UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

ESTABILIDAD EXPONENCIAL DE Co-SEMIGRUPOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
LIC. FÁTIMA FONSECA RODRÍGUEZ.

DIRECTORES:

DR. JOSÉ SAÚL CAMPOS OROZCO.
DR. RODRIGO PONCE.

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS. JULIO 2019.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
CONTROL ESCOLAR POSGRADO

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
28 de junio de 2019
Oficio No. FCFM/0322/19

Dra. José Saúl Campos Orozco
Presidente y Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"ESTABILIDAD EXPONENCIAL DE Co-SEMIGRUPOS".

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestra en Ciencias Matemáticas de la **Lic. Fátima Fonseca Rodríguez** con matrícula escolar X131002.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

"Por la conciencia de la necesidad de servir"

UNACH
fm
FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
FCFM

Dra. Karen Salomé Caballero Mora

Director

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
KSCM /jmag

Resumen

En este trabajo presentamos un criterio para determinar la estabilidad exponencial de las soluciones de la ecuación del Cauchy abstracto en términos de $\rho(A)$, donde A es el generador infinitesimal del C_0-semigrupo asociado a dicha ecuación. Se desarrolla y complementa la teoría para demostrar los Teoremas de Jan Prüss [1]; en la cual establece la relación que existe entre el espectro de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y el comportamiento asintótico de las soluciones periódicas de una ecuación diferencial no homogénea (1). Esta teoría nos permite estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones diferenciales a través del espectro del generador infinitesimal A, aún sin conocer la forma explicita de la solución. También damos un ejemplo de la aplicación de esta teoría.

Abstract

In this thesis we present a criterion to determine the exponential stability of the solutions of the abstract Cauchy equation in terms of $\rho(A)$, where A is the infinitesimal generator of C_0 -semigroup associated to said equation. The theory is developed and complemented to demonstrate the Theorems of Jan Prüss [1]; in which the relation that exists between the spectrum of $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ and the asymptotic behavior of the periodic solutions of a nonhomogeneous differential equation (1). This theory allows us to study the behavior of the solutions of differential equations through the spectrum of the infinitesimal generator A, even without knowing the explicit form of the solution. We also give an example of the application of this theory.

Índice general

Notación para espacios

$\mathbb{R}$	Números reales.
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$.
$\mathbb{Z}$	Números enteros.
$\mathbb{N}$	Números naturales.
$\mathbb{C}$	Números complejos.
$\mathbb{K}$	Denota un campo, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
$l^p(\mathbb{K})$	Colección de sucesiones $x = (x_n)$ en $\mathbb{K}$ tales que $$\parallel x \parallel_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mid x_n \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$
$\mathcal{L}^p(E)$	Conjunto de funciones Lebesgue medibles $f : E \to \mathbb{K}$ tales que $$\parallel f \parallel_p = \left(\int_E \mid f \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$
$L^p(E)$	Clases de equivalencia de funciones en $\mathcal{L}^p(E)$.
$C([a,b], X)$	Funciones continuas $f : [a,b] \to X$.
$C'([a,b], X)$	Funciones continuas y diferenciales $f : [a,b] \to X$.
$BC(\mathbb{R}, X)$	Espacio de funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}$ a X.

$\mathcal{L}(X)$	Operadores lineales $A : X \to X$, donde X es un espacio de Banach.
$\mathcal{B}(X)$	El conjunto de operadores lineales y acotados de X en X.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	El conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$.

Notación general

Sean X un espacio de Banach complejo y $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal.

- $D(A)$ es el dominio del operador A, que es subespacio vectorial de X.
- $G(A) = \{(x, y) \in X \times X : y = Ax\}$ es la gráfica del operador A.
- $N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ es el núcleo de A.
- $R(A) = \{Ax : x \in D(A)\}$ es el rango de A.
- $G_{\mathcal{B}(X)}$ conjunto de operadores en $\mathcal{B}(X)$ que son invertibles.
- Si $A, B \in \mathcal{L}(X)$, $AB := A \circ B$.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales de evolución, es decir, aquellas que cambian con respecto al tiempo, son de gran importancia en el modelado de fenómenos físicos, y pueden encontrarse también en diversas áreas como Química, Biología y Economía, entre otras. Uno de los mayores retos es encontrar la solución explicita de dichas ecuaciones.

En 1930 se empezó a desarrollar la teoría de semigrupos para resolver ecuaciones diferenciales parciales y ha tenido un gran avance en los últimos años ya que con esta teoría, podemos conocer el comportamiento asintótico de soluciones mediante el estudio de ciertos operadores lineales.

Nos interesa estudiar el comportamiento de las soluciones del problema de Cauchy abstracto

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1}$$

donde $u, f \in C([0,T], X)$ con $T > 0$, $u_0 \in X$, $A : D(A) \subset X \to X$ es un operador lineal cerrado y X un espacio de Banach complejo.

Si X es de dimensión finita, entonces $A \in \mathcal{B}(X)$ y puede ser identificado con una matriz $M_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. El sistema dinámico lineal en X, cuyo estado evoluciona con el tiempo, puede ser descrito por un operador lineal acotado $T(\cdot) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ el cual satisface que $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es un C_0-semigrupo generado por A, donde ser generado por el operador A, significa que para cualquier $t \geq 0$ se tiene la siguiente igualdad

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{x}, \quad x \in D(A).$$

En el caso que dim$X < \infty$ y $f \equiv 0$, el Teorema de estabilidad de Liapunov nos da el siguiente criterio:

El semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable (Definición 2.1.3) si y sólo si todos los valores propios de M_A tienen parte real negativa.

La importancia de esto, es que si el C_0-semigrupo es uniformemente estable estable, la solución de la ecuación diferencial (1) que determina el sistema dinámico es uniformemente estable.

Cuando X es un espacio de Banach de dimensión infinita, el operador A no necesariamente es acotado y el criterio anterior no se satisface. En este trabajo, se desarrolla y complementa la teoría para demostrar los Teoremas de Jan Prüss [1]; en la cual establece la relación que existe entre el espectro de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y el comportamiento asintótico de las soluciones periódicas de una ecuación diferencial no homogénea (1). Para esto, introduciremos conceptos de C_0-semigru-
pos para operadores cerrados y no acotados. Se darán condiciones suficientes para que el C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ asociado al generador $A : D(A) \to X$ sea exponencialmente estable (Definición 2.1.3) en términos del operador resolvente.

En el Capítulo 1, se presentan resultados básicos de operadores cerrados e invertibles y se define el espectro y la aplicación resolvente de un operador. En el capítulo 2, trabajaremos sobre la ecuación del problema de Cauchy abstracto (1) y definiremos algunas cotas de crecimiento para C_0-semigrupos. En el Capítulo 3, desarrollamos los Teoremas de Jan Prüss, y mostraremos la equivalencia que hay entre

- Las soluciones suaves 1-periódicas de la ecuación (1).
- $1 \in \rho(T(1))$ donde $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo generado por A.
- La existencia de una proyección dicotómica asociada al C_0-semigrupo.

Y concluiremos el capítulo demostrando que cualquiera de las anteriores nos garantiza que nuestro C_0-semigrupo es exponencialmente estable. Esta teoría nos permite estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones diferenciales a través del espectro del generador infinitesimal A, aún sin conocer la forma explicita de la solución.
Finalmente, en el capítulo 4 presentaremos un ejemplo donde puede aplicarse la teoría de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo incluye conceptos básicos de operadores no acotados y teoría espectral para operados cerrados.

1.1. Operadores lineales

En esta sección se dan algunos resultados básicos importantes sobre operadores lineales cerrados.

En lo que resta del trabajo X denotará un espacio de Banach complejo con norma $\| \cdot \|$ y $\mathcal{L}(X)$, el espacio de todos los operadores lineales sobre X. Diremos que un operador $A \in \mathcal{L}(X)$ es **acotado** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\| Ax \| \leq C \| x \|$$

para todo $x \in X$. Al conjunto de operadores acotados de X en X lo denotaremos por $\mathcal{B}(X)$. Si $A \in \mathcal{B}(X)$, definimos su norma por

$$\| A \|_{\mathcal{B}(X)} := \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

Con esta norma $\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach. Siempre que no haya confusión, denotamos a la norma anterior por $\| A \|$.

Definición 1.1.1. *Un operador lineal A con dominio $D(A)$ en un espacio de Banach complejo X, es decir, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, es cerrado si satisface alguna de las siguientes propiedades equivalentes.*

1. *Si para la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(A)$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \to \infty} Ax_n = y$ para algunos $x, y \in X$, entonces $x \in D(A)$ y $Ax = y$.*

2. *La gráfica*
$$G_A = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$
es cerrada en $X \times X$.

3. $X_1 := (D(A), \| \cdot \|_{\|D(A)\|})$ *es un espacio de Banach para la norma de la gráfica dado por*
$$\| x \|_{D(A)} := \| x \| + \| Ax \|, \quad x \in D(A).$$

Observación 1.1.1. *Si $\lambda I - A$ es inyectivo para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces las propiedades anteriores también son equivalentes a que $(\lambda I - A)^{-1}$ sea cerrado.*

Denotaremos el operador A con dominio $D(A)$ por el par $(A, D(A))$.

Enseguida enunciaremos el Teorema de la gráfica cerrada, que será de utilidad más adelante.

Teorema 1.1.1 (Teorema de la gráfica cerrada)**.** *Sean X y Y espacios de Banach y T un operador lineal de X en Y. Entonces T es acotado, si y sólo si, la gráfica de T es cerrada.*

Demostración. Véase [[8], Teorema 2.9] □

El Teorema de la gráfica cerrada nos permite establecer lo siguiente.

Teorema 1.1.2. *Para un operador cerrado $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. $(A, D(A))$ *es un operador acotado.*

2. $D(A)$ *es un subespacio cerrado en X.*

Finalizamos esta sección enunciando el Teorema de Lax-Milgram, que nos permite garantizar la existencia de soluciones.

Definición 1.1.2. *Sean H un espacio de Hilbert y $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilinial.*

1. *Diremos que B es **continua** si existe una constante C tal que*
$$| B(u, v) | \leq C \| u \| \| v \|, \quad \text{para toda } u, v \in H;$$

2. *B es **coercitiva** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que*
$$B(u, u) \geq \alpha \| u \|^2 \quad \text{para toda } u \in H.$$

Teorema 1.1.3 (Lax-Milgram)**.** *Sean H un espacio de Hilbert y $B(u,v)$ una forma bilineal continua y coercitiva. Entonces para cualquier $\varphi \in X^*$ existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$B(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \textit{para toda} \;\; v \in H.$$

Adémas, si $B(u,v)$ es simétrico, entonces u tiene la siguiente caracterización

$$u \in H \;\; y \;\; \frac{1}{2}B(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}B(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demostración. Veáse [[8], pág. 140]. □

1.2. Espectro y resolvente.

En esta sección se define el inverso para operadores no acotados, ya que en el capítulo 2 veremos que el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo es cerrado pero no acotado. Adémas, daremos la definición de espectro, resolvente y algunos resultados importantes de estos.

La teoría de operadores no acotados surge por la necesidad de establecer fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica, e inició su trabajo en 1920 con los trabajos de Von Neumann y Stone. Esta teoría se dirige principalmente al estudio de ecuaciones diferenciales. Si el lector quiere profundizar en estos temas sugerimos ver [4] y [14].

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio normado. $A \in \mathcal{L}(X)$ es **invertible** si existe un operador $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ABx = x$, para todo $x \in X$, y $BAx = x$, para todo $x \in D(A)$. En tal caso denotamos $B = A^{-1}$.*

Si denotamos al operador identidad como $I : X \to X$, $Ix = x$, entonces

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Definición 1.2.2. *Sea $(A, D(A))$ un operador cerrado sobre un espacio de Banach complejo X. Llamamos al conjunto*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \;\; \textit{es invertible}\}$$

*el **conjunto resolvente** de A, y*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

*el **espectro** de A, respectivamente.*
Para $\lambda \in \rho(A)$, la inversa

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

*es, por el Teorema 1.1.1, un operador acotado sobre X, y será llamada la **resolvente** de A en el punto λ. Esto define la aplicación*

$$\rho(\lambda) \in \lambda \mapsto R(\lambda, A) \in \mathcal{B}(X),$$

*Llamada **aplicación resolvente**. De la definición, tenemos la siguiente identidad*

$$AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Teorema 1.2.1 (Ecuación resolvente)**.** *Sea $A : D(A) \to X$ un operador cerrado en un espacio de Banach X. Se tiene entonces para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$ que*

$$(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1} = \frac{(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1}}{\lambda - \mu}$$

Demostración. Consideremos las identidades

$$[\lambda(\lambda I - A)^{-1} - A(\lambda I - A)^{-1}](\mu I - A)^{-1} = (\mu I - A)^{-1} \tag{1.1}$$

y

$$(\lambda I - A)^{-1}[\mu(\mu I - A)^{-1} - A(\mu I - A)^{-1}] = (\lambda I - A)^{-1} \tag{1.2}$$

Restando (1.1) a (1.2) y factorizando se obtiene el resultado. □

Teorema 1.2.2 (Teorema de Neumann)**.** *Sean X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $\parallel T \parallel < 1$ entonces $(I - T) \in G_{\mathcal{B}(X)}$ y*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T)^n.$$

Demostración. Véase [[10], pág. 240] □

Tomando a $F : G_{\mathcal{B}(X)} \longrightarrow G_{\mathcal{B}(X)}$ definida por $T \longmapsto T^{-1}$ se puede ver que $G_{\mathcal{B}(X)}$ es un conjunto abierto, F es un homeomorfismo y $F = F^{-1}$ (véase [10], pág. 243).

Ahora enunciaremos algunos resultados del conjunto y la aplicación resolvente.

Teorema 1.2.3. *Para un operador cerrado $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, se cumplen las siguientes propiedades.*

1. *El conjunto resolvente $\rho(A)$ es abierto en $\mathbb{C}$, y para $\mu \in \rho(A)$ se tiene*

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu I - A)^{n+1}, \tag{1.3}$$

   para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisface $\mid \mu - \lambda \mid < \frac{1}{\|(\mu I - A)^{-1}\|}$.

2. *La aplicación resolvente $\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$ es localmente analítica con*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda I - A)^{-1} = (-1)^n n! (\lambda I - A)^{-1}$$

   para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. 1. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\lambda I - A = \mu - A + \lambda - \mu = [I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}](\mu I - A),$$

es biyectivo si $[I - (\mu - \lambda)(\mu I - A)^{-1}]$ es invertible, y lo cual, por el Teorema 1.2.2 sucede cuando

$$\mid \mu - \lambda \mid < \frac{1}{\| (\mu I - A)^{-1} \|}.$$

La inversa puede ser calculada como sigue

$$(\lambda I - A)^{-1} = (\mu I - A)^{-1}[I - (\mu - \lambda)(\mu I - A)^{-1}]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{n+1}.$$

2. Se sigue de la representación (1.3).

$\square$

Una consecuencia inmediata del Teorema anterior es que $\sigma(A)$ es cerrado en $\mathbb{C}$. Por otro lado, si A es un operador acotado, se tiene que

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mid \lambda \mid \leq \| A \|\},$$

ya que

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \tag{1.4}$$

existe para todo $\mid \lambda \mid > \| A \|$. Por lo tanto, $\sigma(A)$ es compacto.

Proposición 1.2.1. *Sean X un espacio de Banach complejo y $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $\sigma(A) \neq \emptyset$.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos $\sigma(A) = \emptyset$, entonces $\rho(A) = \mathbb{C}$, así $(\lambda I - A)^{-1}$ es una función entera en $\mathbb{C}$. Tomando el límite cuando $\lambda \to \infty$ en la ecuación (1.4), se tiene que $(\lambda I - A)^{-1} \to 0$. Por el Teorema de Liouville ([13] , Teorema 2.4.8), la aplicación resolvente se reduce a ser la función 0, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 1.2.1. *Para un operador acotado A en un espacio de Banach X, el espectro $\sigma(A)$ es compacto y no vacío; entonces el* ***radio espectral***

$$r(A) := \sup\{\mid \lambda \mid : \lambda \in \sigma(A)\}$$

es finito y satisface $r(A) \leq \| A \|$.

Teorema 1.2.4. *Sean X un espacio de Banach y A un operador acotado. Entonces*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \| A^n \|^{\frac{1}{n}} .$$

Demostración. Véase [[10], Teorema 10.13]. $\square$

Finalizamos este capítulo dando un resultado importante, de la teoría espectral.

Teorema 1.2.5 (Teorema de mapeo espectral)**.** *Sean X un espacio de Banach, $A \in \mathcal{B}(X)$ y f una función holomorfa en una vecindad de $\sigma(A)$. Entonces*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

Demostración. Véase [[12], Teorema 4.10]. $\square$

Capítulo 2

Propiedades de C_0 - semigrupos

El concepto de semigrupo de operadores lineales acotados tiene sus raíces en la ecuación fundamental de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ con $t, s \in \mathbb{R}$, cuyas soluciones continuas no triviales son de la forma e^{ta}, con $a \in \mathbb{R}$ una constante, y la idea fundamental de Peano [11] de definir la ecuación fundamental de una matriz cuadrada A por $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, con el objeto de resolver explícitamente la ecuación diferencial vectorial de primer orden (conocida como la ecuación de Cauchy)

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t),$$

por medio de la fórmula de variación de constantes

$$u(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

En este capítulo daremos nociones de la teoría de C_0-semigrupos, que nos serán de utilidad para estudiar el comportamiento asintótico de la solución del problema **de Cauchy abstracto no homogénea** dada por (1). Recordemos que esta es de la forma

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= A\,u(t) + f(t), \quad t > 0; \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

donde A es un operador lineal que asumiremos no acotado, y su dominio $D(A)$ es subespacio vectorial de X, con X un espacio de Banach.
Consideremos un sistema determinístico autónomo y sea X el conjunto de los estados del sistema. El estado del sistema en el instante de tiempo t es descrito por la función $T(t)$, con $t \geq 0$ que satisface la ecuación funcional

$$T(s+t) = T(s)T(t),$$

y cada $T(t)$ mapea el espacio de estado del sistema en sí mismo.

Estrictamente hablando, un semigrupo de operadores lineales es una extensión de la exponencial de una matriz elevada al exponencial de un operador lineal posiblemente no acotado y definido en general sobre espacios de Banach. La noción de semigrupo se desarrolló en el periodo de 1930-1960 por las contribuciones de Stone, Yosida, Feller, Lumer, Miyadera y Phillips.

2.1. C_0 - semigrupos y el problema de Cauchy abstracto

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio de Banach. Una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores en $\mathcal{B}(X)$ es llamado C_0-* ***semigrupo*** *si se satisfacen las siguientes propiedades*

1. *$T(t+s) = T(t)T(s)$, para toda $t, s \geq 0$;*
2. *$T(0) = I$, donde I es el operador identidad en X;*
3. *$\lim\limits_{t\to 0^+} \| T(t)x - x \| = 0$, para toda $x \in X$.*

*Si se satisfacen las definiciones anteriores para todo $t \in \mathbb{R}$, decimos que $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un C_0-**grupo**.*

Proposición 2.1.1 (Teorema de acotación uniforme)**.** *Sean X y Y espacios de Banach sobre el mismo campo $\mathbb{K}$ y $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de operadores lineales y continuos de X a Y. Si se cumple que para toda $x \in X$ existe una $M_x > 0$ tal que $\| T_\alpha x \| \leq M_x$, para todo $\alpha \in I$, entonces existe $M > 0$ tal que $\| T_\alpha \| \leq M$ para todo $\alpha \in I$.*

Demostración. Véase [[8], pág. 32] □

A continuación se demostrará que todo C_0-semigrupo es acotado de manera exponencial.

Proposición 2.1.2. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo, entonces existen $w \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que para toda $t \geq 0$, se cumple que $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$.*

Demostración. De la Proposición 2.1.1, elijamos una constante $M \geq 1$ tal que $\| T(t) \| \leq M$ para todo $t \in [0,1]$. Sea $w = \ln M$. Si para cada $t \geq 0$ tomamos a n como la parte entera de t, entonces

$$\begin{aligned}
\| T(t) \| &= \left\| T\left(\frac{t}{n} + \cdots + \frac{t}{n}\right)\right\| \\
&= \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) \cdots T\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \\
&= \left\| \left(T\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \right\| \\
&\leq \left\| T\left(\frac{t}{n}\right)\right\|^n \\
&\leq M^n \leq M^{n+1} \leq Me^{wt}.
\end{aligned}$$

□

Si $M = 1$ en el Teorema anterior decimos que el semigrupo es de **contracción**.

Proposición 2.1.3. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo, entonces para cada $x \in X$ fijo, el mapeo $t \mapsto T(t)x$ es una función continua de $\mathbb{R}^+$ en X.*

Demostración. Sea $t \geq 0$, $h \in [0,t]$ y $x \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\| T(t+h)x - T(t)x \| &= \| T(t)T(h)x - T(t)x \| \\
&= \| T(t)(T(h)x - x) \| \\
&\leq \| T(t) \| \| T(h)x - x \| \\
&\leq Me^{wt} \| T(h)x - x \| .
\end{aligned}$$

Haciendo $h \to 0^+$ en ambos lados de la desigualdad anterior se obtiene que

$$\| T(t+h)x - T(t)x \| \to 0.$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
\| T(t-h)x - T(t)x \| &= \| T(t-h)x - T(t-h+h)x \| \\
&= \| T(t-h)x - T(t-h)T(h)x \| \\
&\leq \| T(t-h) \| \| x - T(h)x \| \\
&\leq Me^{wt} \| x - T(h)x \| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

cuando $h \to 0^+$. □

Definición 2.1.2. *El **generador infinitesimal** del C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un operador lineal A definido por*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x), \quad x \in D(A),$$

donde el dominio esta definido como sigue

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x) < \infty\}.$$

Proposición 2.1.4. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo. Entonces se tiene*

1. *El dominio de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es invariante, es decir, $T(t)x \in D(A)$ para toda $x \in D(A)$, con $t \geq 0$, el mapeo $t \mapsto T(t)x$ es derivable en t, con*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x, \quad x \in D(A), \tag{2.1}$$

2. *Para cada $x \in X$ y $t \geq 0$, se tiene $\int_0^t T(s)x \in D(A)$. Además, se cumplen las siguientes relaciones*

   a) $T(t)x - x = A\int_0^t T(s)xds, \qquad x \in X.$

   b) $T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds, \qquad x \in D(A),$

donde las integrales a la derecha de las igualdades, son las integrales de Bochner de las funciones continuas $t \mapsto T(t)x$, $t \mapsto T(t)Ax$ valuadas en el espacio de Banach X.

Demostración. 1. Sean $x \in D(A)$ y $h > 0$. Observemos que

$$T(t)\frac{(T(h)x - x)}{h} = \frac{(T(t+h)x - T(t)x)}{h} = \frac{(T(h)x - x)}{h}T(t).$$

Luego, tomando $h \to 0^+$ se obtiene

$$T(t)Ax = \frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x, \tag{2.2}$$

Por otro lado, si $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t)x - T(x-h)}{h}x - T(t)Ax\right\| &\leq \left\|T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right)\right\| \\ &\quad + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|. \\ &\leq M\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| \\ &\quad + \| T(t-h)Ax - T(t)Ax \|.\end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $h \to 0^+$ obtenemos de (2.2) y lo anterior que

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x.$$

2. a) Sean $x \in X$ y $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\right) &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds\right),\end{aligned}$$

   Al hacer $h \to 0^+$, obtenemos $T(t)x - x$.

   b) Integrando la ecuación (2.1) en el intervalo $[0,t]$ se obtiene lo deseado.

□

Teorema 2.1.1. *Si A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, entonces,*

1. *$D(A)$ es denso en X.*

2. *A es un operador cerrado.*

Demostración. 1. Sea $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$x_n = n\int_0^{\frac{1}{n}} T(s)xds.$$

Por 2) de la Proposición 2.1.4, se tiene que $x_n \in D(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

2. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(A)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ y $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$. Por demostrar: $x \in D(A)$ y $Ax = y$. Por el índiso 2) de la Proposición 2.1.4, se tiene

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds \tag{2.3}$$

para cada $n \geq 1$ y $t \geq 0$. También

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t T(s)Ax_n s - \int_0^t T(s)yds\right\| &\leq \int_0^t \| T(s) \|\| Ax_n - y \| ds \\ &\leq \int_0^t Me^{ws} \| Ax_n - y \| ds.\end{aligned}$$

Así,

$$\left\|\int_0^t T(s)Ax_n s - \int_0^t T(s)yds\right\| \to 0 \tag{2.4}$$

cuando $n \to \infty$. De (2.3) y (2.4)

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds,$$

lo que implica

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds.$$

Finalmente,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds = y,$$

así $x \in D(A)$ y $Ax = y$, por lo tanto A es cerrado.

□

Teorema 2.1.2. *Un C_0-semigrupo es únicamente determinado por su generador infinitesimal.*

Demostración. Sean $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dos C_0-semigrupos con generador A, $x \in D(A)$ y $t \geq 0$. Definamos $u : [0, t] \to X$ como $u(s) = T(s)S(t - s)$. Entonces por la Proposición 2.1.4 se tiene

$$\frac{du(s)}{ds} = -AT(s)S(t - s)x + T(s)AS(t - s)x = 0,$$

así u es constante en $[0,t]$, lo que implica

$$T(t)x = u(t) = u(0) = S(t)x,$$

esto es, $T = S$ en $D(A)$. Luego del Teorema 2.1.1 se tiene que $\overline{D(A)} = X$, así $T = S$ en X. $\square$

El siguiente Teorema demuestra una caracterización del generador deC_0-semigrupos que como se verá más adelante, justifica nuestro trabajo. Diremos que el problema de Cauchy abstracto asociado con el operador A es **bien planteado** si para cada condición inicial $x \in D(A)$ existe una única solución clásica (Definición 3.2.2) $u(\cdot) = u(\cdot, x)$ de la ecuación (1).

Teorema 2.1.3. *Sea A un operador lineal con dominio $D(A)$ en un espacio de Banach X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo.*

2. *El problema de Cauchy abstracto* (1) *asociado con A es bien planteado y $\rho(A) \neq \emptyset$.*

3. *El problema de Cauchy abstracto es bien planteado, A es densamente definido, es decir, $\overline{D(A)} = X$ y cuando (x_n) es una sucesión en $D(A)$ convergente a $x \in D(A)$ con la norma de X, entonces la correspondiente solución clásica $u(\cdot, x_n)$ converge a $u(\cdot, x)$ uniformemente en $[0, \infty)$.*

Demostración. Véase [3, pag. 3]. $\square$

Ya que el Teorema precedente establece que para todo $x \in D(A)$, el problema (1) tiene una solución clásica dada por $u(t) = T(t)x$. Nos interesa estudiar el comportamiento asintótico de las órbitas $T(t)x_0$ de un C_0-semigrupo cuando $t \to \infty$ y x_0 es una condición inicial nos lleva a definir los siguientes tipos de estabilidad.

Definición 2.1.3. *Sea $\{T(t)\}_{\geq 0}$ un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X, con generador A. Entonces se dice que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es*

1. ***Uniformemente exponencialmente estable*** *si existe $M > 0$ y $w > 0$ tal que $\| T(t) \| \leq Me^{-wt}$ para todo $t \geq 0$,*

2. ***Exponencialmente estable*** *si existe una constante $M > 0$ y $w > 0$ tal que $\| T(t)x \| \leq Me^{-wt} \| x \|_{D(A)}$ para todo $t \geq 0$ y $x \in D(A)$,*

3. ***Uniformemente estable*** *si $\lim\limits_{t \to \infty} \| T(t)x \| = 0$ para todo $x \in X$,*

donde $\| x \|_{D(A)}$ denota la norma de la gráfica de x respecto a A. El siguiente ejemplo demuestra que la definición de uniformemente estable no implica exponencialmente estable (y por lo tanto tampoco es uniformemente exponencialmente estable) incluso en espacios de Hilbert y aún cuando el generador sea acotado.

Ejemplo 2.1.1. *Sea $X = l^2$, el espacio de todas las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n\geq 1}$ tal que $\| x \| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Definimos al operador $A : X \to X$ dado por $A(x_n) = (-n^{-1}x_n)$, A es un operador acotado y el C_0-semigrupo generado está dado por $T(t)(x_n) = (e^{\frac{-t}{n}}x_n)$, así $\| T(t) \| \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos a P_n la proyección en X sobre las primeras n coordenadas. Tomemos $x \in X$ y $\epsilon > 0$; elijamos n_0 suficientemente grande tal que $\| (I - P_{n_0})x \| \leq \epsilon$, tenemos*

$$\| T(t)x \| \leq \| T(t)P_{n_0}x \| + \| T(t) \| \| (I - P_{n_0})x \| \leq \| T(t)P_{n_0}x \| + \epsilon.$$

Notemos

$$\| T(t)P_{n_0}x \| = \| T(t)(x_1, x_2, ..x_{n_0}, ..., 0) \| = \| (e^{-t}x_1, ..., e^{-\frac{t}{n}}x_{n_0}, ..., 0) \|,$$

así $\| T(t)P_{n_0}x \| \to 0$ cuando $t \to \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty} \| T(t)x \| = 0.$$

Lo que implica que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continua. Por otro lado veamos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ no es (uniformemente) exponencialmente estable. Para algún $w > 0$ podemos considerar un $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $0 < n_0^{-1} < w$, tomando a $x_{n_0} = (0, 0, ..., 1, ..,0, 0)$ con 1 en la n_0-ésima coordenada, se tiene que para toda $M > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que para toda $t > t_0$

$$\| T(t)x_{n_0} \| = e^{-\frac{t}{n_0}} > Me^{wt}.$$

Un teorema de gran importancia, es el Teorema de Hille-Yosida pues da una caracterización de los C_0-semigrupos a través del espectro del operador A. Una consecuencia de la Proposición 2.1.2 los C_0-semigrupos siempre están acotados exponencialmente, es decir, existen $M > 0$ y $w > 0$ tales que

$$\| T(t) \| \leq Me^{wt}$$

para todo $t \geq 0$.

Teorema 2.1.4 (Feller, Miyadera, Phillips)**.** *Sea A un operador lineal en X, $w \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$ constantes, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Si A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, entonces $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$ para todo $t \geq 0$.*

2. *A es cerrado, $\overline{D(A)} = X$, $(w, \infty) \subset \rho(A)$ y*

$$\| (\lambda I - A)^{-1})^n \| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}$$

   para todo $\lambda > w$ y $n = 1, 2, ...$

Si alguna de las anteriores se cumple, entonces $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > w\} \subset \rho(A)$ y

$$\| ((\lambda I - A)^{-1})^n \| \leq \frac{M}{(Re\lambda - w)^n}$$

para toda $Re\lambda > w$ y $n = 1, 2, ...$ Además, para $Re\lambda > w$ la resolvente está dada por

$$((\lambda I - A)^{-1})x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt$$

para toda $x \in X$.

Demostración. Para una demostración del Teorema de Hille-Yosida, ver la refe-
rencia [3, pág. 5]. □

Definición 2.1.4. *Sea X un espacio espacio de Banach, el operador lineal $A : D(A) \to X$ es llamado* ***disipativo*** *si para todo $x \in D(A)$ existe $y \in X^*$ tal que $Re(\langle Ax, y\rangle) \leq 0$.*

En espacios de Hilbert, una consecuencia del Teorema de representación de Riesz, es que $x \in X^*$ es el único elemento en el conjunto de dualidad; por lo tanto en espacios de Hilbert un operador lineal A es disipativo si

$$Re\, \langle Ax, x\rangle_H \leq 0,$$

para todo $x \in D(A)$.

Teorema 2.1.5 (Lumer-Phillips)**.** *Sean H un espacio de Hilbert y*

$$A : D(A) \to X$$

un operador lineal tal que $\overline{D(A)} = X$. Si A es disipativo y existe $\lambda_0 > 0$ tal que $R(\lambda_o I - A) = X$ entonces A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracción en H.

Demostración. Véase [[7], Teorema 4.3] $\square$

2.2. Cota espectral y cota de crecimiento de un C_0-semigrupo.

Dado un C_0-semigrupo, analizaremos cotas de crecimiento y algunas propieda-
des de estas.

Cuando el C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable, definimos el **crecimiento de acotación uniforme** $w_0(T)$ de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ como

$$w_0(T) := \text{ínf}\{w \in \mathbb{R} : \exists M > 0 \ \ tal \ \ que \quad \| T(t) \| \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0\}. \quad (2.5)$$

El Teorema 2.1.4 demuestra que el espectro del generador infinitesimal A de un C_0-semigrupo siempre está contenido en algún semiplano izquierdo del plano complejo, así tiene sentido definir **la cota espectral** $s(A)$ como sigue

$$s(A) := \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Proposición 2.2.1. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X, con generador A, entonces $s(A) \leq w_0(T)$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 2.1.4 y de observar que $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > w_0(T)\} \subset \rho(A)$. $\square$

Proposición 2.2.2. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo en un espacio de Banach X, entonces para todo $t_0 > 0$ tenemos*

$$w_0(T) = \frac{\log r(T(t_0))}{t_0} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \| T(t) \|}{t}. \quad (2.6)$$

Demostración. Del Teorema 1.2.4, resulta

$$r(T(t_0)) = \lim_{n\to\infty} \| T(t_0)^n \|^{\frac{1}{n}} . \quad (2.7)$$

Por propiedades de semigrupo, aplicando la función logaritmo y el límite cuando $n \to \infty$ a ambos lados de (2.7), se obtiene

$$\log r(T(t_0)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \| T(nt_0) \|}{n},$$

de donde $\lim_{n\to\infty} \frac{\log\|T(nt_0)\|}{nt_0}$ es finito. Ahora mostraremos que coincide con $w_0(T)$. Si $M > 0$, $w \in \mathbb{R}$ son tales que

$$\| T(t)x \| \leq Me^{wt}$$

para toda $t \geq 0$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nt_0} \log \| T(nt_0) \| \leq w.$$

Al tomar el ínfimo sobre los $w \in \mathbb{R}$ pertenecientes al conjunto de la derecha en (2.6), se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nt_0} \log \| T(nt_0) \| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nt_0} \log \| T(nt_0) \| \leq w_0(T).$$

Por otro lado, supongamos $w < w_0(T)$, entonces existe una sucesión $r_k \to \infty$ tal que $e^{-wr_kt_0} \| T(r_kt_0) \| \geq 1$ para toda k, pues si esta sucesión no existiera se tendría que

$$\limsup_{r\to\infty} e^{-wrt_0} \| T(rt_0) \| \leq 1,$$

luego

$$\sup_{r\geq 0} e^{-wrt_0} \| T(rt_0) \| < \infty,$$

lo que implica $w_0(T) \leq w$, lo cual es una contradicción.
Sea $M = M_{t_0} := \sup_{0\leq s\leq 1} \| T(st_0) \|$ y tomemos $n_k := [r_k]$ la parte entera de r_k. Por propiedades de semigrupo se tiene que

$$M^{-1} \| T(r_kt_0) \| \leq \| T(n_kt_0) \|$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$e^{-wn_kt_0} \| T(n_kt_0) \| \geq M^{-1}e^{-|w|t_0}e^{-wt_kt_0} \| T(r_kt_0) \| \geq M^{-1}e^{-|w|t_0}.$$

Así obtenemos que

$$\frac{\log \| T(n_kt_0) \|}{n_kt_0} \geq w + \frac{\log(M^{-1}e^{-|w|t_0})}{n_kt_0}.$$

Dado que $w < w_0(T)$ fue arbitrario, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \| T(nt_0) \|}{nt_0} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \| T(nt_0) \|}{nt_0} \geq w_0(T).$$

Esto concluye la prueba de la primera igualdad de la ecuación (2.6). Ahora tomemos $t \geq 1$ y $n > 1$ tales que $n < t < n+1$ notemos que

$$\frac{\log(M^{-1} \parallel T(n+1) \parallel)}{n+1} \leq \frac{\log \parallel T(t) \parallel}{t} \leq \frac{\log(M \parallel T(n) \parallel)}{n}$$

Tomemos $M = M_1$ como antes, entonces la segunda parte de la identidad (2.6) se obtiene de la ecuación (2.7). $\square$

Si A es un operador acotado, el C_0- semigrupo generado por A es de la forma $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$. Luego, el Teorema de mapeo espectral (Teorema 1.2.5) implica que $\sigma(e^{At}) = e^{t\sigma(A)}$. Entonces por la Proposición 2.2.2 se tiene

$$e^{tw_0(T)} = r(e^{tA}) = e^{ts(A)} \qquad \forall t \geq 0,$$

Lo que implica $s(A) = w_0(T)$. Si A no es acotado, entonces la desigualdad es estricta, incluso en un espacio de Hilbert como se verá en el Ejemplo 2.2.1. Para esto definamos el **límite de crecimiento** $w_1(T)$ como el mínimo de todos los $w \in \mathbb{R}$ para los que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\parallel T(t)x \parallel \leq Me^{wt} \parallel x \parallel_{D(A)}$$

para toda $x \in D(A)$ y $t \geq 0$. Así, T es exponencialmente estable, si y sólo si, $w_1(T) < 0$

Teorema 2.2.1. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X, con generador A. Entonces $s(A) \leq w_1(T) \leq w_0(T)$.*

Referencia [[4], pág.10]
No se cumple en general que $s(A) = w_1(T)$, como se verá a continuación.

Ejemplo 2.2.1. *Para cada $n = 1, 2, ...$ Sea $A_n \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ definida como sigue*

$$A_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Cada matriz A_n es nilpotente y $\sigma(A_n) = \{0\}$. Sea X el espacio de Hilbert de todas las sucesiones $x = (x_n)_{n\geq 1}$ con $x_n \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$\parallel x \parallel := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \parallel x_n \parallel_{\mathbb{C}^n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Sea T el semigrupo definido coordenada a coordenada como sigue

$$T(t) = (e^{int} e^{tA_n})_{n \geq 1}$$

es fácil ver que T es un C_0-semigrupo en X y que puede extenderse a un C_0-grupo. Por otro lado como $\| A_n \| = 1$ para $n \geq 2$ tenemos que $\| e^{tA_n} \| \leq e^t$ por lo tanto $\| T(t) \| \leq e^t$ así $w_0(T) \leq 1$.

Observemos que el generador infinitesimal del C_0-semigrupo de $T(t)$ está dado de la siguiente manera, coordenada a coordenada

$$A = (in + A_n)_{n \geq 1}.$$

Demostraremos que $s(A) = 0$.

Se calcula para $Re\lambda > 0$, con $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n \to \infty} \| R(\lambda, A_n + in) \|_{\mathbb{C}^n} = 0$$

así se tiene que el operador $R(\lambda, A_n + in)_{n \geq 1}$ es acotado en $\mathcal{L}(X)$ y es inverso de $\lambda I - A$, por lo tanto $\{Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ y $s(A) \leq 0$. Por otro lado

$$in \in \sigma(in + A_n) \subset \sigma(A)$$

para todo $n \geq 1$, así $s(A) = 0$.

Ahora demostraremos que $w_1(T) = 1$, como $w_0(T) \leq 1$ basta demostrar $w_1(T) \geq 1$ para cada n, sea

$$x_n := n^{-\frac{1}{2}}(1, 1, ..., 1) \in \mathbb{C}^n$$

entonces $\| x_n \|_{\mathbb{C}^n} = 1$ *y*

$$\begin{aligned}
\| e^{tA_n} x_n \|_{\mathbb{C}^n}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{t^j}{j!} \right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{j,k=0}^{m} \frac{t^{j+k}}{j!k!} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2m} t^i \sum_{j+k=i} \frac{1}{j!k!} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2m} \frac{t^i}{i!} \sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{j!(i-j)!} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2m} \frac{2^i t^i}{i!} \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{2n-2} \frac{2^i t^i}{i!}.
\end{aligned}$$

Para $0 < q < 1$, *definimos* $x_q \in X$ *dado por* $x_q := (n^{\frac{1}{2}} q^n x_n)_{n \geq 1}$, *veamos* $x_q \in D(A)$ *y*

$$\begin{aligned}
\| T(t) x_q \|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n2} \| e^{tA_n} x_n \|^2 \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} n q^{2n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{2n-2} \frac{2^i t^i}{i!} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i t^i}{i!} \sum_{n=\{\frac{i}{2}\}+1} q^{2n} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^{2\{\frac{i}{2}\}+2}}{1-q^2} \frac{2^i t^i}{i!} \\
&\geq \frac{q^3}{1-q^2} e^{2tq}
\end{aligned}$$

Donde $\{\frac{i}{2}\}$ *denota el menor entero mayor o igual que* $\frac{i}{2}$. *Luego usamos que* $2\{\frac{i}{2}\} + 2 \leq i + 3$ *para toda* $i = 0, 1, ..$ *así* $w_1(T) \geq q$ *para todo* $0 < q < 1$, *así* $w_1(T) \geq 1$.

Más adelante veremos que el crecimiento del aplicación resolvente a lo largo de las líneas verticales $Re\lambda = w$ con $w > s(A)$ juega un papel importante para conocer el comportamiento asintótico de la solución al Problema de Cauchy abstracto (1).

Capítulo 3

Teoría asintótica de C_0-semigrupos

Los Teoremas que veremos en este capítulo nos dan una caracterización del espectro de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en términos de las propiedades de la solución a la ecuación diferencial (1), cuando f es periódica y X es un espacio de Hilbert. También nos permite saber cuando nuestra solución es exponencialmente estable a través de su generador A.

3.1. Proyección de Riesz

Definiremos la proyección de Riesz, y daremos algunos resultados que serán de utilidad en la siguiente sección. Empezamos dando dos lemas que nos permitirá demostrar que la proyección de Riesz conmuta con el C_0-semigrupo.

Lema 3.1.1. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-grupo y $T(1)$ invertible. Entonces*

$$T(1)^{-1}T(s) = T(s)T(1)^{-1}, \tag{3.1}$$

para todo $s \in [0,1]$

Demostración. Notemos $T(s)T(1) = T(1+s)$ luego aplicando $T(1)^{-1}$ por la derecha obtenemos

$$\begin{aligned} T(s) &= T(1+s)T(1)^{-1} \\ T(1)^{-1}T(s) &= T(1)^{-1}T(1+s)T(1)^{-1} \\ T(1)^{-1}T(s) &= T(1)^{-1}T(1)T(s)T(1)^{-1} \\ T(1)^{-1}T(s) &= T(s)T(1)^{-1} \end{aligned}$$

□

Lema 3.1.2. *Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semigrupo y supongamos* $1 \in \rho(T(1))$. *Entonces,*

$$T(t)(I - T(1))^{-1} = (I - T(1))^{-1}T(t)$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Aplicando $T(1)$ por la derecha y por la izquierda a la ecuación (3.1) del Lema 3.1.1, se tiene

$$T(t)T(1) = T(1)T(t), \quad \text{para todo } \ t \geq 0,$$

así,

$$T(t)(I - T(1)) = (I - T(1))T(s) \ \text{ para todo } \ t \geq 0. \tag{3.2}$$

Nuevamente, aplicando $(I - T(1))^{-1}$ por la derecha y por la izquierda de la ecuación (3.2) se obtiene lo deseado. □

Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(H)$, recordemos que el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid > \parallel T \parallel\} \subset \rho(T).$$

Definimos un **dominio admisible** con respecto a T, a cualquier conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, no necesariamente conexo, cuya frontera Γ consiste de un número finito de curvas cerradas rectificables y $\partial\Omega \subset \rho(T)$.

Denotamos por σ a una **parte aislada** de $\sigma(T)$, es decir, una parte que se encuentra a una distancia positiva de la parte completaria $\bar{\sigma} = \sigma(T) - \sigma$. Existe un dominio admisible Ω tal que

$$\sigma = \sigma(T) \cap \Omega. \tag{3.3}$$

Sea Ω un dominio admisible satisfaciendo (3.3); como $\partial\Omega$ está en $\rho(T)$, podemos definir la integral

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}(\lambda I - T)^{-1}d\lambda.$$

Para σ, una parte aislada de Ω, existe un dominio admisible Ω' tal que $\sigma \subset \Omega' \subset \Omega$ cuya frontera se encuentre en el interior de Ω. Luego, por el Teorema de Cauchy, definimos el operador

$$P_\Omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}(\lambda I - T)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega'}(\mu I - \Omega)^{-1}d\mu.$$

El operador P_Ω es llamado **operador de Riesz** correspondiente al dominio Ω.

Teorema 3.1.1 (Proyección de Riesz)**.** *Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio admisible de T. Entonces*

$$P_\Omega = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - T)^{-1} d\lambda.$$

es una proyección, donde $\Gamma = \partial\Omega$.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ un número suficientemente pequeño tal que $\Omega_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : dist(z, \Omega) < \epsilon\}$. Sea un dominio admisible de T y $\overline{\Omega_\epsilon} \setminus \Omega \subset \rho(T)$, usando que $\rho(T)$ es abierto y $\Gamma' = \partial\Omega_\epsilon$ se tiene

$$P_\Omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda.$$

Entonces,

$$P_\Omega^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} (\mu I - T)^{-1}(\lambda I - T)^{-1} d\mu d\lambda.$$

Luego por la ecuación resolvente (Teorema (1.2.1))

$$\begin{aligned}
P_\Omega^2 &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} \frac{(\lambda I - T)^{-1} - (\mu I - T)^{-1}}{(\mu - \lambda)} d\mu d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma (\mu I - T)^{-1} d\mu \int_{\Gamma'} \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} \\
&- \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma'} (\mu I - T)^{-1} d\mu \int_{\Gamma} \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} \\
&= P_\Omega
\end{aligned}$$

pues $\int_{\Gamma'} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} = 2\pi i$ y $\int_\Gamma \frac{d\mu}{\mu-\lambda} = 0$. $\square$

Una proyección de Riesz puede ser extendida en el caso que sea un dominio no acotado con frontera rectificable. Sea $R > \| T \|$ un número arbitrario y sea $\Omega_R = \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : | z | < R\}$. Por el Teorema de Cauchy, la proyección no depende de la elección de R, es decir,

$$P_\Omega = P_{\Omega_R}.$$

Proposición 3.1.1. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$, Ω un dominio admisible y $\overline{\Omega^c} = \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$, entonces $P_\Omega + P_{\overline{\Omega^c}} = I$*

Demostración. Sea $R > \| T \|$, y $B_R = \{z \in \mathbb{C} : | z | < R\}$. Para $\lambda \in C_r = \partial B_R$, la resolvente $(\lambda I - T)^{-1}$ puede ser expandida en su serie de Neumann (Teorema 1.2.2) dada por

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$$

que converge uniformemente en C_r. Integrado término a término se obtiene $P_{B_R} = I$. □

Sea H_Ω el rango de P_Ω, notemos que H_Ω es subespacio cerrado en H. Se sigue de la Proposición 3.1.1 que

$$H_\Omega \cap H_{\overline{\Omega^c}} = \{0\} \quad y \quad H_\Omega + H_{\overline{\Omega^c}} = H.$$

Lo anterior lo denotaremos por $H_\Omega \dot{+} H_{\Omega^c} = H$. Notemos que H_Ω y H_{Ω^c} no necesariamente son ortogonales entre si.

Observación 3.1.1. *Por el Lema 3.1.2 se tiene que la resolvente de T conmuta con T. Luego*

$$\begin{aligned} P_\Omega T &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - T)^{-1} d\lambda \right) T \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma T(\lambda I - T)^{-1} d\lambda \\ &= T \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - T)^{-1} d\lambda \\ &= T P_\Omega. \end{aligned}$$

Esto nos dice que H_Ω y H_{Ω^c} son subespacios invariantes de T. En efecto, si $x \in H_\Omega$ entonces $P_\Omega T x = T P_\Omega x = P x$ lo que significa que $T x \in H_\Omega$.

En adelante definiremos T_Ω una restricción del operador T en H_Ω (donde H_Ω es un espacio de Hilbert).

Teorema 3.1.2. *Sea Ω un dominio admisible de $T \in \mathcal{B}(H)$. Entonces $\sigma(T_\Omega) \subset \Omega$, $\sigma(T_{\Omega^c}) \subset \Omega^c$ y $\sigma(T) = \sigma(T_\Omega) \cup \sigma(T_{\Omega^c})$.*

Demostración. La última afirmación se deduce de

$$\lambda I - T = P_\Omega(\lambda I - T)P_\Omega + P_{\Omega^c}(\lambda I - T)P_{\Omega^c},$$

así $(\lambda I - T)$ es invertible, si y sólo si, $(\lambda I - T)P_\Omega$ y $(\lambda I - T)P_{\Omega^c}$ son invertibles. Para probar la primera afirmación, tomemos $\mu \in \Omega^c$. En el caso cuando el dominio Ω es acotado, I define el operador

$$S(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\mu I - T)}{\mu - \lambda} d\lambda.$$

Si Ω no es acotado entonces es reemplazado por Ω_R, con $R > \| T \|$.
La identidad

$$(\mu I - T)(\lambda I - T)^{-1} = I + (\mu - \lambda)(\lambda I - T)$$

implica

$$(\mu I - T)S(\mu) = S(\mu)(\mu I - T) = P_\Omega \tag{3.4}$$

Notemos que H_Ω es un subespacio invariante para el operador $S(\mu)$, esto es cierto pues H_Ω es un subespacio invariante para cada operador $(\lambda I - T)^{-1}$. Entonces (3.4) nos dice que la restricción de $S(\mu)$ a H_Ω es la inversa de $(\mu I - T_\Omega)$. En particular, $\mu \in \rho(T_\Omega)$.

□

3.2. Teoremas de Jan Prüss

En esta sección proporcionamos una caracterizacion del espectro de un C_0-semigrupo en términos de ciertas propiedades de solución de la ecuación diferencial (3.5). También introduciremos un criterio, para determinar la estabilidad asintótica de estas soluciones.

Si $[0,T] \subset \mathbb{R}$ y $p \in [1,\infty)$, $L^p([0,T],X)$ denotará el espacio de funciones fuertemente medibles (Definición A.1.1).

Definición 3.2.1. *Sean X un espacio de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal, $f : [0,T] \longrightarrow X$ con $T > 0$ y $u_0 \in X$.*
El problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T] \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

es llamado ***problema de Cauchy abstracto*** *asociado a $(A, D(A))$ con valor inicial u_0.*

Definición 3.2.2. *Para $f \in C([0,T],X)$ dado, una función $u : [0,T] \to X$ es una* ***solución clásica*** *de la ecuación (1) si u es continuamente diferenciable, $u(t) \in D(A)$ para toda $t \geq 0$ y satisface la ecuación (1).*

Definición 3.2.3. *Dado $f \in L([0,T],X)$, una función $u \in C([0,T],X)$ es llamada una* ***solución suave*** *de la ecuación (1) con valor inicial $u_0 \in X$ si*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{3.6}$$

en $[0,T]$.

Observación 3.2.1. *Si u satisface (3.5) para cada $t \in [0,T]$ decimos que es una solución clásica, si y sólo si, es continuamente diferenciable.*

Si adémas $u(0) = u(T)$ decimos que u es una solución suave (o clásica) T- periódica.

Teorema 3.2.1. *Sean X un espacio de Banach y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ el C_0 -semigrupo en X generado por A. Entonces $1 \in \rho(T(1)$, si y sólo si, para cada $f \in C([0,1],X)$, (3.5) admite una solución suave 1- periódica.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $f \in C([0,1],X)$ dada. Si $1 \in \rho(T(1))$ entonces $I - T(1)$ es invertible. Considerando $u(0) = u(1)$, la ecuación (3.6) determina un único valor inicial

$$u(0) = (I - T(1))^{-1} \int_0^1 T(1-s)f(s)ds,$$

de la solución suave 1-periódica $u(t)$ de la ecuación (3.5) y dada por el Teorema 2.1.3.
$\Leftarrow$) Basta probar que el operador $(I-T(1))$ es invertible. Para esto definiremos dos operadores auxiliares K y S. Sea $K : C([0,1],X) \to C([0,1],X)$ definido por $f \mapsto (Kf) = u_f$, donde u_f es la solución suave $1-$periódica de (3.5). Veamos que K es lineal. Sean $f, g \in C([0,1],X)$, $K(f) = u_f$, con $K(g) = u_g$ y $u = u_f + u_g$.
Derivando, obtenemos

$$\begin{aligned} u' = u'_f + u'_g &= (Au_f + f) + (Au_g + g) \\ &= A(u_f + u_g) + (f+g) = Au + (f+g). \end{aligned}$$

Así, $u = K(f+g) = K(f) + K(g)$. A continuación, haciendo uso del Teorema de la gráfica cerrada [8] demostraremos que K es acotado. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $C([0,1],X)$ tal que

$$f_n \to f \quad \text{y} \quad Kf_n \to u \quad \text{en } C([0,1],X).$$

Dado que en $C([0,1],X)$ la convergencia es uniforme, se sigue que f es continua.
Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Kf_n &= \lim_{n\to\infty} u_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(T(t)u_0 + \int_0^1 T(t-s)f_n(s)ds \right) \\ &= T(t)u_0 + \int_0^1 T(t-s)f(s)ds = u. \end{aligned}$$

Notemos que u es una solución suave $1-$ periódica de la ecuación (3.5). Por lo tanto, $K(f) = u$ por la unicidad del límite. Esto muestra que la gráfica de K es cerrado, por lo tanto K es acotado.

Para cada $x \in X$ definamos $f_x(t) = T(t)x$. Notemos que cada f_x es continua; luego, por hipótesis para esta f_x existe $u_x \in C([0,1],X)$ solución suave 1-periódica de (3.5).

Sea $S : X \to X$ una función definida por $S(x) = (Kf_x)(0) = u_x(0)$, la cual es lineal y acotada ya que K lo es.
Veamos que $(I - T(1))$ es sobreyectiva. Dado $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}(I - T(1))(S(x) + x) &= (I - T(1))S(x) + (I - T(1))x \\ &= (I - T(1))(Kf_x)(0) + x - T(1)x \\ &= (I - T(1))u_x(0) + x - T(1)x \\ &= \int_0^1 T(1 - s)f_x(s)ds + x - T(1)x \\ &= \int_0^1 T(1 - s)T(s)xds + x - T(1)x \\ &= \int_0^1 T(1)x + x - T(1)x \\ &= T(1)x - T(1)x + x = x.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(I - T(1))$ es sobre.
Finalmente, veamos que $(I-T(1))$ es inyectiva. Supongamos $(I-T(1))x = 0$, entonces

$$\begin{aligned}0 = (I - T(1))x &= \int_0^1 T(1 - s)f_x(s)ds \\ &= \int_0^1 T(1 - s)T(s)xds = T(1)x.\end{aligned}$$

Esto implica que es inyectiva. Por lo tanto, $(I - T(1))$ es invertible, así $1 \in \rho(T(1))$. □

Corolario 3.2.1. *Sea* $1 \in \rho(T(1))$. *Entonces:*

1. *La ecuación* (3.5) *tiene una única solución suave* 1- *periódica para cada* $f \in L([0, 1], X)$.

2. *Sea* $f \in C([0, 1], X) \cap L([0, 1], Y)$, *donde* $Y = D(A)$ *dotado con la norma de la gráfica. Entonces la solución 1-periódica es una solución clásica.*

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 3.2.1. □

Teorema 3.2.2. *Sean* X *un espacio de Hilbert y* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *el* C_0*- semigrupo en* X *generado por* A. *Entonces* $1 \in \rho(T(1))$, *si y sólo si,* $\{2\pi in\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \rho(A)$ *y* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \parallel (2\pi in - A)^{-1} \parallel = M < \infty$

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $1 \in \rho(T(1))$ y consideremos el operador $T_n : X \to X$ definido por

$$T_n x = (I - T(1))^{-1} \int_0^1 T(s) e^{-2\pi ins} x ds, \tag{3.7}$$

con $x \in X$, $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que cada T_n es acotado. Del Teorema 3.1.2, sabemos que $T(s)$ conmuta con $(I - T(1))^{-1}$ para toda $s \geq 0$.

Para $s \geq 0$ definamos $S(s) := T(s)e^{-2\pi ins}$, claramente es un C_0-semigrupo con generador $-B = A - 2\pi in$. Luego,

$$\begin{aligned}
-BT_n x &= -T_n Bx \\
&= (I - T(1))^{-1} \int_0^1 (-BS(s)) x ds \\
&= (I - T(1))^{-1} \int_0^1 -S'(s) x ds \\
&= (I - T(1))^{-1} (S(0) - S(1)) x \\
&= (I - T(1))^{-1} (I - T(1) e^{-2\pi in}) x \\
&= (I - T(1))^{-1} (I - T(1)) x = x.
\end{aligned}$$

De esta forma $(2\pi in - A)$ es invertible y $T_n = (2\pi in - A)^{-1}$ para toda $n \in Z$; también obtenemos

$$\begin{aligned}
\| (2\pi in - A)^{-1} \| &= \| T_n \| \\
&\leq \| (I - T(1))^{-1} \| \sup_{s \in [0,1]} \| S \| < \infty.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Supongamos que

$$\{2\pi in\} \subset \rho(A) \quad \text{y} \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} \| (2\pi in - A)^{-1} \| = M < \infty.$$

Sea $f \in C([0,1], X)$, entonces los coeficientes de Fourier de f son

$$f_n = \int_0^1 f(s) e^{-2\pi ins} ds, \quad n \in \mathbb{Z},$$

están bien definidos y satisfacen la identidad de Parserval ([12], Teorema 4.13)

$$\| f \|_2^2 = \int_0^1 \| f(s) \|^2 \, ds = \sum_{n \in \mathbb{N}} \| f_n \|^2,$$

y se tiene $f(t) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{-N}^{N} f_n e^{-2\pi int} = \lim\limits_{N\to\infty} f_N(t)$ en $L^2([0,1], X)$, donde

$$f_N(t) = \sum_{-N}^{N} f_n e^{-2\pi int}.$$

Si suponemos que $u(t)$ es una solución suave $1-$periódica, entonces multiplicando la ecuación $u'(t) = Au(t) + f(t)$ por $e^{-2\pi in}$ e integrando de 0 a 1 se obtiene que sus coeficientes de Fourier son $u_n = (2\pi in - A)^{-1} f_n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Esto nos lleva a definir

$$u_N(t) = \sum_{-N}^{N} u_n e^{-2\pi int}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

entonces $u_N \in C'([0,1], X)$ es 1-periódica y satisface

$$u_N(t) = T(t)u_N(0) + \int_0^t T(t-s) f_N(s) ds, \tag{3.9}$$

esto implica que u_N es una solución clásica. Por otro lado, de la hipótesis se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{\infty} \| u_n \|^2 &\leq \sum_{-\infty}^{\infty} \| (2\pi in - A)^{-1} \|^2 \| f_n \|^2 \\ &\leq M^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \| f_n \|^2 = M^2 \| f \|_2^2 .\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_N \to u$ en $L^2([0,1], X)$ cuando $N \to \infty$. Notemos que,

$$\int_0^1 T(t-s) f_N(s) ds \to \int_0^1 T(t-s) f(s) ds, \quad \text{cuando } N \to \infty, \tag{3.10}$$

uniformemente para $t \in [0,1]$, luego para $t = 1$ en (3.9) obtenemos

$$u_N(1) = T(1)u_N(0) + \int_0^1 T(1-s) f_N(s) ds,$$

entonces

$$(I - T(1))u_N(0) = \int_0^1 T(1-s) f_N(s) ds \to \int_0^1 T(1-s) f(s) ds. \tag{3.11}$$

Multiplicando (3.9) por $T(1-t)$ e integrando de 0 a 1 se tiene

$$\int_0^1 T(1-t)u_N(t)dt = \int_0^1 T(1-t)T(t)u_N(0)dt + \int_0^1 \int_0^t T(1-t)T(t-s)f_N(s)dsdt$$
$$\int_0^1 T(1-t)u_N(t)dt = \int_0^1 T(1)u_N(0)dt + \int_0^1 T(1-t) \int_0^1 T(t-s)f_N(s)dsdt,$$

luego,

$$T(1)u_N(0) = \int_0^1 T(1-t)u_N(t)dt - \int_0^1 T(1-t) \int_0^1 T(t-s)f_N(s)dsdt. \quad (3.12)$$

Notemos que la parte derecha de esta igualdad converge y así de (3.11) y (3.12) se obtiene que $u_N(0) = (I - T(1))u_N(0) + T(1)u_N(0)$ converge a algún punto en X, digamos a u_0. Finalmente, aplicando el límite cuando $N \to \infty$ a ambos lados de la ecuación (3.9) y de las ecuaciones (3.10) y (3.12) se sigue que

$$u_N \to u \ \text{ en } \ C([0,1], X),$$

y $u(t)$ es una solución suave 1-periódica de (3.5). $\square$

Corolario 3.2.2. *Sea X un espacio de Hilbert y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en X. Si*

$$\{2\pi in\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \rho(A) \quad y \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} \| (2\pi in - A)^{-1} \| = M < \infty,$$

entonces para cada $f \in L([0,1], X)$, (3.5) tiene una única solución suave 1-periódica.

Demostración. Supongamos

$$\{2\pi in\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \rho(A) \ \text{ y } \ sup_{n\in\mathbb{Z}} \| (2\pi in - A)^{-1} \| = M < \infty.$$

Por el Teorema 3.2.2, $1 \in \rho(A)$, luego del Corolario 3.2.1 se concluye lo deseado. $\square$

Enseguida damos una caracterización de la resolvente del C_0 -semigrupo.

Teorema 3.2.3. *Sea X un espacio de Hilbert y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en X. Entonces $0 \neq \mu \in \rho(T(t))$, si y sólo si, $C := \{\lambda \in \mathbb{C} : e^{\lambda t} = \mu\} \subset \rho(A)$ y $\sup\{\| (\lambda I - A)^{-1} \| : \lambda \in C\} < \infty$.*

Demostración. Observemos que para todo $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu = e^{\lambda t}$. Luego

$$\begin{aligned} \mu \in \rho(T(t)) &\Leftrightarrow ((e^{\lambda} - T(t)) = e^{\lambda t}(I - T(t)e^{-\lambda t}) \in G_{\mathcal{B}(X)} \\ &\Leftrightarrow 1 \in \rho(S(t)) \end{aligned}$$

donde $S(t) = T(t)e^{-\lambda t}$ y su generador infinitesimal es $B = A - \lambda$. La conclusión se sigue del Teorema 3.2.2. □

Definición 3.2.4. *Un operador proyección (en el sentido de Riesz) $P \in \mathcal{B}(X)$ es llamado* ***proyección dicotómica*** *para el C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X si existen $M \geq 1$ y $\delta \geq 0$ tales que:*

(P1) $PT(t) = T(t)P$ para todo $t \geq 0$;

(P2) $\| T(t)Px \| \leq Me^{-\delta t} \| Px \|$ para toda $x \in X, t \geq 0$;

(P3) $T(t)(I - P)$ se extiende a un C_0-grupo en $N(P)$;

(P4) $\| T(t)(I - P)x \| \leq Me^{\delta t} \| (I - P)x \|$ para todo $x \in X$, $t \leq 0$.

Teorema 3.2.4. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo en un espacio de Banach X, entonces los siguientes son equivalentes.*

i) *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ admite una proyección dicotómica.*

ii) *Para cada $f \in C(\mathbb{R}, X)$ existe una única solución suave acotada $u \in C(\mathbb{R}, X)$ de $u'(t) = Au(t) + f(t)$.*

iii) *$S_1 = \{\mu \in \mathbb{C} :\mid \mu \mid= 1\} \subset \rho(T(1))$.*

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sea P una proyección dicotómica de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, definimos el **Kernel de Green** $G_A(t)$ asociado a (1) como sigue

$$G_A(t) := \begin{cases} T(t)P & si\ \ t > 0. \\ -T(t)(I - P) & si\ \ t < 0. \end{cases}$$

La propiedad (P3) nos permite extender $T(t)(I - P)$ a un C_0-grupo sobre $N(P)$, que denotaremos por $T(t)(I - P)$. De (P2) y (P4) existe $c \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \| G_A(t) \| \, dt &= \int_{-\infty}^{0} \| G_A(t) \| \, dt + \int_{0}^{\infty} \| G_A(t) \| \, dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} Me^{\delta t} \| (I-P) \| \, dt + \int_{0}^{\infty} Me^{-\delta t} \| P \| \, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} Me^{-\delta t} \| (I-P) \| \, dt + \int_{0}^{\infty} Me^{-\delta t} \| P \| \, dt \\
&\leq \int_{0}^{\infty} Me^{-\delta t} (\| I \| + \| P \| + \| P \|) dt \\
&= \int_{0}^{\infty} Me^{-\delta t} (\| I \| + 2 \| P \|) dt \\
&= \int_{0}^{\infty} cMe^{-\delta t} dt < \infty,
\end{aligned}$$

donde $(\| I \| + 2 \| P \|) = c$, por lo tanto el operador $K : BC(\mathbb{R}, X) \to BC(\mathbb{R}, X)$ dado por

$$(Kf)(t) = (G_A * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_A(t-s) f(s) ds, \tag{3.13}$$

esta bien definida y es continua. Queremos demostrar que $u(t) = (Kf)(t)$ es la única solución suave acotada de la ecuación (3.5). Para $s < t$ resulta

$$\begin{aligned}
u(t) - T(t-s)u(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_A(t-r) f(r) dr - T(t-s) \int_{-\infty}^{\infty} G_A(s-r) f(r) dr \\
&= \int_{-\infty}^{t} T(t-r) P f(r) dr - T(t-s) \int_{-\infty}^{s} T(s-r) P f(r) dr \\
&\quad + T(t-s) \int_{s}^{\infty} T(s-r)(I-P) f(r) dr - \int_{t}^{\infty} T(t-r)(I-P) f(r) dr \\
&= \int_{s}^{t} T(t-r) P f(r) dr + \int_{s}^{t} T(t-r)(I-P) f(r) dr \\
&= \int_{s}^{t} T(t-r) f(r) dr.
\end{aligned}$$

De esta manera u es solución suave de la ecuación (3.5) en todo $\mathbb{R}$. Para mostrar la unicidad tomemos $u(t)$ una solución suave de la ecuación homogénea $u'(t) = Au(t)$. Por ser u solución de una ecuación homogénea, se tiene

$$u(t+s) = T(t+s)u_0 = T(t)(T(s)u_0) = T(t)u(s),$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. En particular,

$$u(s) = T(s)u_0 = T(s-t+t)u_0 = T(t)(T(s-t)u_0) = T(t)u(s-t).$$

para toda $s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \| Pu(s) \| &= \| P^2 u(s) \| = \| PPT(t)u(s-t) \| \\ &\leq \| T(t)P \| \| Pu(s-t) \| \leq Me^{-\delta t} \| P \| \| u \| \to 0 \end{aligned}$$

Esto implica que $Pu(s) \equiv 0$. Similarmente, ya que $T(t)(I-P)$ es un C_0-grupo, por (P3) y $N(P) = R(I-P)$ al ser una proyección de Riesz, se tiene

$$\begin{aligned} \| (I-P)u(s) \| &= \| T(-t)(I-P)u(s+t) \| \\ &\leq Me^{-\delta t} \| (I-P) \| \| u \| \to 0, \text{ si } t \to \infty \end{aligned}$$

por lo tanto $(I-P)u(s) \equiv 0$, es decir, $u(s) \equiv 0$, así u es única.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sea $\mu = e^{i\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ dado, queremos probar que $\mu \in \rho(T(1))$, es decir,

$$(\mu - T(1)) = (e^{i\alpha} - T(1)) = e^{i\alpha}(I - T(1)e^{-i\alpha}) \in G_{\mathcal{B}(X)}.$$

Tomemos $S(t) := T(t)e^{-i\alpha t}$. Notemos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0−semigrupo generado por $B = (A - i\alpha)$, pues

$$\begin{aligned} S'(t) &= T'(t)e^{-i\alpha t} - i\alpha T(t)e^{-i\alpha t} \\ \Rightarrow S'(0) &= B = T'(0) - i\alpha I = A - i\alpha. \end{aligned}$$

Si u es una solución suave de la ecuación (3.5), entonces $v(t) = e^{-i\alpha t}u(t)$ es una solución suave de

$$v'(t) = Bv(t) + f(t)e^{-i\alpha t}. \tag{3.14}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(t)e^{-i\alpha t} - i\alpha e^{-i\alpha t}u(t) \\ &= (Au(t) + f(t))e^{-i\alpha t} - i\alpha e^{-i\alpha t}u(t) \\ &= (A - i\alpha)u(t)e^{-i\alpha t} + f(t)e^{-i\alpha t}, \end{aligned}$$

lo que implica que v es solución suave de la ecuación (3.14). Recíprocamente, si $v(t)$ es una solución suave de la ecuación (3.14) y $w(t) = e^{i\alpha t}v(t)$, entonces

$$\begin{aligned} w'(t) &= i\alpha e^{i\alpha t}v(t) + v'(t)e^{i\alpha t} \\ &= i\alpha e^{i\alpha t}v(t) + (Bv(t) + f(t)e^{-i\alpha t})e^{i\alpha t} \\ &= (B + \alpha i)e^{i\alpha t}v(t) + f(t) \\ &= (A - i\alpha + i\alpha)e^{i\alpha t}v(t) + f(t) \\ &= Ae^{i\alpha t}v(t) + f(t) \\ &= Aw(t) + f(t), \end{aligned}$$

por lo tanto, w es solución de la ecuación (3.5). Así,

$$\mu \in \rho(T(1)) \Leftrightarrow 1 \in \rho(S(1)) \Leftrightarrow 1 \in \rho(T(1)).$$

Luego por el Teorema 3.2.1 basta probar que si $f \in C(\mathbb{R}, X)$ es 1-periódica, entonces la ecuación (3.5) posee una única solución $u \in C(\mathbb{R}, X)$ 1- periódica. Tomemos $f \in C(\mathbb{R}, X)$ 1-periódica. Por $ii)$ de la hipótesis existe $u \in C(\mathbb{R}, X)$ que satisface la ecuación (3.5) en $\mathbb{R}$. Veamos que u es 1-periódica. Sea $w(t) = u(t + 1)$, entonces

$$\begin{aligned} w'(t) &= u'(t + 1) \\ &= Au(t + 1) + f(t + 1) \\ &= Aw(t) + f(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, luego por unicidad $w(t) = u(t)$, es decir $u(t + 1) = u(t)$. $iii) \Rightarrow i)$ Sea $S_1 \subset \rho(T(1))$, entonces

$$P := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (z - T(1))^{-1} dz,$$

es una proyección (Teorema 3.1.1), también es acotada, pues

$$\begin{aligned} \| Px \| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \| (z - T(1))^{-1}x \| | dz | \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \| (z - T(1))^{-1} \| \| x \| | dz | \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \max_{|z|=1} \| (z - T(1))^{-1} \| \| x \| | dz | \\ &= \frac{M}{2\pi} \int_{|z|=1} | dz | = M. \end{aligned}$$

De la Observación 3.1.1 se cumple la propiedad $(P1)$.
Para demostrar (P2) veremos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ deja invariante a $N(P)$ y $R(P)$. Sea $x \in N(P)$. Entonces $PT(t)x = T(t)Px = 0$ lo que implica $T(t)x \in N(P)$. Análogamente, si $y \in R(P)$ entonces $T(t)y \in R(P)$, considerando

$$U(t) := T(t) \mid_{R(P)},$$

se tiene que $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo. Tomando $\Omega = B(0,1)$, $\Gamma = \partial\Omega = S_1$ en el Teorema 3.1.1, y considerando $T_\Omega = T(1) \mid_{R(P)}$, entonces del Teorema 3.1.2 obtenemos

$$\sigma(U(1)) \subset \{z : \mid z \mid < 1\},$$

así $r(U(1)) < 1$. Por la Proposición 2.2.2,

$$w_0(U(1)) = \frac{\log(r(U(1))}{1} < 0.$$

Lo que implica $(P2)$. Similarmente, sea $V(t) := T(t) \mid_{N(P)}$ con $\Omega = B(0,1)$. Del Teorema 3.1.2 se obtiene

$$\sigma(V(1)) \subset \{z : \mid z \mid > 1\},$$

así, en particular $0 \in \rho(V(1))$. Para cada $s \in [0,1]$, definimos

$$T_V(-s) := V(1)^{-1}V(1-s).$$

Observemos que $T_V(-s)$ es acotado, ya que $x \in X$

$$\begin{aligned}
\| T_V(-s)x \| &\leq \| V(1)^{-1} \| \| V(1-s)x \| \\
&\leq \| V(1)^{-1} \| \sup_{s\in[0,1]} \| V(1-s)x \| \\
&\leq \| V(1)^{-1} \| \sup_{s\in[0,1]} \| V(1-s) \| \| x \| \\
&\leq M \| V(1)^{-1} \| \| x \| < \infty.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$V(s)T_V(-s) = V(s)V(1)^{-1}V(1-s)$$

aplicando el Lema 3.1.1, se obtiene

$$\begin{aligned}
V(s)V(1)^{-1}V(1-s) &= V(1)^{-1}V(s)V(1-s) \\
&= V(1)^{-1}V(1) = I.
\end{aligned}$$

Similarmente, $T_V(-s)V(s) = I$, por lo tanto $V(s)$ es invertible, con inversa $T(-s)$, $s \in [0,1]$. Observe que como $V(s)$ es un C_0-grupo

$$V^2(s) = V(s)V(s) = V(2s), \qquad s \in [0,1],$$

lo que implica $V^n(s) = V(sn)$ para $s \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$.
Como $V(s)$ es invertible, entonces $V^n(s) = V(ns) = V(s) \cdots V(s)$ es también invertible para todo para todo $s \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, de esto se sigue que $V(t)$ es invertible para todo $t \geq 0$. Denotamos a esta inversa como $T_V(-t)$. Por lo tanto, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ se extiende al C_0- grupo en $N(P)$ como sigue

$$\overline{T}(t) = \begin{cases} T(t) \mid_{N(P)} & si \;\; t \geq 0 \\ T_V(t) & si \;\; t < 0, \end{cases}$$

así se cumple $(P3)$. Como $V(t)$ es un grupo, $V(-t) = V(t)^{-1}$ para toda $t \geq 0$, se tiene

$$\sigma(V(-1)) = \sigma(V(1)^{-1}).$$

Si $\mu \in \sigma(V(1)^{-1})$ implica $\lambda \in \sigma(V(1))$ con $\mu = \lambda^{-1}$, como
$\lambda \in \sigma(V(1)) \subset \{z :\mid z \mid > 1\}$ entonces $\mid \lambda \mid > 1$, e implica $\mid \mu \mid < 1$. Por lo tanto $r(V(1)^{-1}) = r(V(-1)) < 1$ y luego por la Proposición 2.2.2, se obtiene

$$w_0(V(-t)) = \frac{\log(r(V(-1)))}{1} < 0,$$

entonces existen $M', \delta' > 0$ tales que

$$\| V(-t) \| \leq M' e^{-\delta' t}$$

para toda $t \geq 0$ $\square$

Teorema 3.2.5. *Sean X un espacio de Hilbert y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ C_0-semigrupo, entonces i), ii) y iii) del Teorema 3.2.4 equivalen a*
iv) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y $\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \| (i\tau - A)^{-1} \| < \infty$.

Demostración. Del Teorema 3.2.3, para $\tau = 1$ y $t = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} 1 \in \rho(T(1)) &\Leftrightarrow C := \{\lambda \in \mathbb{C} : e^{\lambda} = 1\} \subset \rho(A) \;\; y \\ &\quad \sup\{\| (\lambda - A)^{-1} \| : \lambda \in \mathbb{C}\} < \infty \\ &\Leftrightarrow \{2\pi i n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \rho(A) \;\; y \\ &\quad \sup\{\| (2\pi i n - A)^{-1} \| : n \in \mathbb{Z}\} < \infty. \end{aligned}$$

Solo probaremos que $iii) \Leftrightarrow iv)$. Sea $\mu \in S_1 \subset \rho(T(1))$. Por el Teorema 3.2.4

$$C = \{\lambda \in \mathbb{C} : e^{\lambda} = \mu\} \subset \rho(A) \;\; y \;\; \sup\{\| (\lambda - A)^{-1} \| : \lambda \in C\} < \infty,$$

como $| \mu |= 1$

$$\begin{aligned} e^{\lambda} = \mu &\Leftrightarrow e^{\lambda} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow e^{\lambda - i\theta} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda - i\theta = 2\pi i n \\ &\Leftrightarrow \lambda = (2\pi n + \theta)i. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda \in i\mathbb{R}$, así $C = i\mathbb{R}$ $\square$

Teorema 3.2.6. *Sean X un espacio de Hilbert y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo. Si $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y $\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \| (i\tau - A)^{-1} \| < \infty$ entonces $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable.*

Demostración. Si $x \in X$ entonces podemos escribir $x = Px + (I - P)x$, además, si $x \in N(P)$, como P es una dicotomía, tenemos que $T(t)(I - P)$ se extiende a un C_0- grupo en $N(P)$, es decir

$$T_1 := T \mid_{(I-P)x} : N(P) \longrightarrow N(I - P) = R(P)$$

es un C_0-grupo. Así $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un grupo en $N(P)$ y por lo tanto, define un isomorfismo, y su inversa $T_1(t)^{-1}$ denotado por $T_1(-t)$ está definido como

$$T(t)^{-1} := T(-t) : N(I - P) \longrightarrow N(P).$$

Se afirma por otro lado que $N(I - P) = R(P)$. En efecto, si

$$\begin{aligned} x \in N(I - P) &\Rightarrow (I - P)x = 0 \\ &\Rightarrow x - Px = 0 \\ &\Rightarrow x = Px \end{aligned}$$

por lo tanto $x \in R(P)$. Reciprocamente, si $x \in R(P)$ entonces existe $z \in X$ tal que $x = Pz$, lo que implica $x \in N(I - P)$, así $N(I - P) = R(P)$.
Por último, mostremos que si el C_0- semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ admite una dicotomía, entonces dicho C_0- semigrupo es exponencialmente estable. Para esto

notemos que

$$
\begin{aligned}
\| T(t)(I-P)x \| &= \| T_1(t)(I-P)x \| \\
&= \| T_1(-t)T_1(t)T_1(t)(I-P)x \| \\
&= \| T_1(-t)T_1(t)Pz \| \\
&= \| T_1(t)PT_1(-t)z \| \\
&= Me^{-\delta t} \| PT_1(-t)z \| \\
&= Me^{-\delta t} \| T_1(-t)Pz \| \\
&= Me^{-\delta t} \| T_1(-t)T_1(t)(I-P)x \| \\
&\leq Me^{-\delta t} \| (I-P)x \|
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\| T(t)x \| &= \| T(t)(Px + (I-P)x) \| \\
&\leq \| T(t)Px \| + \| T(t)(I-P)x \| \\
&\leq Me^{-\delta t} \| Px \| + Me^{-\delta t} \| (I-P)x \| \\
&\leq Me^{-\delta t}(\| P \| \| x \| + \| (I-P) \| \| x \|) \\
&\leq Me^{-\delta t}(\| x \| C) \\
&= MCe^{-\delta t}(\| x \| = M_1 e^{-\delta t} \| x \| .
\end{aligned}
$$

Tomando $M_1 = M \cdot C$. $\square$

Capítulo 4

Decaimiento exponencial en una mezcla termoelástica de sólidos

En este capítulo, investigamos el comportamiento asintótico de las soluciones al problema del valor inicial de una mezcla unidimensional de sólidos termoelásticos. Bajo ciertas condiciones sobre los coeficientes, se puede obtener la estabilidad exponencial del C_0-semigrupo correspondiente. El problema que trataremos esta basado en [2].

4.1. Planteamiento del problema

Consideramos una viga compuesta por una mezcla de dos materiales que interactúan de manera continua y que ocupan el intervalo $[0, L]$. Sean u, w los desplazamientos de dos partículas en el tiempo t, donde $u = u(x, t); w = w(y, t)$, $x, y \in [0, L]$ y $t \in \mathbb{R}^+$. Supongamos que las partículas ocupan la misma posición en el momento $t = 0$, es decir, $x = y$. Adémas, la temperatura

$$\theta : \theta(x, t) : [0, L] \times [0, \infty) \to \mathbb{R},$$

es la misma en ambos constituyentes en cada punto x y tiempo t. Denotamos por ρ_i, $i = 1, 2$ la densidad de masa de cada constituyente en el tiempo $t = 0$, T y S las tensiones parciales asociadas con los constituyentes, P la fuerza difusora interna, E la densidad de entropía, Q el vector de flujo de calor y T_0 la temperatura absoluta en la configuración de referencia.

En ausencia de fuerzas externas, el sistema de ecuaciones que rigen el modelo consiste de las ecuaciones de movimiento dadas por

$$\rho_1 u_{tt} = T_x - P, \qquad \rho_2 w_{tt} = S_x + P, \tag{4.1}$$

la ecuación de energía

$$(\rho_1 + \rho_2) T_0 E_t = Q_x, \tag{4.2}$$

y las ecuaciones constitutivas

$$T = a_{11} u_x + a_{12} w_x + \beta_1 \theta, \qquad S = a_{12} u_x + a_{22} w_x + \beta_2 \theta, \tag{4.3}$$

$$P = \alpha(u - w), \quad E = -\beta_1 u_x - \beta_2 w_x + c\theta, \quad Q = K\theta_x. \tag{4.4}$$

Si sustituimos las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones de movimiento y la ecuación de energía, obtenemos el sistema de ecuaciones de campo

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} w_{xx} + \alpha(u - w) - \beta_1 \theta_x = 0 \ \text{ en } [0, L] \times [0, \infty) \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} w_{xx} - \alpha(u - w) - \beta_2 \theta_x = 0 \ \text{ en } [0, L] \times [0, \infty) \\ c\theta_t - \kappa \theta_{xx} - \beta u_{xt} - \beta_2 w_{tx} = 0 \ \text{ en } [0, L] \times [0, \infty) \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde $\kappa = K T_0^{-1} (\rho_1 + \rho_2)^{-1}$. Notemos que κ esta relacionada con la conductividad térmica, c es la capacidad térmica y los a_{ij} están relacionadas con las partes conservativas del sistema, así como α. Los coeficientes $\beta_i,\ i = 1, 2$ son los términos de acoplamiento entre la parte mecánica (conservativa) y la parte térmica (disipativa) que juegan un rol relevante en nuestro estudio. Las constantes $\rho_1, \rho_2, c, \kappa$ y α son positivas, y la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es definida positiva. Adémas, asumimos que los coeficientes de la matriz verifican

$$a_{11} > 0, \qquad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0. \tag{4.6}$$

Vamos a estudiar el problema propuesto por el sistema (4.5), con las siguientes condiciones iniciales

$$u(\cdot, 0) = u_0,\ u_t(\cdot, 0) = u_1,\ w(\cdot, 0) = w_0,\ w_t(\cdot, 0) = w_1,\ \theta(\cdot, 0) = \theta_0,\ \text{ en } (0, L). \tag{4.7}$$

para algunas funciones $u_0,\ u_1,\ w_0,\ w_1,\ \theta_0 : [0, L] \to \mathbb{R}$ y con las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0 \ \text{ en } [0, \infty), \\ u_x(0, t) = u_x(L, t), \quad w_x(0, t) = w_x(L, t), \quad \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0 \ \text{ en } [0, \infty), \end{aligned} \tag{4.8}$$

Cuando

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{\alpha(\beta_1+\beta_2)(\beta_1\rho_2-\beta_2\rho_1)}{(a_{11}\beta_2-a_{12}\beta_1)\beta_1\rho_2+(a_{12}\beta_2-a_{22}\beta_1)\beta_2\rho_1}, \tag{4.9}$$

se cumple para algunos $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una solución no amortiguada. Se muestra que el C_0-semigrupo asociado es exponencialmente estable, si y sólo si, la condición (4.9) no se cumple.

4.2. Existencia y unicidad de soluciones

En esta sección se determinará la existencia y unicidad del problema (4.5) - (4.7), con la condicion (4.9). En lo que sigue, H_0^1, H^2 denotan espacios de Sobolev (veáse Apendice B, o también [8] y [9]).

Definición 4.2.1. *Consideremos el espacio vectorial*

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L_*^2(0,L),$$

donde $L_*^2(0,L) = \{\phi \in L^2(0,L) : \int_0^L \phi(x)dx = 0\}$.

El espacio $\mathcal{H}$ con el producto interno definido como sigue,

$$\begin{aligned}\Big\langle (u,w,v,\eta,\theta),(\widetilde{u},\widetilde{w},\widetilde{v},\widetilde{\eta},\widetilde{\theta})\Big\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L (a_{11}u_x\overline{\widetilde{u_x}} + a_{12}(u_x\overline{\widetilde{w_x}} + w_x\overline{\widetilde{w_x}}) + a_{22}w_x\overline{\widetilde{w_x}})dx \\ &+ \alpha\int_0^L (u-w)(\overline{\widetilde{u}-\widetilde{w}})dx + \rho_1\int_0^L v\overline{\widetilde{v}} + \rho_2\int_0^L \eta\overline{\widetilde{\eta}}dx \\ &+ c\int_0^L \theta\overline{\widetilde{\theta}}dx,\end{aligned}$$

es un espacio de Hilbert y su correspondiente norma esta dada por

$$\begin{aligned}\| (u,w,v,\eta,\theta) \|_{\mathcal{H}}^2 = &\int_0^L (a_{11}u_x\overline{u_x} + a_{12}(u_x\overline{w_x} + w_x\overline{u_x}) + a_{22}w_x\overline{w_x})dx \\ &+ \alpha\int_0^L (u-w)\overline{(u-w)}dx + \rho_1\int_0^L v\overline{v}dx \\ &+ \rho_2\int_0^L \eta\overline{\eta}dx + c\int_0^L \theta\overline{\theta}dx.\end{aligned}$$

Ahora consideremos el espacio de Hilbert

$$V = \{\phi \in H^2(0,L) \cap L_*^2(0,L) : \phi_x \in H_0^1(0,L)\}$$

con norma $\| \phi \|_V = \| \phi_{xx} \|$ y definamos el operador lineal $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como sigue,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \frac{a_{11}}{\rho_1}(\cdot)_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_1}I & \frac{a_{12}}{\rho_1}(\cdot)_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_1}I & 0 & 0 & \frac{\beta_1}{\rho_1}(\cdot)_x \\ \frac{a_{12}}{\rho_2}(\cdot)_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_2}I & \frac{a_{22}}{\rho_2}(\cdot)_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_2}I & 0 & 0 & \frac{\beta_2}{\rho_2}(\cdot)_x \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1}{c}(\cdot)_x & \frac{\beta_2}{c}(\cdot)_x & \frac{\kappa}{c}(\cdot)_{xx} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

donde su dominio esta dado por
$D(A) = \{U = (u,w,v,\eta,\theta) \in \mathcal{H} : u,w \in H^2(0,L), v,\eta \in H_0^1(0,L), \theta \in V\}$, de modo

que el problema de valor inicial (4.5)- (4.7) se puede reescribir como el problema de Cauchy abstracto homogeneo de valor inicial

$$\frac{d}{dt}U(t) = AU(t), \qquad U(0) = U_0,$$

donde $U(t) = (u(t), w(t), v(t), \eta(t), \theta(t))'$ y $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, \theta_0)'$ (la $'$ denota la transpuesta del vector). En lo que sigue, $\|\cdot\|$ denota la norma en L^2, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ denota la norma en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ denota la norma en el espacio de operadores lineales en $\mathcal{H}$.

Teorema 4.2.1. *El operador A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones, denotado por $\{S_A(t)\}_{t\geq 0}$.*

Demostración. Notemos que $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$. Del Teorema 2.1.5 basta mostrar que A es un operador disipativo y que $0 \in \rho(A)$. Observemos que si $U \in D(A)$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle AU, A\rangle_{\mathcal{H}} = a_{11}\int_0^L v_x\overline{u_x}dx + a_{12}\int_0^L v_x\overline{w_x}dx + \alpha\int_0^L v\bar{u}dx \quad &(4.11)\\
-\alpha\int_0^L v\bar{w}dx + a_{12}\int_0^L \eta_X\overline{u_x}dx + a_{22}\int_0^L \eta_x\overline{w_x}dx \quad &(4.12)\\
-\alpha\int_0^L \eta\bar{u}dx + \alpha\int_0^L \eta\overline{w}dx \quad &(4.13)\\
+\int_0^L [(a_{11}u_{xx} - \alpha u) + (a_{12}w_{xx} + \alpha w) + \beta_1\theta_x]\bar{v}dx \quad &(4.14)\\
+\int_0^L [(a_{12}u_{xx} + \alpha u) + (a_{22}w_{xx} - \alpha w) + \beta_2\theta_x]\overline{\eta} \quad &(4.15)\\
+\int_0^L (\beta_1 v_x + \beta_2\eta_x + \kappa\theta_{xx})\overline{\theta}dx. \quad &(4.16)
\end{aligned}$$

De esto se sigue

$$Re\,\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa\int_0^L \mid \theta_x \mid^2 dx \leq 0, \tag{4.17}$$

por lo tanto, el operador A es disipativo. Dado $F = (f, g, h, p, q) \in \mathcal{H}$, se demostrará que existe un único $U = (u, w, v, \eta, \theta) \in D(A)$ tal que $AU = F$, es decir,

$$\begin{aligned}
v = f \ \text{ en } \ H_0^1(0, L) \quad &(4.18)\\
\eta = g \ \text{ en } \ H_0^1(0, L) \quad &(4.19)\\
a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - \alpha(u - w) + \beta_1\theta_x = \rho_1 h \ \text{ en } \ L^2(0, L) \quad &(4.20)\\
a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} + \alpha(u - w) + \beta_2\theta_x = \rho_2 p \ \text{ en } \ L^2(0, L) \quad &(4.21)\\
\beta_1 v_x + \beta_2\eta_x + \kappa\theta_{xx} = cq \ \text{ en } \ L^2(0, L), \quad &(4.22)
\end{aligned}$$

usando (4.18), (4.19) en (4.22) tenemos

$$\kappa\theta_{xx} = cq - \beta_1 f_x - \beta_2 g_x \text{ en } L^2(0,L). \tag{4.23}$$

Así, existe una única $\theta \in V$ que satisface (4.23). De (4.20) y (4.21) se obtiene

$$a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - \alpha(u-w) = \rho_1 h - \beta_1\theta_x := \tilde{f} \text{ en } L^2(0,L) \tag{4.24}$$

$$a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} + \alpha(u-w) = \rho_2 p - \beta_2\theta_x := \tilde{g} \text{ en } L^2(0,L). \tag{4.25}$$

Sea $B : H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineal dada por

$$\begin{aligned} B((u,w),(\tilde{u},\tilde{w})) = &\int_0^L (a_{11}u_x\overline{\tilde{u}} + a_{12}(u_x\overline{\tilde{w}} + w_x\overline{\tilde{u}}) + a_{22}w_x\overline{\tilde{w}_x})dx \\ &+ \alpha\int_0^L (u-w)\overline{(\tilde{u}-\tilde{w})}dx, \end{aligned}$$

notemos que B es continua y coercitiva. Luego, por el Teorema 1.1.3, dado $(-\tilde{f}, -\tilde{g}) \in L^2(0,L) \times L^2(0,L)$ existe una única función vectorial $(u,w) \in H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$ tal que

$$B((u,w),(\varphi,\psi)) = -\int_0^L \tilde{f}\overline{\varphi}dx - \int_0^L \tilde{g}\overline{\psi}dx$$

para toda $(\varphi,\psi) \in H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$. Así,

$$a_{11}\int_0^L u_x\overline{\varphi_x}dx + a_{12}\int_0^L w_x\overline{\varphi_x}dx + \alpha\int_0^L u\overline{\varphi}dx - \alpha\int_0^L w\overline{\varphi}dx = -\int_0^L \tilde{f}\overline{\varphi}dx \tag{4.26}$$

$$a_{12}\int_0^L u_x\overline{\psi_x}dx + a_{22}\int_0^L w_x\overline{\psi_x}dx - \alpha\int_0^L u\overline{\psi}dx + \alpha\int_0^L w\overline{\psi}dx = -\int_0^L \tilde{g}\overline{\psi}dx, \tag{4.27}$$

para toda $\varphi, \psi \in H_0^1(0,L)$; además, se tiene que

$$\| u_x \| + \| w_x \| \leq C(\| \tilde{f} \| + \| \tilde{g} \|),$$

para una constante positiva C. Por lo tanto, se sigue que $a_{11}u + a_{12}w$ y $a_{12}u + a_{22}w$ pertenecen a $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$ y dado que

$$u = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{11}u + a_{12}w) - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{12}u + a_{22}w)$$

y

$$w = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{11}u + a_{12}w) + \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{12}u + a_{22}w),$$

deducimos que $u, w \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$ y satisfacen (4.24) y (4.25). Se puede ver que $\| U \|_{\mathcal{H}} \leq C \| F \|_{\mathcal{H}}$, para una constante positiva C, de esto, concluimos que $0 \in \rho(A)$. $\square$

4.3. Estabilidad exponencial

Ahora probaremos la estabilidad exponencial cuando (4.9) no se satisface, haciendo uso del Teorema 3.2.6.

Lema 4.3.1. *Supongamos que no se satisface* (4.9). *Entonces*

$$i\mathbb{R} = \{i\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \rho(A).$$

Demostración. Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $i\lambda \in \sigma(A)$. Dado que A es un operador compacto, $i\lambda$ es un valor propio de A. Así, existe $U = (u, w, v, \eta, \theta) \in D(A)$, $U \neq 0$ tal que $i\lambda U - AU = 0$, lo cual equivale

$$i\lambda u - v = 0 \tag{4.28}$$

$$i\lambda w - \eta = 0 \tag{4.29}$$

$$i\lambda\rho_1 v - (a_{11}u_{xx} - \alpha u) - (a_{12}w_{xx} + \alpha w) - \beta_1\theta_x = 0 \tag{4.30}$$

$$i\lambda\rho_2 \eta - (a_{12}u_{xx} + \alpha u) - (a_{22}w_{xx} - \alpha w) - \beta_2\theta_x = 0 \tag{4.31}$$

$$i\lambda c\theta - \beta_1 v_x - \beta_2\eta_x - k\theta_{xx} = 0. \tag{4.32}$$

De (4.17), se sigue

$$Re < (i\lambda I - A)U, U >= k\int_0^L \mid \theta \mid^2 dx = 0, \tag{4.33}$$

por lo tanto $\theta = 0$. Luego de (4.32) se obtiene

$$\beta_1 v_x + \beta_2\eta_x = 0 \in L^2(0, L),$$

Entonces $\beta_1 v + \beta_2\eta = 0$ y de (4.5) y (4.6) se obtiene que $\beta_1 u + \beta_2 w = 0$. Luego combinando las ecuaciones (4.5), (4.6), (4.7) y (4.8)

$$-\rho_1\lambda^2 u - (a_{11}u_{xx} - \alpha u) - (a_{12}w_{xx} + \alpha w) = 0, \tag{4.34}$$

$$-\rho_2\lambda^2 w - (a_{12}u_{xx} + \alpha u) - (a_{22}w_{xx} - \alpha w) = 0, \tag{4.35}$$

Si $\beta_1\beta_2 \neq 0$ sustituyendo $w = -\frac{\beta_1}{\beta_2}u$ en (4.34) y (4.35) tenemos

$$-(a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1)u_{xx} = \lambda^2\beta_2\rho_1 u - \alpha(\beta_1 + \beta_2)u, \tag{4.36}$$

$$(a_{12}\beta_2 - a_{22}\beta_1)u_{xx} = \lambda^2\beta_1\rho_2 u - \alpha(\beta_1 + \beta_2)u. \tag{4.37}$$

Aplicando el método de separación de variables, se tiene

$$\alpha(\beta_1 + \beta_2) = \lambda^2\beta_2\rho_1 - (a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1)\mu^2,$$
$$\alpha(\beta_1 + \beta_2) = \lambda^2\beta_1\rho_2 + (a_{12}\beta_2 - a_{22}\beta_1)\mu^2,$$

donde $\mu^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces se sigue que existe una única solución, si y sólo si,

$$\beta^2\rho_1(a_{12}\beta_2 - a_{22}\beta_1) + \beta_1\rho_2(a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1) \neq 0.$$

En este caso

$$\mu^2 = \frac{\alpha(\beta_1+\beta_2)(\beta_1\rho_2-\beta_2\rho_1)}{\beta^2\rho_1(a_{12}\beta_2-a_{22}\beta_1)+\beta_1\rho_2(a_{11}\beta_2-a_{12}\beta_1)},$$

esto contradice la hipótesis. Por lo tanto $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

$\square$

Lema 4.3.2. *Supongamos* (4.9) *no se satisface. Entonces*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \| (i\lambda I - A)^{-1} \| < \infty.$$

Demostración. Notemos que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $i\lambda \in \rho(A)$ (Lema 4.3.1). Luego, el operador resolvente $(i\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, así

$$\| (i\lambda I - A)^{-1}x \| \leq M \| x \| = M_x$$

para cada $x \in X$. Por el Teorema 2.1.1, para la familia $\{(i\lambda I - A)^{-1}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ existe $M > 0$ tal que

$$\| (i\lambda I - A)^{-1} \| < M, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

por lo tanto,

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \| (i\lambda I - A) \|^{-1} < M.$$

$\square$

Teorema 4.3.1. *Supongamos que* (4.9) *no se cumple. Entonces el C_0-semigrupo $\{S(A)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable.*

Demostración. La prueba se sigue de los Lemas 4.3.1 y 4.3.2, y del Teorema 3.2.6.

$\square$

Conclusión

Los Teoremas de Jan Prüss son una técnica alternativa a la teoría clásica de resolución de ecuaciones diferenciales, que permite conocer el comportamiento de las soluciones, sin tener la forma explícita de esta. La prueba de los teoremas nos muestra que existe una estrecha relación entre el espectro de $T(1)$, $\rho(A)$ y la existencia de una proyección dicotómica. Actualmente, esta teoría se utiliza en la investigación de fenómenos físicos que pueden ser modelados o reducidos a la forma (1).

En el capítulo 4, se mostró mediante un ejemplo la eficiencia del Teorema de Jan Prüss. Esto motiva a aplicar esta teoría en futuras investigaciones.

Apéndice A

A.1. Integral de Bochner

La integral de Bochner es llamada así por Salomon Bochner, esta integral es una extensión de la definición de integral de Lebesgue a las funciones que toman valores en un espacio de Banach X, es definida como el límite de integrales de funciones simples. Esta integral fue introducida en 1933. Si el lector desea saber más información acerca de este tema, sugerimos ver [3]

Definición A.1.1. *Sean $f : J \to X$ donde J es un intervalo y X es un espacio de Banach, entonces f es* ***fuertemente Lebesgue medible*** *si existe una sucesión de funciones simples $f_n : J \to X$ que converge a f en casi todo punto.*

Definición A.1.2 (Integral de Bochner)**.** *Sea $f : J \to X$ como en la definición anterior, entonces f es* ***Bochner medible*** *o* ***Bochner integrable*** *si es fuertemente medible y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_J \| f_n - f \| = 0$$

En este caso se define la integral de f como

$$\int_J f = \lim_{n\to\infty} \int_J f_n d\mu$$

Muchas propiedades de integral de Lebesgue son aún válidas para la integral de Bochner.

Teorema A.1.1 (Bochner)**.** *Una función $f : J \to X$ es Bochner integrable, si y sólo si, f , $\| f \|$ son medibles. Si f es Bochner integrable , se tiene*

$$\| \int_J f(t)dt \| \leq \int_J \| f(t) \| dt$$

Demostración. Veáse [[3], Teorema 1.1.4]. □

Proposición A.1.1. *Sea A un operador lineal cerrado en X, y sea $f : J \to X$ una función Bochner integrable . Suponga que $f(t) \in D(A)$ para todo $t \in J$ y $A \circ f : t \to A(f(t))$ es Bochner integrable. Entonces $\int_J f(t)dt \in D(A)$ y*

$$A \int_J f(t)dt = \int_J A(f(t))dt$$

Demostración. Véase [[3], Proposición 1.1.7]. □

Teorema A.1.2 (Teorema de convergencia dominada). *Sea $f_n : J \to X$ una sucesión de de funciones que convergen a $f : J \to X$ en casi todo punto de J. Si existe una función $g : J \to \mathbb{R}$ lebesgue integrable tal que*

$$\| f_n(t) \| \leq | g(t) |$$

para todo n natural. Entonces f es Bochner integrable y

$$\int_J f(t)dt = \lim_{n \to \infty} \int_J f_n(t)dt.$$

Además,

$$\int_J \| f(t) - f_n(t) \| dt \to 0,$$

cuando $n \to \infty$.

Demostración. Se puede consultar en [[3], Teorema 1.1.8]. □

Teorema A.1.3 (Teorema de Fubini). *Sea $J = I_1 \times I_2$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, sea $f : J \to X$ medible suponga que*

$$\int_{I_1} \int_{I_2} \| f(s,t) \| dtds < \infty.$$

Entonces f es Bochner integrable y las integrales iteradas

$$\int_{I_1} \int_{I_2} f(s,t)dsdt, \quad \int_{I_2} \int_{I_1} f(s,t)dtds$$

existen, son iguales y coinciden con la integral $\int_J f(s,t)(s,t)$.

Demostración. Véase [[3], Teorema 1.1.9]. □

A.2. Espacios $L^p(X)$

Sean X un espacio de Banach y J un intervalo. Denotamos por $\mathcal{L}^p(J,X)$ el espacio de todas las funciones Bochner integrables $f : J \to X$ y definimos su norma por

$$\| f \| p := \left(\int_I \| f(t) \|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

para $p \in [1, \infty)$.

De forma habitual, $L^p(J, X)$ denotará el espacio cociente $\mathcal{L}^p(J, X) \diagup \sim$ donde la relación esta dada por las funciones que difieren en medida cero, con la misma norma de $\mathcal{L}^p(J, X)$.

Sea $\mathcal{L}^\infty(J, X)$ el espacio de funciones medibles $f : J \to X$ tal que

$$\| f \|_\infty := ess\, sup_{t \in I} \| f(t) \| < \infty.$$

El espacio $L^\infty(J, X) := \mathcal{L}^\infty(J, X) \diagup \sim$, con la relación anterior.

Teorema A.2.1. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $L^p(J, X)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Véase poner $\square$

Apéndice B

B.1. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev son subespacios de L^p, de funciones reales o complejas integrables en el sentido de Lebesgue y **débilmente diferenciales**, introducidas por el físico y matemático Sergéi Sóbolev. Son espacios importantes por estar vinculados a diversos problemas de ecuaciones diferenciales parciales y en otras áreas del análisis matemático. En este apéndice daremos las definiciones y nociones que utilizamos en este trabajo.

B.1.1. Espacios de Sobolev unidimensional

En adelante $I \subset \mathbb{R}$ denotará un intervalo abierto (no necesariamente acotado). Si el lector desea encontrar más información de este tema, puede consultar la bibliografía [[8], pág. 201]

Definición B.1.1. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el* ***espacio de Sobolev*** *$W^{1,p}(I)$ como sigue*

$$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \ \textit{tal que} \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I)\}$$

Para $p = 2$ expresamos $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.

Para una función $u \in W^{1,p}(I)$ denotamos $u' = g$ y decimos que g es una función **débilmente diferenciable** si satisface la definición anterior. La función φ es llamada **función test**.

Lema B.1.1. *(Linealidad débil) Sean $u, v \in W^{1,p}(I)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$(u + cv)' = u' + cv'.$$

El espacio $W^{1,p}(I)$ esta dotado con la norma

$$\| u \|_{W^{1,p}(I)} = \| u \|_{L^p} + \| u' \|_{L^p} . \tag{B.1}$$

Cuando $1 < p < \infty$ también puede ser dotada con la norma equivalente

$$\| u \|_{W^{1,p}(I)} = (\| u \|_{L^P}^p + \| u' \|_{L^P}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

El producto escalar en H^1 es

$$< u, v >_{H^1} = < u, v >_{L^2} + < u', v' >_{L^2} = \int_I (uv + u'v')$$

y su norma esta dado como sigue

$$\| u \|_{H^1} = (< u, u >_{L^2} + < u', u' >_{L^2})^{\frac{1}{2}} = (\| u \|_{L^2}^2 + \| u' \|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposición B.1.1. *El espacio $W^{1,p}(I)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. Es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. Además el espacio $H^1(I)$ es Hilbert separable.*

Demostración: Puede verse en [[8], pág. 203]

Proposición B.1.2. *Sea $f \in L^1_{loc}(I)$ tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1_c(I). \tag{B.2}$$

Entonces existe una constante C tal que $f = C$ en casi todas partes en I.

Demostración : Véase [[8], pág. 205].

Proposición B.1.3. *Sea $u \in L^p$ con $1 < p \leq \infty$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$u \in W^{1,p}(I)$,*
2. *Existe una constante C tal que*

$$| \int_I u\varphi' | \leq C \| \varphi \|_{L^p(I)} \qquad \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Además, podemos tomar $C = \| u' \|_{L^p(I)}$.

Demostración: Puede verse en [[8], pág. 206].

Proposición B.1.4. *Una función $u \in L^\infty$ pertenece a $W^{1,\infty}(I)$, si y sólo si, existe una constante C tal que*

$$| u(x) - u(y) | \leq C \, | x - y | \qquad \forall \; x, y \in I.$$

Demostración: Puede consultarse en [[8], pág. 207].

B.1.2. Distribución

Una distribución es una generalización del concepto de derivada de funciones localmente integrables. Esta teoría surge al querer derivar funciones que no son derivables.
Comenzaremos esta sección con nociones que utilizaremos más adelante. Si el lector esta interesado en este tema véase [[10], página 139]

Definición B.1.2. *El término **multi-índice** denota una $n-$ tupla ordenada*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

de números enteros no negativos α_i. A cada multi-índice α se le asocia un operador diferencial

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

cuyo orden es

$$\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Si $\alpha = 0$ entonces $D^\alpha f = f$.

El **soporte** de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ es la cerradura del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, definimos a $\mathcal{D}_k$ como sigue

$$\{f \in C^\infty(K) : x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \subset K.$$

Daremos las definiciones para el caso unidimensional $\mathbb{R}$. Sea f una función localmente integrable compleja, es decir, es medible y $\int_K \mid f \mid < \infty$ para cada compacto $K \subset \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ el espacio de todas las funciones $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ cuyo soporte es compacto. Luego $\int f\phi$ existe para cada función f localmente integrable y cada $\phi \in \mathcal{D}$. Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int f'\phi = -\int f\phi', \qquad \phi \in \mathcal{D}. \tag{B.3}$$

Si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ luego

$$\int f^{(k)}\phi = (-1)^K \int f\phi^{(k)}, \qquad \phi \in \mathcal{D},\ k = 1, 2, 3, ... \tag{B.4}$$

De (1) y (2) se obtiene integrando por partes y teniendo en cuenta que el soporte de ϕ es compacto. Las integrales $-\int f\phi'$ y $(-1)^K \int f\phi^{(k)}$ están bien definidas sea f diferenciable o no, y definen funciones lineales en $\mathcal{D}$.

A cada f se le puede asignar una $k-$ésima derivada $f^{(k)}$ en la función lineal de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}$ que manda ϕ a $(-1)^k \int f\phi^{(k)}$. Notemos $f \mapsto \int f\phi$

Las funciones anteriores que son continuas bajo ciertas topologías, serán las distribuciones.

A cada distribución Δ se le asigna su derivada Δ' por la fórmula $\Delta'(\phi) = -\Delta'(\phi)$ con $\phi \in \mathcal{D}$. Estas definiciones se extienden para n variables.

$C^\infty(\Omega)$ en este apéndice denotará el espacio de funciones C^∞ de valores complejos sobre Ω , cuya norma esta asociada a la familia de semi normas
$\{p_N : N \in \mathbb{N}\}$ dada por

$$p_N = \text{máx}\{| D^\alpha f(x) |: x \in K_N, | \alpha |\leq N\},$$

para toda $f \in C^\infty(\Omega)$, donde K_N es una sucesión de compactos en Ω.

Definición B.1.3. *Decimos que un espacio vectorial topológico X es de* ***Frechet*** *si su topología es localmente convexa y esta inducida por una métrica invariante y completa.*

Consideremos el conjunto abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. En [[10], pág 31] se prueba que para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$, el espacio $\mathcal{D}_k$ definido anteriormente es de Frechet

Definición B.1.4. *La unión de estos espacios $\mathcal{D}_K$ sobre todos los compactos $K \subset \Omega$, es el espacio de* ***funciones de prueba*** *$\mathcal{D}(\Omega)$.*

$\mathcal{D}(\Omega)$ es un espacio vectorial donde la suma y la multiplicación de escalares es de funciones complejas.

B.1.3. Espacios de Sobolev N dimensional.

En lo sigue tomaremos a Ω como un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$.

Definición B.1.5. *El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ esta definido como sigue*

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, ..., N\},$$

donde $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ es tomado en el sentido ***distributivo***. *El producto escalar en este espacio esta dado por*

$$< u, v >:= \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx.$$

La correspondiente norma de $H^1(\Omega)$ es

$$\| v \|_{H^1(\Omega)} := \left[\int_\Omega \left(v^2 + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

De la definición de **derivada distributiva**, se tiene las siguientes equivalencias

1. $v \in H^1(\Omega)$;
2. $v \in L^2(\Omega)$ y existen $g_1, g_2, ..., g_N \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega g_i \varphi dx.$$

entonces, por definición, $\frac{\partial v}{\partial x_i} = g_i$, en el sentido distributivo.

Extenderemos la definición de $L^2(\Omega)$ al espacio $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición B.1.6. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ esta definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ v \in L^p(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, ..., N \right\},$$

donde $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ es tomado en el sentido distributivo. El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ esta dotado con la norma

$$\| v \|_{W^{1,p}(\Omega)} \left[\int_\Omega \left(| v |^p + \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \right) dx \right]^{\frac{1}{p}} \qquad \textit{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\| v \|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max \left\{ \| v \|_\infty ; \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_\infty ; \cdots ; \left\| \frac{\partial v}{\partial x_N} \right\|_\infty \right\} \qquad \textit{para } p = \infty.$$

Cuando $p = 2$, el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ lo denotaremos por $H^1(\Omega)$, reiterando que es un espacio Hilbert.

Nuevamente se extiende la notación cuando consideramos derivadas de orden superior.

Tomemos m un número entero no negativo y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ esta definido por

$$W^{m,p}(\Omega) := \{ v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ para toda } \alpha \text{ con } | \alpha | \leq m \},$$

donde D^α es la **derivada distributiva** de v de símbolo α. Notemos que $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$,

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

con $| \alpha | = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$. El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ esta dotado con la norma

$$\| v \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| m} \int_\Omega | D^\alpha v |^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\| v \|_{W^{m,\infty}} (\Omega) = \max_{0 \leq |\alpha| m} \| D^\alpha v \|_\infty \qquad \text{para } p = \infty.$$

Cuando $p = 2$, fijaremos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.
El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ puede ser dotado con la norma equivalente

$$\| v \|_{L^p(\omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

Cuando $p = 2$, se utiliza con más frecuencia la norma de la Definición B.1.6, pues se obtiene un espacio de Hilbert (no se obtiene con la norma anterior).
$\mathcal{D}(\Omega)$ es subespacio de $W^{m,p}(\Omega)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Por lo tanto podemos considerar la cerradura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

Definición B.1.7. *Definimos*

- $H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ *en* $H^1(\Omega)$,
- $W_0^{1,p} := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ *en* $W^{1,p}(\Omega)$,
- $W_0^{m,p} := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ *en* $W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema B.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Para algún $m \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. Cuando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración: Véase [[9], pág. 152].

Bibliografía

[1] Jan Prüss, On the spectrum of C_0 - semigroups, (1984), volumen 284 number 2, pag. 247-255.

[2] Alves, M. S., Rivera, J. M., and Quintanilla, R. (2009). Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids. International journal of solids and structures, 46(7-8), 1659-1666.

[3] Arendt, W. (1987). Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Israel Journal of Mathematics, 59(3), 327-352.

[4] Van Neerven, J. (2012). The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators (Vol. 88). Birkhäuser.

[5] Engel, K. J., and Nagel, R. (2001). One-parameter semigroups for linear evolution equations: Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel with contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli, and R. Schnaubel Graduate Text in Mathematics 194, Springer-Verlag New York, . Springer.

[6] Prüss, J. (2013). Evolutionary integral equations and applications (Vol. 87). Birkhäuser.

[7] Pazy, A. (2012). Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations (Vol. 44). Springer Science Business Media.

[8] Brezis, H. (2010). Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science and Business Media.

[9] Attouch, H., Buttazzo, G., Michaille, G. (2014). Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[10] Rudin, W. (1979). Análisis funcional. Reverté.

[11] Peano, G. (1888). Intégration par séries des équations différentielles linéaires. Mathematische Annalen, 32(3), 450-456.

[12] Conway, J. B. (2013). A course in functional analysis (Vol. 96). Springer Science and Business Media.

[13] Marsden, J. E. Análisis básico de variable compleja/por Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman.

[14] Reed, M. (2012). Methods of modern mathematical physics: Functional analysis. Elsevier.