



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN
FÍSICA Y MATEMÁTICAS



UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE AUBRY-MATHER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

LIC. HERÓN CÁRDENAS CRUZ

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. EDDALY GUERRA VELASCO

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS.

JUNIO 2019.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DIRECCIÓN

CONTROL ESCOLAR POSGRADO



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
13 de junio de 2019
Oficio No. FCFM/0286/19

Dra. Eddaly Guerra Velasco
Presidente y Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

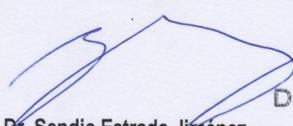
"UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE AUBRY-MATHER".

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestro en Ciencias Matemáticas del Lic. Herón Cárdenas Cruz con matrícula escolar: PS801.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

"Por la conciencia de la necesidad de servir"


Dr. Sendic Estrada Jiménez

Director



C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
SEJ /jmag

FCFM- UNACH – Ciudad Universitaria, Carretera Emiliano Zapata Km 8, Rancho San Francisco, Tuxtla Gutiérrez,
Chiapas. C. P. 29050.

Correo electrónico: fcfm.posgrado@gmail.com Tel. 61 7 80 00 ext. 8104

Agradecimientos

A mis padres: Herón Cárdenas Manzo e Hilaria Cruz Gómez por su confianza, apoyo incondicional, comprensión y amor. Estas sencillas palabras no bastan para decirles lo mucho que me siento honrado de ser su hijo.

A mi asesora Dra. Eddaly Guerra Velasco por su apoyo en mi formación académica, por haberme guiado en el desarrollo de este trabajo, por el tiempo que me dedicó para resolver todas y cada una de mis dudas.

Al Dr. Boris Asdrubal Percino Figueroa por sus consejos y orientación brindada durante mi formación en la maestría. Más aún agradezco todo el tiempo que me dedicó a lo largo de éste trabajo.

A los revisores: Dr. Armando Felipe Mendoza Pérez, Dr. Aldo Aparicio Martínez Merino y Dr. José Saúl Campos Orozco por dedicarle su tiempo a mí y a mi tesis. Gracias por sus comentarios y/o sugerencias para mejorar este trabajo.

A mi novia Karla Guadalupe Muñoz Zabaleta por su amor, paciencia y confianza durante este peldaño académico.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por otorgarme el apoyo que ha hecho ésto posible y por lo cual mi único trabajo durante el periodo de maestría sólo fue estudiar.

Introducción

La teoría de Aubry-Mather, desarrollada por Serge Aubry [4], John Mather [21] y ampliada por Ricardo Mañé [18] y Albert Fathi [12], estudia las órbitas mínimas de los sistemas Hamiltonianos convexos, ésta puede considerarse como una versión débil de la teoría KAM, desarrollada de manera individual por Andrey Kolmogorov [17], Jürgen Moser [24] y Vladimir Arnold [1] que estudia la existencia de movimientos cuasi periódicos¹ para sistemas Hamiltonianos casi integrables, es decir, sistemas Hamiltonianos que son una ligera perturbación de uno integrable. En el caso sistemas Hamiltonianos integrables, todo el espacio fase está foliado por subvariedades Lagrangianas invariantes que son difeomorfas al toro, en las cuales la dinámica es conjugada mediante una rotación rígida (vector de rotación fijo), éstos toros generalmente son llamados KAM-toros (ver Definición 2.1.1).

Los resultados de la teoría de Aubry-Mather son particularmente *visibles* si el espacio de configuración es bidimensional, ver por ejemplo [5] y [23]. Por lo cual, al trabajar con Lagrangianos superlineales positivos definidos en variedades compactas, también llamados Lagrangianos de Tonelli (ver Definición 1.4.1), tenemos el entorno apropiado para ésta teoría, de hecho, es posible probar la existencia de conjuntos invariantes interesantes (que minimizan la acción), conocidos como conjuntos de Mather, Aubry y Mañé, los cuales generalizan los KAM-toros.

En éste trabajo presentamos una introducción a la teoría de Aubry-Mather mediante KAM-toros, debido a que al analizar las medidas invariantes soportadas en KAM-toros, encontramos entre éstas aquellas que son minimizantes de la acción, de lo cual obtuvimos los conjuntos de Mather; posteriormente al analizar las propiedades que cumplen las proyecciones de las órbitas sobre KAM-toros, encontramos aquellas que minimizan *sin importar el sentido*, lo cual nos llevó a definir los conjuntos de Aubry y Mañé. Cabe mencionar que sólo

¹Un movimiento cuasi periódico es el tipo de evolución temporal que presenta un fenómeno físico que sin ser periódico repite una y otra vez condiciones arbitrariamente cercanas a una posición previa del sistema.

trabajamos con sistemas Lagrangianos autónomos (es decir, sin dependencia del tiempo en el Lagrangiano y Hamiltoniano) esto implica en particular que la energía del sistema se conserva y por lo tanto dichos conjuntos quedan contenidos en la subvariedad de nivel correspondiente de la función energía.

El trabajo consta de cuatro capítulos, todos y cada uno de ellos necesarios para el objetivo del mismo, organizado de la siguiente manera:

1. **Cálculo de variaciones.** Discutiremos con los conceptos de cálculo de variaciones, comenzando con definiciones generales en variedades diferenciales, entre éstas la definición de minimizante. Probamos algunas propiedades que éstas satisfacen en subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , para posteriormente demostrar que tales propiedades siguen siendo válidas si la variedad diferenciable es la apropiada. Finalmente definimos el tipo de Lagrangianos con los que trabajaremos, conocidos como Lagrangianos de Tonelli.
2. **Introducción a la Teoría de Aubry-Mather mediante un KAM-toro.** Aquí discutiremos algunas propiedades de las órbitas y de las medidas de probabilidad invariantes que se admiten en un KAM-toro, las cuales nos proporcionarán una mejor comprensión de la geometría detrás de la Teoría de Aubry-Mather. El desarrollo que conlleva a obtener tales propiedades, nos permitirá guiarnos para hacer un desarrollo análogo en el siguiente capítulo y posteriormente definir los conjuntos de Mather, Aubry y Mañé en un KAM-toro.
3. **Teoría de Aubry-Mather en Variedades Compactas.** Como habíamos mencionado anteriormente, éste capítulo está inspirado en lo que ocurre con las medidas invariantes y las órbitas en un KAM-toro, por lo cual, comenzaremos con el estudio de las medidas de probabilidad invariantes del sistema y sus propiedades para minimizar la acción, con ésto podremos definir la primer familia de conjuntos invariantes en el caso de variedades compactas, a saber, los conjuntos de Mather (ver Definición 3.1.14), en muchos aspectos, éstos conjuntos se parecerán y generalizarán a los KAM-toros, lamentablemente una de sus más grandes limitaciones es que al ser el soporte de medidas de probabilidad invariantes, son recurrentes bajo el flujo (Teorema de recurrencia de Poincaré [25, Teorema 17.3]), esta propiedad excluye a muchos conjuntos invariantes interesantes, por lo cual, definiremos otros conjuntos de invariantes, éstos también cumplirán con propiedades dinámicas interesantes, a menudo serán más grandes que los conjuntos de Mather. Tales conjuntos son llamados: los conjuntos Aubry y Mañé. Para finalizar daremos un teorema que relaciona a todos estos conjuntos.

Cabe notar que los anteriores capítulos tienen como principales fuentes [12] y [30].

4. **Ejemplo: Lagrangiano Mecánico.** Este capítulo presenta la aportación principal del trabajo de tesis, en este desarrollaremos un ejemplo, en el cual deduciremos los conjuntos de Mather, Aubry, Mañé, además de las funciones α y β de Mather; éste se dará en el Lagrangiano mecánico con energía potencial U sujeta a restricciones dadas, con las primeras condiciones pedidas la dinámica de nuestro ejemplo fue la misma que la del péndulo simple mostrado en [30, Secciones 3.5 y 4.3], es decir, nuestro desarrollo no tenía una aportación importante a la teoría, éste inconveniente fue solucionado al modificar una de las condiciones que pedimos al inicio, de lo cual, obtuvimos un cambio significativo en la dinámica de nuestro sistema y además fundamentó el teorema presentado al final de éste capítulo. Con este ejemplo somos ahora capaces de continuar con el estudio de esta teoría en contextos más generales, lo cual abre pauta a un trabajo futuro con aún más aportaciones a la teoría.

Índice general

1. Cálculo de variaciones	1
1.1. Conceptos básicos	1
1.2. Lagrangianos en subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n	4
1.3. Lagrangianos en variedades diferenciales	12
1.4. Lagrangianos y Hamiltonianos de Tonelli sobre variedades compactas	15
1.4.1. Lagrangianos de Tonelli	15
1.4.2. Hamiltonianos de Tonelli	17
2. Introducción a la Teoría de Aubry-Mather mediante un KAM-toro	21
2.1. Propiedades de las medidas minimizantes y de las órbitas en el KAM-toro	21
2.2. Conjunto de Mather en un KAM-toro	22
2.3. Conjunto de Mañé en un KAM-toro	27
2.4. Conjunto de Aubry en un KAM-toro	29
3. Teoría de Aubry-Mather en Variedades Compactas	35
3.1. Conjunto de Mather	35
3.1.1. Medidas de Mather	35
3.1.2. Medidas de Mather con vectores de rotación	43
3.2. Conjunto de Mañé	49
3.2.1. Curvas semiestáticas	49
3.3. Conjunto de Aubry	58
3.3.1. Curvas estáticas	58
3.4. La relación entre los conjuntos $\widetilde{\mathcal{M}}_c, \widetilde{\mathcal{A}}_c, \widetilde{\mathcal{N}}_c$ y $\widetilde{\mathcal{E}}_c$	60
4. Ejemplo: Lagrangiano Mecánico	71
4.1. Conjuntos de Mather, Aubry y Mañé para un potencial negativo	71
4.1.1. Medidas de probabilidad invariantes del sistema	73

4.1.2. Medidas minimizantes	77
4.1.3. Conjuntos de Mather	80
4.1.4. Funciones α y β de Mather	80
4.1.5. Conjuntos de Aubry y Mañé	81
4.2. Conjuntos de Mather, Aubry y Mañé para un potencial más general	87
Conclusiones	91
A. Teoría Ergódica y otros conceptos	93
Bibliografía	97

Capítulo 1

Cálculo de variaciones

Comenzaremos con los preliminares sobre Lagrangianos en variedades diferenciales, después nos centraremos en subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n para poder establecer ciertas propiedades que éstos satisfacen; remontaremos el estudio a variedades en la cual sólo trabajaremos con un tipo de variación, pero daremos una condición para que el problema variacional no dependa del tipo de variación elegida. Por último nos enfocaremos en los Lagrangianos de Tonelli sobre variedades compactas, éste es el entorno apropiado para trabajar con la teoría de Aubry-Mather, de la cual hablaremos más adelante.

1.1. Conceptos básicos

Sea M una variedad suave¹ y sin frontera, denotamos por TM a su haz tangente y por $\pi : TM \rightarrow M$ a la proyección canónica. Un punto de TM es denotado por (x, v) donde $x \in M$ y $v \in T_x M = \pi^{-1}(x)$. Al haz cotangente lo denotaremos por T^*M y su respectiva proyección denotada por $\pi^* : T^*M \rightarrow M$. Un punto de T^*M es denotado por (x, p) , donde $x \in M$ y $p \in T_x^*M = L(T_x M, \mathbb{R})$.

1.1.1 Definición. Un *Lagrangiano* L en la variedad M es un funcional continuo $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$.

1.1.2 Definición. Sean L un Lagrangiano en la variedad M y $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva continua C^1 a trozos, con $a \leq b$, la *acción* $A_L(\gamma)$ de γ para L es

$$A_L(\gamma) := \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds. \quad (1.1)$$

¹Cuyo atlas maximal es continuamente diferenciable, es decir, es de clase C^n para todo n , o lo que es lo mismo, es de clase C^∞ .

Nos interesa el problema de minimizar la acción sobre curvas continuas a trozos, con la condición de extremos fijos, por lo cual, tenemos la siguiente definición.

1.1.3 Definición. Sea L un Lagrangiano en M y sea \mathcal{C} el conjunto de curvas continuas a trozos (parametrizadas) en M , diremos que $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es *minimizante* sobre el conjunto \mathcal{C} , si para toda curva $\delta : [a, b] \rightarrow M$, con $\delta \in \mathcal{C}$, $\delta(a) = \gamma(a)$ y $\delta(b) = \gamma(b)$, tenemos que $A_L(\gamma) \leq A_L(\delta)$.

En el caso de que \mathcal{C} sea el conjunto de curvas continuas C^1 a trozos, entonces a la curva que minimiza la acción sobre todo \mathcal{C} simplemente será llamada minimizante. Para probar que $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una minimizante para alguna clase \mathcal{C} , por ahora sólo usaremos curvas parametrizadas por el mismo intervalo y los mismos puntos extremos, más adelante veremos que se puede omitir el intervalo de parametrización, es decir, encontrar minimizantes sin importar que compartan el mismo intervalo de definición.

1.1.4 Definición. Sea L un Lagrangiano $C^2(M)$, decimos que L es *no degenerado* si para cada $(x, v) \in TM$ la segunda derivada parcial $\partial^2 L / \partial v^2(x, v)$ es no degenerada como forma cuadrática.

Observe que la segunda derivada parcial $\partial^2 L / \partial v^2(x, v)$ tiene sentido, puesto que, sus derivadas parciales de orden 2 son continuas. De hecho, ésta es la segunda derivada de L restringida al espacio vectorial $T_x M$ y por tanto define una forma cuadrática en $T_x M$. De la misma manera, la primera derivada $\partial L / \partial v(x, v)$ es una forma lineal en $T_x M$, y por tanto $\partial L / \partial v(x, v) \in (T_x M)^* = T_x^* M$.

Definamos ahora la transformada siguiente, la cual nos permite relacionar de una manera muy peculiar al haz tangente con el cotangente.

1.1.5 Definición. Sea L un Lagrangiano $C^1(M)$, definimos la *transformada de Legendre* $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ asociada a L dada por

$$\mathcal{L}(x, v) = \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \right). \quad (1.2)$$

A continuación daremos las condiciones para que \mathcal{L} sea un difeomorfismo.

1.1.6 Proposición. Sea L un Lagrangiano C^r , con $r \geq 2$, en la variedad M , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) El Lagrangiano L es no degenerado.

2) La transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ es un C^{r-1} difeomorfismo local.

Más aún, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) El Lagrangiano L es no degenerado y \mathcal{L} es inyectivo.
- ii) La transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ es un C^{r-1} difeomorfismo global sobre su imagen.

DEMOSTRACIÓN. Los enunciados 1) y 2) son de naturaleza local, por lo cual, basta con probar la equivalencia cuando M es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Usamos las coordenadas canónicas en $M \subset \mathbb{R}^n$, $TM = M \times \mathbb{R}^n$ y $T^*M = M \times \mathbb{R}^{n*}$ (el dual de \mathbb{R}^n). En estas coordenadas, para cada punto $(x, v) \in TM$, la derivada $D\mathcal{L}(x, v) : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n*}$ de la transformada de Legendre \mathcal{L} tiene la siguiente forma matricial

$$D\mathcal{L}(x, v) = \begin{bmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) \\ 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

donde $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ es la matriz identidad de $n \times n$, luego tenemos que $D\mathcal{L}(x, v)$ es invertible como función lineal $M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n*}$ si y sólo si $\partial^2 L / \partial v^2(x, v)$ es no degenerada como forma cuadrática, de ésto y de (1.2) tenemos la equivalencia de 1) y 2), para demostrar las siguientes equivalencias, notemos que en *i*) pedimos que \mathcal{L} sea inyectiva y no degenerada, por lo cual, \mathcal{L} es biyectiva (sobre su imagen) y $D\mathcal{L}(x, v)$ es invertible, entonces por el Teorema de la función inversa [27, Teorema 1.20] tenemos que la transformada de Legendre \mathcal{L} es un difeomorfismo global. □

1.1.7 Definición. Sea M una variedad diferenciable, consideremos una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^r . Una *variación de clase C^r* de γ es una aplicación $\Gamma : [a, b] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ de clase C^r , con $\varepsilon > 0$, tal que $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$, $\forall t \in [a, b]$. Para cada variación denotamos por Γ_s a la curva $t \mapsto \Gamma(t, s)$ que también es de clase C^r .

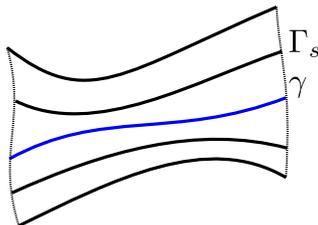


Figura 1.1: Representación gráfica de la variación Γ_s de la curva γ .

1.2. Lagrangianos en subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n

Supongamos que M es un subconjunto abierto contenido en \mathbb{R}^n . En este caso $TM = M \times \mathbb{R}^n$, y la proyección canónica $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección en el primer factor.

Ahora estudiaremos las propiedades de diferenciabilidad de la acción de L , para esto suponemos que L es C^1 .

1.2.1 Lema. *Sea L un Lagrangiano $C^1(M)$. Sean $\gamma, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos curvas continuas C^1 a trozos, con $\gamma([a, b]) \subset M$. La función $t \mapsto A_L(\gamma + t\gamma_1)$ está definida para t pequeño, cuya derivada en $t = 0$, está dada por*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A_L(\gamma + t\gamma_1)|_{t=0} &= \int_a^b DL[\gamma(s), \dot{\gamma}(s)](\gamma_1(s), \dot{\gamma}_1(s))ds \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}[\gamma(s), \dot{\gamma}(s)](\gamma_1(s)) + \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(s), \dot{\gamma}(s)](\dot{\gamma}_1(s)) \right] ds. \end{aligned} \quad (1.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que γ y γ_1 son continuas, tenemos que la aplicación $\Gamma : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(s, t) \mapsto \gamma(s) + t\gamma_1(s)$ es continua, más aún es uniformemente continua en $[a, b] \times [-1, 1]$. Como $\Gamma[s, 0] = \gamma(s) \in M$, para todo $s \in [a, b]$, concluimos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Gamma([a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]) \subset M$. Por lo tanto la acción de la curva $\Gamma(\cdot, t) = \gamma + t\gamma_1$ está definida para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Tomemos a F como el subconjunto finito de $[a, b]$, tal que tanto γ como γ_1 sean diferenciables en cada punto de $[a, b] \setminus F$ y definamos la función $\lambda : ([a, b] \setminus F) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\lambda(s, t) = L(\gamma(s) + t\gamma_1(s), \dot{\gamma}(s) + t\dot{\gamma}_1(s)),$$

cuya derivada parcial con respecto a t es dada por

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}(t, s) = DL[\gamma(s) + t\gamma_1(s), \dot{\gamma}(s) + t\dot{\gamma}_1(s)](\gamma_1(s), \dot{\gamma}_1(s)).$$

Más aún esta derivada parcial está uniformemente acotada en $([a, b] \setminus F) \times [-1, 1]$, ya que DL es continua, y las curvas γ, γ_1 son C^1 en $[a, b] \setminus F$. Por lo tanto, podemos diferenciar $A_L(\gamma + t\gamma_1) = \int_a^b L(\gamma(s) + t\gamma_1(s), \dot{\gamma}(s) + t\dot{\gamma}_1(s))ds$ bajo el signo integral para obtener el resultado deseado. \square

1.2.2 Definición. Una *curva extremal* para el Lagrangiano L es una curva continua C^1 a trozos $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tal que $\frac{d}{dt}|_{t=0}A_L(\gamma + t\gamma_1) = 0$, para toda curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^∞ , con $\gamma_1 = 0$ en vecindades de a y b . Por el Lema 1.2.1, ésto es equivalente a decir que

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))(\gamma_1(s)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))(\dot{\gamma}_1(s)) \right] ds = 0, \quad (1.5)$$

para cada curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^∞ que satisface $\gamma_1 = 0$ en vecindades de a y b .

Gracias a la definición anterior podemos dar el siguiente resultado.

1.2.3 Nota. Claramente, si γ es una curva extremal, entonces para toda $a', b' \in [a, b]$, con $a' < b'$, la restricción $\gamma|_{[a', b']}$ es también una curva extremal.

Podemos dar la relación entre minimizantes y curvas extremales, la cual está dada por la proposición siguiente.

1.2.4 Proposición. *Sea L un Lagrangiano en M y $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva C^r , con $r \geq 1$ (resp. continua C^1 a trozos), que minimiza la acción en el conjunto de curvas de clase C^r (resp. continuas C^1 a trozos), entonces γ es una curva extremal para L .*

La demostración es directa al considerar a la acción de L , como una función que va del conjunto de curvas C^r en \mathbb{R} . Usando la hipótesis de que γ minimiza la acción sobre éste conjunto de curvas, podemos concluir que el diferencial de $A_L(\gamma)$ es cero. Ahora presentamos una propiedad muy importante que satisfacen las curvas extremales, pero primero enunciaremos el siguiente lema.

1.2.5 Lema (Dubois-Raymond). *Sea $A : [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n*}$ una aplicación continua tal que $\int_a^b A(t)(\gamma_1(t))dt = 0$, para cada curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ que satisface $\gamma_1 = 0$ en vecindades de a y b , entonces $A(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un $t_0 \in]a, b[$ y $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $A(t_0)(v_0) \neq 0$. Sustituyendo v_0 por $-v_0$ si es necesario, podemos suponer que $A(t_0)(v_0) > 0$. Fijamos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño de modo que se satisfaga

$$A(t)(v_0) > 0, \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset]a, b[.$$

Luego escogemos una curva $\phi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ de clase C^∞ con $\phi = 0$ fuera del intervalo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ y $\phi(t_0) = 1$. Por hipótesis tenemos que $\int_a^b A(t)(\phi(t)v_0)dt = 0$, por otro lado, tenemos

$$\int_a^b A(t)(\phi(t)v_0)dt = \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \phi(t)A(t)(v_0)dt,$$

como la función $\phi(t)A(t)(v_0)$ es continua, no negativa en $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ y $\phi(t_0)A(t_0)(v_0) > 0$ ya que $\phi(t_0) = 1$, por lo tanto, su integral no puede ser cero, lo cual es una contradicción. \square

La proposición siguiente es una de las más importantes de éste capítulo y la más implementada al trabajar cálculo de variaciones.

1.2.6 Proposición. *Sea L un Lagrangiano de clase C^2 en el subconjunto abierto M de \mathbb{R}^n . Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva de clase C^2 , entonces γ es una curva extremal si y sólo si satisface la ecuación de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.6)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^∞ que se anula en vecindades de a y b , además como L y γ son $C^2(M)$, entonces la aplicación

$$t \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)](\gamma_1(t))$$

es C^1 y se anula en a y b . Tenemos que

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)](\gamma_1(t)) \right\} dt = 0,$$

lo cual implica

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)](\dot{\gamma}_1(t)) dt = - \int_a^b \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \right\} (\gamma_1(t)) dt.$$

Luego por la ecuación (1.5) tenemos que γ es una curva extremal si y sólo si

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \right\} \right] (\gamma_1(t)) dt = 0, \quad (1.7)$$

para toda curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^∞ que satisface $\gamma_1 = 0$ en vecindades de a y b . Entonces para concluir la demostración, es suficiente aplicar el Lema 1.2.5 con

$$A(t) = \frac{\partial L}{\partial x}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \right\},$$

y obtener que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

□

En lo que resta de ésta sección mostraremos que, bajo ciertas hipótesis del Lagrangiano L , las curvas extremales que son C^1 ó incluso continuas C^1 a trozos son necesariamente de clase C^2 , por lo tanto deben satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange. Enunciaremos el lema siguiente que es fundamental para la demostración de un lema que se deduce de la Proposición 1.2.6.

1.2.7 Lema (Erdmann). *Sea $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ una aplicación continua tal que $\int_a^b A(t)(\dot{\gamma}_1(t))dt = 0$, para toda curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ que se anula en vecindades de a y b , entonces la aplicación $A(t)$ es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos a $\phi_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^∞ con $\int_a^b \phi_0(t)dt = 1$ y $\phi_0 = 0$ en vecindades de a y b , sea $\tilde{\gamma}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^∞ que se anula en vecindades de a y b , tomemos a $C = \int_a^b \tilde{\gamma}_1(s)ds$, la curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$\gamma_1(t) := \int_a^t [\tilde{\gamma}_1(s) - C\phi_0(s)] ds$$

es C^∞ y es 0 en vecindades de a y b . Por lo tanto, ya que, $\dot{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_1(t) - C\phi_0(t)$, luego por hipótesis tenemos

$$\int_a^b A(t) [\tilde{\gamma}_1(t) - C\phi_0(t)] dt = 0,$$

consecuentemente

$$\int_a^b A(t) [\tilde{\gamma}_1(t)] dt - \int_a^b [\phi_0(t)A(t)] (C)dt = 0. \quad (1.8)$$

Si definimos $p := \int_a^b \phi_0(t)A(t)dt \in \mathbb{R}^{n*}$, entonces $\int_a^b [\phi_0(t)A(t)] (C)dt$ no es más que $p(C)$. Luego, por la definición de C y la linealidad de p , tenemos que $p(C) = \int_a^b p(\tilde{\gamma}_1(t))dt$. Entonces podemos reescribir la ecuación (1.8) como

$$\int_a^b [A(t) - p] (\tilde{\gamma}_1(t))dt = 0.$$

Dado que $\tilde{\gamma}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva continua que está sujeta solamente a las dos condiciones de ser C^∞ e igual a 0 en vecindades de a y b , por el lema 1.2.5 de Dubois-Raymond, tenemos que $A(t) - p = 0$ para toda $t \in [a, b]$. \square

1.2.8 Lema. *Sea L un Lagrangiano en el subconjunto abierto M de \mathbb{R}^n y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva extremal de clase C^1 para L , entonces existe $p \in \mathbb{R}^{n*}$ tal que*

$$\forall t \in [a, b], \quad \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = p + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))ds.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^∞ que se anula en vecindades de a y b , entonces la aplicación

$$t \mapsto \left[\int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))ds \right] (\gamma_1(t))$$

es C^1 y se anula en a y b . Resulta que

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left\{ \left[\int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right] (\gamma_1(t)) \right\} dt = 0,$$

Lo cual implica que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) (\gamma_1(t)) dt = - \int_a^b \left[\int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right] (\dot{\gamma}_1(t)) dt.$$

Por la condición dada en (1.5) tenemos que

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right] (\dot{\gamma}_1(t)) dt = 0.$$

Para concluir la demostración es suficiente con aplicar el Lema 1.2.7 con

$$A(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds = p, \quad \forall t \in [a, b].$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = p + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

□

Ahora demostraremos que bajo ciertas hipótesis del Lagrangiano L , las curvas extremales que con de clase C^1 son de hecho de clase C^r , $r \geq 2$, siempre que L también lo sea.

1.2.9 Corolario. *Sea L un Lagrangiano no degenerado de clase C^r ; $r \geq 2$, en un subconjunto abierto M de \mathbb{R}^n , entonces cada curva extremal C^1 es C^r .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva extremal C^1 . Fijemos t_0 y consideremos $(x_0, v_0) = (\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) \in TM$. De la proposición 1.1.6, la transformada de Legendre $\mathcal{L} : (x, v) \rightarrow (x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v))$ es un difeomorfismo local. Llamaremos a \mathcal{K} la inversa local de \mathcal{L} con $\mathcal{K}(x_0, \frac{\partial L}{\partial v}(x_0, v_0)) = (x_0, v_0)$. La transformada \mathcal{K} es de clase C^{r-1} (pues \mathcal{L} lo es). Por la continuidad de γ y $\dot{\gamma}$, para t cercano a t_0 , tenemos que

$$(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \mathcal{K} \left[\gamma(t), \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right]. \quad (1.9)$$

Luego, por el lema 1.2.8, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = p + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

Es claro que el lado derecho de 1.9 es de clase C^1 . Más aún, ya que \mathcal{K} es C^{r-1} , vemos que $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ también es de clase C^1 , para t cercano a t_0 , por lo tanto γ es C^2 . Por inducción usando nuevamente 1.9, tenemos que γ es C^r . \square

A continuación daremos un resultado similar a la Proposición 1.2.6, sólo que éste caso debilitamos la condición sobre las extremales de ser C^2 a simplemente ser C^1 a trozos.

1.2.10 Corolario. *Sea L un Lagrangiano de clase $C^r(M)$; $r \geq 2$, cuya transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ es un difeomorfismo sobre su imagen $\mathcal{L}(TM)$, entonces cada curva extremal continua C^1 a trozos de L , es de hecho C^r , y por lo tanto debe de satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange (1.6).*

DEMOSTRACIÓN. Dado que \mathcal{L} es un difeomorfismo tenemos que, por la Proposición 1.1.6, L es no degenerado. Luego, por el Corolario 1.2.9, cada curva extremal C^1 es C^r .

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva continua C^1 a trozos. Consideremos una partición

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b,$$

tal que la restricción $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es C^1 , $i = \overline{0, n-1}$, más aún, ya que $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es también una curva extremal, entonces tenemos que $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es C^r . Puesto que γ es una curva extremal, entonces para toda curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^∞ que se anula en vecindades de a y b , tenemos que

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_1(t)) \right] dt = 0. \quad (1.10)$$

Ya que $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es por lo menos de clase C^2 , denotemos por $\dot{\gamma}_-(t)$ a la derivada izquierda y $\dot{\gamma}_+(t)$ a la derivada derecha de γ en $t \in [a, b]$ e integrando por partes, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\partial L}{\partial v} [\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] (\dot{\gamma}_1(t)) dt &= \frac{\partial L}{\partial v} [\gamma(a_{i+1}), \dot{\gamma}_-(a_{i+1})] (\gamma_1(a_{i+1})) - \frac{\partial L}{\partial v} [\gamma(a_i), \dot{\gamma}_+(a_i)] (\gamma_1(a_i)) \\ &\quad - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial v} [\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \right] \right\} (\gamma_1(t)) dt. \end{aligned}$$

Usando lo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_1(t)) \right] dt \\
 &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \right] \right\} \right] (\gamma_1(t)) dt \\
 &+ \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_{i+1}), \dot{\gamma}_-(a_{i+1})](\gamma_1(a_{i+1})) - \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_i), \dot{\gamma}_+(a_i)](\gamma_1(a_i)) \\
 &= \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_{i+1}), \dot{\gamma}_-(a_{i+1})](\gamma_1(a_{i+1})) - \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_i), \dot{\gamma}_+(a_i)](\gamma_1(a_i))
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da, ya que $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es una curva extremal de clase C^2 , por lo cual debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange en el intervalo $[a_i, a_{i+1}]$. Sumando sobre i y usando la ecuación (1.10) tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_{i+1}), \dot{\gamma}_-(a_{i+1})](\gamma_1(a_{i+1})) - \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_i), \dot{\gamma}_+(a_i)](\gamma_1(a_i)) \right] = 0,$$

para toda curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^∞ que se anula en vecindades de a y b . Para $1 \leq i \leq n-1$, podemos elegir la curva γ_1 de clase C^∞ que se anula en la vecindad de la unión de dos intervalos $[a, a_{i-1}]$ y $[a_{i+1}, b]$, en el cual tomamos a a_i como un valor arbitrario fijo. Tenemos que

$$\forall i = \overline{1, n-1}, \quad \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_i), \dot{\gamma}_-(a_i)] = \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_i), \dot{\gamma}_+(a_i)].$$

Por la inyectividad de la transformada de Legendre tenemos que $\dot{\gamma}_-(a_i) = \dot{\gamma}_+(a_i)$. Por lo tanto, la curva γ es de hecho C^1 en $[a, b]$, en consecuencia, también es de clase C^r . \square

La prueba del lema siguiente es análoga a la del Lema 1.2.1, éste lema nos ayudará posteriormente a dar una caracterización de las curvas extremales.

1.2.11 Lema. *Sea Γ una C^2 -variación de la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^2 con valores en el subconjunto abierto M de \mathbb{R}^n , entonces la aplicación $s \mapsto A_L(\Gamma_s)$ es diferenciable y su derivada en 0 es*

$$\frac{d}{ds} A_L(\Gamma_s)|_{s=0} = \int_a^b DL[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0), \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}(t, 0) \right) dt. \quad (1.11)$$

Notemos que en el Lema 1.2.11 la C^2 -variación es general, a diferencia de la C^2 -variación dada en el Lema 1.2.1. Más aún, si suponemos que $\frac{d}{ds}A_L(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$ en la ecuación (1.11), entonces obtenemos una caracterización de las curvas extremales, lo cual da pie al resultado siguiente.

1.2.12 Lema. *Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^2 es una curva extremal del Lagrangiano L si y sólo si $\frac{d}{ds}A_L(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$, para cualquier C^2 -variación de γ tal que $\Gamma(a, s) = \gamma(a)$ y $\Gamma(b, s) = \gamma(b)$, para s en una vecindad de 0.*

DEMOSTRACIÓN. \Leftarrow] Las variaciones del tipo $\gamma(t) + s\gamma_1(t)$ con γ_1 de clase C^∞ son variaciones particulares de clase C^2 . Por lo tanto sólo nos faltaría el \Rightarrow], ésto resulta del siguiente teorema.

1.2.13 Teorema (Primera fórmula variacional). *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva extremal de clase C^2 , entonces para cualquier variación Γ de clase C^2 de γ , tenemos*

$$\frac{d}{ds}A_L(\Gamma_s)|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(b), \dot{\gamma}(b)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0) \right) - \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a), \dot{\gamma}(a)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0) \right). \quad (1.12)$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_L(\Gamma_s)|_{s=0} &= \int_a^b DL[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0), \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}(t, 0) \right) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0) \right) + \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}(t, 0) \right) \right] dt. \end{aligned}$$

Como γ es una curva extremal de clase C^2 , entonces satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right],$$

luego tenemos que

$$\frac{d}{ds}A_L(\Gamma_s)|_{s=0} = \int_a^b \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0) \right) + \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}(t, 0) \right) \right] dt.$$

Sin embargo el integrando de la última integral, no es más que la derivada de la aplicación $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0) \right)$ que es de clase C^1 , por tanto

$$\frac{d}{ds}A_L(\Gamma_s)|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(b), \dot{\gamma}(b)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0) \right) - \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a), \dot{\gamma}(a)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0) \right).$$

□

1.3. Lagrangianos en variedades diferenciales

En esta sección veremos que muchas de las propiedades que cumplen las curvas extremales en abiertos de \mathbb{R}^n se siguen cumpliendo aún en variedades diferenciales, también notaremos que es fundamental haber desarrollado primero la teoría en \mathbb{R}^n , para poder así tener una noción de lo que sucede localmente en las variedades.

Consideremos una variedad arbitraria M de clase C^∞ dotada con un Lagrangiano L de clase C^r , con $r \geq 2$.

1.3.1 Lema. Sean $\Gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ de clase C^2 y $\Gamma_s : [a, b] \rightarrow M$ definida por $\Gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$, entonces la aplicación $s \mapsto A_L(\Gamma_s)$ es C^1 .

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar la notación, supongamos que $0 \in [c, d]$ y mostremos que $s \mapsto A_L(\Gamma_s)$ es C^1 en algún intervalo $[-\eta, \eta]$, con $\eta > 0$. Podemos cubrir el conjunto compacto $\Gamma([a, b] \times \{0\})$ por una familia finita de cartas. Luego encontramos una partición $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tal que $\Gamma([a_i, a_{i+1}] \times \{0\})$ está contenido en U_i el dominio de definición de una de estas cartas. Por la compacidad, para η suficientemente pequeño, tenemos que $\Gamma([a_i, a_{i+1}] \times [-\eta, \eta]) \subset U_i$, para $i = \overline{0, n-1}$. Llevando lo anterior vía la carta, a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , podemos aplicar el lema 1.2.11 para obtener que

$$s \mapsto \int_{a_i}^{a_{i+1}} L[\Gamma(t, s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, t)] dt$$

es C^1 en algún intervalo $[-\eta, \eta]$. Ahora es suficiente notar que

$$A_L(\Gamma_s) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} L \left[\Gamma(t, s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s) \right] dt \quad (1.13)$$

ésta es C^1 en cada dominio de definición U_i , puesto que es difeomorfo vía la carta a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , para el cual hemos probamos que $A_L(\Gamma_s)$ es localmente diferenciable (ver Lemas 1.2.1 y 1.2.12). Por lo tanto, concluimos la demostración. \square

Como vimos en la demostración anterior y comentamos al inicio de la sección, no es difícil trabajar en variedades; ya que, siempre podemos hacer uso de las cartas coordenadas, puesto que el dominio de definición es una copia de \mathbb{R}^n , ya que, las cartas son homeomorfismos entre subconjuntos abiertos de la variedad M y \mathbb{R}^n . Por otro lado, gracias al Lema 1.3.1 podemos introducir el concepto de curva extremal para el Lagrangiano L de clase C^2 , en el caso de curvas $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^2 con valores en la variedad M .

1.3.2 Definición (Curva C^2 extremal). Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de clase C^2 es una curva extremal para el Lagrangiano L de clase C^2 , si para cada C^2 -variación $\Gamma : [a, b] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ de γ , con $\Gamma(t, s) = \gamma(t)$ en vecindades de $(a, 0)$ y $(b, 0)$, tenemos que $\left. \frac{d}{ds} A_L(\Gamma_s) \right|_{s=0} = 0$.

Notemos que, por el lema 1.2.12, si la curva y el Lagrangiano son de clase C^2 , la definición anterior coincide con la definición dada para el caso en donde M es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Anteriormente (ver Nota 1.2.3), mencionamos que si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva extremal, entonces para toda $a', b' \in [a, b]$, con $a' < b'$, la restricción $\gamma|_{[a', b']}$ es también una curva extremal, ésto es fácil de ver cuando M es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , ahora probaremos que se sigue cumpliendo aún trabajando en variedades diferenciales.

1.3.3 Lema. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva extremal de clase C^2 y $[a', b'] \subset [a, b]$, entonces la restricción $\gamma|_{[a', b']}$ es también una curva extremal.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada C^2 -variación $\Gamma : [a', b'] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ de $\gamma|_{[a', b]}$, con $\Gamma(t, s) = \gamma(t)$ en la vecindad de $(a', 0)$ y $(b', 0)$, escojamos ε' con $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ y $\delta > 0$ tal que $\Gamma(t, s) = \gamma(t)$ para todo $(t, s) \in ([a', a' + \delta] \cup [b' - \delta, b']) \times]-\varepsilon', \varepsilon'$. Por lo tanto podemos extender $\Gamma|_{[a', b'] \times]-\varepsilon', \varepsilon'}$ a

$$\tilde{\Gamma} : [a, b] \times]-\varepsilon', \varepsilon' \rightarrow M,$$

con $\tilde{\Gamma}(t, s) = \gamma(t)$, para $t \notin [a', b']$. Es claro que $\tilde{\Gamma}$ es una C^2 -variación, con $\Gamma(t, s) = \gamma(t)$ en vecindades de $(a, 0)$ y $(b, 0)$. Más aún, para $s \in]-\varepsilon', \varepsilon'$, la diferencia $A_L(\tilde{\Gamma}_s) - A_L(\Gamma_s)$ es igual a $A_L(\gamma|_{[a, a']}) + A_L(\gamma|_{[b', b]})$. □

El siguiente Teorema caracteriza que cada curva de clase C^2 es extremal si y sólo si satisface en coordenadas locales la ecuación de Euler-Lagrange (1.6).

1.3.4 Teorema (Euler-Lagrange). *Sea L un Lagrangiano de clase C^2 en la variedad M . Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva de clase C^2 . Si γ es extremal, entonces para cada subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$ tal que $\gamma([a', b'])$ este contenido en un dominio U de una carta coordenada, la restricción $\gamma|_{[a', b']}$ satisface (en coordenadas) la ecuación de Euler-Lagrange (1.6). Recíprocamente, si para todo $t_0 \in [a, b]$, podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ y un dominio U de una carta coordenada tal que $\gamma([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [a, b]) \subset U$ y $\gamma|_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [a, b]}$ satisface en la carta (en coordenadas) la ecuación de Euler-Lagrange (1.6), entonces la curva γ es una curva extremal.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 1.3.3, si γ es una curva extremal, entonces $\gamma|_{[a', b]}$ es también una curva extremal. Ya que $\gamma([a', b']) \subset U$, donde U es un dominio de una carta

coordenada, podemos entonces transportar, vía la carta coordenada, lo anterior a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , por tanto, $\gamma|_{[a',b']}$ debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange (1.6).

Recíprocamente, observemos que por la compacidad de $[a, b]$, podemos encontrar una partición $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ y una sucesión U_0, \dots, U_{n-1} de dominios de cartas coordenadas tales que $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset U_i$. Si Γ es una variación de clase C^2 de γ , podemos encontrar $\eta > 0$ tal que $\Gamma([a_i, a_{i+1}] \times [-\eta, \eta]) \subset U_i$ con $i = \overline{0, n-1}$. Por la primera fórmula variacional (1.12) tenemos que

$$\frac{d}{ds} A_L(\Gamma_s|_{[a_i, a_{i+1}]})|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_{i+1}), \dot{\gamma}(a_{i+1})] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_{i+1}, 0) \right) - \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_i), \dot{\gamma}(a_i)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_i, 0) \right).$$

Sumando estas igualdades, encontramos por la ecuación (1.13) que

$$\frac{d}{ds} A_L(\Gamma_s)|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(b), \dot{\gamma}(b)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0) \right) - \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a), \dot{\gamma}(a)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0) \right).$$

Si $\Gamma(a, s) = \gamma(a)$ y $\Gamma(b, s) = \gamma(b)$ en una vecindad de $s = 0$, obtenemos que tanto $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0)$, y $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0)$ son iguales a cero, por lo tanto, $\frac{d}{ds} A_L(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$ \square

La demostración previa también muestra que la primera fórmula variacional es válida en el caso de variedades diferenciales, por lo cual, tenemos el siguiente teorema.

1.3.5 Teorema (Primera fórmula variacional). *Sea L un Lagrangiano de clase C^2 en la variedad M . Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva extremal de clase C^2 , para cada C^2 -variación $\Gamma : [a, b] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$, $(t, s) \mapsto \Gamma(t, s)$ de γ , tenemos que*

$$\frac{d}{ds} A_L(\Gamma_s)|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(b), \dot{\gamma}(b)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0) \right) - \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a), \dot{\gamma}(a)] \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0) \right).$$

Por el Corolario 1.2.10 y argumentos similares usando cartas coordenadas, se puede demostrar el resultado siguiente.

1.3.6 Corolario. *Sea L un Lagrangiano de clase C^r en la variedad M ; $r \geq 2$, cuya transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva de clase C^k ; $k \geq 1$, (respectivamente una curva continua C^1 a trozos) es una minimizante para la clase de curvas C^k (respectivamente para la clase de curvas continuas C^1 a trozos), entonces γ es una curva extremal de clase al menos C^r .*

1.4. Lagrangianos y Hamiltonianos de Tonelli sobre variedades compactas

Una vez familiarizados con el uso de Lagrangianos en variedades diferenciales y con las propiedades que cumplen las extremales, podemos ahora definir el tipo de Lagrangianos con el que trabajaremos en ésta sección y a lo largo de éste trabajo. Más aún no hemos demostrado la existencia de que tales minimizantes existan, por lo cual, es necesario imponer condiciones a L para poder así garantizar la existencia de tales minimizantes, pero primero es necesario tener el espacio ideal para el desarrollo del mismo.

Sea M una variedad suave, sin frontera, compacta y conexa. Fijemos una *métrica Riemanniana* g y denotemos por d la métrica inducida en M . Sea $\|\cdot\|_x$ la *norma* inducida por g en T_xM , vamos a utilizar la misma notación para la norma inducida en T_x^*M .

1.4.1. Lagrangianos de Tonelli

Consideremos los Lagrangianos $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Asociado a cada Lagrangiano, existe un flujo en TM llamado el *flujo de Euler-Lagrange*, el cual definiremos más adelante, anteriormente ya habíamos definido la acción A_L de una curva γ determinada por la ecuación (1.1), además sabemos que las curvas de clase C^2 que son extremales del funcional A_L son soluciones de la *ecuación de Euler-Lagrange* (1.6), al desarrollar ésta ecuación obtenemos la siguiente equivalencia

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\ddot{\gamma}(t) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), \quad (1.14)$$

por lo tanto, si la segunda derivada parcial es no degenerada en todos los puntos de TM , se puede resolver la ecuación anterior para $\ddot{\gamma}(t)$. La condición

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \neq 0 \quad (1.15)$$

ésta es llamada la *condición de Legendre* y permite definir un campo vectorial X_L en TM , puesto que, por la condición de Legendre (1.15), tenemos que $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ es invertible y al despejar $\ddot{\gamma}(t)$ en la ecuación (1.14), obtenemos

$$X_L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) := \ddot{\gamma}(t) = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right]^{-1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) \right],$$

1.4. LAGRANGIANOS Y HAMILTONIANOS DE TONELLI SOBRE VARIEDADES COMPACTAS

por lo cual, las soluciones de la ecuación anterior son precisamente las curvas que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange. Este campo vectorial X_L es llamado el *campo vectorial de Euler-Lagrange* y su flujo Φ_t^L es el *flujo de Euler-Lagrange* asociado a L .

1.4.1 Definición (Lagrangiano de Tonelli). Una función $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado Lagrangiano de Tonelli si

- i) $L \in C^2(TM)$;
- ii) L es estrictamente convexo en cada fibra, en el sentido C^2 , es decir, la segunda derivada parcial $\partial^2 L / \partial v^2(x, v)$ es positiva definida como forma cuadrática para todo $(x, v) \in TM$;
- iii) L es superlineal en cada fibra, es decir,

$$\lim_{\|v\|_x \rightarrow +\infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|_x} = +\infty,$$

ésta condición es equivalente a pedir que, para cada $A \in \mathbb{R}$, exista $B(A) \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v) \geq A\|v\| - B(A) \quad (x, v) \in TM.$$

1.4.2 Nota. Para garantizar la existencia de la transformada de Legendre, necesitamos que el Lagrangiano sea C^1 y no degenerado. Con la hipótesis i) tenemos la primera condición y la segunda la obtenemos gracias a que L es estrictamente convexo. Dado que la variedad es compacta, entonces la condición iii) es independiente de la elección de la métrica Riemanniana g . Además, la equivalencia en iii) es directa, de hecho, si $\lim_{\|v\|_x \rightarrow +\infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|_x} = +\infty$, entonces $L(x, v)$ crece más rápido que una ecuación lineal dependiente de $\|v\|_x$, es decir, $L(x, v) \geq A\|v\|_x - B$ para cada $A \in \mathbb{R}$. Por otro lado, si se cumple que $L(x, v) \geq A\|v\|_x - B$ para cada $A \in \mathbb{R}$ entonces al dividir entre $\|v\|_x$ y tomar el límite cuando $\|v\|_x \rightarrow +\infty$, es decir, $\lim_{\|v\|_x \rightarrow +\infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|_x} \geq A$, $\forall A \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\lim_{\|v\|_x \rightarrow +\infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|_x} = +\infty$.

A continuación daremos algunos ejemplos de Lagrangianos de Tonelli.

- **Lagrangianos Riemannianos.** Dada una métrica g en M , el *Lagrangiano Riemanniano* en (TM, g) es dado por la energía cinética:

$$L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2.$$

Cuya ecuación de Euler-Lagrange es la ecuación de las geodésicas de g :

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x} \equiv 0,$$

donde $\nabla_{\dot{x}}\dot{x}$ denota la derivada covariante y su flujo de Euler-Lagrange coincide con el flujo geodésico.

- **Lagrangianos mecánicos.** Estos Lagrangianos desempeñan un papel clave en el estudio de la mecánica clásica, los cuales están dados por la suma de la energía cinética y una función *potencial* $U : M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2 + U(x).$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada está dada por la 2ª ley de Newton:

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = \nabla U(x),$$

donde ∇U es el gradiente de U con respecto a la métrica Riemanniana g , es decir,

$$d_x U \cdot v = \langle \nabla U(x), v \rangle_x, \quad \forall (x, v) \in TM.$$

1.4.2. Hamiltonianos de Tonelli

Como es común en el estudio de la dinámica Newtoniana, muchas veces resulta útil trabajar con la *parte dual* del sistema Lagrangiano, es decir, con el Hamiltoniano asociado, éste está definido en el haz cotangente de la variedad M , T^*M . Ahora describiremos al sistema Hamiltoniano y la relación que tiene con el Lagrangiano.

Haremos uso de la transformada de Fenchel, la cual permite transformar las funciones en un espacio vectorial X en funciones en el espacio dual X^* (ver [16] para una introducción específica o ver [26] para una introducción más detallada). Dado un Lagrangiano L , podemos definir el Hamiltoniano asociado, como su transformada de Fenchel (o transformada de Fenchel-Legendre):

$$\begin{aligned} H : T^*M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, p) &\mapsto \sup_{v \in T_x M} \{ \langle p, v \rangle_x - L(x, v) \}, \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ denota el emparejamiento canónico entre el haz tangente y el cotangente.

Si L es un Lagrangiano de Tonelli, uno puede probar fácilmente que H es finito en todas partes (como consecuencia de la superlinealidad de L), es C^2 , superlineal y estrictamente convexo en cada fibra (en el sentido C^2), para más detalles ver [12, Proposición 1.3.5]. Tal Hamiltoniano es llamado Hamiltoniano Tonelli (u óptico).

1.4.3 Definición (Hamiltoniano de Tonelli). Una función $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado Lagrangiano de Tonelli si

- i) $H \in C^2(T^*M)$;
- ii) H es estrictamente convexo en cada fibra, en el sentido C^2 , es decir, la segunda derivada parcial $\partial^2 H / \partial v^2(x, p)$ es positiva definida, como forma cuadrática, para todo $(x, p) \in T^*M$;
- iii) H es superlineal en cada fibra, es decir,

$$\lim_{\|p\|_x \rightarrow +\infty} \frac{H(x, p)}{\|p\|_x} = +\infty.$$

Veamos cuáles son los Hamiltonianos asociados a los Lagrangianos de Tonelli que hemos introducido en los ejemplos anteriores.

- **Hamiltonianos Riemannianos.** Si $L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2$ es el Lagrangiano Riemanniano asociado con la métrica Riemanniana g en M , su correspondiente Hamiltoniano asociado estará determinado por

$$H(x, p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2,$$

donde $\|\cdot\|$ representa la norma inducida en el haz cotangente T^*M .

- **Hamiltonianos mecánicos.** Si $L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2 + U(x)$ es un Lagrangiano mecánico, el Hamiltoniano asociado es:

$$H(x, p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2 - U(x).$$

que algunas veces se denomina *energía total*.

Dado un Hamiltoniano, se puede considerar el *flujo Hamiltoniano* asociado Φ_t^H en T^*M . En coordenadas locales, este flujo se puede expresar en términos de las denominadas ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)). \end{cases} \quad (1.16)$$

Denotemos por $X_H(x, p) := (\frac{\partial H}{\partial p}(x, p), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p))$ al *campo vectorial Hamiltoniano* asociado con H .

Ahora, nos gustaría explicar cuál es la relación entre el flujo de Euler-Lagrange y el Hamiltoniano. De la definición del Hamiltoniano (y la transformada de Fenchel) se desprende fácilmente que para cada $(x, v) \in TM$ y $(x, p) \in T^*M$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$\langle p, v \rangle_x \leq L(x, v) + H(x, p), \quad (1.17)$$

ésta desigualdad se denomina *desigualdad de Fenchel* (o *desigualdad de Legendre-Fenchel*) y desempeña un papel crucial en el estudio de la dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana, es una desigualdad que usaremos muy a menudo. En particular, la igualdad se mantiene si, y solo si, $p = \partial L / \partial v(x, v)$. Lo anterior también se puede fundamentar recordando la transformada de Legendre (1.2), la cual, es un difeomorfismo entre TM y T^*M , más aún, cumple la siguiente relación con el Hamiltoniano:

$$H \circ \mathcal{L}(x, v) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(x, v), v \right\rangle_x - L(x, v). \quad (1.18)$$

Una observación importante es que este difeomorfismo \mathcal{L} representa una conjugación entre los dos flujos; el flujo de Euler-Lagrange en TM y el flujo de Hamiltoniano en T^*M , en otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\Phi_t^L} & TM \\ \mathcal{L} \downarrow & & \downarrow \mathcal{L} \\ T^*M & \xrightarrow{\Phi_t^H} & T^*M \end{array}$$

Como L y el flujo Hamiltoniano H son ambos C^1 , entonces se sigue del diagrama conmutativo anterior que el flujo de Euler-Lagrange también es C^1 .

Por lo tanto, uno puede estudiar de manera equivalente el flujo de Euler-Lagrange o el flujo de Hamiltoniano, obteniendo en ambos casos información sobre la dinámica del sistema. Cada uno de estos enfoques equivalentes proporcionará diferentes herramientas y ventajas, que pueden resultar muy útiles para comprender las propiedades dinámicas del sistema. Por ejemplo, el espacio tangente es el escenario natural para el cálculo clásico de variaciones, en el cual, podemos ilustrar (cuando la variedad es de dimensión 1) la dinámica del sistema mediante el espacio fase, por otro lado, al trabajar con el Hamiltoniano podemos relacionar a las curvas integrales u órbitas en el espacio fase (de las cuales hablaremos con mayor detalle más adelante en los capítulos posteriores) con su respectivo nivel de energía mediante la relación dada en (1.18).

Capítulo 2

Introducción a la Teoría de Aubry-Mather mediante un KAM-toro

2.1. Propiedades de las medidas minimizantes y de las órbitas en el KAM-toro

Con el fin de introducir la Teoría de Aubry-Mather estudiamos algunas propiedades de las órbitas y de las medidas de probabilidad invariantes soportadas en un KAM-toro, es decir, medidas de probabilidad que son invariantes (ver Definición A.1.11) bajo el flujo Hamiltoniano Φ^H cuyo soporte (ver Definición A.1.15) es un KAM-Toro (ver Definición 2.1.1). Ésto nos proporcionará una mejor comprensión de la geometría detrás de la Teoría de Aubry-Mather, lo cual, nos ayudará a definir algunos conjuntos de minimizantes de acción, a saber los conjuntos de Mather, Aubry y Mañé, éstos representan una generalización de los KAM-toros.

En éste caso, nuestra variedad M estará determinada por el toro d -dimensional, es decir, $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$. Sean $H : \mathbb{T}^*\mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un Hamiltoniano de Tonelli y $L : \mathbb{T}\mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ el Lagrangiano de Tonelli asociado, denotemos por Φ^H y Φ^L los respectivos flujos. Recordemos que uno puede identificar $\mathbb{T}^*\mathbb{T}^d$ y $\mathbb{T}\mathbb{T}^d$ con $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$. Ahora, definamos un KAM-toro.

2.1.1 Definición (KAM-toro). Sea $\mathcal{T} \subset \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$, decimos que \mathcal{T} es un KAM-toro (maximal) con vector de rotación ρ si:

- i) $\mathcal{T} \subset \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ es una gráfica Lagrangiana de clase C^1 , es decir, $\mathcal{T} = \{(x, c+du) : x \in \mathbb{T}^d\}$,

donde $c \in \mathbb{R}^d$ y $u : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

- ii) \mathcal{T} es invariante bajo el flujo Hamiltoniano Φ_t^H generado por H .
- iii) El flujo Hamiltoniano en \mathcal{T} es conjugado a una rotación uniforme en \mathbb{T}^d , es decir, existe un difeomorfismo $\varphi : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathcal{T}$ tal que $\varphi^{-1} \circ \Phi_t^H \circ \varphi = R_\rho^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, donde $R_\rho^t : x \rightarrow x + \rho t (\text{mód } \mathbb{Z}^d)$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T} & \xrightarrow{\Phi_t^H} & \mathcal{T} \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi \\
 \mathbb{T}^d & \xrightarrow{R_\rho^t} & \mathbb{T}^d
 \end{array}$$

De la definición de flujo Hamiltoniano tenemos que si \mathcal{T} es una gráfica Lagrangiana e invariante bajo el flujo Hamiltoniano, entonces el Hamiltoniano H es constante en él, es decir, $H(x, c + du) = E_c$, donde $E_c \in \mathbb{R}$.

2.2. Conjunto de Mather en un KAM-toro

Ahora, analizaremos las propiedades de las medidas de probabilidad invariantes que están soportadas en \mathcal{T} . A partir de éstas propiedades podremos definir el primer conjunto de interés de éste capítulo, el conjunto de Mather.

Sea μ^* una medida de probabilidad ergódica (ver Definición A.1.14) Φ^H -invariante soportada en \mathcal{T} . Por ahora trabajaremos con el Lagrangiano L y su respectivo flujo de Euler-Lagrange Φ^L . Consideremos la medida de probabilidad invariante correspondiente al flujo Φ^L obtenida al utilizar la transformada de Legendre: $\mu = \mathcal{L}^* \mu^*$, donde \mathcal{L}^* denota el pull-back de \mathcal{L} . Podemos caracterizar a \mathcal{T} a partir de algunas propiedades de la medida μ . Dichas propiedades están dadas en la siguiente proposición.

2.2.1 Proposición.

- 1) $\int v d\mu = \rho$.
- 2) Si $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^1(\mathbb{T}^d)$, entonces $\int df(x) \cdot v d\mu = 0$.
- 3) $\int_{\mathbb{T}^d} L(x, v) d\mu = -E_c + c \cdot \rho$.

DEMOSTRACIÓN. 1) Para ver esto, consideremos el cubriente universal¹ de \mathbb{T}^d , es decir, \mathbb{R}^d y denotaremos aquí algunos *objetos* (cuya definición se puede consultar en la referencias dadas):

- $\tilde{\mathcal{T}} := \{(q, c + d\tilde{u}(q)), q \in \mathbb{R}^d\}$ el levantamiento [15, Págs. 60-62] de \mathcal{T} a \mathbb{R}^d , donde \tilde{u} es una extensión periódica de u ;
- $\tilde{\Phi}_t^H$ la suspensión [15, Pág. 8] del flujo Hamiltoniano Φ_t^H a $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$;
- $\tilde{\varphi}$ el levantamiento de φ , es decir, $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}$ tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{T}} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_t^H} & \tilde{\mathcal{T}} \\
 \uparrow \tilde{\varphi} & & \uparrow \tilde{\varphi} \\
 \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\tilde{R}_\rho^t} & \mathbb{R}^d
 \end{array}$$

donde $\tilde{R}_\rho^t : q \rightarrow q + \rho t$. Más aún, $\tilde{\varphi}$ tiene la forma $\tilde{\varphi}(q) = (\tilde{\varphi}_q(q), c + d\tilde{u}(\tilde{\varphi}_q(q)))$ y $\tilde{\varphi}_q$ satisface $\tilde{\varphi}_q(q + k) = \tilde{\varphi}_q(q) + k$ para cada $k \in \mathbb{Z}^d$.

Ahora, sea $(x_0, c + du(x_0))$ un punto en el soporte de μ^* y consideremos la órbita correspondiente $\gamma_{x_0}(t) := \pi\Phi_t^H(x_0, c + du(x_0))$, donde $\pi : \mathbb{T}\mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ es la proyección canónica. Denotemos por $\tilde{\gamma}_{x_0}(t)$ su levantamiento a \mathbb{R}^d . Luego, usando el teorema ergódico de Birkhoff (ver Teorema A.1.16), pues asumimos que μ^* es ergódica y por lo cual μ es ergódica. Luego, para cada punto $(x_0, c + du(x_0))$ en el soporte de μ^* , tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} v d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n \dot{\tilde{\gamma}}_{x_0}(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{x_0}(n) - \tilde{\gamma}_{x_0}(0)}{n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{x_0}(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\varphi}_q(\tilde{\varphi}_q^{-1}(\tilde{\gamma}_{x_0}(0)) + n\rho)}{n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\tilde{\varphi}_q(\tilde{\varphi}_q^{-1}(\tilde{\gamma}_{x_0}(0)) + \{n\rho\})}{n} + \frac{[n\rho]}{n} \right] = \\
 &= \rho,
 \end{aligned}$$

donde $[\cdot]$ y $\{\cdot\}$ denotan respectivamente la parte entera y la parte fraccionaria del vector componente por componente.

¹El cubriente universal de un espacio topológico conexo X , es un espacio simplemente conexo Y con un mapeo $f : Y \rightarrow X$ cubriente. Si X es simplemente conexo, es decir, tiene un grupo fundamental trivial, entonces es su propia cubierta universal.

2) Tomemos $(x_0, v_0) \in \text{supp } \mu$ y denotemos su correspondiente órbita determinada por

$$(x_t, v_t) := \Phi_t^L(x_0, v_0).$$

Ya que μ es invariante, entonces $\Phi_t^L * \mu = \mu$, por lo cual

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} df(x) \cdot v d\mu &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} df(x) \cdot v d\Phi_t^L * \mu = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} df(x_t) \cdot v_t d\mu = \\ &= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} d\mu \int_0^T df(x_t) \cdot v_t dt = \\ &= \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} \frac{f(x_T) - f(x_0)}{T} d\mu \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

la última igualdad es debido a que f es acotada. Observemos que en la prueba anterior no hemos utilizado nada más que la invariancia de μ .

3) Recordemos que E_c es la *energía* de \mathcal{T} , es decir, $H(x, c + du) = E_c$. Por otro lado, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L(x, v) d\mu = \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} [L(x, v) - (c + du) \cdot v] d\mu + \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} (c + du) \cdot v d\mu.$$

Usando la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17) a lo largo de la órbita (x_t, v_t) (definida como en la demostración de 2)) en el soporte de μ (por como definimos a (x_t, v_t) , ésta es de hecho una igualdad), luego, tenemos que $(c + du(x_t)) \cdot v_t = L(x_t, v_t) + H(x, c + du(x_t)) = L(x_t, v_t) + E_c$. Entonces por las propiedades 1) y 2), podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L(x, v) d\mu &= - \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} E_c d\mu + \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} c \cdot v d\mu = \\ &= -E_c + c \cdot \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} v d\mu = -E_c + c \cdot \rho. \end{aligned}$$

□

Observemos que la propiedad 1) nos da la relación que existe entre la medida μ y el vector de rotación ρ , en tal caso, diremos que μ tiene vector de rotación ρ . Las medidas que satisfacen 2), son llamadas medidas cerradas. Por otro lado, de 3) se tiene que en particular, $\int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} [L(x, v) - c \cdot v] d\mu = -E_c$. Más aún, tenemos que el Lagrangiano definido por $L_c(x, v) := L(x, v) - c \cdot v$ sigue siendo de Tonelli, ya que, L_c es $C^2(TM)$, más aún $\frac{\partial^2 L_c}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$,

por lo cual, $\frac{\partial^2 L_c}{\partial v^2}$ es positiva definida y por último la superlinealidad es directa puesto que $\lim_{\|v\|_x \rightarrow +\infty} \frac{c \cdot v}{\|v\|_x} < \infty$. Por lo tanto, L_c es de Tonelli. Más aún, debido a que μ es cerrada, las ecuaciones variacionales

$$\delta \left[\int (L(x, v) - c \cdot v) d\mu \right] = \delta \left[\int L(x, v) d\mu \right] = 0$$

tienen las mismas extremales, en consecuencia L y L_c tienen el mismo flujo de Euler-Lagrange.

Ahora, probaremos un resultado que nos servirá para poder definir el primer conjunto de interés, el conjunto de Mather.

2.2.2 Proposición. *Si $\tilde{\mu}$ es otra medida de probabilidad invariante de Φ^L , entonces*

$$\int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L_c(x, v) d\tilde{\mu} \geq \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L_c(x, v) d\mu. \quad (2.1)$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos la desigualdad Legendre-Fenchel (1.17) y observemos que en el soporte de $\tilde{\mu}$, a diferencia de lo que sucede en el soporte de μ (ver la Proposición 2.2.1 inciso 3)), ésta vez no tenemos una igualdad, es decir, $(c + du(x)) \cdot v \leq L(x, v) + H(x, c + du(x)) = L(x, v) + E_c$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L_c(x, v) d\tilde{\mu} &= \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} [L(x, v) - (c + du) \cdot v] d\tilde{\mu} \geq \\ &\geq - \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} E_c d\tilde{\mu} = -E_c = \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L_c(x, v) d\mu, \end{aligned}$$

de lo anterior, podemos concluir que

$$E_c = - \min \left\{ \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L_c(x, v) d\tilde{\mu} : \tilde{\mu} \text{ es una medida de probabilidad } \Phi^L\text{-invariante} \right\}.$$

□

Por lo tanto, μ minimiza el valor promedio de L_c (o acción de L_c) entre todas las medidas de probabilidad Φ^{L_c} -invariantes (ó Φ^L , puesto que, son lo mismo). Ahora, daremos algunas observaciones sobre la proposición anterior.

2.2.3 Observación. (i) El mínimo de las acciones del lado derecho también es denotado por $\alpha(c)$ (las α -funciones de Mather, las cuales definiremos en la Sección 3.1), es decir,

$$\alpha(c) = - \min \left\{ \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L_c(x, v) d\tilde{\mu} : \tilde{\mu} \text{ es una medida de probabilidad } \Phi^L\text{-invariante} \right\}.$$

- (ii) Una medida μ que satisface la desigualdad (2.1) para todas las medidas $\tilde{\mu}$ de probabilidad Φ^L -invariantes es llamada *la medida minimizante de la c -acción* (o medida de Mather de clase con cohomología c).
- (iii) De la demostración de la Proposición 2.2.2 y la desigualdad Legendre-Fenchel (1.17), tenemos que si $\text{supp } \tilde{\mu}$ no está contenido en $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{T})$, entonces la desigualdad en (2.1) es estricta.

Vamos a definir al primer conjunto importante, cuyo nombre ya lo hemos mencionado en más de una ocasión.

2.2.4 Definición (Conjunto de Mather). Definimos al conjunto de Mather con clase de cohomología c como:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c = \bigcup \{ \text{supp } \mu : \mu \text{ es una medida minimizante de la } c\text{-acción} \}.$$

Claramente, la Proposición 2.2.2 no garantiza que μ minimice la acción de L entre todas las medidas de probabilidad Φ^L -invariantes, ya que, sólo demostramos que minimiza la acción del Lagrangiano modificado L_c , con el mismo flujo de Euler-Lagrange que L . Por lo tanto, es necesario poner restricciones adicionales a la medida μ , para garantizar que en tal caso μ minimiza la acción de L .

2.2.5 Proposición. *Si $\tilde{\mu}$ es otra medida de probabilidad invariante de Φ^L con vector de rotación ρ (en el sentido de propiedad (1)), entonces tenemos*

$$\int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L(x, v) d\tilde{\mu} \geq \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L(x, v) d\mu. \quad (2.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Nuevamente, recordemos la desigualdad Legendre-Fenchel (1.17) y la propiedad (3), más aún, por hipótesis tenemos que $\int v d\tilde{\mu} = \rho$. Con lo cual, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L(x, v) d\tilde{\mu} &= \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} [L(x, v) - (c + du) \cdot v] d\tilde{\mu} + \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} (c + du) \cdot v d\tilde{\mu} \geq \\ &\geq -E_c + c \cdot \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} v d\tilde{\mu} = -E_c + c \cdot \rho = \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L(x, v) d\mu, \end{aligned}$$

de lo anterior, podemos concluir que

$$-E_c + c \cdot \rho = \min \left\{ \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L(x, v) d\tilde{\mu} : \tilde{\mu} \text{ es una med. de prob. } \Phi^L\text{-inv. con vec. de rot. } \rho \right\}.$$

□

Ahora, daremos algunas observaciones sobre la proposición anterior.

2.2.6 Observación. (i) El mínimo de las acciones del lado derecho también es denotado por $\beta(\rho)$ (las β -funciones de Mather, las cuales definiremos en la Sección 3.1), es decir,

$$\beta(\rho) = \min \left\{ \int_{\mathbb{T}\mathbb{T}^d} L(x, v) d\tilde{\mu} : \tilde{\mu} \text{ es una med. de prob. } \Phi^L\text{-inv. con vec. de rot. } \rho \right\}.$$

(ii) Una medida μ que satisface la desigualdad (2.2) para todas las medidas $\tilde{\mu}$ de probabilidad Φ^L -invariantes con el vector de rotación ρ es llamada *medida minimizante de la acción* (o *medida de Mather*) con vector de rotación ρ .

(iii) De la demostración de la Proposición 2.2.5 y la desigualdad Legendre-Fenchel (1.17), tenemos que si $\tilde{\mu}$ tiene un vector de rotación ρ , pero su soporte no está contenido en $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{T})$, entonces la desigualdad en (2.2) es estricta.

Vamos a definir al conjunto de Mather, que en éste caso está ligado al vector de rotación ρ .

2.2.7 Definición (Conjunto de Mather). Definimos al conjunto de Mather con clase de homología ρ como:

$$\widetilde{\mathcal{M}}^\rho = \bigcup \{ \text{supp } \mu : \mu \text{ es una medida minimizante con vector de rotación } \rho \}.$$

Para concluir esta sección, enfatizamos las propiedades importantes de una medida de probabilidad μ Φ^L -invariante soportada en $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{T})$:

- μ minimiza la acción de $L_c(x, v) = L(x, v) - c \cdot v$ entre todas las medidas de probabilidad Φ^L -invariantes.
- μ minimiza la acción de $L(x, v)$ entre todas las medidas de probabilidad Φ^L -invariantes con el vector de rotación ρ .

2.3. Conjunto de Mañé en un KAM-toro

En esta sección, consideraremos las órbitas de un KAM-toro, analizaremos las propiedades dinámicas que cumplen, entre ellas la relación que tienen con las curvas minimizantes.

La siguiente proposición muestra la relación que satisfacen las órbitas en un KAM-toro con las curvas minimizantes, posteriormente, nos permitirá definir otro tipo de minimizantes que son de vital interés.

2.3.1 Proposición. *Dados cualesquiera $a < b$, la proyección γ de cualquier órbita en \mathcal{T} minimiza la acción de L_c entre todas las curvas absolutamente continuas que conectan $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ en el tiempo $b - a$. Además, γ minimiza la acción de $L_c + E_c$ entre todas las curvas absolutamente continuas que conectan $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ para cualquier longitud de tiempo dado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x_0, c + d_{x_0}u) \in \mathcal{T}$ un punto en el KAM-toro, consideremos su órbita bajo el flujo Hamiltoniano, es decir, $\gamma(t) = \pi\Phi_t^H(x_0, c + d_{x_0}u)$, donde $\pi : \mathbb{T}^*\mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ denota la proyección canónica a lo largo de la fibra. Sean $a < b$ cualesquiera, consideremos la acción Lagrangiana correspondiente de esta curva y hagamos uso de la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt &= \int_a^b ((c + d_{\gamma(t)}u)\dot{\gamma}(t) - H(\gamma(t), c + d_{\gamma(t)}u)) dt = \\ &= \int_a^b c\dot{\gamma}(t) dt + u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) - E_c(b - a). \end{aligned}$$

de aquí tenemos que

$$\int_a^b [L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - c\dot{\gamma}(t)] dt = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) - E_c(b - a),$$

es decir

$$\int_a^b L_c(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) - E_c(b - a). \quad (2.3)$$

Tomemos ahora cualquier otra curva absolutamente continua $\xi : [a, b] \rightarrow \mathbb{T}^d$ tal que $\xi(a) = \gamma(a)$ y $\xi(b) = \gamma(b)$. Procediendo como antes y usando la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17), tenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b L(\xi(t), \dot{\xi}(t)) dt &\geq \int_a^b [(c + d_{\xi(t)}u)\dot{\xi}(t) - H(\xi(t), c + d_{\xi(t)}u)] dt = \\ &= \int_a^b c\dot{\xi}(t) dt + u(\xi(b)) - u(\xi(a)) - E_c(b - a). \end{aligned}$$

Usando (2.3) y sabiendo que $\xi(a) = \gamma(a)$ y $\xi(b) = \gamma(b)$, podemos concluir que:

$$\int_a^b L_c(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \leq \int_a^b L_c(\xi(t), \dot{\xi}(t)) dt. \quad (2.4)$$

Por lo tanto, demostramos la primer parte de la proposición. Para concluir la demostración, consideremos una curva con los mismos puntos finales, pero una longitud (de tiempo) diferente, es decir, $\xi : [a', b'] \rightarrow \mathbb{T}^d$ con $a' < b'$ y tal que $\xi(a') = \gamma(a)$ y $\xi(b') = \gamma(b)$, procediendo de forma análoga, obtenemos

$$\int_{a'}^{b'} L_c(\xi(t), \dot{\xi}(t)) dt \geq u(\xi(b')) - u(\xi(a')) - E_c(b' - a')$$

y consecuentemente

$$\int_a^b (L_c(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + E_c) dt \leq \int_{a'}^{b'} (L_c(\xi(t), \dot{\xi}(t)) + E_c) dt.$$

□

La proposición anterior nos permite dar la siguiente definición.

2.3.2 Definición. Una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^d$ tal que para cualquier $a < b$, $\gamma|_{[a,b]}$ minimiza la acción de L_c entre todas las curvas absolutamente continuas que conectan $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$ en el tiempo $b - a$, se llama *c-minimizante global* de L .

A continuación, daremos también una definición similar de minimizante, en la que el tiempo que le tome conectar $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$ nos es irrelevante.

2.3.3 Definición. Una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^d$ tal que para cualquier $a < b$, $\gamma|_{[a,b]}$ minimiza la acción de L_c entre todas las curvas absolutamente continuas que conectan $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ sin ninguna restricción en la duración del tiempo se llama *c-minimizante en tiempo libre* de L .

La siguiente observación es una reformulación de la Proposición 2.3.1.

2.3.4 Observación. La Proposición 2.3.1 establece que la proyección de cada órbita en \mathcal{T} es una *c-minimizante global* de L y una *c-minimizante en tiempo libre* de $L + E_c$. Además, de la demostración y de la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17) se deduce fácilmente que si la curva ξ no es la proyección de ninguna órbita de \mathcal{T} , entonces la desigualdad en (2.4) es estricta.

Es momento de definir al siguiente conjunto de minimizantes.

2.3.5 Definición (Conjunto de Mañé). Definimos al conjunto de Mañé con clase de cohomología c como:

$$\tilde{\mathcal{N}}_c = \bigcup \{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) : \gamma \text{ es una } c\text{-minimizante global de } L \text{ y } t \in \mathbb{R}\}.$$

2.4. Conjunto de Aubry en un KAM-toro

En ésta sección veremos que aún existe otro tipo de minimizante, con el cual podremos definir el último conjunto de minimizantes de éste capítulo, además demostraremos las propiedades que cumplen tales minimizantes.

Para poder describir a las nuevas minimizantes es necesario dar la siguiente definición, pero primero denotemos al conjunto de curvas absolutamente continuas que conectan a x_1 con x_2 en el tiempo T por $C_T(x_1, x_2)$.

2.4.1 Definición. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{T}^d$. Denotemos por

$$h_c^T(x_1, x_2) := \min_{\gamma \in C_T(x_1, x_2)} A_{L_c}(\gamma)$$

y consideremos la acción de $L_c + k$ para algún $k \in \mathbb{R}$, definimos el *potencial de Mañé* como:

$$\phi_{c,k}(x_1, x_2) := \inf_{T > 0} (h_c^T(x_1, x_2) + kT). \quad (2.5)$$

Notemos que si $k = 0$, el potencial de Mañé podría ser $-\infty$, puesto que, si existe una curva cerrada $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^d$ tal que $\gamma(0) = x_1$ y $\gamma(T) = x_2$ con acción L_c negativa, entonces $\phi_{c,0}(x_1, x_2) = -\infty$, ya que, estaría yendo una y otro vez alrededor de γ .

Nos interesa ver para qué valores de k el potencial de Mañé está bien definido, es decir, es mayor que $-\infty$.

Sea $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^d$ cualquier curva absolutamente continua tal que $\gamma(0) = x_1$ y $\gamma(T) = x_2$, entonces usando la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17):

$$\begin{aligned} \int_0^T L_c(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt + kT &\geq \int_0^T [du(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) - H(\gamma(t), c + d_{\gamma(t)}u)] dt + kT = \\ &= u(\gamma(T)) - u(\gamma(0)) + (k - E_c)T = \\ &= u(x_2) - u(x_1) + (k - E_c)T. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tomando el ínfimo sobre todas las curvas que conectan x_1 a x_2 , obtenemos:

$$\phi_{c,k}(x_1, x_2) \geq u(x_2) - u(x_1) + (k - E_c)T.$$

Por lo tanto, si $k \geq E_c$, entonces $\phi_{c,k}(x_1, x_2) > -\infty$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{T}^d$. Por otro lado, mostremos que para $k < E_c$, $\phi_{c,k}(x_1, x_2) = -\infty$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{T}^d$, para poder demostrar ésto primero necesitamos probar que el potencial de Mañé satisface una especie de desigualdad de triangulo.

2.4.2 Proposición. Para todo $k \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\phi_{c,k}(x, y) \leq \phi_{c,k}(x, z) + \phi_{c,k}(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{T}^d.$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que cualquier curva absolutamente continua que conecte x a z y cualquier curva absolutamente continua que conecte z a y , determina una curva que conecta x a y , entonces, al tomar el ínfimo obtenemos el resultado deseado. \square

Ahora, queda demostrar que el caso $k < E_c$ no es *interesante*.

2.4.3 Proposición. *Si $k < E_c$, entonces $\phi_{c,k}(x_1, x_2) = -\infty$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{T}^d$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero demostremos que si $k < E_c$, entonces $\phi_{c,k}(x, x) = -\infty$ para todo $x \in \mathbb{T}^d$. Notemos que la órbita $\gamma(t) = \pi\Phi_t^H(x, c + du(x))$ es recurrente, es decir, existe $T_n \rightarrow +\infty$ tal que $\delta_n := \|\gamma(T_n) - x\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, para ésto, consideremos primero la curva $\xi : [0, T_n + \delta_n] \rightarrow \mathbb{T}^d$ obtenida al unir la curva γ con la geodésica de velocidad unitaria que conecta a $\gamma(T_n)$ con x , entonces usando la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17) y la continuidad de u , tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{c,k}(x, x) &\leq \int_0^{T_n} L_c(\gamma, \dot{\gamma}) dt + \int_{T_n}^{T_n + \delta_n} L_c(\xi, \dot{\xi}) dt + k(T_n + \delta_n) = \\ &= u(\gamma(T_n)) - u(x) - E_c T_n + \int_{T_n}^{T_n + \delta_n} L_c(\xi, \dot{\xi}) dt + k(T_n + \delta_n) \leq \\ &\leq u(\gamma(T_n)) - u(x) + A\delta_n + (k - E_c)T_n + k\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty, \end{aligned}$$

donde $A := \max_{\|v\|=1} |L_c(x, v)|$. Por lo tanto, de la Proposición 2.4.2 tenemos que si $k < E_c$ y $x_1, x_2 \in \mathbb{T}^d$, entonces: $\phi_{c,k}(x_1, x_2) \leq \phi_{c,k}(x_1, x_1) + \phi_{c,k}(x_1, x_2) = -\infty$. \square

Como hemos visto, en el caso de $k \geq E_c$ tenemos que $\phi_{c,k}(x_1, x_2) > -\infty$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{T}^d$ y en el caso $k < E_c$ tenemos que $\phi_{c,k}(x_1, x_2) = -\infty$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{T}^d$, de lo cual, se deduce la siguiente proposición.

2.4.4 Proposición.

$$\begin{aligned} E_c &= \inf \{k \in \mathbb{R} : \phi_{c,k}(x, y) > -\infty \text{ para todo } x, y \in \mathbb{T}^d\} \\ &= \sup \{k \in \mathbb{R} : \phi_{c,k}(x, y) = -\infty \text{ para todo } x, y \in \mathbb{T}^d\}. \end{aligned}$$

De la Proposición 2.3.1 sabemos que si γ es la proyección de una órbita en \mathcal{T} , entonces es una c -minimizante global de L y además es una c -minimizante en tiempo libre de $L + E_c$. Dicho en términos del potencial de Mañé:

$$\int_a^b [L_c(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + E_c] dt = \phi_{c,E_c}(\gamma(a), \gamma(b)), \quad \text{para cualquier } a < b.$$

De aquí la relación de las c -minimizantes en tiempo libre con el potencial de Mañé correspondiente a $k = E_c$, el valor mínimo para el cual está definido el potencial de Mañé. Observemos que de (2.6) $\phi_{c,E_c}(x, y) \geq u(y) - u(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{T}^d$ y así

$$\phi_{c,E_c}(y, x) \geq u(x) - u(y) = -(u(y) - u(x)) \geq -\phi_{c,E_c}(x, y), \quad (2.7)$$

ésta desigualdad nos dá un límite inferior en la acción necesaria para volver de y a x . En particular, si $\xi : [a, b] \rightarrow \mathbb{T}^d$ es una curva absolutamente continua, entonces:

$$\int_a^b (L_c(\xi, \dot{\xi}) + E_c) dt \geq \phi_{c,E_c}(\xi(a), \xi(b)) \geq -\phi_{c,E_c}(\xi(b), \xi(a)).$$

Una pregunta natural que surge es: ¿Existen curvas para las cuales se da la igualdad? Dichas curvas necesariamente deben ser c -minimizantes globales, puesto que, para conectar $\gamma(b)$ con $\gamma(a)$ le tomaría el mismo tiempo que conectar $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$, es decir, $b - a$.

Demostremos que la respuesta a ésta pregunta es afirmativa, además caracterizaremos tales curvas minimizantes.

2.4.5 Proposición. *Sea γ la proyección de una órbita en \mathcal{T} . Entonces, para cada $a < b$ tenemos:*

$$\int_a^b (L_c(\gamma, \dot{\gamma}) + E_c) dt = \phi_{c,E_c}(\gamma(a), \gamma(b)) = -\phi_{c,E_c}(\gamma(b), \gamma(a)).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma(t) := \pi \Phi_t^H(x, c + du(x))$ y consideremos $a < b$. De la Proposición 2.3.1 tenemos que

$$\int_a^b (L_c(\gamma, \dot{\gamma}) + E_c) dt = \phi_{c,E_c}(\gamma(a), \gamma(b)),$$

por otro lado, ya que la órbita es recurrente, existe $T_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\delta_n := \|\gamma(b + T_n) - \gamma(a)\| \rightarrow 0,$$

por lo cual, al consideremos la curva $\xi : [b, b + T_n + \delta_n] \rightarrow \mathbb{T}^d$ obtenida al unir la curva $\gamma|_{[b, b+T_n]}$ con la geodésica de velocidad unitaria que conecta a $\gamma(b + T_n)$ con $\gamma(a)$, entonces, de la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17) y la continuidad de u , tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{c,E_c}(\gamma(b), \gamma(a)) &\leq \int_b^{b+T_n} L_c(\gamma, \dot{\gamma}) dt + \int_{b+T_n}^{b+T_n+\delta_n} L_c(\xi, \dot{\xi}) dt + E_c(T_n + \delta_n) = \\ &= u(\gamma(b + T_n)) - u(\gamma(b)) - E_c T_n + \int_{b+T_n}^{b+T_n+\delta_n} L_c(\xi, \dot{\xi}) dt + E_c T_n + E_c \delta_n \leq \\ &\leq u(\gamma(b + T_n)) - u(\gamma(b)) + (A + E_c) \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u(\gamma(a)) - u(\gamma(b)), \end{aligned}$$

donde $A := \max_{\|v\|=1} |L_c(x, v)|$. De (2.6), tenemos

$$\begin{aligned} \phi_{c, E_c}(\gamma(b), \gamma(a)) &\leq u(\gamma(a)) - u(\gamma(b)) = -(u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))) = \\ &= -\phi_{c, E_c}(\gamma(a), \gamma(b)). \end{aligned}$$

con ésta desigualdad y de (2.7), obtenemos que $\phi_{c, E_c}(\gamma(b), \gamma(a)) = -\phi_{c, E_c}(\gamma(a), \gamma(b))$. \square

Daremos unas observaciones referentes a la proposición anterior, las cuales nos permitirán definir nuestro último conjunto de minimizantes.

2.4.6 Observación. (i) Una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^d$ que satisface la condición de la Proposición 2.4.5 es llamada *c-minimizante global regular* ó *curva c-estática* de L . Aquí el adjetivo regular, acuñado por John Mather, no tiene relación con la suavidad de la curva; ya que, ésta curva será tan suave como todas las demás soluciones del flujo de Euler-Lagrange que depende de la regularidad del Lagrangiano L .

(ii) Ya que, toda curva *c-estática* es una *c-minimizante global*, se sigue de la Observación 2.3.4 que éstas son todas y las únicas *c-minimizantes globales regulares* de L .

Definiremos nuestro último conjunto de minimizantes de éste capítulo en el contexto de un KAM-toro.

2.4.7 Definición (Conjunto de Aubry). Definimos al conjunto de Aubry con clase de cohomología c como:

$$\tilde{A}_c = \bigcup \{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) : \gamma \text{ es una curva } c\text{-estática de } L \text{ y } t \in \mathbb{R}\}.$$

Capítulo 3

Teoría de Aubry-Mather en Variedades Compactas

En éste capítulo haremos un estudio similar al del capítulo anterior salvo que ahora trabajaremos con Lagrangianos de Tonelli en variedades compactas, obteniendo algunos conjuntos de minimizantes que posteriormente probaremos que son compactos e invariantes bajo el flujo de Euler-Lagrange, veremos que tales conjuntos generalizan un KAM-toro.

3.1. Conjunto de Mather

En ésta sección centraremos nuestra atención en los conjuntos de Mather, pero primero, definiremos algunos aspectos necesarios, posteriormente daremos la relación que tienen los conjuntos de Mather obtenidos en ésta sección con los obtenidos en la Sección 2.2.

Sea M es una variedad suave, sin frontera, compacta y conexa. Sean $H : T^*T^d \rightarrow \mathbb{R}$ un Hamiltoniano de Tonelli (ver Definición 1.4.3) y $L : TT^d \rightarrow \mathbb{R}$ el Lagrangiano de Tonelli (ver Definición 1.4.1) asociado, denotemos por Φ^H y Φ^L los respectivos flujos.

3.1.1. Medidas de Mather

3.1.1 Definición. Denotemos por $\mathfrak{M}(L)$ al espacio de medidas de probabilidad μ en TM que son invariantes bajo el flujo de Euler-Lagrange Φ^L y de acción finita, es decir, $\int_{TM} L d\mu < \infty$.

Veamos que para el caso de Lagrangianos de Tonelli éste conjunto es no vacío. Debido a la conservación de energía, tenemos que $E(x, v) := H \circ \mathcal{L}(x, v) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(x, v), v \right\rangle_x - L(x, v)$, más

aún, de la superlinealidad se sigue que cada nivel de energía es compacto (para más detalles ver [10, Observación 1-3.1]) e invariante bajo Φ_t^L , ya que, L es autónomo. Por otro lado, del Teorema de Krylov–Bogolyubov [11, Sección 1.6] sabemos que un flujo en un espacio métrico compacto tiene al menos una medida de probabilidad invariante.

Ahora, veremos un resultado que es sumamente importante, del cual, haremos referencia en más de una ocasión.

3.1.2 Proposición. *Cada nivel de energía no vacío*

$$\mathcal{E}(E) := \{E(x, v) = E\}$$

contiene al menos una medida de probabilidad Φ_t^L -invariante.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x_0, v_0) \in \mathcal{E}(E)$ y consideremos la curva $\gamma(t) := \pi\Phi_t^L(x_0, v_0)$, donde $\pi : TM \rightarrow M$ denota la proyección canónica. Para cada $T > 0$, consideremos la medida de probabilidad μ_T uniformemente distribuida en el trozo de curva $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ para todo $t \in [0, T]$, es decir,

$$\int f d\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \quad \forall f \in C(\mathcal{E}(E)).$$

La familia $\{\mu_T\}_{T>0}$ es precompacta¹ en la topología débil* (ver [6, Sección 3.4]) ya que el conjunto de medidas de probabilidad en $\mathcal{E}(E)$ está contenido en la bola unitaria cerrada en el espacio de medidas de Borel con signo de $\mathcal{E}(E)$, la cual es débilmente* compacto según el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki [6, Teorema 3.16]. Por lo tanto, se puede extraer una subsucesión convergente $\{\mu_{T_n}\}_{n \geq 1}$ tal que $\mu_{T_n} \rightarrow \mu$ en la topología débil* cuando $T_n \rightarrow \infty$. Ahora, sólo falta demostrar que μ es Φ^L -invariante, es decir, para cada $s \in \mathbb{R}$ tenemos que $\Phi_{s*}^L \mu = \mu$, donde $\Phi_{s*}^L \mu$ denota el push-forward de la medida μ (ver Definición A.1.4).

Sea f una función continua en $\mathcal{E}(E)$, entonces por la desigualdad del triangulo tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int f d\Phi_{s*}^L \mu - \int f d\mu \right| &\leq \left| \int f d\Phi_{s*}^L \mu - \int f d\Phi_{s*}^L \mu_{T_n} \right| + \left| \int f d\Phi_{s*}^L \mu_{T_n} - \int f d\mu_{T_n} \right| \\ &\quad + \left| \int f d\mu_{T_n} - \int f d\mu \right|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahora probaremos que los términos del lado derecho en (3.1) tienden a 0 cuando $T_n \rightarrow \infty$. Ya que, μ_{T_n} converge débilmente* a μ , tenemos

$$\left| \int f d\mu_{T_n} - \int f d\mu \right| \xrightarrow{T_n \rightarrow \infty} 0,$$

¹Un subconjunto en un espacio topológico es precompacto si y sólo si su cerradura es compacta.

por otro lado, por la fórmula de cambio de variables [31, Lema 5.1.1] para el push-forward, tenemos que

$$\left| \int f d\Phi_s^L \mu - \int f d\Phi_s^L \mu_{T_n} \right| = \left| \int f \circ \Phi_s^L d\mu - \int f \circ \Phi_s^L d\mu_{T_n} \right| \xrightarrow{T_n \rightarrow \infty} 0,$$

con ésto, sólo nos falta demostrar que el segundo termino de (3.1) también tiende a 0 cuando $T_n \rightarrow \infty$, lo cual, se sigue de la definición de μ_{T_n} , pues

$$\begin{aligned} \left| \int f d\Phi_s^L \mu_{T_n} - \int f d\mu_{T_n} \right| &= \frac{1}{T_n} \left| \int_s^{T_n+s} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt - \int_0^{T_n} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \right| \\ &= \frac{1}{T_n} \left| \int_0^{T_n+s} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt - \int_0^{T_n} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt - \int_0^s f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \right| \\ &= \frac{1}{T_n} \left| \int_{T_n}^{T_n+s} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt - \int_0^s f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{2s}{T_n} \max_{\mathcal{E}(E)} |f| \xrightarrow{T_n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue de (3.1) que para cualquier $f \in C(\mathcal{E}(E))$

$$\left| \int f d\Phi_s^L \mu - \int f d\mu \right| = 0.$$

Consecuentemente $\Phi_s^L \mu = \mu$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$, es decir, μ es Φ^L -invariante. □

Anteriormente, definimos la acción A_L de una curva γ , por lo cual, es momento de definir la acción promedio de una medida μ en $\mathfrak{M}(L)$, la cual ésta definida de la manera siguiente.

3.1.3 Definición. Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L)$, definimos la acción promedio de μ como:

$$A_L(\mu) = \int_{TM} L d\mu.$$

Claramente las medidas construidas en la Proposición 3.1.2 tienen acción finita, ya que, son el límite de medidas de probabilidad uniformemente distribuidas y además tenemos que $L \in C(\mathcal{E}(E))$.

3.1.4 Definición. Definimos la *topología vaga*, como la topología débil* inducida por el espacio C_ℓ^0 de funciones continuas $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene a lo más un crecimiento lineal, es decir

$$\sup_{(x,v) \in TM} \frac{|f(x,v)|}{1 + \|v\|} < +\infty.$$

3.1. CONJUNTO DE MATHER

De aquí en adelante supondremos que $\mathfrak{M}(L)$ está dotada con ésta topología, más aún, sea $(C_\ell^0)^*$ el dual de C_ℓ^0 , afirmamos que $\mathfrak{M}(L) \subset (C_\ell^0)^*$, puesto que, $\mathfrak{M}(L)$ denota el conjunto de medidas de probabilidad μ en TM tales que $L \in L_1(\mu)$ (el espacio de Lebesgue). Obviamente una medida de probabilidad $\mu \in \mathfrak{M}(u)$ si y sólo si $u \in L_1(\mu)$ para todo $u \in C_\ell^0$, ésto nos permite identificar μ con un elemento del dual $(C_\ell^0)^*$ definido por $\mu(u) := \int u d\mu$ donde $u \in C_\ell^0$, con lo cual concluimos que $\mathfrak{M}(L) \subset (C_\ell^0)^*$. Además es un resultado clásico que éste espacio con dicha topología, es metrizable (para mayor detalle ver [18, Sección 1]).

La proposición siguiente nos ayudará a garantizar la existencia de minimizantes.

3.1.5 Proposición. $A_L : \mathfrak{M}(L) \rightarrow \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua con la topología vaga en $\mathfrak{M}(L)$.

DEMOSTRACIÓN. Definamos a $A_{L,K}(\mu) := \int \min\{L, K\} d\mu$, con $K \in \mathbb{R}$, ésta función es Lipschitz con constante K , puesto que

$$|A_{L,K}(\mu) - A_{L,K}(\nu)| = \left| \int \min\{L, K\} d\mu - \int \min\{L, K\} d\nu \right| \leq K d(\mu, \nu).$$

Por lo cual, $A_{L,K}$ es continua, más aún $A_{L,K} \uparrow A_L$ cuando $K \rightarrow \infty$, entonces tenemos que A_L es inferiormente semicontinua. \square

En general, éste funcional puede no ser necesariamente continuo, lo cual es innecesario en nuestro caso. Por otro lado, una consecuencia de la Proposición 3.1.5 es el siguiente corolario, el cual nos garantiza la existencia de medidas minimizantes.

3.1.6 Corolario. Existe $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ tal que $\mu = \min_{\mathfrak{M}(L)} A_L$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es directa, ya que, el conjunto $\mathfrak{M}(L)$ es no vacío y compacto [18, Proposición 1.2], más aún, toda función inferiormente semicontinua en un conjunto compacto alcanza su mínimo. \square

Vamos a definir a las medidas en $\mathfrak{M}(L)$ que satisfacen la propiedad del Corolario 3.1.6.

3.1.7 Definición. Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L)$. Decimos que μ es una minimizante de la acción de L si $A_L(\mu) = \min_{\mathfrak{M}(L)} A_L$.

Como en el caso de un KAM-toro podemos encontrar otras medidas invariantes además de las que minimizan la acción de L , para ésto es necesario introducir un nuevo Lagrangiano de tal manera que la dinámica del sistema no se altere. Por lo tanto, necesitamos de alguna

manera introducir algún tipo de *etiqueta* y que ésta no modifique la dinámica del sistema, es decir, que el nuevo Lagrangiano tenga el mismo flujo de Euler-Lagrange Φ^L , además, que tal *etiqueta* nos permita magnificar ciertos movimientos en lugar de otros. Lo que descubrimos en la Proposición 2.2.2 fue que esto se puede lograr fácilmente restando a nuestro Lagrangiano una función lineal $c \cdot v$, donde c representa la clase de cohomología del Lagrangiano invariante en el KAM-toro que estamos interesados, en otras palabras, la clase de cohomología de su gráfica en $T^*\mathbb{T}^d$.

Ahora, implementaremos una idea similar para un Lagrangiano de Tonelli. Sea η una 1-forma diferencial en M , definimos el siguiente funcional lineal (en cada fibra) del espacio tangente

$$\begin{aligned} \hat{\eta} : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto \langle \eta(x), v \rangle_x \end{aligned}$$

y consideremos un nuevo Lagrangiano de Tonelli definido por $L_\eta := L - \hat{\eta}$, cuyo Hamiltoniano asociado está dado por

$$H_\eta(x, p) = \langle p, v \rangle_x - L_\eta(x, v) = \langle p, v \rangle_x - L(x, v) + \langle \eta(x), v \rangle_x = H(x, \eta(x) + p).$$

Como habíamos mencionado, es necesario probar bajo que condiciones ambos Lagrangianos tienen el mismo flujo de Euler-Lagrange, por lo cual, tenemos el siguiente lema.

3.1.8 Lema. *Si η es una 1-forma cerrada², entonces L y L_η tienen el mismo flujo de Euler-Lagrange en TM .*

DEMOSTRACIÓN. Sea η es cerrada, tenemos que las ecuaciones variacionales $\delta[\int L dt] = 0$ y $\delta[\int (L - \hat{\eta}) dt] = 0$ tienen las mismas extremales para el problema de puntos finales fijos, ya que, $\int d\hat{\eta}(x, v) dt = \int d\eta(x) \cdot v dt = 0$. Por lo tanto, L y L_η tienen el mismo flujo de Euler-Lagrange. \square

Aún cuando las extremales de estos problemas variacionales son las mismas, comúnmente no comparten las mismas minimizantes. En la Proposición 2.2.2 notamos que la medida μ sólo minimizaba la acción del Lagrangiano modificado L_c , y posteriormente vimos en que caso minimizaba la acción del Lagrangiano L . En éste caso podemos decir que los *objetos* que minimizan la acción A_L permanecen igual cuando modificamos al Lagrangiano L por una

²Una forma cerrada es una forma diferencial η cuya derivada exterior es cero, es decir, $d\eta = 0$.

1-forma exacta³.

El siguiente resultado es similar a la propiedad probada para un KAM-toro en el inciso 2) de la Proposición 2.2.1, cuya demostración es análoga.

3.1.9 Proposición. *Si $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ y $\eta = df$ es una 1-forma exacta, entonces $\int \widehat{df} d\mu = 0$.*

Definamos primero el siguiente espacio vectorial fundamental para el desarrollo de los resultados posteriores.

3.1.10 Definición. Sea M una variedad diferenciable, para cada entero no negativo k definimos el k -ésimo grupo de cohomología de de Rham al espacio vectorial cociente

$$H^k(M; \mathbb{R}) := \{1\text{-formas cerradas}\} / \{1\text{-formas exactas}\}.$$

Para toda k -forma cerrada ω en M , $[\omega]$ denota la clase de equivalencia de ω en $H^k(M; \mathbb{R})$ ésta llamada la *clase de cohomología* de ω . Se tiene que $[\omega] = [\omega']$ si y sólo si $\omega - \omega' = d\eta$ para alguna $(k - 1)$ -forma η . En particular nosotros sólo trabajaremos con $H^1(M; \mathbb{R})$.

Para un Lagrangiano L fijo, las medidas minimizantes dependerán únicamente de la clase de cohomología de De Rham:

$$c = [\eta] \in H^1(M; \mathbb{R})$$

Por lo tanto, en lugar de estudiar las propiedades de las minimizantes de acción para un solo Lagrangiano L , estudiamos las propiedades de las minimizantes para cada Lagrangiano *modificado*, los cuales están parametrizados sobre $H^1(M, \mathbb{R})$.

Sea $c \in H^1(M; \mathbb{R})$, denotamos por η_c una 1-forma cerrada de clase de cohomología c . Definimos un nuevo tipo de minimizante relacionado con el espacio $H^1(M, \mathbb{R})$.

3.1.11 Definición. Sean η_c una 1-forma cerrada y $\mu \in \mathfrak{M}(L)$. Decimos que μ es una medida minimizante de la c -acción o medida de Mather con cohomología $c = [\eta_c]$, si

$$A_{L\eta_c}(\mu) = \min_{\nu \in \mathfrak{M}(L)} A_{L\eta_c}(\nu).$$

Observe que la clase de cohomología de una medida de probabilidad invariante que minimiza la acción, no es algo intrínseco de la medida ni de la dinámica, si cambiamos el Lagrangiano L por $L - \eta$ donde η es una 1-forma cerrada, cambiaremos todas las clases de

³Decimos que una 1-forma diferencial η es exacta si existe una función suave $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\eta = df$.

cohomología de sus medidas minimizantes de acción por $-[\eta] \in H^1(M; \mathbb{R})$.

Ahora definimos la siguiente función, ésta es una de las funciones más importante de la teoría de Aubry-Mather, más adelante probaremos que tal función está relacionada con la energía del sistema.

3.1.12 Definición. Definimos a la función α de Mather por

$$\begin{aligned} \alpha : H^1(M; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c &\longmapsto - \min_{\mu \in \mathfrak{M}(L)} A_{L_{\eta_c}}(\mu), \end{aligned} \quad (3.2)$$

la cual asocia a cada clase de cohomología c con menos el mínimo de la acción correspondientes al Lagrangiano modificado L_{η_c} .

Siempre que definamos una función en un espacio cociente es necesario demostrar que ésta está bien definida.

3.1.13 Proposición. *La función α está bien definida.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $[\eta] \in H^1(M, \mathbb{R})$. Si $\eta_1, \eta_2 \in [\eta]$, entonces $\eta_1 - \eta_2 = \omega$ donde ω es una 1-forma exacta, se sigue de la Proposición 3.1.9 que $\int d(\eta_1 - \eta_2)(x) \cdot v d\mu = \int d\omega(x) \cdot v d\mu = 0$. Por lo tanto, $\int d\eta_1(x) \cdot v d\mu = \int d\eta_2(x) \cdot v d\mu$. Con lo cual, al tomar

$$\begin{aligned} \alpha(\eta_1) &= - \min_{\mu \in \mathfrak{M}(L)} A_{L_{\eta_1}}(\mu) = - \min_{\mu \in \mathfrak{M}(L)} \left(\int_{TM} L(x, v) - d\eta_1(x) \cdot v d\mu \right) \\ &= - \min_{\mu \in \mathfrak{M}(L)} \left(\int_{TM} L(x, v) - d\eta_2(x) \cdot v d\mu \right) \\ &= - \min_{\mu \in \mathfrak{M}(L)} A_{L_{\eta_2}}(\mu) = \alpha(\eta_2) \quad \square \end{aligned}$$

Más adelante demostraremos que α es convexa y que el valor $\alpha(c)$ está relacionado con el nivel de energía que contiene tales medidas minimizantes de la c -acción.

Denotemos por $\mathfrak{M}_c(L)$ al subconjunto de medidas minimizantes de la c -acción, es decir,

$$\mathfrak{M}_c := \mathfrak{M}_c(L) = \{\mu \in \mathfrak{M}(L) : A_L(\mu) < +\infty \text{ y } A_{L_{\eta_c}}(\mu) = -\alpha(c)\}.$$

Ahora, definimos la primer familia importante de conjuntos invariantes.

3.1.14 Definición (Conjunto de Mather). Para una clase de cohomología $c \in H^1(M; \mathbb{R})$, definimos al conjunto de Mather con clase de cohomología c , como

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c := \bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}_c} \text{supp } \mu \subset TM, \quad (3.3)$$

cuya proyección en la variedad base es denotada por $\mathcal{M}_c = \pi(\widetilde{\mathcal{M}}_c) \subseteq M$, llamado conjunto de Mather proyectado con clase de cohomología c .

Notemos que de la Proposición 3.1.2 y del Corolario 3.1.6 tenemos que el conjunto de Mather es no vacío e invariante. En general el conjunto de Mather se define como la cerradura del conjunto del lado derecho en 3.3, de hecho ésta es la definición de Mather en [22]. Sin embargo es posible demostrar éste es cerrado, como lo veremos en el resultado siguiente.

3.1.15 Proposición. *El conjunto de Mather $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que el espacio de medidas de probabilidad en TM es un espacio métrico separable, se puede tomar un conjunto denso numerable $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ de medidas de Mather y considerar una nueva medida $\tilde{\mu} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n$, demostremos que $\tilde{\mu}$ es una medida de probabilidad invariante, es decir, $\Phi_{s*}^L \tilde{\mu} = \tilde{\mu}$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Como cada μ_n es invariante bajo el flujo de Euler-Lagrange Φ^L , entonces tenemos que

$$\Phi_{s*}^L \tilde{\mu} = \Phi_{s*}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Phi_{s*}^L \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n = \tilde{\mu},$$

además ésta es la minimizante de la c -acción (se sigue de la convexidad de α), entonces $\text{supp } \tilde{\mu} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_c$.

La otra contención se deduce de la definición de $\tilde{\mu}$, ya que, $\text{supp } \tilde{\mu} = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}_c} \text{supp } \mu} \supseteq \widetilde{\mathcal{M}}_c$, de lo cual tenemos que $\text{supp } \tilde{\mu} = \widetilde{\mathcal{M}}_c$. Por lo tanto, como es el soporte de una sola medida minimizante de la c -acción, $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ es cerrada. Más aún, ésta observación muestra que siempre existe una medida de Mather μ_c de soporte completo, es decir, $\text{supp } \mu_c = \widetilde{\mathcal{M}}_c$. \square

El siguiente teorema demostrado por Mather en [22], nos será de utilidad para encontrar los conjuntos de Mather en el ejemplo que mostraremos en el Capítulo 4.

3.1.16 Teorema (Teorema del gráfico de Mather). *Sea $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ definida como en (3.3). El conjunto $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ es compacto e invariante bajo el flujo de Euler-Lagrange. Más aún, $\pi|_{\widetilde{\mathcal{M}}_c}$ es un mapeo inyectivo de $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ en M cuya inversa $\pi^{-1} : \mathcal{M}_c \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_c$ es Lipschitz.*

La demostración del Teorema del gráfico se deducirá más adelante de un resultado más general, la propiedad del gráfico del conjunto de Aubry, de la cual hablaremos más adelante en la Sección 3.4. Además de forma similar a lo que hemos visto para un KAM-toro (ver Observación 2.2.3) en el caso autónomo, el conjunto de $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ está contenido en un nivel de energía bien definido, éste se puede caracterizar en términos de $\alpha(c)$.

De igual manera el siguiente teorema se deducirá de un resultado más general, el cual, lo veremos a mayor detalle en la Sección 3.4.

3.1.17 Teorema (Dias Carneiro, [7]). *El conjunto de Mather $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ está contenido en el nivel de energía $\widetilde{\mathcal{E}}_c := \{H \circ \mathcal{L}(x, v) = \alpha(c)\}$.*

3.1.2. Medidas de Mather con vectores de rotación

Habíamos mencionado al inicio de este capítulo que seguiremos un enfoque similar al que se hizo en el Capítulo 2, por lo cual, en lugar de considerar diferentes problemas de minimizantes sobre $\mathfrak{M}(L)$, obtenidos al modificar al Lagrangiano L , alternativamente podemos tratar de minimizar el Lagrangiano L poniendo algunas *restricciones*, por ejemplo; *fijando el vector de rotación de las medidas*. Para generalizar ésto a Lagrangianos de Tonelli en variedades compactas, por lo cual necesitamos definir lo que queremos decir con *vector de rotación* de una medida invariante.

Primero demostraremos la proposición siguiente, la cual nos ayudará a definir el vector de rotación de una medida invariante.

3.1.18 Proposición. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L)$, con L superlineal. Si η es una 1-forma cerrada en M , entonces $\int_{TM} \hat{\eta} d\mu$ es finita.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis tenemos que L superlineal, entonces $\forall A \in \mathbb{R}$ existe $B(A) \in \mathbb{R}$ tal que $L(x, v) \geq A\|v\|_x - B$, puesto que $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ tenemos

$$\infty > \int_{TM} L d\mu \geq \int_{TM} (A\|v\|_x - B) d\mu = \int_{TM} A\|v\|_x d\mu - B,$$

con lo cual al tomar $A = \|\eta\| := \sup_{x \in M} \{|\eta(x)|\} = \max_{x \in M} \{|\eta(x)|\}$ y sabiendo que $\langle \eta(x), v \rangle_x \leq \|\eta\| \|v\|_x$, podemos concluir que $\int_{TM} \hat{\eta} d\mu < \infty$. \square

Ahora con una prueba análoga a la hecha en la Proposición 3.1.13, podemos afirmar que si $\mu \in \mathfrak{M}(L)$, con L superlineal, la integral $\int_{TM} \hat{\eta} d\mu$ está bien definida y por la Proposición

3.1. CONJUNTO DE MATHER

3.1.9 tenemos que ésta es finita para cualquier 1-forma cerrada η en M . Más aún, hemos probado en la que si la 1-forma η es exacta, entonces $\int_{TM} \hat{\eta} d\mu = 0$. Por lo tanto, podemos definir el siguiente funcional lineal:

$$\begin{aligned} H^1(M; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c &\longmapsto \int_{TM} \hat{\eta} d\mu, \end{aligned}$$

donde η es cualquier 1-forma cerrada en M con clase de cohomología c . Por dualidad, existe $\rho(\mu) \in H_1(M; \mathbb{R})$ tal que

$$\int_{TM} \hat{\eta} d\mu = \langle c, \rho(\mu) \rangle \quad \forall c \in H^1(M; \mathbb{R})$$

el corchete del lado derecho denota el emparejamiento canónico entre la cohomología y la homología. Llamamos a $\rho(\mu)$ el vector de rotación de μ .

Una vez definido el vector de rotación, es posible proporcionar una interpretación *geométrica* de éste. Supongamos por el momento que μ es ergódica, entonces sabemos que una órbita genérica definida por $\gamma(t) := \pi\Phi_t^L(x, v)$, siempre regresará una cantidad infinita de veces, tan cerca como queramos, a su punto inicial $\gamma(0) = x$. Por lo tanto, podemos tomar una sucesión de tiempos $T_n \rightarrow +\infty$ tal que $d(\gamma(T_n), x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, y consideremos los lazos cerrados σ_n obtenidos al unir $\gamma|_{[0, T_n]}$ con la conexión geodésica más corta que une $\gamma(T_n)$ con x . Si definimos a $[\sigma_n]$ como la clase de homología de éste lazo, se puede verificar en [28] que el $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\sigma_n]}{T_n} = \rho[\mu]$, independientemente de la sucesión elegida de $\{T_n\}_{n \geq 1}$. En otras palabras, en el caso de medidas ergódicas, el vector de rotación nos dice cuántas veces en promedio una órbita genérica se enrolla alrededor de TM . Si μ no es ergódica, $\rho(\mu)$ puede interpretarse como el promedio de los vectores de rotación en sus diferentes componentes ergódicos.

Más aún de lo dicho anteriormente, se deduce que el vector de rotación de una medida invariante depende sólo de la dinámica del sistema (es decir, del flujo de Euler-Lagrange) y no del Lagrangiano elegido. Por lo tanto, no cambia cuando modificamos nuestro Lagrangiano agregando una 1-forma cerrada.

La siguiente pregunta que surge de manera natural: ¿Dado un Lagrangiano de Tonelli L existen medidas de probabilidad invariantes para cualquier vector de rotación?. La respuesta resulta ser afirmativa. Usaremos aquí el hecho de que el funcional de acción $A_L : \mathfrak{M}(L) \rightarrow \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinuo, lo cual nos servirá para probar lo siguiente:

3.1.19 Proposición.

- (i) La aplicación $\rho : \mathfrak{M}(L) \longrightarrow H_1(M; \mathbb{R})$ es continua.
- (ii) ρ es afín, es decir, para cualesquiera $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(L)$ y $a, b \geq 0$ con $a + b = 1$, $\rho(a\mu + b\nu) = a\rho(\mu) + b\rho(\nu)$.
- (iii) Para todo $h \in H_1(M; \mathbb{R})$ existe $\mu \in \mathfrak{M}$ con $A_L(\mu) < \infty$ y $\rho(\mu) = h$. En otras palabras, ρ es sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN.

- (i) Sea h_1, \dots, h_b una base fija en $H_1(M; \mathbb{R})$, donde $b = \dim H_1(M; \mathbb{R})$. Si $\mu_n \rightarrow \mu$ y η_c es cualquier 1-forma cerrada en M con clase de cohomología c , entonces

$$\langle c, \rho(\mu_n) \rangle = \int \eta_c \cdot v d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int \eta_c \cdot v d\mu = \langle c, \rho(\mu) \rangle,$$

es equivalente a decir que:

$$\langle c, \rho(\mu_n) - \rho(\mu) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}^n \simeq H^1(M; \mathbb{R}).$$

Luego, $\rho(\mu_n) - \rho(\mu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, por lo tanto, ρ es continua.

- (ii) Es una consecuencia de la definición del vector de rotación.
- (iii) Sea $h \in H_1(M; \mathbb{R})$ una clase de homología y consideremos el espacio cubriente abeliano \widehat{M} de M , es decir, el espacio cubriente de M cuyo grupo fundamental es dado por el kernel del homomorfismo de Hurewicz $\mathfrak{h} : \pi_1(M) \longrightarrow H_1(M; \mathbb{R})$, el cual relaciona al grupo fundamental con el primer grupo de homología de M y cuyo grupo de transformaciones Deck (ver Definición A.1.18) son la imagen de \mathfrak{h} .

Sea T_1, \dots, T_k, \dots una sucesión de transformaciones Deck tal que

$$\frac{T_k}{k} \longrightarrow h \in H_1(M; \mathbb{R}) \quad \text{cuando } k \rightarrow +\infty.$$

Fijando $\hat{x}_0 \in \widehat{M}$ y sea $\hat{x}_k := T_k \hat{x}_0$. Queremos aplicar el Teorema de Tonelli (ver Teorema 3.2.2) en \widehat{M} y encontrar una curva $\hat{\gamma}_k : [0, k] \longrightarrow \widehat{M}$ que minimice la acción del Lagrangiano entre todas las curvas que conectan \hat{x}_0 con \hat{x}_x en tiempo k , tal minimizante sería una órbita en \widehat{M} , por lo tanto es suave.

Sea γ_k la proyección de $\hat{\gamma}_k$ en M y denotemos por μ_k la medida de probabilidad uniformemente distribuida a lo largo de $(\gamma_k, \dot{\gamma}_k)$. Similarmente a lo que vimos en la Proposición

3.1. CONJUNTO DE MATHER

3.1.2, uno puede considerar un punto de acumulación μ de estas medidas con respecto a la topología débil*; es fácil ver que ésta tiene acción finita e invariante, puesto que, cada una de ellas lo es. En cuanto a su vector de rotación, observe que si cada η es una 1-forma cerrada en M , entonces:

$$\int_{TM} \hat{\eta}(x) \cdot v d\mu_k = \left\langle [\eta], \frac{T_k}{k} \right\rangle.$$

Por lo tanto, tomando el límite cuando $k \rightarrow +\infty$, se sigue que

$$\int_{TM} \hat{\eta}(x) \cdot v d\mu = \langle [\eta], h \rangle,$$

es decir, μ tiene vector de rotación h . □

Enunciamos el lema siguiente, el cual, nos ayudará a fundamentar la función de Mather que está ligada al vector de rotación.

3.1.20 Lema. *Sea $\rho : \mathfrak{M}(L) \rightarrow H_1(M; \mathbb{R})$ continua y sobreyectiva. Para todo $h \in H_1(M; \mathbb{R})$ tenemos que $\rho^{-1}(h)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h \in H_1(M; \mathbb{R})$, claramente h es cerrado, por hipótesis sabemos que ρ continua y sobreyectiva, entonces $\rho^{-1}(h)$ cerrado, más aun, ya que $\rho^{-1}(h) \subset \mathfrak{M}(L)$ que es compacto, podemos concluir que $\rho^{-1}(h)$ es compacto. □

3.1.21 Definición. Definimos a la función β de Mather por

$$\begin{aligned} \beta : H_1(M; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \min_{\mu \in \mathfrak{M}(L): \rho(\mu)=h} A_L(\mu) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ésta es la conjugada convexa de la función α [30, Proposición 3.3.2].

Notemos que este mínimo se alcanza debido a la semicontinuidad de A_L y a la compacidad de $\rho^{-1}(h)$.

Uno puede demostrar que la función β está bien definida, la prueba es análoga a la demostración de la Proposición 3.1.13. Demostraremos ahora que tanto α como β son funciones convexas.

3.1.22 Proposición. *Las funciones α y β definidas en (3.2) y (3.4) son convexas.*

DEMOSTRACIÓN. Por demostrar que β es convexa. Sean $h_1, h_2 \in H_1(M; \mathbb{R})$, $0 \leq \lambda \leq 1$ y $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}(L)$ tal que $\rho(\mu_i) = h_i$ y $A_L(\mu_i) = \beta(h_i)$ para $i = 1, 2$. Esto es posible porque ρ es sobreyectiva. Definimos la medida $\nu := \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$, como ρ es afín, tenemos que

$$\rho(\nu) = \lambda\rho(\mu_1) + (1 - \lambda)\rho(\mu_2) = \lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2$$

Por lo tanto,

$$\beta(\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2) \leq A_L(\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2) = \lambda\beta(h_1) + (1 - \lambda)\beta(h_2).$$

La primer desigualdad es por la definición de β , la igualdad siguiente por la linealidad de A_L y por como tomamos a las $A_L(\mu_1)$ y $A_L(\mu_2)$. La convexidad de α se deduce de la convexidad de β y de que ésta es conjugada convexa de α [10, Proposición D.1]. \square

De la Observación 2.2.3, tenemos que si existe un KAM-toro de clase de cohomología c y un vector de rotación ρ , entonces $\beta(\rho) = -E_c + c \cdot \rho$. Por lo tanto, si tenemos un Hamiltoniano de Tonelli integrable $H(x, p)$ y el Lagrangiano asociado $L(x, v)$, entonces por la desigualdad de Legendre Fenchel (1.17), tenemos que $\beta(\rho(\mu)) \leq A_L(\mu)$. Por ésta y varias razones más que veremos después, esta función a veces es denominada *Lagrangiana efectiva*.

Ahora podemos definir lo que queremos decir con medidas minimizantes de la acción con vector de rotación fijo.

3.1.23 Definición. Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L)$. Si μ satisface (3.4), es decir, $A_L(\mu) = \beta(\rho(\mu))$, entonces μ es llamada medida minimizante de la acción ó medida de Mather con vector de rotación $\rho(\mu)$.

Denotemos por $\mathfrak{M}^h(L)$ al subconjunto de medidas minimizantes de la acción con vector de rotación h , es decir,

$$\mathfrak{M}^h := \mathfrak{M}^h(L) = \{\mu \in \mathfrak{M}(L) : A_L(\mu) < +\infty, \rho(\mu) = h \text{ y } A_L(\mu) = \beta(h)\}.$$

Ahora podemos definir a los siguientes conjuntos de minimizantes.

3.1.24 Definición (Conjunto de Mather). Para una clase de homología (ó vector de rotación) $h \in H_1(M; \mathbb{R})$, definimos el conjunto de Mather correspondiente al vector de rotación h , como

$$\widetilde{\mathcal{M}}^h := \bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}^h} \text{supp } \mu \subset TM, \tag{3.5}$$

cuya proyección es $\mathcal{M}^h = \pi(\widetilde{\mathcal{M}}^h) \subseteq M$.

De la Proposición 3.1.2 y del Corolario 3.1.6 se sigue que este conjunto es no vacío e invariante. También en este caso, demostraremos que tal conjunto de Mather es cerrado, para probar tal afirmación primero es necesario demostrar el lema siguiente.

3.1.25 Lema. *Sea $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ un conjunto de medidas de Mather con vector de rotación h . Si $\tilde{\mu}$ es definida por $\tilde{\mu} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n$, entonces $\tilde{\mu}$ es una medida de probabilidad invariante con vector de rotación h , es decir, $\Phi_{s*}^L \tilde{\mu} = \tilde{\mu}$ y $\langle c, \rho(\tilde{\mu}) \rangle = \langle c, h \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \Phi_{s*}^L \tilde{\mu} &= \Phi_{s*}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Phi_{s*}^L \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n = \tilde{\mu}. \\ &\text{y} \\ \langle c, \rho(\tilde{\mu}) \rangle &= \langle c, \rho(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n) \rangle = \langle c, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho(\mu_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int \eta_c \cdot d\mu_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \langle c, \rho(\mu_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \langle c, h \rangle = \langle c, h \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

3.1.26 Proposición. *El conjunto de Mather $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un conjunto denso numerable $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ de medidas de Mather con vector de rotación h y consideremos la nueva medida $\tilde{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n$, se sigue del Lema 3.1.25 que $\tilde{\mu}$ es una medida de probabilidad invariante con vector de rotación h . Además, se deduce de la convexidad que β que ésta medida minimiza la acción entre todas las medidas con vector de rotación h (puesto que, es una combinación convexa del conjunto denso numerable de medidas), entonces $\text{supp } \tilde{\mu} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}^h$.

La otra contención es directa, ya que, por como definimos $\tilde{\mu}$ tenemos que

$$\text{supp } \tilde{\mu} = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}^h} \text{supp } \mu} \supseteq \widetilde{\mathcal{M}}^h,$$

entonces $\text{supp } \tilde{\mu} = \widetilde{\mathcal{M}}^h$. Por lo tanto, $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ es cerrado. Más aún, ésto demuestra que existe una medida de Mather μ^h de soporte completo, es decir, $\text{supp } \mu^h = \widetilde{\mathcal{M}}^h$. \square

De manera análoga al Teorema 3.1.16, tenemos el siguiente resultado para el conjunto de Mather con vector de rotación h .

3.1.27 Teorema. *Sea $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ definida como en (3.5). El conjunto $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ es compacto e invariante bajo el flujo de Euler-Lagrange. Más aún, $\pi|_{\widetilde{\mathcal{M}}^h}$ es un mapeo inyectivo de $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ en M cuya inversa $\pi^{-1} : \mathcal{M}^h \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^h$ es Lipschitz.*

Aunque la propiedad del gráfico para $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ no se demuestra en [22], ésta se deduce del Teorema 3.1.16, usando el hecho de que $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ puede verse como el soporte de una única medida minimizante de la acción y que éste conjunto está contenido en uno o más $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ para algunas $c \in H^1(M; \mathbb{R})$ [30, Proposición 3.3.4], de igual manera puede consultar [30, Sección 3.3] para más detalles sobre las funciones α y β de Mather.

3.2. Conjunto de Mañé

En la sección anterior, hemos descrito la construcción de los conjuntos de Mather al igual dimos algunas propiedades de tales conjuntos, una de las limitaciones de los conjuntos de Mather es que, al ser el soporte de medidas de probabilidad invariantes, por el Teorema de recurrencia de Poincaré [25, Teorema 17.3] éstos son recurrentes bajo el flujo de Euler-Lagrange, tal propiedad descarta muchos conjuntos invariantes interesantes, entre ellas las órbitas heteroclínicas⁴ y homoclínicas entre conjuntos invariantes.

En ésta sección definiremos otros conjuntos de invariantes, tales conjuntos serán compactos y a menudo más grandes que los conjuntos de Mather, además veremos que propiedades dinámicas satisfacen tales conjuntos.

3.2.1. Curvas semiestáticas

Ahora, en lugar de considerar medidas de probabilidad invariantes que minimizan la acción, consideraremos curvas que minimizan la acciones para algunos Lagrangianos modificados. Recordemos que (ver Observación 2.3.4 y 2.4.6) las órbitas en un KAM-toro pueden caracterizarse en términos de las propiedades que tales órbitas satisfacían, por lo cual, procederemos de forma análoga al visto en la Sección 2.3, es decir, deduciremos tal construcción de conjuntos minimizantes en el caso general de un Lagrangiano de Tonelli.

Sean $c \in H^1(M; \mathbb{R})$ una clase de cohomología y η una 1-forma suave en M , con clase de cohomología c , sabemos que, existe una relación estrecha entre las soluciones del flujo de Euler-Lagrange y las extremales del funcional de acción A_{L_η} para el problema de puntos finales fijos, que son por Lema 3.1.8 las mismas que las extremales de A_L . En general,

⁴Una órbita heteroclínica (a veces llamada conexión heteroclínica) es una trayectoria en el espacio de fase que une dos puntos de equilibrio diferentes. Si los puntos de equilibrio al comienzo y al final de la órbita son los mismos, ésta es llamada órbita homoclínica.

éstas extremales no son mínimas, Fathi demostró en [12, Sección 3.6] que éstas son mínimos locales sólo si el tiempo es muy corto. Por lo cual, podríamos preguntarnos lo siguiente: Dados $x, y \in M$ y $T > 0$. ¿Existe una curva minimizante que conecta x con y en el tiempo T ?

Por el tipo de Lagrangiano con el que estamos trabajando, la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa. Éste es un resultado clásico en el cálculo de variaciones, conocido como el Teorema de Tonelli.

Denotemos por C^{ac} al conjunto de curvas absolutamente continuas y refirámonos a la topología uniforme definida en [22, Pag. 174] como la topología C^0 . El Lema siguiente nos servirá para demostrar el Teorema de Tonelli, para el cual sólo daremos un bosquejo de la demostración, para más detalles sobre la demostración sugerimos consultar [22, Apéndice 1].

3.2.1 Lema. *Sea $K \in \mathbb{R}$. El conjunto $S_K := \{\gamma \in C^{ac}([a, b], M) : A_{L_\eta}(\gamma) \leq K\}$ es compacto en la topología C^0 .*

BOSQUEJO DE LA DEMOSTRACIÓN. Primero se prueba que la familia de curvas en S_K es absolutamente equicontinua, para probar ésto, es necesario usar la superlinealidad de L . Después, se aplica el Teorema de Arzelá-Ascoli para deducir que cada sucesión $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ en S_K tiene una subsucesión convergente con respecto a la topología C^0 . Además, puesto que éstas son absolutamente equicontinuas se tiene que el límite de la subsucesión convergente también debe ser absolutamente continua. Por último, se demuestra que si γ es el límite de la sucesión $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ en S_K , entonces $\gamma \in S_K$, es decir $A_{L_\eta}(\gamma) \leq K$. \square

Ahora veamos cómo demostrar el Teorema de Tonelli a partir del Lema anterior.

3.2.2 Teorema (Teorema de Tonelli). *Sea M una variedad compacta y L un Lagrangiano de Tonelli en TM . Para todo $a < b \in \mathbb{R}$ y $x, y \in M$, existe $\gamma \in C^{ac}([a, b], M)$ con $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$, tal que*

$$A_{L_\eta}(\gamma) = \min_{\substack{\sigma \in C^{ac}([a, b], M) \\ \sigma(a) = x, \sigma(b) = y}} A_{L_\eta}(\sigma).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $k_0 := \inf\{A_{L_\eta}(\gamma) : \gamma \in C^{ac}([a, b], M)\}$. Observe que $k_0 > -\infty$, ya que, L_η esta acotada por abajo. Por lo tanto, para cualquier $K > k_0$, $S_K \neq \emptyset$ y además es compacto debido al Lema 3.2.1. Tenemos que, $S_{\hat{k}} \subseteq S_K$ si $k_0 < \hat{k} \leq K$, entonces

$$\bigcap_{K > k_0} S_K \neq \emptyset$$

y cualquier elemento de esta intersección es una minimizante de $A_{L\eta}$. □

A la curva γ que minimiza la acción en el Teorema 3.2.2, la llamaremos *minimizante de Tonelli*. Más aún tenemos las observaciones siguientes.

- 3.2.3 Observación.** (i) Las minimizantes de Tonelli sólo dependen de la clase de cohomología $c = [\eta]$ y no del representante η elegido. De hecho, agregar una 1-forma df a L contribuirá como un termino constante $f(y) - f(x)$, que no desempeña ningún papel en la selección de las minimizantes.
- (ii) No es necesario asumir la compacidad⁵ de M para que existan éstas minimizantes, la condición de crecimiento superlineal con respecto a alguna métrica Riemanniana en M es suficiente, una perspectiva similar se sigue en [9]. Pedir que M sea compacta es una condición muy fuerte, ya que, debido a ésta podemos garantizar que todo campo vectorial suave en M es completo [14, Corolario 6.9], lo cual, nos ayuda mucho en nuestro trabajo. Es posible demostrar la existencia de minimizantes en el caso en que L presenta singularidades, por ejemplo en el problema de N -cuerpos [8, 13, 20].
- (iii) Una minimizante de Tonelli que es C^1 es de hecho C^r , siempre que el Lagrangiano L sea $C^r(TM)$, ésto se deduce fácilmente de la transformada de Legendre (1.2) como se demostró en el Corolario 1.2.9, pero ésta vez de forma local, puesto que, estamos en una variedad compacta, además satisface la ecuación de Euler-Lagrange, ésto se deduce de la Proposición 1.2.10, nuevamente procediendo de forma local.

Estamos interesados especialmente en las minimizantes de Tonelli que están definidas para todo $t > 0$, es decir, en las curvas en $C^{ac}([a, b], M)$ que minimizan la acción con respecto a cualquier tiempo dado, veremos que tales curvas satisfacen propiedades dinámicas muy interesantes, pero primero definamos tales objetos.

3.2.4 Definición (c -minimizante). Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva absolutamente continua. Decimos que γ es una c -minimizante global para L , si dados cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, tenemos que

$$A_{L\eta}(\gamma|_{[a,b]}) = \text{mín } A_{L\eta}(\sigma)$$

donde el mínimo es tomado sobre toda $\sigma \in C^{ac}([a, b], M)$ tal que $\sigma(a) = \gamma(a)$ y $\sigma(b) = \gamma(b)$.

Como vimos en la Sección 2.3 podemos dar una noción de minimizante más fuerte, pidiendo que el mínimo se alcance entre todas las curvas que conectan los dos puntos finales fijos, independientemente del tiempo que le tome, por lo cual, tenemos la siguiente definición.

⁵En variedades compactas la elección de la métrica Riemanniana no importa.

3.2.5 Definición (c -minimizante en tiempo libre). Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva absolutamente continua. Decimos que γ es una c -minimizante en tiempo libre para L , si para cualquier $a < b \in \mathbb{R}$ dados,

$$A_{L_\eta}(\gamma|_{[a,b]}) = \text{mín } A_{L_\eta}(\sigma)$$

donde el mínimo es tomado sobre toda $\sigma : [a', b'] \rightarrow M$ tal que $\sigma(a') = \gamma(a)$ y $\sigma(b') = \gamma(b)$.

En la Sección 2.3 demostramos que las órbitas en un KAM-toro satisfacen ésta condición más fuerte, módulo una constante que se agrega al Lagrangiano (ver Observación 2.3.4). Mostremos que en el caso de variedades compactas la acción A_{L_η} también es *sensible* a la adición de constantes al Lagrangiano, aunque ésta adición es algo irrelevante para discernir si las curvas son o no c -minimizantes. Por ejemplo, suponga que $\int_0^T L_\eta(\gamma, \dot{\gamma})dt < \int_0^{T'} L_\eta(\sigma, \dot{\sigma})dt$ con $T' < T$ y sea k una constante tal que

$$k > \frac{1}{T - T'} \left(\int_0^{T'} L_\eta(\sigma, \dot{\sigma})dt - \int_0^T L_\eta(\gamma, \dot{\gamma})dt \right),$$

entonces al sumar k al Lagrangiano, tenemos que

$$\begin{aligned} A_{L_{\eta+k}}(\gamma) &= \int_0^T L_{\eta+k}(\gamma, \dot{\gamma})dt + kT = \int_0^T L_\eta(\gamma, \dot{\gamma})dt + k(T - T') + kT' \\ &> \int_0^T L_\eta(\gamma, \dot{\gamma})dt + \int_0^{T'} L_\eta(\sigma, \dot{\sigma})dt - \int_0^{T'} L_\eta(\gamma, \dot{\gamma})dt + kT' \\ &= \int_0^{T'} L_\eta(\sigma, \dot{\sigma})dt + kT' = A_{L_{\eta+k}}(\sigma). \end{aligned}$$

Notemos que una c -minimizante en tiempo libre también es una c -minimizante, puesto que si γ es c -minimizante en tiempo libre, ésta es una c -minimizante para cualquier intervalo de tiempo, en particular para el intervalo de tiempo en el que está definida.

Es momento de estudiar la existencia y las propiedades tanto de las c -minimizantes como de las c -minimizantes en tiempo libre.

Sean $x, y \in M$ y $T > 0$, denotemos por $C_T(x, y)$ al conjunto de curvas absolutamente continuas $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(T) = y$, del Teorema de Tonelli podemos garantizar que existe una $\gamma_{\text{mín}} \in C_T(x, y)$ tal que $\gamma_{\text{mín}} = \text{mín}_{\gamma \in C_T(x, y)} A_{L_\eta}(\gamma)$. La siguiente definición es de particular interés, pues nos será de utilidad para definir otros tipos de minimizantes.

3.2.6 Definición (El potencial de Mañé). Sea $k \in \mathbb{R}$ fija, definimos la siguiente cantidad:

$$\phi_{\eta,k}(x, y) := \inf_{T>0} \min_{\gamma \in C_T(x,y)} A_{L_\eta+k}(\gamma) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

la cual, es conocida como el *potencial de Mañé*.

En primer lugar nos gustaría entender cuando ésta cantidad es finita, además mostrar las propiedades que satisface. Para ésto es necesario dar la siguiente definición.

3.2.7 Definición (El valor crítico de Mañé).

$$\begin{aligned} c(L_\eta) &:= \sup\{k \in \mathbb{R} : \text{Existe una curva cerrada } \gamma \text{ con } A_{L_\eta+k}(\gamma) < 0\} \\ &= \inf\{k \in \mathbb{R} : \text{Toda curva cerrada } \gamma \text{ satisface } A_{L_\eta+k}(\gamma) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Notemos que es necesario demostrar que tal valor es finito, ésto lo probaremos a continuación.

3.2.8 Proposición. *El valor crítico de Mañé es finito, es decir, $c(L_\eta) < \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la superlinealidad de L_η tenemos que, para toda $A \in \mathbb{R}$ existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $L_\eta(x, v) \geq A\|v\| - B$ para todo $(x, v) \in TM$, luego $L_\eta(x, v) + B \geq A\|v\|$, al tomar $A > 0$, podemos garantizar la existencia de una constante k tal que $L_\eta + k \geq 0$ en todas partes. Por lo tanto, $A_{L_\eta+k}(\gamma) \geq 0$ para toda curva cerrada γ . \square

Más aún, $c(L_\eta)$ sólo depende de $c = [\eta]$ y no del representante elegido, ya que, es suficiente notar que las integral de las 1-formas exactas a lo largo de curvas cerradas es cero. Veremos más adelante que éste *valor crítico* es algo que ya conocíamos, probaremos (Teorema 3.4.1) que $c(L_\eta) = \alpha(c)$, donde α es la función α de Mather (3.2), es momento de mencionar algunas propiedades que satisface el potencial de Mañé.

3.2.9 Proposición.

- (1) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad \phi_{\eta,k}(x, y) \leq \phi_{\eta,k}(x, z) + \phi_{\eta,k}(z, y) \quad \forall x, y, z \in M.$
- (2) *Si* $k < c(L_\eta), \quad \phi_{\eta,k}(x, y) = -\infty \quad \forall x, y \in M.$
Si $k \geq c(L_\eta), \quad \phi_{\eta,k}(x, y) \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in M.$
- (3) *Si* $k \geq c(L_\eta), \quad \phi_{\eta,k} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ *es Lipschitz.*
- (4) *Si* $k \geq c(L_\eta), \quad \phi_{\eta,k}(x, x) \equiv 0 \quad \forall x \in M.$
- (5) *Si* $k \geq c(L_\eta), \quad \phi_{\eta,k}(x, y) + \phi_{\eta,k}(y, x) \geq 0 \quad \forall x, y \in M.$
Si $k > c(L_\eta), \quad \phi_{\eta,k}(x, y) + \phi_{\eta,k}(y, x) > 0 \quad \forall x \neq y \in M.$

DEMOSTRACIÓN. (1) Observemos que esta desigualdad tiene sentido aún cuando tenemos que $\phi_{\eta,k}(x, y) = -\infty$, para algunos $x, y \in M$. Sean $\gamma_1 \in C_T(x, z)$ y $\gamma_2 \in C_{T'}(z, y)$ y consideremos la curva obtenida al unir γ_1 con γ_2 , es decir, $\gamma_1 * \gamma_2 \in C_{T+T'}(x, y)$, ya que la acción es lineal, se sigue que $A_{L_{\eta+k}}(\gamma_1 * \gamma_2) = A_{L_{\eta+k}}(\gamma_1) + A_{L_{\eta+k}}(\gamma_2)$, entonces

$$\phi_{\eta,k}(x, y) \leq A_{L_{\eta+k}}(\gamma_1) + A_{L_{\eta+k}}(\gamma_2),$$

es suficiente tomar el ínfimo sobre todas las posibles curvas (γ_1, T) y (γ_2, T') , para obtener

$$\phi_{\eta,k}(x, y) \leq \phi_{\eta,k}(x, z) + \phi_{\eta,k}(z, y).$$

(2) Primero probaremos que si $k < c(L_{\eta})$ existe un $x_0 \in M$ tal que $\phi_{\eta,k}(x_0, x_0) = -\infty$. De hecho, de la definición de $c(L_{\eta})$, sabemos que existe $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ una curva cerrada con $A_{L_{\eta+k}}(\gamma) < 0$. Denotemos por γ^n las iteraciones de n -veces γ , es decir, $\gamma^n = \underbrace{\gamma * \dots * \gamma}_{n\text{-veces}}$, entonces

$$\phi_{\eta,k}(\gamma(0), \gamma(0)) \leq A_{L_{\eta+k}}(\gamma^n) = nA_{L_{\eta+k}}(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty,$$

tomando $x_0 := \gamma(0)$ (ó cualquier otro punto en γ), por (1) tenemos que $\forall x, y \in M$

$$\phi_{\eta,k}(x, y) \leq \phi_{\eta,k}(x, x_0) + \phi_{\eta,k}(x_0, x_0) + \phi_{\eta,k}(x_0, y) = -\infty.$$

En cuanto a la segunda afirmación, tenemos que si $k \geq c(L_{\eta})$, entonces de la definición de $c(L_{\eta})$ se sigue que todas las curvas cerradas tienen acción positiva, en particular $\phi_{\eta,k}(x, x) \geq 0$ para todo $x \in M$, si suponemos que existen $x, y \in M$ tales que $\phi_{\eta,k}(x, y) = -\infty$ por (1) tendríamos que

$$\phi_{\eta,k}(x, x) \leq \phi_{\eta,k}(x, y) + \phi_{\eta,k}(y, x) = -\infty,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si $k \geq c(L_{\eta})$, entonces $\phi_{\eta,k}(x, y) > -\infty \forall x, y \in M$.

(3) Sea $k \geq c(L_{\eta})$ y definamos a $Q := \max_{x \in M, \|v\|=1} L_{\eta}(x, v)$. Para cualquier $x, y \in M$ consideremos a $\gamma_{x,y} : [0, d(x, y)] \rightarrow M$ como la geodésica con velocidad unitaria que conecta x con y , entonces

$$\phi_{\eta,k}(x, y) \leq A_{L_{\eta+k}}(\gamma_{x,y}) \leq (Q + k)d(x, y).$$

Usando (1) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \phi_{\eta,k}(x_2, y_2) - \phi_{\eta,k}(x_1, y_1) &\leq \phi_{\eta,k}(x_2, x_1) + \phi_{\eta,k}(x_1, y_2) - \phi_{\eta,k}(x_1, y_1) \\ &\leq \phi_{\eta,k}(x_2, x_1) + \cancel{\phi_{\eta,k}(x_1, y_1)} + \phi_{\eta,k}(y_1, y_2) - \cancel{\phi_{\eta,k}(x_1, y_1)} \\ &\leq \phi_{\eta,k}(x_2, x_1) + \phi_{\eta,k}(y_1, y_2) \\ &\leq (Q + k)[d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)]. \end{aligned}$$

Al intercambiar x_1 con x_2 y y_1 con y_2 en el procedimiento anterior, obtenemos que

$$\phi_{\eta,k}(x_1, y_1) - \phi_{\eta,k}(x_2, y_2) \leq (Q + k)[d(x_2, x_1) + d(y_2, y_1)].$$

Con lo cual hemos demostrado (3).

(4) Sea $x \in M$ y $k \geq c(L_\eta)$, de (3), tenemos que

$$\phi_{\eta,k}(x, x) \leq (Q + k)d(x, x) = 0.$$

Por lo tanto, $\phi_{\eta,k}(x, x) \equiv 0, \forall x \in M$.

(5) Si $k \geq c(L_\eta)$, por (1) y (4) tenemos que

$$0 = \phi_{\eta,k}(x, x) \leq \phi_{\eta,k}(x, y) + \phi_{\eta,k}(y, x), \quad \forall x, y \in M.$$

Ahora, supongamos que $k > c(L_\eta)$ y procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existen $x, y \in M$ con $x \neq y$ tal que $\phi_{\eta,k}(x, y) + \phi_{\eta,k}(y, x) = 0$. Sean $\gamma_n \in C_{T_n}(x, y)$ y $\sigma_n \in C_{S_n}(y, x)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{L_\eta+k}(\gamma_n) = \phi_{\eta,k}(x, y) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{L_\eta+k}(\sigma_n) = \phi_{\eta,k}(y, x).$$

Demostremos que $\underline{T} := \liminf_{n \rightarrow +\infty} T_n > 0$, éste puede ser $+\infty$, nuevamente procedamos por contradicción, supongamos que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$ y tomemos una subsucesión $\{\gamma_{n_k}\}$ tal que $T_{n_k} \rightarrow 0$. Por la superlinealidad de L_η , sabemos que para cada $A > 0$ existe $B(A)$ tal que $L_\eta \geq A\|v\| - B(A)$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_{\eta,k}(x, y) &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_0^{T_{n_k}} L_\eta(\gamma_{n_k}, \dot{\gamma}_{n_k}) dt + kT_{n_k} \\ &\geq \lim_{n_k \rightarrow \infty} \left[A \int_0^{T_{n_k}} \|\dot{\gamma}_{n_k}\| dt + T_{n_k}(k - B(A)) \right] \\ &= Ad(x, y), \end{aligned}$$

como es para toda $A > 0$, entonces $\phi_{\eta,k}(x, y) = +\infty$, lo cual contradice (2). Por lo tanto, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} T_n > 0$. Análogamente se puede demostrar que $\underline{S} := \liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n > 0$, éste puede ser $+\infty$.

Tomemos ahora subsucesiones $\{\gamma_{n_k}\}$ y $\{\sigma_{m_k}\}$ tal que $T_{n_k} \rightarrow \underline{T} > 0$ y $S_{m_k} \rightarrow \underline{S} > 0$, además por hipótesis $k > c(L_\eta)$ y supusimos que existen $x \neq y \in M$ tales que $\phi_{\eta,k}(x, y) + \phi_{\eta,k}(y, x) =$

0, entonces

$$\begin{aligned}
 \phi_{\eta,k}(x, x) &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{L_\eta+c(L_\eta)}(\gamma_{n_k} * \sigma_{m_k}) \\
 &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{L_\eta+k}(\gamma_{n_k} * \sigma_{m_k}) + \lim_{k \rightarrow +\infty} (c(L_\eta) - k)(T_{n_k} + S_{n_k}) \\
 &= \phi_{\eta,k}(x, y) + \phi_{\eta,k}(y, x) + \lim_{k \rightarrow +\infty} (c(L_\eta) - k)(T_{n_k} + S_{n_k}) \\
 &= (c(L_\eta) - k)(\underline{T} + \underline{S}) < 0 \quad (\text{ó } -\infty),
 \end{aligned}$$

contradiendo (4). Por lo tanto, $\forall x \neq y \in M$ tenemos que $\phi_{\eta,k}(x, y) + \phi_{\eta,k}(y, x) > 0$. \square

De (2) se deduce que $c(L_\eta)$ se puede definir de forma equivalente en términos del potencial de Mañé como:

$$\begin{aligned}
 c(L_\eta) &:= \inf\{k \in \mathbb{R} : \phi_{\eta,k}(x, y) > -\infty, \text{ para todo } x, y \in M\} \\
 &= \sup\{k \in \mathbb{R} : \phi_{\eta,k}(x, y) = -\infty, \text{ para todo } x, y \in M\}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Notemos que, γ una c -minimizante en tiempo libre para $L + k$ si y sólo si

$$\forall a < b \quad \int_a^b L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt + (b - a)k = \phi_{\eta,k}(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Más aún, por la Proposición 3.2.9 inciso (2), no tiene ningún sentido considerar el caso $k < c(L_\eta)$, ya que, $\phi_{\eta,k}(x, y) = -\infty, \forall x, y \in M$. Por lo cual, consideraremos por ahora sólo el caso $k \geq c(L_\eta)$. Veamos ahora, que sucede en éste caso.

3.2.10 Proposición. *Sea $k > c(L_\eta)$. Para todo $x, y \in M$ con $x \neq y$ existe $T > 0$ y $\gamma \in C_T(x, y)$ tal que $A_{L_\eta+k}(\gamma) = \phi_{\eta,k}(x, y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos para $T > 0$, la función $f(T) := \min_{\gamma \in C_T(x, y)} A_{L_\eta+k}(\gamma)$, ésta función es continua, para toda $k \geq c(L_\eta)$, gracias al Teorema de Tonelli 3.2.2 y cumple las siguientes propiedades.

- $f(T) \rightarrow +\infty$ cuando $T \rightarrow 0^+$, para toda $k \geq c(L_\eta)$.

Sea γ_T la correspondiente minimizante de Tonelli que conecta x con y en el tiempo T . Por la superlinealidad de L_η , sabemos que para toda $A > 0$ existe $B(A)$ tal que $L_\eta(x, v) \geq A\|v\| - B, \forall (x, v) \in TM$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
 f(T) &= \min_{\gamma \in C_T(x, y)} A_{L_\eta+k}(\gamma) = A_{L_\eta+k}(\gamma_T) \\
 &\geq A \int_0^T \|\dot{\gamma}_T\| dt + (k - B)T \\
 &\geq Ad(x, y) + (k - B)T \xrightarrow{T \rightarrow 0^+} Ad(x, y),
 \end{aligned}$$

como es para toda $A > 0$ y además $x \neq y$, podemos concluir que $f(T) \xrightarrow{T \rightarrow 0^+} +\infty$.

- $f(T) \rightarrow +\infty$ cuando $T \rightarrow +\infty$, para $k > c(L_\eta)$.

En efecto

$$\begin{aligned} f(T) &= \min_{\gamma \in C_T(x,y)} A_{L_\eta+k}(\gamma) \\ &= \min_{\gamma \in C_T(x,y)} A_{L_\eta+c(L_\eta)}(\gamma) + (k - c(L_\eta))T \\ &\geq \phi_{\eta,c(L_\eta)}(x,y) + (k - c(L_\eta))T \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned} \quad \square$$

Una observación importante que se deduce de la Proposición anterior, pues para el caso $k > c(L_\eta)$, las c -minimizantes en tiempo libre no son tan especiales, ya que, dados dos puntos cualesquiera en M existen minimizantes en tiempo libre para $L + k$ que los conectan, por el Teorema de Tonelli 3.2.2 tenemos que éstas lo hacen en un tiempo finito. Por lo cual, ahora sólo nos queda analizar el caso *crítico* $k = c(L_\eta)$, es decir, estudiar las c -minimizantes en tiempo libre para $L + c(L_\eta)$, cuyo nombre se debe a que éste es el menor valor posible de k para el que puede existir tales minimizantes.

Es momento de definir las curvas que cumplen ser minimizantes en tiempo libre para el caso crítico.

3.2.11 Definición (Curva c -semiestática). Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva absolutamente continua. Decimos que γ es una curva c -semiestática ó c -minimizante global para L , si

$$\int_a^b L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt + c(L_\eta)(b - a) = \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\gamma(a), \gamma(b)) \quad \forall a < b.$$

Si γ es una curva c -semiestática para L , entonces ésta es una c -minimizante en tiempo libre para $L + c(L_\eta)$ y consecuentemente es una c -minimizante global para L , por lo tanto, corresponde a una solución del flujo de Euler-Lagrange de L .

El recíproco de la observación previa es cierto, es decir, cada c -minimizante global de L , es de hecho, una curva c -semiestática de $L + c(L_\eta) = L + \alpha(c)$, donde α denota la función α de Mather asociada a L , ésto lo demostraremos en el Teorema 3.4.1

Por otro lado, en la Proposición 2.3.1 probamos que las órbitas de un KAM-toro con clase de cohomología c , son c -minimizantes en tiempo libre para $L + E_c$, donde E_c denota la energía del toro. De la Proposición 2.4.4 y de la definición del valor crítico de Mañé (ecuación (3.6)),

que en éste caso $E_c = c(L_c)$. Podemos concluir que las órbitas en un KAM-toro son curvas c -semiestáticas, de forma análoga a la Observación 2.3.4 podemos decir que si tenemos un KAM-toro \mathcal{T} con clase de cohomología c , entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{T}) = \bigcup \{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) : \gamma \text{ es una curva } c\text{-semiestática para } L \text{ y } t \in \mathbb{R}\},$$

donde \mathcal{L} denota la transformada de Legendre (1.2) asociada con L .

A continuación, definimos a tal conjunto de curvas.

3.2.12 Definición (Conjunto de Mañé). Para una clase de cohomología $c \in H^1(M; \mathbb{R})$, definimos el conjunto de Mañé con clase de cohomología c , como

$$\tilde{\mathcal{N}}_c = \bigcup \{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) : \gamma \text{ es una curva } c\text{-semiestática y } t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.7)$$

Notemos que, hasta ahora no hemos probado que existan tales curvas semiestáticas, ni que éste conjunto sea no vacío. Lo demostraremos más adelante, deduciéndolo (entre otras propiedades) de resultados análogos para otra familia de conjuntos que definiremos en la sección siguiente. Sin embargo, es claro que dicho conjunto es no vacío e invariante, más aún, una demostración similar a la del Teorema de Tonelli garantiza que $\tilde{\mathcal{N}}_c$ es cerrado.

3.3. Conjunto de Aubry

En la Sección 2.4 mostramos que las órbitas en un KAM-toro no sólo eran c -minimizantes globales, sino que también satisfacían una propiedad más fuerte (establecida en la Proposición 2.4.5). En términos generales, la acción de $L_c + E_c$ en un trozo de curva con puntos finales x e y , no sólo era la mínima necesaria para conectar x con y , sino que también era igual a menos la acción mínima para conectar de nuevo y con x .

3.3.1. Curvas estáticas

Primero recordemos que, por la Proposición 3.2.9 inciso (5), para cada $x, y \in M$ tenemos que $\phi_{\eta, c(L_\eta)}(x, y) \geq -\phi_{\eta, c(L_\eta)}(y, x)$. Por lo cual, es momento de definir a las curvas para las cuales la desigualdad anterior es de hecho una igualdad.

3.3.1 Definición (Curva c -estática). Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva absolutamente continua. Decimos que γ es una curva c -estática para L si

$$\int_a^b L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt + c(L_\eta)(b - a) = -\phi_{\eta, c(L_\eta)}(\gamma(b), \gamma(a)) \quad \forall a < b.$$

A continuación daremos algunas observaciones importantes que se deducen de la definición anterior.

3.3.2 Observación. (i) Si γ es una curva c -estática para L , entonces ésta es una curva c -semiestática, esto es sólo una consecuencia de la desigualdad $-\phi_{\eta,c(L_\eta)}(\gamma(b), \gamma(a)) \leq \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\gamma(a), \gamma(b))$, ya que, si γ es una curva c -estática entonces:

$$\int_a^b L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt + c(L_\eta)(b - a) \leq \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\gamma(a), \gamma(b)) \quad a < b.$$

Dado que $\phi_{\eta,c(L_\eta)}(\gamma(a), \gamma(b))$ se definió como la mínima sobre todas las curvas de conexión, entonces la igualdad debe mantenerse, más aún, ésta corresponde a una solución del flujo de Euler-Lagrange Φ^L .

(ii) En la sección 2.4 (Proposición 2.4.5 y Observación 2.4.6) probamos que las órbitas de un KAM-toro con clase de cohomología c , eran curvas c -estáticas, más aún, por la Proposición 2.4.4 y de la definición del valor crítico de Mañé (dada en la ecuación (3.6)), tenemos que el valor E_c coincide con $c(L_\eta)$, donde E_c denota en éste caso la energía del KAM-toro. En particular podemos dar una observación análoga a la Observación 2.4.6 inciso (ii) diciendo que si tenemos un KAM-toro \mathcal{T} con clase de cohomología c , entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{T}) = \bigcup \{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) : \gamma \text{ es una curva } c\text{-estática para } L \text{ y } t \in \mathbb{R}\},$$

donde \mathcal{L} denota la transformada de Legendre (1.2) asociada con L .

Por lo cual, sólo nos queda definir al conjunto de tales curvas en caso de variedades compactas.

3.3.3 Definición (Conjunto de Aubry). Para una clase de cohomología $c \in H^1(M; \mathbb{R})$, definimos el conjunto de Aubry con clase de cohomología c , como

$$\tilde{\mathcal{A}}_c = \bigcup \{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) : \gamma \text{ es una curva } c\text{-estática y } t \in \mathbb{R}\},$$

La proyección en la variedad base $\mathcal{A}_c = \pi(\tilde{\mathcal{A}}_c) \subseteq M$ es llamado el conjunto de Aubry proyectado con clase de cohomología c .

De forma similar al conjunto de Mañé, no hemos demostrado que $\tilde{\mathcal{A}}_c$ es no vacío, lo probaremos en la siguiente sección, sin embargo si dicho conjunto es no vacío, es claramente invariante, puesto que, es unión de órbitas, el cual también es cerrado (la prueba sigue la misma línea que el Teorema de Tonelli). Además $\tilde{\mathcal{A}}_c$ está contenido en $\tilde{\mathcal{N}}_c$ por la Observación 3.3.2 inciso (i).

3.4. La relación entre los conjuntos $\widetilde{\mathcal{M}}_c, \widetilde{\mathcal{A}}_c, \widetilde{\mathcal{N}}_c$ y $\widetilde{\mathcal{E}}_c$

Como habíamos mencionado anteriormente en ésta sección demostraremos algunos aspectos importantes de los conjuntos de invariantes anteriormente definidos, de igual manera daremos la relación que cumplen tales conjuntos, para ésto es necesario dar el siguiente teorema.

3.4.1 Teorema. *Las relaciones del (1)-(6) dadas en el diagrama siguiente son ciertas.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \widetilde{\mathcal{M}}_c & \stackrel{(1)}{\subseteq} & \widetilde{\mathcal{A}}_c & \stackrel{(2)}{\subseteq} & \widetilde{\mathcal{N}}_c & \stackrel{(3)}{\subseteq} & \widetilde{\mathcal{E}}_c := \{E(x, v) = \alpha(c) \stackrel{(4)}{=} c(L_\eta)\} & \subseteq & TM \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow \pi \\
 (\pi|_{\widetilde{\mathcal{M}}_c})^{-1} & \text{(5)} & \pi & \pi & \text{(6)} & (\pi|_{\widetilde{\mathcal{A}}_c})^{-1} & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \mathcal{M}_c & \subseteq & \mathcal{A}_c & \subseteq & & & & \subseteq & M
 \end{array}$$

Antes de proceder con la demostración de Teorema, tenemos las siguientes observaciones, las cuales muestran la importancia del mismo.

- 3.4.2 Observación.**
- (i) De (1) y (2) y garantizando la existencia de medidas minimizantes de la c -acción mediante el Corolario 3.1.6, podemos deducir que los conjuntos de Aubry y Mañé son no vacíos, por lo tanto, implican la existencia de curvas semiestáticas y estáticas.
 - (ii) La inclusión de (2), como ya se observó, se deduce del hecho que las curvas estáticas también son semiestáticas.
 - (iii) Las inclusiones (1) y (2) pueden no ser estrictas, esto se verá más adelante en el ejemplo del Lagrangiano mecánico presentado en el Capítulo 4.
 - (iv) Como $\widetilde{\mathcal{A}}_c$ y $\widetilde{\mathcal{N}}_c$ son cerrados, se deduce de (3) que son compactos.
 - (v) La demostración de (3) proporcionará una demostración alternativa para el Teorema de Carneiro 3.1.17.
 - (vi) Las propiedades (5) y (6) son conocidas como los Teoremas del gráfico de Mather. Se sabe que, el conjunto de Mather y el conjunto de Aubry están contenidos en un gráfico

Lipschitz sobre la variedad base M , ésta es probablemente la propiedad más interesante de éstos conjuntos y tienen muchas consecuencias dinámicas. En cierto sentido, ésta es la razón por la que se pueden pensar que tales conjuntos son una generalización de los KAM-toro (ó gráficas Lagrangianas).

- (vii) La propiedad del gráfico no se cumple en general para el conjunto de Mañé, ésto lo veremos en nuestro ejemplo en la Sección 4.2.

A continuación demostraremos el Teorema 3.4.1, cuya demostración la estructuraremos de forma modular para mayor comprensión.

Comencemos demostrando que las curvas c -semiestáticas tienen energía $c(L_\eta)$. Como ya comentamos anteriormente, la versión original del teorema con $c(L_\eta)$ remplazada por $\alpha(c)$ se debe a Carneiro (Teorema 3.1.17). La prueba aquí presentada sigue la idea de Ricardo Mañé [19] (para más detalles ver [9, Teorema XI]).

3.4.3 Proposición (Propiedad (3)). $\tilde{\mathcal{N}}_c \subseteq \tilde{\mathcal{E}}_c = \{E(x, v) = c(L_\eta)\}$, es decir, las curvas c -semiestáticas tienen energía igual a $c(L_\eta)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva c -semiestática, es decir, para cada $T > 0$ tenemos que $A_{L_\eta+c(L_\eta)}(\gamma|_{[0, T]}) = \phi_{\eta, c(L_\eta)}(\gamma(0), \gamma(T))$. Sea $T > 0$ fijo y $\lambda > 0$, consideremos una reparametrización del tiempo de γ , dado por $\gamma_\lambda : [0, T/\lambda] \rightarrow M$, $t \mapsto \gamma(\lambda t)$. Notemos que los puntos extremos no cambian: $\gamma_\lambda(0) = \gamma(0)$ y $\gamma_\lambda(T/\lambda) = \gamma(T)$, sólo la duración del tiempo que les toma conectar tales puntos extremos.

Consideremos la acción de éstas curvas como una función de $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &:= A_{L_\eta+c(L_\eta)}(\gamma_\lambda) = \int_0^{T/\lambda} L_\eta(\gamma_\lambda(t), \dot{\gamma}_\lambda(t))dt + c(L_\eta)T/\lambda \\ &= \int_0^{T/\lambda} L_\eta(\gamma(\lambda t), \lambda\dot{\gamma}(\lambda t))dt + c(L_\eta)T/\lambda. \end{aligned}$$

Puesto que, γ es c -semiestática, se sigue que, γ es una c -minimizante en tiempo libre para $L_\eta + c(L_\eta)$, entonces A tiene un mínimo en $\lambda = 1$, luego, derivando (regla de Leibniz) el lado derecho de la igualdad de $A(\lambda)$ y evaluando en $\lambda = 1$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 = A'(1) &= \int_0^T \left(\frac{\partial L_\eta}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)t + \frac{\partial L_\eta}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))[\dot{\gamma}(t) + \ddot{\gamma}(t)t] \right) dt \\ &\quad + [L_\eta(\gamma(T), \dot{\gamma}(T)) + c(L_\eta)](-T). \end{aligned}$$

Para continuar con la deducción de la integral anterior, es necesario notar que

$$\frac{d}{dt}L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{\partial}{\partial x}L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) + \frac{\partial}{\partial v}L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\ddot{\gamma}(t),$$

además de la definición de energía, tenemos $E(x, v) = \frac{\partial L_\eta}{\partial v}(x, v) \cdot v - L_\eta(x, v)$, cuya energía se conserva a lo largo de la órbita, es decir, $E(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = E(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Con lo anterior podemos deducir que

$$\begin{aligned} 0 &= A'(1) = -T[L_\eta(\gamma(T), \dot{\gamma}(T)) + c(L_\eta)] \\ &\quad + \int_0^T \left(\frac{dL_\eta}{dt}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))t + \frac{\partial L_\eta}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) \right) dt \\ &\quad \text{integrando por partes: } u = t \text{ y } dw = dL_\eta, \text{ entonces } du = dt, w = L_\eta \\ &= -T[L_\eta(\gamma(T), \dot{\gamma}(T)) + c(L_\eta)] + \cancel{L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))t} \Big|_0^T \\ &\quad + \int_0^T \left[\frac{\partial L_\eta}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) - L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right] dt \\ &= -Tc(L_\eta) + \int_0^T E(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt \\ &= [E(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) - c(L_\eta)]T. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = c(L_\eta)$ □

Na siguiente versión del Teorema ergódico, nos servirá para demostrar que el valor crítico de Mañé coincide con la función α de Mather.

3.4.4 Lema. *Sea (X, d) un espacio métrico y (X, \mathcal{B}, μ) un espacio de probabilidad. Sea f μ -ergódica (Definición A.1.14) y $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función μ -integrable, entonces para μ -casi todo $x \in X$ se cumple la siguiente propiedad:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad d(f^N(x), x) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| \sum_{j=0}^{N-1} F(f^j(x)) - N \int F d\mu \right| < \varepsilon.$$

En su momento veremos como utilizar el lema anterior para demostrar la proposición siguiente.

3.4.5 Proposición (Propiedad (4)). $c(L_\eta) = \alpha(c)$, donde $c = [\eta]$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que $\widetilde{\mathcal{N}}_c$ es compacto, puesto que es cerrado y por (3) esta contenido en $\widetilde{\mathcal{E}}_c$ compacto, además éste es invariante bajo el flujo de Euler-Lagrange Φ_t^L , entonces existe una medida de probabilidad ergódica invariante μ tal que $\text{supp } \mu = \widetilde{\mathcal{N}}_c$.

Fijemos un punto genérico (ver Definición A.1.17) (x, v) en el soporte de μ , del Teorema ergódico A.1.16 se sigue que existe una sucesión de tiempos $T_n \rightarrow +\infty$, tal que $\Phi_{T_n}^L(x, v) \rightarrow (x, v)$ cuando $T_n \rightarrow +\infty$ y

$$\int L_\eta d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) dt,$$

entonces usando la definición de $\alpha(c)$ y el hecho de que las órbitas en el soporte de ésta medida son semiestáticas, obtenemos:

$$\begin{aligned} -\alpha(c) &\leq \int L_\eta d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) + c(L_\eta) dt - c(L_\eta) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_{\eta, c(L_\eta)}(x, \pi(\Phi_{T_n}^L(x, v)))}{T_n} - c(L_\eta) = -c(L_\eta), \end{aligned}$$

en la última igualdad usamos el hecho que $\phi_{\eta, c(L_\eta)}$ es acotada en $M \times M$ (siendo Lipschitz en una variedad compacta M). Entonces, $\alpha(c) \geq c(L_\eta)$.

Veamos como usar el Lema 3.4.4 para demostrar la desigualdad restante. Sea μ una medida ergódica que minimiza la c -acción, es decir,

$$\int (L_\eta(x, v) + \alpha(c)) d\mu = 0,$$

aplicando el Lema 3.4.4 con $f = \Phi^L$, $F = L_\eta + \alpha(c)$ y $X = TM$, obtenemos que existe una medida completa (ver Definición A.1.9) μ del conjunto A , tal que $(x, v) \in A$, entonces existe de una sucesión de tiempos $T_n \rightarrow +\infty$ que satisfacen

$$d((x, v), \Phi_{T_n}^L(x, v)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) + \alpha(c) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

luego

$$\begin{aligned} \phi_{\eta, \alpha(c)}(x, \pi(\Phi_1^L(x, v))) &+ \phi_{\eta, \alpha(c)}(\pi(\Phi_1^L(x, v)), x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [\phi_{\eta, \alpha(c)}(x, \pi(\Phi_1^L(x, v))) + \phi_{\eta, \alpha(c)}(\pi(\Phi_1^L(x, v)), \pi(\Phi_{T_n}^L(x, v)))] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) + \alpha(c) dt = 0. \end{aligned}$$

Usando la contrapositiva de la Proposición 3.2.9 inciso (5), tenemos que $\alpha(c) \leq c(L_\eta)$. Por lo tanto, $\alpha(c) = c(L_\eta)$ □

Probemos ahora que el conjunto de Mather está contenido en el conjunto de Aubry.

3.4.6 Proposición (Propiedad (1)). *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L)$. Decimos que μ es una minimizante de la c -acción si y sólo si $\text{supp } \mu \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}_c$. En particular $\widetilde{\mathcal{M}}_c \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}_c$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\widetilde{\mathcal{A}}_c$ es compacto, puesto que es cerrado y está contenido en $\widetilde{\mathcal{N}}_c$ que es compacto, por lo cual, es suficiente demostrar sólo para las medidas ergódicas.

(\Leftarrow) Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ ergódica y supongamos que $\text{supp } \mu \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}_c$. Aplicando el teorema ergódico, sabemos que para un punto genérico (x, v) en el soporte de μ , existe una sucesión de tiempos $T_n \rightarrow +\infty$, tales que $\Phi_{T_n}^L(x, v) \rightarrow (x, v)$ cuando $T_n \rightarrow +\infty$ y

$$\int L_\eta(x, v) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) dt,$$

luego utilizando el hecho de que las órbitas en el soporte de esta medida son estáticas (o semiestáticas, puesto que $\widetilde{\mathcal{A}}_c \subseteq \widetilde{\mathcal{N}}_c$) y que $\alpha(c) = c(L_\eta)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int L_\eta(x, v) + \alpha(c) d\mu &= \int L_\eta(x, v) + c(L_\eta) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) + c(L_\eta) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\phi_{\eta, c(L_\eta)}(\pi(\Phi_{T_n}^L(x, v)), x)}{T_n} = 0, \end{aligned}$$

en la última igualdad usamos el hecho de que $\phi_{\eta, c(L_\eta)}$ es acotada en $M \times M$ (siendo Lipschitz en una variedad compacta M), por lo anterior tenemos que $\int L_\eta d\mu = -\alpha(c)$, es decir, μ es una medida minimizante de la c -acción.

(\Rightarrow) Sea μ una medida ergódica minimizante de la c -acción, es decir,

$$\int L_\eta(x, v) + \alpha(c) d\mu = 0,$$

aplicando el Lema 3.4.4 con $f = \Phi^L$, $F = L_\eta + \alpha(c)$ y $X = TM$, obtenemos que existe una medida completa μ del conjunto A tal que si $(x, v) \in A$, entonces existe un sucesión de tiempos $T_n \rightarrow +\infty$ que satisfacen

$$d((x, v), \Phi_{T_n}^L(x, v)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) + \alpha(c) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

recordemos que $\alpha(c) = c(L_\eta)$ y sea $a > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 \phi_{\eta, c(L_\eta)}(x, \pi(\Phi_a^L(x, v))) &+ \phi_{\eta, c(L_\eta)}(\pi(\Phi_a^L(x, v)), x) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\phi_{\eta, c(L_\eta)}(x, \pi(\Phi_a^L(x, v))) \right. \\
 &\quad \left. + \phi_{\eta, c(L_\eta)}(\pi(\Phi_a^L(x, v)), \pi(\Phi_{T_n}^L(x, v))) \right] \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) + c(L_\eta) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T_n} L_\eta(\Phi_t^L(x, v)) + \alpha(c) dt = 0.
 \end{aligned}$$

Por la Proposición 3.2.9 inciso (5), concluimos que para toda $a > 0$:

$$\phi_{\eta, c(L_\eta)}(x, \pi(\Phi_a^L(x, v))) + \phi_{\eta, c(L_\eta)}(\pi(\Phi_a^L(x, v)), x) = 0,$$

lo cual implica que, la órbita a través del punto (x, v) es c -estática. Ya que, los puntos para los que se puede aplicar este razonamiento son densos en el soporte de μ y $\tilde{\mathcal{A}}_c$ es cerrado, entonces probamos la afirmación, $\text{supp } \mu \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_c$. \square

Observemos que en la demostración de la Proposición 3.4.6 realmente probamos lo siguiente: si $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ es tal que $\text{supp } \mu \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_c$, entonces μ es una minimizante de la c -acción. De hecho, probamos una versión más fuerte, usando la propiedad de curvas semiestáticas en vez de las estáticas en (\Leftarrow)), se obtiene la proposición siguiente.

3.4.7 Proposición. $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ es una minimizante de la c -acción si y sólo si $\text{supp } \mu \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_c$.

Ahora demostraremos una propiedad dinámica de suma relevancia, probaremos que las órbitas en el conjunto de Mañé (o Aubry) son asintóticas al conjunto de Mather.

3.4.8 Proposición. Si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva c -semiestática, entonces

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} d(\gamma(t), \mathcal{M}_c) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \geq 1$ y consideremos la medida de probabilidad μ_T uniformemente distribuida a lo largo de la curva $\{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) : t \in [0, T]\}$ (como se hizo en la Proposición 3.1.2). Probemos que las acciones Lagrangianas de éstas medidas son equiacotadas, para ésto usemos la hipótesis de que γ es semiestática, obteniendo que

$$\begin{aligned}
 A_{L_\eta}(\mu_T) &= \frac{1}{T} \int_0^T L_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \frac{\phi_{\eta, c(L_\eta)}(\gamma(0), \gamma(T))}{T} - c(L_\eta) \\
 &\leq \max_{M \times M} \phi_{\eta, c(L_\eta)}(x, y) - c(L_\eta) < \infty.
 \end{aligned}$$

Se sigue que, ésta familia de medidas es precompacta con respecto a la topología débil*. Por lo cual, podemos tomar una subsucesión $\mu_{T_k} \rightarrow \mu$, con $T_k \rightarrow +\infty$, donde μ resulta ser invariante (ver nuevamente la demostración de la Proposición 3.1.2) y

$$\begin{aligned} \int L_\eta d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int L_\eta d\mu_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi_{\eta, c(L_\eta)}(\gamma(0), \gamma(T_k))}{T_k} - c(L_\eta) \\ &= -c(L_\eta) = -\alpha(c). \end{aligned}$$

Por lo tanto, μ es una minimizante de la c -acción. \square

Es momento de probar el resultado más importante de ésta teoría, la propiedad del gráfico de Mather y Aubry, propiedades (5) y (6) respectivamente en el Teorema 3.4.1. Debido a la inclusión probada en la Proposición 3.4.6, es suficiente con demostrar la propiedad del gráfico sólo para el conjunto de Aubry. Antes de enunciar tal resultado es necesario dar el siguiente lema probado por Mather en [22], al que remitimos al lector para un demostración completa.

3.4.9 Lema (Lema del cruce). *Sea $K > 0$. Existen $\varepsilon, \delta, \vartheta, C > 0$ tal que si $\alpha, \beta : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$ son soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange con $\|(\alpha(0), \dot{\alpha}(0))\| \leq K$, $\|(\beta(0), \dot{\beta}(0))\| \leq K$ y*

$$d(\alpha(0), \beta(0)) \leq \delta \quad y \quad d\left((\alpha(0), \dot{\alpha}(0)), (\beta(0), \dot{\beta}(0))\right) > Cd(\alpha(0), \beta(0)),$$

entonces existen curvas $a, b : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$ de clase C^1 , con puntos finales $a(-\varepsilon) = \alpha(-\varepsilon)$, $a(\varepsilon) = \beta(\varepsilon)$ y $b(-\varepsilon) = \beta(-\varepsilon)$, $b(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)$ tal que

$$A_{L_\eta}(\alpha) + A_{L_\eta}(\beta) - A_{L_\eta}(a) - A_{L_\eta}(b) \geq \vartheta d\left((\alpha(0), \dot{\alpha}(0)), (\beta(0), \dot{\beta}(0))\right)^2 > 0.$$

3.4.10 Teorema (Teorema del gráfico de Mather, propiedad (6)). *Sea $\widetilde{\mathcal{A}}_c$ el conjunto de Aubry de clase de cohomología c . Afirmamos que $\pi|_{\widetilde{\mathcal{A}}_c}$ es un mapeo inyectivo de $\widetilde{\mathcal{A}}_c$ en M , cuya $(\pi|_{\widetilde{\mathcal{A}}_c})^{-1} : \mathcal{A}_c \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_c$ es Lipschitz.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos cómo usar el Lema 3.4.9 para probar la propiedad Lipschitz. Escojamos a $K := \max_{\widetilde{\mathcal{A}}_c} \|(x, v)\|$ la cual es finita, ya que, $\widetilde{\mathcal{A}}_c$ es compacta y $\|\cdot\|$ continua; sean $\varepsilon, \delta, \vartheta, C$ como en el Lema 3.4.9, vamos a probar que si $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in \widetilde{\mathcal{A}}_c$ son tales que $d(x_1, x_2) \leq \delta$, entonces $d((x_1, v_1), (x_2, v_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$.

Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $d((x_1, v_1), (x_2, v_2)) > Cd(x_1, x_2)$ y consideremos las líneas de flujo a través de éstos puntos, definamos $\alpha(t) := \Phi_t^L(x_1, v_1)$ y $\beta(t) := \Phi_t^L(x_2, v_2)$. Por como definimos a K , es fácil notar que las curvas α y β que

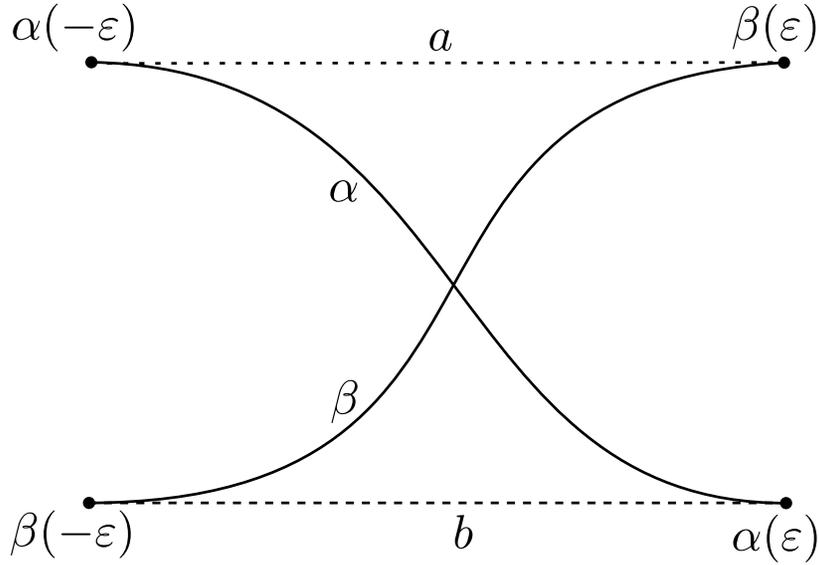


Figura 3.1: Representación gráfica del cruce entre las curvas α y β .

definimos anteriormente satisfacen la hipótesis del Lema 3.4.9, por lo tanto, podemos deducir la existencia de otras dos curvas $a, b : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$, con puntos finales $a(-\varepsilon) = \alpha(-\varepsilon)$, $a(\varepsilon) = \beta(\varepsilon)$ y $b(-\varepsilon) = \beta(-\varepsilon)$, $b(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)$ tal que

$$A_{L_\eta}(a) + A_{L_\eta}(b) < A_{L_\eta}(\alpha) + A_{L_\eta}(\beta),$$

con la conclusión anterior y notando que tanto α como β son curvas c -estáticas por como las definimos, obtenemos que

$$\begin{aligned} \phi_{\eta, c(L_\eta)}(a(-\varepsilon), a(\varepsilon)) + \phi_{\eta, c(L_\eta)}(b(-\varepsilon), b(\varepsilon)) &\leq A_{L_\eta}(a) + A_{L_\eta}(b) + 4\varepsilon \cdot c(L_\eta) \\ &< A_{L_\eta}(\alpha) + A_{L_\eta}(\beta) + 4\varepsilon \cdot c(L_\eta) \\ &= -\phi_{\eta, c(L_\eta)}(\alpha(\varepsilon), \alpha(-\varepsilon)) - \phi_{\eta, c(L_\eta)}(\beta(\varepsilon), \beta(-\varepsilon)). \end{aligned}$$

Ahora, usemos la desigualdad anterior y las propiedades que cumplen las curvas a y b en los puntos finales, además de la desigualdad del triángulo para $\phi_{\eta, c(L_\eta)}$ (ver Proposición 3.2.9

(1)), con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}
 \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\alpha(-\varepsilon), \beta(\varepsilon)) &= \phi_{\eta,c(L_\eta)}(a(-\varepsilon), a(\varepsilon)) \\
 &< -[\phi_{\eta,c(L_\eta)}(b(-\varepsilon), b(\varepsilon)) + \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\alpha(\varepsilon), \alpha(-\varepsilon)) \\
 &\quad + \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\beta(\varepsilon), \beta(-\varepsilon))] \\
 &= -[\phi_{\eta,c(L_\eta)}(\beta(-\varepsilon), \alpha(\varepsilon)) + \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\alpha(\varepsilon), \alpha(-\varepsilon)) \\
 &\quad + \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\beta(\varepsilon), \beta(-\varepsilon))] \\
 &\leq -[\phi_{\eta,c(L_\eta)}(\beta(-\varepsilon), \alpha(-\varepsilon)) + \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\beta(\varepsilon), \beta(-\varepsilon))] \\
 &\leq -\phi_{\eta,c(L_\eta)}(\beta(\varepsilon), \alpha(-\varepsilon)),
 \end{aligned}$$

que es equivalente a $\phi_{\eta,c(L_\eta)}(\alpha(-\varepsilon), \beta(\varepsilon)) + \phi_{\eta,c(L_\eta)}(\beta(\varepsilon), \alpha(-\varepsilon)) \leq 0$, la cual contradice la Proposición 3.2.9 (5), por lo tanto, $(\pi|_{\widetilde{\mathcal{A}}_c})^{-1}$ es Lipschitz.

Para demostrar que $\pi|_{\widetilde{\mathcal{A}}_c}$ es inyectivo, procederemos por contradicción, supongamos que el $\ker(\pi|_{\widetilde{\mathcal{A}}_c}) \neq 0$, lo cual implica que existen $(x_1, v_1) \neq (x_2, v_2) \in \widetilde{\mathcal{A}}_c$ tal que $\pi((x_1, v_1)) = \pi((x_2, v_2))$, como $(\pi|_{\widetilde{\mathcal{A}}_c})^{-1}$ es Lipschitz tenemos que $d((x_1, v_1), (x_2, v_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$, ya que, $d(x_1, x_2) = d(\pi((x_1, v_1)), \pi((x_2, v_2))) = 0$, entonces tenemos que $d((x_1, v_1), (x_2, v_2)) = 0$, luego $(x_1, v_1) = (x_2, v_2)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, $\pi|_{\widetilde{\mathcal{A}}_c}$ es inyectivo. \square

Notemos que, por como definimos a K en la demostración anterior, las gráficas de los conjuntos de Aubry (o conjuntos de Mather) corresponden a conjuntos compactos con su respectiva clase de cohomología, los cuales resultan ser equi-Lipschitz.

Hemos observado que los conjuntos de Mather, al ser el soporte de medidas de probabilidad invariantes resultan ser recurrentes bajo el flujo. Ésta propiedad ya no es necesariamente cierta para los conjuntos de Aubry y Mañé, veremos que éstos conjunto satisfacen otras propiedades interesantes. Para ésto es necesario dar la siguiente definición.

3.4.11 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y φ un flujo en él, decimos que existe una ε -pseudo órbita entre dos puntos $x, y \in X$ si podemos encontrar $\{x_n\}_{n=0}^{k_\varepsilon} \subset X$ y tiempos positivos $t_1, \dots, t_{k_\varepsilon} > 0$, tales que $x_0 = x, x_{k_\varepsilon} = y$ y $d(\varphi_{t_{i+1}}(x_i), x_{i+1}) \leq \varepsilon$ para todo $i = 0, \dots, k_\varepsilon$.

Con la definición anterior es posible dar las propiedades que satisfacen los conjuntos de Aubry y Mañé respecto a las ε -pseudo órbitas, tales propiedades no las demostraremos aquí, pero puede consultar la demostración del mismo en [9, Teorema V].

3.4.12 Proposición. *Sea (M, d) un espacio métrico compacto, tenemos que*

- (i) $\Phi^L|_{\tilde{\mathcal{N}}_c}$ es una cadena transitiva, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ y para todo $(x, v), (y, w) \in \tilde{\mathcal{N}}_c$, existe una ε -pseudo órbita para el flujo Φ^L que los conecta.
- (ii) $\Phi^L|_{\tilde{\mathcal{A}}_c}$ es una cadena recurrente, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ y para todo $(x, v) \in \tilde{\mathcal{A}}_c$, existe una ε -pseudo órbita para el flujo Φ^L que los conecta (x, v) consigo mismo.

Como consecuencia del inciso (i), tenemos el siguiente resultado.

3.4.13 Corolario. *El conjunto de Mañé es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Por el (i) de la Proposición 3.4.12, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ y para todo $(x, v), (y, w) \in \tilde{\mathcal{N}}_c$, existe una ε -pseudo órbita para el flujo Φ^L que los conecta, por lo cual basta con hacer tender ε a 0, para obtener el resultado deseado. \square

En el Capítulo 4 veremos mediante el ejemplo de un Lagrangiano mecánico, que el conjunto de Aubry en general no es conexo.

Capítulo 4

Ejemplo: Lagrangiano Mecánico

En éste capítulo deduciremos los conjuntos de Mather, Aubry, Mañé, además de las funciones α y β de Mather, para un ejemplo específico: el Lagrangiano mecánico con energía potencial U , la cual, satisface ciertas condiciones dadas, éstas determinarán la dinámica de nuestro problema. Veremos también como nuestro ejemplo generaliza en gran manera el conocido péndulo simple mostrado en [30, Secciones 3.5 y 4.3].

4.1. Conjuntos de Mather, Aubry y Mañé para un potencial negativo

Sea L el Lagrangiano mecánico, definido por

$$\begin{aligned} L : \text{TS}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto \frac{1}{2}|v|^2 - U(x), \end{aligned} \tag{4.1}$$

cuya energía potencial U satisface las siguientes condiciones:

- 1) $U \in C^1[0, 1]$,
 - 2) $U(0) = U(1) = 0$,
 - 3) $U(x) < 0, \forall x \in]0, 1[$,
 - 4) U tiene n puntos críticos sin puntos de inflexión en $]0, 1[$.
- (4.2)

Notemos que, como consecuencia de la condición 4) podemos garantizar que los puntos críticos son máximos ó mínimos, más aún, por la condición 2) y 3) tenemos que éstos ocurren de manera secuencial, es decir, primero un mínimo y después un máximo sucesivamente,

4.1. CONJUNTOS DE MATHER, AUBRY Y MAÑÉ PARA UN POTENCIAL NEGATIVO

denotaremos por $\{x_k\}_{k=1}^n = X_p$ al conjunto *ordenado* de tales puntos máximos o mínimos determinados por 4). En la Figura 4.1 mostramos la gráfica de un potencial U que satisface las condiciones (4.2).

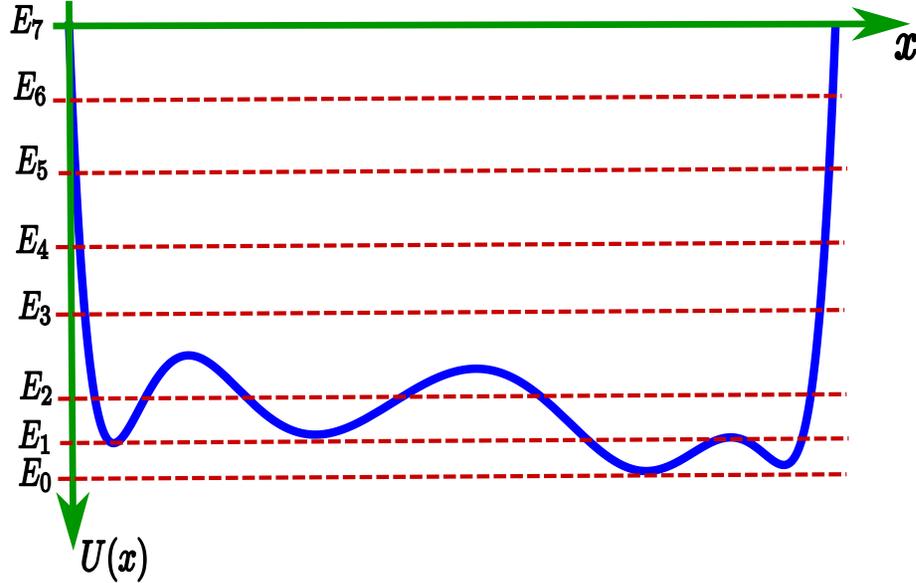


Figura 4.1: La gráfica de una energía potencial U con 4 puntos mínimos y 3 puntos máximos en $]0, 1[$.

Veamos que la ecuación de Euler-Lagrange para el Lagrangiano (4.1), proporciona exactamente la 2ª Ley de Newton

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) = \frac{\partial L}{\partial x}(x, v) \iff \dot{v} = -U'(x) \iff \begin{cases} v = \dot{x}, \\ \ddot{x} + U'(x) = 0. \end{cases}$$

Asociado al Lagrangiano anterior, tenemos el Hamiltoniano (o energía) $H : T^*\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$H(x, p) := H \circ \mathcal{L}_L(x, v) = p \cdot v - L(x, v) = \frac{1}{2}|p|^2 + U(x).$$

En éste caso la transformada de Legendre está dada por $(x, p) = \mathcal{L}_L(x, v) = (x, v)$, por lo cual podemos identificar los haces tangente y cotangente, por lo cual, consideraremos a partir de ahora $T\mathbb{S}^1 \simeq T^*\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e identificar $H^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) \simeq H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.

4.1.1. Medidas de probabilidad invariantes del sistema

Observemos que $(0, 0), (x_1, 0), \dots, (x_n, 0)$ son puntos fijos para el sistema, cuyas primeras coordenadas son puntos máximos y mínimos sucesivamente para la energía potencial U , por Teorema [2, Teorema 5.B.1] éstos son puntos de equilibrio inestable y estable respectivamente (ver Figura 4.2), por la Proposición A.1.12, tenemos que la medida de Dirac concentradas en cada uno de éstos puntos fijos son medidas de probabilidad invariantes. Con ésto, hemos encontrado las $(n + 1)$ -primeras medidas de probabilidad invariantes: $\delta_{(0,0)}, \delta_{(x_1,0)}, \dots, \delta_{(x_n,0)}$.

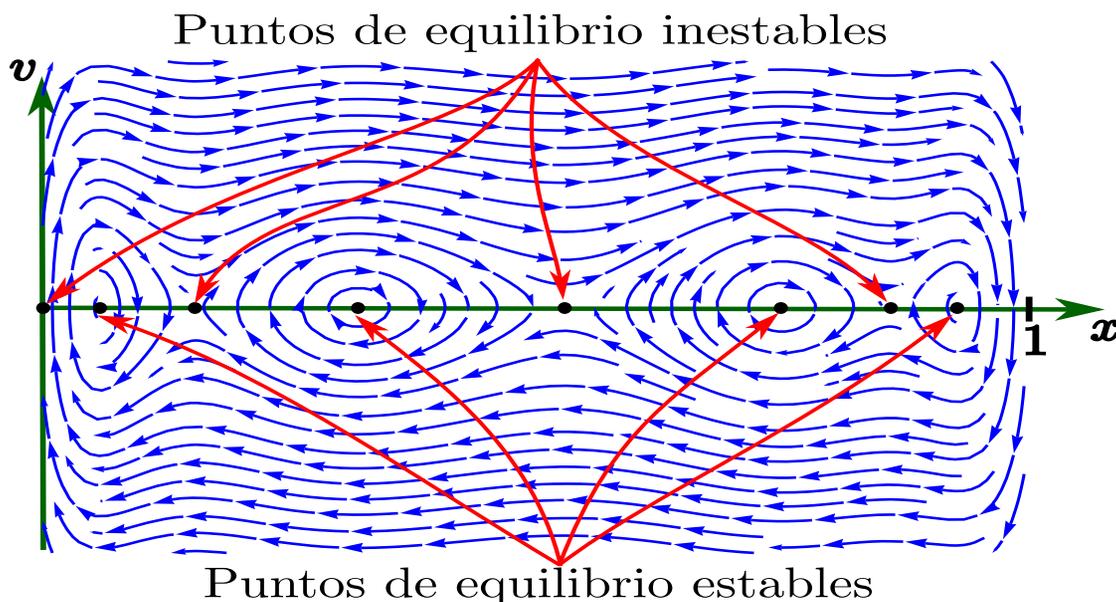


Figura 4.2: El espacio fase para el potencial U de la Figura 4.1.

Dado que tales medidas están concentradas en los puntos de equilibrio, entonces todas ellas tienen vector de rotación cero (puesto que éstos son puntos fijos del sistema), es decir, $\rho(\delta_{(0,0)}) = \rho(\delta_{(x_1,0)}) = \dots = \rho(\delta_{(x_n,0)}) = 0$. Por otro lado, éstas medidas están contenidas en los siguientes niveles de energía, los cuales, están dados por $E(\delta_{(0,0)}) = H(0,0) = 0$ y $E(\delta_{(x_i,0)}) = H(x_i,0) = U(x_i) < 0$, con $i = \overline{1, n}$. Observemos que éstos niveles de energía no pueden contener otras medidas de probabilidad invariantes, más aún, no descartamos el caso en el cual algunas de las medidas anteriores puedan estar en los mismos niveles de energía, puesto que podría darse el caso en el que $U(x_j) = U(x_k)$ con $x_j, x_k \in X_p$ y $j \neq k$.

Busquemos ahora en los niveles de energía positivos, es decir, $E > 0$, cuyos niveles de energía están determinados por $E(x, v) = \{H(x, v) = E\}$, donde $H(x, v) := \frac{1}{2}|v|^2 + U(x)$ es la energía total del sistema, para éstos niveles de energía tenemos dos órbitas periódicas

4.1. CONJUNTOS DE MATHER, AUBRY Y MAÑÉ PARA UN POTENCIAL NEGATIVO

(ver Figura 4.3) homotópicamente no triviales, es decir, tales órbitas no son contraíbles en el cilindro $T\mathbb{S}^1$, denominados como *movimientos de rotación*, los cuales están determinados por:

$$\mathcal{P}_E^\pm := \{(x, v) : v = \pm \sqrt{2[E - U(x)]}, \forall x \in \mathbb{S}^1\}.$$

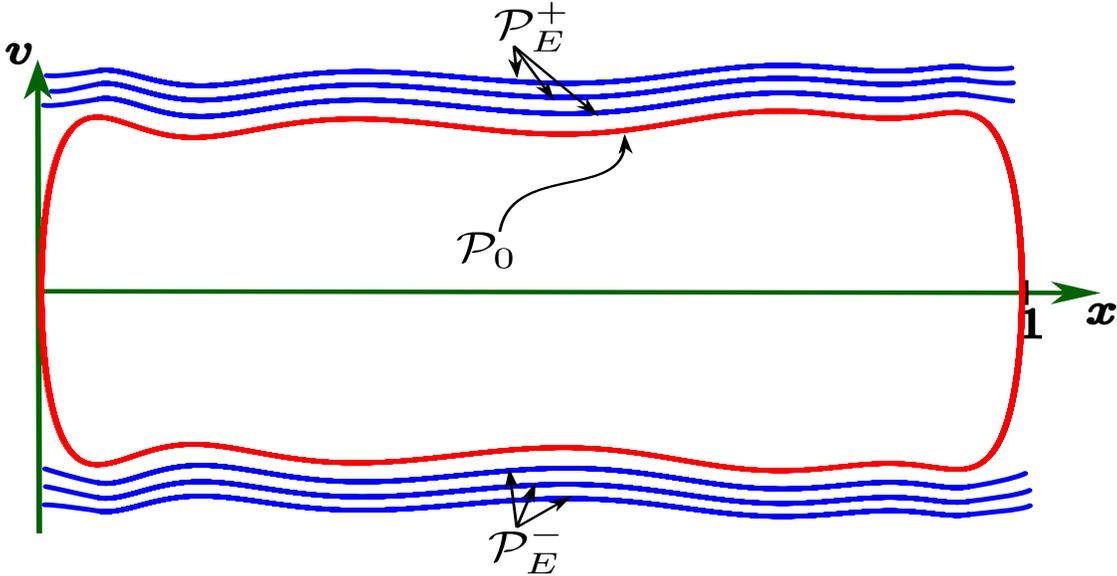


Figura 4.3: Las órbitas \mathcal{P}_E^\pm con energía $E > 0$ para el potencial U de la Figura 4.1, donde haciendo abuso de notación $\mathcal{P}_0 := \lim_{E \rightarrow 0} \mathcal{P}_E^\pm$.

Denotemos por μ_E^\pm a las medidas de probabilidad uniformemente distribuidas, como se hizo en la demostración de la Proposición 3.1.2, a lo largo de las órbitas \mathcal{P}_E^\pm , más aún tales medidas de probabilidad resultan ser medidas invariantes del sistema. Definimos por

$$T(E) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2[E - U(x)]}} dx \quad (4.3)$$

el período de tales órbitas, entonces tenemos que $\rho(\mu_E^\pm) = \pm \frac{1}{T(E)}$. Observemos que la función $T :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, asocia a cada nivel energía E el período de las correspondientes órbitas \mathcal{P}_E^\pm , notemos que el argumento de la integral en (4.3) nunca se anula, puesto que, estamos en el caso $E > 0$, por lo cual, la función T es continua y estrictamente decreciente. Además, $T(E) \rightarrow \infty$ cuando $E \rightarrow 0$, ésto es fácil de notar, ya que, los movimientos en las *separatrices*¹

¹Una separatriz es un límite entre dominios con comportamiento dinámico distinto (curvas fase) en un sistema dinámico.

toman un tiempo infinito para conectar 0 con $1 \equiv 0 \pmod{1}$. Por lo tanto, $\rho(\mu_E^\pm) \rightarrow 0$ cuando $E \rightarrow 0$.

Busquemos ahora en los niveles de energía restantes, los cuales están contenidos entre los siguientes valores

$$U_x := \min_{x \in [0,1]} U(x) < E < 0,$$

cuyos niveles de energía están determinados por $E(x, v) = \{H(x, v) = E\}$, éstos consisten de una o más órbitas periódicas, en algunos casos con unipuntuales de la forma $(x_i, U(x_i))$ con $x_i \in X_p$. Definamos por

$$\hat{\mathcal{P}}_E := \{(x, v) : v^2 = 2[E - U(x)] \text{ y } U(x) \leq E, \forall x \in \mathbb{S}^1\},$$

a las órbitas pertenecientes al nivel de energía E , notemos que aún no hemos descartado a los unipuntuales, en el caso de que existiera alguno, veamos como excluir a éstos sin alterar a las órbitas periódicas, definamos al conjunto de órbitas periódicas con energía E excluyendo los unipuntuales (ver Figura 4.4), como

$$\mathcal{P}_E := \hat{\mathcal{P}}_E \setminus \{(x, v) \in \hat{\mathcal{P}}_E : \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t^L(x, v) = (\hat{x}, 0) \text{ o } \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t^L(x, v) = (\hat{x}, 0) \text{ con } \hat{x} \in X_p\}.$$

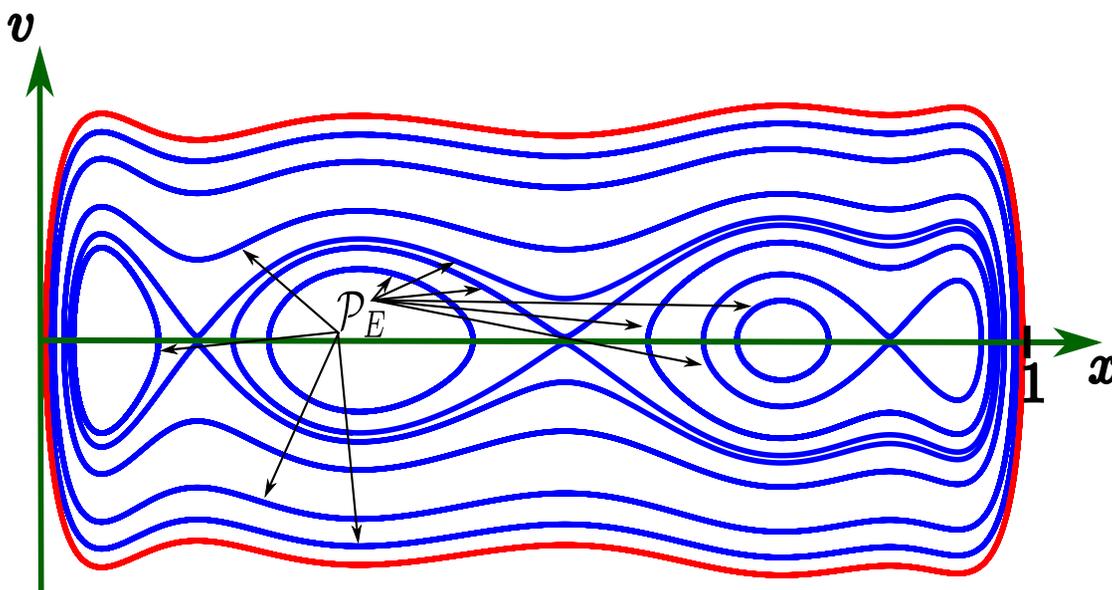


Figura 4.4: Las órbitas \mathcal{P}_E con energía $0 > E > U_x$.

4.1. CONJUNTOS DE MATHER, AUBRY Y MAÑÉ PARA UN POTENCIAL NEGATIVO

Notemos que, por como hemos definido a \mathcal{P}_E , tenemos los siguientes dos casos:

1) \mathcal{P}_E es conexo, entonces definimos μ_E como la medida de probabilidad uniformemente distribuida a lo largo de ésta órbita, la cual, es una medida de probabilidad invariante del sistema.

2) En caso contrario, denotemos por N_c al número de componentes conexas de \mathcal{P}_E (las cuales son finitas, puesto que, $|X_p| < \infty$), tales componentes los denotaremos por \mathcal{P}_E^i con $1 < i \leq N_c$, es decir, $\mathcal{P}_E = \cup_{i=1}^{N_c} \mathcal{P}_E^i$. Definimos a $\{\mu_E^i\}_{i=1}^{N_c}$ como el conjunto de medidas de probabilidad uniformemente distribuida a lo largo de su respectiva órbita \mathcal{P}_E^i , las cuales resultan ser medidas de probabilidad invariantes del sistema como en la demostración de la Proposición 3.1.2. Cada una de éstas medidas tienen vector de rotación 0, puesto que cada $\mathcal{P}_E^i = \text{supp } \mu_E^i$ es contráctil en el cilindro (ver Figura 4.5).

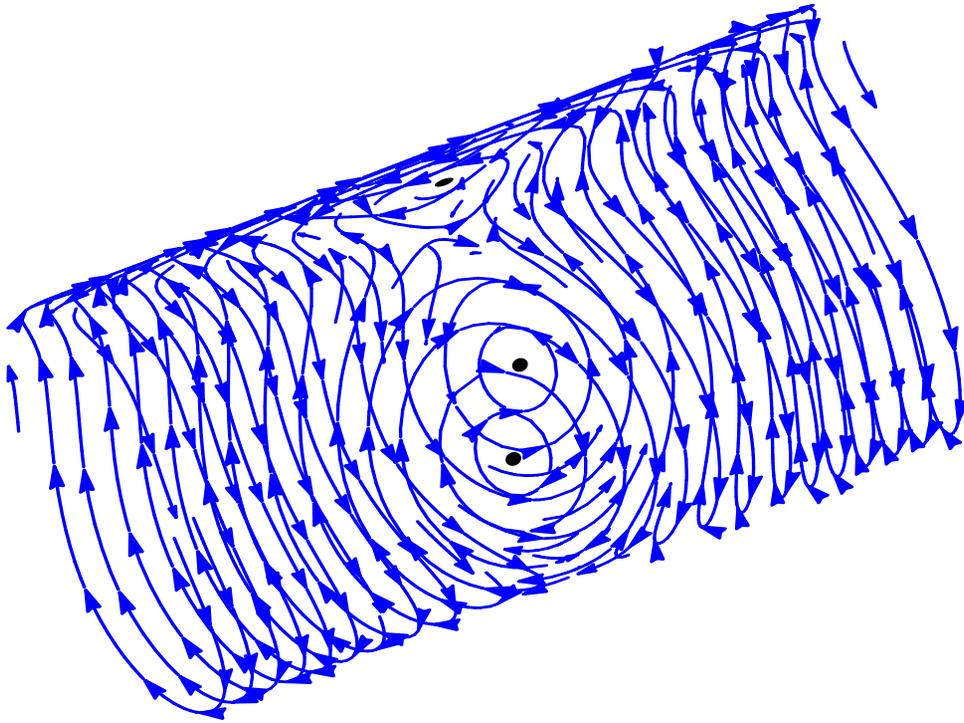


Figura 4.5: El espacio fase para un potencial U con 4 puntos mínimos y 3 puntos máximos en $]0, 1[$, en el haz tangente $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.

Las medidas anteriores son las únicas medidas de probabilidad invariantes, ya que, hemos

buscado en cada nivel de energía admitido, las cuales, son medidas ergódicas del sistema, puesto que son medidas de Dirac ó medidas de probabilidad uniformemente distribuida sobre su correspondiente órbita (soporte completo).

4.1.2. Medidas minimizantes

Ahora veamos cuales de las medidas obtenidas anteriormente son minimizantes de la acción para alguna clase de cohomología.

Comencemos observando que para el caso $U_x < E < 0$, el soporte de la(s) medida(s) $\mu_E(\mu_E^i \text{ ' } s)$ no es(son) un gráfico sobre \mathbb{S}^1 , por lo tanto, no minimiza(n) la acción para ninguna clase de cohomología, ya que, se contradiría el Teorema del gráfico de Mather 3.1.16, pues $\pi|_{\tilde{\mathcal{M}}_c}$ no sería inyectivo para ninguna clase de cohomología c . Entonces, todas las medidas minimizantes de la acción estarán contenidas en los niveles de energía correspondientes a la energía no negativa, se sigue del Teorema 3.1.17 que $\alpha(c) \geq 0, \forall c \in \mathbb{R}$.

Probemos que en éste caso la función α es par. Primero definamos a

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ \tau(x, v) &= (x, -v), \end{aligned}$$

y observemos que si μ es una medida de probabilidad invariante, entonces $\tau^*\mu := \mu(\tau)$ sigue siendo una medida de probabilidad invariante, ésto se cumple de forma directa al usar el Teorema de Tonelli-Fubini [3, Teorema 5.2.1], sabiendo que si $A \subseteq \mathbb{R}$ es μ -medible, entonces $\mu(A) = \mu(-A)$. Más aún, $\tau^*\mathfrak{M}(L) = \mathfrak{M}(L)$, puesto que, cada $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ es Φ_t^L -invariante. Luego para cada $\mu \in \mathfrak{M}(L)$, $\int (L - c \cdot v) d\mu = \int (L + c \cdot v) d\tau^*\mu$, pues $L(x, v) = L(x, -v)$; con lo cual, concluimos que

$$\alpha(c) = - \inf_{\mathfrak{M}(L)} \int (L - c \cdot v) d\mu = - \inf_{\mathfrak{M}(L)} \int (L + c \cdot v) d\tau^*\mu = \alpha(-c).$$

Probemos que, por ser α par y convexa (Proposición 3.1.22), entonces el $\min_{\mathbb{R}} \alpha(c) = \alpha(0)$. En efecto, como α es convexa, tenemos que

$$\alpha\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\alpha(x) + \alpha(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

al tomar $y = -x$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$\alpha(0) = \alpha\left(\frac{x-x}{2}\right) \leq \frac{\alpha(x) + \alpha(-x)}{2} \quad \alpha \text{ par} \quad \frac{\alpha(x) + \alpha(x)}{2} = \alpha(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.1. CONJUNTOS DE MATHER, AUBRY Y MAÑÉ PARA UN POTENCIAL NEGATIVO

Por lo tanto, $\alpha(0) \leq \alpha(c)$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Ahora, centremos nuestra atención en las medidas minimizantes de la 0-acción, es decir, medidas de probabilidad invariantes que minimizan la acción de L sin ninguna *corrección*.

Dado que $L(x, v) \geq 0$, para todo $(x, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, entonces $A_L(\mu) = \int_{TM} L d\mu \geq 0$, $\forall \mu \in \mathfrak{M}(L)$. En particular, $A_L(\delta_{(0,0)}) = 0$, ya que, $-E_0 + 0 \cdot \rho(\delta_{(0,0)}) = A_L(\delta_{(0,0)})$, donde $E_0 = H(0, 0) = 0$. Entonces, $\delta_{(0,0)}$ es la medida minimizante de la 0-acción y $\alpha(0) = 0$, puesto que, no hay otra medida de probabilidad invariante admitida en el nivel de energía $E(x, v) = \{H(x, v) = 0\}$ (la separatriz), por lo cual, podemos concluir que

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \{(0, 0)\}.$$

Investiguemos que sucede para las otras clases de cohomología.

Sea $E > 0$ y consideremos la órbita periódica \mathcal{P}_E^+ y la medida de probabilidad invariante μ_E^+ , distribuida uniformemente sobre \mathcal{P}_E^+ . Notemos que la gráfica de ésta órbita puede verse como la gráfica de una 1-forma cerrada definida por $\eta_E^+ := \sqrt{2[E - U(x)]}dx$, cuya clase de cohomología es dada por

$$c^+(E) := [\eta_E^+] = \int_0^1 \sqrt{2[E - U(x)]}dx, \quad (4.4)$$

la cual, puede ser interpretada como el área (signada) entre la curva y el semieje positivo x ; puesto que $E > 0$, tenemos que la función c^+ es continua y estrictamente creciente con respecto a E , más aún, cuando $E \rightarrow 0$ tenemos que

$$\lim_{E \rightarrow 0} c^+(E) = \int_0^1 \sqrt{2[-U(x)]}dx = \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{[-U(x)]}dx =: c_{E_0},$$

por lo tanto, c^+ define una función invertible de $]0, +\infty[$ en $]c_{E_0}, +\infty[$.

Demostremos que μ_E^+ es la minimizante de la $c^+(E)$ -acción. La prueba será análoga a la demostración de la Proposición 2.2.2.

Consideremos el Lagrangiano $L_{\eta_E^+}(x, v) := L(x, v) - \eta_E^+(x) \cdot v$, entonces, usando la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17) (en el soporte de μ_E^+ , debido a nuestra elección de η_E^+ tenemos una igualdad en vez de una desigualdad, ya que, el soporte de μ_E^+ es de hecho la

gráfica de η_E^+):

$$\begin{aligned} \int L_{\eta_E^+}(x, v) d\mu_E^+ &= \int L(x, v) - \eta_E^+(x) \cdot v d\mu_E^+ \\ &= \int -H(x, \eta_E^+(x)) d\mu_E^+ = - \int E d\mu_E^+ = -E. \end{aligned}$$

Ahora, sea ν otra medida de probabilidad invariante y apliquemos de nuevo el mismo procedimiento que el anterior (ésta vez la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17) ya no es una igualdad):

$$\begin{aligned} \int L_{\eta_E^+}(x, v) d\nu &= \int L(x, v) - \eta_E^+(x) \cdot v d\nu \\ &\geq \int -H(x, \eta_E^+(x)) d\nu = - \int E d\nu = -E. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que μ_E^+ es la medida minimizante de la $c^+(E)$ -acción. Como la proyección del soporte de μ_E^+ es todo \mathbb{S}^1 , se deduce del Teorema del gráfico de Mather 3.1.16 que ésta es la única, por lo cual,

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{c^+(E)} = \mathcal{P}_E^+ = \{(x, v) : v = \sqrt{2[E - U(x)]}, \forall x \in \mathbb{S}^1\}.$$

Similarmente, podemos considerar la órbita periódica \mathcal{P}_E^- y la medida de probabilidad invariante μ_E^- uniformemente distribuida en ésta. Nuevamente, notemos que la gráfica de ésta órbita puede verse como la gráfica de una 1-forma cerrada $\eta_E^- := -\sqrt{2[E - U(x)]} dx = -\eta_E^+$, cuya clase de cohomología es $c^-(E) = -c^+(E)$, entonces:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{c^-(E)} = \mathcal{P}_E^- = \{(x, v) : v = -\sqrt{2[E - U(x)]}, \forall x \in \mathbb{S}^1\}.$$

Lo que queda por estudiar es qué sucede para las clases de cohomología no nulas en el intervalo $[-c_{E_0}, c_{E_0}]$. Primero notemos que $\alpha(c^\pm(E)) = E$, pues $\alpha(c^\pm(E)) = -\min_{\mu_E^\pm \in \mathfrak{M}(L)} A_{L_{\eta_E^\pm}}(\mu_E^\pm) = -(-E) = E$. Entonces, de la continuidad de α y de c^\pm se sigue que

$$\lim_{E \rightarrow 0} \alpha(c^\pm(E)) = \alpha(\pm c_{E_0}) = 0.$$

Más aún, por la convexidad de α y sabiendo que $\min_{c \in \mathbb{R}} \alpha(c) = \alpha(0) = 0$, entonces tenemos que $\alpha(c) \equiv 0$ en $[-c_{E_0}, c_{E_0}]$. Por lo cual, los conjuntos de Mather correspondientes a las clases de cohomologías $c \in [-c_{E_0}, c_{E_0}]$ estarán en el nivel de energía cero. Del desarrollo previo, se deduce que en éste nivel de energía hay una única medida de probabilidad invariante, es decir $\delta_{(0,0)}$, y consecuentemente

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c = \{(0, 0)\} \quad \text{para toda} \quad -c_{E_0} \leq c \leq c_{E_0}.$$

4.1.3. Conjuntos de Mather

Recordemos que en (4.3) y (4.4) hemos introducido dos funciones:

$$T :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[\quad \text{y} \quad c^+ :]0, +\infty[\longrightarrow]c_{E_0}, +\infty[,$$

las cuales representan respectivamente el período y la cohomología de la órbita periódica *superior* de energía E . Éstas funciones (para las cuales tenemos una fórmula explícita en términos de E) son continuas y estrictamente monótonas (decreciente y creciente, respectivamente). Por lo tanto, podemos definir sus funciones inversas, las cuales proporcionan la energía de la órbita periódica en el tiempo T (para todos los períodos positivos) ó la energía de la órbita periódica con clase de cohomología c (para $|c| > c_{E_0}$), las cuales denotaremos por $E(T)$ y $E(c)$ (observe que ésta última cantidad es exactamente $\alpha(c)$), entonces tenemos que los conjuntos de Mather están determinados por:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{si } -c_{E_0} \leq c \leq c_{E_0} \\ \mathcal{P}_{E(c)}^+ & \text{si } c > c_{E_0} \\ \mathcal{P}_{E(c)}^- & \text{si } c < -c_{E_0}. \end{cases}$$

4.1.4. Funciones α y β de Mather

También podemos proporcionar una expresión para las funciones α y β de Mather (ver Figura 4.6) en función de las cantidades introducidas anteriormente, las cuales quedan determinadas por:

$$\alpha(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } -c_{E_0} \leq c \leq c_{E_0} \\ E(|c|) & \text{si } |c| > c_{E_0} \end{cases}$$

y

$$\beta(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ c(E(\frac{1}{h}))|h| - E(\frac{1}{h}) & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

Ésta última igualdad, la obtuvimos de

$$\beta(h) = \beta(\rho(\mu)) = \min_{\mu \in \mathfrak{M}^h(L)} A_L(\mu) = A_L(\mu(h)) = \langle c, h \rangle - E\left(\frac{1}{h}\right) = c\left(E\left(\frac{1}{h}\right)\right)|h| - E\left(\frac{1}{h}\right).$$

Observemos que la función α es C^1 . De hecho, los únicos puntos donde α podría no ser diferenciable serían en $c = \pm c_{E_0}$, pero en éste caso α resulta ser diferenciable con derivada 0.

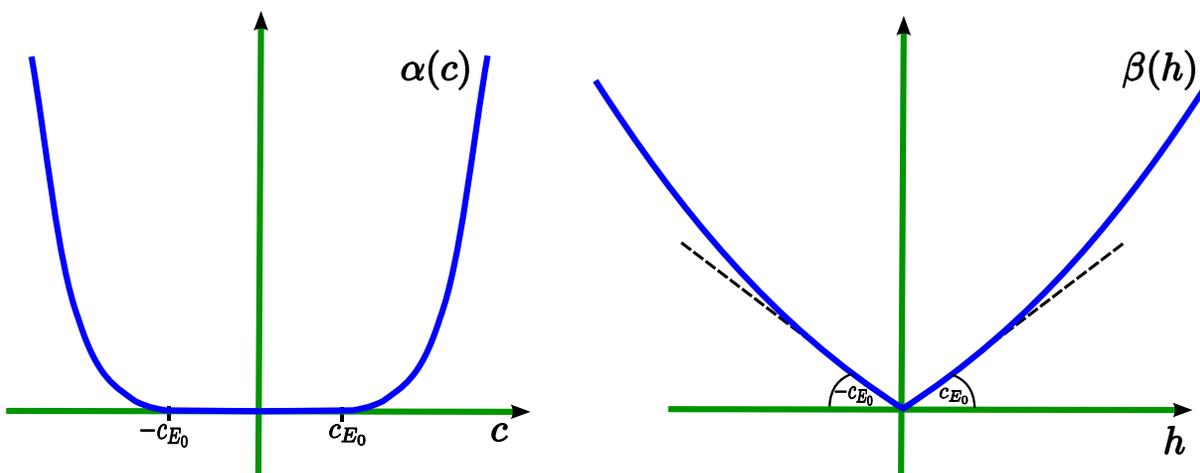


Figura 4.6: Esbozo de las gráficas de las funciones α y β de Mather.

Por otro lado, β es estrictamente convexa (como consecuencia de que α es C^1), pero β es diferenciable en todas partes excepto en el origen. De hecho, en el origen hay un *pico* y el conjunto de subderivadas (es decir, las pendientes de las líneas tangentes) es determinado por $\partial\beta(0) = [-c_{E_0}, c_{E_0}]$, lo cual está relacionado con el hecho de que α es plana en éste intervalo.

4.1.5. Conjuntos de Aubry y Mañé

Ahora es momento de obtener los conjuntos de Mañé y Aubry para el Lagrangiano mecánico dado por (4.1), cuya energía potencial satisface (4.2).

Para poder obtener los conjuntos minimizantes restantes, es necesario que recordemos el siguiente resultado.

4.1.1 Proposición. *Sea Λ una gráfica Lagrangiana c -invariante (Lipschitz) en T^*M , entonces la proyección en TM de cada órbita de Λ es c -semiestática.*

La demostración es análoga a la prueba de la Proposición 2.3.1, está sigue siendo válida en el caso de c -gráficas Lagrangianas Lipschitz, es decir, secciones Lipschitz que son localmente la gráfica de 1-formas cerradas de clase de cohomología c . De hecho, también en el caso de ser Lipschitz, el Hamiltoniano se mantiene constante en las gráficas invariantes [29, Lema 3.6].

Como antes distinguiremos los siguientes casos:

4.1. CONJUNTOS DE MATHER, AUBRY Y MAÑÉ PARA UN POTENCIAL NEGATIVO

- **Caso** $c > c_{E_0}$.

Por la Proposición 4.1.1, tenemos que el conjunto de Mañé satisface la siguiente inclusión:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\pm c} \supseteq \{(x, v) : v = \pm\sqrt{2[\alpha(c) - U(x)]}, \forall x \in \mathbb{S}^1\} = \tilde{\mathcal{M}}_{\pm c}.$$

Puesto que $\{(x, v) : v = \pm\sqrt{2[\alpha(c) - U(x)]}, \forall x \in \mathbb{S}^1\}$ es una gráfica Lagrangiana, lo cual, se debe a que $\tilde{\mathcal{M}}_{\pm c}$ es la gráfica de una 1-forma cerrada $\pm\sqrt{2[\alpha(c) - U(x)]}dx$ de clase de cohomología $\pm c$. Más aún, dado que $\tilde{\mathcal{N}}_{\pm c}$ es conexo (Corolario 3.4.13) y está contenido en el nivel de energía $\alpha(\pm c)$, entonces $\tilde{\mathcal{N}}_{\pm c} = \tilde{\mathcal{M}}_{\pm c}$. Por lo tanto, recordando las inclusiones del Teorema 3.4.1, podemos concluir que

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\pm c} = \tilde{\mathcal{A}}_{\pm c} = \tilde{\mathcal{M}}_{\pm c} \quad \text{para todo } c > c_{E_0}.$$

- **Caso** $|c| < c_{E_0}$.

Hagamos un análisis previo para los conjuntos de Aubry y Mañé con clase de cohomología $|c| < c_{E_0}$. Notemos lo interesante de la definición del conjunto \mathcal{P}_E en la Subsección 4.1, en ésta definición descartamos a las curvas homoclínicas (estáticas) y heteroclínicas (semiestáticas), las curvas homoclínicas fueron descartadas porque no cumplen con el teorema gráfico de Mather 3.4.10, pues su proyección en \mathbb{S}^1 no sería inyectiva (ver la Figura 4.7, en la cual mostramos en color azul, las curvas homoclínicas, de igual manera éstas son heteroclínicas), por otro lado, las heteroclínicas fueron descartadas pues no cumplirían la propiedad de ser conexas, debido a que siempre tendríamos al conjunto $\tilde{\mathcal{M}}_c = \{(0, 0)\} \subset \tilde{\mathcal{N}}_c, \forall |c| < c_{E_0}$, con lo cual, tendríamos una desconexión de $\tilde{\mathcal{N}}_c$.

Por lo tanto, tenemos que para $|c| \leq c_{E_0}$ todos los conjuntos de minimizantes corresponden al mismo nivel de energía, es decir, el nivel de energía $\alpha(c) = 0$ que tienen las separatrices, en éste nivel de energía hay exactamente 3 órbitas (ver Figura 4.8), éstas son:

- El punto fijo $(0, 0)$, es decir, $\gamma_0(t) \equiv 0$.
- La separatriz superior γ_+ , dada por la parametrización siguiente

$$\gamma_+(t) := \pi(\Phi_t^L(1/2, \sqrt{-2U(1/2)})).$$

- La separatriz inferior γ_- , dada por la parametrización siguiente

$$\gamma_-(t) := \pi(\Phi_t^L(1/2, -\sqrt{-2U(1/2)})).$$

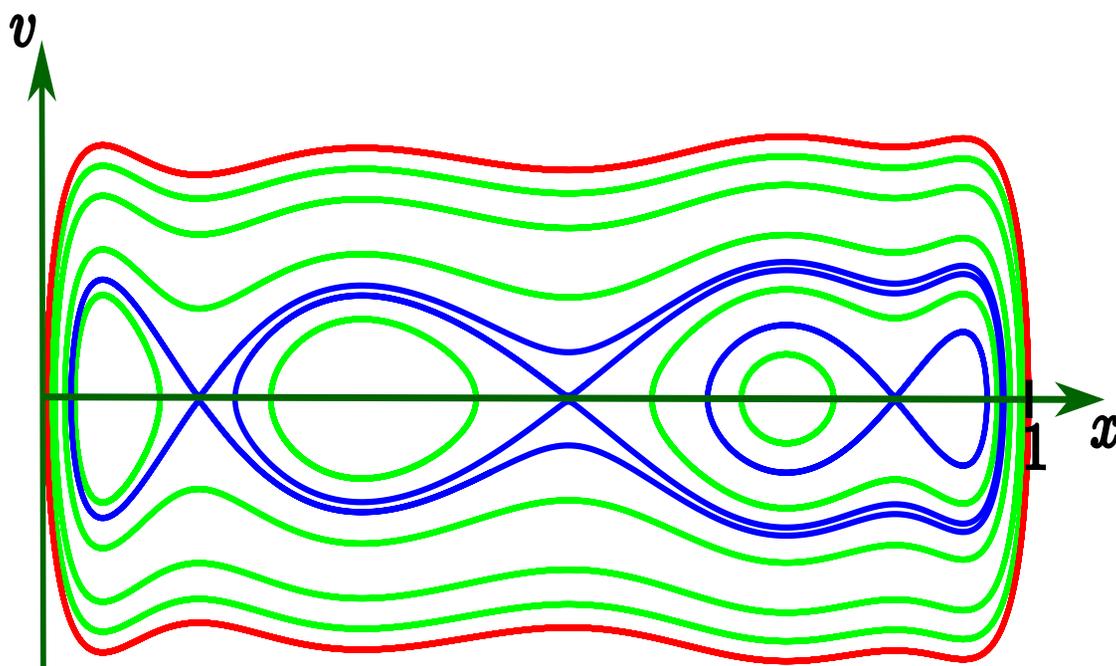


Figura 4.7: En azul, las curvas homoclínicas para el potencial U de la Figura 4.1.

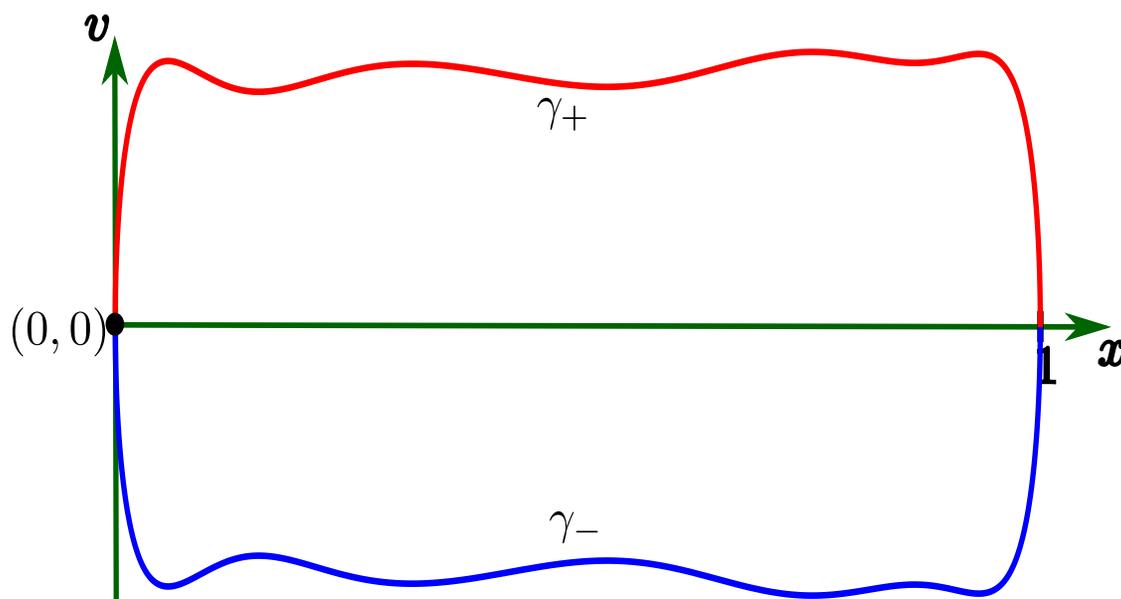


Figura 4.8: En rojo la separatriz superior y en azul la inferior.

Observemos que debido a la simetría de L y las parametrizaciones elegidas, tenemos que $\gamma_+(t) = \gamma_-(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

4.1. CONJUNTOS DE MATHER, AUBRY Y MAÑÉ PARA UN POTENCIAL NEGATIVO

En primer lugar, vamos a demostrar lo siguiente.

4.1.2 Proposición. *Si $|c| < c_{E_0}$, entonces las separatrices definidas por γ_+ y γ_- no son curvas c -semiéstáticas.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una 1-forma cerrada η_c cuya gráfica está contenida en la región entre las separatrices, ésto es posible ya que $|c| < c_{E_0}$ y la cohomología representa el área signada de la región entre la curva y el eje x . Nuevamente, como $|c| < c_{E_0}$, habrá un subconjunto de \mathbb{S}^1 de medida positiva en el que $H(x, \eta_c(x)) < 0$, puesto que la separatriz está contenida en el nivel de energía 0.

Procedamos por contradicción, supongamos que γ_+ es c -semiéstática (análogamente para γ_-), entonces γ_+ es asintótica ($t \rightarrow \pm\infty$) a 0 (Proposición 3.4.8), más aún, ya que, $\alpha(c) = 0$, el potencial de Mañé $\phi_{\eta_c, 0}$ es Lipschitz continuo (Proposición 3.2.9 (3)) y recordando la desigualdad de Legendre-Fenchel (1.17), tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_{\eta_c, 0}(0, 0) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \phi_{\eta_c, 0}(\gamma_+(-T), \gamma_+(T)) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T L_{\eta_c}(\gamma_+(t), \dot{\gamma}_+(t)) dt \\ &\geq \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T [\eta_c(\gamma_+(t)) \cdot \dot{\gamma}_+(t) - H(\gamma_+(t), \eta_c(\gamma_+(t)))] dt \\ &= - \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T H(\gamma_+(t), \eta_c(\gamma_+(t))) dt > 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce del hecho de que existe un subconjunto de \mathbb{S}^1 de medida positiva en el que $H(\gamma_+(t), \eta_c(\gamma_+(t))) < 0$. Lo cual lleva a una contradicción, ya que la acción de una curva constante $\gamma_0(t)$ es cero, es decir, $A_{L_\eta}(\gamma_0) = 0$. \square

Por lo tanto, del Teorema 3.4.1, hemos demostrado que

$$\tilde{\mathcal{N}}_c = \tilde{\mathcal{A}}_c = \tilde{\mathcal{M}}_c = \{(0, 0)\}, \text{ para todo } |c| < c_{E_0}.$$

- **Caso** $c_\pm := \pm c_{E_0}$.

Como se mencionó anteriormente, se sigue de la Proposición 4.1.1, tomando las gráficas de las separatrices como las gráficas Lagrangianas invariantes, que

$$\tilde{\mathcal{N}}_{c_\pm} = \{(x, v) : v = \pm \sqrt{-2U(x)}, \forall x \in \mathbb{S}^1\} \supset \tilde{\mathcal{M}}_{c_\pm}.$$

Observemos que ésta vez el conjunto de Mather está contenido propiamente en el conjunto de Mañé, queremos demostrar que $\tilde{\mathcal{A}}_{c_{\pm}} = \tilde{\mathcal{N}}_{c_{\pm}}$, para ésto es necesario dar el resultado siguiente.

4.1.3 Lema. *Para todo $x, y \in \mathbb{S}^1$, tenemos que $\phi_{\eta_{\pm},0}(x, y) = -\phi_{\eta_{\pm},0}(y, x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por η_{\pm} la 1-forma cerrada dada por las gráficas de la separatriz superior e inferior, respectivamente. Ya hemos señalado que $[\eta_{\pm}] = c_{\pm}$.

Notemos que el lema siempre es cierto si $x = y$ (ver la Proposición 3.2.9 (4)). Supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$, sea $S > T$ tal que

$$\gamma_+(S) = x = \gamma_-(-S) \quad y \quad \gamma_+(T) = y = \gamma_-(-T)$$

ésto es cierto sólo para la parametrización que elegimos anteriormente, entonces, sabiendo que éstas curvas son semiestáticas, la relación que cumplen las 1-formas $\eta_+ = -\eta_-$, la relación entre γ_+ con γ_- y la simetría de L , tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_{\eta_+,0}(x, y) &= \int_S^T [L(\gamma_+(t), \dot{\gamma}_+(t)) - \eta_+(\gamma_+(t)) \cdot \dot{\gamma}_+(t)] dt \\ &= \int_S^T [L(\gamma_-(-t), -\dot{\gamma}_-(-t)) + \eta_-(\gamma_-(-t)) \cdot (-\dot{\gamma}_-(-t))] dt \\ &= - \int_{-S}^{-T} [L(\gamma_-(s), -\dot{\gamma}_-(s)) - \eta_-(\gamma_-(s)) \cdot \dot{\gamma}_-(s)] ds \\ &= - \int_{-S}^{-T} [L(\gamma_-(s), \dot{\gamma}_-(s)) - \eta_-(\gamma_-(s)) \cdot \dot{\gamma}_-(s)] ds \\ &= -\phi_{\eta_-,0}(x, y). \end{aligned}$$

Por otro lado, tomemos la cuarta y quinta igualdad en el procedimiento anterior

$$\begin{aligned} -\phi_{\eta_-,0}(x, y) &= - \int_{-S}^{-T} [L(\gamma_-(s), \dot{\gamma}_-(s)) - \eta_-(\gamma_-(s)) \cdot \dot{\gamma}_-(s)] ds \\ &= \int_{-T}^{-S} [L(\gamma_-(s), \dot{\gamma}_-(s)) - \eta_-(\gamma_-(s)) \cdot \dot{\gamma}_-(s)] ds \\ &= \phi_{\eta_-,0}(y, x). \end{aligned}$$

Para concluir con la demostración nos faltaría probar que también $\phi_{\eta_+,0}$ es estática, de hecho, basta con tomar $\phi_{\eta_+,0}(x, y) = -\phi_{\eta_-,0}(x, y)$ e intercambiar x con y , de lo cual obtenemos que $\phi_{\eta_+,0}(y, x) = -\phi_{\eta_-,0}(y, x) = -\phi_{\eta_+,0}(x, y)$. \square

Anteriormente demostramos que las separatrices no sólo eran semiestáticas si no que también eran estáticas, por lo cual, hemos demostrado lo siguiente.

4.1. CONJUNTOS DE MATHER, AUBRY Y MAÑÉ PARA UN POTENCIAL NEGATIVO

4.1.4 Proposición. Si $c_{\pm} := \pm c_{E_0}$, entonces $\tilde{\mathcal{A}}_{c_{\pm}} = \tilde{\mathcal{N}}_{c_{\pm}}$.

Por lo tanto, hemos obtenido los siguientes conjuntos de minimizantes, los cuales están clasificados por su correspondiente clase de cohomología.

- Para $c > c_{E_0}$:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\pm c} = \tilde{\mathcal{A}}_{\pm c} = \tilde{\mathcal{M}}_{\pm c} = \{(x, v) : v = \pm \sqrt{2[\alpha(c) - U(x)]}, \forall x \in \mathbb{S}^1\}.$$

- Para $|c| < c_{E_0}$:

$$\tilde{\mathcal{N}}_c = \tilde{\mathcal{A}}_c = \tilde{\mathcal{M}}_c = \{(0, 0)\}.$$

- Para $c_{\pm} = \pm c_{E_0}$:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{c_{\pm}} = \tilde{\mathcal{A}}_{c_{\pm}} = \{(x, v) : v = \pm \sqrt{-2U(x)}, \forall x \in \mathbb{S}^1\} \supset \tilde{\mathcal{M}}_{c_{\pm}} = \{(0, 0)\}.$$

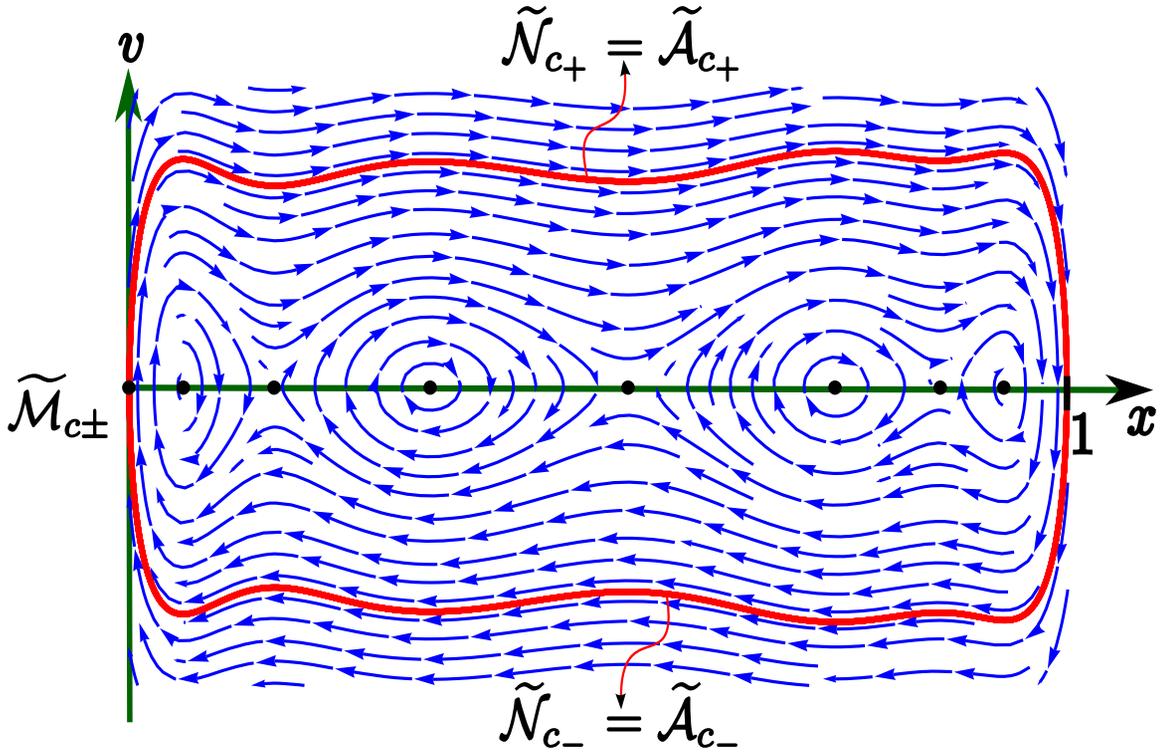


Figura 4.9: El gráfico de los conjuntos de Mather, Aubry y Mañé con clases de cohomología $\pm c_{E_0}$.

4.2. Conjuntos de Mather, Aubry y Mañé para un potencial más general

Para esta sección generalizaremos aún más el ejemplo del Lagrangiano mecánico determinado por (4.1), cuya energía potencial U satisface las condiciones siguientes:

- 1) $U \in C^1[0, 1]$,
 - 2) $U(0) = U(1) = 0$,
 - 3) $U(x) \leq 0, \forall x \in]0, 1[$,
 - 4) U tiene n puntos críticos sin puntos de inflexión en $]0, 1[$.
- (4.5)

Al conjunto ordenado de puntos en 4) lo seguiremos denotando por $\{x_k\}_{k=1}^n = X_p$, notemos que aquí modificamos la condición $U(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$, la cual fue fundamental para que tanto el péndulo simple mostrado en [30, Secciones 3.5 y 4.3] como el ejemplo de la sección anterior, no difieran en dinámica.

Procedamos con el análisis de nuestro ejemplo sujeto a las condiciones (4.5) de la siguiente manera:

◆ Supongamos que existe un único $x^* \in X_p$ tal que $U(x_p) = 0$, notemos que, x^* es un máximo global de U ; entonces basta hacer el procedimiento visto en las Secciones 4.1 y 4.1.5, el cual se haría a *trozos*, primero para el intervalo $[0, x^*]$ y luego para el intervalo $[x^*, 1]$, para obtener los conjuntos de Mather, Aubry, Mañé siguientes (ver Figura 4.10):

- Para $c > c_{E_0}$:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\pm c} = \tilde{\mathcal{A}}_{\pm c} = \tilde{\mathcal{M}}_{\pm c} = \{(x, v) : v = \pm \sqrt{2[\alpha(c) - U(x)]}, \forall x \in \mathbb{S}^1\}.$$

- Para $|c| < c_{E_0}$:

$$\tilde{\mathcal{N}}_c = \tilde{\mathcal{A}}_c = \tilde{\mathcal{M}}_c = \{(0, 0)\}.$$

- Para $c_{\pm} = \pm c_{E_0}$:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{c_{\pm}} = \{(x, v) : v = \pm \sqrt{-2U(x)}, \forall x \in \mathbb{S}^1\} \supset \tilde{\mathcal{A}}_{c_{\pm}} = \tilde{\mathcal{M}}_{c_{\pm}} = \{(0, 0), (x^*, 0)\}.$$

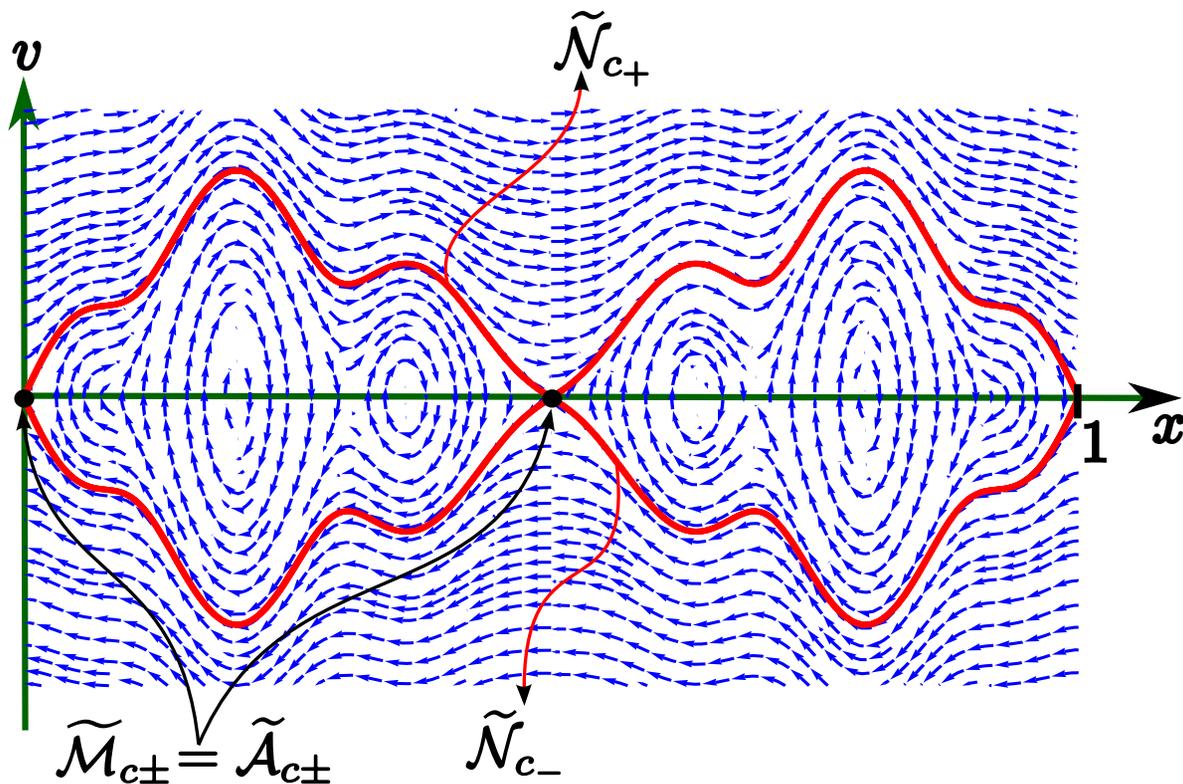


Figura 4.10: El gráfico de los conjuntos de Mather, Aubry, Mañé con clase de cohomología $\pm c_{E_0}$ en el caso de un sólo punto x^* .

Faltaría mencionar dos puntos importantes:

- 1.- Para el caso $|c| < c_{E_0}$. Notemos que aún cuando en los trozos $[0, x^*]$ y $[x^*, 1]$, encontramos que los conjuntos de Mather, Aubry y Mañé coinciden, es decir,

$$\tilde{\mathcal{N}}_c = \tilde{\mathcal{A}}_c = \tilde{\mathcal{M}}_c = \{(0, 0)\} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathcal{N}}_c = \tilde{\mathcal{A}}_c = \tilde{\mathcal{M}}_c = \{(x^*, 0)\},$$

al tomar como variedad total a \mathbb{S}^1 , el punto $(x^*, 0)$ no es considerado, de hecho, si suponemos que $\tilde{\mathcal{N}}_c = \tilde{\mathcal{A}}_c = \tilde{\mathcal{M}}_c = \{(0, 0), (x^*, 0)\}$ sobre todo \mathbb{S}^1 , contradeciríamos el hecho de que el conjunto de Mañé es conexo.

- 2.- Para el caso $c_{\pm} = \pm c_{E_0}$. Notemos que aún cuando en los trozos $[0, x^*]$ y $[x^*, 1]$, encontramos que

$$\tilde{\mathcal{N}}_{c_{\pm}} = \tilde{\mathcal{A}}_{c_{\pm}} = \{(x, v) : v = \pm \sqrt{-2U(x)}, \forall x \in [0, x^*]\} \supset \tilde{\mathcal{M}}_{c_{\pm}} = \{(0, 0)\}$$

y

$$\tilde{\mathcal{N}}_{c_{\pm}} = \tilde{\mathcal{A}}_{c_{\pm}} = \{(x, v) : v = \pm \sqrt{-2U(x)}, \forall x \in [x^*, 1]\} \supset \tilde{\mathcal{M}}_{c_{\pm}} = \{(x^*, 0)\},$$

pues en éstos están identificados 0 con x^* y x^* con 1. A diferencia de lo que ocurre al considerar a \mathbb{S}^1 como nuestra variedad total, pues en éste caso obtenemos

$$\tilde{\mathcal{N}}_{c_{\pm}} = \{(x, v) : v = \pm\sqrt{-2U(x)}, \forall x \in \mathbb{S}^1\} \supset \tilde{\mathcal{A}}_{c_{\pm}} = \tilde{\mathcal{M}}_{c_{\pm}} = \{(0, 0), (x^*, 0)\},$$

dado que los únicos puntos identificados en \mathbb{S}^1 son 0 con 1.

Estas 2 observaciones siguen siendo validas aún cuando hay más de un máximo global de U .

◆ Supongamos que existen $\{\hat{x}_i\}_{i=1}^k \in X_p$ ordenados con $1 < k \leq [\frac{n}{2}]$, tal que $U(\hat{x}_i) = 0$, $\forall i = \overline{1, k}$, notemos que, los $\{\hat{x}_i\}_{i=1}^k$ es un máximos globales de U ; entonces nuevamente basta hacer el procedimiento visto en las Secciones 4.1 y 4.1.5, el cual se haría nuevamente a *trozos*, para los subintervalos $[0, \hat{x}_1]$, $[\hat{x}_1, \hat{x}_2]$, $[\hat{x}_2, \hat{x}_3]$, \dots , $[\hat{x}_k, 1]$, de los cuales al considerar a \mathbb{S}^1 como la variedad total obtendríamos los conjuntos de Mather, Aubry, Mañé siguientes (ver Figura 4.11):

$$(\tilde{\mathcal{H}}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } c > c_{E_0} : \\ \tilde{\mathcal{N}}_{\pm c} = \tilde{\mathcal{A}}_{\pm c} = \tilde{\mathcal{M}}_{\pm c} = \{(x, v) : v = \pm\sqrt{2[\alpha(c) - U(x)]}, \forall x \in \mathbb{S}^1\}. \\ \text{Para } |c| < c_{E_0} : \\ \tilde{\mathcal{N}}_c = \tilde{\mathcal{A}}_c = \tilde{\mathcal{M}}_c = \{(0, 0)\}. \\ \text{Para } c_{\pm} = \pm c_{E_0} : \\ \tilde{\mathcal{N}}_{c_{\pm}} = \{(x, v) : v = \pm\sqrt{-2U(x)}, \forall x \in \mathbb{S}^1\} \supset \tilde{\mathcal{A}}_{c_{\pm}} = \tilde{\mathcal{M}}_{c_{\pm}} = \{(0, 0), (\hat{x}_1, 0), \dots, (\hat{x}_k, 0)\}. \end{array} \right.$$

Todo el desarrollo anterior nos es de utilidad para justificar el siguiente teorema.

4.2.1 Teorema. *Sea $L : \text{TS}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ el Lagrangiano de Tonelli determinado por (4.1), cuya energía potencial U satisface (4.5), entonces tenemos que los conjuntos de Mather, Aubry y Mañé están determinados por $(\tilde{\mathcal{H}})$ donde los $\hat{x}_i \in X_p$, el conjunto de máximos globales de la energía U .*

4.2. CONJUNTOS DE MATHER, AUBRY Y MAÑÉ PARA UN POTENCIAL MÁS GENERAL

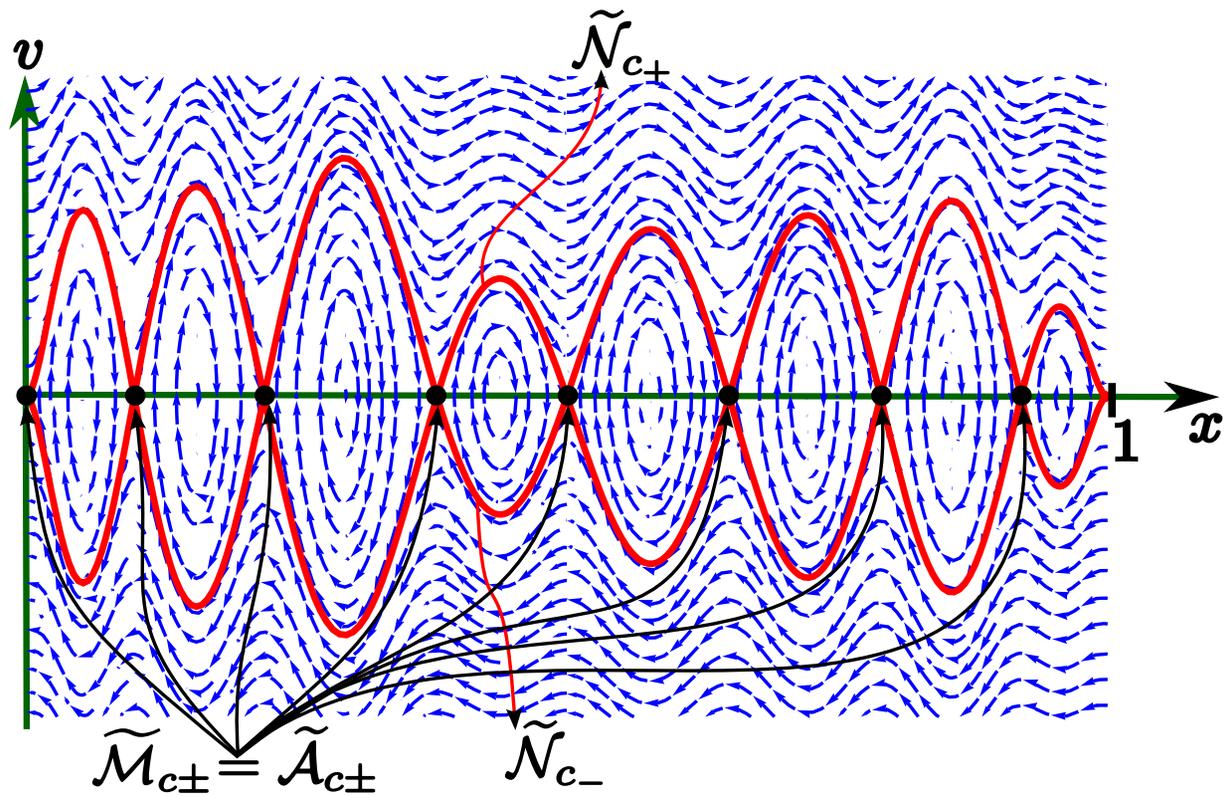


Figura 4.11: El gráfico de los conjuntos de Mather, Aubry, Mañé con clase de cohomología $\pm c_{E_0}$ en el caso de 7 puntos.

Conclusiones

Como mostramos anteriormente, muchos de los resultados que dedujimos a lo largo del trabajo son de suma importancia, puesto que, éstos nos ayudan a discernir los elementos que conformarán los conjuntos de Aubry, Mather y/o Mañé para alguna clase de cohomología, siempre y cuando éstos satisfagan la propiedad gráfica (Teorema del Gráfico de Mather 3.4.10) en el caso de los dos primeros tipos de conjuntos y en el caso de ser Mañé éste debe de ser conexo (Corolario 3.4.13). Más aún, presentamos un teorema (Teorema 4.2.1), en el cual clasificamos a los conjuntos de Mather, Aubry y Mañé, para un Lagrangiano mecánico, cuya energía potencial está sujeta a ciertas restricciones dadas, con esto hemos aportado un resultado relevante a la basta teoría de Aubry-Mather. Este trabajo a sido sumamente satisfactorio, puesto que obtuvimos resultados muy gratos, los cuales ayudan a la comprensión del aspecto geométrico de la teoría de Aubry-Mather.

Apéndice A

Teoría Ergódica y otros conceptos

A.1.1 Definición. Sea \mathcal{F} una σ -álgebra de X y sea $f : X \rightarrow Y$. Entonces la colección

$$\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \quad (\text{A.1})$$

es llamado *el push-forward de \mathcal{F} por f en Y* .

A.1.2 Definición. Sea \mathcal{G} una σ -álgebra de Y y sea $f : X \rightarrow Y$. Entonces la colección

$$\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\} \quad (\text{A.2})$$

es llamado *el pull-back de \mathcal{G} por f en X* .

A.1.3 Proposición. Las colecciones dadas por (A.1) y (A.2) son una σ -álgebra de subconjuntos de Y y X , respectivamente.

A.1.4 Definición. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow Y$. Consideremos la σ -álgebra \mathcal{G} en Y dada por (A.1), el push-forward de \mathcal{F} por f en Y . Definimos

$$\nu(B) := \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{G}. \quad (\text{A.3})$$

Éste es llamado *el push-forward de μ por f en Y* .

A.1.5 Definición. Sea (Y, \mathcal{G}, ν) un espacio de medida y $f : X \rightarrow Y$ biyectiva. Consideremos la σ -álgebra \mathcal{F} en X dada por (A.2), el pull-back de \mathcal{G} por f en X . Definimos

$$\mu(A) := \nu(f(A)), \quad A \in \mathcal{F}. \quad (\text{A.4})$$

Éste es llamado *el pull-back de ν por f en X* .

A.1.6 Proposición. ν y μ definidas en (A.3) y (A.4) son medidas en (Y, \mathcal{G}) y (X, \mathcal{F}) , respectivamente.

A.1.7 Definición. Denotaremos por $f^*\mu$ y $f_*\mu$, al pull-back y push-forward, respectivamente cuando $f : (X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{F}, \mu)$.

A.1.8 Observación. Recordemos que en el caso del pull-back, f tiene que ser biyectiva.

A.1.9 Definición. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, un conjunto medible $S \in \mathcal{F}$ es llamado un *conjunto nulo* si $\mu(S) = 0$, y llamado *conjunto despreciable* si éste está propiamente contenido en uno nulo. La medida μ se dice *completa* si todo conjunto despreciable es medible y por lo tanto, nulo.

A.1.10 Definición. Diremos que una aplicación entre espacios medibles

$$T : (X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{G}, \nu),$$

es medible si para cada $A \in \mathcal{G}$, $T^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

A.1.11 Definición (T-invariante). Sea $T : X \rightarrow X$ medible, decimos que T preserva μ ó que μ es T -invariante, si $\forall A \in \mathcal{F}$, $T^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)). \quad (\text{A.5})$$

A.1.12 Proposición. Sea $T : X \rightarrow X$ un aplicación medible y p un punto fijo de T , es decir, $T(p) = p$, entonces la medida de Dirac de p es invariante.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in \mathcal{F}$ un conjunto medible arbitrario, tenemos que probar que

$$\delta_p(T^{-1}(A)) = \delta_p(A). \quad (\star)$$

Consideremos dos casos:

- Supongamos que $p \in A$, entonces $\delta_p(A) = 1$. En este caso $p \in T^{-1}(A)$, puesto que $T(p) = p \in A$, luego $\delta_p(T^{-1}(A)) = 1$ con lo cual (\star) es cierta.
- Supongamos que $p \notin A$, entonces $\delta_p(A) = 0$ y también tenemos que $p \notin T^{-1}(A)$, ya que si $p \in T^{-1}(A)$, tenemos que $p = T(p) \in T(T^{-1}(A)) \subseteq A$, i.e., $p \in A$.[‡] Por lo tanto $p \notin T^{-1}(A)$, luego $\delta_p(T^{-1}(A)) = 0$, y (\star) es cierta nuevamente. \square

A.1.13 Definición. $T : X \rightarrow X$ es un endomorfismo si

- i) T es sobreyectiva.
- ii) T es medible.
- iii) Cumple (A.5).

A.1.14 Definición (μ ergódica). Decimos que un endomorfismo es ergódico (μ ergódico) si se cumple que

$$T^{-1}A = A \implies \mu(A) = 0 \text{ ó } 1.$$

A.1.15 Definición (Soporte). Sea μ una medida no negativa en un espacio medible (X, \mathcal{F}) . Definimos el soporte de μ como:

$$\text{supp } \mu := \overline{\{A \in \mathcal{F} \mid \mu(A) > 0\}}.$$

A.1.16 Teorema (Teorema ergódico de Birkhoff). Sea (X, \mathcal{F}, μ, T) un sistema que preserva la medida. Para cualquier $f \in \mathcal{L}_\mu^1(X)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) = \hat{f}(x)$$

converge casi en todas partes a una función T -invariante $\hat{f} \in \mathcal{L}_\mu^1(X)$, donde

$$\int_X f d\mu = \int_X \hat{f} d\mu,$$

y si T es ergódica

$$\int_X f d\mu = \hat{f}.$$

A.1.17 Definición (Punto genérico). Sea (X, T) un sistema dinámico topológico. Un punto $x \in X$ es *genérico* para una medida de Borel $\mu \in \mathcal{P}(X)$ medida positiva, si satisface la conclusión del teorema ergódico para cada función continua.

A.1.18 Definición (Transformaciones Deck). Sea X un espacio topológico y C el cubriente universal de X . Una *transformación Deck* o automorfismo de una cubierta

$$p : C \longrightarrow X$$

es un homeomorfismo $f : C \longrightarrow C$ tal que

$$p \circ f = p.$$

El conjunto de todas las transformaciones Deck de p forma un grupo bajo composición, éste es llamado *el grupo de transformaciones Deck* y denotado por $\text{Aut}(p)$.

Bibliografía

- [1] V. I. Arnol'd. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russ. Math. Surv.*, 18(5):9–36, 1963.
- [2] V.I. Arnol'd, K. Vogtmann, and A. Weinstein. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2nd edition, 2013.
- [3] K.B. Athreya and S.N. Lahiri. *Measure Theory and Probability Theory*. Springer Texts in Statistics. Springer, 2006.
- [4] Serge Aubry and P.Y. Le Daeron. The discrete frenkel-kontorova model and its extensions: I. exact results for the ground-states. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 8:381–422, 09 1983.
- [5] V. Bangert. Mather Sets for Twist Maps and Geodesics on Tori. *Dynamics Reported*, 1:1–56, 01 1988.
- [6] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.
- [7] M. Carneiro. On minimizing measures of the action of autonomous Lagrangians. *Nonlinearity*, 8:1077, 01 1999.
- [8] Alain Chenciner. Action minimizing solutions of the Newtonian n -body problem: from homology to symmetry. *ICM*, III, 05 2003.
- [9] Gonzalo Contreras, Jorge Delgado, and Renato Iturriaga. Lagrangian Flows: The dynamics of globally minimizing orbits - II. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 28(2):155–196, 09 1997.

- [10] Gonzalo Contreras and Renato Iturriaga. *Global Minimizers of Autonomous Lagrangians*. IMPA. 01 1999.
- [11] V.P. Dymnikov and A.N. Filatov. *Mathematics of Climate Modeling*. Modeling and simulation in science, engineering & technology. Birkhäuser, 1997.
- [12] Albert Fathi. Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics. *Monograph*, 88, 01 2014.
- [13] Davide L. Ferrario and Susanna Terracini. On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem. *Inventiones mathematicae*, 155(2):305–362, Feb 2004.
- [14] L. Godinho and J. Natário. *An Introduction to Riemannian Geometry: With Applications to Mechanics and Relativity*. Universitext. Springer International Publishing, 2014.
- [15] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [16] J.-B. Hiriart-Urruty and Juan Martínez-Legaz. New formulas for the legendre–fenchel transform. *Journal of Mathematical Analysis and Applications - J MATH ANAL APPL*, 288:544–555, 12 2003.
- [17] A. N. Kolmogorov. On the preservation of conditionally periodic motions under small variations of the Hamilton function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR, n. Ser.*, 98:527–530, 1954.
- [18] Ricardo Mañé. Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems. *Nonlinearity*, 9(2):273–310, mar 1996.
- [19] Ricardo Mañé. Lagrangian flows: The dynamics of globally minimizing orbits. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática - Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 28(2):141–153, 09 1997.
- [20] C. Marchal. How the method of minimization of action avoids singularities. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 83(1):325–353, May 2002.
- [21] John N. Mather. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus. *Topology*, 21(4):457 – 467, 1982.
- [22] John N. Mather. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems. *Mathematische Zeitschrift*, 207(2):169–208, 1991.

- [23] John N. Mather and Giovanni Forni. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems. *Transition to chaos in classical and quantum mechanics (Montecatini Terme, 1991)*, volumen 1589, *Lecture Notes in Math*:92–186, Springer, Berlin, 1994.
- [24] J. Möser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II*, pages 1–20, 1962.
- [25] J.C. Oxtoby. *Measure and Category*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2nd edition, 2014.
- [26] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.
- [27] Hector Sanchez Morgado and Oscar Palmas. *Geometría riemanniana / H. Sánchez Morgado, O. Palmas Velasco*. 03 2008.
- [28] Sol Schwartzman. Asymptotic Cycles. *The Annals of Mathematics (2)*, 66:270–284, 1957.
- [29] Alfonso Sorrentino. On the Integrability of Tonelli Hamiltonians. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363:5071–5089, 10 2011.
- [30] Alfonso Sorrentino. *Action-minimizing Methods in Hamiltonian Dynamics: An Introduction to Aubry-Mather Theory*. Princeton University Press, 2015.
- [31] D.W. Stroock. *Essentials of Integration Theory for Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2011.