omega_T - 1| \leq 10^{-16}$ .
- Época de Planck ( $t \simeq 10^{-43}$  s), se necesita que  $|\Omega_T - 1| \leq 10^{-64}$ .

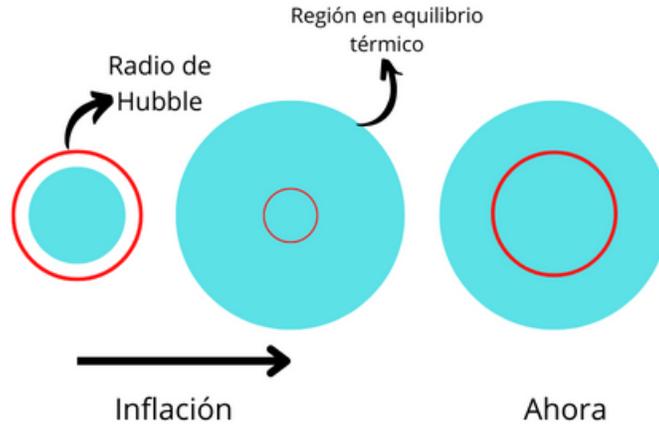
En consecuencia, en tiempos tempranos del Universo  $|\Omega_T - 1|$  tuvo que ajustarse extremadamente cerca de cero para alcanzar su valor observado [9].

### Problema del Horizonte

El *problema del horizonte* es uno de los problemas más importantes dentro del modelo del Big Bang, ya que se refiere a la comunicación entre diferentes regiones del Universo. La edad del universo es finita y, por lo tanto, incluso la luz debería haber viajado solo una distancia finita en un tiempo determinado. Según la cosmología estándar, los fotones se desacoplan del resto de componentes a temperaturas en torno a  $T_{\text{dec}} \approx 0.3$  eV ( $z_{\text{dec}} \approx 1100$ ), a partir de ese momento los fotones fluyeron libremente y viajaron básicamente de forma ininterrumpida hasta llegar a nosotros, dando lugar a la región conocida como el *Universo observable*. Esta superficie esférica en la que se produjo el proceso de desacoplamiento se denomina superficie de última dispersión. Los fotones primordiales son los responsables del CMB. Observar sus fluctuaciones es, por lo tanto, análogo a tomar una fotografía instantánea del universo en ese momento (alrededor de  $t_{\text{dec}} \approx 380000$  años después del Big Bang), como se ve en la Figura 1.1.

Además de lo anterior la Figura 1.1 muestra la luz vista en todas las direcciones del cielo. Estos fotones primordiales tienen casi la misma temperatura  $T_{\text{CMB}} = 2.725$  K. Sin embargo, estar a la misma temperatura es una propiedad del equilibrio térmico, por lo que las observaciones se explican fácilmente si diferentes regiones del cielo han podido interactuar y llegar al equilibrio térmico antes del desacoplamiento. Curiosamente, el horizonte comóvil sobre el que ocurrieron las interacciones causales antes de que los fotones se desacoplaran era significativamente más pequeño que la distancia comóvil que viajó

la radiación después del desacoplamiento. Esto significa que los fotones provenientes de regiones a gran escala separados por una distancia mayor a la escala del horizonte en la última dispersión, no habrían podido interactuar y establecer el equilibrio térmico antes del desacoplamiento. Por lo tanto, el modelo del Big Bang por sí mismo no ofrece una explicación de por qué las temperaturas vistas en direcciones opuestas del cielo son casi iguales; la homogeneidad debe haber sido parte de las condiciones iniciales.



**Figura 1.7:** Esquema sobre el comportamiento del radio de Hubble comóvil durante el período inflacionario (dibujado por el círculo rojo).

### 1.3.1. Inflación cosmológica

La *inflación* se define como la época en la evolución del Universo en la que el factor de escala se acelera rápidamente en tan solo una fracción de segundo:

$$\ddot{a} > 0, \tag{1.40}$$

solo si se satisface que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{aH} \right) < 0, \tag{1.41}$$

El factor  $1/(aH)$  corresponde al radio de Hubble comóvil ec.(1.38), que se interpreta como el universo observable que se hace más pequeño durante el período inflacionario (ver Figura 1.7). Este proceso permitió que nuestro Universo observable actual se ubicara

dentro de una región ubicada muy dentro del radio de Hubble al principio durante la inflación [59]. Si ocurriera este breve período de expansión acelerada, entonces es posible que los problemas antes mencionados del Big Bang puedan resolverse. A partir de la ecuación de aceleración (1.40), podemos escribir la condición de inflación en términos del componente requerido para impulsar la expansión, es decir:

$$\ddot{a} > 0 \iff (\rho + 3P) < 0 \quad (1.42)$$

Debido a que en la física estándar se asume comúnmente que  $\rho$  es positivo, entonces para satisfacer la condición de aceleración es necesario que la presión total tenga  $P < -\rho/3$ . Sin embargo, ni la época dominada por radiación ni la dominada por materia, satisfacen dicha condición. Una solución típica sería considerar un universo dominado por una constante cosmológica  $\Lambda$  en las primeras etapas. Como hemos mostrado en la Tabla 1.1, la constante cosmológica conduce a una expansión exponencial y por lo tanto la condición (1.41) se cumpliría naturalmente; a esta época se le llama *etapa de Sitter*.

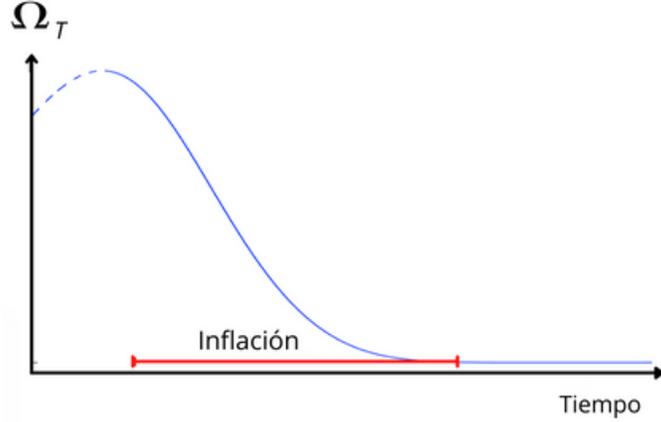
### Solución de planitud

Si de alguna manera hubo una expansión acelerada,  $1/(aH)$  tiende a disminuir con el tiempo y por lo tanto de la ec. (1.39),  $\Omega_T$  tiende a 1. En este sentido, la inflación magnifica el radio de curvatura del universo, por lo que localmente el universo parece ser plano con gran precisión, como se muestra en la Figura 2.6. Entonces, podemos preguntarnos en cuánto debe disminuir  $1/(aH)$ . Si el período inflacionario comenzó en el momento  $t = t_i$  y terminó aproximadamente al comienzo de la era dominada por la radiación ( $t = t_f$ ), entonces

$$|\Omega_T(10^{-34} \text{ s}) - 1|_{t=t_f} \sim 10^{-54}, \quad (1.43)$$

$$\frac{|\Omega_T - 1|_{t=t_f}}{|\Omega_T - 1|_{t=t_i}} = \left(\frac{a_i}{a_f}\right)^2 \equiv e^{-2N}. \quad (1.44)$$

Entonces, la condición requerida para reproducir el valor de  $\Omega_T$  al día de hoy ( $\Omega_{T,0}$ ) es que la inflación tuvo que durar al menos  $N \equiv \ln a \gtrsim 50$ .



**Figura 1.8:** Evolución del parámetro de densidad  $\Omega_T$ , durante el período inflacionario.  $\Omega_T$  tiende a uno.

Como hemos señalado, se puede crear un período de expansión acelerada mediante una constante cosmológica  $\Lambda$ , y por lo tanto resolver los problemas antes mencionados. Sin embargo, después de un breve período de tiempo, la inflación debe terminar y su energía se convierte en materia/radiación convencional; este proceso se llama recalentamiento. En un universo dominado por una constante cosmológica, el proceso de recalentamiento se ve como  $\Lambda$  decayendo en partículas convencionales. Sin embargo, afirmar que  $\Lambda$  es capaz de decaer sigue siendo una forma ingenua de afrontar el problema. Por otro lado, los campos escalares pueden comportarse como una constante cosmológica dinámica. Actualmente existe una amplia diversidad de modelos sugeridos para dar lugar al período inflacionario. A continuación exploraremos, uno de los modelos de campo escalar basados en la relatividad general. Consideremos un campo escalar  $\phi$  mínimamente acoplado a la gravedad, con un potencial arbitrario  $V(\phi)$ , especificado por la acción,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi) \right]. \quad (1.45)$$

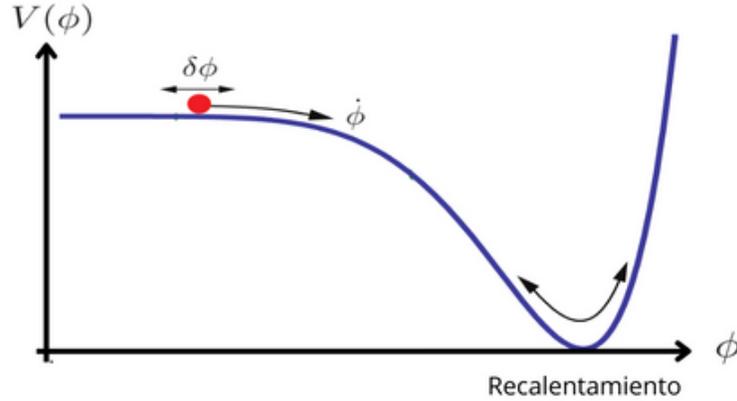
A esta definición se le conoce como la acción de Einstein-Hilbert. Además, el campo inflacionario  $\phi$  (también llamado *inflaton*) puede ser reescrito de forma más explícita como:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}), \quad (1.46)$$

donde  $\phi(t)$  se considera un campo clásico, es decir, el valor medio del inflatón en el estado homogéneo e isótropo; mientras que  $\delta\phi(t, \mathbf{x})$  describe las fluctuaciones cuánticas (perturbaciones) alrededor de  $\phi(t)$ . Sin embargo, en lo que resta de esta sección solo nos referiremos al inflatón como  $\phi$ .

La ecuación de evolución para  $\phi$  está dado por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (1.47)$$



**Figura 1.9:** Representación del proceso inflacionario debido a la condición de *Slow-Roll* (por su trad. “Rodamiento lento”). La inflación termina dando lugar una época de recalentamiento.

Por otro lado el tensor de energía-momento correspondiente a este campo escalar esta dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi + V(\phi) \right]. \quad (1.48)$$

Al comparar la ec.(1.48) con el tensor de energía-momento para un fluido perfecto ec.(1.17), se puede identificar una densidad de energía  $\rho_\phi$  y una presión  $P_\phi$  asociadas para el inflatón. En un espacio-tiempo FLRW, se tiene

$$T_{00} = \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2a^2}(\nabla\phi)^2, \quad (1.49a)$$

$$T_{ii} = P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{1}{6a^2}(\nabla\phi)^2, \quad (1.49b)$$

con su correspondiente ecuación de estado  $P_\phi = w_\phi \rho_\phi$ .

A partir de la estructura de la densidad de energía efectiva y la presión, las ecuaciones de Friedmann (1.18a) y (1.18b) para un campo escalar se reescriben de la siguiente manera:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (1.50a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} \left[ \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (1.50b)$$

De esta manera la condición a satisfacer es  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ , la cual se cumple fácilmente al considerar un potencial plano. Esta condición puede explicarse mediante la analogía que el campo está rodando lentamente hacia abajo en su potencial; tal aproximación se llama *slow-roll* [58, 60]. En este caso  $\ddot{\phi}$  es despreciable porque el universo está dominado por la expansión cosmológica<sup>7</sup>. En otras palabras, el proceso inflacionario se puede resumir como un universo acelerado que tiene lugar cuando la parte cinética del campo de inflación es subdominante sobre el término potencial  $V(\phi)$ . Luego, cuando ambas cantidades se vuelven comparables, la inflación termina dando lugar a un proceso conocido como *reheating* (por su trad. “recalentamiento”). La Figura 1.9 muestra el comportamiento esquemático del proceso inflacionario.

En la teoría de campos, para un espacio-tiempo FLRW, las perturbaciones cuánticas del inflatón  $\delta\phi$  salen del horizonte de Hubble durante la expansión acelerada y se concentran fuera del contacto causal. Posterior al periodo inflacionario las perturbaciones primordiales  $\delta$  quedan impresas en fluctuaciones de densidad de las componentes de radiación  $\delta_{\text{mat}}$  y materia  $\delta_{\text{rad}}$ , dando lugar a las estructuras que se observan en grupos y cúmulos de galaxias al día de hoy.

---

<sup>7</sup>Lo que se traduce en que las ecuaciones de movimiento (1.47) y (1.50a), se reescriban como:

$$3H\dot{\phi} \simeq -\frac{dV}{d\phi}$$

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi).$$

## 1.4. Agujeros Negros

Los agujeros negros se encuentran entre los objetos más enigmáticos del universo. Se describen por soluciones a las ecuaciones de Einstein, las cuales nos dotan del significado de estructura causal, hasta las conexiones con la termodinámica. El propósito de esta sección es exponer algunos de los elementos de estos maravillosos objetos.

### 1.4.1. Definición y caracterización

La definición de un agujero negro, puede ser abordada desde diferentes campos como la astrofísica o la relatividad general; tal como lo expresa E. Curiel [28]. Históricamente el concepto de agujero negro fue propuesto por J.A. Wheeler in 1967, basándose en el trabajo de John Michell; el cual consideraba como medir la masa de una estrella, por efecto de la gravedad en la velocidad de la luz que esta emitía[36]. Más tarde este concepto recobra importancia debido a la obra magna de Albert Einstein; la relatividad general. En este contexto, Karl Schwarzschild encontró la solución para un punto de masa. Antes de continuar con la definición a partir de la solución de Schwarzschild, se presenta una definición cualitativa de lo que es un Agujero Negro.

#### **Agujero Negro**

*Un agujero negro es una región en el espacio-tiempo que debido a su inmensa gravedad nada (ni siquiera la luz) puede escapar de su horizonte.*

Un hecho importante es que en la teoría clásica de la relatividad general, los agujeros negros únicamente pueden absorber y no emitir partículas. No obstante Hawking demostró en [46] que los agujeros negros emiten radiación, a este fenómeno se le dio el nombre de *radiación de Hawking* y es considerada un mecanismo de evaporación de los agujeros negros.

Una forma de caracterizar a los agujeros negros es a partir del teorema de ausencia de pelo, demostrado por el trabajo combinado de Israel, Carter, Robinson y S. Hawking, demuestra que existe un tipo de censura cósmica, es decir, la naturaleza no permite las

singularidades desnudas<sup>8</sup> y la pérdida de información durante el mecanismo de formación de agujeros negros es inevitable, por tanto, los únicos parámetros que permiten la descripción de un agujero negro son: Masa, momento angular y carga eléctrica [12, 24, 71, 97].

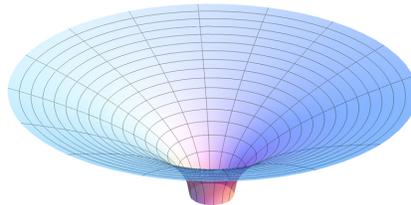
#### **Teorema de No-Pelo**

*Los agujeros negros están caracterizados por la masa  $M$ , el momento angular  $J$  y la carga eléctrica  $Q$ .*

Es debido a este teorema, que podemos hacer una primera clasificación de los agujeros negros, es importante notar que todas estas son cantidades conservadas de los sistemas clásicos.

### **1.4.2. Singularidad de Schwarzschild**

El agujero negro más simple o sencillo que podemos describir y clasificar es aquel cuyo único parámetro es su masa. Este tipo de agujero negro se le conoce como *agujero negro de Schwarzschild* o también llamado *agujero negro estático* (Ver Figura 1.10).



**Figura 1.10:** Representación de una singularidad tipo agujero negro donde la curvatura diverge en el origen.

Recordando la esencia de la teoría de gravedad de Einstein; la relatividad general. “*La materia le dice al espacio como curvarse...*”, para entender esto, es necesario comprender la métrica creada por un punto de masa y esta es la solución de Schwarzschild; la cual obedece las ecuaciones de Einstein.

---

<sup>8</sup>Una singularidad puede ser un punto de masa, como se verá en el trabajo de Schwarzschild.

## Metrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.51)$$

el parámetro  $M$  puede ser derivado del limite Newtoniano para el potencial gravitacional de un punto de masa  $M$  en el origen. Si  $M = 0$  la solución de Schwarzschild en la ec. (1.51) se reduce al espacio de Minkowski vista en la ecuación (1.5). El caso en que  $M < 0$  carece de significado físico y por tanto será descartado. Por el contrario si  $M > 0$  nos presenta un agujero negro de simetría esférica y estático, y que cuanto mayor es la masa del agujero negro, mayor es su horizonte de eventos. Esto puede ser descrito matemáticamente como

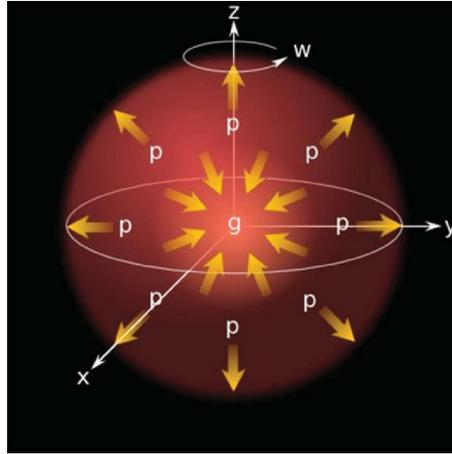
$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.52)$$

a esto comúnmente se le conoce como el radio de Schwarzschild.

Sin embargo, es posible considerar una segunda forma para clasificar a los BHs y esta sería acorde a su mecanismo de creación. De forma inmediata podemos decir que existen dos tipos de agujeros negros, aquellos que se formaron de manera estándar; por colapso gravitacional en estrellas y los que se formaron en ambientes con alta densidad durante épocas tempranas en el Universo; época dominada por materia o en la época dominada por radiación. En ambos tipos, la evolución e interacción de los agujeros negros es de vital importancia para los propósitos de este trabajo, antes de adelantarme a exponer las hipótesis es necesario explicar un poco más en detalle estos dos tipos de agujeros negros.

### 1.4.3. Agujeros negros astrofísicos

Siguiendo el trabajo de Oppenheimer y Snyder en [78]. Cuando las fuentes termonucleares de energía se agoten, una estrella con suficientemente masa colapsará; esta contracción continuará indefinidamente. Esto provee una prueba al mecanismo demostrado por Chandrasekhar. A este proceso se le llama mecanismo de formación por colapso gravitacional.



**Figura 1.11:** Representación gráfica del colapso gravitacional, las flechas que apuntan hacia el exterior de la esfera representan la fuerza que se opone a la gravedad, mientras que las líneas que inciden a la esfera, representan la fuerza gravitacional que compacta al objeto.

### Límite de Chandrasekhar

Mientras las estrellas se encuentran en equilibrio de fuerzas entre reacciones termonucleares y gravitacional, se puede decir que prevalecen en un estado de equilibrio hidrostático; en esta etapa las estrellas viven en una región del espacio de parámetros fotométricos también llamada *secuencia principal*. Para sostenerse en el tiempo, la fusión termonuclear requiere temperaturas estables de  $\sim 10^7$  K. Por tanto, esta es la temperatura en el núcleo de las estrellas de secuencia principal. Sin embargo cuando el combustible nuclear de las estrellas se agota; rompiendo así el equilibrio, se forman objetos llamados *remanentes estelares*. Un ejemplo de esto son las enanas blancas; estrellas que durante la etapa de secuencia principal tienen masas menores que  $\sim 8 M_{\odot}$ , no obstante la presión por degeneración electrónica contrarresta exactamente a la atracción gravitacional de manera que prevalece en un estado de perfecto equilibrio[81].

Subrahmanyan Chandrasekhar, en 1931 demostró que, si la teoría de la gravitación de Newton, se combina con la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad de Einstein, se encuentra que hay un límite de masa que se puede sostener ante el colapso gravitatorio, este límite es de aproximadamente  $1.4M_{\odot}$ [81].

### Limite de Chandrasekhar

La presión por degeneración electrónica es capaz de sostener el colapso, si y solamente si la masa del remanente estelar no supera un valor dado por:

$$M_{\text{Ch}} = 3.14 \left( \frac{Z}{A} \right)^2 \left( \frac{\hbar c}{G m_p^2} \right)^{3/2} m_p, \quad (1.53)$$

donde  $Z$  es el número atómico de los núcleos que componen la enana blanca (número de protones),  $A$  es el número de masa (número de protones y de neutrones) y  $m_p$  es la masa del proton.

Sin embargo, cuando un remanente supera el valor  $M_{\text{Ch}} \approx 1.4M_{\odot}$  solo existen dos posibilidades[81]:

- 1) Cuando  $\sim 1.4M_{\odot} < M \lesssim 3M_{\odot}$ , se forma un estrella de neutrones.
- 2) Cuando  $M \gtrsim 3M_{\odot}$ , se forma un agujero negro.

El límite Chandrasekhar provee un criterio para clasificar a los BHs. Por lo general es común establecer tres clases de agujeros [25]:

1. Agujero Negro de Masa Estelar (Por sus siglas en ingles SBHs, Stellar-mass Black Holes) con masas de poco más de 10 masas solares, i.e,  $3 M_{\odot} \lesssim M_{\text{SBH}} \lesssim 10^2 M_{\odot}$ . Por lo general este tipo de agujeros negros, son reliquias de estrellas con masa  $M \gtrsim 10M_{\odot}$ .
2. Agujero Negro de Masa Intermedia (Por sus siglas en ingles IMBHs, Intermediate Mass Black Holes) con masas de cientos a cientos de miles masas solares, i.e.,  $10^2 M_{\odot} \lesssim M_{\text{IMBH}} \lesssim 10^5 M_{\odot}$ .
3. Agujeros Negros Super Masivos (Por sus siglas en ingles MBHs o SMBHs, “Super-Massive Black Holes”). Estos comúnmente son observados en el centro de galaxias, tal como es el caso de Sgr A\* en el centro de la vía láctea [10]. Y presentan masas de  $M_{\text{SMBH}} \gtrsim 10^6 M_{\odot}$ .

De estas tres clases, los agujeros de masa intermedia son (hasta ahora) los más misteriosos, pues la evidencia de estos objetos es escasa y los mecanismos para la formación de estos pudo deberse a poblaciones estelares remanentes en un alto redshift [65] o bien por colapso directo de disco proto-galáctico estable [14][8], o en corrimientos al rojo más bajos a través de procesos dinámicos en cúmulos estelares masivos [83]. La reciente observación de pares de agujeros negros coalesciendo a través de su detección con ondas gravitacionales ha abierto una ventana a la astronomía, pues, sabemos que cuando dos agujeros negros chocan y se fusionan, la cantidad de masas solares de cada uno se suman, sin embargo existen ciertas restricciones. Esta restricción establece un límite superior en la cantidad de radiación gravitacional emitida en la colisión. El límite superior de masa para un agujero negro formado por la muerte de una estrella no se conoce con exactitud, pero la mayoría de supernovas suelen producir agujeros negros que no superan las  $15M_{\odot}$ . Sin embargo, según varios modelos se pueden crear agujeros más masivos, de entre 40 y 65 masas solares, cuando muere una estrella por otros mecanismos.

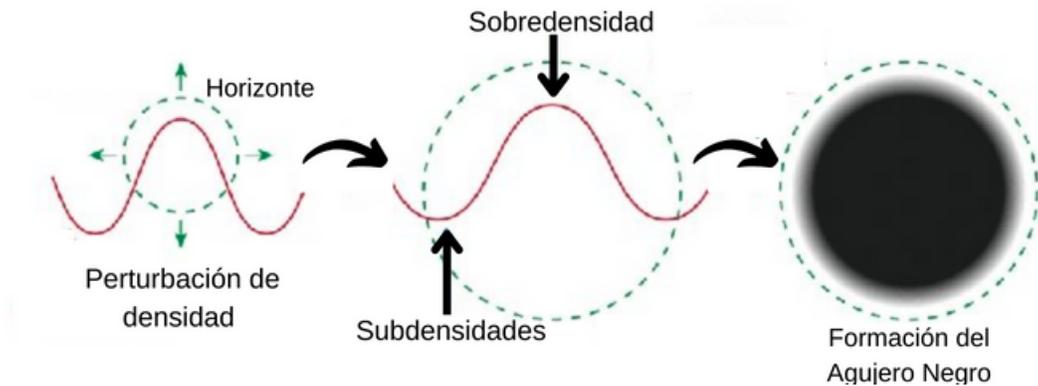
Del mismo modo, la teoría de la evolución estelar predice una “brecha” en el mecanismo de formación de agujeros negros por colapso gravitacional. En el caso de estrellas muy masivas superiores a  $130M_{\odot}$ , se produce un fenómeno llamado: la inestabilidad de pares y se refiere a la situación cuando las partículas que componen el núcleo de la estrella se vuelven muy energéticas y esto se traduce en que después del colapso se produce una explosión tan fuerte que no queda nada detrás de ella. Es decir, en teoría no es posible formar un agujero negro con masas entre 65 y 120 masas solares, producto de la muerte estelar [103]. Las detecciones de ondas gravitacionales realizadas por la colaboración LIGO-Virgo-KAGRA, ha permitido considerar que la fusión de agujeros negros de masa intermedia pueda ocurrir como consecuencia de ensambles mixtos de agujeros negros más pequeños.

#### **1.4.4. Agujeros negros primordiales**

El concepto de agujeros negros primordiales data de los años 60 cuando Zeldovich and Novikov formularon una hipótesis sobre la formación de Agujeros Negros (BHs) en el universo temprano. Así mismo el trabajo de Stephen Hawking en 1971, puede ser tomado

como referencia histórica relevante para la definición de estos objetos teóricos. Hawking propuso que las altas sobredensidades es atribuida a perturbaciones primordiales de gran amplitud que pueden sufrir un colapso gravitacional para formar un Agujero Negro. Este mecanismo de creación contrasta con el proceso astrofísico, en el cual los agujeros negros se forman a partir del colapso de estrellas.

Los Agujeros Negros Primordiales (por sus siglas en ingles PBHs; Primordial Black Holes)<sup>9</sup>, son un tipo de Agujero Negro que pueden formarse del colapso de grandes fluctuaciones de densidad (Ver Figura 1.12), en el universo temprano. Cuando las fluctuaciones de densidades con amplitud mayor al umbral vuelven a entrar en el horizonte de Hubble en tiempos posteriores al de inflación, la región colapsará para formar un PBH, con una masa aproximadamente igual a la masa del horizonte de Hubble [34].



**Figura 1.12:** La formación de un agujero primordial se le atribuye al colapso de sobre-densidades en el Universo primigenio.

### Mecanismo de formación y condiciones del colapso

Contrario a los procesos astrofísicos (por ejemplo, el colapso de estrellas) para los cuales solo los Agujeros Negros más pesados de una masa aproximadamente de  $3M_{\odot}$  es posible acumular una masa lo suficientemente alta para vencer la presión de radiación (Ver Figura 1.13), los agujeros negros primordiales pueden formarse con masas mucho menores.

<sup>9</sup>A partir de este momento y durante el desarrollo del trabajo, se usará esta notación para referirnos a estos objetos.

El mecanismo más común para la formación de agujeros negros primordiales es el colapso de densidades generadas por la inflación en el universo primordial. De acuerdo al modelo estándar, existieron etapas en las que la presión y la temperatura fueron extremadamente elevadas. Bajo estas condiciones, incluso pequeñas fluctuaciones en la densidad de la materia podían originar regiones del espacio inestables. En otras palabras, la densidad de energía en épocas tempranas, juega un rol mayor permitiendo la correlación entre la masa del PBH y la masa del horizonte de Hubble al momento de formación:

$$M_H(t) = \frac{c^3 t}{G} \sim 10^{15} \left( \frac{t}{10^{-23} \text{s}} \right) \text{g}. \quad (1.54)$$

Por un lado, la densidad de materia derivada de una masa  $M$  contenida dentro de su radio de Schwarzschild es:

$$\rho_{\text{PBH}} = 10^{18} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \quad (1.55)$$

En comparación la densidad cosmológica;  $\rho_{\text{PBH}}$  en un universo dominado por radiación es

$$\rho_H = 10^6 \left( \frac{t}{\text{s}} \right)^{-2} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \quad (1.56)$$

Para conocer si es posible formar PBHs, se estudia las fluctuaciones en la densidad, que dan lugar a perturbaciones en la curvatura del espacio-tiempo, mismas que se estudian típicamente con teoría de perturbaciones, precisamente es necesario usar el criterio de Bernard Carr.

Como hemos visto en la sección anterior, cuando una estructura esférica compuesta de gas es comprimida por su propia gravedad, se acumulará un gradiente de presión que tiende a contrarrestar los efectos de la gravedad. En el universo actual, una estrella es el principal ejemplo de esto (Ver Figura 1.11), es por ello que la inestabilidad de Jeans, juega un papel muy importante dentro de la teoría del colapso esférico [25].

Podemos derivar el criterio de inestabilidad de Jeans considerando la presión de soporte de una región con presión  $P$ , densidad  $\rho$  y radio  $R$ . Así para el caso de una nube molecular

esférica a temperatura  $T_k$  y densidad media  $n$ , podemos definir

$$\left[ \frac{M_J}{M_\odot} \right] = 5 \left[ \frac{T_k}{K} \right]^{3/2} \left[ \frac{n}{\text{cm}^{-3}} \right]^{-1/2} \quad (1.57)$$

donde  $M_J$  se le llama la masa de Jeans y se define como la masa contenida dentro de una esfera de radio  $R_J$  llamado comúnmente Radio (o longitud) de Jeans<sup>10</sup> [86]. Es importante mencionar que para radios menores que la longitud de Jeans se preserva el equilibrio ante el colapso gravitatorio, mientras que para radios mayores a  $R_J$  son inestables [63].

### Criterio de Carr

Carr [22] calculó una amplitud crítica dada perturbaciones primordiales que colapsan en la época dominada por radiación, argumentando que las inhomogeneidades alcanzan un radio máximo  $R_{\text{max}}$  de expansión durante dicha época y, si se cumple que  $R_{\text{max}} > R_J$ , entonces colapsan sin obstáculo para formar un PBH.

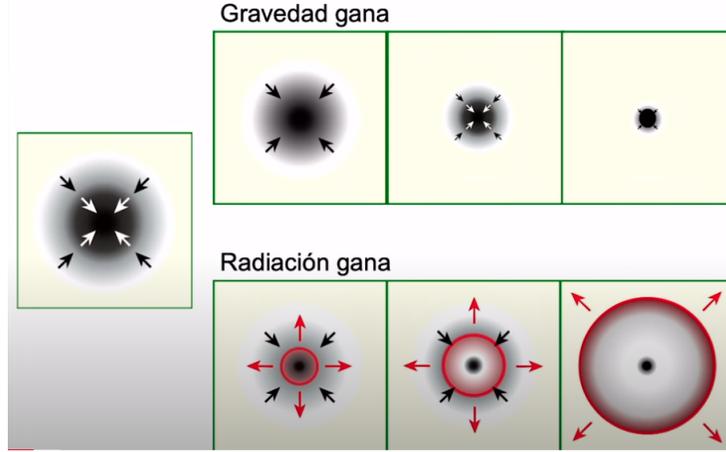
Es importante mencionar que este criterio considera el colapso esférico de estructura constituida por materia sin presión. Justificando así el considerar que las componentes de estructuras puedan ser radiación o de partículas relativistas, manteniendo de manera análoga la misma dinámica, es decir tendrían una expansión con el universo inicial, después llegarían hasta una expansión máxima y luego colapsarían. Por otro lado, pese a que la teoría de colapso esférico no lo considera, si la desigualdad  $R_{\text{max}} > R_J$  no se satisface, la perturbación se disipa.

### Abundancias de PBHs

La idea de que la materia oscura pueda estar constituida por agujeros negros primordiales, ha llamado la atención en los últimos años, como resultados de las detecciones de los observatorios LIGO y Virgo; de las cuales hablaremos en el siguiente capítulo. Por ahora partiremos del supuesto que si los PBHs proporcionaran toda la materia oscura el parámetro de densidad actual para agujeros negros primordiales que aún no se han evaporado,

---

<sup>10</sup>El astrofísico James Jeans, quien fue uno de los primeros en estudiar la inestabilidad gravitacional en un contexto cosmológico.



**Figura 1.13:** El colapso de formación para agujeros negros primordiales se logra cuando se vence la presión de radiación. Esto sucede a masas mayores a un cierto valor umbral (criterio de Jeans)  $M > M_J$  en las perturbaciones primigenias este criterio recae sobre la amplitud de las inhomogeneidades de materia  $\delta > \delta_{\text{crit}}$

esta dado por

$$\Omega_{\text{PBH}} = \frac{M_{\text{PBH}} n_{\text{PBH}}(t_0)}{\rho_{\text{crit}}}, \quad (1.58)$$

esto corresponde a una población de PBHs de masa  $M_{\text{PBH}}$  y densidad de número  $n_{\text{PBH}}$  permeando todo el Universo al día de hoy es decir en  $t_0$ . La ecuación (1.58) puede también ser expresada en términos de la proporción de la densidad de masa de DM, obteniendo así la fracción de masa de los PBHs, este es el formalismo Press-Schechter y apunta directamente a las condiciones para las cuales los PBHs pueden ser la materia oscura

$$f_{\text{PBH}} \equiv \frac{\Omega_{\text{PBH}}}{\Omega_{\text{DM}}}. \quad (1.59)$$

Además si consideramos a los agujeros negros primordiales como agujeros negros de Schwarzschild, esto provee una analogía a la forma en la que interactúa la materia oscura; exclusivamente a través de la interacción gravitacional. Esta única forma de interacción podría darnos pauta para considerar un mecanismo para la formación de agujeros negros de masa intermedia como exploraremos en esta tesis. Silk[91] ha argumentado que los agujeros negros de masa intermedia, que en la actualidad son pasivos al solo adquirir masa pudieron estar activos en su pasado. Estos podrían ser el núcleo en las primeras galaxias enanas. Este escenario sería permitido por las observaciones actuales AGNs [89] (Siglas

en inglés para “*Active Galaxy Nuclei*”, por su traducción al español Núcleo de Galaxias Activas) actuales y la retroalimentación temprana de los PBH de masa intermedia podría proporcionar una explicación unificada para muchas anomalías de galaxias enanas. Además de proporcionar una fase de la formación de galaxias tempranas y semillas para agujeros negros súper-masivos en un redshift alto[20].

Con todas las secciones anteriores, es posible elucidar cual es el problema a resolver; de manera inmediata el presente trabajo busca ofrecer una respuesta a los orígenes de los agujeros negros los cuales son fuentes de las ondas gravitacionales detectadas por LIGO y Virgo. De manera precisa, se presentan los objetivos y la hipótesis.

## 1.5. Objetivos

### 1.5.1. Objetivo general

Evaluar la probabilidad de que los agujeros negros primordiales formen pares y en coalescencia formen agujeros negros de mayor masa, generando ondas gravitacionales en el rango adecuado para dar una explicación al origen de los eventos detectados por la colaboración LIGO, Virgo y KAGRA.

### 1.5.2. Objetivos específicos

- Caracterizar la abundancia de PBHs, así como el modelo de evolución.
- Caracterizar la frecuencia de formación y tiempo de coalescencia de pares de PBHs.
- Escribir un código de programación que permita la manipulación de cantidades físicas que intervienen en la colisión de agujeros negros primordiales.

## 1.6. Hipótesis

La hipótesis sobre la cual se basa este trabajo es que las múltiples colisiones en una población inicial de PBHs producen agujeros negros de mayor masa, de modo que, después

de una cantidad considerable de periodos de coalescencia estos produzcan los eventos detectados por LIGO, Virgo y KAGRA.

# Ondas gravitacionales en binarias de agujeros negros

En este capítulo se le presentará la definición y características cualitativas de las ondas gravitacionales<sup>1</sup>, así como también se abordará de manera analítica mediante la teoría linealizada de la gravedad aplicada a las ecuaciones de campo propuestas por Albert Einstein. También se presenta el estudio en la propagación y producción de este tipo de ondas, del mismo modo se expondrá el mecanismo de detección y registro de eventos detectados por la colaboración de los observatorios involucrados.

## 2.1. ¿Qué son las ondas gravitacionales?

Siendo inmediatos en la respuesta a la pregunta con la que abrimos esta sección, se le presenta una definición cualitativa.

### **Onda gravitacional**

*Una onda gravitacional, es una perturbación tensorial de orden lineal o el campo gravitacional y cuya propagación cumple con la ecuación de onda. El efecto de propagación también puede ser conocido como radiación gravitacional, las ondas gravitacionales viajan a la velocidad de la luz  $c$ .*

<sup>1</sup>La existencia de radiación gravitacional fue predicha por Einstein después de haber formulado su teoría de la relatividad general.

Para caracterizar las ondas gravitacionales podemos considerarlas como ondas electromagnéticas, a continuación se listan algunas sus propiedades:

- Longitud de onda  $\lambda$  o una frecuencia  $\nu$ .
- Se propagan a la velocidad de la luz, tal que  $c = \lambda * \nu$ .
- Presentan en dos estados polarización.

## 2.2. Propagación de ondas gravitacionales

### 2.2.1. Teoría linealizada de la gravedad

La aproximación tradicional para el estudio de este tipo particular de ondas se basa en la que son descritas por una pequeña perturbación del espacio-tiempo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

donde por simplicidad se toma que  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski para el espacio plano, previamente descrita en la ec. (1.5) y  $h_{\mu\nu}$  denota las pequeñas perturbaciones, esto permite establecer condiciones de *campo débil*, es decir al aplicar

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

modificamos nuestra definición previa de la ec. (1.11) podemos expandir las ecuaciones de campo de Einstein en la ecuación (1.10) en potencias de  $h_{\mu\nu}$  usando un marco de referencia donde la ec. (2.2) se cumple; y sin mucha pérdida de precisión, solo se pueden mantener términos lineales, a esto se le conoce como la “teoría linealizada de la gravedad”.

De manera practica, se modificaran las definiciones ya previstas en el capítulo 1, específicamente las ecuaciones (1.12), (1.15) y (1.14), así cuando aplicamos la perturbación  $h_{\mu\nu}$ , y descartando todos los términos cuadráticos y de orden mayor en  $h$  obtenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \\ &\equiv \frac{1}{2}(h_{\alpha}^{\mu}{}_{,\beta} + h_{\beta}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}),\end{aligned}\tag{2.3}$$

lo cual nos conduce a

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} \\ &= \frac{1}{2}(h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}),\end{aligned}\tag{2.4}$$

donde

$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}.\tag{2.5}$$

Del mismo modo se realizan las contracciones para el escalar de Ricci, reescribiendo la ecuacion (1.14)

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + O(h^2),\tag{2.6}$$

encontrando así que el numero de términos se incrementa al sustituir las ecuaciones: (2.3), (2.4) y (2.6) en nuestra definición  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ . No obstante, es posible reducirlos definiendo

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h,\tag{2.7}$$

lo cual implica una operación correspondiente en algún tensor simétrico  $\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ , es decir,  $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$ . Por tanto  $G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}$  a primer orden en el  $h_{\mu\nu}$  y con esto las ecuaciones de campo de Einstein que podemos reescribir como:  $2G_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$  toman la forma

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu},\tag{2.8}$$

donde el primer termino es el d'Alembertiano del espacio plano, mientras que los otros términos permiten mantener las ecuaciones norma-invariantes. Con ello, se imponen condiciones de norma (2.9b) los cuales son los tensores análogos a la norma de Lorentz  $A^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$  del electromagnetismo. Esta norma elimina la diferencia del tensor  $h_{\alpha\beta}$ , así las ecuaciones de campo (2.8) se vuelven (2.9c), de igual manera la ec. (2.2) se reescribe como ec. (2.9a).

## Ecuaciones de la teoría linealizada en la norma de Lorentz

*Definición de la métrica*

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \quad (2.9a)$$

*Norma transversa o sin divergencia*

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0. \quad (2.9b)$$

*Ecuaciones de campo*

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = -16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.9c)$$

### 2.2.2. Solución de onda plana en la teoría linealizada

La teoría linealizada permite describir la gravedad a partir de un con el campo tensorial simétrico de segundo orden. Así, las ecuaciones de esta teoría son escritas y solucionadas, considerando que el espacio fuese plano (desde el punto de vista de la relatividad especial). Específicamente las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, pueden ser reducidas a una familia de ecuaciones de onda, por la perturbación  $h_{\mu\nu}$  [26], esto es

$$\square h_{\mu\nu} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) h^{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

lo cual implica que  $\eta_{\alpha\beta} h_{\mu\nu}{}^{,\alpha\beta} = 0$ . Entonces, asumimos que todas las soluciones serán ondas planas monocromáticas de la forma

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}), \quad (2.11)$$

de la cual se considerará únicamente la parte real de la expresión, y donde  $A_{\mu\nu}$  es un tensor con componentes constantes que describirá la amplitud.  $k_{\alpha}$  es el vector de onda que dicta la dirección de propagación de igual manera, con componentes constantes.

Lo anterior implica que al tomar una primera y segunda derivada de la solución obtenemos:

$$h_{\mu\nu}{}^{,\alpha} = k^{\alpha} h_{\mu\nu} \quad (2.12a)$$

$$\eta_{\alpha\beta} h_{\mu\nu}{}^{,\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta h_{\mu\nu} = 0, \quad (2.12b)$$

donde la única forma para que la igualdad se cumpla es que  $k_\alpha$  sea nulo. Esto es,

$$\eta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = k_\alpha k^\alpha = 0. \quad (2.12c)$$

Llamamos a  $k^\alpha$  como el vector de onda, cuya componentes de manera explícita son  $k^\alpha := \{\omega, \bar{k}\}$ . Además la condición de normalización nula, nos da la relación de dispersión y la condición de transversalidad:

$$\begin{aligned} k_\alpha k^\alpha &= 0, \\ A_{\mu\alpha} k^\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

lo cual implica que  $\omega^2 = k^2$ , es decir que esta solución describe una onda con frecuencia

$$\omega \equiv k^0 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}, \quad (2.14)$$

que se propaga a la velocidad de la luz en dirección  $(k_x, k_y, k_z)$ .

Para explicar la polarización es necesario argumentar sobre la desviación geodésica<sup>2</sup> en la dirección transversa, pues es a partir de ésta que podemos caracterizar dicha polarización.

Siguiendo las condiciones de planitud en nuestra teoría linealizada, podemos considerar un espacio bidimensional, en el cual las ondas se propagan monocromáticamente en una dirección (dígase  $z$ ). Como sabemos  $A_{\mu\nu}$  representa la amplitud de la onda. Para una transformación de norma específica, se pueden cambiar cuatro de sus seis componentes independientes, ahora bien si se imponen las condiciones  $A_{\mu\nu} u^\nu$ , donde  $u$  es la cuatro velocidad, no solo de un evento, pero si la misma a través de todo el espacio-tiempo, sucede que solo se tienen tres tipos de restricciones y no cuatro; esto es debido a que la ec. (2.13) se satisface si

$$k^\mu (A_{\mu\nu} u^\nu) = 0. \quad (2.15)$$

En otras palabras el usar una transformación de norma, permite cambiar la forma de nues-

---

<sup>2</sup>Se le sugiere al lector consultar el capítulo 35.5 de la Ref. [26].

tro campo tensorial  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , que pese a dicha transformación deba mantener las restricciones, esto se puede ver como eliminar restricciones hasta que solo tengamos dos componentes libres de  $A_{\mu\nu}$  y lo cual representa los dos grados de libertad, en otras palabras, las dos polarizaciones en la onda gravitacional plana. En un marco de Lorentz donde  $u^0 = 1$ ,  $u^j = 0$ , y donde el vector de onda no aparece explícitamente, se tiene:

$$\begin{aligned} h_{\mu 0} &= 0, & \text{Componentes espaciales de la forma } h_{jk} \text{ son diferentes de cero.} \\ h_{ki,j} &= 0, & \text{Componentes espaciales no divergen.} \\ h^i_j &= 0, & \text{Componentes espaciales no tienen traza.} \end{aligned} \tag{2.16}$$

En resumen podemos sintetizarlas como se expresa en la siguiente definición:

<p><b>Tensor TT</b></p> <p>Cualquier tensor simétrico que satisfaga las restricciones, en la ec. (2.16), es llamado un tensor transverso - sin traza</p> $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{TT} . \tag{2.17}$
--

Bajo lo anterior, en la norma TT con restricciones muestra que las únicas componentes de  $h_{\mu\nu}^{TT}$  son:

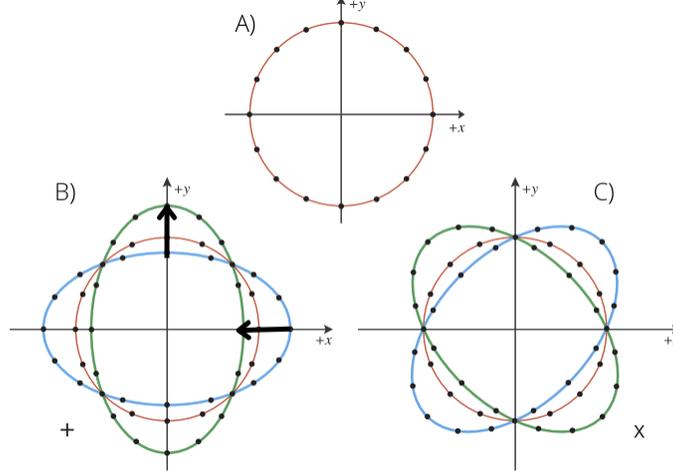
$$\begin{aligned} h_{xx}^{TT} &= -h_{yy}^{TT} = A_+ \exp(-i\omega(t - z)) \\ h_{xy}^{TT} &= h_{yx}^{TT} = A_\times \exp(-i\omega(t - z)) , \end{aligned} \tag{2.18}$$

las amplitudes  $A_+$  y  $A_\times$  representan los únicos dos modos independientes de polarización[26]. Una forma común de representar esto es visualizar un anillo de partículas de prueba en el plano  $xy$ , como se muestra en el panel A) Figura 2.1.

### 2.2.3. Reacción de radiación y la formula del cuadrupolo

La solución general a la ecuación de onda (2.11) puede ser encontrada al integrar

$$h_{\mu\nu}(t, \bar{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(\bar{x}', t - |\bar{x} - \bar{x}'|/c)}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3x' , \tag{2.19}$$



**Figura 2.1:** Para una onda gravitacional que se propaga por el eje  $z$ , se tiene  $A_{xx} \neq 0$  y  $A_{xy} = 0$ . A) El anillo de partículas con masa inicialmente en reposo se verá desplazado de dos distintas formas. B) Al estirarse a lo largo del eje  $y$  (ovalito verde) y comprimiéndose a lo largo del eje  $x$  (el óvalo azul), luego medio ciclo más tarde se comprime y se estira en dirección contraria. A esto se llama el estado de polarización  $+$  (más). C) Por el contrario,  $A_{xx} = 0$  y  $A_{xy} \neq 0$  produce las distorsiones en forma cruzada y por tanto se denomina polarización  $\times$  (cruz).

Muchas fuentes no necesitan ser tratadas completamente relativísticamente. Si las consideramos bajo un movimiento lento y la contribución gravitacional para la energía total es pequeña<sup>3</sup>, entonces la ec. (2.19) se puede tratar en el límite del campo débil, y se reduce a la famosa fórmula del cuadrupolo:

$$h_{jk}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{\mathcal{I}}_{jk}^{TT} \left( \frac{t-r}{c} \right) = \frac{2}{r} \ddot{\mathcal{I}}_{jk}^{TT} (t-r) \quad (2.20)$$

donde  $\mathcal{I}_{jk}^{TT}$  es el tensor de momento cuadrupolar sin trazas, también llamado momento cuadrupolar reducido; que se define como

$$\mathcal{I}^{jk} = I^{jk} - \frac{1}{3} \delta^{jk} \delta_{lm} I^{lm} \quad (2.21)$$

donde

$$I^{jk} = \int d^3x \rho(t, \vec{x}) x^j x^k \quad (2.22)$$

En principio, la fórmula del cuadrupolo se puede usar para cualquier sistema siempre

<sup>3</sup>En otras palabras, si usamos la teoría linealizada en la zona de radiación y además se imponen condiciones de norma transversa y sin traza, tal que  $h_{0\mu}^{TT} = 0$ ,  $h_{ij}^{TT} = 0$ ,  $h_{jk,k}^{TT} = 0$ , entonces la onda gravitacional tomará la forma definida en la ec. (2.20)

que pueda calcular los componentes de  $I^{jk}$ ; en escenarios astrofísicos esto puede requerir conocimientos sobre la dinámica de las masas en el sistema. La mayor parte de las fuentes de ondas gravitacionales son sistemas binarios para los cuales  $v \ll c$  [26][25].

Una serie de cálculos, expuestos a detalle en la Ref. [26], bajo las condiciones previamente establecidas, nos permiten deducir la energía gravitacional radiada en ondas gravitacionales; también llamada *luminosidad*, como

$$L_{GW} = \frac{dE}{dt} = \frac{G}{c^5} \frac{1}{5} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{jk} \ddot{\mathcal{I}}^{jk} \rangle. \quad (2.23)$$

Tal como se mencionó al iniciar este capítulo. Esta radiación gravitacional es similar a la radiación electromagnética (ver Tabla 2.1). Sin embargo, solo el cuadrupolo y los momentos superiores pueden irradiar gravitacionalmente esto es

## Radiación electromagnética    Radiación gravitacional

**Monopolo**

$$E \sim \frac{Q}{r^2}, \cancel{\frac{\dot{Q}}{r}}$$

$$g' \sim \frac{M}{r^3}, \cancel{\frac{\dot{M}}{r^2}}$$

**Multipolo**

$$E \sim \frac{P}{r^3}, \frac{\dot{P}}{r^2}, \frac{\ddot{P}}{r}$$

$$g' \sim \frac{I}{r^4}, \frac{\dot{I}}{r^3}, \cancel{\frac{\ddot{I}}{r^2}}$$

**Tabla 2.1:** Diferencia entre el monopolo y dipolo, electromagnético y gravitacional. El monopolo de masa en la radiación gravitacional, representa la masa-energía total conservada en un sistema, por lo que no emite radiación en el orden dominante. De manera similar, el dipolo de masa, corresponde al centro de masa de un sistema y su primera derivada representa el impulso, que también es una cantidad conservada, por lo que el dipolo de masa tampoco emite radiación, excepto en órdenes subdominantes.

$$g' \sim \frac{I}{r^5}, \frac{\dot{I}}{r^4}, \frac{\ddot{I}}{r^3}, \frac{\ddot{\dot{I}}}{r^2}, \frac{\ddot{\ddot{I}}}{r}, \quad (2.24)$$

el termino  $g'$  es la parte físicamente medible de los fenómenos gravitacionales: representa una aceleración o fuerza relativa observable entre dos masas que interactúan entre sí. Con esta variación del cuadrupolo con respecto al tiempo dado en la ec. (2.24), obtenemos la contribución de orden más bajo a la radiación gravitacional, y de igual manera obtener una estimación aproximada de la amplitud “deformada” (En astrofísica se le llama *strain*) de

las ondas gravitacionales que es inversamente proporcional a una distancia  $r$  de la fuente, y escala de la forma

$$\mathfrak{h} \sim \frac{1}{r}. \quad (2.25)$$

$\mathfrak{h}$  representa así el desplazamiento transversal a la dirección de la radiación entre dos masas cercanas debido a la onda gravitatoria.

En otras palabras la fórmula del cuadrupolo ec. (2.20), provee una característica importante de las ondas gravitacionales, la cual es su banda de frecuencia, y esto permite caracterizar el tamaño de la fuente, la escala de longitud sobre la cual varía la dinámica del par binario de masas, y la masa total de la fuente (ver Fig. 2.3).

## 2.3. Radiación gravitacional y el movimiento de dos puntos de masa

### Sistema binario compacto

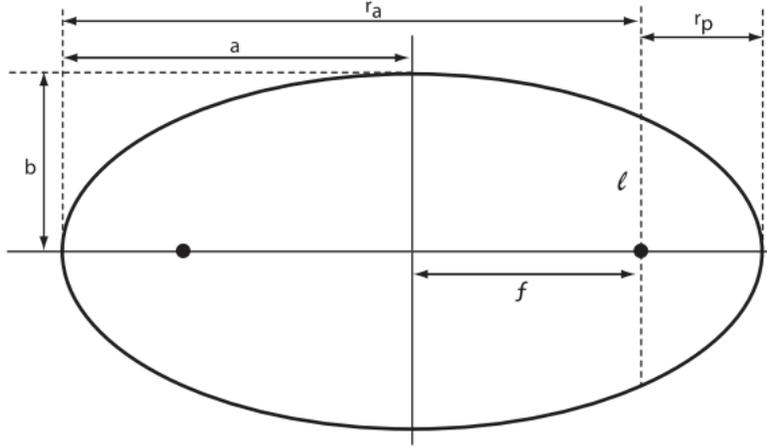
De la sección anterior podemos considerar que los sistemas de masas en movimiento deberían emitir ondas gravitacionales análogamente al comportamiento de un sistema de dos cargas en movimiento, las cuales emiten radiación electromagnética.

#### **Sistema Binario**

*Es aquel que esta compuesto por dos objetos astrofísicos y los cuales interactúan por fuerzas gravitacionales. Estos objetos pueden ser estrellas o agujeros negros.*

Para describir un sistema binario, el tipo de orbita ya sea circular, elíptica, parabólica o hiperbólica, siempre juega un rol inmediato sobre la localización de las masas. El valor de la excentricidad define el tipo de orbita; un valor nulo de excentricidad describe una orbita circular.

Tratando a la binaria como masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$ , podemos escribir



**Figura 2.2:** Elementos de una órbita elíptica

$$\begin{aligned}
 x_1^i &= r(\theta) \frac{\mu}{m_1} (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\
 x_2^i &= r(\theta) \frac{\mu}{m_2} (-\cos \theta, -\sin \theta, 0),
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

$\theta$  es la posición angular de uno de los objetos en su órbita y la cual cambia con el tiempo, así mismo  $\mu$  denota la masa reducida definida por

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},
 \tag{2.27}$$

la función  $r(\theta)$  describe el radio de la órbita como función de la posición.

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)}.
 \tag{2.28}$$

Generalmente, se define por los parámetros del semi-eje mayor  $a$  y la excentricidad  $e$ , que en caso de no ser nula sería de la forma

$$e = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} & \text{si } 0 < e < 1 \\ \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} & \text{si } 1 < e \end{cases}
 \tag{2.29}$$

Con ayuda de la tercera ley de movimiento de Kepler, podemos evaluar  $\theta$  en términos de la frecuencia angular orbital:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}, \quad (2.30)$$

$M$  es la masa del cuerpo central y en el caso específico del modelo con  $e = 0$  implica que  $a = \text{constante}$ .

Para el caso de orbitas excéntricas (es decir, con una excentricidad mayor a cero), los elementos que a continuación se enlistan toman mucha mayor relevancia y permiten una mejor descripción acerca de la evolución dinámica de las masas interactuantes. Tal es el caso de las orbitas elípticas (Ver Figura 2.2).

- **a = semi-eje mayor.**
- **b = semi-eje menor.**
- **e = excentricidad.**
- **f = foco.**
- **l = semi-latitud recta.**
- **$r_p$  = Perihelio.**
- **$r_a$  = Afelio.**

para orbitas Keplerianas, se tiene dos constantes de movimiento; por lo general  $\{E, L\}$  donde  $E$  es la energía y  $L$  el momento angular, o bien el par  $\{a, e\}$  que representan el semi-eje mayor y la excentricidad, respectivamente. Cualquiera de los dos conjuntos de constantes están relacionadas a la luminosidad descrita en la ec. (2.23) y esto permite escribirla en términos de la evolución del semieje mayor y la excentricidad, tal que

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} F(e), \quad (2.31)$$

donde  $\mu$  es la masa reducida definida en la ec. (2.27) y el factor adimensional  $F(e)$  es la función de corrección definida

$$F(e) = \left[ 1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right] (1 - e^2)^{-7/2}. \quad (2.32)$$

Dicha función depende únicamente de la excentricidad y muestra que los sistemas binarios de masa altamente excéntricos son mucho más eficientes para producir ondas gravitacionales [25]. En otras palabras, la onda gravitacional se genera como producto de la extracción de energía (2.31) y el momento angular total de la órbita<sup>4</sup>

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{32 G^{7/2} M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)^{1/2}}{5 c^5 a^{7/2}} (1 - e^2)^{-2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2\right), \quad (2.33)$$

a consecuencia de esto las masas se acercan entre sí a un ritmo de

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{5 c^5 a^3} F(e), \quad (2.34)$$

y eventualmente coalescen en el siguiente capítulo se abordará en detalle este concepto y así mismo se presentará la ecuación de coalescencia. Mientras la excentricidad evoluciona como

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{15 c^5 a^4} e (1 - e^2)^{-5/2} \left(1 + \frac{121}{304} e^2\right). \quad (2.35)$$

## 2.4. Detección de ondas gravitacionales

### 2.4.1. Detectores

Los experimentos para detección de ondas gravitacionales comenzaron con Weber y su detector de resonancia de masas en 1960, seguido por una red internacional de detectores resonantes criogénicos. Durante la décadas 60s y 70s, los detectores de interferómetros fueron sugeridos, sin embargo era necesario ahondar en el estudio para mejorar e incrementar la sensibilidad de los mismos. La tecnología para la detección está dominada por los *interferómetros de láser*; también son conocidos como interferómetros tipo Michelson. No fue hasta el año 2000 en que un conjunto de detectores fueron completados, incluyen-

---

<sup>4</sup>Este puede ser derivado de la forma análoga a la ec. (2.23), definida como:

$$\frac{dJ_j}{dt} = \frac{2}{5} \varepsilon_{jkl} \langle \ddot{I}_{ka} \ddot{I}_{al} \rangle.$$

do TAMA 300 en Japón, GEO 600 en Alemania, LIGO en Estados Unidos, y Virgo en Italia. El trabajo en conjunto de estos detectores fue del 2002 al 2011; un trabajo de red global[3].

A continuación se expondrán algunas características sobre los detectores que están actualmente reportando observaciones.

## LIGO

LIGO es el acronimo para referirse a Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (Por su trad. al español “*Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferómetro Láser*”). Pese a tener ser descrito como un observatorio, se tienen tres características que distinguen a LIGO de un observatorio astronómico [61].

- a) LIGO no detecta radiación electromagnética. De hecho es tan poco importante que los componentes de su detector están completamente aislados y protegidos.
- b) LIGO no puede señalar ubicaciones específicas en el espacio. Sin embargo puede detectar ondas gravitacionales provenientes de cualquier dirección.
- c) Un solo detector LIGO inicialmente no pudo confirmar las ondas gravitacionales por sí solo.

LIGO estuvo en funcionamiento entre 2001 y 2010, sin reportar ninguna detección. Los observatorios Hanford y Livingston; en Estados Unidos, cuya principal labor era la calibración se desmontaron para construir una versión mejorada, el Advanced LIGO, comenzando operaciones de observación en Septiembre del 2015. [61] [3].

## Virgo

Diseñado, construido y operado por una colaboración formada por veinte laboratorios en seis países, este interferómetro debe su nombre al cúmulo de Virgo<sup>5</sup>[100]. Se encuentra situado cerca de Pisa, Italia. La tecnología aplicada es de igual manera a la de LIGO.

---

<sup>5</sup>Colección o familia de galaxias incluyendo la nuestra.

De igual manera, un detector como Virgo, no tuvo suficiente sensibilidad para confirmar las ondas gravitacionales. Es por ello que las mejoras se llevaron a cabo en coincidencia con LIGO y fue así como Advanced Virgo, comenzó su periodo de observación en el 2016.

## KAGRA

El Kamioka Gravitational Wave Detector (Por su trad. al español “*Detector Kamioka de Ondas Gravitacionales*”). Este observatorio esta localizado en Japon. La primera y última (por ahora) observación de KAGRA finalizó el 21 de Abril del 2020. Actualmente pertenece a la colaboración de LIGO y Virgo, la cual planea iniciar el siguiente conjunto de observaciones a mediados de Diciembre de este año (2022)[52].

### 2.4.2. Primera detección

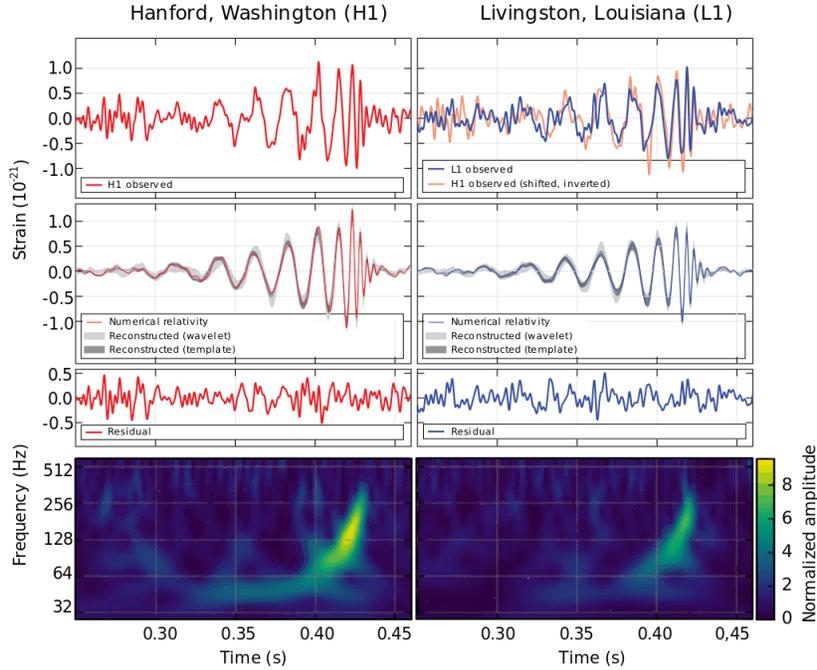
La era de la astronomía de ondas gravitacionales comenzó con la detección de una binaria de agujeros negros coalesciendo GW150914. Esta clasificación trae consigo el año/mes/día de la detección de GW (Sigla en ingles para Gravitational Wave, por su trad. al español “Onda Gravitacional”)[3]. Narrativamente en septiembre 14, 2015 a las 9:50:45 UTC, los observatorios LIGO Hanford en Washinton, y Livingston en Louisiana, detectaron la señal coincidente GW150914 mostrada en la Figura 2.3

La señal fue lo suficientemente fuerte como para que se pueda ver visualmente, incluso antes de realizar cualquier análisis de datos detallado, simplemente usando un filtro para seleccionar el ancho de banda donde se concentra la señal; la fila superior de la Figura 2.3. Mientras la segunda fila muestra la señal, reconstruida utilizando las plantillas o wavelets<sup>6</sup>, y el resultado de la relatividad numérica con los valores de mejor ajuste, la gráfica fue establecida con el *strain* (“deformación”) que está relacionada a la deformación observada por el interferómetro

$$\mathfrak{h} \approx \frac{\delta l}{l}, \quad (2.36)$$

---

<sup>6</sup>Las wavelets son funciones que satisfacen ciertos requerimientos matemáticos y son utilizadas para la representación de datos o de otras funciones.



**Figura 2.3:** Primera detección de ondas gravitacionales. Mediante el análisis de estas señales se puede observar la evolución en el tiempo, lo que permite inferir las masas de los objetos que producen la señal. Mientras que a través de la frecuencia aunado a las masas, se logra inferir la distancia luminosa.

con  $l$  como el parámetro de longitud en la deformación<sup>7</sup>. La última fila da una representación de la señal en términos de la frecuencia, que muestra el comportamiento característico producido por un par de agujeros negros coalesciendo, con la frecuencia aumentando en el tiempo, hasta un valor máximo, después del cual la señal desaparece [67].

Además, tal como se expresó en la sección anterior, los sistemas binarios pueden ser conformados por un par de estrellas de neutrones, agujeros negros o una combinación estrella de neutrones y agujero negro [6]. Es entonces que el análisis de estas señales juega un rol importante para el registro y caracterización de las fuentes de ondas gravitacionales. M. Maggiore en su libro [66] ofrece una descripción completa sobre de las herramientas para este análisis.

<sup>7</sup>Esta es la razón por la que las ondas gravitacionales son difíciles de detectar: para un detector con una longitud de 4 km, se esperan cambios del orden de

$$\delta l \approx \eta l = 4 \times 10^{-17} \text{cm}$$

### 2.4.3. Catálogos de observaciones

commonName	mass_1_source	mass_2_source	...	luminosity_distance	...	redshift	final_mass_source	...
GW150914	35.6	30.6	...	440.0	...	0.09	63.1	...
GW151012	23.2	13.6	...	1080.0	...	0.21	35.6	...
GW151226	13.7	7.7	...	450.0	...	0.09	20.5	...
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
GW170104	30.8	20.0	...	990.0	...	0.2	48.9	...
GW170608	11.0	7.6	...	320.0	...	0.07	17.8	...
GW170729	50.2	34.0	...	2840.0	...	0.49	79.5	...
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

**Tabla 2.2:** Elementos de la base de datos, actualmente se cuenta con 90 eventos registrados de ondas gravitacionales.

Desde la primera detección reportada, la colaboración de observatorios, ha realizado una serie de *campanas de observación* (En ingles esto se denota como *observation run O1, O2, O3*), lo que permitio la colección de registros, que son almacenados en una base de datos<sup>8</sup>. Al finalizar cada ronda de observación y una análisis previo, la colaboración de observatorios, publica los datos. Estos son nombrados por el acrónimo en ingles GWTC (“*Gravitational-Wave Transient Catalog*”, por su trad. al español Catálogo de Ondas Gravitacionales Transitorias). La Tabla 2.2, muestra algunos parámetros que son registrados al momento de la detección y de los cuales ya se han discutido en la sección anterior.

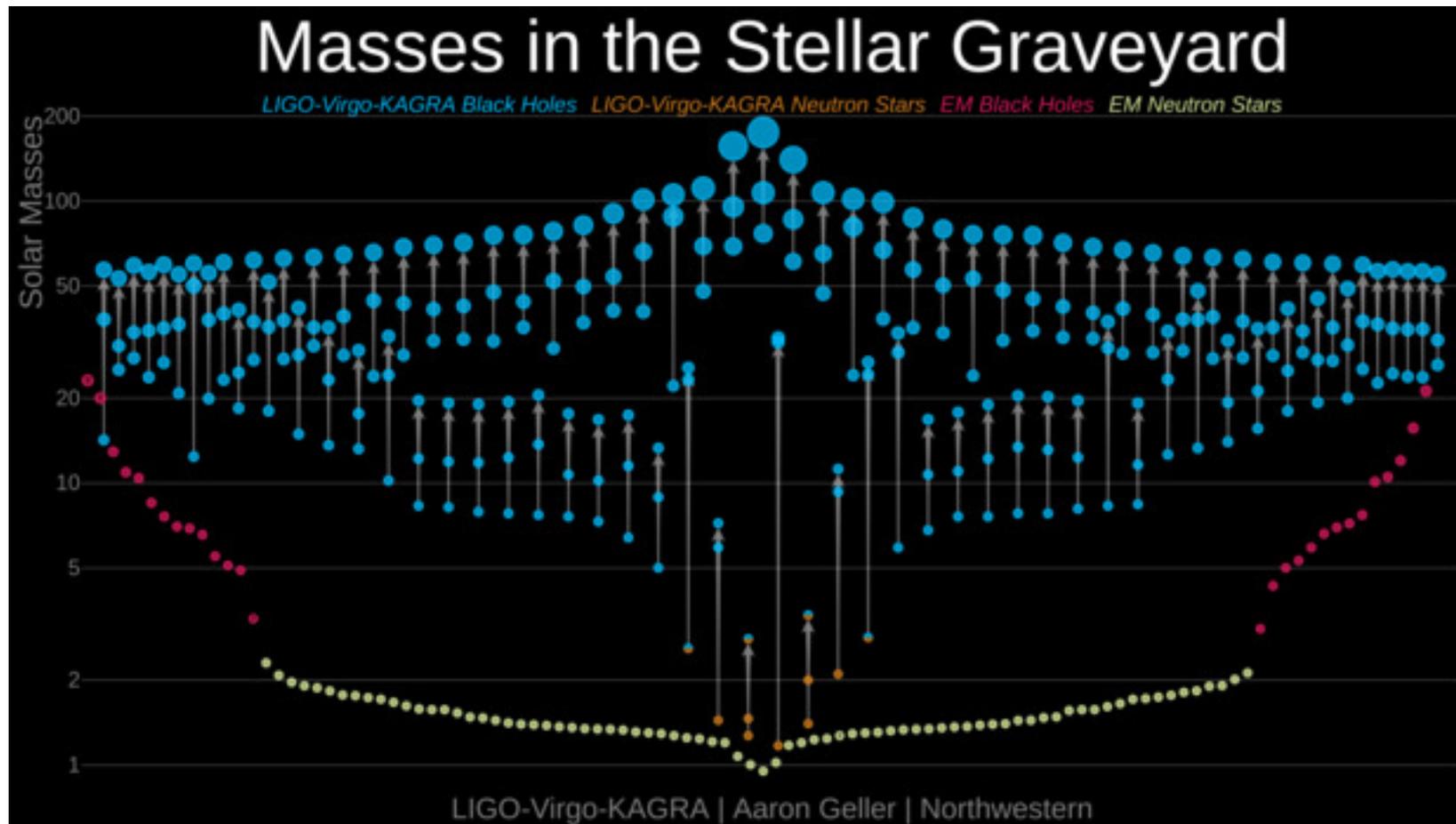
A finales de septiembre de 2019, LIGO y VIRGO, habían observado 39 nuevas ondas gravitacionales. Junto a las 11 ya observadas por los Run O1 y O2 (catálogo GWTC-1), totalizando 50 eventos en el segundo catálogo de ondas gravitacionales (GWTC-2)[4]. Posteriormente, la unión de KAGRA a la colaboración LIGO-Virgo, completó su campaña de observación (run O3) que se llevó a cabo entre el 1 de Noviembre 2019 al 27 de Marzo del 2020, agregando así 35 eventos de ondas gravitacionales, los cuales son candidatos que tienen una probabilidad de ser producidos por coalescencia de binarias compactas. La Figura 2.4 ofrece un compendio de los eventos registrados.

Entre estas detecciones de ondas gravitacionales, destacan las siguientes: GW190412, GW190426, GW200115 y GW200105, en los cuales se han encontrado evidencias de diver-

<sup>8</sup>Esta base de datos puede ser consultada en el siguiente enlace:  
[www.gw-openscience.org/eventapi/html/GWTC/](http://www.gw-openscience.org/eventapi/html/GWTC/)

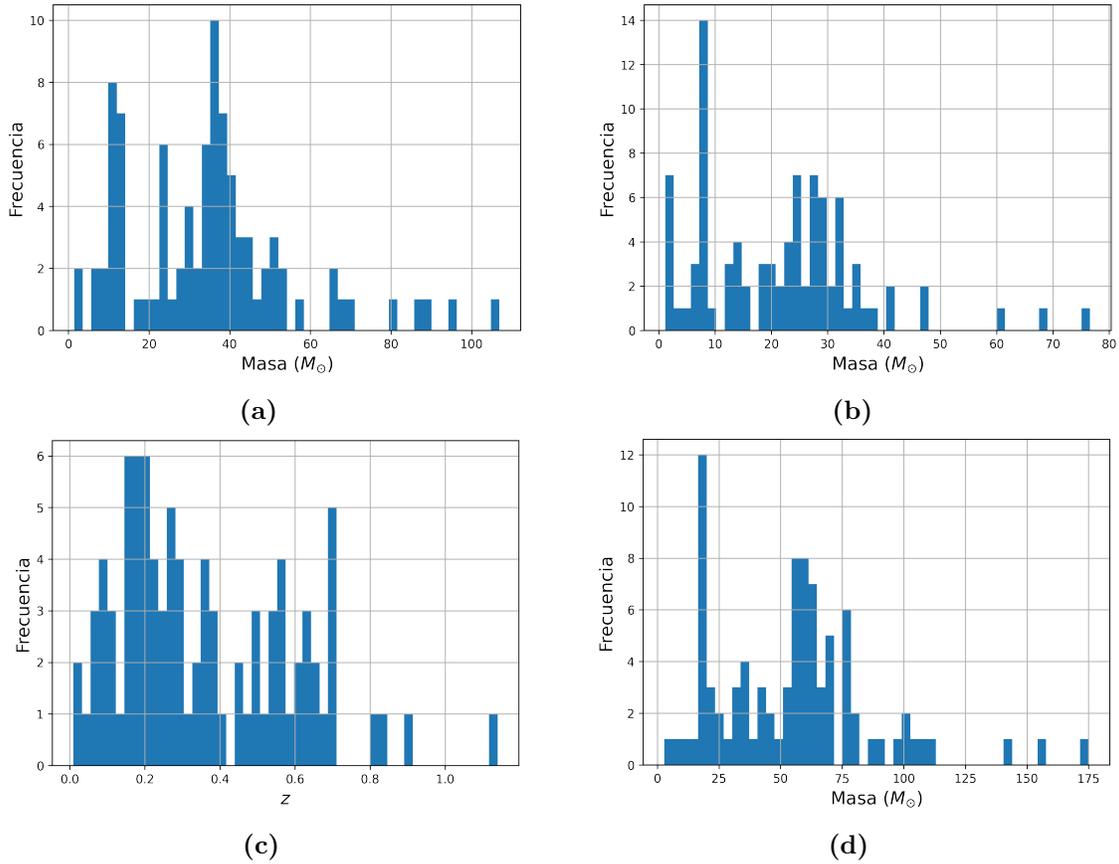
tos tipos referente a los progenitores de las ondas gravitacionales. Por mencionar algunos detalles, el evento GW190412 nos presenta una fusión asimétrica de agujeros negros de  $30 M_{\odot}$  y  $8 M_{\odot}$ . Mientras que el evento GW190426 se generó por la fusión de agujeros negros más masiva observada por LIGO/Virgo; produciendo un agujero negro de  $\approx 175 M_{\odot}$ . Por otro lado, los eventos GW200115 y GW200105, fueron producidos por binarias compuestas de estrella de neutrones y agujeros negros (NSBH; acrónimo en inglés para “*Neutron Star-Black Hole*” por su trad. al español: Estrella de neutrones - Agujero Negro), por lo tanto el catálogo GWTC-3 contiene hasta ahora un total de 90 candidatos a señales las cuales tienen un probabilidad considerable de ser de origen astrofísico [5][7].

Es inmediato notar, que la participación de KAGRA en la colaboración incrementó la sensibilidad que se tenía hasta el catálogo GWTC-2, lo que permitió comprobar que las binarias NSBH, son posibles. De igual manera, se observa que las binarias de estrellas de neutrones, no parecen exceder más de  $3 M_{\odot}$ , las coalescencias que se han detectado van entre  $5 M_{\odot}$  y  $10 M_{\odot}$ , aunque esto también es debido a la sensibilidad de cada uno de los detectores. Por último, es importante mencionar que las contrapartes electromagnéticas, no han encontrado objetos tan masivos como los de ondas gravitacionales, permitiendo así justificar la hipótesis de que hayan tenido un origen por coalescencia jerárquica.



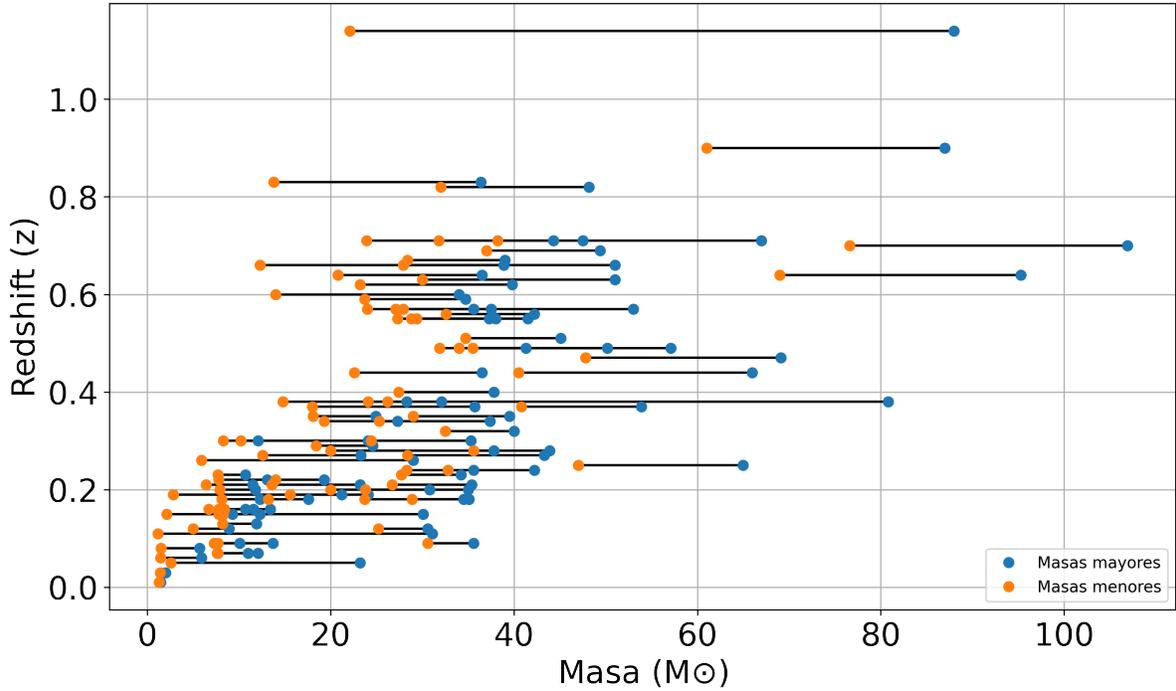
**Figura 2.4:** Diagrama esquemático de eventos registrados por LIGO-Virgo-KAGRA. Los puntos de color oliva ubicados en la parte inferior, representan estrellas de neutrones detectadas por su generación de ondas electromagnéticas. Los puntos anaranjados representan agujeros negros producto de binarias de BHs de menor masa; por ejemplo el evento: GW191219. Los puntos azules representan agujeros negros de masa mucho mayor a  $5M_{\odot}$ .

## 2.5. Análisis de datos



**Figura 2.5:** Histogramas obtenidos por el análisis de datos del catalogo GWTC-3, usando la librería PANDAS incorporada a Python. Se muestra la frecuencia en los valores de cada uno de los eventos reportados. El panel a) masa inicial de la fuente numero 1, panel b) masa inicial de la fuente numero 2, panel c) redshift de detección de la binaria y el panel d) la masa final resultante como producto de la coalescencia

A partir del ultimo catalogo de observaciones publicado (GWTC-3)[5], hemos realizado un primer análisis estadístico de datos mediante el lenguaje Python y con ayuda de las librerías NUMPY, ASTROPY, MATHPLOTLIB y SCIPY. A partir de esta lectura de datos se hace la extracción de parámetros específicos. Los histogramas de la Figura 2.5 presentan una distribución de valores en las propiedades de las fuentes progenitoras de las ondas gravitacionales, tales como: masa intrínseca, distancia luminosa, el redshift de detección ( $z$ ) y la masa final por la fusión de ambas fuentes. La extracción de datos se realizó de forma automatizada a partir de un algoritmo previamente diseñado para tal efecto.



**Figura 2.6:** Pares de progenitores detectados, la línea establece el par de binarias, en el eje  $x$  se representa la magnitud en  $M_{\odot}$  de cada uno de los objetos, mientras que en el eje  $y$  el redshift ( $z$ ) al cual se detectó el evento.

Este tratamiento nos permitió conocer mejor el comportamiento estadístico de los eventos detectados, tal como se aprecia en la Figura 2.6. Cada evento tiene un diferente corrimiento al rojo  $z$  (Redshift), lo cual quiere decir, que se han presentado eventos a diferentes distancias y tiempo cósmico. En la figura se observa que los eventos de binarias más ligeras ocurren en tiempos más tardíos (redshift bajo). Sin embargo, esto no es concluyente y, por el contrario, en esta tesis argumentamos que los eventos más masivos son el producto de una serie de mergers a lo largo de la historia del universo. En particular, este efecto puede ser atribuido a que la débil señal de los pares más ligeros sea indetectable a grandes distancias (tiempos tempranos).

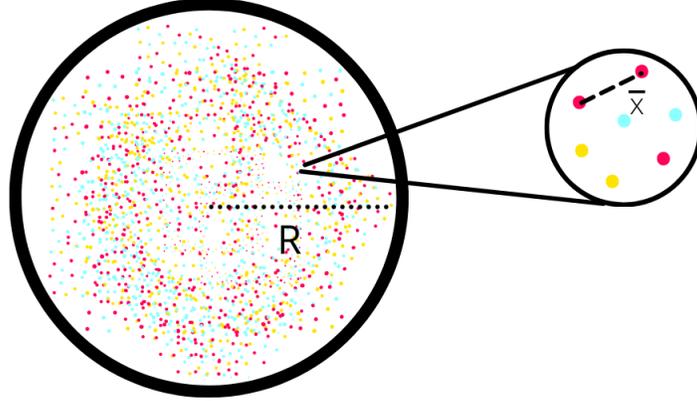
## Binarias de Agujeros Negros Primordiales

En este capítulo se le expondrá el trabajo teórico-practico realizado para cumplir con los objetivos de esta tesis. A manera de brindar una justificación para este trabajo se expone que la reciente observación de pares de agujeros negros coalesciendo a través de su detección con ondas gravitacionales ha abierto una ventana a la astronomía, pues, sabemos que cuando dos BHs coalescen, el área de la superficie del agujero negro final debe exceder la suma de las superficies del par de BHs iniciales [45][47]. Esta restricción establece un límite superior en la cantidad de radiación gravitacional emitida en la colisión. Por tanto, se puede esperar que la fusión de agujeros negros de masa intermedia o superior, pueda ocurrir como consecuencia de múltiples generaciones de PBHs con una masa relativamente pequeña a las condiciones limite para la exclusión de masas, esto permite que incluso puedan ser considerados candidatos a materia oscura. En principio, el descubrimiento de agujeros negros primordiales o de sus productos resultantes por interacción con otros agujeros negros, proporcionaría información valiosa sobre los procesos físicos que ocurren en el Universo en ese período[42].

### 3.1. Abundancias y distancias comóviles

Teóricamente las coalescencias de PBHs han sido estudiados por Nakamura, Sasaki y Thorne [87][88], así como también por Ali–Haïmoud *et al.* [11], considerando diferentes mecanismos y poblaciones, para su evolución dinámica y acreción. Este mecanismo de

acreción será abordado en la siguiente sección.



**Figura 3.1:** Esquema de una población de agujeros negros primordiales en una región de tamaño  $R$  y con separación media  $\bar{x}$ .

El modelo más sencillo para estudiar abundancias de PBHs, se basa en considerar una población dentro de un volumen determinado, esto permite suponer una distancia media entre cada objeto, denotada como  $\bar{x}$  (Ver Figura 2.4) lo cual determina también su densidad. Este es el primer parámetro que permite establecer las condiciones iniciales y consecuentemente evaluar la probabilidad de que se creen binarias de PBHs. Así mismo, es necesario establecer los escenarios en los que esta población podría interactuar sobre sí misma o bien que el proceso de interacción necesite considerar condiciones cosmológicas según el redshift al cual se proponga el modelo. Tal y como se estudió en [11, 88] se considera que los PBHs distribuidos aleatoriamente en el espacio en el Universo temprano presentan típicamente distancias definidas por su densidad. Determinada a su vez por la fracción de materia que representan los PBHs, como se notó por primera vez en Ref. [74]. Por tanto la distancia comóvil de agujeros negros primordiales está dado por

$$\bar{x} = \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{f_{\text{PBH}} \rho_{\text{DM}}} \right)^{1/3}, \quad (3.1)$$

con  $f_{\text{PBH}}$  denotando la fracción de PBHs en materia oscura y  $\rho_{\text{DM}}$  como la densidad de

la materia oscura. Nakamura et al. [76], asumen que la fracción  $f_{\text{PBH}} = 1$  esto significa que toda la materia oscura está constituida por PBHs. En el capítulo 1 se establece la definición para este criterio mediante la combinación de las ecuaciones (1.58) y (1.59). Además, el modelo considera que todos los PBHs son monocromáticos y se distribuyen inicialmente al azar en el espacio considerando una distribución de Poisson.

Por otro lado, se debe tomar en cuenta que en el Universo el horizonte de Hubble crece como  $H^{-1}(t) \propto t$ . A partir de la ecuación (3.1) podemos definir la distancia media en un redshift  $z$ , a esta cantidad la denotamos por  $l_{\text{PBH}}$ , así la longitud normalizada por el horizonte de Hubble se establece como

$$H(z)l_{\text{PBH}}(z) = H(z)n_{\text{PBH}}^{-1/3}(1+z)^{-1} \simeq 6 \times 10^{-6} f_{\text{PBH}}^{-1/3} \left( \frac{1+z}{1+z_{\text{eq}}} \right) \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{30M_{\odot}} \right)^{1/3}, \quad (3.2)$$

$$H(z)l_{\text{PBH}}(z) = H(z) \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{PBH}}(z_{\text{eq}})} \right)^{1/3}. \quad (3.3)$$

Dado que se ha considerado que los PBHs se crearon en la época dominada por radiación, el redshift debe ser mayor que el redshift de la época de equivalencia (Universo dominado por materia y radiación), entonces  $z > z_{\text{eq}}$ . La densidad numérica de PBHs comóvil en un volumen inicial se denota por  $n_{\text{PBH}}$ , este factor de volumen permite definir la densidad numérica física  $\hat{n}_{\text{PBH}}$  (pues el factor de escala está siendo considerado) como

$$\hat{n}_{\text{PBH}} = \left( \frac{\rho_{\text{PBH}}(z_{\text{eq}})}{M_{\text{PBH}}} \right) (1+z)^{-3}. \quad (3.4)$$

$z_{\text{eq}}$  corresponde al redshift en la época de equivalencia, que se determina como el momento en que

$$\Omega_{\text{rad}}(z_{\text{eq}}) = \Omega_{\text{DM}}(z_{\text{eq}}) \quad (3.5)$$

Por lo cual nos permite definir la fracción de agujeros negros primordiales  $f_{\text{PBH}}$  como

$$f_{\text{PBH}} = \frac{\Omega_{\text{PBH}}}{\Omega_{\text{DM}}}, \quad (3.6)$$

usando la definición del parámetro de densidad  $\Omega_{DM} = \rho_{DM}/\rho_{crit}$ , donde  $\rho_{crit} \equiv 3H_0^2/8\pi G$ , entonces

$$\Omega_{PBH} = \frac{f_{PBH}\rho_{DM}}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G f_{PBH}}{3H_0^2} \quad (3.7)$$

Por tanto, es posible reescribir la distancia media de los PBHs como:

$$l_{PBH} = \bar{x} = \frac{1}{(1 + z_{eq})f_{PBH}^{1/3}} \left( \frac{8\pi G}{3H_0} \frac{M_{PBH}}{\Omega_{DM}} \right)^{1/3} \quad (3.8)$$

## 3.2. Formación de binarias

### Formación de binarias de PBHs en el Universo temprano

A partir de la idea de que los Agujeros Negros Primordiales se formaran en épocas tempranas del Universo, estos PBHs pudieron haberse diluido en el espacio debido a que la expansión cósmica actúa como una fuerza repulsiva que puede separar a dos PBHs entre sí. Por otro lado también es posible que dos PBHs sean arrastrados por la fuerza gravitacional que actúa entre ellos.

Un primer mecanismo para la formación de binarias sería en la época en que el Universo estaba dominado por la radiación; también llamada *formación de binaria por cercanía* (Ver Figura 3.3a). Este modelo fue propuesto en [76] para investigar la detección de coalescencias binarias de MACHO (Las siglas en inglés para: Massive Compact Halo Object, por su trad. al español “*Objeto astrofísico masivo de halo compacto*”) PBHs con una masa  $\sim 0.5M_{\odot}$ . Sin embargo, en este mecanismo es de vital importancia conocer la separación eficaz para que la fuerza de atracción gravitacional entre dos PBHs, supere la fuerza de expansión.

Y. Ali-Haïmoud *et al.* [11], establecen esta condición de expansión, usando parámetros cosmológicos consistentes con las mediciones hechas por Planck [9]. Contrario a lo realizado por Nakamura *et al.* [88], se considera que los PBHs forman una fracción  $f$  de la materia no relativista (es decir, la materia oscura y los bariones). De igual manera, el modelo supone que la distribución a gran escala de PBHs sigue el de la materia oscura,

con lo cual, a escala suficientemente pequeñas, y en tiempos lo suficientemente tempranos, se distribuyen efectivamente al azar en el espacio. En otras palabras, se desprecia la posibilidad de agrupamiento de PBHs a pequeñas escalas, lo cual depende en detalle del modelo de formación de PBHs. Por tanto, la separación comovil característica (es decir, la separación propia en equivalencia) entre dos PBHs [11], se define como

$$\bar{x} \equiv \left( \frac{3M}{4\pi f \rho_{\text{eq}}} \right)^{1/3}. \quad (3.9)$$

Siempre que un par de PBH estén lo suficientemente cerca, estos se van a desacoplar del el flujo de Hubble y se habrá formado un par binario. Como ya hemos visto en el Capítulo 2, al formarse una binaria, se tienen dos constantes de movimiento, el semi-eje mayor y el momento angular, denotados como  $a$  y  $l$ , respectivamente. Si la separación sea mucho más pequeña que la escala de Hubble, es posible usar una aproximación newtoniana y el movimiento sería idealmente unidimensional, siguiendo la definición de Y. Ali-Haimoud *et al.*[11], esto es:

$$\ddot{r} - (\dot{H} + H^2)r + \frac{2M}{r^2} \frac{r}{|r|} = 0, \quad (3.10)$$

donde  $r$  es la separación propia proyectada a lo largo del eje de movimiento.

---

**Nota:** A partir de este momento se denotará al factor de escala con la letra  $s$ , esto es debido a que se ha estandarizado que el semi-eje mayor sea denotado por  $a$ .

---

$H$  es función del factor de escala  $s$  normalizado a la unidad en la época de equivalencia (radiación-materia), el flujo de Hubble esta dado por

$$H(s) = \left( \frac{8\pi}{3} \rho_{\text{eq}} \right)^{1/2} h(s), \quad (3.11)$$

con  $h(s) \equiv \sqrt{s^{-3} + s^{-4}}$ , mientras que la diferenciación en las variables se encuentra dada con respecto al tiempo propio.

Al usar la razón de  $r$  con una separación comovil  $x$  es posible reescribir la ecuación(3.10) en términos del factor de escala  $s$ :

$$\chi'' + \frac{sh' + h}{s^2h}(s\chi' - \chi) + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(sh)^2} \frac{1}{\chi^2} \frac{\chi}{|\chi|} = 0, \quad (3.12)$$

tal que  $\chi \equiv r/x$  y el parámetro adimensional  $\lambda$  es

$$\lambda \equiv \frac{4\pi\rho_{\text{eq}}x^3}{3M} = \frac{X}{f}, \quad (3.13)$$

se ha usado la ec. (3.9) y la distancia comovil  $x$  para escribir de manera practica una variable adimensional  $X = (x/\bar{x})^3$  y simplificar la ec. (3.13). En el limite cuando el factor de escala  $s$  tiende a cero, el par binario sigue el ritmo de expansión de Hubble, tal que:

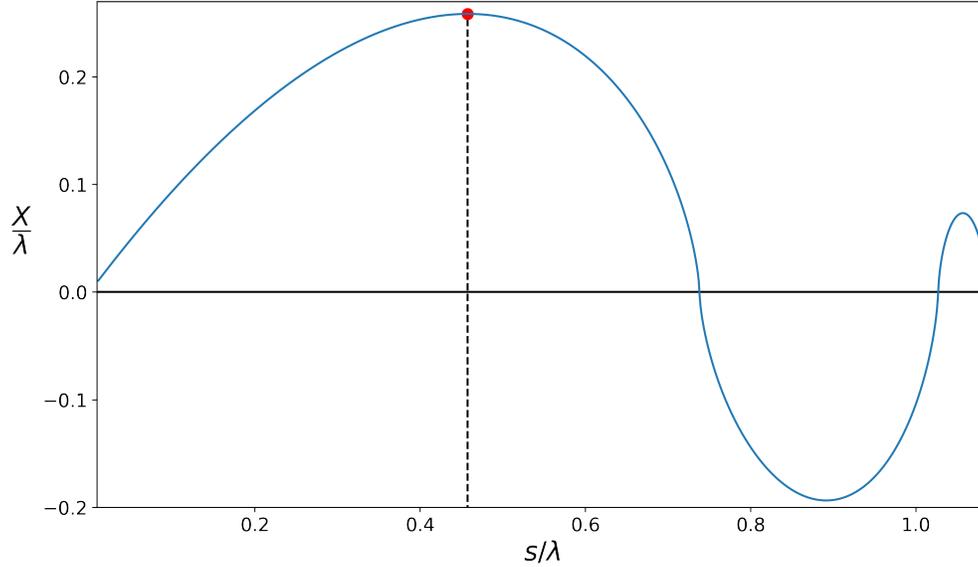
$$\chi(0) = 0, \chi'(0) = 1, \quad (3.14)$$

mostrando así que la solución es enteramente caracterizada por  $\lambda$  [11]. Resolviendo la ecuación (3.12) mediante el método numérico de Runge–Kutta, se tiene que a valores de  $\lambda \ll 1$  las binarias de PBHs se desacoplan de la expansión de Hubble durante la época de radiación en el Universo, es decir cuando el factor de escala  $s \ll 1$  (Ver Figura 3.2). A su vez encontramos que el desacople efectivo sucede cuando

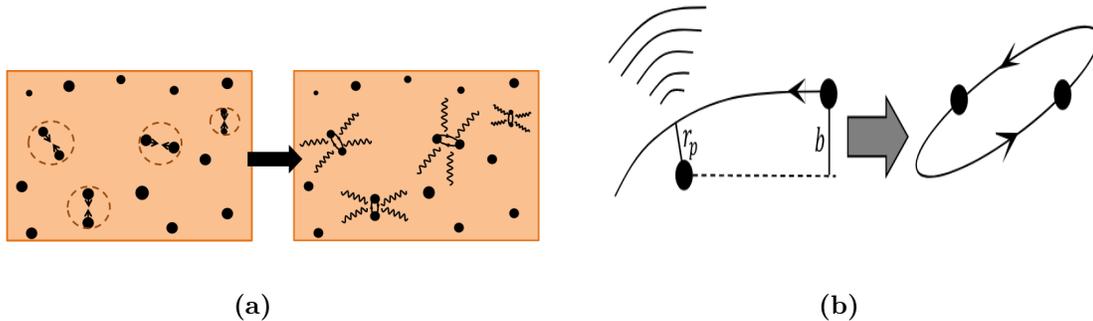
$$s \approx \lambda/3, \quad (3.15)$$

y la separación propia oscila con una amplitud  $|\chi| \approx 0.2\lambda = 2a/x$ , donde  $a$  es el semi-eje mayor de la binaria de PBHs recién formada. De este modo para  $\lambda \ll 1$ , Y. Ali-Haïmoud et. al en Ref. [11] definen que

$$a = 0.1 \left( \frac{3M}{4\pi\rho_{\text{eq}}} \right)^{1/3} \left( \frac{X}{f} \right)^{4/3}. \quad (3.16)$$



**Figura 3.2:** Separación adimensional  $\chi = r/x$  entre dos PBHs, reescalado por  $\lambda = \frac{1}{f}(x/\bar{x})^3$ , como una función del factor de escala, en el límite cuando  $\lambda \ll 1$ . La línea punteada muestra el momento en el que ocurre el desacople, mientras que el punto rojo muestra la separación del semi-eje mayor  $a$ , para formar una binaria de PBHs. A su vez esta separación propia oscila con una amplitud  $|\chi| \approx 0.2\lambda = 2a/x$  en la primera oscilación y reduce su amplitud (coalesce) en subsecuentes oscilaciones.



**Figura 3.3:** Mecanismos de formación de binarias de PBHs. **a)** Formación de binarias en la época de radiación y **b)** Encuentro cercano de dos PBHs en el presente.

## Formación de binarias de PBHs en el Universo presente

En este mecanismo se considera una situación en la que un PBH que viaja en el espacio es capturado gravitacionalmente por un encuentro cercano con otro PBH (Ver Figura 3.3b). Estos PBHs pueden estar concentrados en una región local como dentro de un halo de materia oscura más grande o simplemente moviéndose libremente en el espacio. Cerca

del horizonte de eventos, la aceleración relativa de los PBHs produce una emisión más grande y dominante de radiación gravitacional. Si la cantidad de energía de las ondas gravitacionales emitidas<sup>1</sup>  $\Delta E$  definida en la ec. (2.31) es mayor que la energía cinética de los PBHs

$$E_k^{\text{PBH}} = \frac{\mu v^2}{2}, \quad (3.17)$$

donde  $v$  como la velocidad característica de los PBHs, implica que los PBHs ya no pueden escapar al infinito y por lo tanto se forma un sistema ligado entre dos PBHs. Lo que impone la condición en  $r_p$

$$r_p < r_p^{\text{max}} = \left[ \frac{85\pi}{6\sqrt{2}} \frac{G^{7/2}(m_1 + m_2)^{3/2}m_1m_2}{v^2} \right] \quad (3.18)$$

No obstante, la colisión frontal directa es probabilísticamente improbable, es decir, siempre existe un factor de excentricidad, como se muestra en la Figura 3.3b; una imagen esquemática del encuentro cercano de PBHs con el parámetro de impacto  $b$  y el periastro  $r_p$  [88]. Es así que se considera un encuentro hiperbólico, donde el semi-eje mayor es de la forma:

$$|a| = \frac{GM}{v_0}, \quad (3.19)$$

donde  $v_0$  es la velocidad angular y la excentricidad es descrita como:

$$e^2 = 1 + \left( \frac{b^2 v_0^4}{G^2 M^2} \right) = 1 + A^{-2}, \quad (3.20)$$

---

<sup>1</sup>La pérdida de energía por radiación gravitacional definida en la ecuación (2.31), durante un periodo orbital  $\mathcal{T}$ , es de la forma

$$\Delta E = -\mathcal{T} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{64\pi \sqrt{G(m_1 + m_2)} G^3 m_1^2 m_2^2}{5r_p^{7/2} (1 + e)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right),$$

donde se ha usado la tercera ley de Kepler y  $r_p = a(1 - e)$ . Es posible aproximar la trayectoria del encuentro cercano al considerar que  $e = 1$  ya que la verdadera trayectoria es físicamente indistinguible de la parábola cerca del periastro donde ocurre la emisión dominante de ondas gravitacionales. Entonces la pérdida de energía se vuelve

$$\Delta E = -\mathcal{T} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{85\pi \sqrt{G(m_1 + m_2)} G^3 m_1^2 m_2^2}{12\sqrt{2} r_p^{7/2}}.$$

con

$$A = \frac{GM}{bv_0^2}. \quad (3.21)$$

Usando la definición del radio pericéntrico  $q = |a(e-1)|$ , procederemos a usar  $a$  y  $e$  dentro de la ecuación y obtenemos

$$q = b \left( \sqrt{1 + A^2} - A \right). \quad (3.22)$$

Cabe señalar que el pericentro es la distancia mínima entre dos cuerpos durante el encuentro. Tomando la ec.(3.22) podemos reescribirla como:

$$q^2 + 2Abq = b^2. \quad (3.23)$$

Ahora se considera  $q = r_p$  y sustituiremos la ec. (3.21) en ec. (3.23), de esta manera la relación entre  $b$  y  $r_p$  quedará definida mediante

$$b^2(r_p) = r_p^2 + \frac{2GM r_p}{v^2}. \quad (3.24)$$

Por lo que el encuentro con el parámetro de impacto menor que  $b(r_p)$ , tal que  $r_p$  sea máximo, producirá una binaria de PBHs. En otras palabras, la binaria de PBHs será formada cuando el limite sea  $r_p \ll b$ . La probabilidad de colisión puede ser estimada de la sección eficaz (denotada por  $\sigma$ ) queda definida como [88]:

$$\int 2\pi b db = \pi b^2(r_p) \quad (3.25)$$

$$\sigma = \pi b^2(r_p) \simeq \left( \frac{85\pi}{3} \right)^{2/7} \frac{\pi (2GM_{\text{PBH}})^2}{v^{18/7}}. \quad (3.26)$$

Es importante mencionar que es tipo de mecanismo, permite establecer los modelos que estudian ambientes con múltiples colisiones; sistemas de múltiples estrellas/BH en las regiones centrales de cúmulos con un disco de acreción [73, 75], y sin este [68, 70, 85]. Contrario al mecanismo de formación en la época de radiación, la coalescencia entre PBHs en este mecanismo, es menor que la edad del Universo [27].

### 3.3. Tiempos de coalescencia

Una vez expuestos los modelos y mecanismos para la formación de binarias, y para seguir con la continuidad de este trabajo, formalmente se presenta la definición de un concepto fundamental y que es a su vez la base de nuestra hipótesis; la *coalescencia*.

#### Coalescencia

*Se define coalescencia a la posibilidad de que dos o más objetos se unan formando así un único cuerpo. Durante el proceso se pueden presentar diferentes fenómenos como intercambio de material o emisión de ondas gravitacionales que dependen de la naturaleza de los objetos en interacción.*

Bajo esta definición y lo expuesto en la sección (2.3), podemos establecer un modelo sencillo en el cual nuestro sistema binario estará compuesto únicamente por agujeros negros primordiales, los cuales trataremos desde un punto de vista astrofísico, de tal manera que podamos caracterizar su comportamiento orbital mediante las ecuaciones: (2.31) - (2.35).

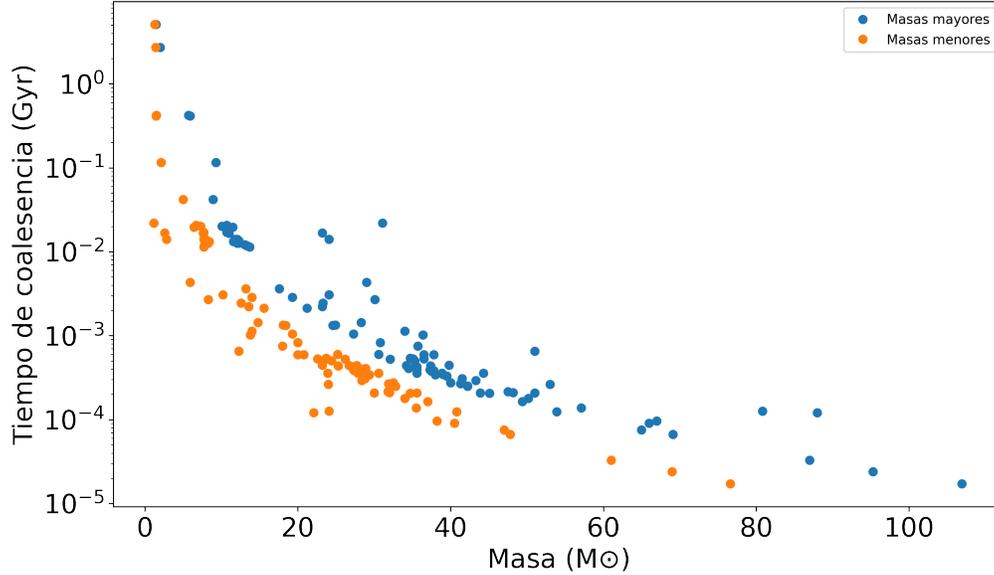
Como hemos visto, los parámetros orbitales iniciales de los binarios son estocásticos, algunos binarios se fusionan en el pasado, otros en la época actual y algunos otros pueden aún estar por coalescer[88]. A partir del trabajo de Peters [80], una binaria que consta de masas puntuales se fusiona debido a la radiación gravitacional después del tiempo  $t_{\text{coal}}$ :

$$t_{\text{coal}} = \frac{15}{304} \frac{a^4}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \left[ \frac{(1 - e^2)}{e^{\frac{12}{19}}} \left( 1 + \frac{121}{304} e^2 \right)^{\frac{870}{2299}} \right]^4 \quad (3.27)$$

$$\times \int_0^e de' \frac{e'^{\frac{29}{19}}}{(1 - e'^2)^{-\frac{3}{2}}} \left( 1 + \frac{121}{304} e'^2 \right)^{\frac{870}{2299}}$$

Con base a la revisión de diversos trabajos, se ha encontrado una variación en la ecuación (3.27).

Como primer cálculo se propuso usar la definición de Celoria et al. [25], obtenida a partir de integrar la ec. (2.34). Así el tiempo de coalescencia de un sistema binario queda definido como



**Figura 3.4:** Tiempo de coalescencia en pares de agujeros negros progenitores de las fuentes gravitacionales registradas por la colaboración LIGO, Virgo y KAGRA. Los puntos azules representan a los BHs que cuentan con una masa mayor a su complemento en la binaria. Análogamente los puntos naranjas representan a los BHs con menor masa dentro de la binaria. Se puede observar que a menor cantidad de masa el tiempo de coalescencia tiende a incrementar.

$$t_{\text{coal}} = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a_0^4}{M_1 M_2 (M_1 + M_2)} \frac{1}{F(e)}. \quad (3.28)$$

Usando la ec. (3.28) podemos ampliar el análisis de datos<sup>2</sup> al usar los datos del catalogo de observaciones GWTC-O3; considerando el valor de masa en cada elemento de la binaria compacta, proponiendo<sup>3</sup> además, los valores de excentricidad  $e = 0.9$  y separación inicial media de  $a = 0.1$  AU, obteniendo así la Figura 3.4 en la cual se observa el comportamiento de cada par binario formado por una masa mayor y una masa menor a la primera, el tiempo de coalescencia es inversamente proporcional a la masa total de la binaria al coalescer. En otras palabras, a menor masa el tiempo necesario para coalescer se incrementa, esto es acorde al mecanismo para la formación de binarias en épocas tempranas del Universo. A primera instancia esto podría descartar nuestras consideraciones de que los pares de BHs detectados tengan un origen primordial con  $m_{\text{PBH}}$  del orden de  $\approx 10^{-1} M_{\text{PBHs}}$  o inferior, sin embargo es inmediato notar que la ecuación (3.28) no considera abundancias

<sup>2</sup>El lector podrá encontrar el código para llevar a cabo este análisis, en el apéndice A, de igual manera se recomienda visitar mi repositorio [https://github.com/TadeoDGAguiar/PBHs\\_Coalescence](https://github.com/TadeoDGAguiar/PBHs_Coalescence).

<sup>3</sup>Estas estimaciones se seleccionaron a partir de un intervalo de valores para  $e$  y  $a$ .

o aglutinamiento de PBHs, es decir, únicamente se evalúan dos puntos de masa. Del mismo modo al observar la Figura 3.4, notamos que la posibilidad de que exista una población de BHs en un rango de masas de 1 a  $30M_{\odot}$ , es considerable.

Es necesario, establecer una correlación con la abundancia y el tiempo de coalescencia para dar paso a una descripción sobre el numero de colisiones probabilísticamente posibles, es decir, si tenemos una colección de PBHs ¿Cuántos de estos formaran sistemas binarios y en que tiempo coalesceran? Este concepto es comúnmente llamado como *Merger Rate* (Por su trad. al español “*Ritmo de Coalescencia*”).

### 3.4. Espín de PBHs

El espín intrínseco es generalmente alineado a lo largo de la misma dirección que el momento angular orbital Ec. (2.33), lo que significa que  $\zeta_{\text{eff}} \approx 1$ . Por otro lado, existen escenarios dinámicos donde esperamos que la mayoría de las binarias de BH tienen spines en gran medida no correlacionados con su órbita, lo que significa que  $\zeta_{\text{eff}} \approx 0$ . Este es el caso para los PBHs, que se predice que tienen espines intrínsecos pequeños.

La magnitud del espín para un agujero negro tipo Kerr (es decir, con rotación) es comúnmente definido por

$$\zeta = \frac{\vec{S}}{Gm^2}, \quad (3.29)$$

donde  $\zeta$  es un parámetro de giro adimensional, a su vez  $\vec{S}$  y  $m$  son el espín y la masa del BH, respectivamente.

Como hemos expuesto con anterioridad, el escenario por colapso directo de la formación PBH en la era dominada por la radiación, los PBH se forman cuando el contraste de densidad excede un “threshold” (por su trad. al español: *Umbral*) denotado por  $\delta_{\text{th}}$ . La masa y espín pueden tener una dependencia simple de  $\delta_{\text{th}}$ , como

$$M_{\text{PBH}} \approx C_M |\delta - \delta_{\text{th}}(q)|^{\gamma_M}, \quad (3.30a)$$

$$S_{\text{PBH}} \approx C_S |\delta - \delta_{\text{th}}(q)|^{\gamma_J} q, \quad (3.30b)$$

$$\delta_{\text{th}}(q) = \delta_{\text{th},0} + Kq^2, \quad (3.30c)$$

donde  $q$  es el parámetro que caracteriza el espín del PBH, mientras que  $C_M, C_S, \gamma_M, \gamma_J, \delta_{\text{th},0}$  y  $K$ , son todas constantes. En particular  $K$  es positivo con un valor  $\approx 5.7 \times 10^{-3}$  [88].

Es posible entonces, reescribir la Ec. (3.29), de tal manera que

$$\zeta = \frac{S_{\text{PBH}}}{GM_{\text{PBH}}^2}. \quad (3.31)$$

Además, uno de los parámetros más importantes que LIGO puede inferir de las ondas gravitacionales es el espín efectivo; resultante de la coalescencia de BBHs, denotado como  $\zeta_{\text{eff}}$  y definido como:

$$\zeta_{\text{eff}} = \frac{m_1 \chi_1 \cos \theta_1 + m_2 \chi_2 \cos \theta_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.32)$$

donde  $\cos \theta_i = \cos^{-1}(\vec{L} \cdot \vec{S}_i)$  es el ángulo de inclinación entre el espín  $\vec{S}_i$  y el vector de momento angular orbital  $\vec{L}$ . Como se desprende de su definición, el parámetro  $\zeta_{\text{eff}}$  es una cantidad sensible tanto a la alineación de espín de los dos agujeros negros con su órbita (momento angular del binario) antes de la fusión como a la magnitud de los espines individuales.  $\zeta_{\text{eff}}$  es adimensional que va de  $-1$  a  $1$ , para  $\zeta_{\text{eff}} = 1$  los giros de ambos agujeros negros están perfectamente alineados con su órbita, y  $\zeta_{\text{eff}} = -1$  los giros están perfectamente contrapuestos. Los valores de  $\zeta_{\text{eff}} \approx 0$  pueden provenir de una o ambas de las siguientes situaciones físicas:

- (i) Los giros intrínsecos del agujero negro están contra-alineados entre sí.
- (ii) La magnitud en el parámetro de spin intrínseco de cada es de la forma  $\zeta_i \ll 1$ .

Podría haber una tercera posibilidad, que ambos giros sean perpendiculares a la órbita, pero esto es algo menos probable y menos motivado físicamente [37].

Cabe señalar que la mayoría de los agujeros negros resultantes de la coalescencia de BBHs que han sido detectados, tienen un valor de espín efectivo compatible con cero. Aunque la significación estadística de este resultado es baja [37], es una predicción del escenario

PBH [39]. Esto es natural ya que se necesita una gravedad más fuerte que una amplitud mayor al contraste de densidad para vencer la fuerza centrífuga y formar PBHs giratorios como lo muestra la ec. (3.30c) [88][18].

### 3.5. Ritmo de colisiones de PBHs

Análogamente a como se ha expuesto el mecanismo de formación de binarias de PBHs, en esta sección se expondrán los ritmos de coalescencias en diferentes épocas del Universo.

#### En el universo temprano

Habiendo considerado intrínsecamente la propiedad de acoplamiento debido a la superación de la fuerza generada por el flujo de Hubble [11]. Sabemos que todo cuerpo que orbita a otro, genera un momento angular  $J$ , y este es estimado por el efecto producido por un tercer PBH cercano a la binaria, por el tiempo de caída libre, tal que

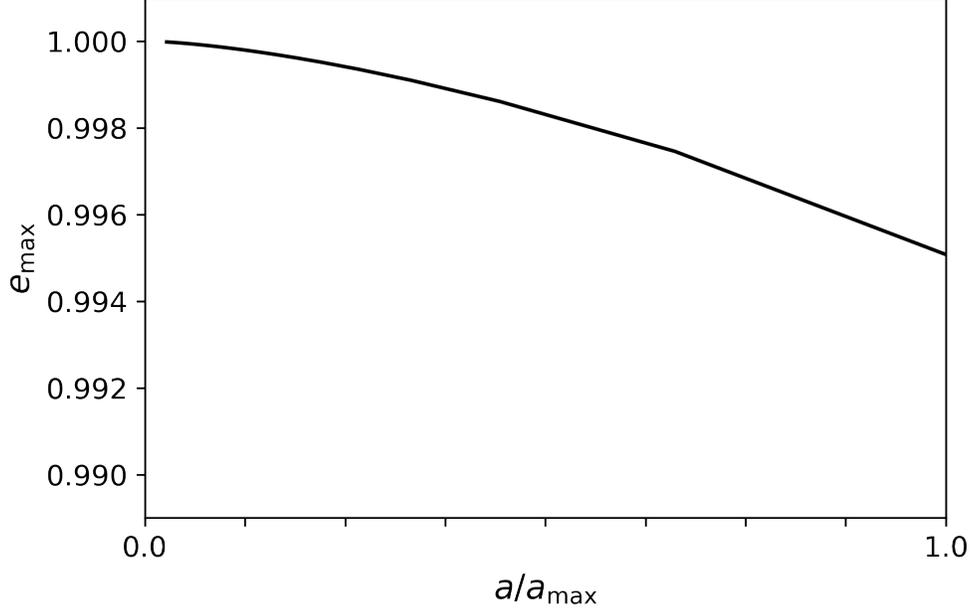
$$J \simeq t_{ff} GM_{\text{PBH}}^2 (1 + z_{dec}) \frac{x^2}{y^3}. \quad (3.33)$$

Asumiendo que al formarse las binarias éstas siguen un movimiento Kepleriano, entonces el momento angular está relacionado a la excentricidad de la orbita como  $J^2 = G\mu^2 Ma(1 - e^2)$ , donde  $\mu$  y  $M$  es la masa reducida y la masa total. Es a partir de esta definición que podemos usar la ecuación (3.33) para establecer la excentricidad  $e$  de una binaria y el semi eje mayor  $a$ , tal y como fue expresado en [88]:

$$a = \frac{\rho_{c,0} \Omega_{\text{DM}}}{(1 + z_{eq}) M_{\text{PBH}}} x^4, \quad e = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^6} \quad (3.34)$$

Donde  $x$  es la distancia física en la época de equivalencia considerada por un par de agujeros negros primordiales, así mismo  $y$  es la distancia física a un tercer agujero negro en  $z = z_{eq}$ . Por definición, se debe satisfacer  $y > x$ . Además, tenemos que la condición  $y < \bar{x}$  produce un limite superior en  $e$  tal y como se muestra en la Figura 3.5; el valor máximo alcanzado por la excentricidad está delimitado a la unidad y decrece conforme  $a$  aumenta, matemáticamente esto es:

$$e_{\max}^2 = 1 - \left(\frac{4\pi}{3}n_{\text{PBH}}\right)^2 \left(\frac{(1+z_{\text{eq}})M_{\text{PBH}}}{\rho_{c,0}\Omega_{\text{DM}}}a\right). \quad (3.35)$$



**Figura 3.5:** Esquema de  $e = e_{\max}$  como función de  $a/a_{\max}$ . Se observa que el máximo valor de  $a$  ocurre en  $a_{\max} = x_{\max}/(1+z_{\text{eq}})$ .

De considerar una distribución aleatoria de PBHs, la probabilidad de que las distancias comóviles se encuentran en intervalos  $(x, x + dx)$  y  $(y, y + dy)$  y es [88]:

$$dP = \frac{4\pi x^2 dx}{n_{\text{PBH}}^{-1}} \frac{4\pi y^2 dy}{n_{\text{PBH}}^{-1}} \exp\left(-\frac{4\pi y^3}{3n_{\text{PBH}}^{-1}}\right) \Theta(y-x), \quad (3.36)$$

sin embargo Sasaki *et al.* en Ref. [88] simplifica esto, y propone:

$$dP = \frac{4\pi x^2 dx}{n_{\text{PBH}}^{-1}} \frac{4\pi y^2 dy}{n_{\text{PBH}}^{-1}} \Theta(y-x) \Theta(y_{\max}-x) \quad y_{\max} = \left(\frac{4\pi}{3}n_{\text{PBH}}\right)^{-1/3}. \quad (3.37)$$

Si se conoce la distribución de probabilidad de  $(x, y)$ , es posible describirla en términos de  $(a, e)$  usando las definiciones descritas en la ecuación (3.34), entonces, sustituyendo en la (3.36),

$$dP = \frac{4\pi^2}{3} n_{\text{PBH}}^{1/2} (1+z_{\text{eq}})^{3/2} f_{\text{PBH}}^{3/2} a^{1/2} (1-e^2)^{3/2} da de. \quad (3.38)$$

Por la naturaleza estocástica de la distribución de PBHs, la probabilidad se interpreta como cuantas binarias de PBHs con parámetros orbitales en  $(a, a + da)$ ,  $(e, e + de)$  existen en el Universo en el tiempo de formación [88]. Aunado a esto, se considera que cuando la excentricidad  $e \approx 1$ , la ecuación (3.28) puede ser simplificada como:

$$t_{\text{coal}} = \frac{3}{85} \frac{1}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} (1 - e^2)^{7/2} a^4 \quad (3.39)$$

$$t(a, e) = Q(1 - e^2)^{7/2} a^4 \quad Q = \frac{3}{85} \frac{1}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}, \quad (3.40)$$

donde hemos descartado el subíndice y  $t_{\text{coal}} \rightarrow t$ . Estableciendo la hipótesis de que todos los agujeros negros primordiales son de una misma masa, entonces podemos reescribir la ecuación (3.40) de tal manera que:

$$a = \left( \frac{Q^{-1} t}{(1 - e^2)^{7/2}} \right)^{1/4} \quad Q = \frac{3}{170} \frac{1}{G^3 M_{\text{PBH}}^3}. \quad (3.41)$$

Al expresar  $a$  como función de  $t$  y  $e$ , es decir  $a = a(t, e)$ , entonces podemos reescribir la probabilidad definida en la ecuación (3.38) como:

$$dP = \frac{4\pi^2}{3} n_{\text{PBH}}^{1/2} (1 + z_{\text{eq}})^{3/2} f_{\text{PBH}}^{3/2} a^{1/2} e (1 - e^2)^{-3/2} \frac{\partial a}{\partial t} dt de. \quad (3.42)$$

Derivando el semi-eje mayor  $a$  con respecto a la parcial del tiempo, la probabilidad se vuelve

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{4t} \left( \frac{Q^{-1} t}{(1 - e^2)^{7/2}} \right)^{1/4} = \frac{a(t, e)}{4t}, \quad (3.43)$$

y por tanto

$$dP = \frac{4\pi^2}{3} n_{\text{PBH}}^{1/2} (1 + z_{\text{eq}})^{3/2} f_{\text{PBH}}^{3/2} \frac{a^{3/2}}{4t} e (1 - e^2)^{-3/2} dt de. \quad (3.44)$$

Integrando sobre la excentricidad  $e$ , encontramos:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{4\pi^2}{3} n_{\text{PBH}}^{1/2} (1 + z_{\text{eq}})^{3/2} f_{\text{PBH}}^{3/2} \frac{(Q^{-1} t)^{3/8}}{4t} dt \int_0^{e_{\text{upper}}} \frac{e}{(1 - e^2)^{45/16}} de \\ &= \frac{3}{58} \left( \frac{t}{T} \right)^{3/8} \left[ \frac{1}{(1 - e_{\text{upper}}^2)^{25/16}} - 1 \right] \frac{dt}{t}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde

$$T \equiv Q \left( \frac{3y_{\max}}{4\pi f_{\text{PBH}}(1+z_{\text{eq}})} \right)^4 \quad y_{\max} = \left( \frac{4\pi}{3} n_{\text{PBH}} \right)^{-1/3}, \quad (3.46)$$

y  $e_{\text{upper}}$  es definido por:

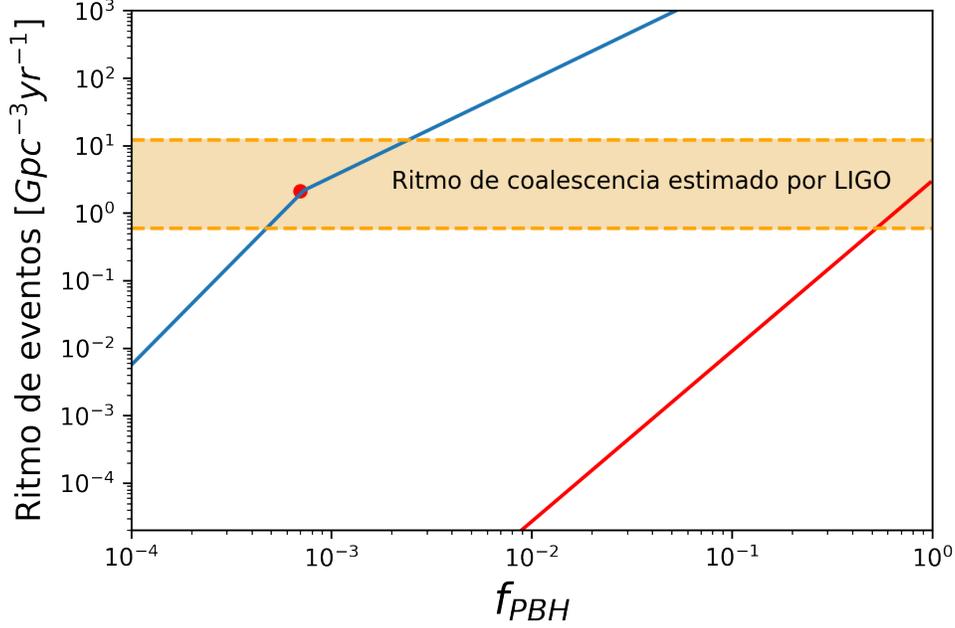
$$e_{\text{upper}} = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{6}{37}}} & \text{para } t < t_c \\ \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi f_{\text{PBH}}}{3}\right)^2 \left(\frac{t}{t_c}\right)^{\frac{2}{7}}} & \text{para } t \geq t_c \end{cases} \quad t_c = T \left( \frac{4\pi f_{\text{PBH}}}{3} \right)^{\frac{37}{3}} \quad (3.47)$$

Esto da la probabilidad de que una pareja de PBHs forme un binario y se fusione a la vez en  $(t, t + dt)$ . Por lo tanto, el ritmo de coalescencia  $\mathcal{R}$  por unidad de volumen por unidad de tiempo (en el tiempo  $t$ ) se da por:

$$\mathcal{R} = n_{\text{PBH}} \frac{dP}{dt} = \frac{3n_{\text{PBH}}}{58} \left( \frac{t}{T} \right)^{\frac{3}{8}} \left[ \frac{1}{(1 - e_{\text{upper}}^2)^{\frac{25}{16}}} - 1 \right] \frac{1}{t}, \quad (3.48)$$

La curva roja en la Figura 3.6 muestra el ritmo de coalescencia  $\mathcal{R}$  para agujeros de  $30M_{\odot}$ , los cuales son más similares a los de la primera detección de LIGO-Virgo, y para  $t = 14$  Gyr como una función de la fracción de agujeros negros primordiales, previamente denotada como  $f_{\text{PBH}}$ . De la figura se observa que el ritmo de coalescencia excede a las observaciones de LIGO cuando  $f_{\text{PBH}} \simeq 1$  y no es suficiente cuando  $f_{\text{PBH}} = 10^{-4} \sim 10^{-3}$ . Por lo que al considerar el mecanismo en edades tempranas del Universo, el caso de que los PBHs constituyan solo una fracción de la materia oscura es observacionalmente relevante y constituye una cota vigente para PBHs de masas  $\sim 30M_{\odot}$  [88].

La rodilla en el orden de que  $f_{\text{PBH}} \approx 10^{-4}$  corresponde al punto donde el tiempo de coalescencia es igual al tiempo establecido para la interacción, es decir  $t = t_c$ . Físicamente esto implica que que el limite inferior en la distancia entre PBHs, y el limite máximo entre binarias de PBHs vecinos, son alcanzados. Esto se evalúa en el límite superior de la excentricidad para  $t$ . Produciendo así un numero eficiente de coalescencias.



**Figura 3.6:** Ritmo de coalescencia esperada para binarias de PBHs monocromaticos de  $30M_{\odot}$  en la actualidad, considerando los dos mecanismos de formación. La curva azul representa el ritmo de coalescencia para los binarios de PBHs formados en la época dominada por radiación; ecuación (3.48). La curva roja para las binarias formadas en el universo actual; ecuación (3.50). La banda naranja es el ritmo de coalescencia  $0.6 - 12 \text{ Gpc}^{-3}\text{yr}^{-1}$  requerido para justificar la primera detección de LIGO.

### En el Universo actual

Con base a lo establecido en la sección 3.2, sabemos que la sección eficaz definida en la ecuación (3.26) es uno de los parámetros más relevantes para la descripción del formación de binarios en etapas posteriores a la época de equivalencia. Es decir que la formación binaria es efectiva para velocidades relativas bajas. Los encuentros, que son accidentales, son más frecuentes en la región de alta densidad que en regiones de baja densidad. Estos indicadores sugieren que la formación binaria PBHs ocurre eficientemente dentro de los halos oscuros de baja masa, que son densos y tienen una velocidad virial pequeña. El ritmo de coalescencia dentro de un halo con masa  $M_h$  está dado por

$$\mathcal{R}_h(M_h) = \int_0^{R_{\text{vir}}} dr 2\pi r^2 \left( \frac{\rho_{\text{PBH}}(r)}{M_{\text{PBH}}} \right)^2 \langle \sigma v_{\text{PBH}} \rangle, \quad (3.49)$$

donde  $\rho_{\text{PBH}}(r)$  es el perfil de densidad de agujeros negros primordiales dentro del halo, a

su vez el termino que contenido en los brackets denota el promedio sobre distribución de velocidad relativa[88]. En síntesis, las poblaciones de PBHs requieren asumir una  $\rho_{\text{PBH}}$  y una función de distribución de velocidad. Así mismo es necesario establecer que las funciones de masa permita considerar halos de masa mínima que aún no se hayan evaporado, tal que  $M_{\text{min}} \sim 400M_{\odot}f_{\text{PBH}}^{-1}$ .

Las funciones de masa se pueden obtener a través de diferentes medios, una de ellas puede ser usando el formalismo Press-Schechter, la segunda con las simulaciones hechas por Tinker *et al.*[98] o bien la elaborada por Jenkins [51]. En este caso se emplearon simulaciones numéricas para obtener el ritmo de fusión  $\mathcal{R}$  para PBHs de  $30 M_{\odot}$ . Condensando la mayoría de estos cálculos en una ecuación sencilla:

$$\mathcal{R} \approx 2\alpha f_{\text{PBH}}^{\frac{53}{21}}, \quad (3.50)$$

donde  $\alpha \approx 1, 0.6, 10^{-2}$  para cada una de las funciones de masa, respectivamente. M. Sasaki *et al.* [87] describe “*Una detallada investigación sobre la formación dinámica de binarias, sugiere que  $\alpha = 0.4$* ”. La línea roja en la Figura 3.6 es generada a partir de la ecuación (3.50), este ritmo de coalescencia es consistente con las observaciones cuando  $f_{\text{PBH}} \approx 1$ . De modo que no impone restricciones significantes a la posibilidad de que los PBHs constituyan toda la materia oscura.

De acuerdo con el estudio de H. Nishikawa *et. al.*, en la Ref. [77]. Si los PBHs se agrupan en cúmulos en las cercanías de BH supermasivo que se encuentran en centros galácticos, el ritmo de fusión esperada excede la dada por la ecuación (3.50) para algún rango posible del perfil de densidad. Esto se traduce en que la probabilidad de que los PBHs pueden formar binarios (por el mecanismo de encuentro cercano) para después coalescer secuencialmente, es mucho mayor en ambientes con alta densidad.

### 3.6. Restricciones en abundancias de PBHs

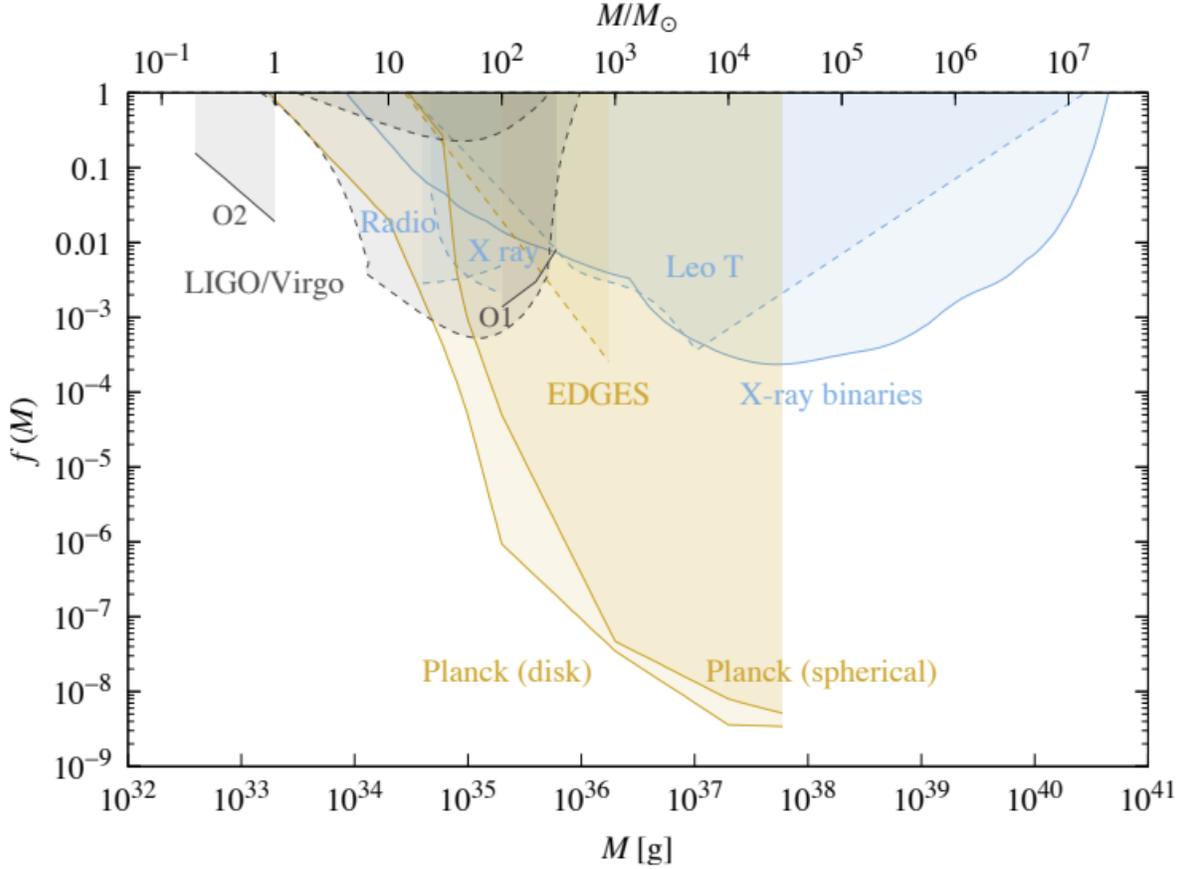
Desde el capítulo 1 de este trabajo, se ha hecho énfasis en la relevancia de las abundancias de PBHs, para el estudio de la materia oscura. Es por esto mismo que para obtener un

modelo de estudio realista y consistente a las observaciones, se deben tener en cuenta las restricciones a partir de los eventos registrados por la colaboración LIGO, Virgo y KAGRA. Los datos de LIGO ya habían impuesto restricciones débiles en el escenario PBH hace más de una década [1], pero conforme una mayor cantidad de datos recogidos de agujeros negros coalescentes, las restricciones son mucho más fuertes.

De manera teórica, se esperaría que una población de agujeros negros generara un fondo de ondas gravitacionales estocásticas (GWB)[17]. En donde, la época precisa de formación de los agujeros no es crucial ya que las coalescencias ocurren mucho más tarde. Otra medición teórica es esperar que los BHs se agruparan dentro de los halos galácticos (junto con otras formas de DM), por lo que la detección de un fondo de ondas gravitacionales (por sus siglas en inglés GWB; “Gravitational Wave Background”) asociada, proporcionaría una prueba de la distribución del halo [50].

Dalianis y Kouvaris [29] han señalado que las regiones que forman PBHs en una era temprana dominada por la materia deberían colapsar asimétricamente y formar subcumulos. De hecho, Wang *et al.* [101] mostró que la primera ejecución de Advanced LIGO proporcionó la mejor restricción de PBH en el rango de 1 a  $100M_{\odot}$ . Sin embargo, Vaskonen y Veermae [99] demostraron que el ritmo de fusión de binarios se reduciría significativamente para  $f \sim 1$  si existen las perturbaciones en pequeños halos. Encontraron un límite más sólido a partir de una posible no detección de GWB estocástico en los datos de LIGO/Virgo O2 y esto se muestra en la línea discontinua superior de la Figura 3.7.

Esto también fue abordado por Sasaki *et al.* [88] con los resultados a partir de binarias compuestas por PBHs de masa alrededor de  $30M_{\odot}$  que se forman en la era dominada por la radiación, coalescen con una frecuencia consistente con la estimada por las observaciones LIGO si  $f_{\text{PBH}} \sim 10^{-3}$  y coalescen con mucha más frecuencia si  $f_{\text{PBH}} \sim 1$ . Tal y como fue expuesto por Ali-Haimoud *et al.* para varias masas PBH con la función de masa monocromática [11], concluyendo que la restricción derivada  $f_{\text{PBH}} \leq 10^{-3} - 10^{-2}$  excluye los PBH de masa estelar como el componente dominante de la materia oscura. Más recientemente, Kapadia *et al.* [53, 54] buscaron un GWB estocástico en la segunda serie de observación del LIGO e infirieron los límites superiores de  $f_{\text{PBH}}(M)$  en el rango de



**Figura 3.7:** Restricciones asociadas con la acumulación de agujeros negros primordiales. Todos estos límites dependen de varios parámetros astrofísicos y características cualitativas, como si uno tiene acreción de disco o esférica Ref. [21]. Los límites de LIGO/Virgo provienen de los ritmos de coalescencia reportados en O1 [11] y O2 [2] (línea continua) y del pequeño número de detecciones de ráfagas (línea discontinua inferior) y la no detección de un GWB estocástico (línea discontinua superior) en O2.

masas  $10^{-20} - 10^{-19} M_{\odot}$ . Dichos PBHs ya deberían haberse evaporado, pero esto implica un límite estricto incluso si se evita de alguna manera la radiación de Hawking.

Por otro lado, Fernández *et al.* [37] también argumentan que la información de espín favorece un origen primordial más que astrofísico, para los eventos de LIGO-Virgo. Y a su vez se discute el número de eventos necesarios para adquirir información sobre la relativa fracción de binarias de PBHs y BHs. De Luca *et al.* [30, 31], estudian la evolución del espín en los PBHs y las probabilidades correspondientes para eventos de ondas gravitacionales, calculando la distribución de masa PBH del mejor ajuste en la formación compatible con los datos actuales de ondas gravitacionales. De esta manera infieren que la fracción máxima

de DM es de  $\sim 10^{-3}$ . Es de particular interés el hecho de que al menos un componente de GW190412 gire moderadamente es incompatible con un origen primordial, a menos que la acumulación o las coalescencias jerárquicas sean significativas.

Herman *et al.* [48] han discutido la detección de ondas gravitacionales de alta frecuencia de PBHs binarios con masa planetaria y a través de detectores electromagnéticos. Esto permitiría la detección de coalescencias binarias de PBH con masa alrededor de  $10^{-5}M_{\odot}$  si  $f \sim 10^{-4}$ . Por supuesto, los eventos detectados por la colaboración de observatorios podrían ser una mezcla de PBHs con agujeros negros estelares o bien estrellas de neutrones.

### 3.7. Ambientes propicios para múltiples coalescencias de PBHs

En las subsecciones anteriores, hemos revisado los dos mecanismos para la formación binarias de PBHs que funcionan en diferentes épocas cósmicas y se expusieron restricciones a considerar para explicar los eventos detectados por la colaboración LIGO-Virgo-KAGRA, mediante las coalescencias de PBHs después de un tiempo  $t$  en la edad del Universo. En el siguiente paso para el desarrollo de nuestra idea y última sección de este capítulo, exploraremos el ambiente donde las múltiples colisiones entre PBHs son posibles, probabilísticamente debido a una población considerable dentro de una región o volumen que las contenga.

#### Cúmulos de PBHs

El modelo de evolución dinámica de cúmulos de estrellas compactas, estudiado y desarrollado por Quinlan y Shapiro [84] presenta resultados multicomponentes de una simulación Fokker-Planck. Los procesos físicos dominantes son la disipación de binarias por emisión de radiación gravitacional y su coalescencia subsecuente. Ahora bien, por un lado cuando se habla de estrellas compactas por lo general se hace referencia a las estrellas de neutrones o bien agujeros negros. La distinción entre ambas especies implica distintos razonamientos para su desarrollo. Por mencionar, si un cúmulo de estrellas compactas evoluciona en un

redshift alto, este puede volverse inestable y colapsar a un SMBH.

Por otro lado los encuentros entre partículas son importantes, el cambio de  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}t)$  con el tiempo se describe mediante la ecuación de Boltzmann sin colisiones<sup>4</sup>, la ecuación se generaliza de la siguiente manera [94]:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} + \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{enc}}, \quad (3.51)$$

donde los efectos de los encuentros entre partículas está incluido en  $(\partial f / \partial t)_{\text{enc}}$ . El trabajo de G. Quinlan y S. Shapiro derivan la ecuación de Fokker-Planck a partir de considerar que el cúmulo es esféricamente simétrico y que la función de distribución depende en la posición y velocidad únicamente, de esta manera se obtiene que [84]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{1}{p} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial f_i}{\partial E} = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial E} \left( m_i D_E f_i + D_{EE} \frac{\partial f_i}{\partial E} \right), \quad (3.52)$$

donde  $f_i$  es la función de distribución normalizada al número de estrellas de masa  $m_i$ , a su vez  $p = p(E, t)$  y  $q = q(E, t)$  son funciones definidas por:

$$p = -\frac{\partial q}{\partial E}, \quad (3.53a)$$

$$q = \frac{1}{3} \int_0^{\phi^{-1}(E)} dr r^2 (2\phi - 2E)^{3/2}. \quad (3.53b)$$

---

<sup>4</sup>La relación básica que restringe la forma posible de  $f$  se llama la ecuación de Boltzmann sin colisiones, y puede derivarse de la conservación de partículas. La relación de  $df/dt$  con la divergencia de los flujos de partículas con el espacio fase da el resultado familiar

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} + \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

donde  $x_i$  denota una de las tres coordenadas,  $x, y$  o  $z$ ,  $a_i$  es la correspondiente aceleración de las partículas (que se asume independiente de  $\mathbf{v}$ ) y por simplicidad de notación  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}t)$ .

Por otro lado  $D_E$  y  $D_{EE}$  se definen como<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} D_E &= -16\pi^2 G^2 \ln \Lambda \sum_j m_j \int_E^{\phi(0,t)} dE' f_j p, \\ D_{EE} &= 16\pi^2 G^2 \ln \Lambda \sum_j m_j^2 \left( \int_E^{\phi(0,t)} dE' f_j q + \int_0^E dE' f_j \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Aquí el termino  $\ln \Lambda$  se usa para denotar el logaritmo de Coulomb, el cual está relacionado a las colisiones entre partículas; siendo igual al logaritmo de la razón entre los parámetros de distancia máxima y mínima, entre los objetos a coalescer.

La energía radiada a lo largo de la orbita parabólica con una separación  $r_p$  en su periastro, es derivada como un caso limite de la energía radiada a lo largo de una orbita elíptica, tal y como se abordó en la sección 3.2 de este capítulo. De igual manera, la ec. (3.18) expresa la distancia máxima para la captura de la binaria. Como se puede inferir, el modelo de G. Quinlan y S. Shapiro es consistente, tal como se ha anticipado en el mecanismo de formación de binarias en el Universo actual. Las estrellas compactas que tienen encuentros con una separación del periastro tal que  $r_p > r_p^{max}$ , no forman binarias.

En el modelo se asume que cualquier valor del radio de cumulo, las estrellas compactas (de una masa arbitraria) tienen la misma velocidad, pero en direcciones diferentes, igual a la velocidad media cuadrada, dada por

$$v_{\text{rms},i}^2(r) = \frac{4\pi m_i}{\rho_i} \int_0^{\phi(r)} dE f_i [2\phi(r) - 2E]^{3/2}, \quad (3.55)$$

donde  $\phi$  denota el potencial gravitacional del cúmulo y  $\rho_i$  es el perfil de densidad que depende de la masa y numero de objetos de la especie  $i$  dentro del cúmulo.

La evolución del cumulo en la cual las binarias son capturadas y ocurre la coalescencia, puede ser descrita por la ecuación de Fokker-Planck modificada

---

<sup>5</sup>Los coeficiente  $D_E$  y  $D_{EE}$  son derivados de

$$mD_E = -p\langle(\Delta E)\rangle_v + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial E} [p\langle(\Delta E)^2\rangle_v], \quad D_{EE} = \frac{p}{2} \langle(\Delta E)^2\rangle_v,$$

donde a su vez  $\langle(\Delta E)\rangle_v$  es la media de cambio por unidad de tiempo en la energía de una estrella por encuentro gravitacional con otras estrellas, mientras que  $\langle(\Delta E)^2\rangle_v$  es la media por cambio de energía cuadrada por unidad de tiempo. El subíndice v indica que son cantidades de promedio orbital [84].

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{1}{p} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial f_i}{\partial E} = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial E} \left( m_i D_E f_i + D_{EE} \frac{\partial f_i}{\partial E} \right) - M_{l,i} + M_{g,i}, \quad (3.56)$$

donde  $M_{l,i}$  y  $M_{g,i}$  son los *términos de coalescencia*, los cuales pueden ser escritos, al considerar un espacio fase de seis dimensiones. A su vez se considera  $f(r, v, m) d^3 r d^3 v$  como el numero de estrellas con posición, velocidad y masa en el rango  $d^3 r d^3 v$  en un tiempo  $t$ . Los términos para el ritmo de perdida y ganancia de estrellas del tipo  $(r, v, m)$ , se definen respectivamente como:

$$M_l = f(r, v, m) \int dm_1 \int d^3 v_1 f(r, v_1, m_1) |v - v_1| \sigma(m, m_1, |v - v_1|), \quad (3.57a)$$

$$M_g = \int dm_1 \int dm_2 \delta(m - m_1 - m_2) \int d^3 v_1 \int d^3 v_2 \delta\left(v - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right) \times f(r, v_1, m_1) f(r, v_2, m_2) |v_1 - v_2| \sigma(m_1, m_2, |v_1 - v_2|). \quad (3.57b)$$

Las dos funciones delta en la ecuación (3.57b) garantizan la conservación de masa y momento. La sección eficaz  $\sigma$  usualmente varia como una potencia de la velocidad relativa, similar a la expresada en la ecuación (3.49), en este caso

$$\sigma(m_1, m_2, |v_1 - v_2|) = \sigma_\alpha(m_1, m_2) |v_1 - v_2|^\alpha. \quad (3.58)$$

A manera de dar una explicación a la forma de los términos de coalescencia en lo que sigue, se debe aclarar que: G. Quinlan y S. Shapiro, consideran que hay un espectro continuo de masas, es decir, se usa una sola función de distribución  $f(E, m)$  que depende de  $m$  en lugar de varias funciones de distribución separadas  $f_i(E)$ . Las ecuaciones para un espectro continuo son las mismas que para un espectro discreto si reemplazamos las sumas sobre  $m$  por integrales sobre  $m$ . La única diferencia real es que para un espectro discreto la sección eficaz de coalescencia  $\sigma(m_i, m_j, |v_i - v_j|)$  debe dividirse por  $1 + \delta_{ij}$  para evitar el cómputo doble cuando  $i = j$  [84].

Sin embargo las ecuaciones (3.57b) y (3.57a), tienen que ser derivados a expresiones que puedan ser usadas en la ecuación de Fokker-Planck isotrópica y obtener el promedio de

orbita. Para ello se asume que la función de distribución de la velocidad, es isotrópica. Al asumir que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, m)$  depende únicamente de  $\mathbf{v}$ , su magnitud será  $v$ . Realizando una integración angular sobre  $M_l$ , se obtiene

$$M_l = \frac{2\pi f}{v} \int dm_1 \frac{\sigma_\alpha(m, m_1)}{(\alpha + 3)} \int dv_1 v_1 f_1[(v + v_1)^{\alpha+3} - |v - v_1|^{\alpha+3}], \quad (3.59)$$

considerando que  $f_1 = f(r, v_1, m_1)$ . Por otro lado, el proceso para evaluar  $M_g$  necesario reemplazar la función delta tridimensional en la ecuación (3.57b) por

$$\frac{1}{4\pi v^2} \delta\left(v - \left|\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right|\right). \quad (3.60)$$

Obteniendo así

$$M_g = \frac{2\pi}{v} \int dm_1 \int dm_2 \delta(m - m_1 - m_2) \sigma_\alpha(m_1, m_2) \left(\frac{m^2}{m_1 m_2}\right)^{(\alpha+3)/2} \times \int dv_1 \int dv_2 v_1 v_2 f_1 f_2 \Delta_{12} \left(\frac{m_1 v_1^2}{m} + \frac{m_2 v_2^2}{m} - v^2\right)^{(\alpha+1)/2}, \quad (3.61)$$

donde el termino  $\Delta_{12}$  es discreto (una función de Heaviside). Es decir, si  $|m^2 v^2 - m_1^2 v_1^2 - m_2^2 v_2^2| \leq 2m_1 m_2 v_1 v_2$ , entonces  $\Delta_{12} = 1$ , de otra manera será nulo.

El cálculo de los términos  $M_l$  y  $M_g$ , explican la pérdida y ganancia de estrellas debido a fusiones entre mismos o diferentes elementos dentro del cúmulo. Las personas que estudian la evolución dinámica de los cúmulos globulares encuentran problemas similares, ya que deben introducir términos de pérdida y ganancia para dar cuenta de la formación binaria [84].

Con todos los elementos descritos hasta el momento, es necesario declarar las condiciones iniciales. Debido a la naturaleza de interacción en N-Cuerpos, la configuración inicial del cúmulo globular estará dada por el modelo de Plummer[84], que es uno de los modelos más sencillos para el estudio de sistemas estelares.

### Modelo de Plummer

$$f_i(E) = \frac{24\sqrt{2}N_iR^2E^{7/2}}{7\pi^3G^5M^5}, \quad (3.62a)$$

$$\rho_i(r) = \frac{3M_i}{4\pi R^3} \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{-5/2}, \quad (3.62b)$$

$$\phi(r) = \frac{GM}{R} \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1/2}. \quad (3.62c)$$

Aquí  $N_i = M_i/m_i$  es el numero de estrellas de masa  $m_i$ , si  $M$  es la masa total del cumulo y estamos tratando con una,  $R$  es el factor de escala que está determinado por el radio de la esfera. Se asume además que todos los componentes tienen la misma velocidad de dispersión.

Stasenko y Kirillov [95] realiza una revisión y modifica el modelo propuesto por Quinlan y Shapiro [84]. Considerando un cumulo formado por agujeros negros primordiales y que contiene un agujero negro central (Por sus siglas en ingles CBH “*Central Black Hole*”), se investiga el ritmo de coalescencia y el proceso de evolución dentro del cumulo. A continuación se presentan algunos parámetros utilizados en este modelo y ecuaciones que permiten su descripción.

Usando el criterio para el escenario en el cual las estrellas compactas coalescen después de la primera formación de binarias por emisión de radiación gravitacional[84], el parámetro  $\alpha$  toma el valor de  $\alpha = -18/7$ , y entonces la ecuación (3.58), se traduce como la sección eficaz para dos agujeros negros de masa  $m$  y  $m'$ , descrita como

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{85\pi}{6\sqrt{2}}\right)^{2/7} \frac{G^2(m+m')^{10/7}m^{2/7}m'^{2/7}}{c^{10/7}|v-v'|^{18/7}}. \quad (3.63)$$

Por otro lado, se establece que la masa total del cumulo globular es de  $M = 10^5 M_\odot$ , con su radio característico  $R \sim 1\text{pc}$ , del mismo modo la velocidad característica de los PBHs esta definida por

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx 20\text{kms}^{-1} \quad (3.64)$$

Dado que el estudio considera un CBH en el cúmulo, cabe esperar que la captura de BHs menos masivos, sea una posibilidad. Como resultado de esto, el ritmo de acreción del CBH, estará dado por

$$\dot{M}_\bullet = \rho \sigma_c v, \quad (3.65)$$

donde  $\rho$  es la densidad de PBHs en el cluster, y  $\sigma_c = 4\pi r_g^2 (c/v)^2$  es la sección eficaz para las partículas capturadas por un agujero negro estático [56],  $r_g$  es el radio gravitacional del CBH. Es importante mencionar que, si  $\dot{M}_\bullet$  es mucho menor que a masa del cúmulo  $M_c$ , entonces el CBH no afecta los colapsos dentro del núcleo. Por lo que el ritmo de coalescencia no se ve afectado [95].

Por otro lado, con base al modelo de Plummer (ver Def. 19), se define un perfil de densidad modificado de la siguiente manera:

$$\rho_i(r) = \rho_{0,i} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{r^2}{r_0^2} \right)^{-2}, \quad (3.66)$$

donde  $r_0 = 1$  pc, and  $\rho_{0,i}$  es la constante de normalización. Acorde al teorema del virial, la energía total es

$$E = -\frac{G(mN)^2}{2R}. \quad (3.67)$$

El *merger rate* de agujeros negros primordiales con masa  $m$  por unidad del espacio fase, por unidad de masa, y por unidad de tiempo, es definido por la ecuación (3.57a), en este caso la función de distribución  $f(\vec{r}, \vec{v}, m)$  es para caracterizar a los PBHs en el cúmulo, y usando la definición de  $\sigma$  con el criterio  $\alpha = -18/7$ , dada en la ecuación (3.63). Se obtiene que

$$M_l = \frac{14\pi f(r, v, m)}{3v} \int dm' \int dv' v' \sigma(m, m') f(r, v', m') \left[ (v + v')^{3/7} - |v - v'|^{3/7} \right] \quad (3.68)$$

Las integrales para el ritmo de coalescencia se pueden simplificar mucho si asumimos que en un radio dado del cúmulo todas las estrellas compactas tienen la misma velocidad media cuadrada en ese radio, es decir, si asumimos que la función de distribución es

$$f_i(r, v, m) = \frac{n_i(r)}{2\pi v} \delta(v^2 - \bar{v}_i^2(r)) \delta(m - m_i), \quad (3.69)$$

donde  $\bar{v}_i^2$  es la velocidad media cuadrada definida en la ecuación (3.55). Además  $m_i$  y  $n_i = m_i/\rho_i$ , son la masa y la densidad de número, respectivamente para la especie  $i$ . Esto se traduce a que para cualquier punto  $r$ , los PBHs tienen la misma velocidad y su dirección es isotrópica.

Al integrar la ecuación (3.68), se obtiene el ritmo de coalescencia de los PBHs de la especie  $j$  con la especie  $i$ , esto es:

$$\Gamma_j = \frac{14\pi}{3} \sum_i \sigma(m_j, m_i) \int dr r^2 \frac{n_j n_i}{\bar{v}_j \bar{v}_i} \left[ (\bar{v}_j + \bar{v}_i)^{3/7} - |\bar{v}_j - \bar{v}_i|^{3/7} \right]. \quad (3.70)$$

## Galaxias Enanas

Las Dwarf Galaxies (por su trad. al español “Galaxias Enanas”) son los sistemas estelares más antiguos y menos evolucionados químicamente que se conocen [92]. Estas galaxias se asemejan a los cúmulos globulares en los perfiles de densidad, sin embargo, se distinguen de los cúmulos de estrellas porque presentan una masa dinámica que es sustancialmente mayor que la masa inferida de la población estelar luminosa [33]. La cinemática estelar de las DG confirma que contienen un componente dominante de DM que contrasta con los cúmulos estelares. En consecuencia, estas propiedades indican que las DG son los sistemas astrofísicos donde la DM es más abundante. Dado que estas galaxias están muy dominadas por DM, con proporciones de masa-luz  $\sim 1000 M_\odot/L_\odot$  [93], son laboratorios extremadamente valiosos para caracterizar la naturaleza de DM [35].

Recientemente, varias investigaciones como [49, 69, 102] han descubierto docenas de DG como satélites de la Vía Láctea, Andrómeda y como miembros del Grupo Local [55]. Los satélites ultradébiles de la Vía Láctea tienen masas que van desde poco más de  $10^6 M_\odot$  (Coma Berenices) hasta  $2,8 \times 10^7 M_\odot$  (Canes Venatici I) [93]. Los DG descubiertos tienen radios de Plummer (media luz) tan pequeños como  $\sim 20$  pc [82], con la masa total dentro de este radio en el rango de uno a tres órdenes de mayor magnitud que sus masas estelares [72]. En consecuencia, las densidades centrales medidas y los perfiles de densidad son esencialmente los del halo de DM.

Sin embargo, la identidad del DM dominante en estos entornos sigue siendo un misterio [9].

Una posibilidad atractiva es que el DM consista de Agujeros Negros Primordiales (PBH) [19, 41]. Las restricciones a su abundancia impuestas en entornos de DG se informan en Refs. [96, 104]. Recientemente, algunos estudios examinaron si los candidatos de DM pueden ser PBHs, y resolver el problema “*cusp-core*” en DGs de baja masa [16].

## Coalescencia jerárquica

En este capítulo se presenta los resultados obtenidos a partir del estudio sobre la historia de coalescencia de los agujeros negros primordiales (PBHs), en un escenario en el que representan el componente dominante de materia oscura de los núcleos de *Dwarf Galaxies* (DG).

### 4.1. Modelo para el ritmo de colisiones

A partir de la caracterización de las DG, que se ha expresado en el capítulo anterior, podemos elucidar un modelo siguiendo el ejemplo de Stasenko y Kirillov [95], de tal manera que podamos producir una sucesión de coalescencias de BHs en una DG. Sin embargo para estimar el ritmo de coalescencia, reescribiremos algunas de las ecuaciones definidas en el capítulo 3, a manera de ser consistentes con la descripción textual de nuestras condiciones para establecer el modelo.

El primer paso es considerar una población de PBH en el núcleo del DG, a la que llamamos cúmulo de PBHs, con un número  $N_{\text{PBH}}$  de elementos. Suponemos que el único componente de DM son los PBHs, con una sola masa inicial (población monocromática). En nuestro estudio probamos cuatro masas iniciales diferentes de PBH, donde  $N_{\text{PBH}}$  está determinada por la masa de DG. Es decir a lo largo de este modelo consideramos un DG de masa total fija,  $M_{\text{DG}} = 10^9 M_{\odot}$ , y radio fijo,  $R_{\text{DG}} \sim 10$  pc.

Para que los PBHs se fusionen más de una vez, se requiere un entorno denso. Por lo tanto,

nos enfocamos en el núcleo de los DG con masa,  $M_c = 10^5 M_\odot$  confinado en un radio de núcleo,  $R_c = 0.9$  pc, que es consistente con las observaciones [93]. El número de PBH es por tanto proporcional a la densidad de DM,  $\rho_{\text{DM}}$ , e inversamente proporcional a su masa

$$N_{\text{PBH}} = \frac{4\pi \rho_{\text{DM}} R_c^3}{3 m_{\text{PBH}}}. \quad (4.1)$$

En cada coalescencia participan dos PBHs denotados por su masa  $m_i$ ,  $m_j$ . En otras palabras, los elementos  $i$  o  $j$ , definidas por sus masas:  $m_i$  y  $m_j$ , respectivamente. Así la sección eficaz de la ec. (3.63) de estos dos objetos que forman una binaria para después coalescer, se reescribe de la forma

$$\sigma = \frac{\sigma(m_i, m_j)}{|v_i - v_j|^{18/7}}, \quad (4.2)$$

donde se ha usado

$$\sigma(m_i, m_j) = 2\pi \left( \frac{85\pi}{6\sqrt{2}} \right)^{2/7} \frac{G^2 (m_i + m_j)^{10/7} (m_i m_j)^{2/7}}{c^{10/7}}. \quad (4.3)$$

Aquí  $v_i$  representa la velocidad de los componentes en el binario, que viene dada por la velocidad cuadrática media ec. (3.55), de tal manera que para nuestro caso

$$\overline{v_i^2}(r) = \frac{4\pi}{n_i(r)} \int_0^{\phi(r)} f_i(E) [2(\phi(r) - E)]^{3/2} dE, \quad (4.4)$$

donde  $n_i(r) = \frac{\rho_i(r)}{m_i}$  es la densidad de numero. Además la densidad de DM estará modelada por el modelo de Plummer (ver Def. 3.62) en todo momento. Esto prescribe las siguientes expresiones para la densidad y el potencial gravitacional, respectivamente:

$$\rho_i(r) = \rho_i^c \left( 1 + \frac{r^2}{R_c^2} \right)^{-5/2} = \frac{3m_i N_i}{4\pi R_c^3} \left( 1 + \frac{r^2}{R_c^2} \right)^{-5/2}, \quad (4.5)$$

$$\phi(r) = \phi^c \left( 1 + \frac{r^2}{R_c^2} \right)^{-1/2} = \frac{GM_c}{R_c} \left( 1 + \frac{r^2}{R_c^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.6)$$

Debido a esto, definimos las siguientes cantidades características del sistema: la densidad central de la  $i$ -ésima especie,  $\rho_i^c \equiv \frac{3m_i N_i}{4\pi R_c^3}$ , donde  $N_i$  representa el número total de BH

con masa  $m_i$ , así como un *potencial central*,  $\phi^c \equiv \frac{GM_c}{R_c}$ . Del mismo modo la función de distribución de cada población de BH,  $f_i(E)$  estará dada por

$$f_i(E) = \frac{32\sqrt{2}}{7\pi^2} (\phi^c)^{-5} n_i^c E_i^{7/2}, \quad (4.7)$$

donde  $n_i^c \equiv n_i(r = R_c)$ , y de acuerdo con el teorema del virial, la energía de cada especie del cúmulo estará descrita por

$$E_i = \frac{G m_i^2 N_i^2}{2 R_c}. \quad (4.8)$$

Usando las ecuaciones (4.7) y (4.8) dentro de la ec. (3.55) y posteriormente integrarla, se obtiene la velocidad cuadrática media

$$\bar{v}_i^2(r) = \frac{1}{2} \phi(r) \left( \frac{\phi(r)}{\phi^c} \right)^5 \left( \frac{n_i(r)}{n_i^c} \right)^{-1}. \quad (4.9)$$

Como última simplificación de nuestro modelo, explotamos la simetría esférica del perfil de Plummer y dividimos en 10 cascarones de radio  $r_A$  al cumulo para asignar un radio a cada función de  $r$ . Está división asume naturalmente la dependencia radial de densidad y potencial.

Al combinar la ec. (3.70) con nuestras condiciones, se obtiene el ritmo de coalescencia entre PBHs con masa  $m_i$  y  $m_j$  dentro de la región de cascarones con los radios  $r_A$  y  $r_B$ , esto es

$$\begin{aligned} \Gamma(r_A, r_B) &= \frac{14\pi}{3} \sum_i \sigma(m_i, m_j) \frac{n_j(r_B) n_i^c}{\bar{v}_j(r_B)} \left( \frac{\phi^c}{2} \right)^{-2/7} \int dr_A r_A^2 (1+A)^{-9/4} \\ &\times \left\{ \left[ \left( \frac{1}{(1+B)^{1/4}} \right) + \left( \frac{1}{(1+A)^{1/4}} \right) \right]^{3/7} - \left| \left( \frac{1}{(1+B)^{1/4}} \right) - \left( \frac{1}{(1+A)^{1/4}} \right) \right|^{3/7} \right\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde  $A = (r_A/R_c)^2$  y  $B = (r_B/R_c)^2$ , representa el cascaron al que pertenece cada uno de los componentes que coalescen<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>La derivación explícita del ritmo de coalescencia ec. (4.10), puede consultarse en el apéndice B, cabe aclarar que la notación usada en dicho apéndice difiere del mostrado aquí, no obstante es consistente con la notación del código empleado para realizar el cálculo numérico, el cual puede consultar en [github.com/TadeoDGAguilar/PBHs\\_Coalescence](https://github.com/TadeoDGAguilar/PBHs_Coalescence)

Para cada ejemplo, hemos cortado el núcleo de la galaxia en 10 cascarones esféricos y procedemos a contar el número de coalescencias dividiendo el tiempo cósmico en *épocas de fusión* de  $\Gamma(r_A, r_B)$  constantes. El tiempo de duración de tales épocas,  $\tau_e$  se define como una décima parte del inverso del mayor valor de tasa de fusión entre los pares de caparazones. Matemáticamente,

$$\tau_e = \frac{1}{10} \min \left\{ \Gamma(r_A, r_B)^{-1} \right\}, \quad (4.11)$$

con esto buscamos garantizar que a cada época el ritmo de coalescencia de PBHs sea constante.

Contamos el número de coalescencias, comenzando con una sola población de PBH con corrimiento al rojo  $z = 20$ . Esta condición inicial establece un tiempo lo suficientemente temprano para descartar el origen estelar de los BH iniciales y lo suficientemente tardío para la formación de los DG. Para la primera iteración, la población inicial de una sola masa se divide en dos conjuntos idénticos, tomados como dos especies diferentes como entrada de nuestro algoritmo de fusión. En cada época, evaluamos la probabilidad de encuentros a partir de el ritmo de fusión ec. (4.10) para una combinación dada de dos especies en dos radios dados ( $r_A$  y  $r_B$ ), verificando que la fusión sucede en un tiempo más corto que el período que dura cada época de fusión. Por lo tanto, contamos el número de coalescencias considerando el número de BHs disponibles en cada capa para ambas especies. Para la siguiente época, reiniciamos las tasas de fusión en el tiempo  $t_i + \tau_e$  para la población actualizada de cada especie. De este modo, el procedimiento anterior se repite para calcular las coalescencias en cada capa.

En cada coalescencia consideramos la pérdida de masa debido a la emisión de radiación gravitacional ec. (2.31). Dado que las órbitas siguen inicialmente una trayectoria parabólica, que también es requerida por la sección eficaz ec. (4.2), tomamos la excentricidad  $e = 0.99$  como una aproximación a la parábola y la semi-eje mayor como separación inicial (periastro). El ritmo de emisión de energía se puede expresar como una función de la disminución del semieje mayor ec.(2.34). Por lo tanto, la pérdida de energía en GW a lo

largo de la coalescencia viene dada por

$$\Delta E = \int_{a_i}^{a_{\text{merger}}} \frac{dE}{da} \frac{da}{dt} dt = \frac{1}{2} m_i m_j \left( \frac{1}{a_{\text{merger}}} - \frac{1}{a_i} \right), \quad (4.12)$$

donde el semi-eje mayor se integra desde una separación inicial,  $a_i$  hasta la suma de los radios de Schwarzschild de los progenitores,  $a_{\text{merger}}$ . La energía emitida por la radiación gravitatoria se explica por la pérdida de masa efectiva. Esto da como resultado el producto de fusión con una masa menor que la suma de las masas de los progenitores, como se ilustra en la Figura 4.1. El efecto acumulado sobre la masa total del cúmulo también se incorpora a nuestra evaluación de las tasas de fusión (ver Tabla 4.1). Nuestra prescripción para la pérdida de masa está de acuerdo con los eventos observados por la colaboración LIGO/Virgo<sup>2</sup>. Vale la pena mencionar que no consideramos la disrupción de las binarias de BHs por encuentros con otros objetos compactos (BHs y estrellas). También despreciamos la eyección de BH debido a las “kicks” por retroceso de la radiación GW. Incluso si consideramos estos efectos, solo afectarán a una fracción insignificante del número total de productos de la coalescencia. Finalmente, es necesario mencionar que el momento angular asociado a cada coalescencia y su efecto en subsecuentes colisiones ha sido también ignorado.

## 4.2. Historia de colisiones de agujeros negros primordiales

El termino *historia* en el contexto de esta tesis, hace referencia al estudio de la fusión secuencial para determinar el espectro de masas de PBHs en dichos grupos con una población inicial monocromática, con lo cual describimos el proceso de fusión de pares binarios durante diferentes periodos de tiempo y con los cuales se observa una transferencia de la masa total del núcleo a los productos de fusión, independientemente de la masa inicial de los PBHs. Además un porcentaje considerable de la masa total del núcleo se irradia en

---

<sup>2</sup>La masa calculada a través de la ec. (4.12) de los componentes progenitores se desvía en promedio solo un 2% de la masa final estimada para los eventos en las tres carreras de LIGO/Virgo (muy dentro de los errores observacionales).

cada periodo de tiempo en forma de ondas gravitacionales.

Específicamente, durante el desarrollo de la investigación se evaluaron diferentes valores para la masa de la población inicial, estos fueron

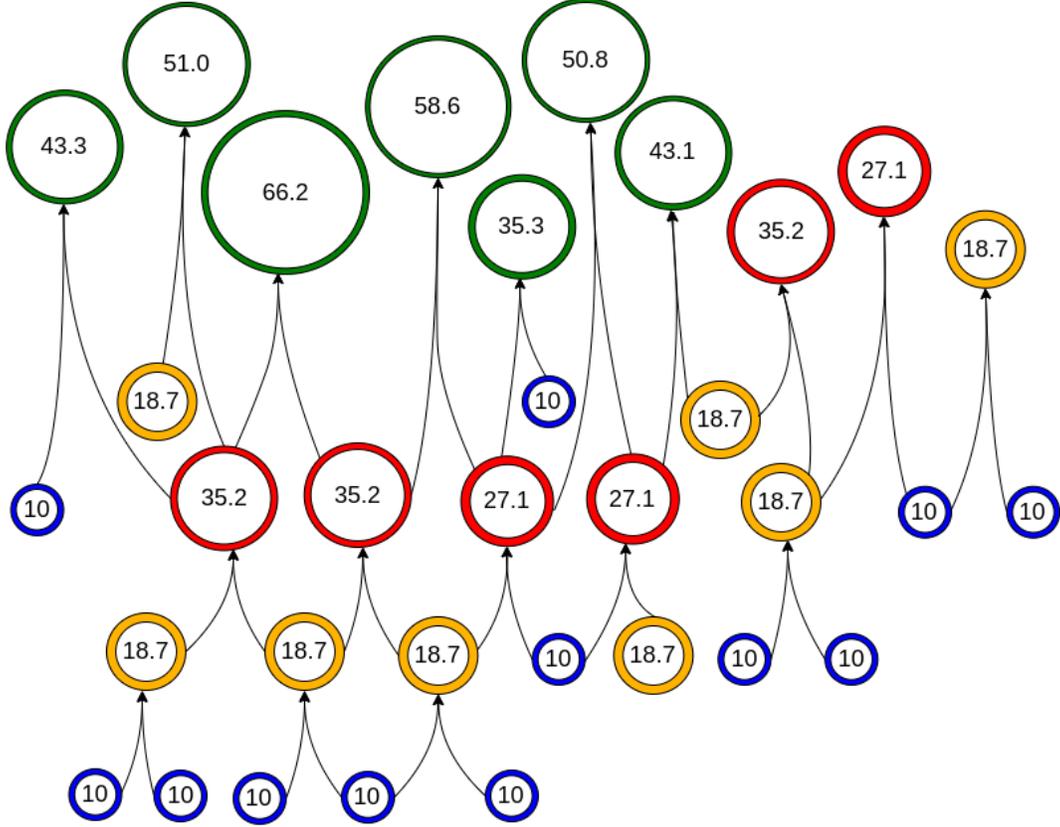
$$m_{\text{PBH}}/M_{\odot} = \left[ 10^{-14}, 10^{-10}, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10 \right],$$

sin embargo solo seleccionamos cuatro masas representativas, las cuales llamaremos de primera generación, dadas por  $m_{\text{PBH}}/M_{\odot} = [10^{-14}, 10^{-2}, 1, 10]$ .

En nuestro análisis consideramos cuatro realizaciones con masas iniciales diferentes para los PBH, que definimos como *primera generación* (1G);  $10^{-14} M_{\odot}$ ,  $10^{-2} M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $10 M_{\odot}$ . Elegimos  $10^{-14} M_{\odot}$  ya que, como se mencionó, no hay restricciones de observación confirmadas para esta masa y los PBH pueden ser la totalidad de la materia oscura. Nuestro interés en otros valores de masa proviene de las observaciones de GW. De la ec. (4.1), obtenemos el número de PBH en el núcleo (ver Tabla 4.1).

De acuerdo a nuestra suposición, los componentes de la primera fusión tendrán masas iguales. Por lo tanto, la fusión de 1G+1G producirá los BH de *segunda generación* (2G) con aproximadamente el doble de masa. Posteriormente, a partir de la *tercera generación* (3G), los BH pueden formarse a partir de colisiones de 1G+2G y 2G+2G; se formarán por tanto dos poblaciones de BH, y en consecuencia, es posible una variedad de masas (ver Figura 4.2).

Al mismo tiempo se consideró la masa inicial del núcleo como constante,  $M_c(t_i) = 10^5 M_{\odot}$ , y es denotar que el número inicial de PBHs es sensible a la masa inicial (ver 4.1). A modo ilustrativo, en la Figura 4.1 mostramos el árbol de fusión de PBHs, para el caso específico de masa inicial,  $m_{\text{PBH}} = 10 M_{\odot}$  (círculos azules). Cada fusión da paso a un BH de n-ésima generación. En nuestro criterio, solo cuatro épocas tienen lugar dentro de un periodo equivalente a la edad del Universo y, por lo tanto, los BH se fusionan hasta la cuarta generación.



**Figura 4.1:** Coalescencia jerárquica de agujeros negros primordiales. Ejemplificado para PBHs de  $10M_{\odot}$  y tomando en cuenta la energía (masa) radiada en ondas gravitacionales en cada coalescencia. Cada color corresponde a una generación de PBHs y en el diagrama se muestran hasta la cuarta generación en 3 épocas de coalescencia.

### 4.3. Evolución en $N_{\text{PBH}}$

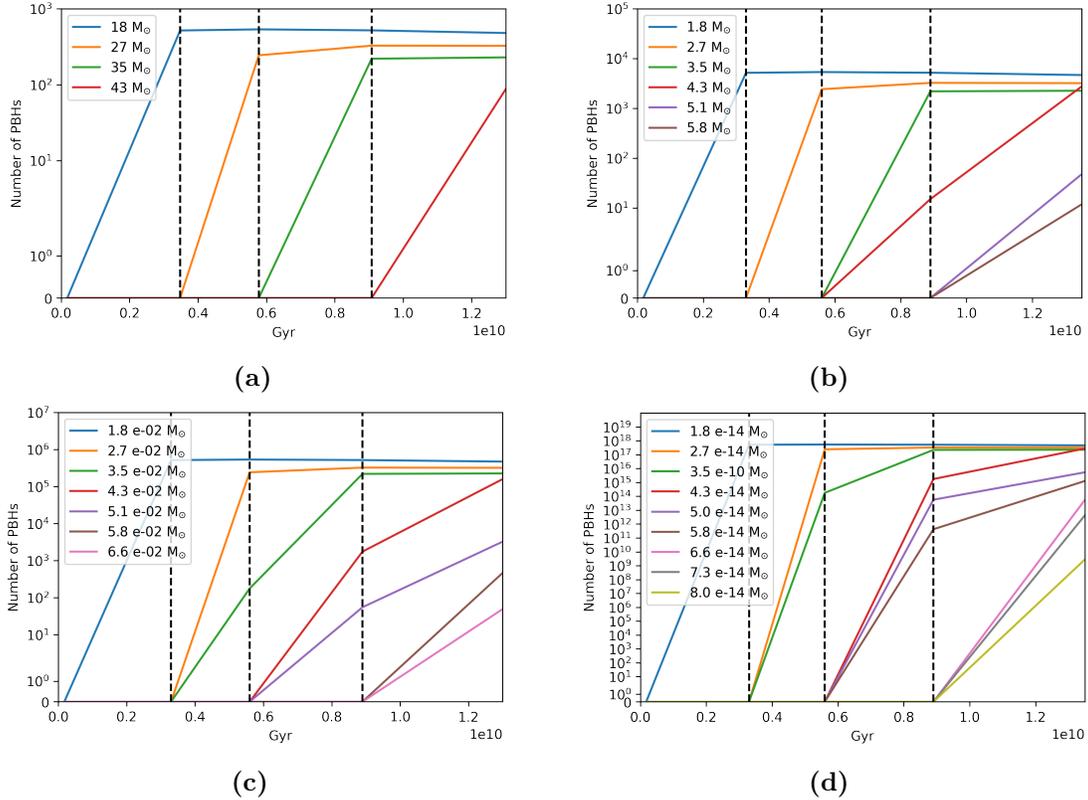
Consideramos DGs cuyo núcleo es dominado por DM-PBHs, con una muestra de masa inicial de PBHs. Específicamente, investigamos cuatro masas representativas dadas por  $m_{\text{PBH}}/M_{\odot} = [10^{-14}, 10^{-2}, 1, 10]$ . Mantenemos la masa inicial del núcleo como una constante  $M(t_i) = 10^5 M_{\odot}$ , lo que implica que el número inicial de PBH es sensible a la masa inicial de PBHs (ver Tabla 4.1). Como se indicó anteriormente, debido a la radiación GW en cada coalescencia, la masa de cada producto de fusión es menor que la suma de los componentes del binario.

La Tabla 4.1 indica el número de PBH en la población inicial (en el momento  $t_i$ ) y la masa restante del núcleo después de las cuatro épocas de coalescencia secuencial (en el momento actual  $t_0$ ),  $(M_c(t_0)/M_c(t_i))$ , en la tercera columna. La última columna muestra

$m_{\text{PBH}}$	$N_{\text{PBH}}(t_i)$	$M_c(t_0)/M_c(t_i)$	$\sum m_{\text{PBH}}(t_0)/M_c(t_0)$
$10^{-14} M_\odot$	$10^{19}$	0.953	0.5897
$10^{-2} M_\odot$	$10^7$	0.952	0.5897
$1 M_\odot$	$10^5$	0.952	0.5896
$10 M_\odot$	$10^4$	0.953	0.5891

**Tabla 4.1:** Las columnas primera y segunda, muestran la masa y el número de la población original de PBH, respectivamente. La tercera columna representa la masa restante del núcleo después de cuatro épocas. La última columna muestra el porcentaje final (presente) de la población original de PBH en términos de masa. Es importante notar que los resultados en las columnas 3 y 4 son prácticamente independientes de cada caso considerado.

la fracción de masa de la población inicial de PBH que no chocó con otro BH hasta  $t_0$ . Vale la pena señalar que estos resultados son prácticamente independientes de la masa inicial de PBH.



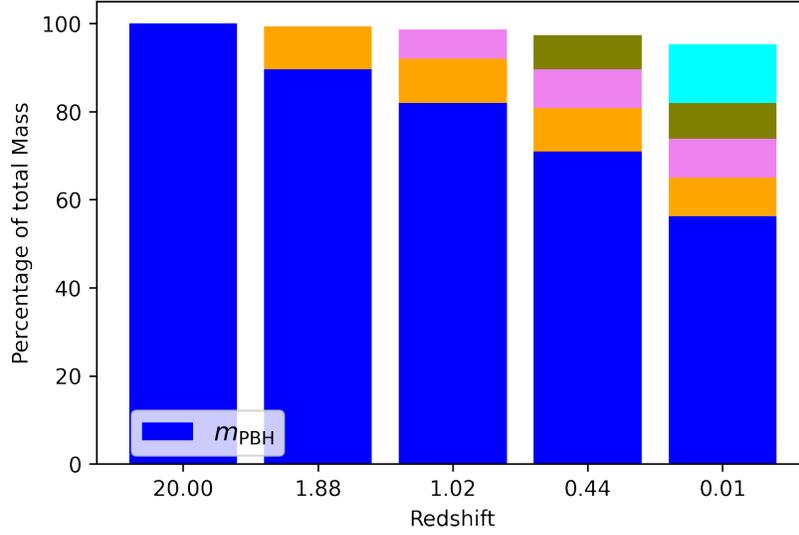
**Figura 4.2:** El número de agujeros negros creados a partir de la coalescencia de una población de agujeros negros primordiales monocromáticos, como función de la edad del Universo, comenzando su interacción en  $t_h = 0.18$  Gyr ( $z = 20$ ). Cada periodo de generación está marcado por la línea vertical. Cada panel corresponde a las siguientes valores de masa para la población inicial: (a)  $10M_\odot$ , (b)  $1M_\odot$ , (c)  $10^{-2}M_\odot$ , (d)  $10^{-14}M_\odot$ .

La Figura 4.2 muestra el número de productos de fusión en cada época para las diferentes poblaciones iniciales de PBH consideradas. Se debe hacer notar que para masas de PBH más pequeñas, son posibles productos de fusión de masa de hasta  $8 m_{\text{PBH}}$ . Por otro lado, para grandes masas iniciales de PBH, solo se producen significativamente BH de masa  $4.3 m_{\text{PBH}}$ . Esto se debe a la cantidad de PBH presentes inicialmente, como se indica en la Tabla 4.1. Nótese también que en la Figura 4.2, las poblaciones de productos dominantes en números son las de la primera y segunda generación de coalescencias. Esto es cierto para todos los casos investigados y se debe al hecho de que las tasas relativas de fusión son independientes de la masa de PBH pero dependen de  $N_{\text{PBH}}$  (el número de PBHs).

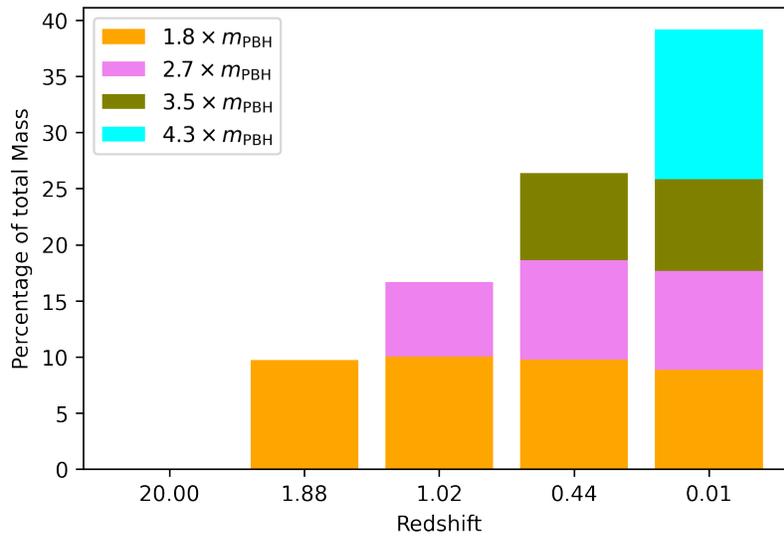
#### 4.4. Evolución en $m_{\text{PBH}}$

Centrándonos en la fracción de masa del núcleo de la galaxia de los productos de fusión, trazamos su contribución en las Figuras 4.3 y 4.4, donde mostramos la abundancia de masa relativa de cada población en un núcleo de DG inicialmente formado por PBH con masa  $m_{\text{PBH}}$ .

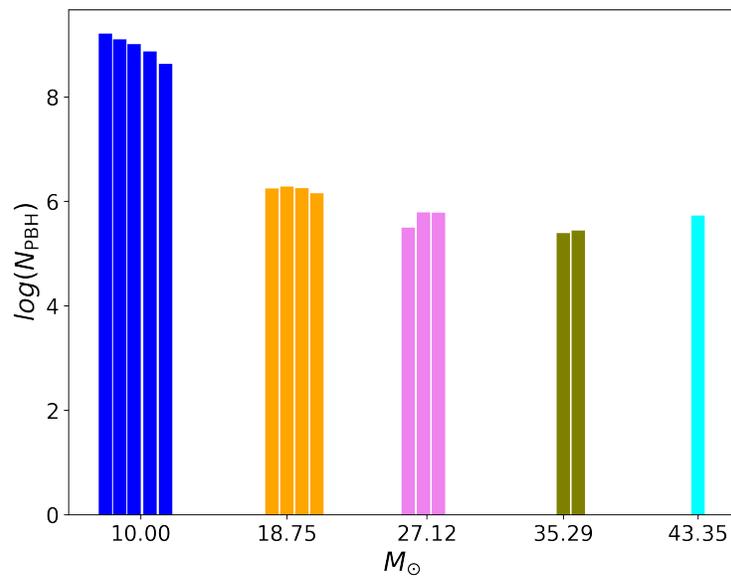
Para los ejemplos presentados, encontramos que las fracciones de masa resultantes son independientes del valor de la masa PBH original (ver Tabla 4.1). El gráfico de la Figura 4.3 muestra que la fracción de PBH disminuye constantemente con el tiempo, aumentando la fracción de masa de los productos de fusión después de cada época de fusión. Como lo ilustran las Figuras 4.4 y 4.5, después de las cuatro iteraciones, encontramos que más del 40% de los PBH han formado al menos un binario y se han fusionado para formar BH más grandes. La Figura 4.4 muestra la fracción de masa en los productos de fusión. La fracción de masa está dominada por las especies más masivas, incluso cuando el número de dichas especies es subdominante.



**Figura 4.3:** Porcentaje de la masa total en cada población (de una masa dada) para las poblaciones más abundantes. Esto se grafica para el caso donde  $m_{\text{PBH}} = 10 M_{\odot}$  pero las fracciones son en gran medida independientes de la masa de PBH. La población original está incluida, donde el resto de la masa está en especies más pequeñas, y 4.7% se pierde por radiación gravitacional.



**Figura 4.4:** Porcentaje de la masa total en cada población (de una masa dada) para las poblaciones más abundantes. No se incluye la población original, el porcentaje de masa en las tres poblaciones más numerosas generadas es del orden de 10% cada una, mientras que la población más masiva constituye más del 15% de la masa final. Como lo muestra la Figura 4.5 estos porcentajes son los mismos para un rango de masas iniciales de PBH en el cúmulo.



**Figura 4.5:** Numero de agujeros negros primordiales por unidad de masa. Cada una de las barras azules representa la evolución, a cada época, en la cantidad de numero población inicial de  $10 M_{\odot}$

## Conclusiones

En este capítulo presenta el final del trabajo de investigación, exponiendo las conclusiones a las cuales llegamos con base a los resultados obtenidos en el capítulo anterior. Estas conclusiones serán dadas a manera de respuesta a las preguntas de investigación.

### **¿Pueden ser los eventos de Ligo/Virgo productos de una coalescencia de múltiples PBHs?**

Las observaciones de GW han demostrado que las coalescencias de BH pueden ser más frecuentes de lo esperado. Si los productos de fusión se encuentran a su vez cerca de otros BHs forman nuevos binarios, pueden fusionarse posteriormente como fuentes de GW detectables. En el presente trabajo se ha mostrado que en un ambiente de DG la probabilidad de coalescencia es considerablemente alta. Nuestros resultados muestran que la pérdida de masa total en el núcleo de DG, por la emisión de GW y la fracción de masa de BH que experimenta el proceso de coalescencia, son en su mayoría independientes de la masa inicial de PBH. La Figura 4.3 en particular muestra que la población original de PBHs se reduce a poco más del 50 % de la masa total. La proporción de poblaciones más grandes de BH en masa puede probarse mediante futuras observaciones de GW.

### **¿Existe compatibilidad con DM?**

Para cierto rango de masas, esto es probable. Pero según nuestros resultados la masa de las partículas cambiaría conforme evoluciona el universo. Para coalescencias secuenciales

de BHs, se requiere un entorno denso dominado por DM. En otras palabras, los resultados no solo son relevantes para el ritmo y el espectro de eventos GW. Se ha demostrado que la formación binaria en los núcleos densos de los sistemas dominados por DM puede dar paso a más de una población de PBH. Estos también concuerdan con estudios que investigan sistemas de estrellas múltiples/BH en las regiones centrales de cúmulos con un disco de acreción [73, 75], y sin él [68, 70, 85]. Hay diferencias importantes en las poblaciones de binarios de BH que pueden distinguir nuestro escenario de múltiples coalescencias (ver Ref. [40]).

Como una prueba para la coalescencia jerárquica es evaluar si los GW estocásticos del mecanismo propuesto producen una señal detectable (ver Ref. [38]). Sin embargo, hay espacio para complementos importantes de nuestras suposiciones antes de producir pronósticos precisos. Por ejemplo, dado que los DG son débiles con una masa estelar baja, hemos despreciado el efecto de las coalescencias en las estrellas, pero un estudio más detallado que contemple tales colisiones incluiría señales electromagnéticas que limitarán los parámetros del modelo.

En suma, se ha propuesto un modelo para la coalescencia jerárquica de PBHs en ambientes de alta densidad de materia oscura. Encontrando que la probabilidad de fusión es alta y la fracción de PBHs que pudieran colisionar excede el 40 %.

Creemos que la propuesta merece un estudio más detallado que no omita las simplificaciones a las que está sujeto nuestro modelo, últimamente es necesario recurrir a simulaciones numéricas de N-cuerpos que reproduzcan los ambientes propuestos, pero estudios semi-analíticos como esta presente tesis proveen resultados preliminares que serán motivación para aquellos estudios más detallados.

# Apéndice **A**

## Código para el análisis de datos del catalogo de LIGO

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as pl
import matplotlib as mpl
import math
import seaborn as sb
import csv
from scipy import constants
from tqdm import tqdm
from scipy.integrate import quad, dblquad
from astropy.cosmology import Planck18 as cosmo
from astropy import constants as const
import astropy.units as u
from units import unit
from astropy.cosmology import Planck18, z_at_value
import pandas as pd
from matplotlib import cm
from sklearn import linear_model
from sklearn.linear_model import LinearRegression
```

```

from sklearn.metrics import mean_squared_error, r2_score
from mlxtend.plotting import plot_linear_regression
from statistics import mode, multimode

df = pd.read_csv('LIGO-3.csv')

pl.rcParams['figure.figsize'] = (10, 7)
df.drop(['id', 'version', 'GPS',
        'mass_1_source_lower', 'mass_1_source_upper',
        'mass_2_source_lower', 'mass_2_source_upper',
        'network_matched_filter_snr',
        'network_matched_filter_snr_lower',
        'chirp_mass', 'redshift_lower',
        'redshift_upper',
        'far',
        'far_lower',
        'far_upper',
        'final_mass_source_lower',
        'final_mass_source_upper',
        'chirp_mass_upper',
        'chirp_mass_lower',
        'reference', 'jsonurl',
        'catalog.shortName',
        'chirp_mass_source',
        'chirp_mass_source_lower',
        'chirp_mass_source_upper',
        'network_matched_filter_snr_upper',
        'luminosity_distance',
        'luminosity_distance_lower',
        'luminosity_distance_upper',
        'chi_eff', 'chi_eff_lower',

```

```

        'chi_eff_upper',
        'total_mass_source',
        'total_mass_source_lower',
        'total_mass_source_upper',
        'p_astro', 'p_astro_lower',
        'p_astro_upper'], 1).hist(bins= 50)
#pl.savefig('input_characteristics.png',
dpi=300, bbox_inches='tight')
pl.show()

data_row=[]
with open('LIGO-3.csv', newline='') as csvfile:
    reader = csv.DictReader(csvfile, delimiter=',', quotechar=':')
    for row in reader:
        string=[row['id'], row['mass_1_source'],
                row['mass_2_source'], row['redshift']]
#If I need to get a new row only write its name
        data_row.append(string)

m_min = []
m_max = []
delete = []
details = []
pr_z=[]
for i in range(len(data_row)):
    event = data_row[i]
    name = event[0]
    if event[1]==str(''):
        event[1]=0
    if event[2]==str(''):
        event[2]=0

```

```

if event[3]==str(''):
    event[3]=0
mass1 = float(event[1])
mass2 = float(event[2])
redshift = float(event[3])
if mass1 == 0 and mass2 == 0 and redshift == 0:
    delete.append(name)
    details.append(event)
    continue
#Conditional sentece to choose the mass mini and mass max
if mass1 > mass2:
    m_min.append(mass2)
    m_max.append(mass1)
elif mass2 > mass1:
    m_min.append(mass1)
    m_max.append(mass2)
pr_z.append(redshift)
print("Invalid Events:", delete)
for i in details:
    print(i)

Invalid Events: ['GW190424_180648-v2', 'GW190909_114149-v2']
['GW190424_180648-v2', 0, 0, 0]
['GW190909_114149-v2', 0, 0, 0]

pl.plot(m_max, pr_z, 'o')
pl.plot(m_min, pr_z, '.')
pl.xticks(fontsize=20)
pl.yticks(fontsize=20)
pl.ylim(ymin=0.)
pl.xlim(xmin=0.)

```

```

pl.xlabel("Mass (M $\odot$ )", fontsize=20)
pl.ylabel("Redshift", fontsize=20)
pl.legend(('Masas mayores', 'Masas
menores'),
loc='lower_right')
#pl.savefig('Z_vs_Masses.png', dpi=300,
bbox_inches='tight')
#pl.show()

pl.plot(m_max, pr_z, 'o')
pl.plot(m_min, pr_z, 'o')
pl.xticks(fontsize=20)
pl.yticks(fontsize=20)
pl.ylim(ymin=0.)
pl.xlim(xmin=0.)
pl.xlabel("Mass (M $\odot$ )", fontsize=20)
pl.ylabel("Redshift", fontsize=20)
pl.legend(('Masas mayores', 'Masas menores'),
loc='lower_right')
#pl.legend(('Higher Mass', 'Lower Mass'),
loc='lower_right')
#print(m_min[0]/const.M_sun*u.kg)
for i in range(len(pr_z)):
    pl.hlines(y=pr_z[i], xmin=m_min[i],
xmax=m_max[i], color='black')
#pl.savefig('pair_z_vs_Masses.png',
dpi=300, bbox_inches='tight')
#pl.show()

```

## Derivación del ritmo de coalescencia

Para cada especie de objetos que formaran binarias y posteriormente se fusionaran, se denotaran por los índices  $i$  y  $j$ , respectivamente. Las ecuaciones que a continuación se expondrán, se cumplen para ambas especies.

Usando la definición de la velocidad cuadrática media descrita en [95]:

$$\bar{v}_{i,j}^2(r) = \frac{4\pi}{n_{i,j}(r)} \int_0^{\phi(r)} f_{i,j}(E) [2(\phi(r) - E)]^{3/2} dE, \quad (\text{B.1})$$

donde  $n_{i,j}(r) = \frac{\rho_{i,j}(r)}{m_{i,j}}$ . Además usando las definiciones para la Energía y la función de distribución  $f_i$  del modelo de Plummer descritas en [84], entonces:

$$\bar{v}_{i,j}^2(r) = \frac{4\pi m_{i,j}}{\rho_{i,j}(r)} \frac{24\sqrt{2}N_{i,j}R^2}{7\pi^3G^5M^5} \int_0^{\phi(r)} E_{i,j}^{7/2} [2(\phi(r) - E)]^{3/2} dE \quad (\text{B.2})$$

resolviendo la integral, se obtiene

$$\bar{v}_{i,j}^2(r) = \left( \frac{4\pi m_{i,j}}{\rho_{i,j}(r)} \frac{24\sqrt{2}N_{i,j}R^2}{7\pi^3G^5M^5} \right) \left( \frac{7\pi\phi^6(r)}{2^{17/2}} \right), \quad (\text{B.3})$$

simplificando

$$\bar{v}_{i,j}^2(r) = \left( \frac{(4)(24)\sqrt{2}N_{i,j}R^2}{\pi G^5 M^5 2^{17/2}} \right)^{1/2} \left[ \frac{\phi^3(r)}{n_{i,j}^{1/2}(r)} \right] = \alpha^{1/2} N_{i,j}^{1/2} \left[ \frac{\phi^3(r)}{n_{i,j}^{1/2}(r)} \right], \quad (\text{B.4})$$

donde se ha definido  $\alpha = \left( \frac{(4)(24)\sqrt{2}R^2}{\pi G^5 M^5 2^{17/2}} \right)$ . De esta manera se reescriben las ecuaciones del

modelo de Plummer, tal que

$$\bar{v}_i(r_1) = \alpha^{1/2} N_i^{1/2} \left[ \frac{\phi^3(r_1)}{n_i^{1/2}(r_1)} \right] \quad \rho_i(r_1) = \frac{3 M_i}{4\pi R^3} \left( 1 + \frac{r_1^2}{R^2} \right)^{-5/2}, \quad (\text{B.5a})$$

$$\bar{v}_j(r_0) = \alpha^{1/2} N_j^{1/2} \left[ \frac{\phi^3(r_0)}{n_j^{1/2}(r_0)} \right] \quad \rho_j(r_0) = \frac{3 M_j}{4\pi R^3} \left( 1 + \frac{r_0^2}{R^2} \right)^{-5/2}. \quad (\text{B.5b})$$

Por otro lado para la densidad numerica de cada especie se tiene que:

$$n_i(r_1) = \frac{\rho_i(r_1)}{m_i} = \frac{3 M_i}{4\pi m_i R^3} \left( 1 + \frac{r_1^2}{R^2} \right)^{-5/2} = \beta N_i (1 + a)^{-5/2} \quad (\text{B.6a})$$

$$n_j(r_0) = \frac{\rho_j(r_0)}{m_j} = \frac{3 M_j}{4\pi m_j R^3} \left( 1 + \frac{r_0^2}{R^2} \right)^{-5/2} = \beta N_j (1 + b)^{-5/2} \quad (\text{B.6b})$$

Donde se ha usado:  $\beta = \frac{3}{4\pi R^3}$  y  $a = \frac{r_1^2}{R^2}$ ,  $b = \frac{r_0^2}{R^2}$

$$\phi(r_1) = 2v_{rms}(r_1)^2 = \frac{G M}{R} \left( 1 + \frac{r_1^2}{R^2} \right)^{-1/2} = \eta (1 + a)^{-1/2} \quad (\text{B.7a})$$

$$\phi(r_0) = 2v_{rms}(r_0)^2 = \frac{G M}{R} \left( 1 + \frac{r_0^2}{R^2} \right)^{-1/2} = \eta (1 + b)^{-1/2} \quad (\text{B.7b})$$

Usando de manera practica  $\eta = \frac{GM}{R}$ , entonces:

$$\frac{n_i(r_1)}{\bar{v}_i(r_1)} = n_i(r_1) \left( \alpha^{-1/2} N_i^{-1/2} \left[ \frac{n_i^{1/2}(r_1)}{\phi^3(r_1)} \right] \right) = \left( \alpha^{-1/2} N_i^{-1/2} \left[ \frac{n_i^{3/2}(r_1)}{\phi^3(r_1)} \right] \right) \quad (\text{B.8})$$

donde

$$\begin{aligned} n_i^{3/2}(r_1) &= \beta^{3/2} N_i^{3/2} (1 + a)^{-15/4} \\ \phi^3(r_1) &= \eta^3 (1 + a)^{-3/2}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

entonces

$$\frac{n_i^{3/2}(r_1)}{\phi^3(r_1)} = \frac{\beta^{3/2} N_i^{3/2} (1 + a)^{-15/4}}{\eta^3 (1 + a)^{-3/2}} = \beta^{3/2} \eta^{-3} N_i^{3/2} (1 + a)^{-9/4} \quad (\text{B.10})$$

y por lo tanto:

$$\frac{n_i(r_1)}{\bar{v}_i(r_1)} = \alpha^{-1/2} N_i^{-1/2} \left( \beta^{3/2} \eta^{-3} N_i^{3/2} (1+a)^{-9/4} \right) = \alpha^{-1/2} \beta^{3/2} \eta^{-3} N_i (1+a)^{-9/4}. \quad (\text{B.11})$$

Análogamente para la especie  $j$ , se tiene que  $\frac{n_j(r_0)}{\bar{v}_j(r_0)} = \alpha^{-1/2} \beta^{3/2} \eta^{-3} N_j (1+b)^{-9/4}$ . Por otro lado, la suma de velocidades se simplifica de la siguiente manera.

$$(\bar{v}_j + \bar{v}_i)^{3/7} = \left[ \alpha^{1/2} N_j^{1/2} \left( \frac{\phi^3(r_0)}{n_j^{1/2}(r_0)} \right) + \alpha^{1/2} N_i^{1/2} \left( \frac{\phi^3(r_1)}{n_i^{1/2}(r_1)} \right) \right]^{3/7} \quad (\text{B.12})$$

sustituyendo las definiciones para  $\phi$  y  $n_i$ , entonces

$$\begin{aligned} (\bar{v}_j + \bar{v}_i)^{3/7} &= \alpha^{3/14} \left[ N_j^{1/2} \left( \frac{\eta^3 (1+b)^{-3/2}}{\beta^{1/2} N_j^{1/2} (1+b)^{-5/4}} \right) + N_i^{1/2} \left( \frac{\eta^3 (1+a)^{-3/2}}{\beta^{1/2} N_i^{1/2} (1+a)^{-5/4}} \right) \right]^{3/7} \\ &= \frac{\alpha^{3/14} \eta^{9/7}}{\beta^{3/14}} \left[ \left( \frac{(1+b)^{-3/2}}{(1+b)^{-5/4}} \right) + \left( \frac{(1+a)^{-3/2}}{(1+a)^{-5/4}} \right) \right]^{3/7} \\ &= \frac{\alpha^{3/14} \eta^{9/7}}{\beta^{3/14}} \left[ \left( \frac{1}{(1+b)^{1/4}} \right) + \left( \frac{1}{(1+a)^{1/4}} \right) \right]^{3/7} \end{aligned}$$

Análogamente se resuelve para  $|\bar{v}_j - \bar{v}_i|^{3/7}$ . Sustituyendo las definiciones anteriores en el ritmo de coalescencia de Stasenko *et al.* [95], se obtiene el ritmo de coalescencia para nuestro modelo:

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= \frac{14\pi}{3} \sum_i \sigma(m_j, m_i) \frac{n_j(r_0)}{\bar{v}_j(r_0)} \int dr_1 r_1^2 \alpha^{-1/2} \beta^{3/2} \eta^{-3} N_i (1+a)^{-9/4} \left( \frac{\alpha^{3/14} \eta^{9/7}}{\beta^{3/14}} \right) \\ &\times \left\{ \left[ \left( \frac{1}{(1+b)^{1/4}} \right) + \left( \frac{1}{(1+a)^{1/4}} \right) \right]^{3/7} - \left| \left( \frac{1}{(1+b)^{1/4}} \right) - \left( \frac{1}{(1+a)^{1/4}} \right) \right|^{3/7} \right\} \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= \frac{14\pi}{3} \sum_i \sigma(m_j, m_i) \frac{n_j(r_0)}{\bar{v}_j(r_0)} \alpha^{-2/7} \beta^{9/7} \eta^{-12/7} N_i \int dr_1 r_1^2 (1+a)^{-9/4} \\ &\times \left\{ \left[ \left( \frac{1}{(1+b)^{1/4}} \right) + \left( \frac{1}{(1+a)^{1/4}} \right) \right]^{3/7} - \left| \left( \frac{1}{(1+b)^{1/4}} \right) + \left( \frac{1}{(1+a)^{1/4}} \right) \right|^{3/7} \right\} \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

## Código para el cálculo de múltiples coalescencias

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as pl
import matplotlib as mpl
import math
import seaborn as sns
from scipy import stats
from astropy import constants as const
import csv
from scipy import constants
from scipy.integrate import odeint
from tqdm import tqdm
from scipy import integrate
from scipy.integrate import quad, dblquad
from astropy.cosmology import Planck18 as cosmo
import astropy.units as u
from itertools import combinations, permutations
from itertools import combinations_with_replacement
from astropy.cosmology import Planck13, z_at_value
```

```

z_20 = cosmo.age(20)
time_enable = cosmo.age(0)-z_20

t_1_gn = 3.3e+09
t_2_gn = 2.3e+09
t_3_gn = 3.3e+09
t_4_gn = 4.7e+09

H0 = cosmo.H(0)
G = const.G
c = const.c
pi = math.pi

m_i = 1.*u.M_sun
m_j = 1.*u.M_sun

M = 10**5 * u.M_sun
R = 10*u.parsec
v_rel = (G*M/R)**(1./2.)
interval = 1
r = np.arange(.1, R.value+interval, interval)

if m_i==m_j:
    N_i = M/(2*m_i)
    N_j = M/(2*m_j)
M_i = m_i*N_i
M_j = m_j*N_j

etiqueta_mass = ["m_i", "m_j"]
mass_catalog = [m_i.value, m_j.value]
M_tot_catalog = [M_i, M_j]
N_tot_catalog = [N_i, N_j]

```

```

etiqueta_M_tot = ["M_i", "M_j"]
array_0gnd = []
array_0gnd.append(N_i + N_j)
array_0gnd.append(0)
array_M_0 = []
array_M_0.append(M_i + M_j)
array_M_0.append(0)
array_M_1 = []
array_M_2 = []
array_M_3 = []
array_M_4 = []
array_1st = []
array_2nd = []
array_3rd = []
array_4th = []

def sigma(mass1, mass2):
    sigma_result = 2*math.pi*
    (85*math.pi/(6*math.sqrt(2)))**(2./7.) *
    (G**(2.) * (mass1+mass2)**(10./7.) * mass1**(2./7.) *
    mass2**(2./7.))/(c**(10./7.))
    return sigma_result.to(u.parsec**(32./7)/u.yr**(18./7.))

def R_s(M):
    return (2*G*M)/(c**2)

def Total_Mass(m_1, m_2):
    a_0 = R_s(m_1).to(u.AU) + R_s(m_2).to(u.AU)
    a_1=0.1*u.AU
    E_ij = (G*m_1*m_2/2)*(1/a_1 - 1/a_0)

```

```

    return (m_1+m_2) + E_ij/(c**2.)

def GAMMA(r1 , r0 ):
    a=(r1**(2.)/((R.value)**(2.)))
    b=(r0**(2.)/(R**(2.)))
    return (r1**(2.))*((1.+(a))**(-9./4.))*
            (1./((1. + a)**(1./4.)))
            + 1./((1. + b)**(1./4.))**((3./7.))
            - abs((1./((1. + a)**(1./4.)))
            - 1./((1. + b)**(1./4.))))**((3./7.))

def phi_3(r , M_cluster):
    return (G*M_cluster/R)*((1 + r**(2.)/R**(2.))**(-1./2.))

def n_3(r , m_sp, M_sp):#m_sp mass specie
    return (rho_3(r , M_sp)/m_sp)

def rho_3(r , M_sp): #M_sp Total Mass de especie
    return ((3*M_sp)/(4*(math.pi)*(R**(3.))))*
            ((1 + r**(2.)/R**(2.))**(-5./2.))

def vel_3(r , N_sp, m_sp, M_sp, M_cluster):
    return (alfa**(1./2.))*
            (N_sp**(1./2.))*
            ((phi_3(r , M_cluster)**(3.))/(n_3(r ,m_sp,M_sp)**(1./2.)))

def integrand_n_i(r1):
    a=(r1**(2.)/((R.value)**(2.)))
    return (r1**(2.))*((1 + a)**(-5./2.))

```

```

final_mass = []
M_t_final = []
etiqueta_final = []
N_t_final = []
t_f_m = []
generation=1
index = ['a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f', 'g',
         'h', 'i', 'j', 'k', 'l', 'm', 'n',
         'o', 'p', 'q', 'r', 's', 't', 'u',
         'v', 'w', 'x', 'y', 'z']
while generation < 5:
    M_cluster = 0
    for i in M_tot_catalog:
        M_cluster += i
    print("GENERATION_NUMBER", generation)
    print("M_cluster", M_cluster)
    print(list(combinations(etiqueta_mass, 2)), "\n")
    cont = 0
    sum_N = 0
    for i, j, k in zip(range(len(list(combinations(mass_catalog, 2)))),
                      range(len(list(combinations(etiqueta_mass, 2)))),
                      range(len(list(combinations(N_tot_catalog, 2))))):
        mass_input = list(combinations(mass_catalog, 2))[i]
        name_mass = list(combinations(etiqueta_mass, 2))[j]
        N_tot_input = list(combinations(N_tot_catalog, 2))[k]
        name_m_1 = name_mass[0]
        m_1 = mass_input[0] * u.M_sun
        N_1 = N_tot_input[0]
        name_m_2 = name_mass[1]
        m_2 = mass_input[1] * u.M_sun

```

```

N_2 = N_tot_input[1]
m_final = Total_Mass(m_1, m_2)
final_mass.append(m_final)
cont_pbh = 0
new_label_mass = str("m_")+str(generation)+str(index[cont])
N_sp_1 = N_1
M_sp_1 = N_sp_1 * m_1
N_sp_2 = N_2
M_sp_2 = N_sp_2 * m_2
alfa = ((4*24*(2**(1/2))*(R**(2.)))/(math.pi*(G**(5.))
*(M_cluster**(5.))*(2**(17./2.))))
betha = (3./(4*math.pi*(R**(3.))))
etha = (G*M_cluster/R)
for h in r :
    r0 = h*u.parsec
    I, err = quad(GAMMA, h+interval, 0., args=(r0,))
    ctes = (14*math.pi/3.)*sigma(m_1,m_2)*(alfa**(-2./7.))
        *(betha**(9./7.))*(etha**(-12./7.))*(N_sp_1)
        *(n_3(r0, m_2, M_sp_2)
        /vel_3(r0, N_sp_2, m_2, M_sp_2, M_cluster))
    merger = (I*ctes*(u.parsec**(3.))).to(u.yr**(-1))
    GAMMA_value = merger
    Prob = GAMMA_value*(t_1_gn*u.yr)
    Int_res, err = quad(integrand_n_i, h, h+interval)
    N_sp_r = 3.*(2**(3./2.))*N_sp_1*(R**(-3.))
        *Int_res*u.parsec**3.
    Num_Col = N_sp_r*Prob
    cont_pbh = cont_pbh + round(float(Num_Col))
cont+=1
N_t_final.append(cont_pbh)

```

```

M_t_final.append(cont_pbh*m_final)
etiqueta_final.append(new_label_mass)
for i, j, k, l in zip(final_mass, M_t_final,
                      etiqueta_final, N_t_final):
    mass_catalog.append(i.value)
    M_tot_catalog.append(j)
    etiqueta_mass.append(k)
    N_tot_catalog.append(l)
generation +=1
final_mass.clear()
M_t_final.clear()
N_t_final.clear()
etiqueta_final.clear()

age_time = [z_20/u.yr,
            t_1_gn+z_20/u.yr,
            t_2_gn + t_1_gn+z_20/u.yr,
            t_3_gn + t_2_gn + t_1_gn+z_20/u.yr,
            t_4_gn + t_3_gn + t_2_gn + t_1_gn+z_20/u.yr]

pl.xlim(0, 13.5)
pl.ylim(0,2e4)
pl.ylabel('Number of PBHs')
pl.xlabel('Gyr')
#pl.plot(age_time, array_sp_1)
pl.plot(age_timeb, array_sp_1, label='_nolegend_')
pl.plot(age_timeb, array_sp_2, color='orange')
pl.plot(age_timeb, array_sp_3, color='violet')
pl.plot(age_timeb, array_sp_4, color='olive')
pl.plot(age_timeb, array_sp_5, color='cyan')
pl.plot(age_timeb, array_sp_6)

```

```

pl.plot(age_timeb, array_sp_7)
pl.axvline(x=(t_1_gnb+z_20.value), color="black",
           linestyle="dashed")
pl.axvline(x=(t_2_gnb+t_1_gnb+z_20.value), color="black",
           linestyle="dashed")
pl.axvline(x=(t_3_gnb+t_2_gnb+t_1_gnb+z_20.value),
           color="black", linestyle="dashed")
pl.yscale('symlog')
pl.legend( ('1.8_⊔M_{\odot}$', '2.7_⊔M_{\odot}$',
           '3.5_⊔M_{\odot}$', '4.3_⊔M_{\odot}$',
           '5.1_⊔M_{\odot}$', '5.8_⊔M_{\odot}$'),
          loc = 'upper_⊔left')
pl.show()

```

# Bibliografía

- [1] B. Abbott y col. «Searching for a Stochastic Background of Gravitational Waves with LIGO». En: *Astrophys. J.* 659 (2007), págs. 918-930. DOI: 10.1086/511329. arXiv: astro-ph/0608606.
- [2] B. P. Abbott y col. «Search for Subsolar Mass Ultracompact Binaries in Advanced LIGO's Second Observing Run». En: *Phys. Rev. Lett.* 123.16 (2019), pág. 161102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.161102. arXiv: 1904.08976 [astro-ph.CO].
- [3] B.P. Abbott y col. «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger». En: *Physical Review Letters* 116.6 (feb. de 2016). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.116.061102. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [4] R. Abbott y col. «GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run». En: *Phys. Rev. X* 11 (2021), pág. 021053. DOI: 10.1103/PhysRevX.11.021053. arXiv: 2010.14527 [gr-qc].
- [5] R. Abbott y col. «GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run». En: (nov. de 2021). arXiv: 2111.03606 [gr-qc].
- [6] R. Abbott y col. «Observation of Gravitational Waves from Two Neutron Star–Black Hole Coalescences». En: *Astrophys. J. Lett.* 915.1 (2021), pág. L5. DOI: 10.3847/2041-8213/ac082e. arXiv: 2106.15163 [astro-ph.HE].

- [7] R. Abbott y col. «Observation of Gravitational Waves from Two Neutron Star–Black Hole Coalescences». En: *Astrophys. J. Lett.* 915.1 (2021), pág. L5. DOI: 10.3847/2041-8213/ac082e. arXiv: 2106.15163 [astro-ph.HE].
- [8] Bhaskar Agarwal y col. «Ubiquitous seeding of supermassive black holes by direct collapse». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 425.4 (sep. de 2012), págs. 2854-2871. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2012.21651.x. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21651.x>.
- [9] N. Aghanim y col. «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters». En: *Astron. Astrophys.* 641 (2020). [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)], A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].
- [10] Kazunori Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation». En: *Astrophys. J. Lett.* 875.1 (2019), pág. L2. DOI: 10.3847/2041-8213/ab0c96. arXiv: 1906.11239 [astro-ph.IM].
- [11] Yacine Ali-Haïmoud, Ely D. Kovetz y Marc Kamionkowski. «Merger rate of primordial black-hole binaries». En: *Phys. Rev. D* 96.12 (2017), pág. 123523. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.123523. arXiv: 1709.06576 [astro-ph.CO].
- [12] James M. Bardeen, B. Carter y S. W. Hawking. «The Four laws of black hole mechanics». En: *Commun. Math. Phys.* 31 (1973), págs. 161-170. DOI: 10.1007/BF01645742.
- [13] Daniel Baumann. *Cosmology*. Cambridge University Press, jul. de 2022. DOI: 10.1017/9781108937092.
- [14] M. C. Begelman, M. Volonteri y M. J. Rees. «Formation of supermassive black holes by direct collapse in pre-galactic haloes». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 370.1 (jul. de 2006), págs. 289-298. ISSN: 1365-2966. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2006.10467.x. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10467.x>.

- [15] Gianfranco Bertone, Dan Hooper y Joseph Silk. «Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints». En: *Phys. Rept.* 405 (2005), págs. 279-390. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.08.031. arXiv: hep-ph/0404175.
- [16] Pierre Boldrini y col. «Cusp-to-core transition in low-mass dwarf galaxies induced by dynamical heating of cold dark matter by primordial black holes». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 492.4 (2020), págs. 5218-5225. DOI: 10.1093/mnras/staa150. arXiv: 1909.07395 [astro-ph.CO].
- [17] B. J. Carr. «Cosmological gravitational waves - Their origin and consequences». En: *aap* 89.1-2 (sep. de 1980), págs. 6-21.
- [18] Bernard Carr y Florian Kuhnel. «Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments». En: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 70 (2020), págs. 355-394. DOI: 10.1146/annurev-nucl-050520-125911. arXiv: 2006.02838 [astro-ph.CO].
- [19] Bernard Carr, Florian Kuhnel y Marit Sandstad. «Primordial Black Holes as Dark Matter». En: *Phys. Rev. D* 94.8 (2016), pág. 083504. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.083504. arXiv: 1607.06077 [astro-ph.CO].
- [20] Bernard Carr y Florian Kühnel. «Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments». En: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 70.1 (2020), págs. 355-394. DOI: 10.1146/annurev-nucl-050520-125911.
- [21] Bernard Carr y col. «Constraints on primordial black holes». En: *Rept. Prog. Phys.* 84.11 (2021), pág. 116902. DOI: 10.1088/1361-6633/ac1e31. arXiv: 2002.12778 [astro-ph.CO].
- [22] Bernard J. Carr. «The Primordial black hole mass spectrum». En: *Astrophys. J.* 201 (1975), págs. 1-19. DOI: 10.1086/153853.
- [23] Sean M. Carroll y col. «Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?» En: *Phys. Rev. D* 70 (4 2004), pág. 043528. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.043528. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.043528>.
- [24] B. Carter. «Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom». En: *Phys. Rev. Lett.* 26 (1971), págs. 331-333. DOI: 10.1103/PhysRevLett.26.331.

- [25] Marco Celoria y col. «Lecture notes on black hole binary astrophysics». En: jul. de 2018. arXiv: 1807.11489 [astro-ph.GA].
- [26] John Archibald Wheeler Charles W. Misner Kip S. Thorne. *Gravitation*. First Edition. Physics Series. W. H. Freeman, 1973.
- [27] Ilias Cholis y col. «Orbital eccentricities in primordial black hole binaries». En: *Phys. Rev. D* 94.8 (2016), pág. 084013. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.084013. arXiv: 1606.07437 [astro-ph.HE].
- [28] Erik Curiel. «The many definitions of a black hole». En: *Nature Astronomy* 3.1 (ene. de 2019), págs. 27-34. ISSN: 2397-3366. DOI: 10.1038/s41550-018-0602-1. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41550-018-0602-1>.
- [29] Ioannis Dalianis y Chris Kouvaris. «Gravitational waves from density perturbations in an early matter domination era». En: *JCAP* 07 (2021), pág. 046. DOI: 10.1088/1475-7516/2021/07/046. arXiv: 2012.09255 [astro-ph.CO].
- [30] V. De Luca y col. «Primordial Black Holes Confront LIGO/Virgo data: Current situation». En: *JCAP* 06 (2020), pág. 044. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/06/044. arXiv: 2005.05641 [astro-ph.CO].
- [31] V. De Luca y col. «The evolution of primordial black holes and their final observable spins». En: *JCAP* 04 (2020), pág. 052. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/04/052. arXiv: 2003.02778 [astro-ph.CO].
- [32] Fabian Dodelson Scott;Schmidt. *Modern cosmology*. 2nd Edition. Academic Press, 2021. URL: [libgen.li/file.php?md5=9bbc7431e95f3d5abe012644c00699d3](http://libgen.li/file.php?md5=9bbc7431e95f3d5abe012644c00699d3).
- [33] A. Drlica-Wagner y col. «Eight Ultra-faint Galaxy Candidates Discovered in Year Two of the Dark Energy Survey». En: *Astrophys. J.* 813.2 (2015), pág. 109. DOI: 10.1088/0004-637X/813/2/109. arXiv: 1508.03622 [astro-ph.GA].
- [34] Encieh Erfani, Hamed Kameli y Shant Baghran. «Primordial black holes in the excursion set theory». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 505.2 (mayo de 2021), págs. 1787-1793. ISSN: 1365-2966. DOI: 10.1093/mnras/stab1403. URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stab1403>.

- [35] Raphael Errani, Jorge Penarrubia y Matthew G Walker. «Systematics in virial mass estimators for pressure-supported systems». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 481.4 (sep. de 2018), págs. 5073-5090. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1093/mnras/sty2505.
- [36] Andrew C. Fabian y Anthony N. Lasenby. «Astrophysical Black Holes». En: (nov. de 2019). arXiv: 1911.04305 [astro-ph.HE].
- [37] Nicolas Fernandez y Stefano Profumo. «Unraveling the origin of black holes from effective spin measurements with LIGO-Virgo». En: *JCAP* 08 (2019), pág. 022. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/08/022. arXiv: 1905.13019 [astro-ph.HE].
- [38] Juan Garcia-Bellido, Santiago Jaraba y Sachiko Kuroyanagi. «The stochastic gravitational wave background from close hyperbolic encounters of primordial black holes in dense clusters». En: *Phys. Dark Univ.* 36 (2022), pág. 101009. DOI: 10.1016/j.dark.2022.101009. arXiv: 2109.11376 [gr-qc].
- [39] Juan García-Bellido. «Massive Primordial Black Holes as Dark Matter and their detection with Gravitational Waves». En: *J. Phys. Conf. Ser.* 840.1 (2017). Ed. por Domencio Giardini y Philippe Jetzer, pág. 012032. DOI: 10.1088/1742-6596/840/1/012032. arXiv: 1702.08275 [astro-ph.CO].
- [40] Davide Gerosa y Emanuele Berti. «Are merging black holes born from stellar collapse or previous mergers?» En: *Phys. Rev. D* 95.12 (2017), pág. 124046. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.124046. arXiv: 1703.06223 [gr-qc].
- [41] Anne M. Green y Bradley J. Kavanagh. «Primordial Black Holes as a dark matter candidate». En: *J. Phys. G* 48.4 (2021), pág. 043001. DOI: 10.1088/1361-6471/abc534. arXiv: 2007.10722 [astro-ph.CO].
- [42] Mike Guidry. *Modern General Relativity*. Cambridge University Press, ene. de 2019. DOI: 10.1017/9781108181938. URL: <https://doi.org/10.1017/9781108181938>.
- [43] Alan H. Guth. «The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems». En: *Phys. Rev. D* 23 (1981). Ed. por Li-Zhi Fang y R. Ruffini, págs. 347-356. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.

- [44] Shahen Hacyan. *Relatividad para estudiantes de F-Sica*. en. Texto Cientifico Universitario. Fondo de Cultura Economica, ago. de 2014.
- [45] S. W. Hawking. «Gravitational radiation from colliding black holes». En: *Phys. Rev. Lett.* 26 (1971), págs. 1344-1346. DOI: 10.1103/PhysRevLett.26.1344.
- [46] S. W. Hawking. «Particle Creation by Black Holes». En: *Commun. Math. Phys.* 43 (1975). Ed. por G. W. Gibbons y S. W. Hawking. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)], págs. 199-220. DOI: 10.1007/BF02345020.
- [47] Stephen Hawking. «Gravitationally collapsed objects of very low mass». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 152 (1971), pág. 75.
- [48] Nicolas Herman y col. «Detecting planetary-mass primordial black holes with resonant electromagnetic gravitational-wave detectors». En: *Phys. Rev. D* 104.2 (2021), pág. 023524. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.023524. arXiv: 2012.12189 [gr-qc].
- [49] Daisuke Homma y col. «Searches for New Milky Way Satellites from the First Two Years of Data of the Subaru/Hyper Suprime-Cam Survey: Discovery of Cetus~III». En: *Publ. Astron. Soc. Jap.* 70 (2018), pág. 18. DOI: 10.1093/pasj/psx050. arXiv: 1704.05977 [astro-ph.GA].
- [50] Kaiki Taro Inoue y Takahiro Tanaka. «Gravitational waves from sublunar mass primordial black hole binaries: A New probe of extradimensions». En: *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003), pág. 021101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.021101. arXiv: gr-qc/0303058.
- [51] A. Jenkins y col. «The Mass function of dark matter halos». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 321 (2001), pág. 372. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2001.04029.x. arXiv: astro-ph/0005260.
- [52] *KAGRA website*. URL: <https://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/>.
- [53] Shasvath J. Kapadia y col. «Prospects for probing ultralight primordial black holes using the stochastic gravitational-wave background induced by primordial curvature perturbations». En: *Phys. Rev. D* 101.12 (2020), pág. 123535. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.123535. arXiv: 2005.05693 [astro-ph.CO].

- [54] Shasvath J. Kapadia y col. «Search for the Stochastic Gravitational-wave Background Induced by Primordial Curvature Perturbations in LIGO's Second Observing Run». En: *Astrophys. J. Lett.* 910.1 (2021), pág. L4. DOI: 10.3847/2041-8213/abe86e. arXiv: 2009.05514 [gr-qc].
- [55] Benjamin P. M. Laevens y col. «Sagittarius II, Draco II and Laevens 3: Three new Milky way Satellites Discovered in the Pan-starrs 1  $3\pi$  Survey». En: *Astrophys. J.* 813.1 (2015), pág. 44. DOI: 10.1088/0004-637X/813/1/44. arXiv: 1507.07564 [astro-ph.GA].
- [56] Lifshitz. Landau. *The classical theory of fields Volume 2*. 4.<sup>a</sup> ed. Butterworth Heinemann, 1994.
- [57] Andrew R. Liddle. *An introduction to modern cosmology*. 1998.
- [58] Andrew R. Liddle y David H. Lyth. «COBE, gravitational waves, inflation and extended inflation». En: *Phys. Lett. B* 291 (1992), págs. 391-398. DOI: 10.1016/0370-2693(92)91393-N. arXiv: astro-ph/9208007.
- [59] Andrew R. Liddle y David H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. 2000.
- [60] Andrew R. Liddle, Paul Parsons y John D. Barrow. «Formalizing the slow roll approximation in inflation». En: *Phys. Rev. D* 50 (1994), págs. 7222-7232. DOI: 10.1103/PhysRevD.50.7222. arXiv: astro-ph/9408015.
- [61] *LIGO Lab: Caltech: MIT*. URL: <https://www.ligo.caltech.edu/>.
- [62] Andrei D. Linde. «A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems». En: *Phys. Lett. B* 108 (1982). Ed. por Li-Zhi Fang y R. Ruffini, págs. 389-393. DOI: 10.1016/0370-2693(82)91219-9.
- [63] Malcolm S. Longair. *Galaxy Formation*. Astronomy and Astrophysics Library. Heidelberg, Germany: Springer, 2008. DOI: 10.1007/978-3-540-73478-9.

- [64] A. N. Lasenby M. P. Hobson G. P. Efstathiou. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2005. URL: [libgen.li/file.php?md5=4cbfa4b6fdaf806864ad54128f77aa34](http://libgen.li/file.php?md5=4cbfa4b6fdaf806864ad54128f77aa34).
- [65] Piero Madau y Martin J. Rees. «Massive Black Holes as Population III Remnants». En: *The Astrophysical Journal* 551.1 (abr. de 2001), págs. L27-L30. ISSN: 0004-637X. DOI: 10.1086/319848. URL: <http://dx.doi.org/10.1086/319848>.
- [66] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, USA, 2007.
- [67] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. Illustrated. Oxford University Press, USA, 2018.
- [68] Michela Mapelli y col. «Hierarchical black hole mergers in young, globular and nuclear star clusters: the effect of metallicity, spin and cluster properties». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 505.1 (2021), págs. 339-358. DOI: 10.1093/mnras/stab1334. arXiv: 2103.05016 [astro-ph.HE].
- [69] N. F. Martin y col. «A Keck/DEIMOS spectroscopic survey of faint Galactic satellites: Searching for the least massive dwarf galaxies». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 380 (2007), págs. 281-300. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2007.12055.x. arXiv: 0705.4622 [astro-ph].
- [70] Matteo Martinelli y col. «Dancing in the dark: detecting a population of distant primordial black holes». En: (mayo de 2022). arXiv: 2205.02639 [astro-ph.CO].
- [71] Pawel O. Mazur. «Black hole uniqueness theorems». En: (dic. de 2000). arXiv: hep-th/0101012.
- [72] Alan W. McConnachie. «The observed properties of dwarf galaxies in and around the Local Group». En: *Astron. J.* 144 (2012), pág. 4. DOI: 10.1088/0004-6256/144/1/4. arXiv: 1204.1562 [astro-ph.CO].
- [73] B. McKernan y col. «Intermediate-mass black holes in AGN discs – II. Model predictions and observational constraints». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 441.1 (2014), págs. 900-909. DOI: 10.1093/mnras/stu553. arXiv: 1403.6433 [astro-ph.GA].

- [74] P. Meszaros. «Primeval black holes and galaxy formation.» En: *aap* 38.1 (ene. de 1975), págs. 5-13.
- [75] Jordi Miralda-Escude y Andrew Gould. «A cluster of black holes at the galactic center». En: *Astrophys. J.* 545 (2000), pág. 847. DOI: 10.1086/317837. arXiv: astro-ph/0003269.
- [76] Takashi Nakamura y col. «Gravitational Waves from Coalescing Black Hole MA-CHO Binaries». En: *The Astrophysical Journal* 487.2 (oct. de 1997), págs. L139-L142. ISSN: 0004-637X. DOI: 10.1086/310886. URL: <http://dx.doi.org/10.1086/310886>.
- [77] Hiroya Nishikawa y col. «Primordial-black-hole mergers in dark-matter spikes». En: *Phys. Rev. D* 99.4 (2019), pág. 043533. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.043533. arXiv: 1708.08449 [astro-ph.CO].
- [78] J. R. Oppenheimer y H. Snyder. «On Continued Gravitational Contraction». En: *Physical Review* 56.5 (sep. de 1939), págs. 455-459. DOI: 10.1103/physrev.56.455. URL: <https://doi.org/10.1103/physrev.56.455>.
- [79] P. J. E. Peebles y Bharat Ratra. «The cosmological constant and dark energy». En: *Rev. Mod. Phys.* 75 (2 2003), págs. 559-606. DOI: 10.1103/RevModPhys.75.559. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.559>.
- [80] P. C. Peters y J. Mathews. «Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit». En: *Physical Review* 131.1 (jul. de 1963), págs. 435-440. DOI: 10.1103/physrev.131.435. URL: <https://doi.org/10.1103/physrev.131.435>.
- [81] J. Pinochet. «El límite de Chandrasekhar para principiantes». En: *Revista Mexicana de Física E.* (2020), págs. 125-132. DOI: 10.31349/RevMexFisE.17.125.
- [82] Henry C. Plummer. «On the problem of distribution in globular star clusters». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 71 (1911), págs. 460-470.
- [83] Simon F. Portegies Zwart y Stephen L. W. McMillan. «The Runaway Growth of Intermediate-Mass Black Holes in Dense Star Clusters». En: *The Astrophysi-*

- cal Journal* 576.2 (sep. de 2002), págs. 899-907. ISSN: 1538-4357. DOI: 10.1086/341798. URL: <http://dx.doi.org/10.1086/341798>.
- [84] Gerald D. Quinlan y Stuart L. Shapiro. «Dynamical evolution of dense clusters of compact stars». En: *The Astrophysical Journal* 343 (ago. de 1989), pág. 725. DOI: 10.1086/167745. URL: <https://doi.org/10.1086/167745>.
- [85] Carl L. Rodriguez y col. «GW190412 as a Third-Generation Black Hole Merger from a Super Star Cluster». En: *Astrophys. J. Lett.* 896.1 (2020), pág. L10. DOI: 10.3847/2041-8213/ab961d. arXiv: 2005.04239 [astro-ph.HE].
- [86] B. Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 1970. DOI: 10.1017/9781316651087.
- [87] Misao Sasaki y col. «Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914». En: *Phys. Rev. Lett.* 117.6 (2016). [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 121, 059901 (2018)], pág. 061101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.061101. arXiv: 1603.08338 [astro-ph.CO].
- [88] Misao Sasaki y col. «Primordial black holes—perspectives in gravitational wave astronomy». En: *Classical and Quantum Gravity* 35.6 (feb. de 2018), pág. 063001. ISSN: 1361-6382. DOI: 10.1088/1361-6382/aaa7b4. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aaa7b4>.
- [89] Zachary Schutte, Amy E. Reines y Jenny E. Greene. «The Black Hole–Bulge Mass Relation Including Dwarf Galaxies Hosting Active Galactic Nuclei». En: *The Astrophysical Journal* 887.2 (dic. de 2019), pág. 245. ISSN: 1538-4357. DOI: 10.3847/1538-4357/ab35dd. URL: <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab35dd>.
- [90] J. A. Sellwood y A. Kosowsky. «Does dark matter exist?» En: *ASP Conf. Ser.* 240 (2001). Ed. por John E. Hibbard y Michael van Gorkom, pág. 311. arXiv: astro-ph/0009074.
- [91] Joseph Silk. «Feedback by Massive Black Holes in Gas-rich Dwarf Galaxies». En: *The Astrophysical Journal* 839.1 (abr. de 2017), pág. L13. DOI: 10.3847/2041-8213/aa67da. URL: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa67da>.

- [92] Joshua D. Simon. «The Faintest Dwarf Galaxies». En: *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 57.1 (2019), págs. 375-415. DOI: 10.1146/annurev-astro-091918-104453. arXiv: 1901.05465 [astro-ph.GA].
- [93] Joshua D. Simon y Marla Geha. «The Kinematics of the Ultra-Faint Milky Way Satellites: Solving the Missing Satellite Problem». En: *Astrophys. J.* 670 (2007), págs. 313-331. DOI: 10.1086/521816. arXiv: 0706.0516 [astro-ph].
- [94] Lyman Spitzer. *Dynamical evolution of globular clusters*. 1987.
- [95] Viktor D. Stasenko y Alexander A. Kirillov. «The Merger Rate of Black Holes in a Primordial Black Hole Cluster». En: *Physics* 3.2 (mayo de 2021), págs. 372-378. ISSN: 2624-8174. DOI: 10.3390/physics3020026. URL: <http://dx.doi.org/10.3390/physics3020026>.
- [96] Jakob Stegmann y col. «Improved constraints from ultra-faint dwarf galaxies on primordial black holes as dark matter». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 492.4 (2020), págs. 5247-5260. DOI: 10.1093/mnras/staa170. arXiv: 1910.04793 [astro-ph.GA].
- [97] G. F. R. Ellis Stephen W. Hawking. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1975.
- [98] Jeremy L. Tinker y col. «Toward a halo mass function for precision cosmology: The Limits of universality». En: *Astrophys. J.* 688 (2008), págs. 709-728. DOI: 10.1086/591439. arXiv: 0803.2706 [astro-ph].
- [99] Ville Vaskonen y Hardi Veermäe. «Lower bound on the primordial black hole merger rate». En: *Phys. Rev. D* 101.4 (2020), pág. 043015. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.043015. arXiv: 1908.09752 [astro-ph.CO].
- [100] *Virgo website*. URL: <https://www.virgo-gw.eu/#about>.
- [101] Sai Wang y col. «Constraints on the Primordial Black Hole Abundance from the First Advanced LIGO Observation Run Using the Stochastic Gravitational-Wave Background». En: *Phys. Rev. Lett.* 120.19 (2018), pág. 191102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.191102. arXiv: 1610.08725 [astro-ph.CO].

- [102] Beth Willman y col. «A New Milky Way companion: Unusual globular cluster or extreme dwarf satellite?» En: *Astron. J.* 129 (2005), págs. 2692-2700. DOI: 10.1086/430214. arXiv: astro-ph/0410416.
- [103] S. E. Woosley y Alexander Heger. «The Pair-Instability Mass Gap for Black Holes». En: *Astrophys. J. Lett.* 912.2 (2021), pág. L31. DOI: 10.3847/2041-8213/abf2c4. arXiv: 2103.07933 [astro-ph.SR].
- [104] Qirong Zhu y col. «Primordial Black Holes as Dark Matter: Constraints From Compact Ultra-Faint Dwarfs». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 476.1 (2018), págs. 2-11. DOI: 10.1093/mnras/sty079. arXiv: 1710.05032 [astro-ph.CO].