BREVE MANUAL DE LÓGICA MATEMATICA

Herramienta básica para el análisis lógico de argumentos

Marzo 2017
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
Coord. Diana Lizbeth Ruiz Rincón

Herramienta básica para el análisis lógico de argumentos

ISBN: 978-607-8459-49-0

9 786078 459490

Primera edición, 2017

Licenciatura en Filosofía
Facultad de Humanidades, Campus VI
Universidad Autónoma de Chiapas
Boulevard Belisario Domínguez, Kilómetro 1081, Sin Número, Terán
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, C.P. 29050.
ISBN: 987-607-8459-49-0

<u>Esta obra fue revisada por pares académicos</u>

Autores:
Diana Lizbeth Ruiz Rincón
Manuel Arnulfo Cañas Muñoz
Luis Alberto Canela Morales
Coord.:
Diana Lizbeth Ruiz Rincón

Prólogo:
Atocha Aliseda Llera | Instituto de Investigaciones Filosóficas | UNAM
Revisor pedagógico:
Francisco Gabriel Ruiz Sosa

Diseño de portada:
Giovanni Alejandro Cruz Montesinos

Tabla de contenido

Prólogo

¿En qué consiste la Lógica?

En un nivel muy general, la Lógica, en tanto disciplina de estudio, trata del pensamiento, más en particular, del razonamiento. Esto es, trata del proceso de obtención de conclusiones a partir de suposiciones o hechos. Este proceso intelectual encuentra su formulación más precisa en el concepto de *consecuencia lógica*, del cual se ocupa extensamente el manual que el lector tiene en sus manos.

Sin embargo, no hay una única caracterización de lo que es la Lógica. En un contexto muy amplio, podemos concebir a la Lógica como una *herramienta de la razón* (Aliseda 2014), algunos incluso la definen como el *sistema inmunológico de la mente* (van Benthem, 2006), aquella herramienta cognitiva que usamos para sacar conclusiones a partir de nuestras creencias y que nos ayuda a movernos en un mundo dinámico e incierto. Hay varias maneras de usar esta herramienta, lo cual se constata por la existencia de diversos sistemas lógicos, algunos de ellos deductivos, otros inductivos y más aún, otros abductivos, por usar una clasificación de acuerdo a la fuerza argumentativa con la que las premisas se relacionan con la conclusión.

Antes de adentrarnos en las características particulares de este manual, indiquemos algunos momentos importantes en la historia de la lógica deductiva. Tiene sus orígenes en la Grecia antigua en el trabajo de Aristóteles, quien presentó sus estudios sobre el razonamiento en su *lógica silogística*. La teoría del silogismo se ocupa de la caracterización de las inferencias válidas mediante esquemas de argumento, esto es, secuencias de enunciados formados por premisas y conclusión, de tal forma que se garantiza la verdad de la conclusión cuando se supone la verdad de las premisas. Existen 15 formas válidas de silogismos categóricos (véase página 11), esto es, argumentos que modelan el razonamiento correcto, en el que las conclusiones se siguen necesaria e inevitablemente de las premisas, las cuales representan suposiciones o hechos.

La escuela Aristotélica sentó las bases de una larga tradición filosófica para la Lógica, que parecía no tener ya mucho más que aportar más allá de un conjunto de patrones para realizar inferencias correctas. Sin embargo, en palabras de los autores (dos lógicos, dos filósofos y un lingüista) de un libro introductorio de Lógica, encontramos lo siguiente:

> **ñ[***a] medida que transcurría la Edad Media, el desarrollo de la lógica pareció detenerse gradualmente. En 1789, en el prefacio de la segunda edición de la* ***Crítica de la Razón Pura****, Immanuel Kant escribió que la lógica no había perdido terreno desde Aristóteles, pero que tampoco lo había ganado y que había indicios de que ya no avanzaría más. Pero Kant se equivocó. Cien años antes, el matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quien trabajaba en la misma época y bajo el mismo aislamiento que la escuela de Port-Royal, propuso un programa para la lógica y desarrolló ideas que siguen estando presentes en las teorías lógicas modernas. Sugirió que se desarrollara una* ***caracteristica universalis****, un lenguaje universal en el cual pudiera representarse el lenguaje en forma directa, sin las ambigüedades, vaguedades y figuras del habla que son propias de los lenguajes naturales.*” (Gamut, p. 13)

El estudio de la Lógica tuvo que esperar hasta entrado el siglo XIX cuando Gottlob Frege (1848-1925) le da un carácter formal con su *cálculo de predicados*, el cual ofrece un lenguaje simbólico mucho más poderoso que el de la *lógica silogística*. Posteriormente en el siglo XX, el estudio de la lógica se matematizó a tal grado que constituyó lo que hoy conocemos como la *lógica matemática*.

Hoy día los dos enfoques predominantes de la investigación en Lógica son el sintáctico y el semántico. El primero caracteriza las nociones de derivación formal, sistema axiomático y prueba. El segundo se ocupa de las nociones de verdad, interpretación y consecuencia lógica. Uno de los resultados más importantes de la lógica matemática del siglo XX es el de Kurt Gödel (1906-1978), quien demostró la equivalencia entre las nociones de derivabilidad formal y consecuencia lógica, con su *teorema de completud*, el cual dice en su versión original que toda fórmula universalmente válida es teorema (el reverso de este resultado ya era conocido como el *teorema de correctud*). Estos dos enfoques de la lógica matemática clásica constituyen disciplinas bien establecidas y con agendas propias, éstas son, *la teoría de la demostración* y *la teoría de modelos*. Por otro lado, estudios en *lógicas no clásicas* han marcado una nueva tradición formal que tiene aplicaciones fuera de la matemática en campos como la computación y la lingüística formal.

Sobre el Manual

Paso ahora a comentar el manual que el lector tiene en sus manos. Este texto se encarga de sistemas deductivos y está dividido en tres partes, la primera presenta los elementos básicos de la lógica matemática: argumentos, traducción al lenguaje formal y métodos de comprobación. La partes restantes se dedican a la lógica proposicional y al cálculo de predicados de primer orden, los dos sistemas lógicos por excelencia de la lógica matemática. A continuación resalto algunas cuestiones que se tratan de manera especial, todas ellas claves en la enseñanza de la Lógica.

La primera de ellas tiene que ver con la distinción entre verdad y validez, dos conceptos básicos pero que frecuentemente se confunden en la enseñanza de la Lógica. Se dice de proposiciones, expresadas mediante fórmulas, que son verdaderas o falsas, pero no de argumentos, éstos son válidos o inválidos con respecto a un sistema Lógico. La pregunta que surge naturalmente es la siguiente: ¿cuál es la relación entre verdad y validez? La noción de validez es una noción condicional y dice así: *si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión necesariamente también lo es*. Esto es, se garantiza la transmisión de la verdad, pero no la verdad misma de las proposiciones en cuestión. Así, podemos encontrarnos con argumentos válidos compuestos por premisas que de hecho sean falsas y con argumentos inválidos con premisas que de hecho sean verdaderas. Ejemplos de éstos los encontrará el lector en las páginas que siguen, en donde los autores además enuncian:

> *La tarea de la lógica es desestimar aquellos argumentos que se presentan como válidos pero no lo son; ya sea porque no se corresponden con los esquemas de un argumento válido o por que no son susceptibles de presentar validez o invalidez (pseudo-argumentos).*
>
> *Determinar la verdad, es tarea de las ciencias y sus métodos. Empero, es competencia de la lógica y sus métodos determinar si un argumento es válido o inválido, ello con el objeto de razonar y expresar correctamente alguna afirmación sobre un tema cualesquiera. (*p.6*).*

Así queda claro que desde la antigüedad, la tarea de la Lógica ha sido la de caracterizar el *razonar correctamente*, el proceso de obtención de conclusiones a partir de suposiciones o hechos, como ya lo afirmé al inicio de este Prólogo.

Hay otros aspectos a resaltar que distinguen a este manual, pero que solo mencionaré brevemente. Introduce el cálculo de predicados de primer orden como un *cálculo funcional*, de manera muy moderna pero en el sentido original de Frege. Asimismo, motiva la necesidad del cálculo de predicados mostrando la limitación expresiva del lenguaje de la lógica proposicional; a través de ejemplos que muestran que este tipo de formalización es insuficiente para dar cuenta de la invalidez de algunos argumentos. Finalmente, profundiza en una explicación de la traducción formal de los enunciados cuantificados universalmente como formas condicionales. Es bien sabido que para muchos estudiantes, lo intuitivo es formalizarlos como conjunciones. Esta explicación obliga al lector a involucrarse en una discusión filosófica, lo cual es poco usual en introducciones a la Lógica y que en este caso tiene que ver con el significado de *existencia* en el cálculo de predicados. Una de las diferencias esenciales con la silogística Aristotélica, es que si bien en ésta última es posible representar enunciados cuantificados (aunque solo de manera simple), no admite que los dominios del discurso, como ahora los llamamos, puedan ser vacíos. Dicho de otra manera, Aristóteles solo admitía términos no vacíos en sus silogismos.

Resalto estos aspectos porque cada uno de ellos es clave en el aprendizaje de la Lógica y aquí se abordan de manera muy clara. Pero no me detengo en ninguno de ellos, para que el lector pueda ya disfrutar de este manual como debe ser, a través de su lectura y de la realización de los ejercicios que se ofrecen a lo largo de todo el texto.

La enseñanza de la Lógica en un nivel básico, como se ofrece en este texto, es de una utilidad invaluable para todo aquel que busque en su formación intelectual adentrarse en una disciplina que estudia el razonamiento correcto, en el sentido original de Aristóteles, pero con las herramientas modernas que distinguen a nuestra disciplina.

Felicito a los autores por la labor que realizan como maestros, quienes además, con toda su pasión y compromiso con la enseñanza de la Lógica, han redactado este manual para sus alumnos y con ello han ido más allá de sus obligaciones y han realzado la importancia del estudio preciso del razonamiento en nuestro país, México. Les agradezco mucho haberme hecho partícipe de su texto honrándome con este espacio.

Dra. Atocha Aliseda
http://www.filosoficas.unam.mx/~atocha/home.html
Universidad Nacional Autónoma de México

Capítulo I: ELEMENTOS BÁSICOS DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

En un sentido estricto, la lógica en tanto ciencia, o disciplina, se puede definir como el estudio de la *consecuencia lógica*[1].

Para poder elaborar una definición propia de la lógica como disciplina, debemos atender las particularidades de los elementos que la componen. En este caso, la lógica formal es un *lenguaje artificial* compuesto como todo lenguaje, por una dimensión semántica (un vocabulario: conectivos lógicos, *variables sentenciales* o *variables proposicionales*), y por una dimensión sintáctica (reglas sintácticas para determinar cuándo una sucesión de símbolos constituye una fórmula lógica). Sin embargo, el *lenguaje artificial* de la lógica formal no es abordado desde este mismo lenguaje, sino desde el *lenguaje natural*, en nuestro caso el español. Es por lo anterior que al *lenguaje natural* también se le llama *lenguaje vehículo*, porque es por medio de ese lenguaje que nos acercamos a nuestro *lenguaje objeto*, la lógica formal. En este sentido, el *lenguaje natural* como medio por el cual el pensamiento de un sujeto encuentra su vía de expresividad, conformará la materia prima para el trabajo de la lógica.

Ahora bien, no hablamos de todas las expresiones del pensamiento, tomando como criterio de discernimiento las cualidades

[1] La lógica también puede ser definida como el estudio de los conjuntos consistentes de proposiciones (Manzano, 2004). Pero estas dos definiciones no se deben entender como excluyentes, porque la *consecuencia lógica* se puede definir por medio de la *consistencia lógica*. Si la proposición “C” es *consecuencia lógica* del conjunto de proposiciones “Γ”, entonces la unión del conjunto “Γ” y la negación de “C” es un conjunto *inconsistente*.

de ambigüedad y vaguedad que posee el *lenguaje natural,* debemos poner atención y ser cautelosos si queremos emplear los métodos de la lógica de manera efectiva, esto es, utilizándolos para el análisis de argumentos.

Los argumentos que son de interés para la lógica matemática son los argumentos *deductivos*. En dichos argumentos la relación entre las premisas y la conclusión es especial, es necesaria. En una *deducción* la verdad de la conclusión se infiere necesariamente a partir de la verdad de las premisas.

Entonces, si la lógica se avoca a la revisión de argumentos *deductivos*, éstos deberán presentarse en su *forma argumental*, donde sea posible distinguirlos de otros tipos de argumentos *no-deductivos* y de argumentos *deductivos inválidos* (falacias).

Los argumentos *no-deductivos* como la *inducción enumerativa*, la *abducción*, la *inferencia a la mejor explicación*, los *argumentos por analogía*, entre otros, no son abordados en la lógica matemática. En todos los argumentos mencionados sólo se puede concluir que la conclusión es probablemente verdadera.

El modo en el que los argumentos son construidos, a partir de una serie de premisas que apoyan a la conclusión, se denomina *forma argumental,* y es definida por Copi (2001, p. 35) como *cualquier arreglo de símbolos que contiene variables sentenciales, de modo que al sustituir enunciados por las variables sentenciales* **ï** *siendo siempre el mismo enunciado que reemplaza a la misma variable- el resultado es un argumento.*

Entenderemos entonces para el presente material, a la lógica como una herramienta básica para el análisis de argumentos deductivos; es decir, los usos de la lógica matemática serán el instrumento que nos permitirá evaluar si un argumento es válido o inválido.

1.1 EL ARGUMENTO, RAZÓN Y ESTRUCTURA

Entenderemos por un *razonamiento* aquel proceso mental por el cual el sujeto cognoscente elabora un argumento sobre cualquier tema en donde, si se tiene una creencia sobre determinado tema, se tratará de dar razones para fundamentar dicha creencia. Éste *dar razones* podría hacerse las veces a manera de persuasión, o como una justificación.

Por ejemplo:

Juan cree que la mascota de su vecino se escapó porque éste le daba muy mala vida, y enfrentando a su vecino le dice:

- Vecino, yo creo que tu gato se escapó porque le dabas muy mala vida, sin alimentarlo, sin bañarlo, sin llevarlo al veterinario.

Por otro lado, el vecino responde a Juan:

- Mi gato no escapó. Si mi gato hubiera escapado por la mala vida que le daba, no hubiera esperado los tres años que lleva viviendo conmigo. Si lleva tres años viviendo conmigo sin haber tenido una situación similar antes, entonces él vivía feliz a mi lado. Si él era alimentado, bañado y cuidado, y además era feliz viviendo conmigo, entonces seguramente no escapó, si no que me fue robado.

El ejemplo anterior, elaborado en dos momentos, responde a estas maneras de intentar dar razones. Por un lado, Juan arguye que el gato del vecino se escapó por la mala vida que recibía, mientras que en el segundo caso, el vecino, refiere una serie de puntos dando razones para justificar a Juan que su creencia es falsa.

En este caso intentamos mostrar la forma en la que los argumentos pueden presentársenos en la vida cotidiana, sin embargo, no toda expresión configura un argumento. Entonces se debe precisar lo que sea un argumento:

- Un *argumento* está compuesto por una <u>conclusión</u> que es apoyada por una o más *premisas*.

Para entender mejor la definición anterior, precisemos algunos aspectos relevantes para la comprensión de lo que sea un razonamiento argumentado.

En primer lugar, debemos entender que el lenguaje (principalmente oral) se forma por una serie de palabras que llamaremos *términos*. El término (idea, palabra, concepto, categoría) puede ser simple o compuesto. Por ejemplo: el término *Padre*, que hace referencia a aquel hombre que ha ayudado a engendrar a un hijo, correspondería a un término simple; mientras que el término *Padre-Padre* cuya referencia indica a el *Padre* que ha ayudado a engendrar un hijo que a su vez se ha convertido en *Padre* al ayudar a engendrar un hijo, es un término que no se usa, en su lugar el término *Abuelo*, correspondería a esa definición (el padre de un padre), correspondiendo con ello a un término compuesto.

Luego, para hablar de las cosas, o referir las propiedades de un objeto, usamos esos *términos* y los colocamos (de acuerdo a las reglas gramaticales de la lengua en cuestión) de forma tal que nos permita construir *proposiciones*. Una *proposición* es una afirmación de que algo es (o no es) el caso. Por ejemplo:

- La tarde está soleada
- Juan trota en el campo
- El viento sopla fuerte

Las *proposiciones*, a diferencia de las oraciones, comparten un mismo significado, independientemente de la lengua en la que se expresen; sumando a ello la característica de ser verdaderas o falsas.

Es decir, podemos salir y experimentar directamente si "La tarde esta soleada", en caso de ser así, nuestra *proposición* resultaría verdadera; pero en caso de encontrarnos en invierno, difícilmente correspondería a un marco de verdad dicha *proposición* expresada.

Por su parte, hemos dicho que un *argumento* está compuesto por una conclusión que es apoyada por una o más premisas. Tanto las conclusiones como las premisas se presentan en forma de *proposiciones*, por lo que en este punto era importante tenerlas claras.

La conclusión, vendría a ser la *proposición* central del *argumento* que intenta defenderse con el apoyo de otras *proposiciones* llamadas premisas.

Extraído de la respuesta de Toño a Juan en el ejemplo anterior, podemos distinguir los elementos de un argumento:

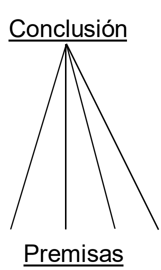


Figura 1: Estructura de un argumento

Conclusión

- **Mi gato fue robado.**

Premisas

- Mi gato no escapó.
- Si mi gato hubiera escapado por la mala vida que le daba, no hubiera esperado los tres años que lleva viviendo conmigo**.**
- Si lleva tres años viviendo conmigo sin haber tenido una situación similar antes, entonces él vivía feliz a mi lado.
- Si él era alimentado, bañado y cuidado, y además era feliz viviendo conmigo, entonces seguramente no escapó, si no que me fue robado.

Resulta imprescindible apuntar que la lógica no tiene como objetivo determinar la verdad de las *proposiciones*. La tarea de la lógica es desestimar aquellos argumentos que se presentan como válidos pero no lo son; ya sea porque no se corresponden con los esquemas de un argumento válido o por que no son susceptibles de presentar validez o invalidez (*pseudo-argumentos*).

Determinar la verdad, es tarea de las ciencias y sus métodos. Empero, es competencia de la lógica y sus métodos determinar si un argumento es válido o inválido, ello con el objeto de razonar y expresar correctamente alguna afirmación sobre un tema cualesquiera.

1.1.1 Consecuencia lógica

Una vez aclarado que la lógica matemática aborda únicamente argumentos deductivos, es necesario precisar cuándo esas deducciones son válidas, y cuándo no lo son.

La noción *argumento lógicamente válido*, está determinada por el concepto *consecuencia lógica*, es decir, un argumento es lógicamente válido si, y sólo si, su conclusión es *consecuencia lógica* de sus premisas. En términos formales, en lógica matemática se utiliza el símbolo "⊨" para la *consecuencia lógica*.

$\Gamma \vDash C$	Se puede leer de la siguiente forma: La proposición "C" es *consecuencia lógica* del conjunto de proposiciones "Γ".

La definición de *consecuencia lógica* puede ser enunciada de distintas formas.

$\Gamma \vDash C$	Cada vez que las proposiciones de "Γ" son verdaderas, "C" también es verdadera. Si las premisas que conforman "Γ" son verdaderas, entonces "C" también lo es. No es posible que las premisas que conforman "Γ" sean verdaderas, y la conclusión falsa. El conjunto formado por "Γ" y la negación de "C" es inconsistente.

Para este manual utilizaremos la definición de María Manzano (2004):

> Decimos que un enunciado es consecuencia de un conjunto de enunciados que sirven de hipótesis si, y sólo si, no existe ninguna situación en la que cada una de las hipótesis sea verdadera y la conclusión sea falsa; cuando el conjunto formado por las hipótesis y la negación de la conclusión sea inconsistente. (Manzano, 2004: p. 15)

1.1.2 Argumentos y pseudo-argumentos

Para intentar dar respuesta a la interrogante que cierra la sección anterior, hablaremos primero de los que llamaremos en primera instancia *pseudo-argumentos*, como formas de engañar o intentar persuadir al interlocutor, en las cuales podemos profundizar con los más variados ejemplos de la vida cotidiana. Pero para precisar el tipo de *pseudo-argumentos* que nos implica mayor atención y cuidado haremos uso de tres nociones similares:

Paralogismo: Se toma una opinión como una creencia verdadera, pero no hay la intensión de engañar. Por ejemplo:

- Viajar en avión es más tranquilo que viajar en autobús (lo dice alguien que nunca ha viajado en avión ni sentido las turbulencias).

Sofisma: Se tiene la intención de persuadir al interlocutor respecto a alguna idea o creencia, también conocida como retórica, cuya finalidad intencional consiste en engañar a partir del uso de recursos discursivos no estructurados en una forma argumental.

- La verdad está en el pueblo que sabe dirigirse por su líder y otorga a éste el poder de las voluntades sumadas hacia la consecución de su fin.

Falacias: Presenta una *forma argumental* pero con un error de razonamiento. Ello quiere decir que podría o no haber una intención deliberada al engaño o persuasión, sin embargo, cuando las premisas no apoyan a la conclusión, o la conclusión no se sigue de las premisas, se sigue que es un razonamiento inválido.

Existen *falacias formales* e *informales*. *Las falacias formales* son aquellas que tienen que ver con el mal uso de símbolos lógicos o construcciones de formas argumentales. Mientras que las *falacias informales* son errores de razonamiento que se producen cuando da un mal manejo del contenido (y sentido) de las *proposiciones* en la construcción de argumentos.

Éstas últimas se agrupan de acuerdo a las clasificaciones de distintos autores, pero en un sentido general podremos encontrar <u>falacias de atinencia</u> o <u>relevancia</u>, <u>de ambigüedad</u> y <u>otras</u>.

El tema de las *falacias* suele ser muy amplio y se acompaña de una serie de ejemplos que complejiza su abordaje y profundización. Para este momento inicial, no ubicaremos una distinción esencial entre *paralogismo*, *falacia* y *sofisma*, pues al final de cuentas se tratan de argumentos inválidos.

1.1.3 Silogística

Aristóteles desarrolla el *silogismo* como una *forma argumental*. El *silogismo* se caracteriza por tener tres términos: término menor, término medio y término mayor. Y una estructura compuesta por dos premisas que apoyan una conclusión.

- El *término medio* en el silogismo estándar determina la figura silogística de la que se trate, es pues aquel que aparece en ambas premisas, pero no en la conclusión.
- El *término mayor* sería el término predicado de la conclusión, presente como sujeto o bien predicado en cualquiera de las dos premisas.
- El *término menor* será el sujeto de la conclusión, que a su vez aparece en alguna de las premisas, haciendo las veces de sujeto o predicado.

Para una mejor comprensión de este punto, usaremos el ejemplo de Sócrates para precisar la ubicación de los términos.

El ejemplo más común es:

Todos los mortales son hombres
Sócrates es hombre
Por lo tanto, Sócrates es mortal

- El *término medio* correspondería a <u>hombres</u>, pues dicho término se repite en ambas premisas, pero no en la conclusión.
- El *término menor* sería <u>Sócrates</u>, pues aparece como sujeto en la conclusión.
- El *término mayor* será entonces el término <u>mortal</u>, ya que aparece como predicado en la conclusión.

Dichos términos se encontrarán relacionados con su correspondiente premisa. Esto es, el *término mayor* indicará la posición de la *premisa mayor*; mientras que en la *premisa menor* apareceré el *término menor*.

Existen sólo 15 formas válidas de *silogismos* categóricos, probadas por Aristóteles y éstas a su vez se corresponden con cuatro figuras, cuyo desarrollo y explicación será tema de otro texto.

Uno de los aspectos más relevantes de la silogística aristotélica es el uso de cuatro vocales para designar el tipo de proposición de que se trata. Así, cada "letra" (precisada más adelante, en la formalización, como *variable sentencial*) del cuadro de oposición aristotélico se corresponde a los tipos de proposiciones de los silogismos categóricos aristotélicos.

Estas premisas pueden definirse como proposiciones, que por su *cualidad* o *cantidad* se organizan de la siguiente manera:

- Por su *cantidad*, en universales o particulares.
- Por su *cualidad*, en afirmaciones o negaciones.

Dichas proposiciones combinan tanto cualidad como cantidad de la siguiente manera:

A: Proposiciones universales afirmativas (*Todos los abogados son corruptos).*

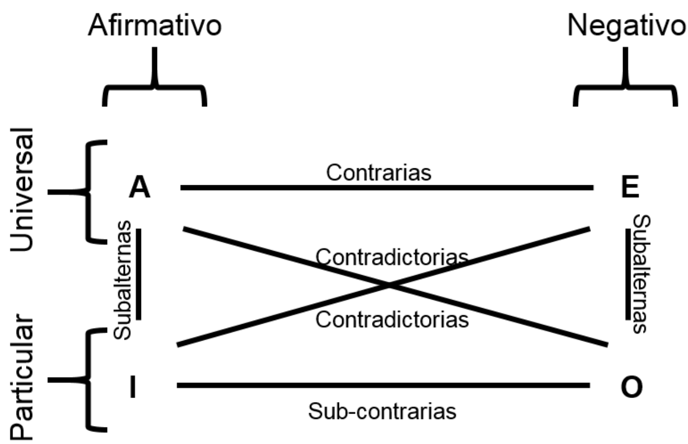
E: Proposiciones universales negativas (*Ningún abogado es corrupto).*

I: Proposiciones particulares afirmativas (*Algunos abogados son corruptos).*

O: Proposiciones particulares negativas (*Algunos abogados no son corruptos).*

El resultado directo de conocer los tipos de proposiciones derivados de la silogística categorial aristotélica, se muestra en el cuadro de oposición, que no sólo representa los tipos de proposiciones, si no las relaciones y conversiones que pueden o no realizarse entre proposiciones *contrarias, subcontrarias, contradictorias y subalternas*, que por su amplitud será abordadas en otro momento.

Figura 2: Cuadro de oposición Aristotélico



1.1.4 Argumentos Simples y compuestos

Retomando el tema de los argumentos, podemos decir que un argumento simple sería una conclusión apoyada por una sola premisa. Mientras que un *argumento compuesto* puede tener más de una conclusión que son apoyadas por más de una premisa.

Un *argumento simple* comprendería una conclusión apoyado por una premisa, mientras que los *argumentos compuestos* (y mayormente complejos) pueden contener uno o más argumentos apoyados por más de una premisa.

1.1.4 Verdad y validez, la distinción funcional

Será tarea de la lógica determinar la validez de un argumento, mientras que es tarea de la ciencia o de la experiencia, determinar la verdad (empírica o material) de una hipótesis o conclusión.

Las *proposiciones* o enunciados poseerán dos posibilidades de atributos, verdad o falsedad, pero nunca ambos. Puedo decir: - Mañana será lunes; y al realizar la verificación, siendo hoy domingo, esta proposición resulta verdadera. Empero, si esgrimiera la misma proposición un día jueves, entonces sin lugar a dudas, su valor sería falso.

En el sentido funcional del texto, la validez se referirá a un argumento que cumple con todas las reglas de la lógica y supera las pruebas formales de validez que le apliquen.

Copi y Cohen (2013) refieren que *la verdad y la falsedad son atributos de las proposiciones o enunciados,* mientras que *la validez e invalidez son atributos de los argumentos.*

Podemos encontrarnos con a) argumentos válidos con proposiciones verdaderas como el siguiente ejemplo:

a) Todas las aves son ovíparas.
Todos los ovíparos necesitan anidar.
Luego, Todas las aves necesitan anidar.

Pero también podemos encontrarnos con otros tipos de argumentos: b) los argumentos válidos con proposiciones falsas, y c) los argumentos inválidos con proposiciones verdaderas.

b) Todas las ardillas son extraterrestres.
Todos los extraterrestres son zurdos.

Luego, todas las ardillas son zurdas.

Además de que la validez de un argumento no garantiza la verdad de la conclusión, tampoco es condición necesaria que las premisas sean verdaderas para que la conclusión también lo sea.
Un ejemplo en el que el argumento sea válido con premisas falsas y conclusión verdadera.

c) Todos los unicornios son azules.
El cielo es un unicornio.
Luego, el cielo es azul.

1.2 DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE FORMAL

Como el *lenguaje natural* es tan ambiguo, resulta necesario para el lógico contar con un modo de analizar y evaluar argumentos sin perderse en la vaguedad de los discursos.

Por esta razón la lógica matemática ha desarrollado vocabularios especializados para economizar las expresiones lingüísticas a *variables sentenciales* y anular con ello la vaguedad de las proposiciones; además de desarrollar una serie de formular y reglas (métodos) para la validación de argumentos.

La traslación del *lenguaje natural* al *lenguaje formal* puede llamársele formalización, simbolización o traducción. En cualquiera de las acepciones, pasaremos de la expresión: “Laura es política y es honesta” a “P ^ Q”.

1.2.1 Simbología

Cada una de las proposiciones será sustituida por una *variable sentencial*. Las *variables sentenciales* son las letras del alfabeto en mayúsculas, es decir, de la "A" a la "Z". Usualmente se precisan las siguientes:

- P, Q, R, S, T
- A, B, C, D, E

Pero cualquier *variable sentencial* puede sustituir una proposición. Por ejemplo:
El cielo es azul = M
Ramiro es calvo = X
La bicicleta de Jesús es nueva = R

Conectivos lógicos
En un argumento podemos encontrarnos con una serie de *conectivos* que sirven para unir *proposiciones*, por ejemplo:

- El cielo es azul <u>y</u> la bicicleta de juan es nueva.
- Ramiro es calvo <u>o</u> no es calvo.

O usando el ejemplo de Toño:

- Mi novia es fiel. Si ella fuera <u>in</u>fiel, <u>entonces</u> habría evidencia que demostraría el perjurio. Si <u>no</u> hubiera evidencia que demostrara que <u>no</u> es fiel, entonces tendría que verlo por mis propios ojos. Pero como <u>no</u> lo he visto por mis propios ojos <u>y</u> ella es una buena chica, <u>entonces</u> ella es fiel.

Tenemos pues, dos tipos de conectivos, los *monádicos* y los diádicos. En el caso del conectivo *monádicos*, nos referimos únicamente a la negación. Por su parte los *diádicos*, que unen dos variables nos encontraremos con 4 tipos:

Tabla 1: Conectivos Lógicos

Tipo de conectivo	Nombre	Símbolo	Expresión en el lenguaje natural
Monádico	Negación	¬	No, ni, tampoco, nunca, no es el caso que, no es cierto que, ninguno.
Diádico	Conjunción	^	Y, pero, además, ambos, aunque, también.
	Disyunción	V	O, u, a menos que.
	Implicación material	Ÿ	Si…entonces, luego,
	Bicondicional	ź	Si y sólo si
	Equivalencia lógica[2]	ſ	Equivale a…
	Conclusión	/.:	Por lo tanto, por tanto

Siguiendo pues el ejemplo, es posible sustituir, en este primer ejercicio, todos los conectivos por los símbolos que los sustituirán:

- Mi gato ¬ escapó. Si mi gato hubiera escapado por la mala vida que le daba, → ¬ hubiera esperado los tres años que lleva viviendo conmigo. Si lleva tres años viviendo conmigo sin haber tenido una situación similar antes, → él vivía feliz a mi lado. Si él era alimentado, ^ bañado ^ cuidado, ^ además era feliz viviendo conmigo, → seguramente ¬ escapó, ^ que me fue robado.

Una vez comprendidos los *conectivos lógicos*, es momento de aprender a organizar las premisas y distinguirlas de la conclusión. Para ello, los *signos de agrupación* nos ayudaran a distinguir el inicio y fin de una *proposición*, ya sea simple o compleja. También nos auxilian en el

[2] Conectivo estrictamente lógico.

discernimiento de la relación entre las *variables sentenciales* dentro de una premisa y la ubicación de los conectivos lógicos.

Los *signos de agrupación* son, en orden de apertura y cierre: paréntesis “( )”, corchetes “[ ]” y llaves “{ }”.

- Iniciando por el paréntesis, éste habrá de agrupar dos *variables sentenciales* y un *conectivo diádico*, por ejemplo:
  - (P ^ Q)
  - (A → B)
  - (¬S ↔ T)
- El corchete por su parte, habrá de agrupar dos paréntesis y un *conectivo diádico*. Pero puede darse el caso de agrupar un paréntesis con una *variable sentencia*l, por ejemplo:
  - [(P ^ ¬Q) v (R → S)]
  - [(A ^ B) → ¬(B ^ C)]
  - [V v (X ↔ T)]
- Casi al final, la llave agrupará de a dos corchetes y un *conectivo principal*. Pero puede darse el caso de agrupar un corchete con una *variable sentencial*, por ejemplo:
  - {[(Q ^ P) v (R ↔ S)] →¬[(S ^ P)vT]}
  - {[(P ↔ Q) v R] ^ ¬¬[(A ^ B) → (B ^ C)]}
  - {[(Q ^ R) v (P ^ Q)] → P}

Uno de los aspectos más importantes de los *signos de agrupación*, es que nos permite identificar el *conectivo* principal de la función. Para ello es necesario ubicar el signo de agrupación más amplio, en este caso, las “llaves” (“{}”), y el *conectivo* que una las *proposiciones moleculares* que agrupan los signos de agrupación más amplios, será el *conectivo principa*l.

Para ello será necesario comprender que una *proposición* correspondería a una *variable sentencial*, siempre y cuando sea una proposición simple; por ejemplo:

Llueve = P

Juan es corredor de maratones= P

Pero cuando se trata de una *proposición compuesta*, deberá ponerse atención en los elementos que la componen, pero sobretodo en los *conectivos* que la integran, y que darán claridad respecto a las *variables sentenciales* que sustituirían cada *proposición* y el *conectivo lógico* que deberá unirlas. Por ejemplo:

1. Llueve y hace frío = **P ^ Q**

P= Llueve

Q= Hace frío

2. Juan es corredor de maratones o tiene prisa = **R v S**

R= Juan es corredor de maratones

S= Juan tiene prisa

1.2.2 Reglas

Lo expuesto hasta este punto nos permite referirnos a dos posibilidades en las traducciones o simbolización del *lenguaje natural* al formal. Que se trate de *Formulas Bien Formadas* (FBF) o *Fórmulas Mal Formadas* (FMF).

Las FBF serán aquellas que usen las *variables sentenciales* de acuerdo a las reglas de formación y preferentemente ascendente, utilicen los *conectivos monádicos* y *diádicos* según sea el caso, y hagan uso de los *signos de agrupación* para expresar coherentemente la función traducida.

Por ejemplo: {[(P ^ Q) v (R → S)] → [(T → U) ^ (V ↔ W)]}

Por su parte, las FMF serán aquellas que no sigan las reglas de simbolización.

Por ejemplo: {[(P Q ^) v (→R S)} ¬ [(T → U ^ (V ↔ W)]

1.2.3 Ejercicios

a. Ordena las siguientes funciones de acuerdo a las reglas de las FBF:

FMF	**FBF**
P¬	
PQ^	
(Q)vR	
(T↔)S¬	
ABv	
(P¬vR)	
[P→Q)	
RS→	
PQv	
v[P^Q](R→S]	
[(→AB) ^C]	
(J^K]	
→¬MN()	

b. Identifica el conectivo de las siguientes proposiciones moleculares:

i. Llueve o hace calor ____
ii. Si estudio entonces apruebo el examen ____
iii. Me dejan salir sí y sólo sí barro ____
iv. Bailo y me divierto ____
v. Viajo pero también aprendo ____
vi. Como, luego pienso ____

c. Traduce las siguientes proposiciones moleculares al lenguaje formal

i. Si Ramiro conduce con una velocidad baja, tránsito no tendrá motivo para detenerlo.

____

ii. Paula estudia y trabaja.

____

iii. Si Estela decide ver la televisión toda la noche, entonces no podrá levantarse temprano para presentar su examen. Estela vio televisión toda la noche y no estudio. Luego, Estela no presentó su examen.

____

iv. Mauricio tiene que decidir ente jugar futbol o ir a la iglesia. Si Mauricio decide ir a la iglesia, su amiga Teresa se molestará con él. Pero Teresa no se molestará con Mauricio sólo si él le invita un helado. Luego, Mauricio decide jugar futbol y no invitarle un helado a Teresa.

____

1.3 MÉTODOS DE COMPROBACIÓN

Los *métodos de comprobación* que se presentarán en esta sección son: valor de verdad de una función, *tablas de verdad* (para probar la validez de una *forma argumental*) y *tablas de verdad* (para determinar la *forma sentencial*).

Para realizar los *métodos de comprobación*, debemos tener claro el valor de los conectivos lógicos tanto *monádicos* como *diádicos* en *las proposiciones atómicas o moleculares* que operan. Esto es, de acuerdo al valor de verdad que tenga una *variable sentencial*, el valor resultante del *conectivo lógico* irá variando.

Como se ha mencionado anteriormente, una *proposición* posee dos atributos, puede ser verdadera o falsa, es decir, no hay cabida para la probabilidad o predictibilidad. "Mañana lloverá" será una *proposición* verdadera siempre y cuando se confirme la sentencia, en caso contrario, será falsa.

Ejemplo: "Mañana lloverá", será traducido (al ser una proposición simple) como **P**.

El valor de **P** puede ser o bien **V** (verdadera), o bien **F** (falsa).

Pero cuando nos encontramos con *proposiciones moleculares o compuestas*, en las que participa algún conectivo lógico, el valor (o atributo) de dicha *proposición* lo determinará el *conectivo lógico principal*.

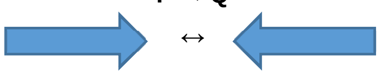
Ejemplo: "Mañana lloverá y Manuel no irá a trabajar", será traducido como **P ^ ¬Q**.

Para determinar el valor de verdad de una *proposición molecular*, debemos entonces conocer el valor del *conectivo lógico*. Y para ello es necesario identificar las posiciones de las *variables sentenciales* dentro de una proposición molecular; a saber: *antecedente* y *consecuente*.

La *variable sentencial* denominada *antecedente* se encontrará colocada siempre al lado izquierdo del conectivo lógico, mientras que la *variable sentencial* llamada *consecuente*, se encontrará al lado derecho del *conectivo*.
Por ejemplo:

Figura 3: Antecedente y consecuente

P → Q



Para los *conectivos lógicos*: conjunción, disyunción, y bicondicional, la *variable proposicional* ubicada antes (del lado izquierdo) del conectivo lógico, llevará por nombre *primer conyunto*, y para la *variable proposicional* ubicada después (del lado derecho) del conectivo lógico, se denominará *segundo coyunto***.** Los mismos casos suceden con los *disyuntos* (disyunción).

El siguiente cuadro es una síntesis de los valores de cada *conectivo lógico* en relación a los valores de las variables *antecedente* y *consecuente*:

Tabla 2: Tabla de Valores de Conectivos Lógicos

		Conectivo lógico monádico	Conectivos lógicos diádicos			
P	**Q**	**¬**	**^**	**v**	**Ÿ**	**ź**
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
F	V		F	V	V	F
F	F		F	F	V	V

Ésta tabla será un recurso muy útil para los *métodos de comprobación* que se abordarán en esta sección, por lo que se sugiere tenerla a la mano para realizar los ejercicios de práctica.

1.3.1 El valor de verdad de una función

Con el objeto de familiarizarnos con la determinación de los valores de los *conectivos lógicos* en las *proposiciones moleculares*, iniciaremos con la búsqueda del valor de verdad de una *función proposicional*.

Pasos:

1. Identifica los valores de las *variables sentenciales* (estos valores de verdad son asignados previamente).
2. Asigna a cada *variable sentencial* dentro de la *proposición molecular* el valor de verdad que le corresponde.
3. Sirviéndote de la *Tabla de valores de conectivos lógicos*, identifica los valores de las *variables sentenciales* correspondientes a los que asignaste a la *proposición molecular* y siguiendo el *conectivo lógico* respectivo, asigna el valor resultante respectivo.
4. Una vez que tengas los primeros valores de verdad asignados, sigue con el nivel dos, hasta llegar al *conectivo principal*.

Ejemplo 1:

P = V

Q = F

(P ^ Q)

| |

V F

\ /

Nivel 1 F

Ejemplo 2:

P y Q= V

A y B= F

(B ^ Q) Ÿ P ↔ A)

| | | |

F V V F

\ / \ /

Nivel 1 F F

Nivel 2 V

Ejercicios: A partir del valor de verdad de una proposición atómica, determina el valor de verdad de la proposición molecular.

1. **P= V**

   Q= F

<u>**(P ^ Q)**</u>

2. **A y B= F**

   C y D= V

   [(A v C) ^ (D v B)]

3. **P y Q= F**

   A y B= V

   [(A ź P) ^ (Q Ÿ B)]

4. **M= V**

   N= F

   [(¬N v¬M) ↔ (MŸ N)] ^(NvN)

1.3.2 Tablas de verdad (para probar la validez de una forma argumental)

Copi (2001) sostiene que:

> Para probar la validez de una forma argumental mediante una tabla de verdad es necesaria una tabla con una columna inicial o guía separada para cada variable sentencial diferente y un renglón separado para cada posible asignación de valores de verdad a las variables sentenciales involucradas. (Pág. 39)

Para elaborar una *tabla de verdad*, debemos:

1) Identificar la *forma argumental*

   Por ejemplo: **[(P Ÿ Q) ^ (Q Ÿ R)]**

   ∴ (P Ÿ R)

2) Identifica las *variables sentenciales* involucradas

   Por ejemplo: **P Q R**

3) Traza una “T” para ubicar las *variables sentenciales*, con espacio suficiente para dar cabida a las instancias de sustitución[3].

Por ejemplo:

4) Ubica en la “T” las *variables sentenciales* del lado izquierdo de la línea vertical y colócalos en el orden ascendente de acuerdo al alfabeto.

Por ejemplo:

P Q R	

Nota: Si pretendes realizar una *tabla de verdad* con la *forma argumental* resultante de una simbolización en la que hiciste uso de la primera letra de cada *proposición*, ordénalos de acuerdo a su aparición. Por ejemplo: Matías es abogado y el Abuelo es un ladrón = M ^ A, deberá ir primero M y luego A.

5) Ahora, del lado derecho de la “T” coloca cada conjunto de premisas en una columna, incluyendo la conclusión.

Por ejemplo:

P Q R	**(P Ÿ Q)**	**(Q Ÿ R)**	**(Q Ÿ R)**

[3] Las instancias de sustitución serán puntualizadas en el Capítulo III.

6) Para determinar el número de renglones se utiliza la fórmula 2^n, en donde “n” es igual al número de *variables sentenciales*.

Por ejemplo: 2^3

	P	Q	R	**(P Ÿ Q)**	**(Q Ÿ R)**	**(Q Ÿ R)**
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

7) Para la asignaciones de valores, comenzaremos con la *variable sentencial* más próxima a la línea vertical de la “T”, alternando V (verdadero) y F (falso).

Por ejemplo: 2^3

	P	Q	R	**(P Ÿ Q)**	**(Q Ÿ R)**	**(Q Ÿ R)**
1			V			
2			F			
3			V			
4			F			
5			V			
6			F			
7			V			
8			F			

8) Para las asignaciones de valores de las siguientes columnas, multiplicamos por dos los valores de la columna inmediatamente anterior, alternando V (verdadero) y F (falso).

Por ejemplo: 2^3

	P	Q	R	**(P Ÿ Q)**	**(Q Ÿ R)**	**(Q Ÿ R)**
1	V	V	V			
2	V	V	F			
3	V	F	V			
4	V	F	F			
5	F	V	V			
6	F	V	F			
7	F	F	V			
8	F	F	F			

9) Haciendo uso de la *Tabla de valores de los conectivos lógicos*, determina el valor de cada forma argumental específica.

Por ejemplo:

	P	Q	R	**(P Ÿ Q)**	**(Q Ÿ R)**	**(P Ÿ R)**
1	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	F	F
3	V	F	V	F	V	V
4	V	F	F	F	V	F
5	F	V	V	V	V	V
6	F	V	F	V	F	V
7	F	F	V	V	V	V
8	F	F	F	V	V	V

10) Con la presencia de al menos un renglón en el que todas las instancias de sustitución sean verdaderas (V), estaremos frente a una *forma argumental* válida.

Por ejemplo:

	P	Q	R	**(P Ÿ Q)**	**(Q Ÿ R)**	**(P Ÿ R)**
1	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	F	F
3	V	F	V	F	V	V
4	V	F	F	F	V	F
5	F	V	V	V	V	V
6	F	V	F	V	F	V
7	F	F	V	V	V	V
8	F	F	F	V	V	V

11) Pero no todas las *formas argumentales* son válidas, por ello resulta importante probar la validez de una forma argumental.

Por ejemplo:

	P	Q	**(P Ÿ Q)**	**¬P**	**¬Q**
1	~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~
2	~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~
3	~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~
4	~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~V~~

-Ejercicios: Determina la validez de la forma argumental de las siguientes funciones:

1) **[(P ^ Q) v R]**
¬R
∴ ¬P

2) **(P ^ Q)**
∴¬P

3) **[(P Ÿ Q) ^ (R Ÿ S)]**
¬Q v ¬S
∴ ¬P v ¬R

4) **(A v ¬Q)**
A
∴¬Q ^ A

5) **[P Ÿ (Q v R)]**
Q v R
∴ ¬P

6) **[(P Ÿ Q) ^ (R Ÿ S)]**
P v R
∴ Q v S

7) **A ^ B**
B ^ C
C v D
∴ D Ÿ A

8) **(A ^ B)**
(¬A v B)
(C ^ A)
∴C

9) **[Q Ÿ (RŸ S)]**
T v R
S Ÿ T
¬R
∴ ¬T

10) **(A ^ B)**
∴ D

1.3.3 Tablas de verdad (para determinar la forma sentencial)

Si bien en el punto anterior conocimos el uso de una *tabla de verdad*, la determinación de la *forma sentencial* es otra de sus funciones, es decir, la *Tabla de Verdad* como método de comprobación de la validez de un argumento, nos permite también determinar su *forma sentencial.*

Se nos pueden presentar tres tipos de argumentos según su forma sentencial: *Tautológicos*, *Contingentes* y *Contradictorios*.

- Los argumentos *tautológicos* son aquellos cuya *forma sentencial* sólo tiene instancias de sustitución verdaderas.
- Los argumentos *contingentes* son aquellos cuya *forma sentencial* tiene instancias de sustitución verdaderas y falsas.
- Los argumentos *contradictorios* son aquellos cuya *forma sentencial* sólo tiene instancias de sustitución falsas.

Dicho de otra manera, los valores resultantes del *conectivo lógico principal* serán los que determinarán la *forma sentencial* de un argumento dado.

Para elaborar una *tabla de verdad* con el objeto de determinar la *forma sentencial* de un argumento dado, debemos:

1) Identificar la *forma argumental*

Por ejemplo: **[(A ^ B) v (B Ÿ C)]**

¬(A v C)

∴ (A Ÿ B)

2) Identifica las *variables sentenciales* involucradas

Por ejemplo: **A B C**

3) Traza una "T" para ubicar las *variables sentenciales*, con espacio suficiente para dar cabida a las instancias de sustitución.

Por ejemplo:

4) Ubica en la “T” las *variables sentenciales* del lado izquierdo de la línea vertical y colócalos en el orden ascendente de acuerdo al alfabeto.

Por ejemplo:

A	B	C	

Nota: Los puntos 1) al 4) son idénticos a los que se utilizan para probar la validez de una forma argumental.

5) Ahora, del lado derecho de la “T” coloca cada conjunto de premisas en una columna, incluyendo la conclusión.

Por ejemplo:

A	B	C	[(A	^	B)	v	(B	→	C)]	^	¬	(A	v	C)	→	(A	→	B)

6) Para determinar el número de renglones se utiliza la fórmula 2^n, en donde “n” es igual al número de *variables sentenciales*.

Por ejemplo: 2^3

A B C	[(A	^	B)	v	(B	→	C)]	^	¬	(A	v	C)	→	(A	→	B)
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																

Nota: Los puntos 7) al 8) son idénticos a los que se utilizan para probar la validez de una *forma argumental*.

7) Para la asignaciones de valores, comenzaremos con la *variable sentencial* más próxima a la línea vertical de la "T", alternando V (verdadero) y F (falso).

Por ejemplo: 2^3

	A	B	C	[(A	^	B)	v	(B	→	C)]	^	¬	(A	v	C)	→	(A	→	B)
1			V																
2			F																
3			V																
4			F																
5			V																
6			F																
7			V																
8			F																

8) Para las asignaciones de valores de las siguientes columnas, multiplicamos por dos los valores de la columna inmediatamente anterior, alternando V (verdadero) y F (falso).

Por ejemplo: 2^3

	A	B	C	[(A	^	B)	v	(B	→	C)]	^	¬	(A	v	C)	→	(A	→	B)
1	V	V	V																
2	V	V	F																
3	V	F	V																
4	V	F	F																
5	F	V	V																
6	F	V	F																
7	F	F	V																
8	F	F	F																

9) Haciendo uso de la *Tabla de valores de los conectivos lógicos*, determina el valor de cada forma argumental específica, teniendo cuidado de ir asignando los valores de los conectivos más próximos a las variables sentenciales.

Una manera de evitar confusiones, es asignar niveles de resolución en el que el número 1 corresponde al conectivo lógico más próximo a las variables sentenciales y va aumentando conforme es necesario despejar los valores de conectivos anteriores.

Por ejemplo:

	A	B	C	{[(A	^	B)	v	(B	→	C)]	^	¬	(A	v	C)}	→	(A	→	B)
1	V	V	V															
2	V	V	F															
3	V	F	V															
4	V	F	F															
5	F	V	V															
6	F	V	F															
7	F	F	V															
8	F	F	F															
					1		**2**		**1**		**2**	**3**		**1**		**4**		**1**	

Nota: Los *conectivos lógicos* marcados en rojo no se encuentran explícitos en la *forma argumental* cuya *forma sentencial* busca determinarse, dichos conectivos se asignaran utilizando dos criterios.

1. Para unir únicamente premisas, se usará el *conectivo lógico* de la conjunción = ^.
2. Para colocar la conclusión luego de ubicadas las premisas, se usará el *conectivo lógico* de la implicación material = Ÿ .

10) Entonces, para determinar la *forma sentencial*, baste con identificar los valores del conectivo principal (en la columna sombreada) para saber si se trata de un argumento *tautológico*, *contingente* o *contradictorio*.

Por ejemplo:

	A	B	C	[(A	^	B)	v	(B	→	C)]	^	¬	(A	v	C)	→	(A	→	B)
1	V	V	V																
2	V	V	F																
3	V	F	V																
4	V	F	F																
5	F	V	V																
6	F	V	F																
7	F	F	V																
8	F	F	F																

- **Resuelve la *tabla de verdad* anterior y determina su *forma sentencial*.**

- **Ejercicios:** Ahora determina la *forma sentencial* de los siguientes argumentos y describe al final que relaciones (convergentes o divergentes) encuentras entre los usos de las tablas de verdad presentadas:

11) [(P ^ Q) v R]
¬R
∴ ¬P

12) (P ^ Q)
∴¬P

13) [(P Ÿ Q)
^ (R Ÿ S)]
¬Q v ¬S
∴¬P v ¬R

14) (A v ¬Q)
A
∴ ¬Q ^ A

15) [P Ÿ (Q v R)]
Q v R
∴ ¬P

16) [(P Ÿ Q)
^ (R Ÿ S)]
P v R
∴Q v S

17) A ^ B
B ^ C
C v D
∴ D Ÿ A

18) (A ^ B)
(¬A v B)
(C ^ A)
∴ C

19) [Q Ÿ (RŸ S)]
T v R
S Ÿ T
¬R
∴ ¬T

20) (A ^ B)
∴ D

Notas:

____

____

____

____

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
__________.

1.3.4 Otros métodos de comprobación

Si bien la lógica (como la ciencia de los argumentos válidos) describe la forma en que debemos argumentar mediante métodos para distinguir entre argumentos válidos e inválidos, las técnicas para probar la validez o invalidez de un argumento nos permiten incrementar nuestra capacidad de argumentar.

Aunque hemos presentado algunos *métodos de comprobación* en éste último apartado del primer capítulo, debemos precisar que existen otros *métodos de comprobación* en los que es necesario utilizar las *reglas inferenciales*, y las *reglas de reemplazo* en orden de construir una *prueba formal de validez*. La construcción de tablas de verdad para determinar validez resulta demasiado compleja cuando el número de *variables sentenciales* incluidas en el argumento evaluado es mayor que 3. En estos casos es necesario recurrir a otros métodos de comprobación.

Copi (2001) sostiene que:

> Cuando los argumentos contienen más de dos o tres enunciados simples diferentes como componentes, se hace difícil y tedioso utilizar tablas de verdad para probar su validez. Un método más conveniente de establecer la validez de algunos argumentos es *deducir* las conclusiones de sus premisas por una secuencia de argumentos más cortos y más elementales que ya se conoce que son válidos. (p. 49)

En los siguientes capítulos de este manual se abordarán la lógica proposicional y el cálculo de predicados de primer orden, donde conoceremos las *reglas de inferencia* y de *reemplazo*; así el uso de esas reglas en argumentos que incluyen *cuantificadores*.

Capítulo II: LÓGICA PROPOSICIONAL

2.1 Objeto de Estudio

La lógica clásica de primer orden es una de las teorías lógicas más estudiadas y aplicadas dentro del terreno de la lógica al grado de ser uno de los pilares fundamentales para el estudio de otras áreas de la lógica contemporánea. También se le conoce como lógica de predicados o cálculo proposicional (o elemental), puesto que su estudio y proceder se hace en un lenguaje formal, es decir, en un lenguaje con una gramática propia y de carácter simbólico y/o matemático. Asimismo, "[…] nos proporciona métodos para distinguir entre argumentos válidos e inválidos" (Fuerte Pérez, 2001 pág. 31).

En esta sección estudiaremos esa *parte* de la lógica enfatizando sus modos de expresión simbólicos y el estudio de sus enunciados simples y enunciados compuestos.

2.1.1 Fundamentos

La lógica proposicional utiliza gran parte de los "recursos lingüístico de los lenguajes de primer orden" (Quesada, 1995 pág. 71). Es por ello que sus discursos son elaborados de manera primitiva, de tal manera que se pueda representar cualquier aserción del mundo-entorno o sobre un estado de cosas. Desde luego, para que la lógica matemática sea simbólica debe traducir estas aserciones (o enunciados) de su lenguaje natural al lenguaje simbólico. Pero ¿qué se entiende por *lenguaje natural*? Por lenguaje natural entendemos toda expresión hecha en el lenguaje cotidiano, esto es, en el lenguaje común y de expresión diaria.

En el lenguaje natural encontramos expresiones del tipo:

1. *Imperativas*: Vete de la casa
2. *Interrogativas*: ¿Cómo te sientes?
3. *Declarativas*: El mar es azul
4. *Exclamativas*: ¡Abre la ventana!

Para el uso simbólico de la lógica, sólo las expresiones, en tanto que pueden ser verdaderas o falsas, pueden ser traducidas al lenguaje simbólico. En lógica matemática las denominaremos *proposiciones.* Estas sentencias u *proposiciones valor de verdad* (enunciados *veritativos funcionales*) son evaluadas según su propiedad de ser simples o complejas. Esto quiere decir que podemos referirnos al valor de verdad (verdadero o falso) del trozo del lenguaje u oraciones completas (complejas) siempre y cuando sean FMF. En ambos casos su valor de verdad, puede ser completamente determinado.

Una proposición es una oración simple cuando o es verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. Esto quiere decir que las proposiciones tienen como característica principal la toma de un valor de verdad. Un ejemplo de oraciones simples pueden ser las siguientes:

1. Está lloviendo.
2. Ayer fue viernes.
3. Tres es un número.
4. La luz es azul.

En cambio, como ya se señaló en el apartado anterior, una oración compleja es una oración o proposición que combina dos o más trozos del lenguaje mediante conectivas proposicionales (“y”, “o”). Su combinación debe dar lugar a FBF. Un ejemplo de oraciones compuestas son las siguientes:

1. Está lloviendo y la carretera está húmeda.
2. La madre naturaleza está cambiando y su evolución es muy compleja.
3. La hija de Sonia es bella, pero maleducada.
4. La filosofía es la ciencia del saber y del conocer.

Reconocer cuáles son proposiciones y cuáles no, constituye el primer momento de nuestro estudio (serie de ejercicios 1). Seguido de la comprensión de los diversos recursos sintácticos (o simbólicos) los cuales nos permitirán hacer los cálculos necesarios para que, una vez asignados los valores de verdad, podamos realizar una prueba formal de validez que involucre conectores lógicos (serie de ejercicios 2). Pero antes, es importante concentrarnos en la construcción de un lenguaje simbólico que nos permita suprimir cualquier tipo de ambigüedad y que por el contrario, enfatice la presentación de argumentos formales con los cuales se logre una claridad en el discurso lógico y logremos dar con un instrumento adecuado para el análisis de argumentos.

2.1.2. Elementos para la elaboración de pruebas de validez

Recordemos algunas nociones básicas: existen tres tipos de elementos para la elaboración de pruebas de validez:

1. Variables proposicionales: *p*, *q*, *r*, *s*, *t* …
2. Conectivas lógicas: ¬ , → , ↔ , v, ^, ≡
3. Signos de agrupación: ( ) , [ ] , { }

Tal como observamos, las variables proposicionales están constituidas por las últimas letras del alfabeto (p, q, r, s, t, u…), aunque no necesariamente sólo estás letras. Así, las variables proposicionales, en el cálculo de enunciados, pueden extenderse mediante la iteración y adición de otros numerables o subíndices, por ejemplo, $p_{1,}$ $t_{1,}$ etc. En general, toda variable proposicional *sustituye* un enunciado.

Por su parte, las conectivas lógicas nos servirán para unir estos enunciados. En la lista inmediatamente anterior, se mostraron los símbolos usados para: negación, implicación o condicional material, bicondicional, conjunción y disyunción, respectivamente. Desde luego, el símbolo puede variar. Así, por ejemplo, Irving Copi (2001) utiliza el símbolo "~"para la negación y para el condicional, el símbolo "⊃". En ambos casos es correcto, pero por mor del claro entendimiento, utilizaremos las conectivas de la lista ya mencionada. Los modos de aparición de estos conectivos lógicos son mencionados en la **tabla 1** (ver página 13).

2.1.3. Proposiciones simples y compuestas. Formalización

Una *proposición* como "El oro es un metal y tiene valor comercial" puede ser considerado como una proposición compuesta, donde "El oro es un metal" y "El oro tiene valor comercial" pueden ser entendidas como *variables proposicionales* y pueden ser presentados, por ejemplo, como "p" y "q" que reemplazarían, en este caso, las proposiciones arriba mencionadas, pero también cualesquiera otras *proposiciones* siempre y cuando mantengan la constante de la conjunción. Otros ejemplos podrían ser: "El perro es un animal cuadrúpedo y además se llama Tiburcio" o "La plata es un metal y tiene valor comercial". En todos estos casos, los esquemas de reemplazo quedan sujetos a las variables que denotadas de manera simbólica se representan así: "p ∧ q". Veámoslo más detenidamente con otros ejemplos:

$\underbrace{\text{Compro fruta}}_{F}\ \underbrace{\text{y}}_{\wedge}\ \underbrace{\text{como helado}}_{H} = F \wedge H$

Visito a mis padres y salgo a pasear = *V* ∵ *S*

V ∵ *S*

Le hablo a mis amigos y entrego mi tarea = *H* ∵ *E*

H ^ *E*

En el caso de proposiciones como “Helena es novia de Miguel o de Ángel”, también puede ser considerada como una proposición compuesta, donde se da el caso de que “Helena sea novia de Miguel” o que “Helena sea novia de Ángel”, pero no ambas a la vez. Ambas proposiciones pueden ser entendidas como variables proposicionales y pueden ser presentadas como “p” o “q”, o cualquier otra letra de sustitución. Al igual que la conjunción, la simbolización de la disyunción puede reemplazar, en este caso, las proposiciones arriba mencionadas, pero también cualesquiera otras proposiciones siempre y cuando mantengan la constante de la disyunción. Otros ejemplos podrían ser: “La rosas o son rojas o son amarillas”, “O el viento o el agua, derribaron un árbol”. En todos estos casos, los esquemas de reemplazo quedan sujetos a las variables que denotadas de manera simbólica se representan así: “p v q”. Veámoslo más detenidamente con otros ejemplos:

1. Como en casa o salgo a comer = *C v S*

   C *v* *S*

2. Veo televisión o voy al cine = *T v C*

   T *v* *C*

3. Viajo a Xalapa o viajo a Puebla = *X v P*

   X *v* *P*

Si quisiéramos negar cualquier disyunto sólo bastaría con introducir el símbolo "¬", y afirmar que "no es el caso que *p* ("¬p") o no es el caso que *q*, según sea el caso. Por ejemplo: "no llueve" se simbolizaría ¬p.

Existe otro esquema proposicional que opera en los casos donde existen dos o más proposiciones ligadas de tal manera que expresan una relación de carácter causal (casi siempre aunque no necesariamente). Las proposiciones se expresan del siguiente modo: "Si Helena pasa el examen, entonces ella podrá ir al cine". En este caso muy particular empleamos lo que se conoce como "condicional", donde el primer elemento (Helena pasa el examen) se denomina *antecedente* y el segundo elemento (Helena va al cine) se denomina *consecuente*.

Una de las reglas que aprenderemos en esta sección dicta que si Helena pasa su examen, se seguiría la consecuencia que sería ir al cine. Pero si no se da lo primero, se cancelaría su consecuencia. Este esquema proposicional del condicional puede ser presentado como un uso conjuntista de dos o más variables proposicionales como "*Si* p *entonces* q", y que al igual que la conjunción y la disyunción, su simbolización puede reemplazar, en este caso, cualquier proposición del tipo *condicional*. Otros ejemplos podrían ser: "Si compras rosas, entonces tu novia se alegrará" o "Si estudias, entonces, aprobarás tu examen". En todos estos casos, los esquemas de reemplazo quedan sujetos a las variables que denotadas de manera simbólica se representan así: "p → q". Veámoslo más detenidamente con otros ejemplos:

1. Si estudio leyes entonces seré abogado *= L* ***Ÿ*** *A*

L ***Ÿ*** *A*

2. Estoy cansado entonces tengo sueño *= C****Ÿ*** *S*

C ***Ÿ*** *S*

3. Si hay fuego entonces hay humo = *F* Ÿ *H*

F Ÿ *H*

2.1.4. Construcción de las clases de fórmulas

Con lo anterior, podemos construir FBF como las que siguen:

1. ¬ *p*
2. *p* v q
3. *p* → *q*
4. (*r* → *s*) ^ (*x* → *z*)

Cada una de ellas se lee del siguiente modo: "no *p*", "*p* o *q*", "*p* implica *q*" y "*r* implica *s* y *x* implica *z*". Lo contrario a una FBF sería una *cadena o conjunto* de símbolos sin ningún tipo de formación u orden sintáctico, por ejemplo: *py* ¬*qr*→, v*s*→*z*. Lo que debemos entender a partir de estos ejemplos, es que la lógica de proposiciones al hacer uso de símbolos y recursos sintácticos facilita la compresión de los argumentos. Siguiendo a Daniel Quesada (1995 pág. 73) y a Max Fernández (1996 pág. 35), podemos delimitar la clase de las fórmulas en las siguientes formas atómicas:

1. Toda letra de enunciado es una fórmula.
2. Si Φ es una fórmula, también lo es ¬Φ.
3. Si Φ, Ψ son fórmulas, también lo son (Φ Λ Ψ), (Φ v Ψ), (Φ → Ψ).
4. Nada es una fórmula a menos que resulte de aplicar las cláusulas 1-3.
5. El conectivo principal en una forma proposicional α, es aquel que en la construcción de α a partir de las fórmulas atómicas se escribe en último término.

En lo que sigue revisaremos las principales reglas de inferencia que nos ayudarán a realizar nuestras pruebas formales de validez. Expondremos una a una con detalle para que no exista confusión alguna. Después, presentaremos las reglas de reemplazo. Hacia el final de este apartado daremos una serie de ejemplos de cómo se simbolizan algunos argumentos. A partir de ahí, el alumno deberá simbolizar y habrá de practicar la regla de inferencia o reemplaza, según corresponda.

2.1.5. Reglas de inferencia

Reglas de Inferencia: son formas básicas o elementales en las que se puede presentar un argumento válido. Si un argumento presenta la misma forma, entonces, se puede establecer su validez a partir de estas reglas.

1) Modus Ponens (MP)

1) $p \rightarrow q$

2) p

/.: q

2) Modus Tollens (MT)

1) $p \rightarrow q$

2) $\neg q$

/.: $\neg p$

3) Silogismo Hipotético (SH)

1) $p \rightarrow q$

2) $q \rightarrow r$

/.: $p \rightarrow r$

4) Silogismo Disyuntivo (SD)

1) $p \vee q$

/.: p

5) Dilema Constructivo (DC)

1) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$

2) $p \vee r$

/.: $q \vee s$

6) Dilema Destructivo (DD)

1) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$

2) $\neg q \vee \neg s$

/.: $\neg p \vee \neg r$

7) Absorción (Abs)

1) $p \rightarrow q$

/.: $p \rightarrow (p \wedge q)$

8) Simplificación

1) $p \wedge q$

/.: p

9) Conjunción

1) p

2) q

/.: $p \wedge q$

10) Adición

1) p

/.: $p \wedge q$

Son ejemplos de algunas simbolizaciones y pruebas con reglas de inferencia las siguientes:

O el presidente emitió una ley de censura, o el regidor notificó con una carta, entonces, el secretario redactó la ley de censura.

La traducción al lenguaje simbólico quedaría del siguiente modo: $P \vee (Q \rightarrow S)$

Expliquemos esquemáticamente:

O	*el presidente emitió una ley*	o	*el regidor notificó con una carta*	entonces	*el secretario redactó la ley*
	P	*V*	(Q	Ÿ	S)

A cada enunciado le corresponde una variable proposicional que lo *sustituye*. El uso del paréntesis resulta claro, las proposiciones muestran un enunciado condicional, donde el regidor funciona como antecedente de la acción del secretario (“redactar la ley”), que quedaría como el consecuente.

Otro ejemplo más:

Si se necesita o el cálculo diferencial o la geometría, entonces, se debe estudiar matemáticas. Sí se necesita el cálculo diferencial y la trigonometría. Entonces se debe estudiar matemáticas.

La traducción al lenguaje simbólico quedaría del siguiente modo:

$$(C \lor G) \rightarrow M$$

$$C \land T \;/.\!:\; M$$

Donde *C significa* ***ñ****se necesita el cálculo diferencial****ò****, G significa* ***ñ****se necesita la geometría****ò****, M significa* ***ñ****se debe estudiar matemáticas****ò****, y T significa* ***ñ****se necesita la trigonometría****ò***

Si quisiéramos probar la validez de este argumento, podríamos utilizar las tablas de verdad, pero nuestro resultado sería casi de 30 renglones, por el número de variables proposicionales (4). En lugar de esto, podemos demostrar la validez de este argumento utilizando las reglas de inferencia. Hagamos una revisión esquemática, es decir, de premisas y conclusiones de nuestro argumento simbolizado. Recordemos que las premisas son aquellas proposiciones de las cuales se deriva una conclusión. En nuestro argumento se tienen las siguientes premisas:

Premisas $(C \vee G) \rightarrow M$

$C \wedge T$

Y como conclusión M

Para llegar o probar esta conclusión procedemos con la prueba:

1. $(C \vee G) \rightarrow M$
2. $C \wedge A$

   /.: M
3. C [Simplificación de 2]
4. C v G [Adición de 3]
5. M [Modus ponens de 1 y 4]

Lo que acabamos de realizar es una prueba de validez que ha demostrado que el argumento es válido. En este caso, las premisas 3 y 4 se obtuvieron de aplicar correctamente las reglas de inferencias. Por ejemplo, la premisa 3 se obtuvo de aplicar la regla de *simplificación* a la premisa 2; y la premisa 4 de aplicar la regla de *adición* a la premisa 3; y la conclusión se obtuvo de aplicar la regla del *modus ponens,* de 4 a 5. Pero ¿por qué se aplicaron dichas reglas y no otras? Veamos más detenidamente y comparemos el esquema de la regla con el argumento que disponemos:

Tabla 3: Esquema de reglas de inferencia y su instancia de sustitución

Esquemas de las reglas de inferencia	Argumento dado (instancias de sustitución)
Simplificación **1) p ’ q** **/.: p**	C ∧ A /.: C
Adición **1) p** **/.: p ’ q**	C /.: C ∧ G
Modus Ponens **1) p Ÿ q** **2) p** **/.: q**	(C v G) → M C v G /.: M

Como podemos observar, es fácilmente detectable que ambos argumentos tienen la misma forma o estructura. Desde luego, la diferencia estriba en las diferentes notaciones (variables) que se están utilizando, por ejemplo: C ∧ A en vez de p ∧ q. Esto último no es importante, pues mientras la estructura sea igual, la regla puede ser aplicable.

Revisemos otro ejemplo, aún más sencillo:

S→T

T→W

/.: S→W

La regla que puede aplicarse es, claramente, el silogismo hipotético. Recordemos su forma:

Silogismo Hipotético (SH)

1) p → q

2) q → r

/.: p → r

La conclusión “S→W” se obtiene de comprobar que el consecuente (T) de la primera premisa es, a su vez, antecedente de la segunda premisa (T→W). Esto nos permite inferir la primera parte de nuestra conclusión (T) y su consecuente, la segunda parte de la conclusión (W).

Pese a la gran utilidad de estas diez reglas de reemplazo, existen argumentos válidos de función de verdad que rebasan sus formas o esquemas expositivos. Cuando se está frente a este tipo de argumentos se requiere del uso de nuevas reglas que enseguida conoceremos.

Para Fuerte Pérez (2001 pág. 88): “Las reglas de reemplazo son las formas básicas en que pueden ser sustituidas unas proposiciones por otras. Es así que: las expresiones lógicamente equivalentes pueden sustituirse unas por otras en todos los lugares donde aparezcan”. Es decir, puede sustituirse la proposición en su totalidad o sólo una parte de ella. Enseguida, se exponen las diez reglas de reemplazo.

2.1.6. Reglas de reemplazo

11) Teoremas de Morgan	**12) Conmutación**
⌐ (p ∧ q) ≡ (⌐ p v ⌐q)	(p v q) ≡ (q v p)
⌐ (p v q) ≡ (⌐ p ∧ ⌐ q)	(p ∧ q) ≡ (q ∧ p)
13) Asociación	**14) Distribución**
[p v (q v r)] ≡ [(p v q) v r]	[p v (q ∧ r)] ≡ [(p v q) ∧ (p v r)]
[p ∧ (q ∧ r)] ≡ [(p ∧ q) ∧ r]	[p ∧ (q v r)] ≡ [(p ∧ q) v (p ∧ r)]

15) Doble negación:

$p \equiv \neg\neg q$

16) Transposición

$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$

17) Implicación material

$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

18) Equivalencia material

$[(p \equiv q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

$[(p \equiv q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$

19) Exportación

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

20) Tautología

$p \equiv v\ (p \vee p)$

$p \equiv (p \wedge p)$

Un ejemplo claro de la insuficiencia de las reglas de reemplazo, es el siguiente argumento válido:

$C \wedge D$

/.: D

Bajo ninguna prueba de reemplazo, podría ser probado este argumento. Sin embargo, utilizando una regla de reemplazo, el argumento se prueba fácilmente. Veamos más detenidamente y comparemos, al igual que el caso anterior, el esquema de la regla con el argumento que tenemos:

Tabla 4: Esquema de conmutación y su respectiva instancia de sustitución

Esquema de la conmutación	Esquema dado (instancia de sustitución)
(p v q) ſ (q v p) **(p ' q) ſ (q ' p)**	C ∧ D

En el esquema de la conmutación el conjunto binario de las variables proposicionales (p ∧ q) es equivalente (≡) al conjunto binario de las variables proposicionales (q ∧ p). Con lo anterior, la relación conmutativa establece, entonces, que en el caso de la conjunción y la disyunción se tienen los mismos valores de verdad si conmutamos una proposición y otra. La prueba formal de validez para el argumento:

C ∧ D
/.: D

Se construye del siguiente modo:

1. C ∧ D
2. /.: D
3. D ∧ C Conmutación de 1
4. D   Simplificación de 3

Veamos un ejemplo más:

1. S→T
2. ⌐R→⌐T
3. /:. ⌐(S ∧ ⌐R)

La prueba formal de validez para el argumento, se construye del siguiente modo:

1. P→T
2. ⌐R→⌐T
3. /:. ⌐(T ∧ ⌐R)
4. T→R Transposición de 2
5. P→R Silogismo hipotético de 1, 4
6. ⌐P v R Implicación material de 5
7. ⌐(P ∧ ⌐R) De Morgan de 6

Como se puede notar, las reglas de reemplazo son de gran utilidad para la construcción de pruebas formales de validez. En la siguiente sección de este capítulo, el estudiante de lógica deberá resolver una serie de ejercicios y pruebas hasta lograr una mayor comprensión de las mismas.

2.2. Ejercicios

Serie de ejercicios 1. Identificar proposiciones.

1) ¡Miguel es muy tonto!	
2) El Xoloescuintle es mexicano.	
3) La tierra es redonda.	
4) Busca al perro.	
5) 7 y 3 son números primos.	
6) ¿Santiago es tu nombre?	
7) El pato es negro.	
8) Hace calor.	
9) Es invierno y cae la nieve.	
10) La mesa es cuadrada y bonita.	
11) Me caes muy mal.	
12) Luis y José son amigos.	
13) El autobús tiene corriente eléctrica.	
14) Las frutas son saludables y nutritivas.	
15) La pera y las uvas son frutas.	
16) El perro es un animal cuadrúpedo.	
17) Alemania e Italia son países de la Unión Europea.	
18) Ese anuncio dice puras mentiras.	
19) México es un gran país.	
20) Ernesto es uruguayo.	

Serie de ejercicios 2. Simbolizar las proposiciones anteriores.

1) Miguel es muy joven y atlético.

2) El Xolocoescuintle es un perro mexicano.

3) La tierra es redonda y está cubierta de agua.

4) El león es carnívoro.

5) Si 7 y 3 son números primos entonces 4 y 6 son números pares.

6) El carro no es azul.

7) Ni los gansos, ni los cines, ni los patos son verdes.

8) Si el calor es fuerte, entonces, sudaré mucho.

9) Es invierno, cae la nieve y hace frío.

10) La mesa es cuadrada y bonita.

11) El enojo, la ira y la crueldad son malos sentimientos.

12) Luis y José son amigos.

13) El autobús no tiene corriente eléctrica.

14) Las frutas no son saludables ni nutritivas.

15) La pera y las uvas son productos comestibles.

16) Si "Dino" es un perro entonces "Dino" es un animal cuadrúpedo.

17) Alemania, Francia, España e Italia son países de la Unión Europea.

18) O vamos al cine o vamos a pasear.

19) Si vamos a pasear, entonces vamos al parque.

20) Ernesto o es mexicano o es colombiano.

Serie de ejercicios 2.2.1. Simbolizar los siguientes argumentos.

1. Si la constitución es la ley suprema de un país y si todos los demás códigos son secundarios a la constitución, entonces, el código escolar es una ley secundaria.

____

2. El código civil no es una ley y la constitución no deriva de ella, por tanto ninguna es obligatoria.

____

3. Si el sabio es el único hombre que puede vivir con poco y ser feliz. Por lo tanto, el filósofo que es sabio es feliz.

____

4. Dado que la buena literatura es complicada, y puesto que los maestros no saben comunicarla o ellos mismos no la leen, es claro que los jóvenes no leerán.

____

5. La ignorancia genera soberbia y pereza. La disciplina genera conocimiento y respeto. Lo anterior demuestra que la sabiduría y la disciplina te hacen virtuoso.

____

6. Si dices que nunca has hecho nada malo, entonces estás mintiendo y si mientes entonces eres una mala persona. Y si eres una mala persona, entonces no puedes amar a nadie.

____

7. Si en mi imaginación habita un unicornio y el unicornio se aparece en mi casa, entonces, me sucedió algo muy extraño. Si me topo una sirena, es seguro que tendremos un mal día. O bien el unicornio que habita en mi imaginación se apareció en mi casa o me topo con una sirena. Por lo tanto, me sucederá algo extraño o tendré un mal día.

____

8. Sólo hay dos formatos de libros: digitales y físicos. Los libros son nuevos o usados. Si el libro es usado, entonces el libro es físico. Si es digital, es un libro nuevo. En caso de que el libro sea nuevo o usado, entonces es diccionario. Si es un diccionario, entonces es un diccionario de idiomas.

____

9. Si un león se enoja, entonces te quedas mudo y si te quedas mudo, entonces no puedes más que rezar a Dios y así no ser devorado. Por lo tanto, si un león se enfada, se debe rezar a Dios o serás devorado.

10. Si se necesita o la citología o la inmunología, entonces, se debe estudiar biología. Si se necesita la citología y la anatomía, entonces se debe estudiar biología.

Serie de ejercicios 2.2.3 Realizar las pruebas formales de validez de argumentos anteriores, así como de los argumentos siguientes.

1) $p \rightarrow q$
2) $r \rightarrow s$
3) $p \vee r$
4) $p \rightarrow \neg s$
5) $r \rightarrow \neg q$ /.: $q \leftrightarrow \neg s$

1) $T \vee (E \rightarrow D)$
2) $T \rightarrow C$
3) $(E \rightarrow G) \rightarrow (D \rightarrow I)$
4) $(\neg T \wedge \neg C) \rightarrow (\neg D \rightarrow G)$
5) $\neg C$
6) $\neg I \vee \neg G$/:.$\neg D \vee \neg E$

Notas:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

________________________.

Capítulo III: EL CÁLCULO DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN

3.1 EL CÁLCULO DE PREDICADOS, UNA DEFINICIÓN FUNCIONAL

El *Cálculo de predicados* ha recibido una multitud de nombres distintos dentro de los diversos manuales y tratados de lógica. Algunos de estos nombres son: *Lógica de primer orden, Lógica de funciones proposicionales*, *Cálculo de funciones proposicionales*, *Cálculo funcional*, *Lógica de predicados*, *Lógica de cuantificadores*, entre otros. Dado lo anterior es necesario aclarar algunas distinciones en torno a estos nombres, con el objetivo de obtener una idea clara del rasgo fundamental que distingue al *Cálculo de predicados* de otras áreas y aspectos de la *Lógica matemática*: tomar al predicado de una proposición como una *función proposicional*.

Para clarificar el concepto *función proposicional* es necesario remitirnos el concepto mismo de *función*, porque tomar a los predicados como *funciones proposicionales* consiste en utilizarlos como *funciones*. Tomemos la definición de función que ofrece William Granville en *Cálculo diferencial e integral* (2012):

> Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.
> Casi todos los problemas científicos tratan con cantidades y relaciones de esta naturaleza, y en la experiencia de la vida diaria nos encontramos constantemente con situaciones en las que intervienen magnitudes dependientes unas de otras. Así, por ejemplo, el peso que un hombre puede levantar depende

> directamente, a igualdad de otras circunstancias, de su fuerza. Análogamente, se puede considerar que la distancia que un muchacho puede recorrer depende del tiempo. O también podemos decir que el área de un cuadrado es una función de la longitud de su lado, y que el volumen de una esfera es una función de su diámetro. (Granville, 2012, p. 12)

En este sentido elemental, una función determina los valores de una variable a partir de los valores de otras variables, tradicionalmente se llama a la primera variable dependiente y a la segunda variable independiente. Tomemos como ejemplo:

$$f(x)= x^3 + 12x + 20$$

f(x) representa a la variable dependiente porque su valor depende del valor que se le asigne a x, y del resultado de la ecuación, si por ejemplo x=2, entonces f(x)=54, si x=3, entonces f(x)=83, etc. Lo anterior nos remite a otra distinción fundamental relacionada con el concepto *función*, el *dominio de una función* y el *contradominio o codominio de una función*. El *dominio de una función* es el conjunto de partida de una función, es el conjunto de todos los valores que puede adquirir la variable independiente x, mientras que el *contradominio de una función* es el conjunto de todos los valores que puede adquirir la variable dependiente f(x).

Regresando al ejemplo de función $f(x)= x^3 + 12X + 20$, si el dominio de la función son los números naturales entonces este es **N** = {1, 2, 3, 4,…}, y el contradominio de la función sería el conjunto R: {33, 54, 83, 132,…}. Desde esa noción elemental toda función establece una relación entre dos conjuntos, entre el dominio y el contradominio, tradicionalmente se llama *regla de correspondencia* a la regla o criterio con la que relacionamos a todos los elementos del dominio, algún elemento del contradominio, la única exigencia es que a cada uno de los elementos del dominio le corresponda sólo un elemento del contradominio.

Desde este sentido elemental del concepto *función*, toda *función* establece una relación entre los elementos de dos conjuntos, y la *regla de correspondencia* nos lleva de algún elemento del dominio, a algún elemento del contradominio. Como menciona la anterior cita de Granville (2012), tanto en la vida cotidiana, como en la investigación científica nos encontramos constantemente con funciones, por ejemplo, la fórmula del área de un cuadrado se puede entender como una función, donde f(x) es el área del cuadrado, y dónde x es la longitud de los lados del cuadrado:

$$f(x)= x^2$$

Tomando estas nociones elementales del *Cálculo matemático* regresemos al concepto *función proposicional*, ésta se puede entender como una función donde su contradominio es un conjunto donde todos sus elementos son proposiciones, al sustituir las variables independientes de una *función proposicional* por valores específicos obtenemos distintas proposiciones con diferentes valores de verdad. De esta forma, toda *función proposicional* es un *enunciado abierto*, o una proposición incompleta.

El propio concepto *función proposicional* no es exclusivo del *cálculo de predicados*, en el *cálculo de proposiciones* todas las *formas sentenciales* son *funciones proposicionales*. En la *lógica proposicional* tomamos a las *variables sentenciales* como variables que pueden ser sustituidas por proposiciones, típicamente ellas son representadas por las letras ‘p’, ‘q’, ‘r’, etc. Y las *formas sentenciales* son definidas como una sucesión de símbolos formada por *variables sentenciales*, de tal manera que cuando sustituimos las *variables sentenciales* de una *forma sentencial* por proposiciones, obtenemos otras proposiciones como sucede con cualquier *función proposicional*.

-'p' es una *variable sentencial* que puede ser sustituida por cualquier proposición como "Los escépticos son enemigos de la certeza".

-p → (q ^ r) es una *forma sentencial* y es una *función proposicional*. Si sustituimos 'p' por "Los escépticos son enemigos de la certeza" (proposición verdadera), 'q' por 'Los escépticos no son dogmáticos' (proposición verdadera) y 'r' por 'Los escépticos no son sofistas' (proposición verdadera), obtenemos una proposición verdadera (respetando las tablas de verdad de los conectivos incluidos). Pero si sustituimos 'q' o 'r' por una proposición falsa como 'Los escépticos son teístas', entonces obtenemos una proposición falsa.

El concepto función proposicional no es ajeno a la *lógica de proposiciones*, de hecho autores como Irving Copi en *Lógica simbólica* (2001) definen a los tres grandes tipos de enunciados: tautologías, contradicciones y enunciados contingentes como formas sentenciales. Cuando las instancias de sustitución de una *forma sentencial* son todas verdaderas tenemos tautologías, cuando sus instancias de sustitución son únicamente proposiciones falsas tenemos contradicciones, y cuando las instancias de sustitución pueden ser proposiciones falsas o verdaderas tenemos *enunciados contingentes*.

Lo que no comparte la *lógica de proposiciones* con el *cálculo de predicados* es que la segunda toma a los predicados como *funciones proposicionales* donde las variables independientes pueden ser sustituidas por nombres propios o nombres de individuos, mientras que en las *formas sentenciales* de la *lógica proposicional* las variables independientes sólo pueden ser sustituidas por proposiciones.

En general, en el *cálculo de predicados* existen dos formas fundamentales por las que se puede convertir a un predicado (en tanto función proposicional) en una proposición completa o cerrada:

a. Sustituir las variables independientes por nombres propios (p. e., Julio César, Alejandro Magno), etc.
b. Cuantificar las variables independientes por medio de cuantificadores.

3.1.1 Simbolización y tipos de predicados

A continuación, desarrollaremos algunos conceptos y símbolos necesarios para convertir alguna *función proposicional* en una proposición cerrada o completa, por medio de nombres propios. Como mencionamos, en la estructura fundamental de toda proposición tomamos como predicado a aquellas propiedades o relaciones que se imputan al sujeto de la proposición. Por ejemplo:

1. El número 3 es impar.
2. Julio César cruzó el Rubicón
3. Dido ama a Eneas
4. El número 4 es mayor que 3.
5. Aristóteles es amigo de Platón.
6. Kant es un filósofo ilustrado.

En las proposiciones anteriores ‘es impar’, ‘cruzó’, ‘ama a’, ‘mayor que’, ‘es amigo de’, y ‘es un filósofo ilustrado’, son predicados, y ‘3’,´Dido’, ‘4’, ‘Aristóteles’, ‘Kant’, son sujetos. En el *Cálculo de predicados* se toman a los predicados como funciones que se pueden representar de la siguiente forma (utilizando el concepto matemático de variable): ‘x es impar’, ‘x cruzó y’, ‘x ama a y’, ‘x es mayor que y’, ‘x es amigo de y’, ‘x es un filósofo ilustrado’. Tomando a los predicados como funciones proposicionales, cuando las variables independientes ‘x’ y ‘y’ son sustituidas por nombres de individuos o sujetos, u objetos, entonces obtenemos diferentes proposiciones con distintos valores de verdad.

Por ejemplo, cuando sustituimos ‘x’ por ‘Kant’ en ‘x es un filósofo ilustrado’, obtenemos una proposición verdadera, pero si sustituimos ‘x’ por Platón, obtenemos una proposición falsa. Es por ello que las funciones proposicionales se pueden tomar como *enunciados abiertos* o incompletos. ‘x > y’ es otro ejemplo de una *función proposicional*, cuando sustituimos ‘x’ por ‘4’ y ‘y’ por ‘3’, obtenemos una proposición verdadera, pero si sustituimos ‘x’ por ‘3’ y ‘y’ por ‘8’, obtenemos una proposición falsa.

En el *Cálculo de predicados* tradicionalmente se usan las primeras letras del alfabeto en minúsculas para representar a los nombres propios de individuos o nombres de objetos con los que se sustituyen las variables independientes para obtener una proposición. Por otro lado, se emplean algunas de las letras que aparecen en el predicado en mayúsculas (no necesariamente la primera letra) para simbolizar el predicado. Dando por sentado lo anterior podemos representar las proposiciones anteriores de la siguiente manera:

1.-I(a)	Donde ‘I’ simboliza el predicado ‘x es impar’, y ‘a’ representa el número 3.
2.- C(b,c)	Donde ‘C’ simboliza el predicado ‘x cruzó y’, ‘b’ representa el nombre propio ‘Julio César, y ‘c’ representa el nombre de un objeto ‘Rubicón’.

3.-A(d,e)	Donde 'A' simboliza el predicado 'x ama a y', 'd' representa 'Dido', y 'e' representa 'Eneas'.
4.-M(f,g)	Donde 'M' simboliza el predicado 'x es mayor que y', 'f' representa al número 4, y 'g' representa el número 3.
5.-A(a,b)	Donde 'A' simboliza el predicado 'x es amigo de y', 'a' representa 'Aristóteles', y 'b' representa 'Platón'.
6.-I(c)	Donde 'I' simboliza el predicado 'x es un filósofo ilustrado', y 'c' representa 'Kant'.

Como parte de la explicación anterior es importante no confundir las simbolización C(b,c) y C(x,y), la primera representa una proposición 'Julio César cruzó el Rubicón'; pero la segunda representa un predicado donde las variables independientes no han sido sustituidas por nombres propios 'x cruzó y'.

Como resulta claro en los ejemplos anteriores, no todos los predicados se aplican a una sola variable independiente, en el predicado 'x ama a y' tenemos dos variables independientes, 'x', y 'y'. El *cálculo de predicados* distingue entre predicados *monádicos* y predicados *poliádicos,* el criterio de distinción es el número de variables independientes que se incluyen en el predicado, o el número de nombres propios a los que se aplica el predicado cuando la proposición es completada. Si 'n' representa el número de variables independientes (donde se cumple que n > 0), entonces si n= 1 el predicado es *monádico* o es una *propiedad*, si n > 1 el predicado es *poliádico*, donde tenemos casos especiales como n=2 donde el predicado es binario, n=3 donde el predicado es triádico, n=4 donde el predicado es tetrádico, etc.

3.1.2 Lógica de primer orden y Lógica de orden superior

La anterior distinción entre tipos de predicados es más clara si tomamos a los predicados como conjuntos. En este momento no podemos llevar una larga discusión en torno al propio concepto matemática de *conjunto*, tomémoslo simplemente como una colección de objetos, p. e., animales, números, personas, etc. De esta forma, el predicado Mx: 'x es mortal' se puede entender como el conjunto de todos los objetos que son mortales. Ese conjunto se puede simbolizar de la siguiente forma: M= {x │ x es mortal}, lo anterior se puede leer como 'M es el conjunto de las x, tal que x es mortal'.

En el ejemplo anterior el conjunto aludido está conformado por individuos u objetos, pero existen también conjuntos que están conformados por conjuntos, y de la misma forma hay predicados de predicados, y no sólo predicados de individuos. Lo anterior es fundamental para esclarecer dos apartados fundamentales del *cálculo de predicados*: *Lógica de primer orden* y *Lógica de orden superior*, para lo cual es necesario apelar a la célebre *Teoría de los tipos lógicos de* Bertrand Russell.

Ésta teoría formulada por primera vez por Russell en los *Principles of Mathematics* (1903), y expuesta con mayor detalle por él mismo en "Mathematical logic as base on the theory of types" (1908), surgió a principios del siglo pasado para hacer frente a diferentes antinomias y paradojas que acompañaron al nacimiento de la *lógica matemática*, donde obviamente resalta la paradoja de Russell. Algunos representantes emblemáticos del *Positivismo Lógico* como Rudolf Carnap[4] toman justamente a la *teoría de los tipos* de Russell como uno

---

[4] Ver *Logical sintaxis of language* (1937), y "La antigua y la nueva lógica" (1965), ambos textos de Carnap, y también *The theory of logical types* (1971) de Irving Copi.

de los grandes sismas entre la lógica antigua y la nueva *lógica matemática*.

La *teoría de los tipos* divide en general a todas las entidades en los siguientes tipos lógicos,

-Nivel o tipo cero: conformado por individuos.
-Nivel uno: conformado por propiedades de individuos.
-Nivel dos: conformado por propiedades de propiedades de individuos.
-Nivel tres: conformado por propiedades de propiedades de propiedades de individuos.
-Y así sucesivamente para los siguientes niveles o tipos.

Esta clasificación está acompañada por una restricción, tomemos 'n' como el número del tipo de concepto en cuestión, de tal forma que un atributo o predicado sólo se puede aplicar correctamente a entidades del nivel n-1. Brevemente damos un ejemplo, tomemos 'azul' como un predicado del tipo 1, es decir una propiedad de individuos, siguiendo la restricción mencionada el predicado 'azul' sólo se puede aplicar a entidades del tipo cero (cumpliendo la restricción n-1), 'la silla es azul', 'el pato es azul', 'la universidad es azul', son proposiciones cabales que pueden ser verdaderas o falsas; sin embargo, 'el azul es azulado', 'el rojo es azul', 'la justicia es azul', etc., son sólo *pseudo-proposiciones* que pueden generan antinomias.

Regresando al *Cálculo de predicados*, tomemos a la *lógica de primer orden* como aquel apartado que versa sólo sobre predicados del primer tipo o de primer orden, mientas que la *lógica de orden superior* incluye predicados de cualquier orden superior al primero, la lógica de segundo orden incluye predicados de segundo orden, la de tercer orden predicados de predicados de individuos (predicados de tercer orden), etc. Es importante no confundir la distinción entre predicados *monádicos* y *poliádicos*, con los diferentes niveles de predicados, la distinción entre *lógica de primer orden* y *lógica de orden superior* no consiste en la distinción entre el cálculo de predicados *monádicos* y cálculo de predicados *poliádicos*.

En otras palabras, tanto en la lógica de primer orden, como en la lógica de orden superior se utilizan predicados monádicos y predicados poliádicos. Considérese la siguiente tabla:

Tabla 5: Cálculo de predicados

Cálculo de predicados	Lógica de primer orden	Predicados monádicos: ‘X es filósofo’
		Predicados poliádicos: ‘X es amigo de y’
	Lógica de orden superior	Predicados monádicos: ‘X concepto filosófico’
		Predicados poliádicos: ‘X es predicable de Y’

De esta forma, el *cálculo de predicado*s de primer orden sólo cuantifica individuos pero no predicados, porque emplea sólo predicados de primer orden que se aplican a individuos. Mientras que el *cálculo de predicados* de segundo orden cuantifica no sólo individuos, sino también predicados, pues utiliza predicados de segundo orden. Cabe señalar que todo lo que se desarrollará en este apartado versa sólo sobre Lógica de primer orden.

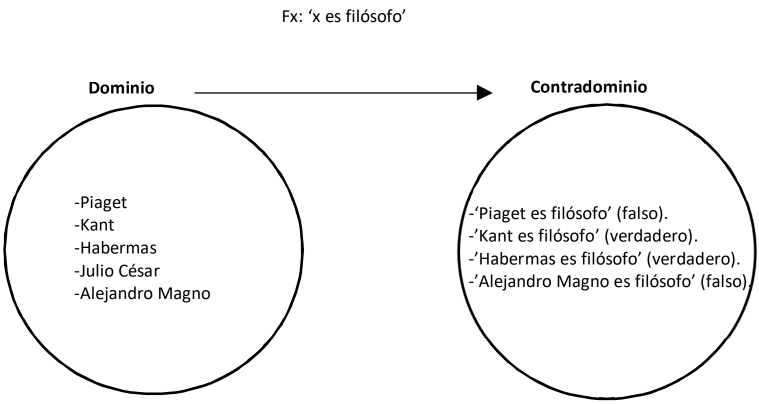
3.1.3 Resumen y ejercicios

Con lo anterior se han expuesto dos puntos fundamentales:

1. Al *Cálculo de predicados* se le han dado nombres como *Lógica de funciones proposicionales*, *Cálculo de funciones*

proposicionales, y *Cálculo funcional* justamente porque es un cálculo basado en *funciones proposicionales*, lo cual a su vez nos remite al aspecto fundamental de este apartado de la *Lógica Matemática*: tomar a los predicados como *funciones proposicionales*. La siguiente figura ilustra una buena parte de lo que hemos expuesto.

Figura 4: Los predicados como funciones proposicionales



2. El *cálculo de predicados* se divide en *lógica de primer orden* y *lógica de orden superior* en función de los diferentes niveles y tipos de predicados.
3. Tipos y niveles de predicados.
4. Simbolización y formalización de predicados sin el uso de cuantificadores.

Ejercicios

a. **Identifica el predicado y el sujeto de las siguientes proposiciones, simbolízalos adecuadamente, y determina si son *monádicos* o *poliádicos*.**

1. Juan es abogado.
2. Descartes es un filósofo moderno.
3. César Augusto venció a Marco Aurelio.
4.-El número 18 es par.
5.- El número 100 es mayor que 11, y que 20.
6.-Luis es padre de Andrea, de María y de Ulises.
7.-El número 20 es múltiplo de 5 y de 4.
8.-El número 10 es divisor de 100, y de 1000.
9.-Federico II el Grande fue contemporáneo de Voltaire y Kant.
10.-El vaso de plástico es un aislante de la electricidad.

b. **Complementa los siguientes predicados por medio de nombres propios, formando sólo proposiciones verdaderas, y formando sólo proposiciones falsas.**

1. F(x): ‘x es filósofo’.
2. P(x, y): ‘x es padre de y’.
3. R(x, y): ‘x refutó a y’.
4.-A(x, y): ‘x es más alto que y’.
5. C(x): ‘x es caluroso’.
6. M(x, y, z): ‘x es mayor que ‘y’, y z’.
7. E(x, y, z): ‘x escribió y en z’.
8. R(x, y, z): ‘x refutó a y en z’.
9. D(x, y, z): ‘x derrotó a y’.
10. P(x): ‘x es un pensador ilustrado’.

c. **Determina qué expresiones constituyen proposiciones y cuáles son pseudo-proposiciones a partir de la restricción de la *teoría de los tipos* de Russell.**

1. La nada nadea.
2. La justicia es dulce.
3. El término ‘predicable’ es predicable.
4. El árbol es verde.
5. La ciencia es luminosa.
6. La verdad es blanca y amarga.
7. El carro es verde.
8. La felicidad es feliz.
9. La racionalidad es racional.
10. La falsedad es falsa.

3.2 LOS CUANTIFICADORES Y LOS CUATRO TIPOS BÁSICOS DE ENUNCIADOS

Uno de los elementos fundamentales de la lógica de proposiciones consiste en que la proposición es tomada como último elemento de análisis, este apartado de la lógica no puede llevar su análisis hasta la estructura elemental de toda proposición (sujeto y predicado) y por lo mismo existen diferencias entre tipos de proposiciones o enunciados de los cuales ella no puede dar cuenta.

Esas diferencias que atañen a la estructura básica de las proposiciones son fundamentales para determinar la validez de ciertos argumentos, en este sentido existen argumentos para los cuales la lógica proposicional no puede determinar su validez. El mejor ejemplo de estos argumentos son los silogismos aristotélicos, retomemos el ejemplo de la página 11.

Argumento A

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.
/:. Sócrates es mortal.

Evidentemente el silogismo anterior es un argumento válido, pero desde la lógica de proposiciones ese argumento tendría que simbolizarse de la siguiente manera:

P — P: 'Todos los hombres son mortales'.
Q — Q: 'Sócrates es hombre'.
/:. R — R: 'Sócrates es mortal'.

Obviamente el análisis y la formalización anterior resultan insuficientes para probar la validez de este silogismo, pues no se ha tomado en cuenta la estructura básica o interna de las proposiciones. Pero las limitaciones del análisis de la lógica proposicional también aplican para los argumentos inválidos, todo argumento inválido que posea proposiciones con cuantificadores no puede ser determinado como inválido desde la lógica proposicional (si sólo se toman en cuenta las relaciones externas entre proposiciones simples y complejas).

Argumento B

Algún político es honesto.
Algún honesto es vegetariano.
/:. Todos los políticos son vegetarianos.

Hay algo inadecuado en el argumento B, pero la lógica de proposiciones no puede dar cuenta de ello porque se limita a las relaciones externas entre las proposiciones; desde ella tendríamos que formalizar este argumento de la siguiente manera:

P	P: 'Algún político es honesto'.
Q	Q: 'Algún honesto es vegetariano'.
/:.R	R:'Todos los políticos son vegetarianos'.

Nuevamente esta formalización es insuficiente para dar cuenta de la invalidez del argumento. Para el cálculo proposicional tenemos tres proposiciones distintas, y son distintas proposiciones porque ninguna comparte el mismo sujeto y el mismo predicado que otra de ellas.

En lógica proposicional podemos determinar la invalidez de un argumento por medio de una tabla de verdad del *condicional asociado*[5] del argumento. Desde este método, si encontramos un sólo renglón de la tabla de verdad donde las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, entonces podemos concluir que el argumento es inválido. Tomemos un ejemplo:

Argumento C

$P \rightarrow Q$

$Q \rightarrow R$

/:. $R \rightarrow P$

La tabla de verdad del *condicional asociado* del argumento C es la siguiente:

[5] El *condicional asociado* de un argumento es un condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas del argumento, y el consecuente es la conclusión. P. e., para el argumento: P V Q, ˥P /:. Q, su *condicional asociado* es ((P v Q) ᴧ →˥P).

P	Q	R	((P → Q) ∧ (Q → R))	→	(R → P)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V

En la tabla anterior, la cuarta columna corresponde a los valores de verdad de la conjunción de las premisas del argumento C, la quinta columna representa los valores de verdad de todo el condicional asociado del argumento C (((P → Q) ∧ (Q → R)) → (R → P)), y la última columna corresponde a los valores de verdad de la conclusión. En los renglones 7 y 9 (en la quinta columna), el condicional asociado es falso justamente porque esos renglones muestran que las premisas pueden ser verdaderas aunque la conclusión sea falsa.

El argumento se ha demostrado como inválido porque su condicional asociado no es una tautología, si fuera una tautología entonces se cumpliría que cada vez que las premisas del argumento C son verdaderas, su conclusión también lo es.

¿Podemos usar una tabla de verdad para demostrar la invalidez de cualquier argumento? No. Tomemos en cuenta el siguiente argumento inválido.

Argumento D

Todos los políticos son corruptos.

Juan es corrupto.

/:. Juan es político.

Si quisiéramos emplear una tabla de verdad, tendríamos que hacerlo representando en cada una de las columnas todas las combinaciones posibles de valores de verdad para las proposiciones que constituyen las premisas, y para la conclusión. Lo anterior es en términos prácticos imposible, porque la primera premisa es un universal afirmativo, y para dar cuentas de todas sus posibles combinaciones de valores de verdad tendríamos que dar un renglón para cada uno de los individuos que son políticos.

No podemos realizar esta tabla de verdad por el simple hecho de que no sabemos si el conjunto de todos los políticos es un conjunto vacío, ni cuál es la extensión de dicho conjunto.

Finalmente, la lógica proposicional en tanto que no lleva su análisis a los elementos básicos de las proposiciones, tampoco puede dar cuenta de la validez, ni de la invalidez de aquellos argumentos donde sus proposiciones constitutivas establecen relaciones. Relaciones como: “ser mayor que”, “ser menor que”, “ser hermano de”, “más alto que”, etc. Tomemos en cuenta el siguiente argumento, ¿cómo debería formalizarse en lógica proposicional?

Argumento E

Juan es más alto que Manuel

Manuel es más alto que Pedro

/:. Juan es más alto que Pedro

Evidentemente la lógica proposicional no puede dar cuentas de la validez de este argumento, porque para ella sólo tendríamos tres proposiciones distintas, ninguna de ellas comparten el mismo sujeto y el mismo predicado.

Argumento F

8 es mayor que 7.

/:. 7 es menor que 8.

Finalmente, ¿cómo se formalizaría la inferencia aritmética elemental anterior? Nuevamente desde el cálculo de proposiciones tendríamos dos proposiciones con sujetos y predicados distintos.

Con lo anterior podemos apuntar dos conclusiones:

1. El *cálculo de predicados* no es opuesto al *cálculo proposicional*, no hay ninguna disyunción exclusiva entre estos dos elementos fundamentales de la *lógica matemática*. Todo lo contrario, el *cálculo de predicados* mantiene los conectivos del *cálculo proposicional* y sus reglas sintácticas, es una extensión con respecto a la *lógica proposicional*.

2. El *cálculo de predicados* extiende el análisis lógico hasta las proposiciones con cuantificadores, por lo cual los cuantificadores son un elemento característico del *cálculo de predicados*.

3.2.1 Los cuantificadores

Como apuntamos en la sección anterior, el cálculo de predicados se puede entender como una extensión del cálculo proposicional. En este sentido la lógica de predicados mantiene el vocabulario y las reglas sintácticas de la lógica proposicional, pero a la vez, extiende ese vocabulario y esas reglas sintácticas.

Las reglas sintácticas son aquellos criterios que determinan cómo se acomodan correctamente los elementos del vocabulario de un lenguaje, y qué tipo de secuencias son incorrectas. En nuestro idioma español todas las reglas gramaticales son reglas sintácticas. En el cálculo proposicional y en el cálculo de predicados tenemos reglas sintácticas.

En español:

'La María Pedro'	Secuencia incorrecta, no hay predicado, no hay proposición.
'María es inteligente'	Secuencia correcta.

En inglés:

'She read a book'	Secuencia incorrecta, error gramatical, el verbo *read* no está bien conjugado para la tercera persona.
'She reads a book'	Secuencia correcta.

En el cálculo proposicional ninguna *forma sentencial* bien formada puede empezar con un conectivo lógico.

→P VQ	Fórmula mal formada.
P→ (P VQ)	Fórmula bien formada.

Todas las reglas respecto al uso de los signos de agrupación en el *cálculo de proposiciones* son también reglas sintácticas.

Un ejemplo de reglas sintácticas en el *cálculo de predicados* exige que en ninguna fórmula bien formada puede quedar alguna variable sin cuantificar.

∀x(Px → Exy)	Fórmula mal formada, la variable 'y' no está cuantificada porque no hay un cuantificador para ella.
∀x∀y(Px → Exy)	Fórmula bien formada.

Respecto al nuevo vocabulario del cálculo de predicados, el elemento fundamental añadido son los *cuantificadores*. De hecho ya hemos mencionado algunos nuevos integrantes de este nuevo vocabulario, los predicados, variables y nombres propios o constantes (ver página 16). El uso de *cuantificadores* es justamente la segunda forma con la que podemos transformar predicados en proposiciones completas, cuantificando las variables independientes por medio de cuantificadores (ver página 15).

Tenemos dos cuantificadores, donde “x” es una variable del dominio:

El *cuantificador universal*:

$$\forall x$$

Y el *cuantificador existencial*:

$$\exists x$$

Dentro de la gran variedad de manuales y tratados de lógica, se han empleado diferentes símbolos para representar a los cuantificadores. Algunos ejemplos son: $\bigvee x$ (cuantificador existencial), $\bigwedge x$ (cuantificador universal). En este manual usaremos los símbolos: $\forall x$ y $\exists x$.

Cuantificar las variables de un predicado para formar una proposición consiste en determinar cuántos individuos poseen el predicado en cuestión. Como aclara Alfredo Deaño en su célebre libro *Introducción a la lógica formal* (2009):

> Pues bien: a estas dos expresiones, ‘todos’, y ‘algunos’, se las conoce con el nombre de “cuantificadores”. La razón del nombre está clara: por medio de ellas indicamos cuántos individuos poseen una cierta propiedad o entre cuántos individuos se da una cierta relación. (Deaño, 2009: p.184)

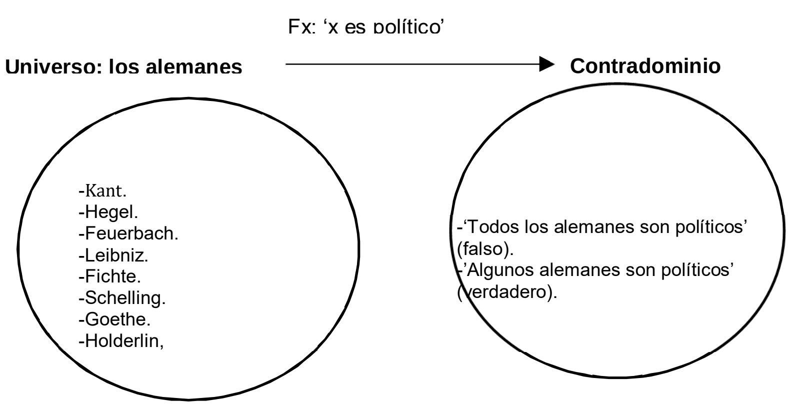
Para usar a los *cuantificadores* es necesario determinar el dominio o el *universo de discurso*, que justamente se puede entender con la misma noción de *dominio* en el concepto matemático de *función* (ver página 52. El *universo de discurso* es el dominio de los predicados en cuanto *funciones proposicionales*. En el *cálculo de predicados* es necesario especificar siempre el *universo de discurso* de las *formas sentenciales*, porque el *universo de discurso* puede determinar el valor de verdad de una proposición cuantificada.

Por ejemplo:

‘Todos tienen llantas’	Esta proposición puede ser verdadera en el universo de los carros en óptimas condiciones (‘todos los carros en óptimas condiciones tienen llantas’, pero sería falsa en el universo de los libros (‘todos los libros tienen llantas’).

Podemos ilustrar de la siguiente forma el proceso de cuantificación.

Figura 5: Ejemplo del proceso de cuantificación



Respecto a la formalización, en el *lenguaje natural* (p. e. el español) existen ciertas expresiones que nos permiten identificar a los *cuantificadores*. Esto nos remite a la distinción entre *oraciones universales* y *oraciones particulares*, el criterio es también la extensión del predicado, a cuantos individuos se les imputa el predicado. Esas expresiones son: 'todos', 'los', 'cualquier', 'para todos', para el cuantificador universal. Y 'algún', 'algunos', 'existe algún', 'hay', para el cuantificador existencial. La simbolización correcta representa esas expresiones con los símbolos $\exists x$ y $\forall x$, y representa a los predicados usando su primera letra en mayúsculas, 'x es vegetariano'= 'Vx' (ver página 55).

Lenguaje natural	Universo: seres vivos.
"Cualquier hombre es mortal"	$\forall x(Hx \rightarrow Mx)$
"Algunos políticos son honestos"	$\exists x(Px \wedge Hx)$
"Todos son mortales"	$\forall x(Mx)$
"Algunos son carnívoros"	$\exists x(Cx)$

Finalmente, hemos de tomar a las variables que no están cuantificadas (y que evidentemente no son constantes, ni nombres propios) como *variables libres*, p. e., en '$\forall x(Mx \rightarrow Vxy)$', 'y' es una *variable libre*. Y las variables que sí son cuantificadas son *variables ligadas*, p. e., en '$\forall x(Hx \rightarrow Mx)$', 'x' es una *variable ligada*.

Con lo anterior podemos entender la regla sintáctica de la *lógica de predicados* que exige que "Ninguna fórmula que posea variables libres es una fórmula bien formada", lo cual significa que ninguna variable puede quedar sin cuantificar.

Para tener una idea más clara de la formalización de los enunciados con cuantificadores, podemos usar la distinción tradicional entre enunciados universales y particulares, y la distinción entre enunciados afirmativos y negativos. Justamente como lo hace Deaño (2009):

Tabla 6: Cuantificadores y los cuatro tipos de enunciados fundamentales[6]

Enunciados	Deaño	Actual	Explicación
Universal afirmativo	Λx Px	*∀xPx*	[Todos los x son P]
Universal negativo	Λx ¬ (Px)	*∀x ¬ (Px)*	[Ningún x es P]
Particular afirmativo	Vx Px	*∃xPx*	[Algún x es p]
Particular negativo	Vx ¬ (Px)	*∃x¬ (Px)*	[Algún x no es P]

Finalmente es necesario especificar que los signos de agrupación y la especificación de la variable que se adjudica al cuantificador (‘x’,’y’, etc.), determinan hasta dónde llega la cuantificación del cuantificador, es decir, qué variables está cuantificando o, cuál es el *ámbito* del cuantificador.

3.2.2 Simbolización usando cuantificadores

Para poder simbolizar enunciados que poseen cuantificadores, es necesario precisar dos puntos sobre cómo simbolizar la relación de los predicados de dichos enunciados.

6 El símbolo “Λx” Deaño lo emplea porque concibe al cuantificador universal como una conjunción de proposiciones sobre los miembros del universo del discurso; y el símbolo “Vx” Deaño lo emplea porque concibe al cuantificador existencial como una disyunción de proposiciones sobre los miembros del universo del discurso.

i) Todos los enunciados que poseen cuantificadores universales y más de un predicado, se simbolizan como condicionales.

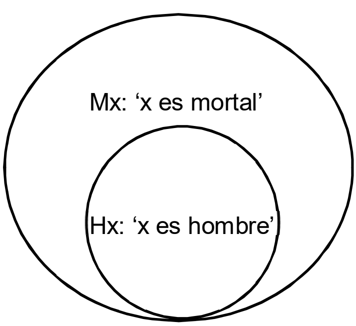
ii) Todos los enunciados que poseen cuantificadores existenciales y más de un predicado, se simbolizan como conjunciones.

Tomemos un pequeño ejemplo tradicional:

"Todos los hombres son mortales"

Este enunciado posee dos predicados Hx (x es hombre) y Mx (x es mortal), que se convierten en un enunciado cerrado, gracias a un cuantificador universal. ¿Qué relación se establece entre estos dos predicados a partir del cuantificador universal? Dicha relación es un condicional, se establece que entre dichos predicados hay una relación de inclusión, de tal manera que si algún x es hombre, entonces ese x es mortal. Usando diagramas de Venn podemos ilustrar lo anterior:

Figura 6: Predicados relacionados en un enunciado universal.



La forma correcta de la simbolización de “Todos los hombres son mortales” es:

$\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ Se puede leer de la siguiente forma: “Para todo x, si x es hombre, entonces x es mortal”.

Los enunciados universales se representan como condicionales, porque dichos enunciados son falsos cuando al menos algún sujeto posee la cualidad de ser hombre, y no es mortal. Recordando nuestras reglas de reemplazo, justamente un condicional $(P \rightarrow Q)$ es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, regresando a nuestro ejemplo, nuestro enunciado sería falso cuando un individuo posee el primer predicado, pero carece del segundo.

¿Por qué no es correcto representar un enunciado universal como una conjunción? Podríamos representar nuestro ejemplo anterior de la siguiente forma:

$\forall x(Hx \wedge Mx)$ Se puede leer de la siguiente forma: “Para todo x, x es hombre, y x es mortal”.

Con esta simbolización se exige que todo x posee al mismo tiempo las dos cualidades mencionadas, un *enunciado universal* establece que si x posee la primera cualidad, entonces debe poseer la segunda, mientras que en él está indeterminado qué se puede predicar de los individuos que poseen sólo la segunda cualidad.

Estamos tentados a simbolizar un enunciado universal como una conjunción, porque tanto dicha conjunción como el condicional son falsos cuando el primer predicado se cumple y el segundo no se cumple. En otras palabras $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ y $\forall x(Hx \wedge Mx)$ son falsos si existe algún x que es hombre pero que no es mortal. La diferencia entre la simbolización $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ y $\forall x(Hx \wedge Mx)$ radica en que las circunstancias en las que $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ es verdadera, no son las mismas en las que $\forall x(Hx \wedge Mx)$ es verdadero. Tomando en cuenta nuestras tablas de verdad (del condicional y de la conjunción), podemos precisar que $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ es verdadera cuando un x es mortal pero no es hombre, y cuando algún x no es hombre y no es mortal, mientras que en esas circunstancias $\forall x(Hx \wedge Mx)$ sería falsa.

Esta es justamente la distinción, que “Todos los hombres son mortales” no es falsa cuando un individuo que es mortal no es hombre, y tampoco es falsa cuando un individuo que no es hombre, tampoco es mortal.

“Todos los hombres son mortales” se puede simbolizar como $\forall x(Mx)$ sólo cuando el *universo de discurso* está constituido por “todos los hombres”. En este contexto el *enunciado universal* no es formalizado como un condicional, porque está sobrentendido en nuestro *universo de discurso* que el conjunto de las x a las que se refiere nuestro enunciado es el conjunto de todos los hombres.

¿Cómo se simbolizan los *enunciados particulares*?

Tomemos un ejemplo:
“Algún hombre es mortal”

En este enunciado a diferencia del *enunciado universal*, no se establece una relación de implicación entre los predicados, sino que existe algún individuo que posee al mismo tiempo los dos predicados. La simbolización correcta de los enunciados particulares es la conjunción, pues justamente ella es falsa cuando al menos uno de los conjuntos es falso, mientras que el enunciado particular sería falso cuando algún miembro del universo de discurso posee un predicado pero no posee el otro, y cuando algún miembro carece de los dos predicados (Hx: ‘x es hombre’, y Mx: ‘x es mortal’).

$\exists x(Hx \wedge Mx)$ Se puede leer de la siguiente forma: Existe algún x, tal que x es hombre y es mortal.

Para concluir este apartado podemos especificar cómo es entendida la “*existencia*” en el cálculo de predicados, con relación a los enunciados que incluyen cuantificadores existenciales. Una diferencia fundamental entre $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ y $\exists x(Hx \wedge Mx)$, radica en que un enunciado universal no implica la existencia de algún individuo que posea los predicados incluidos en el enunciado en cuestión. Expresando lo anterior de otra forma:

$\forall x(Hx \rightarrow Mx)$
/.: $\exists x(Hx \wedge Mx)$

El argumento anterior es inválido, las premisas pueden ser verdaderas sin que la conclusión sea verdadera, puede ser verdadero que todos los hombres son mortales y puede ser falso que existe algún hombre que es mortal. Lo anterior tiene sentido cuando tomamos en cuenta que el enunciado universal sólo establece una relación entre los predicados que contiene. Pensemos en otro ejemplo:

“Todos los unicornios tienen cuernos” $\forall x(Ux \rightarrow Cx)$
/.: “Algún unicornio tiene cuernos” $\exists x(Ux \wedge Cx)$

Este argumento también es inválido, es verdadero que “todos los unicornios tienen cuernos”, pero evidentemente es falso que exista algún unicornio que tiene cuernos Obviamente el siguiente argumento es válido:

$\exists x(Hx \wedge Mx)$

/.: $\exists x(Hx \wedge Mx)$

¿Cómo se entiende la *existencia* en el cálculo de predicados? En primer lugar la *existencia* no es entendida como sustantivo; en el cálculo de predicados la existencia no es representada como un individuo, aunque en el ámbito filosófico usemos a la *existencia* como sustantivo. Las siguientes expresiones no constituyen proposiciones para el cálculo de predicados, y no pueden ser formalizadas:

- “La existencia existe”
- “La existencia no existe”
- “La existencia es un regalo de Dios”
- “La existencia es vegetariana”
- “La existencia existe”
- “La existencia es racista”

En todas esas expresiones la existencia es tomada como el sujeto al que se le predica alguna cualidad, y no pueden ser formalizadas porque E(e): ‘La existencia es existente’ no tiene sentido, porque la existencia no es tomada como un individuo en el cálculo de predicados.

Por otra parte, la existencia tampoco es entendida como un predicado, E(j): ‘Julio existe’ tampoco tiene sentido porque la existencia no es un predicado (en tanto cuantificador). En este sentido las siguientes expresiones no pueden ser formalizadas, y no son proposiciones genuinas.

- “Julio existe”
- “Julio no existe”
- “Todo lo que existe es mortal”
- “Todo lo que se mueve existe”

Es en el *cuantificador existencial* donde podemos recoger el sentido que tiene la existencia para el cálculo de predicados, en pocas palabras, la existencia es un cuantificador. En sentido estricto la existencia no es predicada, sino que es un cuantificador que en tanto cuantificador debe estar acompañado por algún predicado. $\exists x$ por sí misma no es una fórmula bien formada, el cuantificador existencial siempre debe estar acompañado por algún predicado porque justamente su función como cuantificador es unir predicados para formar una proposición.

Recordemos, $\exists x$ y Hx por sí mismas y separadas no son proposiciones. Para que el lector entienda este punto debe reflexionar sobre ¿qué implicaciones tendría para la Lógica matemática si la existencia fuera un predicado?, ¿podemos predicar existencia empleando sólo herramientas lógicas? Un muy buena parte de la historia de la filosofía gira alrededor de estas preguntas.

Ejercicios

a. **Simboliza adecuadamente los siguientes enunciados universales y particulares afirmativos, utilizando cuantificadores, signos de agrupación, y predicados.**

1. Todos los políticos son corruptos.
2. Algún político es honesto.
3. Todos los mamíferos tienen glándulas mamarias.
4. Todos los reptiles tienen sangre fría.
5. Los mexicanos son alegres.
6. Cualquier hombre es justo
7. Hay un profesor que es narcisista.
8. Existe algún empirista que es idealista.
9. Algunas ciudades son horribles.
10. Algún filósofo no es dogmático.

b. Utiliza los cuantificadores y los predicados siguientes para completarlos con algún predicado que permita formar sólo enunciados verdaderos, formaliza el enunciado verdadero resultante, y expresa dicho enunciado en español.

1. ∃x, Hx: 'x es hombre'.
2. ∀x, Px: 'x es político'.
3. ∃x, Ax: 'x es analfabeta'.
4. ∀x, Fx: 'x es filósofo'
5. ∃x, Mx: 'x es mexicano'.
6. ∀x, Cx: 'x es carnívoro'.
7. ∃x, Ix: 'x es chiapaneco'.
8. ∀x, Ux: 'x es unicornio'
9. ∃x, Lx 'x es lento'.
10. ∀x, Ex: 'x es pesado'

3.3 REGLAS SINTÁCTICAS SOBRE EL USO DE CUANTIFICADORES

3.3.1 La negación y los cuantificadores

En las secciones precedentes hemos precisado a los cuantificadores como un elemento del vocabulario del cálculo de predicados, que permite formar proposiciones cerradas con predicados. Lo que desarrollaremos a continuación son las reglas que especifican cómo podemos usar la negación (en tanto conectivo lógico) con los cuantificadores. El tema general de este apartado son las reglas sintácticas características de la lógica de predicados.

Un primer punto por aclarar, es que las fórmulas bien formadas que incluyen cuantificadores son proposiciones o enunciados cerrados, es decir $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ y $\exists x(Hx \wedge Mx)$ son proposiciones susceptibles de verdad o falsedad por definición, y justamente por ello podemos usar a la negación en dichas proposiciones respetando la tabla de verdad de la negación. Así pues: si $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ es verdadera, entonces $\neg\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ es falsa, y si $\exists x(Hx \wedge Mx)$, entonces $\neg\exists x(Hx \wedge Mx)$ es verdadera, etc.

$\neg\forall x(Hx \rightarrow Mx)$	Se puede leer de la siguiente forma: No todos los x que son hombres, son mortales.
$\neg\exists x(Hx \wedge Mx)$	Se puede leer de la siguiente forma: No existe algún x, tal que x es hombre y es mortal.

El análisis de los enunciados en el cálculo de predicados, como hemos mencionado, llega hasta la estructura interna de los enunciados (a diferencia de la lógica proposicional), es por ello que la negación de enunciados que incluyen cuantificadores, debe aplicarse a la estructura interna del enunciado para que el análisis pueda ser completo. Eso está especificado en las *reglas sobre el uso de la negación con cuantificadores*:

A) $\neg\forall x(Hx \rightarrow Mx) \underline{=} \exists x\neg (Hx \rightarrow Mx)$

B) $\neg\exists x (Hx \wedge Mx) \underline{=} \forall x\neg (Hx \wedge Mx)$

El símbolo '$\underline{=}$' representa a la *equivalencia lógica*, dos proposiciones son lógicamente equivalentes si y sólo si poseen los mismos valores de verdad. $\neg\forall x(Hx \rightarrow Mx) \underline{=} \exists x\neg (Hx \wedge Mx)$ establece que $\neg\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ es lógicamente equivalente a $\exists x\neg (Hx \wedge Mx)$, esto es, que poseen los mismos valores de verdad. Por lo mismo, '$\underline{=}$' se puede entender como un bicondicional, porque precisamente un bicondicional es falso cuando las proposiciones relacionadas no tienen los mismos valores de verdad.

Las reglas anteriores se pueden entender como tautologías o equivalencias emblemáticas que complementan a las reglas de reemplazo de la lógica proposicional, y que son necesarias para el análisis del cálculo de predicados.

¿A qué son equivalentes $\exists x \neg (Hx \rightarrow Mx)$ y $\forall x \neg (Hx \wedge Mx)$? En este punto podemos apelar tanto a la tabla de verdad de la conjunción y del condicional, como a los teoremas De Morgan.

$\neg (P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$
$\neg (P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$
$\neg (P \rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$

Usando los teoremas de De Morgan:

$\exists x \neg (Hx \rightarrow Mx) \equiv \exists x \neg (Hx \wedge \neg Mx)$
$\exists x (Hx \wedge \neg Mx)$ Se puede leer de la siguiente forma: Existe algún x, tal que x es hombre y no es mortal.

En este sentido, la negación de un enunciado universal es lógicamente a la afirmación de un enunciado particular. $\neg \forall x(Hx \rightarrow Mx) \equiv \exists x (Hx \wedge \neg Mx)$, lo cual concuerda con el lenguaje natural (español), porque desde él afirmamos que "Todos los hombres son mortales" es falso, cuando es verdadero "Algún hombre no es mortal".

$$\forall x \neg (Hx \wedge Mx) \equiv \forall x (\neg Hx \vee \neg Mx)$$

¿A qué es equivalente $\forall x (\neg Hx \vee \neg Mx)$? En este punto podemos usar otra regla de reemplazo, la *implicación material*: $P \rightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q)$. Así, $\forall x (\neg Hx \vee \neg Mx)$ es equivalente a $\forall x (Hx \rightarrow \neg Mx)$.

$\forall x\ (Hx \rightarrow \neg Mx)$. Se puede leer de la siguiente forma: Para todo x, si x es hombre, entonces x no es mortal.

En este sentido, la negación de un enunciado particular es lógicamente a la afirmación de un enunciado universal. $\neg\square x\ (Hx \wedge Mx) \equiv \forall x\ (Hx \rightarrow \neg Mx)$, “No existe algún hombre que sea mortal” es equivalente a “Para todo x, si x es hombre, entonces x no es mortal”, o “Ningún hombre es mortal”.

Así podemos establecer en general que:

1. La negación de un enunciado universal afirmativo es equivalente a un enunciado particular negativo, $\neg\forall x Px \equiv \exists x \neg (Px)$.
2. La negación de un enunciado particular afirmativo es equivalente a un enunciado universal negativo, $\neg\exists x\ Px \equiv \forall x \neg (Px)$.
3. La negación de un enunciado universal negativo es equivalente a un enunciado particular afirmativo, $\neg\forall x \neg Px \equiv \exists x \neg\neg (Px)$.
4. La negación de un enunciado particular negativo es equivalente a un enunciado universal afirmativo, $\neg\exists x \neg Px \equiv \forall x \neg\neg (Px)$.

Ejercicios

a. Traduce al español las siguientes formulas lógicas.

1. $\neg\forall x\ (Px \rightarrow Tx)$, Px: ‘x es plomero’, Tx: ‘x es trabajador’.
2. $\neg\exists x\ (Hx \wedge Ix)$, Hx: ‘x es honesto’, Ix: ‘x es inteligente’.
3. $\neg\forall x \neg (Hx \rightarrow Mx)$, Hx: ‘x es hombre’, Mx: ‘x es mortal’.
4. $\neg\exists x \neg (Hx \wedge Ix)$, Hx: ‘x es honesto’, Ix: ‘x es inteligente’.

5. $\exists x\ (Hx \wedge Ix)$, Hx: 'x es honesto', Ix: 'x es inteligente'.
6. $\forall x\ \neg\ (Px \rightarrow Tx)$, Px: 'x es plomero', Tx: 'x es trabajador'.
7. $\exists x\ \neg\ (Hx \wedge Ix)$, Hx: 'x es honesto', Ix: 'x es inteligente'.
8. $\neg\forall x\ (Px \rightarrow Tx)$, Px: 'x es plomero', Tx: 'x es trabajador'.
9. $\neg\neg\forall x\ \neg\ (Px \rightarrow Tx)$, Px: 'x es plomero', Tx: 'x es trabajador'.
10. $\neg\neg\exists x\ \neg\ (Hx \wedge Ix)$, Hx: 'x es honesto', Ix: 'x es inteligente'.

b. Simboliza la negación de los siguientes enunciados.

1.-Ningún estudiante es responsable.
2.-No hay profesores preparados.
3.-Todos los políticos son corruptos.
4.-Algún honesto es fiel.
5.-Ningún mexicano es infeliz.
6.-Todos los hombres son mortales.
7.-Todos los racionalistas son innatistas.
8.-Todos los empiristas son antimetafísicos.
9.-No existe algún empirista que sea idealista.
10.-Todo buen filósofo es un buen lógico.

3.3.2 Reglas para el uso de cuantificadores

Además de las reglas sintácticas anteriores es necesario precisar otras reglas involucradas en el uso de los cuantificadores, que son necesarias para poder emplear nuestras reglas inferenciales y nuestras reglas de reemplazo para construir pruebas formales de validez de argumentos con enunciados que contienen cuantificadores. Dichas reglas son: 1) particularización o instanciación universal, 2) generalización universal, 3) particularización o instanciación existencial y 4) generalización existencial.

Antes de continuar con la exposición de las reglas mencionadas, es necesario precisar una distinción fundamental entre las pruebas formales de validez del cálculo proposicional, y las del cálculo de predicados.

> -Los renglones de una prueba formal de validez en el cálculo de predicados, no sólo contienen proposiciones, sino también predicados en tanto funciones proposicionales.

Lo anterior queda claro cuando recordamos la diferencia que marcamos entre la lógica proposicional y la lógica de predicados, en la primera el objeto último de análisis es la proposición, y por ello todos los renglones de una prueba formal de validez en ese contexto son proposiciones.

Como bien apunta Irving Copi (2001), en las pruebas formales de validez del cálculo de predicados están incluidas las siguientes inferencias, y son tomadas como inferencias válidas. La particularización universal, la generalización universal, la particularización existencial y la generalización existencial implícitamente incluyen las siguientes inferencias:

1. Función proposicional → Función proposicional
2. Proposición → Función proposicional.
3. Función proposicional → Proposición.

Por ello las cuatro reglas mencionadas anteriormente se pueden entender como reglas sobre la composición y descomposición de proposiciones, o como reglas sobre el análisis de proposiciones en funciones proposicionales.

La diferencia fundamental entre una función proposicional y una proposición como hemos indicado (revisar páginas 2 y 3), radica en que la primera no es susceptible de verdad o falsedad y por ello incluye variables libres no cuantificadas, y la segunda sí puede ser verdadera o falsa (todas las variables están ligadas a un cuantificador, o han sido sustituidas por individuos como constantes).

Evidentemente lo que necesitamos especificar es un criterio con el que podamos determinar cuándo de una función proposicional se sigue válidamente otra función proposicional, cuándo de una proposición se sigue válidamente una función proposicional, y cuándo de una función proposicional se sigue válidamente una proposicional.

Por supuesto no tomamos en cuenta un criterio para la validez de "Proposición → Proposición" porque ello ya está determinado por la definición de argumento lógicamente válido.

Para caracterizar válidamente a la primera inferencia citaremos a Copi (2001):

> Una función proposicional puede decirse que se sigue válidamente como conclusión de una o más funciones proposicionales tomadas como premisas cuando cualquier reemplazo de las ocurrencias libres de las variables por constantes da un argumento válido. (Copi, 2001, p. 115)

¿Cómo podemos entender lo anterior? La inferencia "Función proposicional → Función proposicional", sólo es válida cuando la sustitución por constantes de las variables libres forma un argumento válido. Tomemos un ejemplo, 'Fx' es una *función proposicional*, no está ni cuantificada, ni sus variables libres han sido sustituidas por constantes. 'Fx' se sigue válidamente de las *funciones proposicionales*

'Fx v Dx' y '¬Dx', porque cuando sustituimos la variable libre 'x' por cualquier constante, obtenemos argumentos válidos (en éste caso instancias del *silogismo disyuntivo*). Si sustituimos 'x' por Julio César, y tomamos en cuenta que Fx: 'x es un tirano', y Dx: 'x es un demócrata', obtenemos el siguiente argumento válido:

1. Julio César es un tirano o es un demócrata.
2. Julio César no es un demócrata.

   /.: Julio César es un tirano.

Podemos usar nuestras reglas inferenciales y nuestras reglas de reemplazo para construir pruebas formales de validez para argumentos que involucran tanto funciones proposicionales, como proposiciones.

Por ejemplo:

1.- $(\neg\forall x\,(Px \rightarrow Tx) \wedge Hs) \vee Fx$

2. $\neg\,(\neg\forall x\,(Px \rightarrow Tx) \wedge Hs)$ /.: Fx

3. Fx 1,2 D. S. (*Silogismo disyuntivo*)

No importa la cantidad de cuantificadores y tipos de predicados involucrados en una proposición, ni tampoco si las premisas o las conclusiones poseen funciones proposicionales, podemos emplear nuestras reglas inferenciales para construir pruebas formales de validez.

Nótese el siguiente ejemplo:

1.- $Fx \rightarrow \neg\forall x\exists y(Px \rightarrow (Axy \wedge \neg Ayx))$

2.- $\neg\,(\neg\forall x\exists y(Px \rightarrow (Axy \wedge \neg Ayx))$ /.: $\neg\, Fx$

3.- $\neg\, Fx$ 1,2 M. T. (*Modus Tollens*)

El lector debe reflexionar sobre el siguiente ejemplo emblemático:

1. ¬Sc v (Rc ∧ ∀y (Ty → Uy))	
2. ¬ (Rc ∧ ∀y (Ty → Uy)	
3. ∃xTx → Fx	
4. ∃xRx→ Sc	/.: ¬∃xTx v ¬∃xRx
5. ¬Sc	1,3 D. S.
7. ¬Sc v ¬Fx	5, Ad. (*Adición*)
8. ¬Fx v ¬Sc	7,Conm. (*Conmutación*)
9.- ∃xTx → Fx ∧ ∃xRx→ Sc	3,4 Conj. (*Conjunción*)
10.-¬∃xTx v ¬∃xRx	7,9 D. D. (*Dilema destructivo*)

Ejercicios

Elabora una prueba formal de validez para los siguientes argumentos.

a)	**b)**
1. ∃x(Kx ∧ Ix) → Ox	1. Ta v ∃y (Ly ∧ Jy)
2. Ox → Tc	2. ∃y (Ly ∧ Jy) → ¬∀x (Px → Tx)
/.: ∃x(Kx ∧ Ix) → Tc	3. ¬ Ta
	/.: ¬∀x (Px → Tx)

c)

1.- $\neg\exists x\,(Hx \wedge Ix) \wedge Tx$

2. $Tx \rightarrow Px$

/.: Px

d)

1. $Px \vee \forall x\,(Rx \rightarrow Tx)$
2. $Px \rightarrow \neg\exists x\,(Tx \wedge Rx)$
3. $\forall x\,(Rx \rightarrow Tx) \rightarrow Tx$

/.: $\neg\exists x\,(Tx \wedge Rx) \vee Tx$

e)

1. $Tx \rightarrow \neg Ox$
2. $\neg Tx \rightarrow Da$

/.: $Ox \rightarrow Da$

f)

1. $Da \rightarrow Tx$
2. $\neg Fa$

/.: $Fa \rightarrow Tx$

3.3.3 Las reglas de particularización y generalización universal.

La regla de *particularización universal* (U. I.) determina que de un enunciado universal se implica válidamente cualquier instancia de sustitución de las variables libres de las funciones proposicionales empleadas; pues un enunciado universal es verdadero si y sólo si todas las instancias de sustitución de variables libres por constantes en las funciones proposicionales del enunciado universal, conforman enunciados verdaderos.

Particularización universal:

$\forall x\ Fx$

$/.:\ Fy$ ('y' representa cualquier individuo del universo de discurso)

Figura 7: La regla de particularización universal

<table>
<tr><td>$\forall x(Px \rightarrow Mx)$</td><td rowspan="5">=</td><td>$Pp \rightarrow Mp$ (p: Peña Nieto).</td></tr>
<tr><td>Px: 'x es presidente de México'</td><td>$Pf \rightarrow Mf$ (f: Felipe Calderón)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mx: 'x es mexicano'</td><td>$Pv \rightarrow Mv$ (v: Vicente Fox)</td></tr>
<tr><td>$Pz \rightarrow Mz$ (z: Ernesto Zedillo)</td></tr>
<tr><td>(…)</td></tr>
<tr><td>$\forall xFx$</td><td>$\rightarrow$</td><td>Fy</td></tr>
<tr><td colspan="3">$Pp \rightarrow Mp$, $Pf \rightarrow Mf$, $Pv \rightarrow Mv$, $Pz \rightarrow Mz$, todos son enunciados verdaderos, en tanto que $\forall x(Px \rightarrow Mx)$ es verdadero, y si $\forall x(Px \rightarrow Mx)$ es falsa, entonces todos esos enunciados son falsos.</td></tr>
</table>

El siguiente ejemplo ilustra el empleo de la regla de particularización universal, es importante tomar en cuenta que así como abreviamos las reglas de inferencia, así también abreviamos la regla de *particularización universal* con el acrónimo "U. I.".

1. $\forall x(Px \rightarrow Hx)$ Universo de discurso: los seres humanos.
2. $\neg Hp$ $/.:\neg Pp$ Px: 'x es político', y Mx: 'x es honesto'.

3. Pp Ÿ Hp   1, U. I.   (Particularización Universal)

p: Peña Nieto.

4. $\neg Pp$ 2,3 M. T. (Modus Tollens)

Como queda claro en el ejemplo, la regla de particularización universal permite tomar las funciones proposicionales del enunciado universal ($\forall x(Px \rightarrow Hx)$), para formar otra proposición sustituyendo las variables libres por alguna constante ($Pp \rightarrow Hp$). En otras palabras, si cierta relación entre predicados se cumple para cualquier miembro del universo de discurso, esa relación también se cumple en algún miembro específico elegido arbitrariamente. Un punto fundamental para el uso de dicha regla, es que la constante que se elige para sustituir a las variables libres sea la misma en la prueba formal de validez.

Un punto importante en el empleo de la particularización universal en la construcción de una prueba formal de validez, es que con dicha regla podemos inferir tanto que la relación entre predicados del enunciado universal se cumple para un miembro específico, como que dicha relación entre predicados se cumple dentro del universo de discurso. Es decir, de $\forall x\ Fx$ se infiere tanto ‘Fp’, como ‘Fy’. Pero nunca se puede inferir válidamente a partir de $\forall x\ (Fx \rightarrow Mx)$ la verdad de $\exists x\ (Fx \wedge Mx)$. Recordemos el ejemplo de los unicornios en la página 17.

La regla de particularización universal puede ser mejor entendida a partir de la siguientes tautologías, tomando el ejemplo anterior.

$\forall x(Px \rightarrow Hx) \rightarrow (Px \rightarrow Hx)$, donde ‘x’ es cualquier miembro del universo de discurso.

$\forall x(Px \rightarrow Hx) \rightarrow (Ps \rightarrow Hs)$, donde ‘s’ es algún miembro específico del universo de discurso.

La regla de *generalización universal* puede ser entendida como la relación inversa a la establecida en la *particularización universal*. Si de que cierta relación de predicados se cumple para todos los miembros del universo de discurso, se implica que dicha relación se cumple para un individuo específico elegido arbitrariamente, entonces de que cierta relación entre predicados se cumple para cualquier individuo que se elija, se sigue válidamente que esa relación se cumple en todos los individuos.

Para esta regla también usaremos el símbolo 'Fy' para referirnos a que el predicado 'Fy' se cumple para cualquier individuo que sea elegido dentro del universo de discurso, es decir que 'Fa', 'Fb', 'Fc', 'Fd', etc., son todas verdaderas, en tanto que 'a', 'b', 'c', 'd', son miembros específicos del universo de discurso.

Generalización universal:
Fy
.: ∀x Fx

Lo siguiente es un ejemplo del uso de ésta regla en una prueba formal de validez, dicha regla la representamos con el acrónimo 'U. G.'.

1. ∀x (¬ Hx → ¬ Mx)
2. ∀x (¬ Mx → ¬ Tx)
3. ∀x (¬ Tx → ¬ Vx) /.: ∀x (¬ Hx → ¬ Vx)
4. ¬ Hy → ¬ My 1, U. I. (Particularización universal)
5. ¬ My → ¬ Ty 2, U. I. (Particularización universal)
6. ¬ Hy → ¬ Ty 5, 6 H. S. (Silogismo hipotético)
7. ¬ Ty → ¬ Vy 3, U. I. (Particularización universal)
8. ¬ Hy → ¬ Vy 6, 7, H. S. (Silogismo hipotético)
9. ∀x (¬ Hx Ÿ ¬ Vx) 8, U. G.
(Generalización universal)

La regla de generalización universal no debe ser confundida con la siguiente inferencia inválida:

$\exists x\,(Hx \wedge Mx)$

.: $\forall x\,(Hx \rightarrow Mx)$

El argumento anterior es la falacia de la inducción, evidentemente de que cierta relación entre predicados se cumple para algún miembro del universo de discurso, no se implica válidamente que esa relación se cumple para todos los miembros del universo de discurso.

Otra inferencia inválida con la cual puede ser confundida la regla de generalización universal es la siguiente:

$Hs \wedge Ms$

.: $\forall x\,(Hx \rightarrow Mx)$

De manera análoga a lo anterior, de que ciertos predicados se cumplen para un miembro específico del universo de discurso, no se implica válidamente que esos predicados que cumplen para todos los miembros del universo de discurso.

iii.3 Las reglas de particularización y generalización existencial

Si las reglas de particularización y generalización universal pueden ser entendidas como inferencias válidas entre enunciados universales (enunciados que incluyen cuantificadores universales), y funciones proposicionales ('fy'), o enunciados que incluyen constantes ('fs'); las reglas de particularización y generalización existencial pueden ser entendidas como inferencias válidas entre enunciados particulares (enunciados que incluyen cuantificadores existenciales), y funciones proposicionales (‘fv’), o enunciados que incluyen constantes (‘fs’). Para dar cuenta de las dos últimas reglas, usaremos el símbolo ‘v’ para representar a cualquier constante individual diferente a ‘y’, y que no aparece en el contexto. Una nota importante es que cuando se ha elegido dicha constante individual, no se puede elegir otra arbitrariamente en el transcurso de la prueba formal de validez. En otras palabras los siguientes argumentos son inválidos:

Ha ∧ Mb .: ∃x (Hx ∧ Mx)	(Ha ∧ Ta) ∧ (Mb ∧ Tb) .:∃x (Hx ∧ Mx)
∃x (Hx ∧ Mx) .:(Ha ∧ Ma) ∧ (Hb ∧ Mb)	∃x (Hx ∧ Mx) .: Ha ∧ Mb

Particularización existencial:

∃x Px
.: Pv

Un enunciado particular (enunciado que contiene cuantificadores existenciales) es verdadero si y sólo si, al menos algún individuo del universo de discurso cumple con los predicados del enunciado particular. En otras palabras, si ‘∃x (Hx ∧ Mx)’ es verdadero, entonces ‘Hv ∧ Mv’ (‘v’ es alguna constante individual arbitraria), y si ‘Hv ∧ Mv’ es verdadero, entonces ‘∃x (Hx ∧ Mx)’ es verdadero.

La regla de particularización existencial nos permite elegir alguna constante individual del universo del discurso para construir un enunciado a partir de los predicados de un enunciado particular. Un ejemplo del uso de dicha regla en una prueba formal de validez es el siguiente:

1. $\forall x (\neg Hx \rightarrow \neg Vx)$	
2. $\exists x (Vx \wedge Tx)$ /.: $\exists x (Hx \wedge Tx)$	
3. Va ’ Ta	**2, E. I. (Particularización existencial)**
4. $\neg Ha \rightarrow \neg Va$	1, U. I. (Particularización universal, nótese que no podría realizarse la particularización universal antes que la existencial, porque de lo contrario, tendríamos que elegir una constante diferente en la segunda particularización, en tanto que una particularización existencial no puede utilizar una constante que ya se ha utilizado).
5. Va	3, Sim. (Simplificación)
6. $\neg\neg Va$	5, D. N. (Doble negación)
7. $\neg\neg Ha$	4,6 M. T. (Modus tollens)
8. Ha	7, D.N. (Doble negación)
9.Ta	3, Sim. (Simplificación)
10.$Ha \wedge Ta$	8, 9 Conj. (Conjunción)
11. $\exists x (Hx \wedge Tx)$	10, E. G. (Generalización existencial)

Sin embargo, cuando en un argumento tenemos premisas que involucran distintos enunciados existenciales, no podemos emplear la regla de particularización existencial atribuyendo la misma constante a todos los enunciados existenciales. Lo siguiente es un ejemplo de este error.

1. $\exists x (Mx \wedge Hx)$	
2. $\exists x (Hx \wedge Tx)$ /.: $\exists x (Mx \wedge Tx)$	
3. $Ma \wedge Ha$	1, E. I. (Particularización existencial)
4. Ha ’ Ta	**2, E. I. (Error, no podemos usar la constante óaộ porque ya se empleó en la fórmula anterior).**

Sin esta restricción podríamos probar absurdamente los siguientes argumentos inválidos.

∃x (Mx ∧ Hx)	∃x (Mx ∧ Hx)
∃x (Hx ∧ Tx)	∃x (Hx ∧ Tx)
/. : ∃x (Mx ∧ Tx)	∃x (Tx ∧ Cx)
	. ∃x (Mx ∧ Cx)

Generalización existencial:

Fv

.: ∃x Fx

La generalización existencial establece la relación inversa que se cumple en la particularización existencial, si cierto predicado es verdadero para algún individuo específico del universo de discurso, entonces es verdadero que existe algún individuo que posee dicho predicado. En la anterior prueba formal de validez encontramos ya un ejemplo de la generalización existencial, agregaremos el siguiente ejemplo:

1. ∀x (¬ Rx → ¬ Sx)	
2. Sa	/.:∃x (Rx ∧ Sx)
3. ¬¬ Sa	2, D. N. (Doble negación)
4. ¬ Ra → ¬ Sa	1, U. I. (Particularización universal)
5. ¬¬Ra	3, 4 M. T. (*Modus tollens*)
6.Ra	5, D. N. (Doble negación)
7. Ra ∧ Sa	2, 6 Conj. (Conjunción)
8. ∃x (Rx ’ Sx)	**7, E. G. (Generalización existencial)**

Ejercicios

a. **Formaliza los siguientes argumentos con enunciados que contienen cuantificadores:**

1. Todos los racionalistas son innatistas. Leibniz es racionalista. Por lo tanto, Leibniz es innatista.

   ____

2. Ningún empirista es metafísico. Algún empirista es realista. Por lo tanto, hay algún realista que no es metafísico.

   ____

3. Todos los filósofos son contemplativos. Por lo tanto, si Aristóteles es filósofo, entonces existe algún filósofo que es contemplativo.

   ____

4. 4. Existe algún empirista que es idealista. Por lo tanto, no es cierto que ningún empirista es idealista.

   ____

5. Todos los naturalistas son empiristas. Ningún empirista es metafísico. Por lo tanto ningún naturalista es metafísico.

   ____

6. Comte es positivista. Todos los positivistas son empiristas. Por lo tanto Comte es empirista.

   ____

7. Durkheim es positivista y es sociólogo. Marx es empirista y no es filósofo. Por lo tanto, existe algún positivista que es sociólogo, y existe algún empirista que no es filósofo.

   ____

8. Aristóteles es realista. Platón es idealista. Todos los idealistas son innatistas, y ningún realista es innatista. Por lo tanto, existe algún realista que no es innatista, y existe algún idealista que es innatista.

   ____

9. Berkeley es empirista e idealista. Todo idealista es innatista. Por lo tanto existe algún idealista que es innatista.

   ____

10. Todos los empiristas son realistas. Ningún realista es metafísico. Hume es empirista. Por lo tanto existe algún empirista que no es metafísico.

    ____

b. Elabora una prueba formal de validez para los argumentos formalizados de los ejercicios anterior usando las cuatro reglas para el uso de cuantificadores.

Notas:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____________________.

Bibliografía

Amor José Alfredo La enseñanza del Análisis Lógico [En línea] // Suma Logicae. - Summa Logicae. Página y Repositorio en la Universidad de Salamanca, 19 de 04 de 2005. - PDF. - 16 de Febrero de 2017. - http://logicae.usal.es/mambo/index.php?option=com_summalogicaexxi&menu_task=Biblioteca&task=no_task&cm.

Atocha Aliseda La Lógica como Herramienta de la Razón. Razonamiento Ampliativo en la Creatividad, la Cognición y la Inferencia [Libro] = Cuadernos de lógica, epistemología y lenguaje. - Milton Keynes : College Publications, 2014. - Vol. 6. - ISBN 978-1-84890-147-6.

Copi Irvin C. y Cohen Carl Introducción a la Lógica [Libro]. - México : Limusa, 2011.

Copi Irving M. Lógica Simbólica [Libro]. - México : Compañía Editorial Continental, S.A. DE C.V., 1979.

Dión Martínez Carlos Curso de Lógica [Libro]. - México : McGraw-Hill, 1998.

Fernández de Castro Max Lógica elemental [Libro]. - México : UAM-I, 1996.

Fuerte Pérez José Alejandro Taller de lógica. Guía de texto I [Libro]. - México : SIGSA, 2001.

Gamut L.T.F Introducción a la Lógica. EUDEBA [Libro]. - Buenos Aires : [s.n.], 2002.

Gómez Torrente Mario La noción de consecuencia lógica [Sección de libro] // Filosofía de la lógica / ed. Orayen Raúl y Moretti Alberto. - Madrid : Trotta, 2004. - Vol. 27.

Granville William Cálculo diferencial e integral [Libro]. - México : Limusa, 2012.

Quesada Daniel Lógica clásica de primer orden [Sección de libro] // Lógica / aut. libro Carlos E. Alchourrón José Méndez y Raúl Orayen. - Madrid : Trotta, 1995.

Seiffert Helmut Introducción a la lógica [Libro]. - Barcelona : Herder, 1977.

van Benthem J. Abduction at the interface of Logic and Philosophy of Science [Publicación periódica]. - Theoria, An International Journal for Theory, History and the Foundations of Science : [s.n.], 2007. - 22 : Vol. 60. - págs. 271-273.