



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS



FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
CAMPUS I

El problema espectral de Dirac
en las Grasmanianas Unitarias $Gr_{n;2}$

T E S I S

para obtener el título de:

Maestra en Ciencias Físicas

Presenta:

Ariana Ivonne García López

Director de tesis:

Dr. Idrish Huet Hernández

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

Mayo 2019



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
03 de abril de 2019
Oficio No. FCFM/0167/19

Dr. Idrish Huet Hernández
Presidente y Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"EL PROBLEMA ESPECTRAL DE DIRAC EN LAS GRASMANIANAS UNITARIAS $Gr_{n,2}$ "

Ha sido aceptada para sustentar el Examen de Grado de Maestra en Ciencias Físicas de la Lic. Ariana Ivonne García López con matrícula escolar: X131003.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

"Por la conciencia de la necesidad de servir"



Dr. Sendic Estrada Jiménez
Director

DIRECCIÓN
FCFM

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
SEJ /jmag

Porque la verdad es eterna y divina,
y ninguna fase en el desarrollo de la verdad,
por pequeña que sea la región englobada,
puede pasar sin dejar rastro;
la verdad permanece, aunque la prenda en la que
los pobres mortales la visten pueda caer en polvo.

Hermann Grassmann

Dedicatoria

A Dios

Por darme vida y por permitirme alcanzar mis metas a pesar de las adversidades, poniendo en mi camino a valiosas personas que me alentaron siempre a seguir adelante.

A mi esposo Alfredo y a mi hija Jade

Con todo mi amor y cariño a los principales motores de mi vida, gracias por motivarme y apoyarme en todo momento. Estuvieron conmigo en los desvelos y no permitieron que me rindiera, gracias por creer en mí.

A mis padres

Por su amor y cariño, Dios les bendiga siempre.

Agradecimientos

A la familia González Domínguez

Por el apoyo incondicional, por motivarme a continuar mis estudios, por ser mi familia. Nunca me sentí sola teniéndolos a ustedes, gracias por la confianza y cariño. Esta tesis no hubiera sido posible sin su apoyo, muchas gracias.

Al Dr. Idrish

Gracias por el tiempo dedicado en la realización de esta tesis y especialmente por compartir sus conocimientos conmigo, ha contribuido a mi formación académica en gran manera. Trabajar con usted fue por demás interesante y una gran experiencia. Es un excelente investigador, siempre es un placer trabajar con usted.

Al Dr. Pavel y Dr. Aldo

Por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis y por las excelentes sugerencias.

A CONACYT

Por la beca otorgada durante todo el período de mis estudios de Maestría.

A la UNACH

Por brindarme lo necesario para mi formación académica.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Preliminares	3
2. Operadores diferenciales sobre $\mathbb{G}r_{n;2}$	6
2.1. Operador de acciones derechas	6
2.1.1. Acciones derechas tangentes	7
2.1.2. Acciones derechas normales	8
2.1.3. Álgebra de Lie	8
2.2. Operador de acciones izquierdas	9
2.3. Laplaciano	10
3. Espinores	11
3.1. Existencia del haz de espín ^c	12
3.2. Campo espinorial	12
3.3. Operador de Dirac	13
3.4. Estructura del haz de espín	14
3.4.1. 1-formas	15
3.4.2. 2-formas	16
4. Espectro del operador de Dirac	18
4.1. Método de conteo de cajas	20

4.1.1. Caso particular $\mathbb{G}r_{4;2}$	20
4.1.2. Espectro del operador de Dirac cuadrático en $\mathbb{G}r_{4;2}$	24
4.1.3. Espectro del operador de Dirac	27
5. Conclusiones	29
5.1. Aplicaciones	29
5.2. Algunas preguntas abiertas	30
A. Operador de acción derecha tangente	32
B. Aniquilación de $f(\zeta, \bar{\zeta})$	34
C. Identidades de Fierz	36
D. Laplaciano de $SU(n)$	38
E. Cuadrado del operador de Dirac	40
F. 1-formas exactas	42
G. Expansión de las 1-formas	44
H. Espectro del operador \mathcal{D}^2 sobre funciones	47

Introducción

“Aún llegará ese momento...
cuando las ideas ahora adormecidas darán fruto”.
—*Hermann Grassmann, Ausdehnungslehre*

Una de las obras matemáticas más importantes de Hermann Günther Grassmann (1809-1877) data de 1844 y se conoce con el título abreviado *Ausdehnungslehre* (Teoría de la Extensión), donde aparecen conceptos básicos del cálculo vectorial, como producto interno, producto externo, etc. Con este trabajo Grassmann demostró que para la geometría (expresada de forma algebraica como él proponía) el número de dimensiones espaciales de interés no es tres sino que es ilimitado, desarrolló la idea de un álgebra en el que los símbolos que representan entidades geométricas como puntos, líneas y planos, se manipulan utilizando ciertas reglas; además, representó subespacios de un espacio por coordenadas que conducen al mapeo de puntos de una variedad algebraica (que hoy en día conocemos como Grasmaniana) [20]. La contribución de Grassmann pasó inadvertida hasta su aplicación en 1915, en la Teoría General de la Relatividad y sólo hasta fechas muy recientes, su trabajo se ha apreciado plenamente [9].

Las Grasmanianas $\mathbb{G}r_k(V)$, nombradas así en honor a Grassmann (pues él introdujo el concepto en general), se definen como el conjunto de sub-espacios vectoriales de dimensión k de V , con V espacio vectorial. Dicho de otra forma es el espacio que parametriza todos los sub-espacios vectoriales de dimensión k del espacio vectorial V de dimensión n . Por ejemplo, la Grasmaniana $\mathbb{G}r_1(V)$ es el espacio de líneas que atraviesan el origen de V , de manera que define el mismo espacio que el espacio proyectivo de $n - 1$ dimensiones; la Grasmaniana $\mathbb{G}r_2(V)$ es el espacio de todos los planos que atraviesan el origen de V .

En esta tesis estamos interesados en las Grasmanianas complejas ($V = \mathbb{C}^n$), las cuales hemos denotado como $\mathbb{G}r_{n;k}$. Estas Grasmanianas son generalizaciones de los espacios complejos proyectivos y comparten características con ellos tales como compacidad y conexidad. En particular nos interesa estudiar la familia $\mathbb{G}r_{n;2}$ por su importancia en

Física; ejemplo de ello es que $\mathbb{G}r_{4;2}$ provee la forma compacta del espacio-tiempo $\mathbb{R}^{s,t}$ en 4 dimensiones [10], además fue demostrado por B. P. Dolan y C. Nash en [8] que los modos cero del operador de Dirac en $\mathbb{G}r_{5;2}$ reproducen las representaciones y cargas correctas del sector fermiónico del modelo estándar, un resultado un tanto enigmático en cuanto a su significancia física. Se tiene conocimiento de una formulación del efecto Hall cuántico en $\mathbb{G}r_{n;2}$ [1] y las versiones difusas de estas Grasmanianas complejas denotadas como $\mathbb{G}r_{n;2}^F$ ha sido estudiada también, en [17] se calculan las eigenfunciones y el espectro del Laplaciano en estos espacios.

El objetivo principal de esta tesis es hallar una expresión para el operador de Laplace-Beltrami (referido aquí simplemente como el Laplaciano) Δ y el operador de Dirac \mathcal{D} en $\mathbb{G}r_{n;2}$, resolver el problema espectral del operador de Dirac para el caso particular de la Grasmaniana $\mathbb{G}r_{4;2}$ usando teoría de representaciones y hallar sus eigenespinores; en concreto mostramos cómo calcular el espectro en general e ilustramos la validez de nuestro método encontrando el espectro que corresponde los eigenespinores que tienen carácter de funciones y 1-formas definidas en $\mathbb{G}r_{4;2}$ (este carácter proviene de una identificación señalada ej. en [13] entre espinores y formas diferenciales cargadas). Hay que destacar que resolver el problema espectral de Dirac en $\mathbb{G}r_{4;2}$ establece las bases y conocimientos necesarios para extender el resultado a uno más general en $\mathbb{G}r_{n;2}$. Los resultados de esta tesis pueden ser aplicados en diversos problemas físicos en los que intervenga el operador de Dirac en estos espacios; por ejemplo sabemos que el operador de Dirac es de suma importancia para entender a los fermiones, y supongamos que estamos interesados en los estados de energía de fermiones que se mueven sobre la superficie de $\mathbb{G}r_{n;2}$, la ecuación que describe la evolución temporal de estas partículas es

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

donde Ψ es la función de onda espinorial que representa a los fermiones, \hbar es la constante reducida de Planck y la energía del sistema o Hamiltoniano en el caso no relativista es, con $m = \frac{1}{2}$, $\hat{H} = -\mathcal{D}^2$ (pues como veremos en este trabajo \mathcal{D}^2 es el Laplaciano más una contribución de un campo efectivo de origen topológico que depende únicamente del espacio donde se encuentra \mathcal{D} , es decir este hamiltoniano describe la dinámica de un fermión de masa $\frac{1}{2}$ en el espacio tiempo $\mathbb{G}r_{n;2} \times \mathbb{R}$ sujetos a un “campo externo” proporcional a la curvatura escalar de Ricci, que es constante en nuestro caso) y el espectro buscado son los eigenvalores de \mathcal{D}^2 . Por otra parte conocer el espectro de energía de los fermiones en cierto espacio M es indispensable para el estudio de problemas de muchos cuerpos, por ejemplo el gas de fermiones no interactuante en M o el efecto Hall cuántico, donde se han estudiado generalizaciones de las funciones de onda de Laughlin partiendo de ideas similares [7]. Una aplicación reciente de las Grasmanianas es en problemas de eficiencia en computación cuántica [24].

Esta tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera:

- **Capítulo 1** En este capítulo se encuentra la introducción de la tesis, donde se da una síntesis del trabajo de Hermann Grassmann que llevó al concepto de la Grasmaniana, se define qué son las Grasmanianas y se explica el objetivo de la tesis. Además, se incluye la sección de preliminares donde se describe a las Grasmanianas Unitarias $\mathbb{G}r_{n;2}$ como un espacio coset (cociente) e introducimos las coordenadas proyectivas de Plücker para hacer cálculos en estos espacios.
- **Capítulo 2** Se definen los operadores de acción derecha en $\mathbb{G}r_{n;2}$ y se calcula el Álgebra de Lie de estos operadores. Los operadores de acción izquierda serán útiles únicamente para calcular de una manera más sencilla el Laplaciano de $SU(n)$, el cual conviene separarlo en términos que incluyen las acciones derechas tangentes y en términos que incluyen las acciones derechas normales, esto es debido a que el Laplaciano en $\mathbb{G}r_{n;2}$ está conformado sólo por las acciones derechas tangentes.
- **Capítulo 3** Ya que el principal objetivo de esta tesis es calcular el espectro de las funciones y 1-formas para el caso particular de la Grasmaniana $\mathbb{G}r_{4;2}$, lo cual servirá para sentar las bases para su generalización a $\mathbb{G}r_{n;2}$, en este capítulo se encuentran expresiones para las funciones y 1-formas en estos espacios usando técnicas de teoría de representaciones y se describe brevemente la construcción de las 2-formas; además, se define el operador de Dirac en $\mathbb{G}r_{n;2}$.
- **Capítulo 4** Se establece un método para calcular el espectro de las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{4;2}$, el cual consiste principalmente en escribir el Laplaciano $\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}}$ en términos de operadores que cuenten las cajas de los diagramas de Young (estos diagramas, como veremos en esta tesis, representan a las funciones y 1-formas de $\mathbb{G}r_{4;2}$); además, en este capítulo calculamos el espectro de las funciones y 1-formas.
- **Capítulo 5** Se dan las conclusiones de esta tesis.
- **Apéndices** En los Apéndices se detallan los cálculos citados en la tesis.

1.1. Preliminares

Las Grasmanianas complejas son generalizaciones de los espacios complejos proyectivos, que denotamos como $\mathbb{G}r_{n;k}$. Entendemos que $\mathbb{G}r_{n;k}$ define un conjunto de subespacios vectoriales de dimensión k de \mathbb{C}^n . Para nuestro propósito concebimos a las

Grasmanianas como un espacio cociente $\mathcal{M} = G/H$, donde G es un grupo de Lie compacto y simple y H es un subgrupo cerrado de G compacto y semisimple, con base en esto las Grasmanianas Unitarias $\mathbb{G}r_{n;2}$ se pueden expresar como

$$\mathbb{G}r_{n;2} = \frac{SU(n)}{S(U(2) \times U(n-2))}, \quad (1.1)$$

donde hemos factorizado la fase común $U(1)$. La dimensión real de $\mathbb{G}r_{n;2}$ es

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{G}r_{n;2}) = (n^2 - 1) - [4 + (n-2)^2 - 1] = 4n - 8, \quad n \geq 2$$

y su dimensión compleja es

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{G}r_{n;2}) = 2(n-2) = 2n - 4.$$

Estas Grasmanianas están definidas como el espacio cociente de las clases de equivalencia $u \sim u' = uh$ con $h \in S(U(2) \times U(n-2))$ y $u \in SU(n)$, considerando a u en la representación fundamental:

$$u = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n^1 & \cdots & \cdots & u_n^n \end{pmatrix} = [u_\beta^\alpha], \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

y el encaje del subgrupo $S(U(2) \times U(n-2))$ de la siguiente forma:

$$h \in S(U(2) \times U(n-2)) \hookrightarrow \left(\begin{array}{c|c} SU(2) & 0 \\ \hline 0 & SU(n-2) \end{array} \right). \quad (1.3)$$

En este contexto la multiplicación de matrices es $(AB)_\beta^\alpha = A_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha$ y se mantienen las siguientes identidades como ligaduras:

$$\bar{u}_\beta^\gamma u_\gamma^\alpha = \bar{u}_\gamma^\alpha u_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha, \quad (1.4)$$

donde \bar{u} representa el conjugado hermitiano, esto es, $\bar{u}_\beta^\alpha = (u_\alpha^\beta)^*$, donde se entiende que $*$ representa conjugación compleja.

El Álgebra de Lie de $SU(n)$ está conformada por matrices hermitianas y de traza cero. Estas matrices son las matrices de Gell-Mann, las cuales satisfacen el Álgebra de Lie:

$$\left[\left(\frac{\lambda_a}{2} \right), \left(\frac{\lambda_b}{2} \right) \right] = i f_{abc} \left(\frac{\lambda_c}{2} \right), \quad (1.5)$$

donde f_{abc} son constantes de estructura reales.

Ahora vamos a introducir coordenadas de Plücker para $\mathbb{G}r_{n;2}$. Primero supongamos que $W \subset \mathbb{C}^n$ sea un subespacio lineal complejo k -dimensional, luego construimos la

máxima potencia exterior $\bigwedge^k W$, éste es obviamente un subespacio lineal 1-dimensional de $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$, por lo que podemos naturalmente identificar a $\bigwedge^k W$ con un punto, $[W]$, en el espacio proyectivo asociado tal que $[W] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$. Un teorema clásico del álgebra lineal implica el isomorfismo $\bigwedge^k \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ y por lo tanto $\mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$, así obtenemos los siguientes encajes [17]:

$$\mathbb{G}r_{n;k} \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}, \quad (1.6)$$

donde la primer flecha indica el encaje de Plücker, el cual es un mapeo inyectivo que manda el conjunto de todos los subespacios W a puntos en el plano complejo proyectivo. Las coordenadas dadas por el mapeo biyectivo $W \mapsto [W]$ son las conocidas coordenadas de Plücker. Para hacer la correspondencia explícita podemos asociar a W su k -forma de volumen ω en la base $\{v^1, \dots, v^k\}$ y expandirla en una base $\bigwedge^k \mathcal{B}$ de $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ con $\mathcal{B} = \{e^1, \dots, e^n\}$ una base para \mathbb{C}^n [17]:

$$\omega = v^1 \wedge^2 \wedge \dots \wedge v^k = \zeta_{\alpha_1 \dots \alpha_k} e^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e^{\alpha_k}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

donde $\zeta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ son las coordenadas de Plücker asociadas a W .

Para el caso que nos interesa $k = 2$, e introducimos un proyector de rango 2 de la forma

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

para proyectar en $\mathbb{G}r_{n;2}$ uno actúa el proyector a un elemento u de $SU(n)$ por la derecha tal que $u \mapsto u\mathbf{P}$; solamente las primeras dos columnas de la izquierda se mantienen, dejando solamente componentes u_α^i con $i = 1, 2$. En base a esto obtenemos un conjunto de coordenadas de Plücker para $\mathbb{G}r_{n;2}$ mediante

$$\zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} u_\alpha^i u_\beta^j, \quad (1.9)$$

con la normalización elegida para que se cumpla $\bar{\zeta}^{\alpha\beta} \zeta_{\alpha\beta} = 1$ [17].

Operadores diferenciales sobre $\mathbb{G}r_{n;2}$

“Mi deseo es entender la línea,
la forma, la sombra y el movimiento”.

—*Frida Kahlo*

En este capítulo se definen los operadores de acción derecha e izquierda sobre las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{n;2}$; además, se define el álgebra de Lie de estos operadores. Debido a que el Laplaciano en $\mathbb{G}r_{n;2}$ se escribe en términos de las acciones derechas tangentes, conviene separar el operador de acción derecha en su parte tangente y su parte normal. Los operadores de acción izquierda se definen únicamente, sin entrar en muchos detalles, para calcular explícitamente el Laplaciano de $SU(n)$.

2.1. Operador de acciones derechas

Los operadores diferenciales de acción derecha son derivadas covariantes en $\mathbb{G}r_{n;2}$, estas acciones se definen como

$$\mathcal{K}_a u = u \left(\frac{\lambda_a}{2} \right), \quad \mathcal{K}_a \bar{u} = - \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) \bar{u}. \quad (2.1)$$

Estas ecuaciones son obtenidas de $\mathcal{K}_a u := -i \left(\frac{d}{dt} (u e^{it\lambda_a/2}) \right)_{t=0}$ [14], aquí λ_a son las matrices de Gell-Mann. Notemos que se satisface el Álgebra de Lie:

$$[\mathcal{K}_a, \mathcal{K}_b] = i f_{abc} \mathcal{K}_c. \quad (2.2)$$

Como primer objetivo vamos a separar \mathcal{K}_a en operadores tangentes y operadores normales.

2.1.1. Acciones derechas tangentes

Los operadores tangentes inducen la acción derecha de generadores de la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \hline * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad (2.3)$$

donde exactamente un $*$ = 1 y todos los demás son 0 (esto significa que tomamos combinaciones de la forma $\frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$, estamos en una base compleja). Estos $2 \cdot 2(n-2)$ generadores pueden escribirse en nuestra convención como

$$(\lambda_A^\iota)^\alpha_\beta = \delta_\beta^\iota \delta_A^\alpha, \quad (\lambda_{\bar{A}}^{\bar{\iota}})^\alpha_\beta = \delta_\beta^\alpha \delta_{\bar{A}}^{\bar{\iota}}, \quad \text{donde } \iota = 1, 2 \quad A = 3, 4, \dots, n. \quad (2.4)$$

Observemos que $\lambda_{\bar{A}}^{\bar{\iota}} = (\lambda_A^\iota)^\dagger$. Definimos los operadores tangentes de tal forma que se cumple:

$$\mathcal{K}_A^\iota u = u \lambda_A^\iota, \quad \mathcal{K}_A^\iota \bar{u} = -\lambda_A^\iota \bar{u}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{K}_{\bar{A}}^{\bar{\iota}} u = u \lambda_{\bar{A}}^{\bar{\iota}}, \quad \mathcal{K}_{\bar{A}}^{\bar{\iota}} \bar{u} = -\lambda_{\bar{A}}^{\bar{\iota}} \bar{u}. \quad (2.6)$$

Estos operadores son las componentes holomorfas y antiholomorfas de la derivada covariante. Por la forma en que los hemos escrito podemos considerar a u y \bar{u} como variables independientes bajo diferenciación, pero sujetas a las ligaduras algebraicas: $u_\beta^\alpha \bar{u}_\gamma^\beta = \delta_\gamma^\alpha = u_\gamma^\beta \bar{u}_\beta^\alpha$. Implícitamente incluimos la siguiente ligadura en nuestro enfoque:

$$\bar{u}_\alpha^\beta = \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \cdots \beta_{n-1} \beta} \epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \alpha} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \cdots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}, \quad (2.7)$$

con base en esto (2.5) y (2.6) son independientes. Las expresiones de estos operadores son:

$$\mathcal{K}_A^\iota = u_\mu^\iota \partial_A^\mu - \bar{u}_A^{\bar{\iota}} \bar{\partial}_\mu^{\bar{\iota}}, \quad \mathcal{K}_{\bar{A}}^{\bar{\iota}} = u_\mu^A \partial_{\bar{A}}^\mu - \bar{u}_A^{\bar{\iota}} \bar{\partial}_\mu^{\bar{\iota}} \quad (2.8)$$

donde $\partial_\beta^\alpha = \frac{\partial}{\partial u_\alpha^\beta}$. Estos operadores se relacionan por $(\mathcal{K}_A^\iota)^\dagger = -\mathcal{K}_{\bar{A}}^{\bar{\iota}}$, una consecuencia de la antihermiticidad de \mathcal{K}_a . En el Apéndice A se detalla una parte de la demostración de (2.5).

2.1.2. Acciones derechas normales

Las acciones normales corresponden al subgrupo de isotropía, que podemos representar con matrices (donde solamente un $*$ = 1 y todos los demás son 0) de la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & * & 0 \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad (2.9)$$

y también con las $n - 1$ matrices diagonales que generan la subálgebra de Cartan de $SU(n)$, las cuales se escriben genéricamente como [12]:

$$(H_k)^\alpha_\beta = \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}} \left\{ \sum_{j=1}^k \delta_j^\alpha \delta_\beta^j - k \delta_{k+1}^\alpha \delta_\beta^{k+1} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.10)$$

Siguiendo nuestra convención encontramos los operadores de isotropía o de dirección normal:

$$\mathcal{K}_j^i = u_\mu^i \partial_j^\mu - \bar{u}_j^\mu \bar{\partial}_\mu^i \quad i \neq j, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{K}_B^A = u_\mu^A \partial_B^\mu - \bar{u}_B^\mu \bar{\partial}_\mu^A \quad A \neq B, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{K}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}} \left(\sum_{j=1}^k (u_\mu^j \partial_j^\mu - \bar{u}_j^\mu \bar{\partial}_\mu^j) - k (u_\mu^{k+1} \partial_{k+1}^\mu - \bar{u}_{k+1}^\mu \bar{\partial}_\mu^{k+1}) \right) \quad (2.13)$$

donde k va de 1 a $n - 1$.

2.1.3. Álgebra de Lie

En esta sección escribimos el Álgebra de Lie completa de las acciones derechas:

$$[\mathcal{K}_A^i, \mathcal{K}_B^j] = [\mathcal{K}_A^i, \mathcal{K}_B^j] = 0, \quad (2.14)$$

$$[\mathcal{K}_A^i, \mathcal{K}_B^j] = \delta_A^B \mathcal{K}_j^i - \delta_j^B \mathcal{K}_A^i, \quad (2.15)$$

$$[\mathcal{K}_B^A, \mathcal{K}_D^C] = \delta_B^C \mathcal{K}_D^A - \delta_D^A \mathcal{K}_B^C, \quad (2.16)$$

$$[\mathcal{K}_i^j, \mathcal{K}_l^k] = \delta_i^k \mathcal{K}_l^j - \delta_l^j \mathcal{K}_i^k, \quad (2.17)$$

$$[\mathcal{K}_B^A, \mathcal{K}_i^j] = 0. \quad (2.18)$$

donde se ha extendiendo (2.11) y (2.12) a todos los valores de i, j, A y B :

$$\mathcal{K}_j^i = u_\mu^i \partial_j^\mu - \bar{u}_j^\mu \bar{\partial}_\mu^i, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.19)$$

$$\mathcal{K}_A^B = u_\mu^B \partial_A^\mu - \bar{u}_A^\mu \bar{\partial}_\mu^B, \quad A, B = 3, 4, \dots, n. \quad (2.20)$$

Observemos que $[\mathcal{K}_A^i, \mathcal{K}_B^{\bar{j}}] \in s(u(2) \times u(n-2))$ ¹, además notemos que los operadores \mathcal{K}_j^i y \mathcal{K}_B^A aniquilan cualquier función diferenciable $f(\zeta, \bar{\zeta})$ definida sobre $\mathbb{G}r_{n;2}$. En este punto cabe mencionar que mediante

$$\zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} u_\alpha^i u_\beta^j \quad (2.21)$$

obtenemos un conjunto de coordenadas de Plücker para $\mathbb{G}r_{n;2}$, cuya normalización ha sido elegida tal que $|\zeta| = 1$ (para más detalles consulte [5, 17]). La función f es invariante bajo la transformación $\zeta_{\alpha\beta} \rightarrow e^{i\theta} \zeta_{\alpha\beta}$ (esto es porque la fase no cambia la clase de equivalencia, así $[\zeta]$ y $[e^{i\theta} \zeta]$ claramente definen el mismo punto en $\mathbb{G}r_{n;2}$).

Es fácil notar que $\mathcal{K}_B^A f = 0$, entonces vamos a probar que:

Proposición 1 $\mathcal{K}_j^i f(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$

Prueba: Consideremos los índices $m, n, k = 1, 2$.

$$\mathcal{K}_j^i \zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{jk} (\delta_m^i \delta_n^k - \delta_n^i \delta_m^k) u_\alpha^m u_\beta^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{jk} \epsilon^{ik} \epsilon_{mn} u_\alpha^m u_\beta^n = \delta_j^i \zeta_{\alpha\beta}, \quad (2.22)$$

de la misma forma se puede probar que $\mathcal{K}_j^i \bar{\zeta}^{\alpha\beta} = -\delta_j^i \bar{\zeta}^{\alpha\beta}$. Si expandimos f como una serie el efecto de \mathcal{K}_j^i en cada término polinomial de la serie es $\delta_j^i (\#(\zeta) - \#(\bar{\zeta}))$, y esto será cero debido a la invarianza de $U(1)$ de f (consulte Apéndice B). ■

2.2. Operador de acciones izquierdas

En esta sección solamente se define el operador de acciones izquierdas, sin entrar en más detalles, ya que este operador nos ayudará a obtener de manera más sencilla, en la siguiente sección, una expresión para el Laplaciano en $SU(n)$.

Los operadores diferenciales de acción izquierda son campos de Killing definidos por:

$$\mathcal{L}_a u = -\left(\frac{\lambda_a}{2}\right) u, \quad \mathcal{L}_a \bar{u} = \bar{u} \left(\frac{\lambda_a}{2}\right), \quad (2.23)$$

¹Denotamos como $s(u(2) \times u(n-2))$ al Álgebra de Lie asociada al subgrupo $S(U(2) \times U(n-2))$.

los cuales satisfacen el Álgebra de Lie [14]:

$$[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b] = if_{abc}\mathcal{L}_c. \quad (2.24)$$

En componentes, este operador se ve de la forma:

$$\mathcal{L}_a = -\left(\frac{\lambda_a}{2}\right)_\beta^\alpha \left[u_\alpha^\mu \partial_\mu^\beta - \bar{u}_\mu^\beta \bar{\partial}_\alpha^\mu \right]. \quad (2.25)$$

2.3. Laplaciano

El Laplaciano de acciones izquierdas y el Laplaciano de acciones derechas para $SU(n)$ son el mismo operador, definido por:

$$\Delta_{SU(n)} = \mathcal{L}_a^2 = \mathcal{K}_a^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha < \beta} \{ \mathcal{K}_\beta^\alpha, \mathcal{K}_\alpha^\beta \} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}_{(k)}^2. \quad (2.26)$$

Una forma más conveniente de escribir este Laplaciano es separando los términos que incluyen acciones derechas tangentes y los que incluyen acciones derechas normales, de la siguiente manera:

$$\Delta_{SU(n)} = \underbrace{\frac{1}{2} \{ \mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i \}}_{\text{tangentes}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} (\mathcal{K}_j^i)^2 + \sum_{A \neq B} (\mathcal{K}_B^A)^2 + \sum_k \mathcal{K}_{(k)}^2}_{\text{normales}}. \quad (2.27)$$

Podemos calcular más fácilmente este Laplaciano de \mathcal{L}_a^2 , directamente de su expresión (2.25) usando las identidades de Fierz (más información de estas identidades en el Apéndice C), cuyo resultado es:

$$\begin{aligned} \Delta_{SU(n)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{n^2 - 1}{n} (u_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + \bar{u}_\beta^\alpha \bar{\partial}_\alpha^\beta) - 2\bar{\partial}_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + \frac{2}{n} \bar{u}_\mu^\alpha u_\nu^\beta \bar{\partial}_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu \right. \\ \left. + u_\mu^\alpha u_\nu^\beta \left(\partial_\beta^\mu \partial_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \partial_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu \right) + \bar{u}_\mu^\alpha \bar{u}_\nu^\beta \left(\bar{\partial}_\beta^\mu \bar{\partial}_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \bar{\partial}_\alpha^\mu \bar{\partial}_\beta^\nu \right) \right\}, \quad (2.28) \end{aligned}$$

los detalles del cálculo se encuentran en el Apéndice D. Por otra parte, el Laplaciano en las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{n;2}$ está conformado únicamente por la parte que contiene las acciones derechas tangentes:

$$\Delta_{\mathbb{G}r_{n;2}} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i \}. \quad (2.29)$$

Este es el operador de Laplace-Beltrami sobre $\bigoplus_{p,q} \Omega^{(p,q)}(\mathbb{G}r_{n;2})$, cf. [17].

Espinores

“Puedes llegar a cualquier parte,
siempre que andes lo suficiente”.

—*Lewis Carroll*

En general no siempre es posible tener campos espinoriales en una variedad arbitraria \mathcal{M} , podría haber obstrucciones topológicas que aseguren que cada campo espinorial sea nulo. Se necesita una estructura de espín para evitar estas dificultades y dicha estructura, si existe en la variedad, puede no ser única. En esencia, la existencia de una estructura de espín significa que podemos encontrar un sistema consistente de álgebras de Clifford sobre el espacio tangente de \mathcal{M} [15].

A veces una variedad no admite estructura de espín, sino lo que se denomina una estructura de espín^c que permite definir campos espinoriales cargados siempre que haya un campo de fondo adecuado. Una obstrucción topológica como ya mencionamos puede ser que todos los campos espinoriales que se definan sean cero, esta dificultad puede deberse a una 2-superficie Σ dentro de \mathcal{M} que no se puede reducir a un punto; la propagación paralela de espinores alrededor de Σ muestra que deben anularse idénticamente. Para evitar esta dificultad se consideran campos espinoriales cargados en \mathcal{M} y un monopolo magnético dentro de Σ , por lo tanto tenemos que introducir una conexión $U(1)$ adicional para cancelar las inconsistencias. Bajo estas condiciones es posible definir campos espinoriales en \mathcal{M} [15].

En este capítulo veremos que para las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{n;2}$ la primera clase de Chern determina si es espín: si es impar no lo es y si es par lo es; para el caso impar obtenemos un haz de espín^c de espinores cargados. Usando teoría de representaciones encontraremos la representación para las funciones y 1-formas de $\mathbb{G}r_{n;2}$, además explicaremos brevemente la construcción para las 2-formas.

3.1. Existencia del haz de espín^c

Las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{n;2}$ admiten una única (porque son simplemente conexas) estructura de espín solamente cuando n es par [3, 19]. Se sabe también que las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{5;2}$ admiten una única estructura de espín^c [8]. Esto es parte del resultado general: todas las Grasmanianas unitarias son espín^c.

La primer clase de Chern determina si es espín, si es impar no lo es, si es par lo es. Para las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{n;k} = U(n)/(U(k) \times U(n-k))$ la primer clase de Chern es:

$$c_1(\mathbb{G}r_{n;k}) = -n. \quad (3.1)$$

La holonomía es $U(1) \times SU(k) \times SU(n-k)$ y la n de arriba es la carga monopolar de la parte de la holonomía de $U(1)$. Denotando como \mathfrak{L} al haz generador con clase de Chern 1, es decir, $c_1(\mathfrak{L}) = 1$, para n impar necesitamos el haz de espín con potencia tensorial $\mathfrak{L}^{q+n/2}$ (ninguna existe separadamente, porque podrían tener clases de Chern no enteras, pero su producto tensorial existe) para obtener el haz de espín^c de espinores cargados, con primer clase de Chern q (B. P. Dolan, comunicación personal, s. f.).

3.2. Campo espinorial

Consideremos el conjunto euclideo de matrices gamma de Dirac Γ^μ con el índice $\mu = 1, 2, \dots, 4(n-2)$, las cuales satisfacen $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}\mathbf{1}$. Estas matrices se pueden poner en combinaciones complejas γ_A^ι , con $(\gamma_A^\iota)^\dagger := \gamma_{\bar{A}}^{\bar{\iota}} := \gamma_i^A$, elegidas tal que:

$$\{\gamma_A^\iota, \gamma_j^B\} = \delta_j^\iota \delta_A^B \mathbf{1}, \quad \{\gamma_A^\iota, \gamma_B^j\} = \{\gamma_i^A, \gamma_j^B\} = 0. \quad (3.2)$$

Una elección de reordenamiento de etiquetas es por ejemplo:

$$\gamma_A^\iota = \frac{1}{2} (\Gamma^{A+2(\iota-1)(n-2)} + i\Gamma^{A+(2\iota-1)(n-2)}). \quad (3.3)$$

El espacio espinorial tiene dimensión 4^{n-2} . Estos pueden ser interpretados como operadores de creación y aniquilación fermiónica [15]. Supongamos que $|\Omega\rangle$ es el estado de vacío aniquilado por tales operadores, definido por:

$$\gamma_i^A |\Omega\rangle = 0. \quad (3.4)$$

Si denotamos como $M = 2(n-2)$ tenemos que la expansión de un campo espinorial general [13] es:

$$\psi = \psi_0 |\Omega\rangle + \psi_i^A \gamma_A^\iota |\Omega\rangle + \psi_{ij}^{AB} \gamma_A^\iota \gamma_B^j |\Omega\rangle + \dots + \psi_{i_1 \dots i_M}^{A_1 \dots A_M} \gamma_{A_1}^{\iota_1} \dots \gamma_{A_M}^{\iota_M} |\Omega\rangle, \quad (3.5)$$

donde ψ_0 es en general una función cargada topológicamente. Tales funciones pertenecen a la siguiente representación, usando notación de índices de Dynkin:

$$\psi_0 \in (0, \dots, 0, L, 0) \otimes (0, L + q, 0, \dots, 0) = \bigoplus_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 0}}^{\infty} \bigoplus_{p=0}^{\infty} (p, l + q, 0, \dots, 0, l, p) \quad (3.6)$$

con $q \in \mathbb{Z}$, explícitamente se tiene:

$$\psi_0(\zeta, \bar{\zeta}) = \mathcal{P}_{(\alpha_{l+q}, \beta_{l+q}; \gamma_p)(\alpha'_l, \beta'_l; \gamma'_p)}^{(\mu_l, \nu_l; \eta_p)(\mu'_{l+q}, \nu'_{l+q}; \eta'_p)} \zeta_{\mu'_{l+q} \nu'_{l+q}} \zeta_{\eta'_p} \bar{\zeta}^{\alpha'_l \beta'_l} \bar{\zeta}^{\gamma'_p} \delta_p, \quad (3.7)$$

donde $\zeta_{\alpha_k \beta_k} = \zeta_{\alpha_1 \beta_1} \cdots \zeta_{\alpha_k \beta_k}$ y de forma similar para $\bar{\zeta}$, \mathcal{P} es el proyector en la representación $(p, l + q, 0, \dots, 0, l, p)$ que simetriza los índices η y γ , simetriza todos los índices libres superiores e inferiores y remueve todas las trazas entre índices superiores e inferiores. Representamos el tensor (3.7) a través del diagrama de Young ²

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 0}}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \begin{array}{cccc} \overbrace{\boxed{\gamma} \cdots \boxed{\gamma}}^p & \overbrace{\boxed{\alpha} \cdots \boxed{\alpha}}^l & \overbrace{\boxed{\mu} \cdots \boxed{\mu}}^{l+q} & \overbrace{\boxed{\eta} \cdots \boxed{\eta}}^p \\ & \boxed{\beta} \cdots \boxed{\beta} & \boxed{\nu} \cdots \boxed{\nu} & \end{array} \quad (3.8)$$

siguiendo la convención usual donde antisimetrizamos columnas primero y luego simetrizamos filas. Las cajas en el diagrama de arriba son diferentes. En particular la primera y segunda fila. Esto se debe a que al escribir el tensor $\zeta_{\mu_1 \nu_1} \cdots \zeta_{\mu_n \nu_n}$ tenemos el diagrama de Young siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\mu_1} & \cdots & \boxed{\mu_n} \\ \boxed{\nu_1} & \cdots & \boxed{\nu_n} \end{array} \quad (3.9)$$

donde las cajas superiores son $u_{\mu_1}^1 \cdots u_{\mu_n}^1$, que pueden ser etiquetadas como $\boxed{1}$ y las cajas inferiores son $u_{\nu_1}^2 \cdots u_{\nu_n}^2$, etiquetadas como $\boxed{2}$. De forma análoga sucede para $\bar{\zeta}^{\alpha_1 \beta_1} \cdots \bar{\zeta}^{\alpha_n \beta_n}$. La parte que contiene una sola fila de cajas proviene de las contracciones

$$\zeta_{\eta \delta} \bar{\zeta}^{\gamma \delta} = \frac{1}{2} u_{\eta}^{\delta} \bar{u}_{\delta}^{\gamma} \quad (3.10)$$

y la proyección, cuya acción (tal como ya se mencionó con anterioridad) es simetrizar todos los índices (superiores o inferiores) y remover todas las trazas.

3.3. Operador de Dirac

El operador de Dirac está dado por [15]

$$\mathcal{D} = \gamma_i^A \mathcal{K}_A^i + \gamma_i^A \mathcal{K}_i^A := \bar{D} + \bar{D}^*; \quad (3.11)$$

²Las representaciones anti-fundamentales o conjugadas las denotamos con cajas barra, así

$$\bar{\square} := (n-1) \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} \text{ y } \bar{\square} = (n-2) \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}.$$

3.4. Estructura del haz de espín

donde $\mathcal{K}_A^i, \mathcal{K}_i^A$ son las derivadas covariantes holomorfas/antiholomorfas. Además, definimos generadores T_B^A y T_j^i de tal forma que

$$T_B^A = \frac{1}{2}[\gamma_i^A, \gamma_B^i] \quad (3.12)$$

generan $U(n-2)$, mientras que

$$T_j^i = \frac{1}{2}[\gamma_A^i, \gamma_j^A] \quad (3.13)$$

generan $U(2)$, y ambos satisfacen las mismas álgebras de Lie que \mathcal{K}_B^A y \mathcal{K}_j^i .

En el siguiente capítulo vamos a calcular el espectro de las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{4,2}$, lo cual conviene hacerlo usando el cuadrado del operador de Dirac que resulta en el Laplaciano más una contribución de un campo efectivo de origen topológico que depende únicamente del espacio donde se encuentra \mathcal{D} (esta contribución es asociada a la curvatura de la variedad según la fórmula de Schrödinger-Lichnerowicz en [11]) y que puede ser obtenido directamente de (3.11) y simplificando para obtener

$$\mathcal{D}^2 = \frac{1}{2}\{\mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i\} + \frac{1}{2}[\gamma_A^i, \gamma_j^B][\mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_B^j], \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\{\mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i\} + \frac{1}{2}[\gamma_A^i, \gamma_i^B]\mathcal{K}_B^A - \frac{1}{2}[\gamma_A^i, \gamma_j^A]\mathcal{K}_i^j, \\ &= \frac{1}{2}\{\mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i\} - T_A^B\mathcal{K}_B^A - T_j^i\mathcal{K}_i^j. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La expresión en verde corresponde al Laplaciano de $\mathbb{G}r_{n,2}$ (el cálculo se encuentra en el Apéndice E), cf. método en [16]. Notemos que el cuadrado del operador de Dirac ahora está escrito totalmente en términos de operadores de Casimir cuadráticos.

3.4. Estructura del haz de espín

Debido a que en el siguiente capítulo se calculará el espectro de las funciones (que ya hemos definido en la sección 3.2) y 1-formas para el caso particular de las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{4,2}$ es imprescindible la construcción de las 1-formas, lo cual se hará en esta sección. Además daremos una breve descripción de cómo construir las 2-formas. Para cálculos posteriores será de utilidad el siguiente diccionario pictórico:

$$\begin{aligned} \boxed{\mu} &= \zeta_{\mu\nu}, & \overline{\boxed{\mu}} &= \bar{\zeta}^{\mu\nu} \\ \boxed{A} &= u_\eta^A, & \overline{\boxed{A}} &= \bar{u}_A^\eta \\ \boxed{i} &= u_\gamma^i, & \overline{\boxed{i}} &= \bar{u}_i^\gamma \\ \boxed{\frac{A}{i}} &= u_{[\mu}^A u_{\nu]}^j \epsilon_{ij} = u_\mu^{[A} u_\nu^{j]} \epsilon_{ij} \end{aligned}$$

3.4. Estructura del haz de espín

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{l=1 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \begin{array}{c} \overbrace{\quad p+1 \quad} \\ \overbrace{\quad l-1 \quad} \\ \overbrace{\quad l+q-1 \quad} \\ \overbrace{\quad p+1 \quad} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \iota & \cdots & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & & \cdots \\ \hline & & & A \\ \hline \end{array} \end{array} + \sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{c} \overbrace{\quad p \quad} \\ \overbrace{\quad l \quad} \\ \overbrace{\quad l+q-1 \quad} \\ \overbrace{\quad p+1 \quad} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \cdots & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & & \cdots \\ \hline & & & \iota \\ \hline & & & A \\ \hline \end{array} \end{array} + \\
& \sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 2}}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{c} \overbrace{\quad p \quad} \\ \overbrace{\quad l \quad} \\ \overbrace{\quad l+q \quad} \\ \overbrace{\quad p-1 \quad} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \cdots & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & A & \cdots \\ \hline & & \iota & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \end{array} + \sum_{\substack{l=1 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{c} \overbrace{\quad p+1 \quad} \\ \overbrace{\quad l-1 \quad} \\ \overbrace{\quad l+q \quad} \\ \overbrace{\quad p-1 \quad} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \iota & \cdots & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & & \cdots \\ \hline & & & A \\ \hline \end{array} \end{array} + \\
& \sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{c} \overbrace{\quad p-1 \quad} \\ \overbrace{\quad l \quad} \\ \overbrace{\quad l+q \quad} \\ \overbrace{\quad p-1 \quad} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \cdots & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & \iota & \cdots \\ \hline & & A & \cdots \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \end{array} + \sum_{\substack{l=1 \\ l+q \geq 2}}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \begin{array}{c} \overbrace{\quad p+1 \quad} \\ \overbrace{\quad l-1 \quad} \\ \overbrace{\quad l+q-1 \quad} \\ \overbrace{\quad p \quad} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \iota & \cdots & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & & \cdots \\ \hline & & & A \\ \hline \end{array} \end{array} + \\
& \sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 2}}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{c} \overbrace{\quad p-1 \quad} \\ \overbrace{\quad l \quad} \\ \overbrace{\quad l+q-1 \quad} \\ \overbrace{\quad p \quad} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \cdots & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & \iota & \cdots \\ \hline & & & \\ \hline & & & A \\ \hline \end{array} \end{array} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

En la expansión (3.20) algunos diagramas tienen en la misma columna A e ι , esto es necesario para que no se anulen algunas de las componentes del tensor. Las propiedades básicas de simetría de los diagramas de Young se utilizaron para que los diagramas adquieran su forma; además, se ha usado el método de descomposición de Clebsch-Gordan [12] para obtener dicha expansión y puede ser consultada en el Apéndice G. En base a lo anterior observemos que una 1-forma tendrá la estructura

$$\left\{ \mathcal{P}_{(\alpha_{l+q-1}, \beta_{l+q-1}; \gamma_p)(\alpha'_l \beta'_l; \gamma'_p)}^{(\mu_l, \nu_l; \eta_p)(\mu'_{l+q-1}, \nu'_{l+q-1}; \eta'_p)} \zeta_{\mu'_{l+q-1} \nu'_{l+q-1}} \zeta_{\eta'_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha'_l \beta'_l} \bar{\zeta}^{\gamma'_p \delta_p} \right\} u_{[\alpha}^A u_{\beta]}^j \epsilon_{ij}. \tag{3.21}$$

3.4.2. 2-formas

En lo que respecta a esta sección sólo daremos una breve descripción de cómo construir las 2-formas. Para la construcción de las 2-formas exactas necesitaremos

$$\mathcal{K}_j^B u_{[\alpha}^A u_{\beta]}^k \epsilon_{ik} = u_{[\alpha}^A u_{\beta]}^B \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} \boxed{\frac{A}{B}}, \tag{3.22}$$

esta contribución a las 2-formas exactas desaparecerá por simetría, por lo que esperamos dos diagramas para las 2-formas exactas.

La estructura de las 2-formas está determinada por la descomposición:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline i \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline j \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline i & j \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline i & \\ \hline j & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline i & j \\ \hline \end{array} \oplus \epsilon_{ij} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \oplus \epsilon_{ij} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Se esperan simplificaciones en las contracciones para $\mathbb{G}r_{4,2}$, y también habrá diagramas repetidos dentro de una clase. Debido a la antisimetría del Álgebra de Dirac más diagramas desaparecerán o se simplificarán en todas las $(0, r)$ -formas, por ejemplo puede ser más apropiado escribir las 2-formas como

$$\begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline i \\ \hline \end{array} \wedge \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline i & \\ \hline j & \\ \hline \end{array} \tag{3.24}$$

Los otros dos diagramas se anulan porque son simétricos bajo el intercambio $(A, i) \leftrightarrow (B, j)$. En esta tesis nuestra intención no es hacer un análisis exhaustivo de las r -formas y su estructura sino ilustrar la eficacia de nuestro cálculo del espectro en contraste con el cálculo directo. Las 2-formas y otras no serán tratadas con mayor detalle, sin embargo señalemos que nuestra técnica se extiende de manera directa a las r -formas, simplemente los cálculos son un poco más extensos.

Espectro del operador de Dirac

“Lo verdadero es siempre sencillo,
pero solemos llegar a ello por el camino más complicado”.

—George Sand

En este capítulo vamos a calcular el espectro de las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{4;2}$, pues son el primer caso no trivial de Grasmanianas unitarias. Si bien ya ha sido estudiado y calculado el espectro en variedades Grasmanianas [4, 19], cabe resaltar que aquí lo resolveremos de forma independiente, estableciendo una nueva forma de resolver este problema espectral con un método que utiliza herramientas ya conocidas de teoría de representaciones. El hecho de resolver el problema espectral de Dirac en las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{4;2}$ sentará las bases para su generalización a $\mathbb{G}r_{n;2}$.

Es sabido que para espacios simétricos, como es nuestro caso, el espectro no nulo del operador de Dirac \mathcal{D} se determina totalmente por el espectro del cuadrado de este operador [19]. Por tal motivo trabajaremos con la expresión (3.15) para el cuadrado del operador de Dirac:

$$\mathcal{D}^2 = \Delta_{\mathbb{G}r_{n;2}} - T_A^B \mathcal{K}_B^A - T_j^i \mathcal{K}_i^j. \quad (4.1)$$

Para calcular el espectro estableceremos un nuevo método, el cual consiste principalmente en escribir el Laplaciano en (4.1) para $n = 4$ en términos de operadores de conteo de cajas de los diagramas de Young; veremos que el cálculo del espectro se simplifica de manera significativa con este método de conteo de cajas (puesto que el cálculo debido a esta contribución al espectro se realiza en menos tiempo y con poca probabilidad de cometer errores en los cálculos en comparación de aplicar directamente (4.1)).

Las siguientes expresiones serán útiles en el cálculo del espectro:

$$T_A^B |\Omega\rangle = \delta_A^B |\Omega\rangle, \quad (4.2)$$

$$[T_A^B, \gamma_C^m] = -\delta_C^B \gamma_A^m, \quad (4.3)$$

$$T_j^i |\Omega\rangle = -\frac{1}{2}(n-2)\delta_j^i |\Omega\rangle, \quad (4.4)$$

$$[T_j^i, \gamma_C^m] = \delta_j^m \gamma_C^i. \quad (4.5)$$

Antes de trabajar con el Laplaciano y establecer nuestro método de conteo de cajas, nos conviene hallar el resultado de aplicar los operadores $T_A^B \mathcal{K}_B^A$ a un espinor en general. Aplicamos $T_A^B \mathcal{K}_B^A$ al espinor $\psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} |\Omega\rangle = \psi_{i_1 \dots i_N}^{C_1 \dots C_N} \gamma_{C_1}^{i_1} \dots \gamma_{C_N}^{i_N} |\Omega\rangle$:

$$T_A^B \mathcal{K}_B^A \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} |\Omega\rangle = T_A^B \left[\mathcal{K}_B^A, \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} \right] |\Omega\rangle.$$

En este punto es importante notar que el conmutador

$$\left[\mathcal{K}_B^A + T_B^A, \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} \right] = 0, \quad (4.6)$$

por tanto, siguiendo con nuestro cálculo tenemos:

$$\begin{aligned} T_A^B \mathcal{K}_B^A \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} |\Omega\rangle &\stackrel{(4.6)}{=} -T_A^B \left[T_B^A, \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} \right] |\Omega\rangle, \\ &= - \left[T_A^B, \left[T_B^A, \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} \right] \right] |\Omega\rangle - \left[T_B^A, \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} \right] T_A^B |\Omega\rangle, \\ &\stackrel{(4.3), (4.2)}{=} - \left[T_A^B, \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \sum_{k=1}^N \gamma_{C_1}^{i_1} \dots (-\delta_{C_k}^A \gamma_B^{i_k}) \dots \gamma_{C_N}^{i_N} \right] |\Omega\rangle \\ &\quad - \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \sum_{k=1}^N \gamma_{C_1}^{i_1} \dots \overbrace{(-\delta_{C_k}^A \gamma_B^{i_k})}^k \dots \gamma_{C_N}^{i_N} \delta_A^B |\Omega\rangle, \\ &\stackrel{(4.3)}{=} - \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} \gamma_{C_1}^{i_1} \dots \overbrace{(-\delta_{C_j}^B \gamma_A^{i_j})}^j \dots \overbrace{(-\delta_{C_k}^A \gamma_B^{i_k})}^k \dots \gamma_{C_N}^{i_N} |\Omega\rangle \\ &\quad - (n-2) N \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} |\Omega\rangle \\ &\quad + N \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} |\Omega\rangle, \\ &= N(1 - (n-2) \mp (N-1)) \psi_{\underline{i}}^{\underline{C}} \gamma_{\underline{C}}^{\underline{i}} |\Omega\rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

El término antecedido por \mp indica que tenemos un signo $(-)$ si tenemos un tensor simétrico en los índices $i_1 i_2 \dots i_N$ o un signo $(+)$ si es antisimétrico en los índices $i_1 i_2 \dots i_N$. Notemos que $\overbrace{}^k$ indica únicamente la k -ésima posición. Es importante mencionar que ha sido posible encontrar el resultado (4.7) debido a que se cumple la expresión (4.6) y por el hecho de que el operador \mathcal{K}_B^A actuando en ζ o $\bar{\zeta}$ resulta en cero, lo cual no sucede para \mathcal{K}_i^j y por ello se dificulta hallar una expresión general para el caso de $T_j^i \mathcal{K}_i^j$ puesto que depende de la forma particular del espinor en el que actúa, por tal motivo la contribución al espectro debida a $T_j^i \mathcal{K}_i^j$ será calculada aplicando directamente estos operadores a cada caso particular.

4.1. Método de conteo de cajas

En esta sección el objetivo principal es escribir el Laplaciano $\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}}$ en términos de operadores de conteo de cajas, este ejercicio sirve además como referencia para explicar la manera de proceder para generalizar este Laplaciano a $\mathbb{G}r_{n;2}$; una vez obtenido $\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}}$ daremos algunos ejemplos para mostrar que el método de conteo de cajas es consistente con el cálculo realizado aplicando directamente (2.29).

Como ya hemos mencionado en un principio, concebimos a las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{n;2}$ como un espacio cociente $\mathcal{M} = G/H$, donde G es un grupo de Lie compacto y simple y H es un subgrupo cerrado de G compacto y semisimple. El Laplaciano G -invariante $\Delta_{\mathcal{M}}$ tiene una construcción simple: manteniendo la G -simetría de la métrica inducida en \mathcal{M} se puede mostrar que el Laplaciano G -invariante asociado se puede escribir en términos de operadores de Casimir cuadráticos formados con los campos vectoriales inducidos que son invariantes por la derecha [17, 22]. Con base en [22] podemos reescribir el Laplaciano $\Delta_{\mathbb{G}r_{n;2}}$ en (4.1) como:

$$\Delta_{\mathbb{G}r_{n;2}} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i \} = C_2(SU(n)) - C_2(S(U(2) \times U(n-2))), \quad (4.8)$$

donde el Casimir cuadrático de $SU(n)$ [15, 21] para un diagrama de Young con número de cajas B_k en la k -ésima fila es

$$C_2(SU(n)) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n-1} B_k^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} B_k \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} k B_k + (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} B_k \right]. \quad (4.9)$$

El Casimir cuadrático $C_2(S(U(2) \times U(n-2)))$ es más complicado por lo que es conveniente trabajar primeramente con las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{4;2}$ y obtener una expresión más sencilla de este Casimir, además con ello sentamos las ideas básicas que pueden ser útiles para su generalización.

4.1.1. Caso particular $\mathbb{G}r_{4;2}$

Como ya hemos mencionado anteriormente, estamos interesados en escribir el Laplaciano $\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}}$ en términos de operadores de conteo de cajas, para ello sabemos de (4.8) que el Laplaciano para $\mathbb{G}r_{4;2}$ es

$$\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i \}, \quad i = 1, 2 \quad A = 3, 4 \quad (4.10)$$

$$= C_2(SU(4)) - C_2(S(U(2) \times U(2))). \quad (4.11)$$

Y de (4.9) tenemos que el Casimir cuadrático de $SU(4)$ es

$$\begin{aligned} C_2(SU(4)) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^3 B_k^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^3 B_k \right)^2 - 2(B_1 + 2B_2 + 3B_3) + 5 \sum_{k=1}^3 B_k \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^3 B_k^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^3 B_k \right)^2 + 3B_1 + B_2 - B_3 \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ahora nos gustaría escribir el Casimir cuadrático $C_2(S(U(2) \times U(2)))$ en términos más simples, por lo cual estamos interesados en calcular la expresión siguiente:

$$C_2(S(U(2) \times U(2))) - C_2(SU(2) \times SU(2)).$$

El Casimir cuadrático $C_2(S(U(2) \times U(2)))$ corresponde a la suma de los cuadrados de los operadores diagonales u operadores de isotropía que obtenemos de (2.13) para $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{(1)}^2 &= \left[\frac{1}{2}(n_1 - n_2) \right]^2, \\ \mathcal{K}_{(2)}^2 &= \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}(n_1 + n_2 - 2n_3) \right]^2, \\ \mathcal{K}_{(3)}^2 &= \left[\frac{1}{2\sqrt{6}}(n_1 + n_2 + n_3 - 3n_4) \right]^2, \end{aligned}$$

donde hemos denotado como $n_1 = u_\mu^1 \partial_1^\mu - \bar{u}_1^\mu \bar{\partial}_\mu^1$ y similarmente para n_2, n_3 y n_4 .

Por otro lado podemos obtener los operadores diagonales para $SU(2) \times SU(2)$. Primeramente elegimos la siguiente base para este grupo:

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\sigma}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_a \end{array} \right) \right\}; \quad (4.13)$$

éstas son matrices 4×4 donde $\mathbf{0}$ corresponde a una matriz 2×2 con todas sus entradas igual a cero y $\boldsymbol{\sigma}_a$ son las matrices 2×2 de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que de (4.13) las únicas matrices diagonales son

$$\frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{array} \right);$$

4.1. Método de conteo de cajas

usando la notación arriba expuesta escribimos el cuadrado de los operadores diagonales:

$$K_{(1)}^2 = \left[\frac{1}{2}(n_1 - n_2) \right]^2,$$

$$K_{(2)}^2 = \left[\frac{1}{2}(n_3 - n_4) \right]^2.$$

Calculamos la diferencia de Casimir cuadráticos

$$\begin{aligned} C_2(S(U(2) \times U(2))) - C_2(SU(2) \times SU(2)) &= (\mathcal{K}_{(1)}^2 + \mathcal{K}_{(2)}^2 + \mathcal{K}_{(3)}^2) - (K_{(1)}^2 + K_{(2)}^2), \\ &= \frac{1}{8}(n_1 + n_2 - n_3 - n_4)^2, \\ &= \frac{1}{8}(n_i - n_A)^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde n_i y n_A son operadores de conteo de cajas que explícitamente escribimos como:

$$n_i = u_\mu^i \partial_\mu^i - \bar{u}_i^\mu \bar{\partial}_\mu^i, \quad i = 1, 2. \quad (4.15)$$

$$n_A = u_\mu^A \partial_\mu^A - \bar{u}_A^\mu \bar{\partial}_\mu^A, \quad A = 3, 4. \quad (4.16)$$

Algunos resultados útiles para cálculos posteriores se escriben a continuación:

$$n_i \boxed{\frac{\mu}{\nu}} = 2 \boxed{\frac{\mu}{\nu}}, \quad n_A \boxed{\frac{\mu}{\nu}} = 0, \quad (4.17)$$

$$n_i \overline{\boxed{\frac{\alpha}{\beta}}} = -2 \overline{\boxed{\frac{\alpha}{\beta}}}, \quad n_A \overline{\boxed{\frac{\alpha}{\beta}}} = 0, \quad (4.18)$$

$$n_i \overline{\boxed{\gamma \eta}} = 0, \quad n_A \overline{\boxed{\gamma \eta}} = 0, \quad (4.19)$$

$$n_i \boxed{i} = \boxed{i}, \quad n_A \boxed{A} = \boxed{A}, \quad (4.20)$$

$$n_i \overline{\boxed{i}} = -\overline{\boxed{i}}, \quad n_A \overline{\boxed{A}} = -\overline{\boxed{A}}. \quad (4.21)$$

De (4.14) tenemos que

$$C_2(S(U(2) \times U(2))) = C_2(SU(2) \times SU(2)) + \frac{1}{8}(n_i - n_A)^2, \quad (4.22)$$

donde

$$C_2(SU(2) \times SU(2)) = C_2(SU(2))_i + C_2(SU(2))_A, \quad (4.23)$$

aquí hemos denotado como $C_2(SU(2))_i$ al Casimir cuadrático que actúa en cajas con índices latinos i, j, k, l , etc. y $C_2(SU(2))_A$ actúa en cajas con índices A, B, C , etc., además, sabemos que el Casimir cuadrático de $SU(2)$ es

$$C_2(SU(2)) = \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1 \right), \quad (4.24)$$

donde l corresponde en nuestro caso a la longitud del diagrama de young, por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array}}^l, \quad l = 1, \\ \\ \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \end{array}}^l, \quad l = 3. \end{array}$$

Finalmente podemos reescribir (4.11) como

$$\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}} = C_2(SU(4)) - C_2(SU(2) \times SU(2)) - \frac{1}{8}(n_i - n_A)^2. \quad (4.25)$$

Este resultado se puede generalizar a $\mathbb{G}r_{n;2}$, lo cual no haremos aquí, razonando de forma similar siguiendo las ideas antes expuestas. A continuación vamos a mostrar con algunos ejemplos sencillos que el método de conteo de cajas funciona correctamente.

Supongamos que tenemos el diagrama $\overline{\square\square}$, calcularemos el eigenvalor resultante de aplicar $\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}}$ a este diagrama y luego lo resolveremos con nuestro método de conteo de cajas.

Aplicando directamente (4.10) a nuestro diagrama tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}} \overline{\square\square} &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i \} (\bar{u}_m^\gamma u_\eta^m), \\ &= \frac{1}{2} (4\bar{u}_i^\gamma u_\eta^i - 4\bar{u}_A^\gamma u_\eta^A), \\ &= 4\bar{u}_i^\gamma u_\eta^i, \\ &= 4 \overline{\square\square}, \end{aligned}$$

para obtener este resultado hemos utilizado que $\delta_\eta^\gamma = \bar{u}_i^\gamma u_\eta^i + \bar{u}_A^\gamma u_\eta^A = 0$ debido al requerimiento de que las trazas son nulas.

Ahora aplicamos el método de conteo de cajas al diagrama:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}} \overline{\square\square} &\stackrel{(4.25)}{=} \left[C_2(SU(4)) - C_2(SU(2) \times SU(2)) - \frac{1}{8}(n_i - n_A)^2 \right] \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \\ &\stackrel{(4.19, 4.23)}{=} [C_2(SU(4))] \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \\ &\stackrel{(4.12)}{=} \frac{1}{2} \left[(4 + 1 + 1) - \frac{1}{4}(4^2) + 3(2) + 1 - 1 \right] \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \\ &= 4 \overline{\square\square}. \end{aligned}$$

4.1. Método de conteo de cajas

Como podemos observar el método de conteo de cajas es consistente con el cálculo directo.

Otro ejemplo sencillo es verificar el método para el diagrama $\overline{\square} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \square$, para ello procedemos de la forma anterior, primero aplicamos directamente (4.10) al diagrama:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}} \overline{\square} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \square &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i \} (\bar{u}_i^\gamma u_\eta^l u_{[\mu}^B u_{\nu]}^n \epsilon_{mn}), \\
&= 2\bar{u}_i^\gamma u_\eta^i u_{[\mu}^B u_{\nu]}^n \epsilon_{mn} - 2\bar{u}_A^\gamma u_\eta^A u_{[\mu}^B u_{\nu]}^n \epsilon_{mn} - \bar{u}_A^\gamma u_\eta^n u_{[\mu}^B u_{\nu]}^A \epsilon_{mn} \\
&\quad + \bar{u}_i^\gamma u_\eta^B u_{[\mu}^i u_{\nu]}^n \epsilon_{mn} + \bar{u}_i^\gamma u_\eta^l (2u_{[\mu}^B u_{\nu]}^n \epsilon_{mn} + u_{[\mu}^n u_{\nu]}^B \epsilon_{mn}), \\
&= 5\bar{u}_i^\gamma u_\eta^i u_{[\mu}^B u_{\nu]}^n \epsilon_{mn} - \bar{u}_i^\gamma u_\eta^n u_{[\nu}^B u_{\mu]}^i \epsilon_{mn} + \bar{u}_i^\gamma u_\mu^B u_{[\eta}^i u_{\nu]}^n \epsilon_{mn}, \\
&= 6 \overline{\square} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \square.
\end{aligned}$$

Por otro lado con el método de conteo de cajas obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}} \overline{\square} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \square &\stackrel{(4.25)}{=} \left[C_2(SU(4)) - C_2(SU(2) \times SU(2)) - \frac{1}{8}(n_i - n_A)^2 \right] \overline{\square} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \square, \\
&\stackrel{(4.19, 4.20)}{=} [C_2(SU(4)) - C_2(SU(2) \times SU(2))] \overline{\square} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \square, \\
&\stackrel{(4.23)}{=} \left[C_2(SU(4)) - \frac{3}{2} \right] \overline{\square} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \square, \\
&\stackrel{(4.12)}{=} \left\{ \frac{1}{2} \left[(9 + 4 + 1) - \frac{1}{4}(6^2) + 3(3) + 2 - 1 \right] - \frac{3}{2} \right\} \begin{array}{|c|c|} \hline & A \\ \hline & i \\ \hline & j \\ \hline \end{array}, \\
&= 6 \overline{\square} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \square.
\end{aligned}$$

Otros diagramas donde hemos verificado el método de forma simple (en el aspecto de que el álgebra realizada en los cálculos no es extensa) son \square , $\overline{\square}$, $\overline{\square} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \square$, $\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array}$ y $\begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline i \\ \hline \end{array}$; cabe mencionar que la eficacia y utilidad del método es mejor apreciada en el cálculo del espectro para las funciones y 1-formas que realizaremos más adelante.

4.1.2. Espectro del operador de Dirac cuadrático en $\mathbb{G}r_{4;2}$

En esta sección vamos a calcular el espectro del operador de Dirac cuadrático \mathcal{D}^2 sobre las funciones y 1-formas definidas en las Grasmanianas unitarias $\mathbb{G}r_{4;2}$. Del Capítulo 3 obtenemos que las funciones en las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{4;2}$ están representadas por

los diagramas de Young (3.8):

$$Y = \sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 0}}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \gamma & \cdots & \\ \hline \alpha & \cdots & \\ \beta & \cdots & \\ \hline \end{array}}^p \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \cdots & \\ \hline \mu & \cdots & \\ \nu & \cdots & \\ \hline \end{array}}^l \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu & \cdots & \\ \hline \eta & \cdots & \\ \hline \end{array}}^{l+q} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \eta & \cdots & \\ \hline \hline \hline \end{array}}^p.$$

Para calcular el espectro es útil tener presente que $\mathcal{K}_B^A \zeta_{\alpha\beta} = \mathcal{K}_B^A \bar{\zeta}^{\alpha\beta} = 0$, $\mathcal{K}_i^j \zeta_{\alpha\beta} = \delta_i^j \zeta_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{K}_i^j \bar{\zeta}^{\alpha\beta} = -\delta_i^j \bar{\zeta}^{\alpha\beta}$. Primero calculamos el espectro para las funciones, aplicando el operador de Dirac cuadrático a cada diagrama de Young de Y , abusando ligeramente la notación lo denotamos Y :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 Y |\Omega\rangle &\stackrel{(4.1)}{=} (\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}} - T_A^B \mathcal{K}_B^A - T_j^i \mathcal{K}_i^j) Y |\Omega\rangle, \\ &= (\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}} - T_j^i \mathcal{K}_i^j) \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^p \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^l \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^{l+q} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \hline \hline \end{array}}^p |\Omega\rangle, \\ &\stackrel{(4.4, 4.25)}{=} \left(C_2(SU(4)) - \frac{1}{8}(n_i - n_A)^2 + 2q \right) \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^p \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^l \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^{l+q} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \hline \hline \end{array}}^p |\Omega\rangle, \\ &\stackrel{(4.17, 4.18, 4.19)}{=} \left(C_2(SU(4)) - \frac{(2q)^2}{8} + 2q \right) \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^p \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^l \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^{l+q} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \hline \hline \end{array}}^p |\Omega\rangle, \\ &\stackrel{(4.12)}{=} \left(\left(2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 4l + 3p + 2q + \frac{q^2}{2} \right) - \frac{q^2}{2} + 2q \right) Y |\Omega\rangle, \\ &= (2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 4l + 3p + 4q) Y |\Omega\rangle. \end{aligned} \tag{4.26}$$

El espectro resultante de aplicar el operador de Dirac cuadrático a las funciones es la expresión en rojo en (4.26). El cálculo de este espectro usando directamente (4.10) puede consultarse en el Apéndice H. Comparando el método de conteo de cajas desarrollado anteriormente con el cálculo directo en dicho Apéndice uno concluye que el método de conteo de cajas presentado en esta tesis es una herramienta poderosa para calcular el espectro.

De (3.20) tenemos que la expansión para las 1-formas definidas en las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{4;2}$ es (destacando las 1-formas exactas):

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^p \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^l \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & \cdots & \\ \hline \iota & \cdots & \\ \hline \end{array}}^{l+q} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \hline \hline \end{array}}^p + \sum_{\substack{l=1 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \iota & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^{p+1} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^{l-1} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^{l+q-1} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}}^{p+1} +$$

Y_1
 Y_2

4.1. Método de conteo de cajas

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{cccc} \overbrace{\square \dots \square}^p & \overbrace{\square \dots \square}^l & \overbrace{\square \dots \square}^{l+q-1} & \overbrace{\square \dots \square}^{p+1} \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \begin{array}{c} \iota \\ A \end{array} + \sum_{\substack{l=1 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{cccc} \overbrace{\square \dots \square}^{p+1} & \overbrace{\square \dots \square}^{l-1} & \overbrace{\square \dots \square}^{l+q} & \overbrace{\square \dots \square}^{p-1} \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \begin{array}{c} \iota \\ A \end{array} + \\
& \sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{cccc} \overbrace{\square \dots \square}^{p-1} & \overbrace{\square \dots \square}^l & \overbrace{\square \dots \square}^{l+q} & \overbrace{\square \dots \square}^{p-1} \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \begin{array}{c} \iota \\ A \end{array} \\
& \qquad \qquad \qquad Y_3 \qquad \qquad \qquad Y_4 \qquad \qquad \qquad Y_5
\end{aligned}$$

Procediendo de manera similar a lo realizado para las funciones calculamos el eigenvalor del espinor correspondiente al diagrama Y_1 :

$$\mathcal{D}^2 Y_1 \gamma_A^\iota |\Omega\rangle = (\Delta_{\text{Gr}_{4;2}} - T_A^B \mathcal{K}_B^A - T_j^i \mathcal{K}_i^j) \begin{array}{cccc} \overbrace{\square \dots \square}^p & \overbrace{\square \dots \square}^l & \overbrace{\square \dots \square}^{l+q} & \overbrace{\square \dots \square}^p \\ \square & \square & A & \square \\ \square & \square & \iota & \square \end{array} \gamma_A^\iota |\Omega\rangle,$$

para la contribución de la expresión en color verde usamos el método de conteo de cajas, cuyo resultado es:

$$\Delta_{\text{Gr}_{4;2}} Y_1 \gamma_A^\iota |\Omega\rangle = (2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 4l + 3p + 3q - 2) Y_1 \gamma_A^\iota |\Omega\rangle, \quad (4.27)$$

la contribución en rojo la obtenemos fácilmente usando el resultado (4.7):

$$-T_A^B \mathcal{K}_B^A Y_1 \gamma_A^\iota |\Omega\rangle = Y_1 \gamma_A^\iota |\Omega\rangle \quad (4.28)$$

y para la última contribución hacemos el cálculo directamente:

$$\begin{aligned}
-T_j^i \mathcal{K}_i^j Y_1 \gamma_A^m |\Omega\rangle &= -T_j^i \mathcal{K}_i^j \zeta_{\mu_{l+q-1} \nu_{l+q-1}} \zeta_{\eta_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha_i \beta_i} \bar{\zeta}^{\gamma_p \delta_p} u_{[\mu}^A u_{\nu]}^n \epsilon_{mn} \gamma_A^m |\Omega\rangle, \\
&= -\mathcal{K}_i^j (\zeta_{\mu_{l+q-1} \nu_{l+q-1}} \zeta_{\eta_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha_i \beta_i} \bar{\zeta}^{\gamma_p \delta_p} u_{[\mu}^A u_{\nu]}^n \epsilon_{mn}) ([T_j^i, \gamma_A^m] + \gamma_A^m T_j^i) |\Omega\rangle, \\
&\stackrel{(4.4, 4.5)}{=} -\mathcal{K}_i^j (\zeta_{\mu_{l+q-1} \nu_{l+q-1}} \zeta_{\eta_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha_i \beta_i} \bar{\zeta}^{\gamma_p \delta_p} u_{[\mu}^A u_{\nu]}^n \epsilon_{mn}) (\delta_j^m \gamma_A^i - \delta_j^i \gamma_A^m) |\Omega\rangle, \\
&= -(q-1) \delta_i^j \zeta_{\mu_{l+q-1} \nu_{l+q-1}} \zeta_{\eta_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha_i \beta_i} \bar{\zeta}^{\gamma_p \delta_p} u_{[\mu}^A u_{\nu]}^n \epsilon_{mn} (\delta_j^m \gamma_A^i - \delta_j^i \gamma_A^m) |\Omega\rangle \\
&\quad - \delta_i^n \zeta_{\mu_{l+q-1} \nu_{l+q-1}} \zeta_{\eta_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha_i \beta_i} \bar{\zeta}^{\gamma_p \delta_p} u_{[\mu}^A u_{\nu]}^j \epsilon_{mn} (\delta_j^m \gamma_A^i - \delta_j^i \gamma_A^m) |\Omega\rangle, \\
&= (q+1) Y_1 \gamma_A^m |\Omega\rangle. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

De (4.27), (4.28) y (4.29) obtenemos el resultado:

$$\mathcal{D}^2 Y_1 \gamma_A^\iota |\Omega\rangle = (2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 4l + 3p + 4q) Y_1 \gamma_A^\iota |\Omega\rangle. \quad (4.30)$$

Para el resto de los diagramas de la expansión de las 1-formas encontramos los siguientes resultados:

$$\mathcal{D}^2 Y_2 \gamma_A^\iota |\Omega\rangle = (2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 2l + 3p + 3q) Y_2 \gamma_A^\iota |\Omega\rangle, \quad (4.31)$$

$$\mathcal{D}^2 Y_3 \gamma_A^i |\Omega\rangle = \left(2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 3l + 3p + 4q - \frac{7}{4} \right) Y_3 \gamma_A^i |\Omega\rangle, \quad (4.32)$$

$$\mathcal{D}^2 Y_4 \gamma_A^i |\Omega\rangle = (2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 2l + 2p + 3q - 1) Y_4 \gamma_A^i |\Omega\rangle, \quad (4.33)$$

$$\mathcal{D}^2 Y_5 \gamma_A^i |\Omega\rangle = (2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 2l + p + 3q - 2) Y_5 \gamma_A^i |\Omega\rangle. \quad (4.34)$$

En la siguiente tabla colocamos cada diagrama de Young con su respectivo eigenvalor:

	Diagrama de Young (Y)	Eigenvalor (λ)
Funciones	$\begin{array}{cccc} \overbrace{\square \cdots \square}^p & \overbrace{\square \cdots \square}^l & \overbrace{\square \cdots \square}^{l+q} & \overbrace{\square \cdots \square}^p \\ \square & \cdots & \cdots & \cdots \\ \square & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$	$2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 4l + 3p + 4q$
1-formas	$\begin{array}{cccc} \overbrace{\square \cdots \square}^p & \overbrace{\square \cdots \square}^l & \overbrace{\square \cdots \square}^{l+q} & \overbrace{\square \cdots \square}^p \\ \square & \cdots & A \cdots & \cdots \\ \square & \cdots & \iota \cdots & \cdots \end{array}$	$2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 4l + 3p + 4q$
	$\begin{array}{cccc} \overbrace{\square \cdots \square}^{p+1} & \overbrace{\square \cdots \square}^{l-1} & \overbrace{\square \cdots \square}^{l+q-1} & \overbrace{\square \cdots \square}^{p+1} \\ \iota \cdots & \cdots & \cdots & \cdots A \\ \square & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$	$2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 2l + 3p + 3q$
	$\begin{array}{cccc} \overbrace{\square \cdots \square}^p & \overbrace{\square \cdots \square}^l & \overbrace{\square \cdots \square}^{l+q-1} & \overbrace{\square \cdots \square}^{p+1} \\ \square & \cdots & \cdots & \cdots \iota A \\ \square & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$	$2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 3l + 3p + 4q - \frac{7}{4}$
	$\begin{array}{cccc} \overbrace{\square \cdots \square}^{p+1} & \overbrace{\square \cdots \square}^{l-1} & \overbrace{\square \cdots \square}^{l+q} & \overbrace{\square \cdots \square}^{p-1} \\ \iota \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \square & \cdots & \cdots & A \end{array}$	$2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 2l + 2p + 3q - 1$
	$\begin{array}{cccc} \overbrace{\square \cdots \square}^{p-1} & \overbrace{\square \cdots \square}^l & \overbrace{\square \cdots \square}^{l+q} & \overbrace{\square \cdots \square}^{p-1} \\ \square & \cdots & \iota \cdots & \cdots \\ \square & \cdots & A \cdots & \cdots \end{array}$	$2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 2l + p + 3q - 2$

Tabla 4.1: Tabla que muestra el espectro del operador cuadrático de Dirac de las funciones y 1-formas de la Grasmaniana $\mathbb{G}r_{4;2}$.

4.1.3. Espectro del operador de Dirac

Una vez hallado el espectro del operador cuadrático de Dirac, podemos determinar el espectro para el operador de Dirac, \mathcal{D} , en las Grasmanianas $\mathbb{G}r_{n;2}$; para tal fin definimos el operador de quiralidad:

$$\Gamma = \prod_{i,A} [\gamma_A^i, \gamma_i^A], \quad (4.35)$$

el cual satisface lo siguiente:

$$\{\Gamma, \gamma_A^i\} = \{\Gamma, \gamma_i^A\} = 0, \quad \Gamma^2 = \mathbf{1}; \quad (4.36)$$

y del teorema de Lichnerowicz [14, 18] sabemos que

$$\mathcal{D}^2 = \Delta_S + \frac{R}{4}, \quad (4.37)$$

donde R es la curvatura escalar y S representa el espacio de campos espinoriales de la variedad Riemanniana \mathcal{M} , en nuestro caso la variedad es la Grasmaniana $\mathbb{G}r_{n;2}$ para $n = 4$, que presenta una estructura de espín. El teorema de Lichnerowicz implica que una variedad de espín con curvatura estrictamente positiva no tiene modos cero [14], así que nuestro interés es únicamente estudiar los modos que son diferentes de cero, sin embargo señalemos que ciertas estructuras de espín^c permiten modos cero, y este también es presumiblemente el caso para $\mathbb{G}r_{n;2}$ aunque sus espectros de espín^c no se conocen.

El espectro de \mathcal{D} puede ser construido a partir del espectro de \mathcal{D}^2 (el cual ha sido calculado en la sección anterior para las funciones y 1-formas de $\mathbb{G}r_{4;2}$), la ventaja es que \mathcal{D}^2 está completamente escrito en términos de operadores de Casimir cuadráticos y por lo tanto su espectro es fácil de calcular. Sea $\psi_\lambda^{(\sigma)}$ el eigenespinor de \mathcal{D}^2 con eigenvalor λ y (σ) denotando la degeneración, entonces podemos escribir

$$\mathcal{D}^2 \psi_\lambda^{(\sigma)} = \lambda \psi_\lambda^{(\sigma)}, \quad (4.38)$$

donde $\psi_\lambda^{(\sigma)}$ tiene una quiralidad definida ya que $[\mathcal{D}^2, \gamma] = 0$ además verificaremos que $\lambda > 0$. Bajo estas condiciones cada eigenespinor de \mathcal{D}^2 corresponde exactamente a dos eigenespinores de \mathcal{D} [14]:

$$\psi_\lambda^{(\sigma, \pm)} = \psi_\lambda^{(\sigma)} \pm \frac{\mathcal{D} \psi_\lambda^{(\sigma)}}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4.39)$$

y finalmente el espectro puede ser obtenido de

$$\mathcal{D} \psi_\lambda^{(\sigma, \pm)} = \pm \sqrt{\lambda} \psi_\lambda^{(\sigma, \pm)}, \quad (4.40)$$

con λ los eigenvalores encontrados en la sección anterior.

Por último analicemos lo siguiente: si se tuviera un modo cero ψ_0 esto implicaría que $\mathcal{D} \psi_0 = 0$; sin embargo, Δ_S es un operador positivo y por tanto se cumple $\langle \psi_0, \Delta_S \psi_0 \rangle \geq 0$ y ya que $R > 0$ esto implicaría la contradicción $|\mathcal{D} \psi_0|^2 = \langle \psi_0, \mathcal{D}^2 \psi_0 \rangle > 0$ y de esto se sigue que $\lambda > 0$.

Conclusiones

“¿Podrías decirme, por favor, qué camino debo seguir para salir de aquí?

-Esto depende en gran parte del sitio al que quieras llegar, dijo el Gato”.

—*Lewis Carroll*

Hemos resuelto el problema espectral del operador de Dirac en $\mathbb{G}r_{4;2}$ al proveer un método simple (conteo de cajas y el uso de los operadores diferenciales n_i, n_A , que son especiales para $n = 4$) para calcular el espectro, y construir las eigenfunciones espinoriales (eigenespinores) de manera explícita en coordenadas de Plücker. Para verificar que funciona hemos reproducido correctamente el espectro para los sectores espinoriales de 0-formas y 1-formas. Aunque no hemos calculado de forma completa el espectro del operador de Dirac en las 2, 3 y 4-formas, tal cálculo ahora es una tarea meramente mecánica, completarlo permitiría extender el resultado conocido en [19] del espectro de \mathcal{D} sobre la Grassmanniana $\mathbb{G}r_{4;2}$ para la estructura de espín (que es única), al espectro para todas las estructuras de espín^c; un cálculo considerablemente más complejo permitiría extender el resultado general obtenido en [19] para $\mathbb{G}r_{n;2}$.

5.1. Aplicaciones

Conocer el espectro del operador de Dirac en un espacio M es de utilidad para varios problemas físicos, algunos de los cuales ya fueron mencionados en la introducción, pero mencionaremos otros; es posible por ejemplo en un espacio-tiempo E escribir la ecuación de Dirac libre en forma hamiltoniana, al menos en un sistema coordenado adecuado, en la forma

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = H_D \psi$$

donde el Hamiltoniano de Dirac tiene la estructura $H_D = \gamma^0 \gamma^i \nabla_i + \gamma^0 m$, en particular para fermiones sin masa $m = 0$, un caso de particular importancia para el estudio del grafeno [6, 23], lleva a un hamiltoniano que es $H_D = \Gamma^i \nabla_i$, que puede interpretarse como un operador de Dirac \mathcal{D}_M en una rebanada espacial (*space-like slice*) de E , visto como una foliación sobre el parámetro τ (por ejemplo en Relatividad General) sobre M , donde $\Gamma^i := \gamma^0 \gamma^i$ son matrices de Dirac para la métrica de M , es decir $\{\Gamma^i, \Gamma^j\} = 2\gamma^{ij} \mathbf{1}$. De este modo los eigenvalores de \mathcal{D}_M son las frecuencias permitidas, y resuelve la ecuación de Dirac en E mediante transformada de Fourier en τ .

Visto de otra manera el mismo problema puede concebirse como hallar los modos cero del operador de Dirac en E

$$\mathcal{D}_E \psi = 0.$$

Por otra parte conocer el espectro de energías de fermiones en un espacio M es indispensable si se desean tratar problemas de muchos cuerpos, por ejemplo el gas de fermiones no interactuante en M o el efecto Hall cuántico, donde se han estudiado generalizaciones de las funciones de onda de Laughlin partiendo de ideas similares [7].

Aunque no hemos tratado los modos cero en este trabajo, estos corresponden a los llamados espinores armónicos, definidos por $\nabla_i \psi = 0$ (covariantemente constantes), los cuales son de gran importancia en topología diferencial donde proveen mediante el teorema de Atiyah-Singer información de la topología de M . Una generalización puede hallarse en [2] junto con una discusión más detallada que incluye espinores de Killing, una generalización de los espinores de Dirac.

5.2. Algunas preguntas abiertas

Hay una serie de preguntas que es interesante plantear y responder, y que pueden investigarse mediante los métodos que hemos presentado en este trabajo, algunas de las que consideramos que vale la pena mencionar son

1. Extender la solución a $\mathbb{G}r_{n;2}$ para $n > 4$. Se sabe que la respuesta será intrincada, principalmente porque no es sencillo construir el haz de espín en el caso general, y porque de los resultados que se conocen para $\mathbb{G}r_{n;2}$ se sabe que $n = 4$ es especialmente simple.
2. ¿Existe alguna manera simple de construir las representaciones adecuadas del haz de espín en el caso de un espacio homogéneo general? Este es un problema de

clasificación. En [11] el haz de espín se asume conocido de forma abstracta pero no se tiene una determinación constructiva.

3. Aplicar los resultados obtenidos a problemas físicos. Esto parece mucho más probable en problemas de física-matemática donde se presenten problemas de fermiones sobre las Grasmanianas.
4. Investigar los modos cero y los espinores de Killing en las Grasmanianas.

Operador de acción derecha tangente

Nuestro objetivo en este Apéndice es demostrar que

$$\mathcal{K}_A^i \bar{u} = -\lambda_A^i \bar{u},$$

ésta es una de las expresiones que definimos en (2.5).

Sabemos que

$$\bar{u}_\alpha^\beta = \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \quad (\text{A.1})$$

y notemos que

$$-\lambda_A^i \bar{u} = -(\lambda_A^i \bar{u})_\alpha^\beta = -(\lambda_A^i)_\alpha^\gamma \bar{u}_\gamma^\beta \stackrel{(2.4)}{=} -\delta_\alpha^i \delta_A^\gamma \bar{u}_\gamma^\beta = -\delta_\alpha^i \bar{u}_A^\beta. \quad (\text{A.2})$$

Además de (2.8) tenemos que $\mathcal{K}_A^i = u_\mu^i \partial_A^\mu - \bar{u}_A^\mu \bar{\partial}_\mu^i$, aplicando a \bar{u} se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_A^i \bar{u}_\alpha^\beta &= \frac{u_\mu^i}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha} \sum_{j=1}^{n-1} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots \widehat{\delta_A^{\alpha_j} \delta_{\beta_j}^\mu} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} \sum_{j=1}^{n-1} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots \widehat{u_{\beta_j}^\mu} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \epsilon_{\alpha_1 \dots \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{n-1} \alpha} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} \sum_{j=1}^{n-1} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \delta_{\alpha_j}^i \epsilon_{\alpha_1 \dots \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{n-1} \alpha}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

en (A.3) se ha usado $u_{\beta_j}^\mu = u_{\beta_j}^{\alpha_j} \delta_{\alpha_j}^\mu$. Observemos que si sustituimos

$$\epsilon_{\alpha_1 \dots \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{n-1} \alpha} \delta_{\alpha_j}^i = \epsilon_{\alpha_1 \dots \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{n-1} \alpha_j} \delta_{\alpha_j}^i - \sum_{k \neq j} (\pm) \epsilon_{\alpha_1 \dots \widehat{\alpha_j} \dots \widehat{\alpha_k} \dots \alpha_{n-1} \alpha} \delta_{\alpha_k}^i$$

en (A.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_A^i \bar{u}_\alpha^\beta &= \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_{\alpha_1 \dots \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{n-1} \alpha_j} \delta_{\alpha_j}^i \\ &\quad - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k \neq j} \epsilon^{\beta_1 \dots \widehat{\beta_j} \dots \widehat{\beta_k} \dots \beta} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots u_{\beta_j}^{\alpha_j} \dots u_{\beta_k}^{\alpha_k} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \epsilon_{\alpha_1 \dots \widehat{\alpha_j} \dots \widehat{\alpha_k} \dots \alpha_{n-1} \alpha} \delta_{\alpha_k}^i. \end{aligned}$$

Intercambiando $\alpha_j \leftrightarrow \alpha_k$ y $\beta_j \leftrightarrow \beta_k$ en el segundo término de la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_A^i \bar{u}_\alpha^\beta &= \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_{\alpha_1 \dots \hat{A} \dots \alpha_{n-1} \alpha_j} \delta_\alpha^i \\ &\quad - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k \neq j} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \epsilon_{\alpha_1 \dots \hat{A} \dots \alpha_{n-1} \alpha} \delta_{\alpha_j}^i. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

De (A.3) y (A.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_A^i \bar{u}_\alpha^\beta &= \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} \sum_{j=1}^{n-1} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \epsilon_{\alpha_1 \dots \hat{A} \dots \alpha_{n-1} \alpha_j} \delta_{\alpha_j}^i \\ &= \frac{1}{(n-1)} \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_{\alpha_1 \dots \hat{A} \dots \alpha_{n-1} \alpha_j} \delta_\alpha^i \\ &= -\frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta} u_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots u_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} A} \delta_\alpha^i \\ &= -\delta_\alpha^i \bar{u}_A^\beta = -(\lambda_A^i \bar{u})_\alpha^\beta \\ &\quad \therefore \mathcal{K}_A^i \bar{u} = -\lambda_A^i \bar{u} \blacktriangle \end{aligned}$$

Aniquilación de $f(\zeta, \bar{\zeta})$

En este apéndice vamos a demostrar que el operador \mathcal{K}_j^i aniquila cualquier función diferenciable $f(\zeta, \bar{\zeta})$ definida sobre $\mathbb{G}r_{n;2}$.

Sabemos que

$$\zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} u_\alpha^i u_\beta^j, \quad \text{y} \quad \bar{\zeta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{ij} \bar{u}_i^\alpha \bar{u}_j^\beta.$$

Aplicamos \mathcal{K}_j^i a $\zeta_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j^i \zeta_{\alpha\beta} &= u_\mu^i \partial_j^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{kl} u_\alpha^k u_\beta^l \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_{jl} u_\alpha^i u_\beta^l + \epsilon_{kj} u_\beta^i u_\alpha^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{jk} (u_\alpha^i u_\beta^k - u_\alpha^k u_\beta^i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{jk} [(\delta_m^i \delta_n^k - \delta_n^i \delta_m^k) u_\alpha^m u_\beta^n] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{jk} \epsilon^{ik} \epsilon_{mn} u_\alpha^m u_\beta^n \\ &= \delta_j^i \zeta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Ahora aplicamos \mathcal{K}_j^i a $\bar{\zeta}^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j^i \bar{\zeta}^{\alpha\beta} &= -\bar{u}_j^\mu \bar{\partial}_\mu^i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{kl} \bar{u}_k^\alpha \bar{u}_l^\beta \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon^{il} \bar{u}_j^\alpha \bar{u}_l^\beta + \epsilon^{kl} \bar{u}_j^\beta \bar{u}_k^\alpha) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{il} (\bar{u}_j^\alpha \bar{u}_l^\beta - \bar{u}_j^\beta \bar{u}_l^\alpha) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{il} [(\delta_j^m \delta_l^n - \delta_j^n \delta_l^m) \bar{u}_m^\alpha \bar{u}_n^\beta] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{il} \epsilon_{jl} \epsilon^{mn} \bar{u}_m^\alpha \bar{u}_n^\beta \\ &= -\delta_j^i \bar{\zeta}^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Ahora bien, sea $f(\zeta, \bar{\zeta})$ una función diferenciable sobre $\mathbb{G}r_{n;2}$ entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_j^i f(\zeta, \bar{\zeta}) &= u_\mu^i \partial_j^\mu f - \bar{u}_j^\mu \bar{\partial}_\mu^i f = u_\mu^i \partial_\zeta f \partial_j^\mu \zeta_{\alpha\beta} - \bar{u}_j^\mu \partial_{\bar{\zeta}} f \bar{\partial}_\mu^i \bar{\zeta}^{\alpha\beta} \\
 &= \partial_\zeta f u_\mu^i \partial_j^\mu \zeta_{\alpha\beta} - \partial_{\bar{\zeta}} f \bar{u}_j^\mu \bar{\partial}_\mu^i \bar{\zeta}^{\alpha\beta} \\
 &\stackrel{(B.1, B.2)}{=} \delta_j^i (\zeta \partial_\zeta - \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}}) f,
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

donde se entiende que $\partial_\zeta = \frac{\partial}{\partial \zeta}$. Debido a que f es una función invariante bajo la transformación $\zeta_{\alpha\beta} \rightarrow \zeta'_{\alpha\beta} = e^{i\theta} \zeta_{\alpha\beta}$ implica que

$$f(\zeta, \bar{\zeta}) = f(\zeta', \bar{\zeta}'),$$

derivando ambos lados con respecto a θ se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\zeta, \bar{\zeta}) = 0 \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial \theta} f(e^{i\theta} \zeta, e^{-i\theta} \bar{\zeta}) \\
 &= i (\zeta' \partial_{\zeta'} - \bar{\zeta}' \partial_{\bar{\zeta}'}) f.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

De (B.4) y (B.5) concluimos que $\zeta \partial_\zeta - \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}}$ en (B.3) es cero y por tanto \mathcal{K}_j^i aniquila a f . Más aún, si f es expandida como una serie el efecto de \mathcal{K}_j^i en cada término polinomial de la serie es $\delta_j^i (\#(\zeta) - \#(\bar{\zeta}))$ y \mathcal{K}_j^i aniquila a f (de forma análoga a lo demostrado anteriormente) debido a que es invariante bajo transformaciones de $U(1)$.

Identidades de Fierz

Aquí explicaremos a detalle la deducción de las correspondientes identidades de Fierz para las matrices de Gell-Mann de $SU(n)$.

Empezamos dando una base $\{\lambda_a, \mathbf{1}\}$ donde λ_a son las matrices de Gell-Mann y $\mathbf{1}$ es la matriz identidad, éstas son matrices $n \times n$. Las matrices de Gell-Mann tienen traza nula $\text{Tr}(\lambda_a) = 0$ y obedecen la relación de normalización $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$.

Sea $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $M = M^\dagger$, donde \dagger indica conjugación hermítica, escribimos esta matriz en términos de nuestra base:

$$\begin{aligned} M &= z_a \cdot \lambda_a + z_0 \cdot \mathbf{1} \quad z_a, z_0 \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow \text{Tr}(M) &= \text{Tr}(z_a \cdot \lambda_a) + \text{Tr}(z_0 \cdot \mathbf{1}) \\ &= 0 + nz_0 \\ \Rightarrow z_0 &= \frac{\text{Tr}(M)}{n} \end{aligned} \tag{C.1}$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M\lambda_b) &= \text{Tr}(z_a \cdot \lambda_a \cdot \lambda_b) + \text{Tr}(z_0 \cdot \mathbf{1} \cdot \lambda_b) \\ &= 2z_a \delta_{ab} + 0 = 2z_b \\ \Rightarrow z_b &= \frac{1}{2} \text{Tr}(M\lambda_b) \end{aligned} \tag{C.2}$$

Usando (C.1) y (C.2) podemos reescribir M como

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \text{Tr}(M\lambda_a) \cdot \lambda_a + \frac{\text{Tr}(M)}{n} \cdot \mathbf{1} \quad \forall M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \\ \Rightarrow M_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} M_{\nu\mu} (\lambda_a)_{\mu\nu} (\lambda_a)_{\alpha\beta} + \frac{1}{n} M_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Podemos reescribir la expresión (C.3) de la forma

$$\delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta} M_{\nu\mu} = \frac{1}{2} M_{\nu\mu} (\lambda_a)_{\mu\nu} (\lambda_a)_{\alpha\beta} + \frac{1}{n} \delta_{\mu\nu} M_{\nu\mu} \delta_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_{\nu\mu} \left[\delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta} - \frac{1}{2} (\lambda_a)_{\mu\nu} (\lambda_a)_{\alpha\beta} - \frac{1}{n} \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} \right] &= 0 \\ \Rightarrow \delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta} &= \frac{1}{2} (\lambda_a)_{\mu\nu} (\lambda_a)_{\alpha\beta} + \frac{1}{n} \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

despejando obtenemos las identidades de Fierz buscadas

$$(\lambda_a)_{\mu\nu} (\lambda_a)_{\alpha\beta} = 2 \left(\delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta} - \frac{1}{n} \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} \right),$$

que también podemos escribir como:

$$(\lambda_a)_{\nu}^{\mu} (\lambda_a)_{\beta}^{\alpha} = 2 \left(\delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\mu} - \frac{1}{n} \delta_{\nu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} \right).$$

Laplaciano de $SU(n)$

Esta sección esta dedicada al cálculo del Laplaciano de $SU(n)$. Por simplicidad vamos a calcularlo de $\Delta_{SU(n)} = \mathcal{L}_a^2$, y para tal fin usaremos las siguientes ecuaciones:

$$\mathcal{L}_a = - \left(\frac{\lambda_a}{2} \right)_\beta^\alpha [u_\alpha^\mu \partial_\mu^\beta - \bar{u}_\mu^\beta \bar{\partial}_\alpha^\mu], \quad (\text{D.1})$$

$$(\lambda_a)_\beta^\alpha (\lambda_a)_\nu^\mu = 2 \left(\delta_\nu^\alpha \delta_\beta^\mu - \frac{1}{n} \delta_\nu^\mu \delta_\beta^\alpha \right), \quad (\text{D.2})$$

$$\partial_\nu^\mu u_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\lambda, \quad \bar{\partial}_\nu^\mu \bar{u}_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\lambda, \quad \bar{\partial}_\nu^\mu u_\alpha^\lambda = \partial_\nu^\mu \bar{u}_\alpha^\lambda = 0, \quad (\text{D.3})$$

$$\bar{u}_\beta^\gamma u_\gamma^\alpha = \bar{u}_\gamma^\alpha u_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha. \quad (\text{D.4})$$

Empezamos tomando el cuadrado de (D.1):

$$\mathcal{L}_a^2 \stackrel{(\text{D.1})}{=} \left(-\frac{\lambda_a}{2} \right)_\beta^\alpha \left(-\frac{\lambda_a}{2} \right)_\nu^\mu \underbrace{[u_\alpha^\rho \partial_\rho^\beta - \bar{u}_\rho^\beta \bar{\partial}_\alpha^\rho] [u_\mu^\sigma \partial_\sigma^\nu - \bar{u}_\sigma^\nu \bar{\partial}_\mu^\sigma]}_{\square} \stackrel{(\text{D.2})}{=} \frac{1}{2} \left(\delta_\nu^\alpha \delta_\beta^\mu - \frac{1}{n} \delta_\nu^\mu \delta_\beta^\alpha \right) (\square) \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \square &= u_\alpha^\rho \partial_\rho^\beta u_\mu^\sigma \partial_\sigma^\nu + u_\alpha^\rho u_\mu^\sigma \partial_\rho^\beta \partial_\sigma^\nu - \bar{u}_\rho^\beta \bar{\partial}_\alpha^\rho u_\mu^\sigma \partial_\sigma^\nu - \bar{u}_\rho^\beta u_\mu^\sigma \bar{\partial}_\alpha^\rho \partial_\sigma^\nu \\ &\quad - u_\alpha^\rho \partial_\rho^\beta \bar{u}_\sigma^\nu \bar{\partial}_\mu^\sigma - u_\alpha^\rho \bar{u}_\sigma^\nu \partial_\rho^\beta \bar{\partial}_\mu^\sigma + \bar{u}_\rho^\beta \bar{\partial}_\alpha^\rho \bar{u}_\sigma^\nu \bar{\partial}_\mu^\sigma + \bar{u}_\rho^\beta \bar{u}_\sigma^\nu \bar{\partial}_\alpha^\rho \bar{\partial}_\mu^\sigma \\ &\stackrel{(\text{D.3})}{=} \delta_\mu^\beta u_\alpha^\sigma \partial_\sigma^\nu + u_\alpha^\rho u_\mu^\sigma \partial_\rho^\beta \partial_\sigma^\nu - \bar{u}_\rho^\beta u_\mu^\sigma \bar{\partial}_\alpha^\rho \partial_\sigma^\nu - u_\alpha^\rho \bar{u}_\sigma^\nu \partial_\rho^\beta \bar{\partial}_\mu^\sigma + \delta_\alpha^\nu \bar{u}_\sigma^\beta \bar{\partial}_\mu^\sigma + \bar{u}_\rho^\beta \bar{u}_\sigma^\nu \bar{\partial}_\alpha^\rho \bar{\partial}_\mu^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Ahora calculemos por partes el producto $(\delta_\nu^\alpha \delta_\beta^\mu - \frac{1}{n} \delta_\nu^\mu \delta_\beta^\alpha) (\square)$:

$$\begin{aligned} (I) &= \left(\delta_\nu^\alpha \delta_\beta^\mu - \frac{1}{n} \delta_\nu^\mu \delta_\beta^\alpha \right) [\delta_\mu^\beta u_\alpha^\sigma \partial_\sigma^\nu + u_\alpha^\rho u_\mu^\sigma \partial_\rho^\beta \partial_\sigma^\nu] \\ &= n u_\alpha^\sigma \partial_\sigma^\alpha - \frac{1}{n} u_\alpha^\sigma \partial_\sigma^\alpha + u_\alpha^\rho u_\beta^\sigma \partial_\rho^\beta \partial_\sigma^\alpha - \frac{1}{n} u_\alpha^\rho u_\mu^\sigma \partial_\rho^\alpha \partial_\sigma^\mu \\ &\quad \mu \rightarrow \beta \\ &= \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) u_\alpha^\sigma \partial_\sigma^\alpha + u_\alpha^\rho u_\beta^\sigma \left(\partial_\rho^\beta \partial_\sigma^\alpha - \frac{1}{n} \partial_\rho^\alpha \partial_\sigma^\beta \right) \\ &\quad \sigma \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \beta \quad \rho \rightarrow \alpha, \sigma \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \mu, \beta \rightarrow \nu \\ &= \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) u_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + u_\mu^\alpha u_\nu^\beta \left(\partial_\beta^\mu \partial_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \partial_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu \right) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned}
 (II) &= \left(\delta_\nu^\alpha \delta_\beta^\mu - \frac{1}{n} \delta_\nu^\mu \delta_\beta^\alpha \right) \left[\delta_\alpha^\nu \bar{u}_\sigma^\beta \bar{\partial}_\mu^\sigma + \bar{u}_\rho^\beta \bar{u}_\sigma^\nu \bar{\partial}_\alpha^\rho \bar{\partial}_\mu^\sigma \right] \\
 &= n \bar{u}_\sigma^\beta \bar{\partial}_\beta^\sigma - \frac{1}{n} \bar{u}_\sigma^\beta \bar{\partial}_\beta^\sigma + \bar{u}_\rho^\beta \bar{u}_\sigma^\alpha \bar{\partial}_\alpha^\rho \bar{\partial}_\beta^\sigma - \frac{1}{n} \bar{u}_\rho^\beta \bar{u}_\sigma^\mu \bar{\partial}_\beta^\rho \bar{\partial}_\mu^\sigma \\
 &= \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) \bar{u}_\sigma^\beta \bar{\partial}_\beta^\sigma + \bar{u}_\rho^\beta \bar{u}_\sigma^\alpha \left(\bar{\partial}_\alpha^\rho \bar{\partial}_\beta^\sigma - \frac{1}{n} \bar{\partial}_\beta^\rho \bar{\partial}_\alpha^\sigma \right) \\
 &= \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) \bar{u}_\beta^\alpha \bar{\partial}_\alpha^\beta + \bar{u}_\mu^\alpha \bar{u}_\nu^\beta \left(\bar{\partial}_\beta^\mu \bar{\partial}_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \bar{\partial}_\alpha^\mu \bar{\partial}_\beta^\nu \right) \tag{D.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (III) &= \left(\delta_\nu^\alpha \delta_\beta^\mu - \frac{1}{n} \delta_\nu^\mu \delta_\beta^\alpha \right) \left[-\bar{u}_\rho^\beta u_\mu^\sigma \bar{\partial}_\alpha^\rho \partial_\sigma^\nu - u_\alpha^\rho \bar{u}_\sigma^\nu \partial_\rho^\beta \bar{\partial}_\mu^\sigma \right] \\
 &= -\bar{u}_\rho^\beta u_\beta^\sigma \bar{\partial}_\alpha^\rho \partial_\sigma^\alpha + \frac{1}{n} \bar{u}_\rho^\alpha u_\nu^\sigma \bar{\partial}_\alpha^\rho \partial_\sigma^\nu - u_\nu^\rho \bar{u}_\sigma^\nu \partial_\rho^\beta \bar{\partial}_\beta^\sigma + \frac{1}{n} \bar{u}_\sigma^\mu u_\beta^\rho \bar{\partial}_\mu^\sigma \partial_\rho^\beta \\
 &\stackrel{(D.4)}{=} -\bar{\partial}_\alpha^\sigma \partial_\sigma^\alpha + \frac{1}{n} \bar{u}_\rho^\alpha u_\beta^\sigma \bar{\partial}_\alpha^\rho \partial_\sigma^\beta - \bar{\partial}_\beta^\sigma \partial_\sigma^\beta + \frac{1}{n} \bar{u}_\rho^\alpha u_\beta^\sigma \bar{\partial}_\alpha^\rho \partial_\sigma^\beta \\
 &= -2 \bar{\partial}_\alpha^\sigma \partial_\sigma^\alpha + \frac{2}{n} \bar{u}_\rho^\alpha u_\beta^\sigma \bar{\partial}_\alpha^\rho \partial_\sigma^\beta \\
 &= -2 \bar{\partial}_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + \frac{2}{n} \bar{u}_\mu^\alpha u_\nu^\beta \bar{\partial}_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu. \tag{D.9}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (D.7), (D.8) y (D.9) en (D.5) tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_a^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) u_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + u_\mu^\alpha u_\nu^\beta \left(\partial_\beta^\mu \partial_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \partial_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu \right) + \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) \bar{u}_\beta^\alpha \bar{\partial}_\alpha^\beta \right. \\
 &\quad \left. + \bar{u}_\mu^\alpha \bar{u}_\nu^\beta \left(\bar{\partial}_\beta^\mu \bar{\partial}_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \bar{\partial}_\alpha^\mu \bar{\partial}_\beta^\nu \right) - 2 \bar{\partial}_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + \frac{2}{n} \bar{u}_\mu^\alpha u_\nu^\beta \bar{\partial}_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n^2 - 1}{n} (u_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + \bar{u}_\beta^\alpha \bar{\partial}_\alpha^\beta) - 2 \bar{\partial}_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + \frac{2}{n} \bar{u}_\mu^\alpha u_\nu^\beta \bar{\partial}_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu \right. \\
 &\quad \left. + u_\mu^\alpha u_\nu^\beta \left(\partial_\beta^\mu \partial_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \partial_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu \right) + \bar{u}_\mu^\alpha \bar{u}_\nu^\beta \left(\bar{\partial}_\beta^\mu \bar{\partial}_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \bar{\partial}_\alpha^\mu \bar{\partial}_\beta^\nu \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \Delta_{SU(n)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n^2 - 1}{n} (u_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + \bar{u}_\beta^\alpha \bar{\partial}_\alpha^\beta) - 2 \bar{\partial}_\beta^\alpha \partial_\alpha^\beta + \frac{2}{n} \bar{u}_\mu^\alpha u_\nu^\beta \bar{\partial}_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu \right. \\
 &\quad \left. + u_\mu^\alpha u_\nu^\beta \left(\partial_\beta^\mu \partial_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \partial_\alpha^\mu \partial_\beta^\nu \right) + \bar{u}_\mu^\alpha \bar{u}_\nu^\beta \left(\bar{\partial}_\beta^\mu \bar{\partial}_\alpha^\nu - \frac{1}{n} \bar{\partial}_\alpha^\mu \bar{\partial}_\beta^\nu \right) \right\} \blacktriangle
 \end{aligned}$$

Cuadrado del operador de Dirac

En este Apéndice se encuentran los detalles del cálculo del cuadrado del operador de Dirac.

Empezamos con nuestro anzats para el operador de Dirac:

$$\mathcal{D} = \gamma_i^A \mathcal{K}_A^i + \gamma_A^i \mathcal{K}_i^A \quad (\text{E.1})$$

y calculamos su cuadrado directamente de esta expresión obteniendo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= (\gamma_i^A \mathcal{K}_A^i + \gamma_A^i \mathcal{K}_i^A)(\gamma_j^B \mathcal{K}_B^j + \gamma_B^j \mathcal{K}_j^B) \\ &= \gamma_i^A \gamma_j^B \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_B^j + \gamma_A^i \gamma_j^B \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_B^j + \gamma_i^A \gamma_B^j \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_j^B + \gamma_A^i \gamma_B^j \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_j^B. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Ahora notemos que

$$\begin{aligned} \gamma_i^A \gamma_j^B &= \frac{1}{2}[\gamma_i^A, \gamma_j^B] \\ \gamma_A^i \gamma_j^B &= \frac{1}{2}\{\gamma_A^i, \gamma_j^B\} + \frac{1}{2}[\gamma_A^i, \gamma_j^B] = \frac{1}{2}\delta_j^B \delta_A^i + \frac{1}{2}[\gamma_A^i, \gamma_j^B] \\ \gamma_i^A \gamma_B^j &= \frac{1}{2}\{\gamma_i^A, \gamma_B^j\} + \frac{1}{2}[\gamma_i^A, \gamma_B^j] = \frac{1}{2}\delta_i^A \delta_B^j + \frac{1}{2}[\gamma_i^A, \gamma_B^j] \\ \gamma_A^i \gamma_B^j &= \frac{1}{2}[\gamma_A^i, \gamma_B^j] \end{aligned}$$

donde hemos usado los resultados en (3.2). Sustituyendo estas expresiones en (E.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \frac{1}{2}[\gamma_i^A, \gamma_j^B] \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_B^j + \frac{1}{2}\delta_j^B \delta_A^i \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_B^j + \frac{1}{2}[\gamma_A^i, \gamma_j^B] \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_B^j \\ &\quad + \frac{1}{2}\delta_i^A \delta_B^j \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_j^B + \frac{1}{2}[\gamma_i^A, \gamma_B^j] \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_j^B + \frac{1}{2}[\gamma_A^i, \gamma_B^j] \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_j^B, \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

de donde

$$\begin{aligned} [\gamma_i^A, \gamma_j^B] \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_B^j &= \gamma_i^A \gamma_j^B \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_B^j - \gamma_j^B \gamma_i^A \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_B^j = \gamma_i^A \gamma_j^B \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_B^j - \gamma_i^A \gamma_j^B \mathcal{K}_B^j \mathcal{K}_A^i \\ &= \gamma_i^A \gamma_j^B [\mathcal{K}_A^i, \mathcal{K}_B^j] = 0 \end{aligned}$$

pues por (2.14) sabemos que el conmutador $[\mathcal{K}_A^i, \mathcal{K}_B^j] = 0$. De forma análoga se obtiene $[\gamma_A^i, \gamma_B^j] \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_j^B = 0$.

Sustituyendo los dos resultados anteriores en (E.3) y simplificando se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \frac{1}{2} \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_A^i + \frac{1}{2} \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_i^A + \frac{1}{2} [\gamma_A^i, \gamma_j^B] \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_B^j + \frac{1}{2} [\gamma_i^A, \gamma_B^j] \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_j^B \\ &= \frac{1}{2} \{\mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i\} + \frac{1}{2} [\gamma_A^i, \gamma_j^B] [\mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_B^j], \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

la ecuación (E.4) se puede reescribir en términos de operadores de Casimir cuadráticos si sustituimos el conmutador $[\mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_B^j] = \delta_i^j \mathcal{K}_B^A - \delta_B^A \mathcal{K}_i^j$ y usamos las definiciones $T_B^A = \frac{1}{2} [\gamma_i^A, \gamma_B^i]$ y $T_j^i = \frac{1}{2} [\gamma_A^i, \gamma_j^A]$, obteniendo finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \frac{1}{2} \{\mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i\} + \frac{1}{2} [\gamma_A^i, \gamma_i^B] \mathcal{K}_B^A - \frac{1}{2} [\gamma_A^i, \gamma_j^A] \mathcal{K}_i^j \\ &= \frac{1}{2} \{\mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i\} - T_A^B \mathcal{K}_B^A - T_j^i \mathcal{K}_i^j. \end{aligned}$$

1-formas exactas

En este Apéndice vamos a encontrar la estructura de las 1-formas exactas que se obtiene de $\mathcal{D}\psi_0$ para una función cargada. Empezamos de

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\psi_0|\Omega\rangle &= (\gamma_i^A \mathcal{K}_A^i + \gamma_A^i \mathcal{K}_i^A)\psi_0|\Omega\rangle, \\ &= \gamma_A^i \mathcal{K}_i^A \psi_0|\Omega\rangle,\end{aligned}\tag{F.1}$$

en (F.1) hemos usado la definición $\gamma_i^A|\Omega\rangle = 0$. Ahora calculemos $\mathcal{K}_i^A \psi_0$:

$$\mathcal{K}_i^A \psi_0 = \mathcal{K}_i^A \mathcal{P}_{(\alpha_{l+q}, \beta_{l+q}; \gamma_p)}^{(\mu_l, \nu_l; \eta_p)}(\mu'_{l+q}, \nu'_{l+q}; \eta'_p) \zeta_{\mu'_{l+q} \nu'_{l+q}} \zeta_{\eta'_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha'_l \beta'_l} \bar{\zeta}^{\gamma'_p \delta_p},\tag{F.2}$$

en este punto es útil recordar que

$$\mathcal{K}_i^A \bar{\zeta}^{\alpha\beta} = 0, \quad \mathcal{K}_i^A \zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} u_{[\alpha}^A u_{\beta]}^j.\tag{F.3}$$

Sustituyendo los resultados de (F.3) en (F.2) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_i^A \psi_0 &= \sum_{r=1}^{l+q} \mathcal{P}_{(\alpha_{l+q}, \beta_{l+q}; \gamma_p)}^{(\mu_l, \nu_l; \eta_p)}(\mu'_{l+q}, \nu'_{l+q}; \eta'_p) \zeta_{\mu'_{l+q} \nu'_{l+q}} \zeta_{\eta'_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha'_l \beta'_l} \bar{\zeta}^{\gamma'_p \delta_p} \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} u_{[\mu_r}^A u_{\nu_r]}^j \\ &+ \sum_{s=1}^p \mathcal{P}_{(\alpha_{l+q}, \beta_{l+q}; \gamma_p)}^{(\mu_l, \nu_l; \eta_p)}(\mu'_{l+q}, \nu'_{l+q}; \eta'_p) \zeta_{\mu'_{l+q} \nu'_{l+q}} \zeta_{\eta'_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha'_l \beta'_l} \bar{\zeta}^{\gamma'_p \delta_p} \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} u_{[\eta_s}^A u_{\delta_s]}^j\end{aligned}\tag{F.4}$$

donde el símbolo \wedge^r indica que los índices $\mu'_r \nu'_r$ fueron suprimidos. En el segundo término hay una contracción de la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} u_{[\eta_s}^A u_{\delta_s]}^j \bar{\zeta}^{\gamma'_s \delta_s} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (u_{\eta'_s}^A u_{\delta_s}^j - u_{\delta_s}^A u_{\eta'_s}^j) \epsilon^{kl} \bar{u}_k^{\gamma'_s} \bar{u}_l^{\delta_s}, \\ &= \frac{1}{2} \bar{u}_i^{\gamma'_s} u_{\eta'_s}^A,\end{aligned}$$

notemos que para obtener este resultado hemos usado $u_{\delta_s}^j \bar{u}_l^{\delta_s} = \delta_l^j$ y $u_{\delta_s}^A \bar{u}_l^{\delta_s} = 0$. Sustituyendo este resultado en (F.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i^A \psi_0 &= \sum_{r=1}^{l+q} \mathcal{P}_{(\alpha_{l+q}, \beta_{l+q}; \gamma_p)(\alpha'_l \beta'_l; \gamma'_p)}^{(\mu_l, \nu_l; \eta_p)(\mu'_{l+q}, \nu'_{l+q}; \eta'_p)} \zeta_{\mu'_{l+q} \nu'_{l+q}}^{\Lambda^r} \zeta_{\eta'_p \delta_p} \bar{\zeta}_{\alpha'_l \beta'_l} \bar{\zeta}_{\gamma'_p \delta_p} \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} u_{[\mu'_r}^A u_{\nu'_r]}^j \quad (\text{F.5}) \\ &+ \sum_{s=1}^p \mathcal{P}_{(\alpha_{l+q}, \beta_{l+q}; \gamma_p)(\alpha'_l \beta'_l; \gamma'_p)}^{(\mu_l, \nu_l; \eta_p)(\mu'_{l+q}, \nu'_{l+q}; \eta'_p)} \zeta_{\mu'_{l+q} \nu'_{l+q}}^{\Lambda^s} \zeta_{\eta'_p \delta_p} \bar{\zeta}_{\alpha'_l \beta'_l} \bar{\zeta}_{\gamma'_p \delta_p} \frac{1}{2} \bar{u}_l^{\gamma'_s} u_{\eta'_s}^A. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos (F.5) en (F.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \psi_0 |\Omega\rangle &= \sum_{r=1}^{l+q} \mathcal{P}_{(\alpha_{l+q}, \beta_{l+q}; \gamma_p)(\alpha'_l \beta'_l; \gamma'_p)}^{(\mu_l, \nu_l; \eta_p)(\mu'_{l+q}, \nu'_{l+q}; \eta'_p)} \zeta_{\mu'_{l+q} \nu'_{l+q}}^{\Lambda^r} \zeta_{\eta'_p \delta_p} \bar{\zeta}_{\alpha'_l \beta'_l} \bar{\zeta}_{\gamma'_p \delta_p} \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} u_{[\mu'_r}^A u_{\nu'_r]}^j \gamma_A^i |\Omega\rangle \quad (\text{F.6}) \\ &+ \sum_{s=1}^p \mathcal{P}_{(\alpha_{l+q}, \beta_{l+q}; \gamma_p)(\alpha'_l \beta'_l; \gamma'_p)}^{(\mu_l, \nu_l; \eta_p)(\mu'_{l+q}, \nu'_{l+q}; \eta'_p)} \zeta_{\mu'_{l+q} \nu'_{l+q}}^{\Lambda^s} \zeta_{\eta'_p \delta_p} \bar{\zeta}_{\alpha'_l \beta'_l} \bar{\zeta}_{\gamma'_p \delta_p} \frac{1}{2} \bar{u}_l^{\gamma'_s} u_{\eta'_s}^A \gamma_A^i |\Omega\rangle, \end{aligned}$$

las expresiones en verde, traducidas a nuestro lenguaje de diagramas de Young (usando nuestro diccionario pictórico de la sección 3.4), nos da la estructura para las 1-formas exactas:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad\quad}^p \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^l \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^{l+q} \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^p \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdots & \cdots & A & \cdots & \cdots \\ \hline & \cdots & l & \cdots & \\ \hline \end{array} \oplus \end{array} \quad (\text{F.7}) \\ &\sum_{\substack{l=1 \\ l+q \geq 1}}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad\quad}^{p+1} \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^{l-1} \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^{l+q-1} \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^{p+1} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline l & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A \\ \hline & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

Expansión de las 1-formas

El objetivo principal de este Apéndice es mostrar la construcción explícita de la expansión para las 1-formas en (3.20) usando el método de descomposición de Clebsch-Gordan y recordando que las 1-formas tienen la estructura

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & L & \\ \hline \dots & & \\ \hline & L+q-1 & \\ \hline \dots & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \iota \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p & l & l+q-1 & p \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \iota \\ \hline \end{array} \quad (G.1)$$

Método de descomposición de Clebsch-Gordan

Primero pegamos la caja \boxed{A} :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p & l & l+q-1 & p \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \iota \\ \hline \end{array} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p & l & l+q-1 & p \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & & A \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p & l & l+q-1 & p \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & & A \\ \hline \end{array} \\
 \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p & l & l+q-1 & p \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & A & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p & l & l+q-1 & p \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & A & \\ \hline \end{array} \\
 \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p & l & l+q-1 & p \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p & l & l+q-1 & p \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \iota \\ \hline \end{array}
 \end{array} \right.$$

Notemos que los diagramas (IV) y (V) son cero debido a que $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline A \\ \hline \end{array} = 0$ y $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline A \\ \hline \end{array} = 0$.

Ahora pegamos la caja $\boxed{\imath}$ al diagrama (I), resultando:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\dots}}^p \overbrace{\boxed{\dots}}^l \overbrace{\boxed{\dots}}^{l+q-1} \overbrace{\boxed{\dots}}^p \boxed{A} \\
 \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\imath} \\
 \text{(Ia)}
 \end{array}
 \oplus
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\dots}}^p \overbrace{\boxed{\dots}}^l \overbrace{\boxed{\dots}}^{l+q-1} \overbrace{\boxed{\dots}}^p \boxed{A} \\
 \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\imath} \quad \boxed{\dots} \\
 \text{(Ib)}
 \end{array}$$

$$\oplus
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\dots}}^p \overbrace{\boxed{\dots}}^l \overbrace{\boxed{\dots}}^{l+q-1} \overbrace{\boxed{\dots}}^p \boxed{A} \\
 \boxed{\imath} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \\
 \text{(Ic)}
 \end{array}
 \oplus
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\dots}}^p \overbrace{\boxed{\dots}}^l \overbrace{\boxed{\dots}}^{l+q-1} \overbrace{\boxed{\dots}}^p \boxed{A} \\
 \boxed{\imath} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \\
 \text{(Id)}
 \end{array}$$

Los diagramas (Ia) y (Ib) no representan mayor problema podemos intercambiar \boxed{A} con cualquier $\boxed{}$ de la primer fila (esto es debido a que los índices que corresponden a cajas de la forma $\boxed{}$ en una misma fila son simétricos) y de forma similar $\boxed{\imath}$ se puede intercambiar con cualquier $\boxed{}$ de la segunda fila. Por ejemplo para (Ia) tenemos

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\dots}}^p \overbrace{\boxed{\dots}}^l \overbrace{\boxed{\dots}}^{l+q-1} \overbrace{\boxed{\dots}}^p \boxed{A} \\
 \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\imath}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\dots}}^p \overbrace{\boxed{\dots}}^l \overbrace{\boxed{A \dots}}^{l+q} \overbrace{\boxed{\dots}}^p \\
 \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\imath} \quad \boxed{\dots}
 \end{array}$$

Para los últimos dos diagramas en cambio hay que tener en cuenta lo siguiente: en (Ic) hay una contracción debido a

$$\begin{array}{c}
 \boxed{} \\
 \boxed{} \\
 \boxed{\imath}
 \end{array}
 = u_{\alpha}^{\imath} \bar{\zeta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{\alpha}^{\imath} \epsilon^{kl} \bar{u}_k^{\alpha} \bar{u}_l^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_k^{\imath} \epsilon^{kl} \bar{u}_l^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{l\imath} \bar{u}_l^{\beta} \longrightarrow \overline{\boxed{\imath}} \quad (\text{G.2})$$

y en (Id) hay una contracción debido a

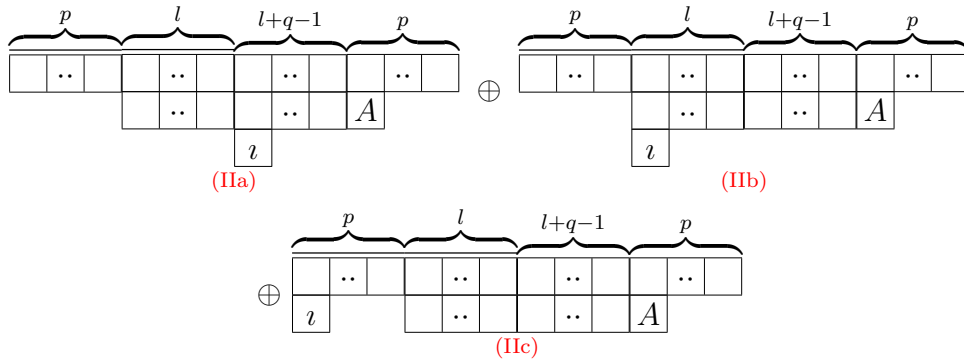
$$\begin{array}{c}
 \overline{\boxed{}} \\
 \boxed{\imath}
 \end{array}
 = u_{\gamma}^{\imath} \bar{\zeta}^{\gamma\delta} \zeta_{\eta\delta} \stackrel{(\text{G.2})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{l\imath} \bar{u}_l^{\delta} \zeta_{\eta\delta} = \frac{1}{2} \epsilon^{l\imath} \epsilon_{mn} \bar{u}_l^{\delta} u_{\eta}^m u_{\delta}^n = \frac{1}{2} u_{\eta}^{\imath} \longrightarrow \boxed{\imath} \quad (\text{G.3})$$

Bajo estas consideraciones podemos reescribir los diagramas (Ic) e (Id) como:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\dots}}^p \overbrace{\boxed{\dots}}^l \overbrace{\boxed{\dots}}^{l+q-1} \overbrace{\boxed{\dots}}^p \boxed{A} \\
 \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\imath} \\
 \boxed{\imath}
 \end{array}
 \stackrel{(\text{G.2})}{=}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\imath \dots}}^{p+1} \overbrace{\boxed{\dots}}^{l-1} \overbrace{\boxed{\dots}}^{l+q-1} \overbrace{\boxed{\dots}}^{p+1} \boxed{A} \\
 \boxed{\imath} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots}
 \end{array}$$

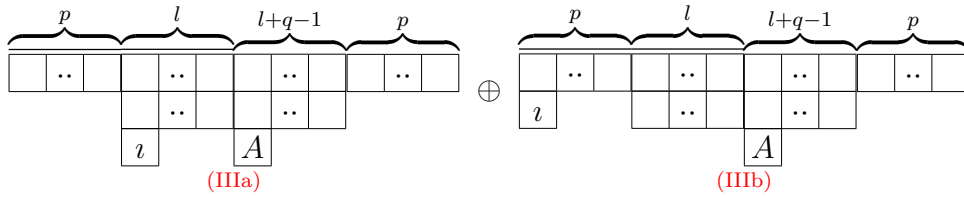
$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\dots}}^p \overbrace{\boxed{\dots}}^l \overbrace{\boxed{\dots}}^{l+q-1} \overbrace{\boxed{\dots}}^p \boxed{A} \\
 \boxed{\imath} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots}
 \end{array}
 \stackrel{(\text{G.3})}{=}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\boxed{\dots}}^p \overbrace{\boxed{\dots}}^l \overbrace{\boxed{\dots}}^{l+q-1} \overbrace{\boxed{\dots \imath A}}^{p+1} \\
 \boxed{\imath} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots} \quad \boxed{\dots}
 \end{array}$$

Ahora pegamos la caja $\boxed{\iota}$ al diagrama (II), resultando:



Notemos que solo los diagramas (IIb) y (IIc) presentan contracciones, por lo que se procede de manera similar a lo descrito anteriormente.

Finalmente pegamos la caja $\boxed{\iota}$ al diagrama (III), resultando:



Las contracciones en estos dos diagramas se tratan de la misma forma antes descrita. Tomando en cuenta todas las consideraciones detalladas a lo largo de este Apéndice obtenemos la expansión para las 1-formas en (3.20).

Espectro del operador \mathbb{D}^2 sobre funciones

En este Apéndice vamos a calcular el espectro resultante de operar el Dirac cuadrático (4.10) directamente a las funciones definidas en la Grasmaniana $\mathbb{G}r_{4;2}$, cuya representación está contenida en (3.8):

$$Y = \sum_{\substack{l=0 \\ l+q \geq 0}}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \gamma & \cdots & \\ \hline \alpha & \cdots & \\ \hline \beta & \cdots & \\ \hline \end{array}}^p \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}^l \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu & \cdots & \\ \hline \nu & \cdots & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}^{l+q} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \eta & \cdots & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}^p.$$

Para calcular tal espectro es útil tener presente que $\mathcal{K}_B^A \zeta_{\alpha\beta} = \mathcal{K}_B^A \bar{\zeta}^{\alpha\beta} = 0$, $\mathcal{K}_i^i \zeta_{\alpha\beta} = \delta_i^j \zeta_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{K}_i^j \bar{\zeta}^{\alpha\beta} = -\delta_i^j \bar{\zeta}^{\alpha\beta}$. Aplicando el Dirac cuadrático directamente a Y tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2 Y |\Omega\rangle &\stackrel{(4.1)}{=} (\Delta_{\mathbb{G}r_{4;2}} - T_A^B \mathcal{K}_B^A - T_j^i \mathcal{K}_i^j) Y |\Omega\rangle, \\ &\stackrel{(4.10)}{=} \left(\frac{1}{2} \{ \mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i \} - T_j^i \mathcal{K}_i^j \right) Y |\Omega\rangle. \end{aligned} \tag{H.1}$$

El segundo término se calcula fácilmente recordando que $T_j^i |\Omega\rangle = -\frac{1}{2}(n-2)\delta_j^i |\Omega\rangle$, así

$$\begin{aligned} -T_j^i \mathcal{K}_i^j Y |\Omega\rangle &= \delta_j^i \mathcal{K}_i^j \zeta_{\mu_{l+q}\nu_{l+q}} \zeta_{\eta_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha_i \beta_l} \bar{\zeta}^{\gamma_p \delta_p} |\Omega\rangle, \\ &= \delta_j^i \delta_i^j q \zeta_{\mu_{l+q}\nu_{l+q}} \zeta_{\eta_p \delta_p} \bar{\zeta}^{\alpha_i \beta_l} \bar{\zeta}^{\gamma_p \delta_p} |\Omega\rangle, \\ &= 2q Y |\Omega\rangle. \end{aligned} \tag{H.2}$$

Reescribiendo Y de una forma más conveniente calculamos la contribución debida al Laplaciano:

$$\frac{1}{2} \{ \mathcal{K}_i^A, \mathcal{K}_A^i \} Y |\Omega\rangle = \frac{1}{2} \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_A^i \zeta_{\mu_{l+q}\nu_{l+q}} \bar{\zeta}^{\alpha_i \beta_l} \bar{u}_i^\gamma u_j^\gamma |\Omega\rangle + \frac{1}{2} \mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_i^A \zeta_{\mu_{l+q}\nu_{l+q}} \bar{\zeta}^{\alpha_i \beta_l} \bar{u}_j^\gamma u_i^\gamma |\Omega\rangle, \tag{H.3}$$

donde hemos usado la notación $\bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j = \bar{u}_{i_1}^{\gamma_1} \cdots \bar{u}_{i_p}^{\gamma_p} u_{\eta_1}^{i_1} \cdots u_{\eta_p}^{i_p}$. Resolvemos por partes (H.3), del primer término tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_A^i \zeta_{\mu_{l+q} \nu_{l+q}} \bar{\zeta}^{\alpha_l \beta_l} \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j &= \mathcal{K}_i^A \sum_{r=1}^l \zeta_{\mu_{l+q} \nu_{l+q}} \bar{\zeta}^{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_A^{[\alpha_r} \bar{u}_m^{\beta_r]} \epsilon^{im} \right) \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j \quad (\text{H.4}) \\ &+ \mathcal{K}_i^A \sum_{r=1}^p \zeta_{\mu_{l+q} \nu_{l+q}} \bar{\zeta}^{\alpha_l \beta_l} \left(-\delta_{j_r}^i \bar{u}_A^{\gamma_r} \right) \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j, \quad (\text{H.5}) \end{aligned}$$

aquí $\bar{\zeta}^{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}$ indica que el r -ésimo elemento no está en la expansión de $\bar{\zeta}^{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}}$. Calculamos primero el término (H.4):

$$(\text{H.4}) = \sum_{r=1}^l \sum_{s=1}^{l+q} \zeta_{\mu_{l+q-1} \nu_{l+q-1}} \bar{\zeta}^{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_A^{[\alpha_r} \bar{u}_m^{\beta_r]} \epsilon^{im} \frac{1}{\sqrt{2}} u_{[\mu_s}^A u_{\nu_s]}^n \epsilon_{in} \right) \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j \quad (\text{H.6})$$

$$+ \sum_{r=1}^l \zeta_{\mu_{l+q} \nu_{l+q}} \bar{\zeta}^{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}} \left(2 \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_i^{[\alpha_r} \bar{u}_m^{\beta_r]} \epsilon^{im} \right) \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j \quad (\text{H.7})$$

$$+ \sum_{r=1}^l \sum_{s=1}^p \zeta_{\mu_{l+q} \nu_{l+q}} \bar{\zeta}^{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_A^{[\alpha_r} \bar{u}_m^{\beta_r]} \epsilon^{im} \right) \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} \delta_i^{j_s} u_{\eta_s}^A u_{\underline{\eta}}^j, \quad (\text{H.8})$$

donde

$$(\text{H.6}) = \sum_{r=1}^l \sum_{s=1}^{l+q} \zeta_{\mu_{l+q-1} \nu_{l+q-1}} \bar{\zeta}^{\alpha_{l-1} \beta_{l-1}} \left(2 \zeta_{\mu_s \nu_s} \bar{\zeta}^{\alpha_r \beta_r} \right) \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j, \quad (\text{H.9})$$

$$= 2l(l+q)Y. \quad (\text{H.10})$$

Para obtener (H.9) hemos usado que $\delta_{\mu_s}^{\alpha_r} = \bar{u}_A^{\alpha_r} u_{\mu_s}^A + \bar{u}_k^{\alpha_r} u_{\mu_s}^k = 0$ (por el requerimiento de que las trazas son nulas), lo cual implica $\bar{u}_A^{\alpha_r} u_{\mu_s}^A = -\bar{u}_k^{\alpha_r} u_{\mu_s}^k$ y posteriormente usamos la identidad $\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_i^{[\alpha} \bar{u}_m^{\beta]} = \bar{\zeta}^{\alpha \beta} \epsilon_{im}$. Usando una identidad similar a la antes mencionada encontramos:

$$(\text{H.7}) = 4lY, \quad (\text{H.11})$$

y por argumentos análogos a los usados para obtener (H.9) obtenemos:

$$(\text{H.8}) = lpY. \quad (\text{H.12})$$

Ahora calculamos el término (H.5):

$$(\text{H.5}) = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^{l+q} \zeta_{\mu_{l+q-1} \nu_{l+q-1}} \bar{\zeta}^{\alpha_l \beta_l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u_{[\mu_s}^A u_{\nu_s]}^n \epsilon_{in} \right) \left(-\delta_{j_r}^i \bar{u}_A^{\gamma_r} \right) \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j \quad (\text{H.13})$$

$$+ \sum_{r=1}^p \zeta_{\mu_{l+q} \nu_{l+q}} \bar{\zeta}^{\alpha_l \beta_l} \left(\delta_{j_r}^i \delta_A^A \bar{u}_i^{\gamma_r} \right) \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j \quad (\text{H.14})$$

$$+ \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p \zeta_{\mu_{l+q} \nu_{l+q}} \bar{\zeta}^{\alpha_l \beta_l} \left(-\delta_{j_r}^i \bar{u}_A^{\gamma_r} \right) \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} \left(\delta_i^{j_s} u_{\eta_s}^A \right) u_{\underline{\eta}}^j, \quad (\text{H.15})$$

el término (H.13) se resuelve de manera análoga a (H.9) y nos da como resultado:

$$(H.13) = p(l + q)Y, \quad (H.16)$$

el siguiente término es inmediato:

$$(H.14) = 2pY. \quad (H.17)$$

Por último resolvemos el término (H.15), en el cual podemos reescribir $\bar{u}_A^{\gamma r} u_{\eta_s}^A = -\bar{u}_{j_r}^{\gamma r} u_{\eta_s}^{j_r}$ y notamos que tenemos dos contribuciones, una para el caso cuando $r \neq s$ y otra para el caso cuando $r = s$:

$$\begin{aligned} (H.15) &= - \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p \zeta_{\mu_l+q\nu_l+q} \bar{\zeta}^{\alpha_l\beta_l} \delta_{j_r}^{j_s} \bar{u}_A^{\gamma r} u_{\eta_s}^A \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j \\ &= \sum_{r=1}^p \sum_{r \neq s} \zeta_{\mu_l+q\nu_l+q} \bar{\zeta}^{\alpha_l\beta_l} \delta_{j_r}^{j_s} \bar{u}_{j_r}^{\gamma r} u_{\eta_s}^{j_r} \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j + 2 \sum_{r=1}^p \zeta_{\mu_l+q\nu_l+q} \bar{\zeta}^{\alpha_l\beta_l} \bar{u}_{j_r}^{\gamma r} u_{\eta_r}^{j_r} \bar{u}_{\underline{j}}^{\gamma} u_{\underline{\eta}}^j \\ &= [p(p-1) + 2p]Y. \end{aligned} \quad (H.18)$$

Sumando las contribuciones de (H.4) y (H.5) obtenemos

$$\mathcal{K}_i^A \mathcal{K}_A^i Y = [2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 4l + 3p]Y. \quad (H.19)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al expuesto anteriormente y usando identidades similares a las que se aplicaron para hallar el resultado (H.19), encontramos para el segundo término en (H.3) que

$$\mathcal{K}_A^i \mathcal{K}_i^A Y = [2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 4l + 3p + 4q]Y. \quad (H.20)$$

Teniendo en cuenta (H.2), (H.19) y (H.20) finalmente encontramos que

$$\mathcal{D}^2 Y |\Omega\rangle = [2l^2 + p^2 + 2lp + 2lq + pq + 4l + 3p + 4q]Y |\Omega\rangle, \quad (H.21)$$

así el espectro buscado es el eigenvalor en color verde de la ecuación (H.21).

Bibliografía

- [1] Balli, F., Behtash, A., Kürkçüoğlu, S. y Ünal, G. (2014) Quantum Hall Effect on the Grassmannians $\mathbf{Gr}_2(\mathbb{C}^N)$. arXiv:1403.3823v2
- [2] Bär, C. (1998) On harmonic spinors. *Acta Physica Polonica B*, 29(4): 859-869.
- [3] Cahen, M. y Gutt, S. (1988) Spin structures on compact simply connected Riemannian symmetric spaces. *Simon Stevin*, 62(3/4): 209-242.
- [4] Chami, F. E. (2004) Spectra of the Laplace operator on Grassmann manifolds. *International Journal of Pure and Applied Mathematics, Academic Publications*, 12(4): 395-417.
- [5] Chern, S. S., Chen, W. y Lam, K. S. (1999) Lectures on differential geometry. *Series on university mathematics, 1*.
- [6] DiVicenzo, D. P. y Mele, E. J. (1984) Self-consistent effective-mass theory for intralayer screening in graphite intercalation compounds. *Phys. Rev. B*, 29(4): 1685-1694.
- [7] Dolan, B. P. (2003) The Spectrum of the Dirac Operator on Coset Spaces with Homogeneous Gauge Fields. arXiv:hep-th/0304037v1
- [8] Dolan, B. P. y Nash, C. (2002) Chiral fermions and Spin^c structures on matrix approximations to manifolds. *JHEP* 2002.07: 057
- [9] Escamilla, J. F., Castillo, M. y Duarte, S. (1997) Interpretación geométrica de algunas variedades de Schubert. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 4(1): 5-19.
- [10] Fioresi, R., Lledó, M. A. y Varadarajan, V. S. (2007) The Minkowski and conformal superspaces. arXiv:Math/0609813v2
- [11] Friedrich, T. (2000) *Dirac Operators in Riemannian Geometry* (Vol. 25). Graduate Studies in Mathematics. ISBN: 0-8218-2055-9

-
- [12] Georgi, H. (1999) *Lie Algebras in Particle Physics* (2da. ed., p. 187). United States of America: Westview Press. ISBN: 0-7382-0233-9
- [13] Green, M. B., Schwarz, J. H. y Witten, E. (1987) *Superstring Theory* (Vol. 2). United States of America: Cambridge University Press. ISBN: 0-521-32999-X
- [14] Gutiérrez, S y Huet, I. (2018) Group theoretical approach to the Dirac operator on S^2 . *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1010 012010. doi :10.1088/1742-6596/1010/1/012010
- [15] Huet, I. (2008) Laplacians and Dirac operator on $\mathbb{C}P_F^N$ (tesis doctoral). Dublin Institute for Advanced Studies, Dublin, Ireland.
- [16] Huet, I. y Medina, J. (2015) A Projective Dirac Operator on $\mathbb{C}P^n$ and extended SUSY. arXiv:1508.00857
- [17] Huet, I. y Murray, S. (2012) Polarization Tensors for the fuzzy Grassmannians $\mathbb{G}r_{n;2}^F$ and Grassmannian harmonics on $\mathbb{G}r_{n;2}$. arXiv:1204.3347v1
- [18] Lichnerowicz, A. (1963) Spineurs harmoniques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 257: 7-9.
- [19] Milhorat, J. L. (1998) Spectrum of the Dirac operator on $\mathbb{G}r_2(\mathbb{C}^{m+2})$. *J. Math. Phys*, 39: 594-609.
- [20] O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. (2005) Hermann Günther Grassmann. Recuperado de <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grassmann.html>
- [21] Perelomov, A. M. y Popov, V. S. (1966) Casimir operators for U(N) and SU(N). *Soviet Journal of Nuclear Physics*, 3(5): 676-680.
- [22] Pilch, K. y Schellekens, A. N. (1984) Formulae for the eigenvalues of the Laplacian on tensor harmonics on symmetric coset spaces. *J. Math. Phys*, 25: 3455-3459. doi: 10.1063/1.526101
- [23] Semenoff, G. W. (1984) Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly. *Phys. Rev. Lett*, 53(26): 2449-2452.
- [24] Fujii, K. (2002) Introduction to Grassmann Manifolds and Computation. *J. Appl. Math*, 2: 371-405.