



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD EN CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**EL MODELO DE  
JAYNES-CUMMINGS PARA  
UN ÁTOMO CON TRES  
NIVELES DE ENERGÍA**

**T E S I S**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS**

PRESENTA

**LEONARDI HERNÁNDEZ SÁNCHEZ**

ASESORES

**DR. FRANCISCO SOTO EGUIBAR &  
DR. HECTOR MANUEL MOYA CESSA**

CO-ASESOR

**DR. ARIEL FLORES ROSAS**

**TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS**

**DICIEMBRE DE 2017**



*Entonces Dios dijo: “Que exista la luz”. Y la luz existió.*

**- Génesis 1:3**



**Universidad Autónoma de Chiapas**  
**Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas**  
**Dirección**



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas  
 24 de noviembre de 2017  
 Oficio No. FCFM/0358/16

**Dr. Francisco Soto Eguibar**  
**Dr. Ariel Flores Rosas**  
**Presidente y Director de Tesis**  
**Presente**

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

**"EL MODELO DE JAYNES-CUMMINGS PARA UN ÁTOMO CON TRES NIVELES DE ENERGÍA".**

Ha sido aceptada para sustentar el Examen de Grado de Maestro en Ciencias Físicas del **Lic. Leonardi Hernández Sánchez** con matrícula escolar: X131004.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

**Atentamente**  
**"Por la conciencia de la necesidad de servir"**

  
**Dr. Sendic Estrada Jiménez**  
**Director**



C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.  
 Lic. Ana Gabriel Aguilar Avendaño.- Encargada de Servicios Escolares de la FCFM  
 Archivo / Minutero  
 SEJ fmag

# Agradecimientos

Antes que nada me gustaría agradecer a la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas de la Universidad Autónoma de Chiapas (FCFM-UNACH), al Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por apoyarme en la elaboración de este trabajo de investigación, y con ello culminar mis estudios de maestría.

Quiero también dar mis más sinceros agradecimientos a mis Asesores: Dr. Francisco Soto Eguibar, Dr. Héctor Manuel Moya Cessa y Dr. Ariel Flores Rosas, por su disponibilidad, tiempo, confianza y dedicación. Así como a todos los profesores de mi facultad y a mis sinodales, que me han formado como profesionista y han contribuido de manera especial en mi persona.

Mi último agradecimiento, va para toda mi familia y amigos, por apoyarme en todo este tiempo y a Dios por permitirme tener una vida llena de aprendizajes, experiencias y felicidad.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Cuantización del campo electromagnético</b>	<b>3</b>
2.1. Cuantización de un campo unimodal . . . . .	3
2.2. Estados coherentes . . . . .	10
2.3. Estados térmicos . . . . .	13
<b>3. El modelo de Jaynes-Cummings</b>	<b>17</b>
3.1. Introducción . . . . .	17
3.2. Hamiltoniano de un sistema con dos niveles de energía . . . . .	18
3.3. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo . . . . .	21
3.3.1. Energía dipolar eléctrica en un campo eléctrico uniforme . . . . .	22
3.3.2. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo clásico . . . . .	25
3.3.3. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo cuantizado . . . . .	25
3.4. Modelo semiclásico . . . . .	26
3.5. Modelo cuantizado . . . . .	31
3.6. Resultados numéricos y discusión . . . . .	37
3.6.1. Modelo semiclásico . . . . .	38
3.6.2. Modelo cuantizado . . . . .	38
3.7. Conclusión . . . . .	42
<b>4. Modelo de Jaynes-Cummings para un átomo con tres niveles de energía</b>	<b>43</b>

4.1. Introducción . . . . .	43
4.2. El grupo $SU(3)$ . . . . .	45
4.3. Hamiltoniano de un sistema con tres niveles de energía . . . . .	47
4.3.1. Sistemas con $n$ niveles de energía . . . . .	47
4.3.2. Sistemas con tres niveles de energía . . . . .	48
4.4. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo . . . . .	50
4.4.1. Energía dipolar eléctrica en un campo eléctrico uniforme . . . . .	50
4.4.2. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo clásico . . . . .	51
4.4.3. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo cuantizado . . . . .	52
4.5. Modelo semiclásico . . . . .	54
4.5.1. Sistema tipo $\Xi$ . . . . .	54
4.5.2. Sistema tipo $\Lambda$ . . . . .	60
4.5.3. Sistema tipo $V$ . . . . .	65
4.6. Modelo cuantizado . . . . .	70
4.6.1. Sistema tipo $\Xi$ . . . . .	70
4.6.2. Sistema tipo $\Lambda$ . . . . .	78
4.6.3. Sistema tipo $V$ . . . . .	85
4.7. Resultados numéricos y discusión . . . . .	91
4.7.1. Sistema tipo $\Xi$ . . . . .	92
4.7.2. Sistemas tipo $\Lambda$ y $V$ . . . . .	96
4.8. Conclusión . . . . .	104

# Índice de figuras

2.1. Cavity con paredes perfectamente conductoras . . . . .	3
2.2. Niveles de energía del oscilador armónico . . . . .	9
2.3. Distribuciones de probabilidad para un estado coherente . . . . .	12
2.4. Distribuciones de probabilidad para un estado térmico . . . . .	16
3.1. Diagrama del nivel de energía atómico . . . . .	21
3.2. Dipolo eléctrico . . . . .	22
3.3. Baja energía dipolar . . . . .	22
3.4. Oscilaciones de Rabi del modelo semiclásico . . . . .	38
3.5. Oscilaciones de Rabi del modelo cuantizado . . . . .	39
3.6. El colapso y resurgimiento de los dos niveles de energía para el caso III . .	40
3.7. El colapso y resurgimiento de los dos niveles de energía para el caso IV . .	40
3.8. La inversión atómica de los dos niveles de energía para el caso III . . . . .	40
3.9. La inversión atómica de los dos niveles de energía para el caso IV . . . . .	41
4.1. Configuraciones de los sistemas con tres niveles de energía . . . . .	45
4.2. Oscilaciones de Rabi del sistema tipo $\Xi$ semiclásico . . . . .	92
4.3. Oscilaciones de Rabi del sistema tipo $\Xi$ cuantizado . . . . .	93
4.4. El colapso y el resurgimiento del sistema tipo $\Xi$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso IV . . . . .	95
4.5. El colapso y el resurgimiento del sistema tipo $\Xi$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso V . . . . .	95

4.6. El colapso y el resurgimiento del sistema tipo $\Xi$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso VI . . . . .	95
4.7. La inversión atómica del sistema tipo $\Xi$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso IV . . . . .	96
4.8. La inversión atómica del sistema tipo $\Xi$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso V . . . . .	96
4.9. La inversión atómica del sistema tipo $\Xi$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso VI . . . . .	96
4.10. Oscilaciones de Rabi de los sistemas tipo $\Lambda$ y $V$ semiclásicos . . . . .	98
4.11. Oscilaciones de Rabi de los sistemas tipo $\Lambda$ y $V$ cuantizados . . . . .	99
4.12. El colapso y resurgimiento de los sistemas tipo $\Lambda$ y $V$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso IV . . . . .	101
4.13. El colapso y resurgimiento de los sistemas tipo $\Lambda$ y $V$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso V . . . . .	101
4.14. El colapso y resurgimiento de los sistemas tipo $\Lambda$ y $V$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso VI . . . . .	102
4.15. La inversión atómica de los sistemas tipo $\Lambda$ y $V$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso IV . . . . .	102
4.16. La inversión atómica de los sistemas tipo $\Lambda$ y $V$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso V . . . . .	103
4.17. La inversión atómica de los sistemas tipo $\Lambda$ y $V$ para los tres niveles de energía correspondientes al caso VI . . . . .	103

# Capítulo 1

## Introducción

La óptica cuántica es uno de los campos más vivos de la física en la actualidad; en los últimos años ha tenido un desarrollo muy rápido gracias al progreso de las técnicas experimentales que permiten crear y detectar un fotón, así como también estudiar un átomo dentro de una cavidad superconductora. Las nuevas aplicaciones de la óptica cuántica, tales como los iones fríos, la información y computación cuántica, entre otros, impulsan el estudio de las propiedades colectivas de los sistemas cuánticos [1].

Uno de los modelos más importantes en la Óptica Cuántica es el Modelo de Jaynes Cummings (MJC). Este modelo describe un sistema formado por un modo cuantizado en interacción con un sistema de dos niveles, y fue originalmente propuesto en 1963 por Edwin Thompson Jaynes y Frederick W. Cummings [2, 3], para describir de manera muy idealizada la interacción entre un único átomo y un único modo del campo electromagnético, ambos aislados de la influencia de cualquier entorno perturbador. El MJC es de gran interés en la física atómica, la óptica cuántica y los circuitos de información cuántica, tanto experimental como teóricamente. El MJC vio ampliado su campo de aplicación al descubrirse que también modela un problema aparentemente muy diferente, el de la interacción entre un modo vibracional de un ion atrapado y el ion mismo, jugando ahora el modo vibracional el papel del modo electromagnético del modelo original [4].

En este trabajo de investigación se realiza una extensión del MJC, que consiste en considerar un átomo de tres niveles interactuando con el campo de dos modos (el MJC de tres niveles) [5, 6]. Se observa que muchos fenómenos coherentes interesantes ocurren con el aumento del número de niveles del sistema; es decir, cuando el número de niveles es superior a dos. La evolución dinámica del sistema de tres niveles, en presencia de dos campos monocromáticos fuertes ha sido un tema de importancia fundamental. Ejemplos del interés actual son: la coherencia de dos fotones [7], el proceso de doble resonancia [8], fluorescencia de resonancia [9], salto cuántico [10], entre otros. A partir de estos estudios, se puede intuitivamente argumentar que las condiciones atómicas iniciales del sistema de tres niveles pueden generar diversos efectos ópticos cuánticos que no suelen ser visualizados por un sistema de dos niveles.

El diseño de esta tesis es el siguiente. En el capítulo 2, se muestra cómo el campo electromagnético puede ser cuantizado en términos de osciladores armónicos, que representan los modos del campo electromagnético, con estados que describen cuantas excitaciones (fotones) están presentes en cada modo normal. En el capítulo 3 se describe cómo interactúa un átomo de dos niveles con el campo electromagnético unimodal, deduciendo en detalle el MJC. Finalmente, en el capítulo 4 se hace un estudio exhaustivo del MJC para un átomo con tres niveles de energía interactuando con un campo electromagnético bimodal, deduciendo detalladamente las soluciones para cada una de las posibles configuraciones y mostrando numéricamente su comportamiento.

# Capítulo 2

## Cuantización del campo electromagnético

En este capítulo se presenta la cuantización del campo electromagnético, con particular atención en la interpretación del fotón como una excitación elemental de un modo normal del campo. Se comienza con el caso de un campo unimodal confinado por paredes conductoras en una cavidad unidimensional, y luego se da una breve introducción a los estados coherentes y a los estados térmicos, que serán de gran utilidad en los capítulos posteriores.

### 2.1. Cuantización de un campo unimodal

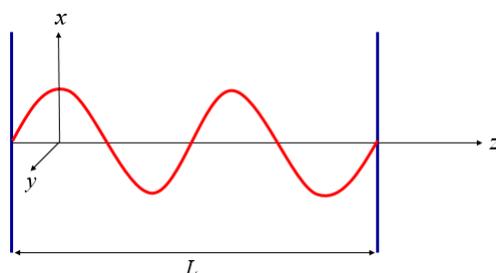


Figura 2.1: Cavidad con paredes perfectamente conductoras situadas en  $z = 0$  y  $z = L$ . El campo eléctrico está polarizado a lo largo de la dirección  $x$ .

Suponemos que el campo de radiación está confinado en una cavidad unidimensional a lo largo del eje  $z$  con paredes perfectamente conductoras en  $z = 0$  y  $z = L$ , como se muestra en la figura 2.1. Dado este esquema, el campo eléctrico se anulará en las fronteras y tomará la forma de una onda estacionaria. Se supone también que no hay fuentes de radiación y que el campo eléctrico está polarizado a lo largo de la dirección  $x$ , de tal manera que  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x E_x(z, t)$ , donde  $\mathbf{e}_x$  es un vector unitario de polarización. Así, las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre están dadas en unidades del sistema internacional (SI) por [11]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.1d)$$

El campo eléctrico unimodal que satisface las ecuaciones de Maxwell y estas condiciones de contorno está dado por

$$E_x(z, t) = \sqrt{\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}} q(t) \sin(kz), \quad (2.2)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia del modo y  $k$  es el número de onda relacionado con la frecuencia por  $k = \omega/c$ ,  $V$  es el volumen efectivo de la cavidad y  $q(t)$  es un factor dependiente del tiempo que tiene dimensión de longitud y actuará como una posición canónica. La condición de frontera en  $z = L$  produce las frecuencias permitidas  $\omega_m = c(m\pi/L)$  con  $m = 1, 2, \dots$ . El campo magnético en la cavidad se obtiene a partir de las ecs. (2.1d) y (2.2), esto es

$$-\partial_z B_y = \mu_0 \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}} \dot{q}(t) \sin(kz),$$

integrando se obtiene

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{k}\right) \sqrt{\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}} p(t) \cos(kz). \quad (2.3)$$

Así, el campo magnético está dado por  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_y B_y(z, t)$ . Aquí,  $\dot{q}(t)$  desempeña el papel de un momento canónico para una “partícula” de masa unitaria, es decir  $p(t) = \dot{q}(t)$ .

La energía clásica del campo o hamiltoniano  $H$  del campo unimodal está dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dV \left[ \varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dV \left[ \varepsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

A partir de las ecs. (2.2) y (2.3) se puede notar que

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E_x^2(z, t) &= \frac{2\omega^2}{V} q^2(t) \sin^2(kz), \\ \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) &= \frac{2}{V} p^2(t) \cos^2(kz), \end{aligned}$$

donde se ha usado que  $c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$  y que  $\omega = ck$ . Luego,

$$H = \frac{1}{V} \int dV \left[ \omega^2 q^2(t) \sin^2(kz) + p^2(t) \cos^2(kz) \right]. \quad (2.5)$$

Usando las propiedades trigonométricas  $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$  y  $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ , se puede simplificar la ec. (2.5), como

$$H = \frac{1}{2V} \int dV \left[ \omega^2 q^2(t)(1 - \cos(2kz)) + p^2(t)(1 + \cos(2kz)) \right].$$

Debido a los límites periódicos, los cosenos se anulan; además  $\frac{1}{V} \int dV = 1$ , por lo tanto, la energía clásica del campo estará dada por

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2). \quad (2.6)$$

Es evidente que un campo unimodal es formalmente equivalente a un oscilador armónico de masa unitaria, donde los campos eléctrico y magnético, aparte de algunos factores de escala, desempeñan los roles de posición y de momento canónico, respectivamente.

Los libros de texto sobre la mecánica cuántica discuten la cuantización del oscilador armónico unidimensional [12]. Aquí se toma el planteamiento de que habiendo identificado las variables canónicas  $q$  y  $p$  para el sistema clásico, simplemente se usa la regla de correspondencia para reemplazarlas por sus equivalentes operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ . Estos operadores deben satisfacer la relación de conmutación canónica

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}.$$

A partir de ahora se sigue la costumbre y se descarta el operador de identidad  $\hat{I}$ . Así, los campos eléctricos y magnéticos se convierten en los operadores

$$\hat{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}} \hat{q}(t) \sin(kz), \quad (2.7a)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\right) \sqrt{\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}} \hat{p}(t) \cos(kz), \quad (2.7b)$$

respectivamente. El hamiltoniano se convierte en

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2). \quad (2.8)$$

Los operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  son hermitianos y por lo tanto corresponden a cantidades observables. Sin embargo, es conveniente y tradicional, introducir los operadores no-hermitianos de aniquilación ( $\hat{a}$ ) y creación ( $\hat{a}^\dagger$ ) a través de las combinaciones

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (2.9a)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (2.9b)$$

Así, los operadores de campo eléctrico y magnético se pueden reescribir como

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz), \quad (2.10a)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \mathcal{B}_0 \frac{1}{i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos(kz), \quad (2.10b)$$

donde  $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\hbar\omega/\varepsilon_0 V}$  y  $\mathcal{B}_0 = (\mu_0/k)\sqrt{\varepsilon_0\hbar\omega^3/V}$  representan respectivamente los campos eléctrico y magnético “por fotón”. Los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

y como resultado el operador hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \\ &= \hbar\omega \left[ \frac{1}{2\hbar\omega} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \hbar\omega \left[ \frac{1}{2\hbar\omega} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2 - \hbar\omega) + \frac{1}{2} \right] \\ &= \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Hasta ahora no se ha dicho nada de la dependencia temporal de los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ . Para un operador arbitrario  $\hat{O}$  que no tiene dependencia explícita del tiempo, la ecuación de movimiento de Heisenberg dice que

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}]. \quad (2.12)$$

Para el operador de aniquilación  $\hat{a}$  esto se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}] \\ &= \frac{i}{\hbar} \left[ \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] \\ &= i\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &= i\omega [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} \\ &= -i\omega \hat{a}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

que tiene la solución

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}. \quad (2.14)$$

Por el mismo método, o simplemente tomando el conjugado hermitiano de la ec. (2.14), se obtiene

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}. \quad (2.15)$$

El operador producto  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  es llamado el operador número y se denota como  $\hat{n}$ . Además,  $|n\rangle$  denota un eigenestado de energía del campo unimodal con eigenvalor energético  $E_n$ , tal que

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (2.16)$$

De la ec. (2.13) se obtiene que  $[\hat{a}, \hat{H}] = \hbar\omega \hat{a}$ ; si se multiplica la ec. (2.16) por  $\hat{a}$  entonces se puede generar una nueva ecuación de eigenvalores

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{H}|n\rangle &= \left( [\hat{a}, \hat{H}] + \hat{H}\hat{a} \right) |n\rangle \\ &= \left( \hbar\omega \hat{a} + \hat{H}\hat{a} \right) |n\rangle \\ &= E_n \hat{a}|n\rangle \\ \Rightarrow \hat{H}(\hat{a}|n\rangle) &= (E_n - \hbar\omega)(\hat{a}|n\rangle), \end{aligned} \quad (2.17)$$

que muestra que  $(\hat{a}|n\rangle)$  es un eigenestado con eigenvalor de energía  $E_n - \hbar\omega$ . Debe quedar claro ahora el porqué  $\hat{a}$  es llamado operador de aniquilación: aniquila un “cuanto” de energía  $\hbar\omega$ . De manera similar, si se multiplica la ec. (2.16) por el operador  $\hat{a}^\dagger$ , se obtiene

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger|n\rangle) = (E_n + \hbar\omega)(\hat{a}^\dagger|n\rangle), \quad (2.18)$$

de donde es evidente que el operador  $\hat{a}^\dagger$  crea un cuanto de energía o un fotón; los eigenestados  $(\hat{a}^\dagger|n\rangle)$  poseen los eigenvalores de energía  $E_n + \hbar\omega$ . Evidentemente, repetir el procedimiento de la ec. (2.18) resultará en la disminución del eigenvalor de energía en múltiplos enteros de  $\hbar\omega$ . Como la energía del oscilador armónico debe ser siempre positiva, debe existir un eigenvalor mínimo  $E_0 > 0$ , con el correspondiente eigenestado  $|0\rangle$ , tal que

$$\hat{H}(\hat{a}|0\rangle) = (E_0 - \hbar\omega)(\hat{a}|0\rangle) = 0, \quad (2.19)$$

por lo tanto, se concluye que

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.20)$$

El estado  $|0\rangle$  es el estado de vacío o estado base. Usando la ec. (2.16) se puede obtener su energía

$$\begin{aligned} \hat{H}|0\rangle &= \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega |0\rangle = E_0 |0\rangle \\ \Rightarrow E_0 &= \frac{1}{2} \hbar\omega. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De modo que el eigenvalor de energía más baja, llamada energía de punto cero, es  $\hbar\omega/2$ . Teniendo en cuenta este valor de la energía para el estado fundamental, y notando que de la ec. (2.18) se obtiene  $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$ , los eigenvalores de energía de los estados excitados estarán dados por

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Estos niveles de energía, junto con el potencial del oscilador armónico, se presentan en la figura 2.2.

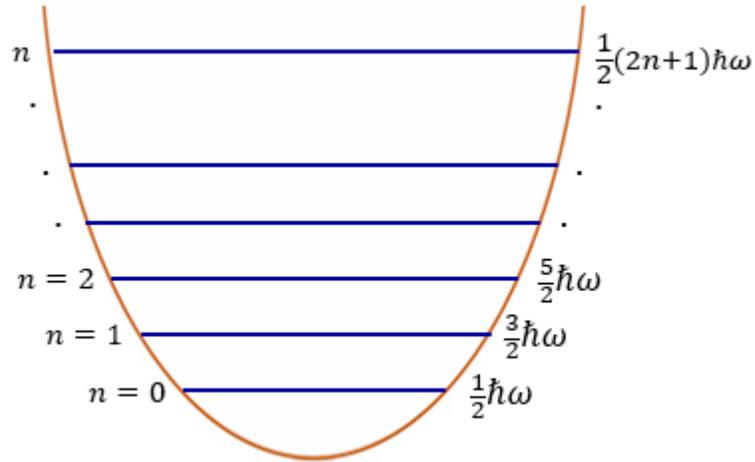


Figura 2.2: Niveles de energía del oscilador armónico.

A partir de las ecs. (2.16) y (2.22), se llega a que para el operador número  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{n} |n\rangle = n |n\rangle; \quad (2.23)$$

es decir, que el eigenestado de energía  $|n\rangle$  es también eigenestado del *operador número*. Estos estados de número o estados de Fock<sup>1</sup> deben normalizarse, o sea, se debe tener  $\langle n|n\rangle = 1$ . Para el estado  $\hat{a}|n\rangle$

$$\hat{a}|n\rangle = c_n |n-1\rangle,$$

donde  $c_n$  es una constante por ser determinada. El producto interno de  $\hat{a}|n\rangle$  con sí mismo es

$$\begin{aligned} (\langle n|\hat{a}^\dagger) (\hat{a}|n\rangle) &= \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n \\ &= \langle n-1|c_n^* c_n |n-1\rangle = |c_n^2|, \end{aligned}$$

y  $|c_n^2| = n$ , así que se puede tomar  $c_n = \sqrt{n}$ , y se concluye que,

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (2.24)$$

<sup>1</sup>En mecánica cuántica, un estado de Fock, es cualquier estado del espacio de Fock con un número bien definido de partículas en cada estado. El nombre se debe a Vladimir Fock.

Similarmente, se puede mostrar que

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.25)$$

A partir de este último resultado, es fácil ver que los estados de Fock  $|n\rangle$  pueden ser generados a partir del estado base  $|0\rangle$ , por la acción repetida del operador de creación  $\hat{a}^\dagger$ :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.26)$$

Dado que  $\hat{H}$  es un operador hermitiano, los estados de Fock son ortogonales; es decir,  $\langle n'|n\rangle = \delta_{nn'}$ , y forman además un conjunto completo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1.$$

Usando las ecs. (2.24) y (2.25) se puede notar que los únicos elementos de matriz de los operadores de creación y aniquilación distintos de cero son

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} \langle n-1|n-1\rangle = \sqrt{n}, \quad (2.27a)$$

$$\langle n+1|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1|n+1\rangle = \sqrt{n+1}. \quad (2.27b)$$

## 2.2. Estados coherentes

Se suele decir que el límite clásico del campo electromagnético cuantizado es el límite en el que el número de fotones se hace muy grande, de modo que el operador de número se convierte en una variable continua [12]. Se presenta ahora un conjunto de estados, los estados coherentes<sup>2</sup> [13], que dan lugar a un límite clásico y, de hecho, estos estados son los estados cuánticos “más clásicos” de un oscilador armónico.

Para tener un valor esperado no nulo del operador del campo eléctrico, es decir, de los operadores de aniquilación y creación, se requiere una superposición de estados numéricos que difieren sólo por  $\pm 1$ . Por ejemplo, podría contener sólo los estados  $|n\rangle$  y  $|n \pm 1\rangle$ ,

$$|\psi\rangle = C_n |n\rangle + C_{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.28)$$

---

<sup>2</sup> Un estado coherente se refiere a un estado cuántico que mantiene su fase durante un cierto periodo de tiempo.

donde  $|C_n|^2 + |C_{n+1}|^2 = 1$ . Evidentemente, al inspeccionar las ecs. (2.19) y (2.20), la sustitución de  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  por variables continuas produce un campo clásico. Una forma de realizar esta sustitución es buscar estados propios del operador de aniquilación [14]. Estos estados se denotan como  $|\alpha\rangle$  y satisfacen la relación

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.29)$$

donde  $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$  es un número complejo. Los estados  $|\alpha\rangle$  son eigenestados “derechos” de  $\hat{a}$ , y  $\langle\alpha|$  son eigenestados “izquierdos” de  $\hat{a}^\dagger$  con eigenvalor  $\alpha^*$ , esto es

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|. \quad (2.30)$$

Puesto que los estados de número  $|n\rangle$  forma un conjunto completo, se puede desarrollar  $|\alpha\rangle$  como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (2.31)$$

Actuando con  $\hat{a}$  en cada término del desarrollo, la ec. (2.29) se convierte en

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (2.32)$$

Igualar los coeficientes de  $|n\rangle$  en ambos lados conduce a

$$\begin{aligned} C_n \sqrt{n} &= \alpha C_{n-1}, \\ \text{ó } C_n &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} C_{n-2} \cdots \\ &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0, \end{aligned}$$

y sustituyendo este resultado en la ec. (2.31),

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.33)$$

donde  $C_0$  es un coeficiente que se determina a partir de la condición de normalización, es decir,

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\alpha\rangle &= 1 = |C_0|^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{\alpha^{*n} \alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'}} \langle n|n'\rangle \\ &= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0|^2 e^{|\alpha|^2}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

lo cual implica que  $C_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$ . Así, los estados coherentes normalizados son

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.35)$$

En esta ecuación, el valor  $|\alpha|^2$  representa el valor promedio de excitaciones  $\bar{n}$  en el estado coherente  $|\alpha\rangle$ ,

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle = \alpha \alpha^* \langle \alpha | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (2.36)$$

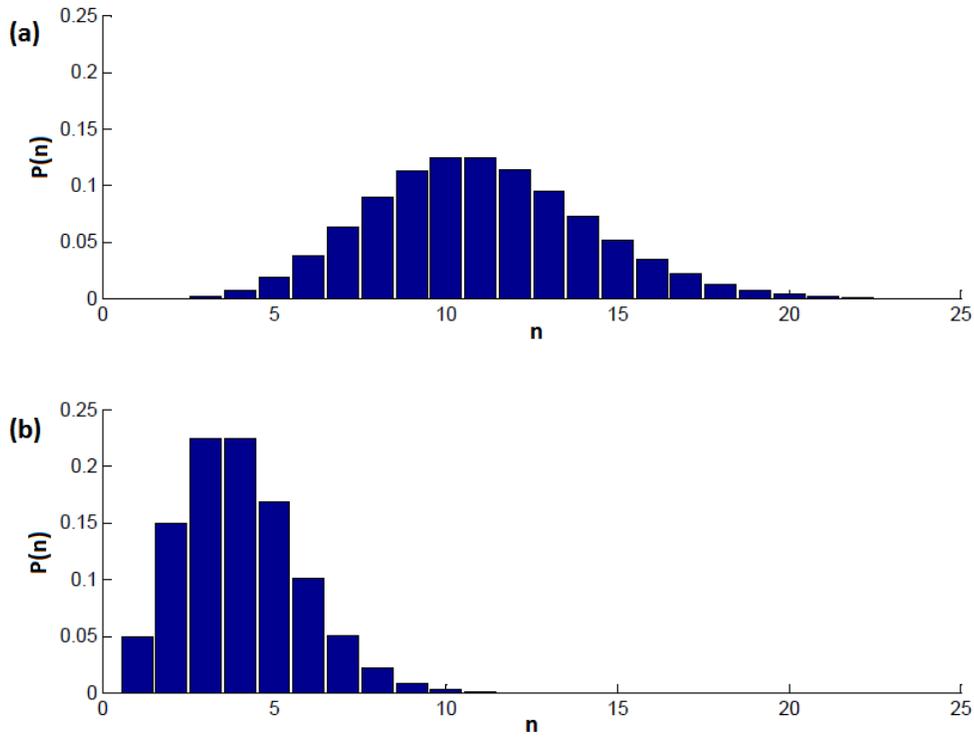


Figura 2.3: Distribuciones de probabilidad de un estado coherente para: (a)  $\bar{n} = 10$  y (b)  $\bar{n} = 3$ .

De hecho, para una medición del número de fotones en el campo, la probabilidad de detectar  $n$  fotones es

$$\begin{aligned} P_n &= |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ &= e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

que es una distribución de Poisson con una media de  $\bar{n}$ . En la figura 2.3 se muestra un par de ejemplos de la distribución de probabilidad del número de fotones para diferentes valores de  $\bar{n}$ .

## 2.3. Estados térmicos

Como es bien sabido, la teoría cuántica se originó en 1900 gracias al descubrimiento de Max Planck de la ley de radiación electromagnética, conocida comúnmente como *la ley de radiación de Plank*. Esta ley describe la radiación electromagnética emitida por un objeto ideal, conocido como cuerpo negro<sup>3</sup> en equilibrio térmico a una temperatura definida. Un cuerpo negro puede ser modelado como una cavidad (o en realidad un pequeño agujero en la cavidad) que contiene la radiación en equilibrio térmico con sus paredes. Suponiendo que el acoplamiento es débil, según la teoría de la mecánica estadística, se puede tratar el campo como si fuera un sistema aislado, el cual puede ser descrito como un ensamble microcanónico.

Consideremos un campo unimodal en equilibrio térmico con las paredes de una cavidad a temperatura  $T$ . Según la mecánica estadística, la probabilidad  $P_n$  de que el modo esté excitado térmicamente en el nivel  $n$  está dado por

$$P_n = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_n \exp(-E_n/k_B T)}, \quad (2.38)$$

donde  $E_n$  está dado por la ec. (2.16) y  $k_B$  es la constante de Boltzmann ( $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K). Introduciendo el operador de densidad para el campo térmico[11]

$$\hat{\rho}_{Th} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{\text{Tr} [\exp(-\hat{H}/k_B T)]}, \quad (2.39)$$

---

<sup>3</sup>Un cuerpo negro es un objeto teórico o ideal que absorbe toda la luz y toda la energía radiante que incide sobre él. A pesar de su nombre, el cuerpo negro emite luz y constituye un sistema físico idealizado para el estudio de la emisión de radiación electromagnética. El nombre cuerpo negro fue introducido por Gustav Kirchhoff en 1862. La luz emitida por un cuerpo negro se denomina radiación de cuerpo negro.

donde  $\hat{H}$  está dado por la ec. (2.11) y con

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ \exp(-\hat{H}/k_B T) \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp(-\hat{H}/k_B T) | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T) \equiv \mathcal{Z}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde se ha hecho uso de la ec. (2.16) y  $\mathcal{Z}$  es la llamada función de partición<sup>4</sup>. De la ec. (2.22) se tiene que  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ , por lo tanto

$$\mathcal{Z} = \exp(-\hbar\omega/2k_B T) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega n/k_B T). \quad (2.41)$$

Dado que  $\exp(-\hbar\omega n/k_B T) < 1$ , la suma es una serie geométrica convergente, esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega n/k_B T) = \frac{1}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)}, \quad (2.42)$$

luego la función de partición estará dada por

$$\mathcal{Z} = \frac{\exp(-\hbar\omega/2k_B T)}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)}. \quad (2.43)$$

Evidentemente,

$$P_n = \langle n | \hat{\rho}_{Th} | n \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-E_n/k_B T). \quad (2.44)$$

Se puede notar ahora que el operador de densidad puede escribirse como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{Th} &= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |n'\rangle \langle n' | \hat{\rho}_{Th} | n \rangle \langle n | \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T) |n\rangle \langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (2.45)$$

---

<sup>4</sup>En física estadística, la función de partición  $\mathcal{Z}$  es una funcional de un sistema en equilibrio. Su principal interés radica en que una vez conocida se pueden derivar las funciones de estado, como la energía libre, la energía interna, la presión, la temperatura, la entropía, la polarización, etcétera. Dependiendo del ensamble estadístico considerado, la función de partición toma una forma u otra.

El promedio de fotones del campo térmico se calcula mediante

$$\begin{aligned}
\bar{n} &= \langle \hat{n} \rangle = \text{Tr}(\hat{n} \hat{\rho}_{Th}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{n} \hat{\rho}_{Th} | n \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n | \hat{n} P_{n'} | n' \rangle \langle n' | n \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n \langle n | \hat{n} | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \langle n | n \rangle \\
&= \exp(-\hbar\omega/2k_B T) \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\hbar\omega n/k_B T), \tag{2.46}
\end{aligned}$$

donde se ha usado la condición de normalización  $\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$  y las ecs. (2.16), (2.23) y (2.44). Haciendo  $x = \hbar\omega/k_B T$ , se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} &= -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \\
&= -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \\
&= \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \\
\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\hbar\omega n/k_B T) &= \frac{\exp(-\hbar\omega/k_B T)}{[1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)]^2}. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Así, el promedio de fotones del campo estará dado por

$$\begin{aligned}
\bar{n} &= \exp(-\hbar\omega/2k_B T) \frac{[1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)]}{\exp(-\hbar\omega/2k_B T)} \frac{\exp(-\hbar\omega/k_B T)}{[1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)]^2} \\
&= \frac{\exp(-\hbar\omega/k_B T)}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)} \\
&= \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

A temperatura ambiente, el promedio de fotones a frecuencias ópticas es muy pequeño (del orden de  $10^{-40}$ ). A la temperatura superficial del sol (6000 K) y a la frecuencia de la luz amarilla ( $6 \times 10^{14}$  Hz,  $\lambda = 500$  nm), el promedio de fotones es de aproximadamente  $10^{-2}$ . Por otra parte, el promedio de fotones aumenta rápidamente con el aumento de la longitud de onda. Nuevamente a temperatura ambiente,  $\bar{n} \simeq 1$  para  $\lambda$  en el intervalo  $\lambda = 10^{-100}$   $\mu\text{m}$ . En la parte de microondas del espectro,  $\bar{n} \gg 1$ .

A partir de la ec. (2.48) resulta que

$$\exp(-\hbar\omega/k_B T) = \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}, \quad (2.49)$$

y  $\hat{\rho}_{Th}$  puede ser escrito en términos de  $\bar{n}$  como

$$\hat{\rho}_{Th} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n |n\rangle\langle n|. \quad (2.50)$$

La probabilidad de encontrar  $n$  fotones en el campo se da en términos de  $\bar{n}$  como

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}. \quad (2.51)$$

En la figura 2.4 se presenta  $P_n$  en función de  $n$  para dos valores diferentes de  $\bar{n}$ .

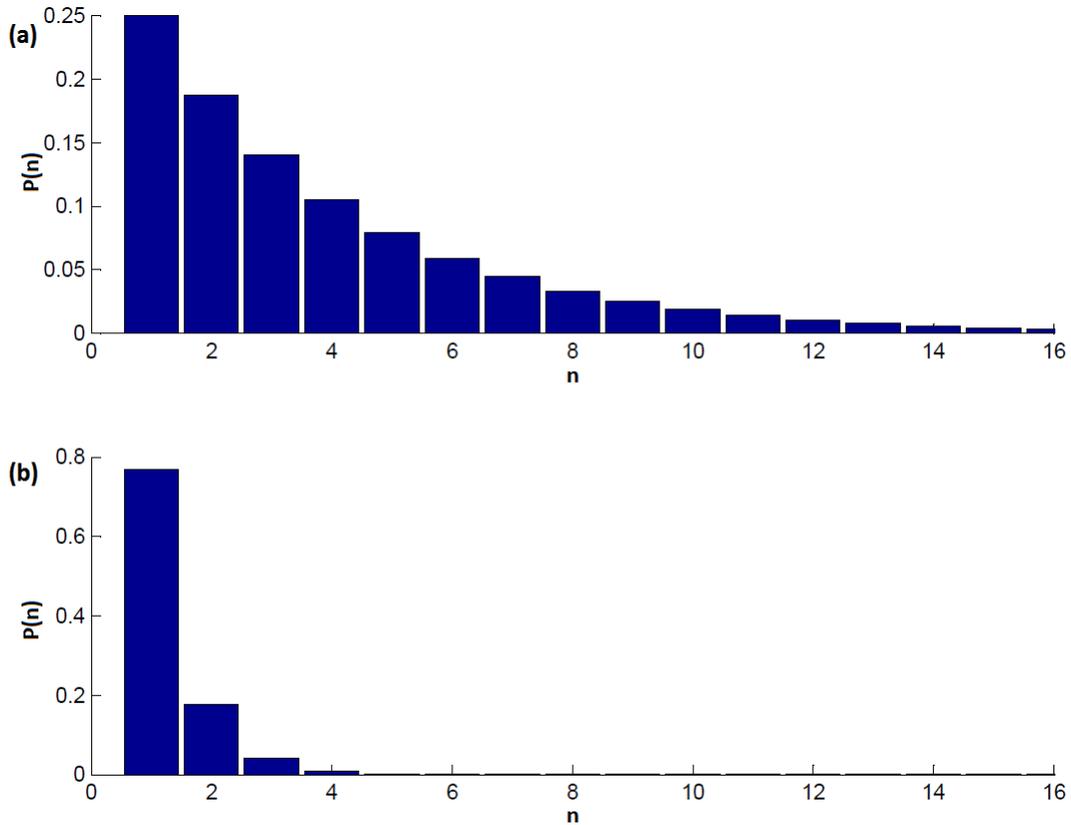


Figura 2.4: Distribuciones de probabilidad de un estado térmico para: (a)  $\bar{n} = 3$  y (b)  $\bar{n} = 0.3$ .

# Capítulo 3

## El modelo de Jaynes-Cummings

### 3.1. Introducción

Propuesto originalmente por Jaynes y Cummings en 1963, el modelo de Jaynes-Cummings (MJC) [2] está compuesto por un solo átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético unimodal. El modelo se utilizó por primera vez para examinar el fenómeno de la emisión espontánea y para revelar la existencia de las oscilaciones de Rabi. En 1980, las investigaciones teóricas mostraron que con un campo coherente, las oscilaciones de Rabi eventualmente se convertirían en el complicado patrón del colapso y el resurgimiento [15]. Experimentalmente el colapso y el resurgimiento de oscilaciones de Rabi fue observado por primera vez en un átomo de micro-maser dentro de una cavidad superconductora [16]. La existencia del colapso y el resurgimiento proporciona evidencia directa de la excitación del campo (fotones), y por tanto, de la naturaleza verdaderamente cuántica de la radiación.

Este capítulo se inicia estudiando detalladamente un átomo con dos niveles de energía, haciendo uso de los operadores en el espacio de Hilbert; luego, mediante la aproximación dipolar, se analizan las interacciones del sistema átomo-campo. Mediante la aproximación de onda rotante, se llega a la construcción de los hamiltonianos semiclásico y cuantizado. Por último, se muestra numéricamente la evolución temporal de las probabilidades para

ambos modelos.

## 3.2. Hamiltoniano de un sistema con dos niveles de energía

El vector de estado correspondiente a un sistema de dos niveles de energía se representa como la combinación lineal

$$|\Psi\rangle = C_1|1\rangle + C_0|0\rangle, \quad (3.1)$$

donde  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  son los vectores que corresponden al estado no excitado y al estado excitado, respectivamente; estos vectores forman una base en el espacio de Hilbert correspondiente [1]. Los coeficientes  $C_k$  son números complejos que cumplen con  $|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$  y  $|C_k|^2$  representa la probabilidad de encontrar al sistema en el estado “ $k$ ”. En esta representación

$$|0\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |\Psi\rangle \rightarrow \vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Debido a que toda función de onda está definida salvo una fase global, podemos expresar los coeficientes  $C_k$  como

$$C_1 = \cos(\vartheta/2)e^{-i\varphi/2}, \quad C_0 = \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi/2}, \quad (3.3)$$

donde  $\varphi = \varphi_0 - \varphi_1$  y los  $C_k$  están definidos hasta la multiplicación por una fase común  $e^{i(\varphi_1+\varphi_0)/2}$ . En esta parametrización, la evolución temporal del sistema se describe como un operador  $\hat{U}(t)$

$$\hat{U}(t) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix} : \vec{C}(t) = \hat{U}(t)\vec{C}(0),$$

con  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = I$ . El operador  $\hat{U}(t)$  es un elemento del grupo  $SU(2)$  y determina completamente la cinemática de un sistema de dos niveles de energía.

Cualquier operador que caracteriza un sistema de dos niveles de energía,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

puede ser expresado en términos de las matrices de Pauli,

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

en la forma

$$\hat{A} = \alpha_1 \hat{\sigma}_1 + \alpha_2 \hat{\sigma}_2 + \alpha_3 \hat{\sigma}_3 + \alpha_0 \hat{I}, \quad (3.6)$$

donde  $\alpha_j = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\sigma}_j)/2$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\alpha_0 = \text{Tr}(\hat{A})/2$  e  $I$  es la matriz identidad. El operador  $\hat{A}$  es hermitiano ( $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ ) si y sólo si los coeficientes  $\alpha_j$  y  $\alpha_0$  son reales.

Es fácil notar que los valores medios de las matrices de Pauli en un estado arbitrario  $|\Psi\rangle$  en la parametrización (3.3) son

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = 2\text{Re}(C_1^* C_0) = \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \quad (3.7a)$$

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = 2\text{Im}(C_1^* C_0) = \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \quad (3.7b)$$

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = 2|C_1|^2 - |C_0|^2 = \cos(\vartheta). \quad (3.7c)$$

Para describir un átomo de dos niveles de energía en términos de operadores en el espacio de Hilbert de estados del sistema, se introducen los operadores

$$|j\rangle\langle k| \quad \text{con } j, k = 0, 1,$$

En términos de estos operadores y de la ec. (3.2) los operadores  $\hat{\sigma}_{x,y,z}$  toman la forma

$$\hat{\sigma}_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad \hat{\sigma}_y = i(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|), \quad \hat{\sigma}_z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|. \quad (3.8)$$

Para averiguar el significado físico del operador  $\hat{\sigma}_z$  hay que recurrir a la ecuación de eigenvalores para un sistema libre. Sea  $\hat{H}_{\text{áto}}$  el hamiltoniano de un átomo con dos niveles de energía; luego, la ecuación hamiltoniana de eigenvalores es

$$\hat{H}_{\text{áto}}|i\rangle = E_i|i\rangle, \quad (3.9)$$

donde  $|i\rangle$  ( $i = 0, 1$ ) representa los eigenestados de energía del átomo y  $E_i$  es el eigenvalor de energía del átomo. Multiplicando ambos lados de la ec. (3.9) por  $\langle i|$

$$\hat{H}_{\text{áto}}|i\rangle\langle i| = E_i|i\rangle\langle i|. \quad (3.10)$$

Como el átomo tiene solamente dos niveles de energía, la ec. (3.10) se convierte en

$$\hat{H}_{\text{áto}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1|.$$

Dado que  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  forman un conjunto completo de eigenestados de energía;  $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \hat{I}$ ,

$$\hat{H}_{\text{áto}} = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1|. \quad (3.11)$$

Aquí,  $E_0 = \hbar\omega_0$  y  $E_1 = \hbar\omega_1$ , donde  $\omega_0$  es la frecuencia angular asociada con el nivel de energía del estado no excitado y  $\omega_1$  es la frecuencia angular asociada con el nivel de energía del estado excitado. Luego, de la ec. (3.2),

$$\hat{H}_{\text{áto}} = \hbar\omega_0|0\rangle\langle 0| + \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| = \hbar \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

De la ec. (3.6) se puede notar que

$$\hat{H}_{\text{áto}} = \alpha_3\hat{\sigma}_z + \alpha_0\hat{I}, \quad (3.13)$$

donde

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\text{Tr}(\hat{H}_{\text{áto}}\hat{\sigma}_z) = \frac{\hbar}{2}\text{Tr} \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_0),$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\text{Tr}(\hat{H}_{\text{áto}}\hat{I}) = \frac{\hbar}{2}\text{Tr} \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_0).$$

Sustituyendo estos resultados en la ec. (3.13), se obtiene

$$\hat{H}_{\text{áto}} = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_0)\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_0)\hat{I}. \quad (3.14)$$

Definiendo el nivel de energía cero a medio camino entre los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , como en la figura 3.1, se llega a que  $E_1 = -E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ . El hamiltoniano atómico libre para el átomo de dos niveles se puede reescribir como

$$\hat{H}_{\text{áto}} = \frac{\hbar}{2}\omega_0\hat{\sigma}_z; \quad (3.15)$$

la matriz  $\hat{\sigma}_z$  define el hamiltoniano atómico libre.

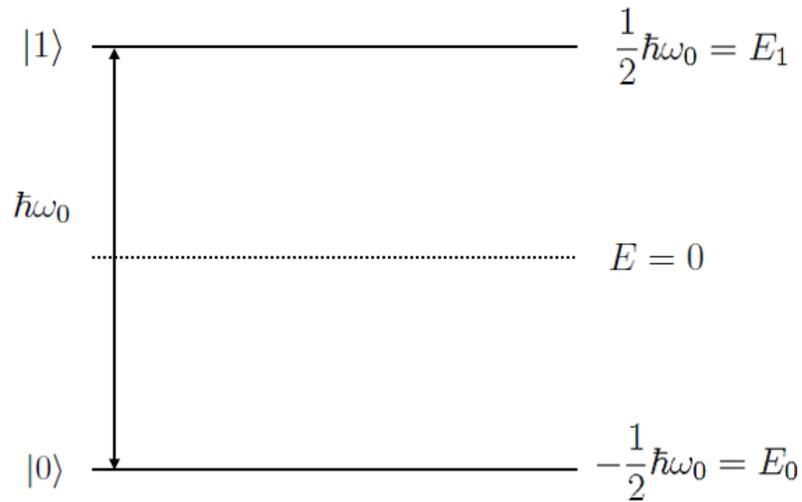


Figura 3.1: Diagrama del nivel de energía atómico, donde el nivel  $E = 0$  se toma a mitad de camino entre los dos niveles.

### 3.3. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo

En el MJC, el átomo estudiado es un átomo de dos niveles. Cuando este átomo interactúa con un campo electromagnético de un solo modo, la componente del campo eléctrico de la onda luminosa no cambia considerablemente sobre la extensión del átomo. Esto es debido a que el diámetro  $d$  del átomo ( $d \approx 0.1\text{nm}$ ) es mucho más pequeño que la longitud de onda  $\lambda$  de interés ( $\lambda > 100\text{nm}$ ). El campo eléctrico en la posición de los electrones es aproximadamente igual al campo eléctrico en la posición del núcleo. Por lo tanto, el átomo de dos niveles puede ser modelado como un dipolo, mientras que el campo eléctrico de la onda luminosa a través del átomo puede ser aproximado como un campo eléctrico uniforme. Esto se conoce como la *aproximación dipolar eléctrica* y ayuda a simplificar el problema de calcular el hamiltoniano de interacción. Con la aproximación dipolar eléctrica, la energía de interacción (hamiltoniano) entre el átomo (dipolo) y la luz (campo eléctrico uniforme), se puede derivar como se muestra a continuación.

### 3.3.1. Energía dipolar eléctrica en un campo eléctrico uniforme

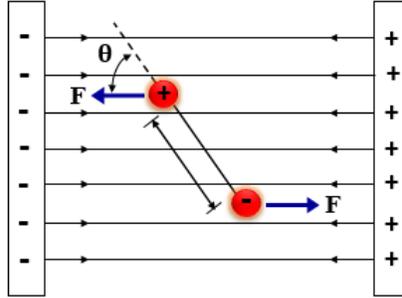


Figura 3.2: Dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme.

Consideremos el torque  $\vec{\tau}$  que el campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  causa sobre el dipolo; de la figura (3.2) vemos que

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- \\ &= \frac{\vec{l}}{2} \times q\vec{E} + \left(\frac{-\vec{l}}{2}\right) \times (-q\vec{E}),\end{aligned}\quad (3.16)$$

donde  $\vec{l}$  es el vector que apunta de la carga positiva a la carga negativa. Luego,

$$\vec{\tau} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{d} \times \vec{E},$$

donde  $\vec{d} = q\vec{l}$  es el momento dipolar eléctrico. Es claro que

$$|\vec{\tau}| = |\vec{d} \times \vec{E}| = dE|\sin(\theta)\hat{e}| = dE|\sin(\theta)|,$$

con  $d = |\vec{d}|$ ,  $E = |\vec{E}|$  y  $\hat{e}$  un vector unitario perpendicular a  $\vec{d}$  y a  $\vec{E}$ .

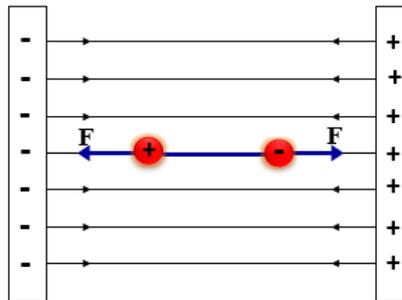


Figura 3.3: Configuración de baja energía dipolar.

La configuración de mínima energía,  $U_{\text{int}} = 0$ , se tiene cuando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , tal como se muestra en la figura (3.3); tenemos

$$U_{\text{int}} = \int_{\pi/2}^{\theta} |\vec{\tau}| d\theta = \int_{\pi/2}^{\theta} dE |\sin(\theta)| d\theta = dE \int_{\pi/2}^{\theta} \sin(\theta) d\theta, \quad (3.17)$$

donde  $|\sin(\theta)| = \sin(\theta)$ , dado que  $\sin(\theta)$  es positivo para  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Cuando  $\theta$  cambia de  $\pi/2$  a 0, el dipolo estará en la configuración de baja energía, luego,

$$U_{\text{int}} = [-dE \cos(\theta)]_{\pi/2}^{\theta} = -dE \cos(\theta) = -\vec{d} \cdot \vec{E}. \quad (3.18)$$

La ec. (3.18) da la forma clásica de la energía de interacción  $U_{\text{int}}$  (hamiltoniano) entre el dipolo y el campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ . Como se explica en la parte de la aproximación dipolar eléctrica, el hamiltoniano de interacción  $\hat{H}_{\text{int}}$  entre la luz (campo electromagnético) y el átomo de dos niveles, puede ser aproximado por la interacción hamiltoniana  $U_{\text{int}}$  entre un dipolo y el campo eléctrico uniforme  $\hat{E}$ . Usando el principio de correspondencia, la forma del operador mecánico cuántico de la ec. (3.18) es

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hat{U}_{\text{int}} = -\hat{d} \cdot \hat{E}, \quad (3.19)$$

donde  $\hat{d}$  es el operador dipolar eléctrico.

Para determinar el sentido físico de los operadores  $\hat{\sigma}_{x,y}$  se calcula el promedio de  $\hat{H}_{\text{int}}$ , para un estado arbitrario  $|\Psi\rangle$  dado por la ec. (3.1),

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle &= \langle \psi | \hat{H}_{\text{int}} | \psi \rangle \\ &= -\langle \Psi | (\hat{d} \cdot \hat{E}) | \Psi \rangle \\ &= -\left[ (C_0^* \langle 0 | + C_1^* \langle 1 |) (\hat{d} \cdot \hat{E}) (C_0 | 0 \rangle + C_1^* | 1 \rangle) \right] \\ &= -|C_0^2 \langle 0 | (\hat{d} \cdot \hat{E}) | 0 \rangle + C_0^* C_1 \langle 0 | (\hat{d} \cdot \hat{E}) | 1 \rangle + C_1^* C_0 \langle 1 | (\hat{d} \cdot \hat{E}) | 0 \rangle + |C_1^2 \langle 1 | (\hat{d} \cdot \hat{E}) | 1 \rangle \\ &= -C_0^* C_1 \langle 0 | (\hat{d} \cdot \hat{E}) | 1 \rangle - C_1^* C_0 \langle 1 | (\hat{d} \cdot \hat{E}) | 0 \rangle; \end{aligned} \quad (3.20)$$

debido a que el operador  $\hat{d}$  es impar, sólo los elementos no diagonales (en la base  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ) son distintos de cero. Introduciendo la notación

$$-\langle 1 | (\hat{d} \cdot \hat{E}) | 0 \rangle \equiv g = g_r + ig_i,$$

donde  $g_r$  y  $g_i$  son las partes real e imaginaria del número complejo  $g$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle &= C_0^* C_1 g^* + C_1^* C_0 g \\
&= C_0^* C_1 (g_r - i g_i) + C_1^* C_0 (g_r + i g_i) \\
&= g_r (C_1^* C_0 + C_0^* C_1) + i g_i (C_1^* C_0 - C_0^* C_1) \\
&= g_r [2\text{Re}(C_1^* C_0)] + i g_i [2i\text{Re}(C_1^* C_0)] \\
&= g_r \langle \hat{\sigma}_x \rangle - g_i \langle \hat{\sigma}_y \rangle,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde se ha sustituido la ec. (3.22) en el último paso. Por lo tanto, los operadores  $\hat{\sigma}_x$  y  $\hat{\sigma}_y$  definen el operador dipolar eléctrico

$$\begin{aligned}
\hat{d} &= \text{Re}(\vec{d}) \hat{\sigma}_x - \text{Im}(\vec{d}) \hat{\sigma}_y \\
&= d_r (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) - i d_i (\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+) \\
&= \hat{\sigma}_+ (d_r + i d_i) + \hat{\sigma}_- (d_r - i d_i) \\
&= (\vec{d} \hat{\sigma}_+ + \vec{d}^* \hat{\sigma}_-),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

con  $\vec{d} = d_r + i d_i$ ,  $\hat{\sigma}_x = (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$  y  $\hat{\sigma}_y = i(\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+)$ . Dado que  $\vec{d}$  es un vector real,

$$\hat{d} = \vec{d} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \tag{3.23}$$

Finalmente, sustituyendo este resultado en la ec. (3.19) se obtiene

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\vec{d} \cdot \vec{E} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \tag{3.24}$$

De la ec. (3.8) se observa que  $\hat{\sigma}_+ = |1\rangle\langle 0|$  y  $\hat{\sigma}_- = |0\rangle\langle 1|$ ; estos operadores son conocidos como operadores de transición atómica, de ascenso y de descenso, respectivamente.

Hasta ahora, no se ha especificado la naturaleza del campo de interacción. La derivación que conduce a la ec. (3.24) es válida tanto para campos clásicos como cuantizados. A continuación se mostrarán las diferencias en la forma en que se comporta el átomo al interactuar con campos clásicos y cuánticos.

### 3.3.2. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo clásico

Suponiendo que el átomo está interactuando con un campo eléctrico sinusoidal clásico de la forma

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t) = \frac{\vec{E}_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad (3.25)$$

donde  $E_0$  es la amplitud del campo y  $\omega$  es la frecuencia del campo, se puede escribir el hamiltoniano de interacción átomo-campo clásico como

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int clás}} &= -\frac{1}{2}(\vec{d} \cdot \vec{E}_0) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde  $\lambda = -\frac{1}{\hbar}(\vec{d} \cdot \vec{E}_0)$  es conocida como constante de interacción.

### 3.3.3. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo cuantizado

Suponiendo ahora que el átomo está interactuando con un campo eléctrico cuantizado

$$\hat{E} = \hat{e} \left( \frac{\hbar \omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz), \quad (3.27)$$

donde  $\hat{e}$  es un vector de polarización arbitrario, el hamiltoniano de interacción átomo-campo cuantizado es

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int cuán}} &= -(\vec{d} \cdot \hat{e}) \left( \frac{\hbar \omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ &= \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde  $\lambda = -(\vec{d} \cdot \hat{e}) \left( \frac{\omega}{\hbar \varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz)$ .

### 3.4. Modelo de un átomo con dos niveles de energía interactuando con un campo electromagnético clásico unimodal

El hamiltoniano de un átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético clásico unimodal está dado por

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{clás}} &= \hat{H}_{\text{áto}} + \hat{H}_{\text{int clás}} \\ &= \frac{\hbar}{2}\omega_0\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar}{2}\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),\end{aligned}\quad (3.29)$$

donde hemos sustituido los resultados obtenidos en las ecs. (3.15) y (3.26).

Los operadores de ascenso y descenso en la representación de Schrödinger (SP), se pueden transformar en la representación de interacción<sup>1</sup> (IP) por

$$\hat{\sigma}_{\pm}(t) = \hat{\sigma}_{\pm}(0)e^{\pm i\omega_0 t}.$$

Así,

$$\begin{aligned}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) &= (\hat{\sigma}_+e^{i\omega_0 t} + \hat{\sigma}_-e^{-i\omega_0 t})(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ &= \hat{\sigma}_+e^{i(\omega_0+\omega)t} + \hat{\sigma}_+e^{i(\omega_0-\omega)t} + \hat{\sigma}_-e^{-i(\omega_0-\omega)t} + \hat{\sigma}_-e^{-i(\omega_0+\omega)t}.\end{aligned}$$

Es importante notar que los términos proporcionales a  $e^{\pm i(\omega_0+\omega)t}$  cambian muy rápidamente y se pueden tomar como cero cuando se promedia sobre la escala de tiempo de interés. La aproximación obtenida, reteniendo los términos de resonancia restantes  $e^{\pm i(\omega_0-\omega)t}$ , se denomina “aproximación de onda de rotante” (RWA) [17]. Volviendo a la representación

---

<sup>1</sup>En mecánica cuántica, la representación de interacción (también conocida como imagen de Dirac) es una representación intermedia entre la imagen de Schrödinger y la de Heisenberg.

de Schrödinger, la ec. (3.29) se convierte en

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{clás}}(t) &= \frac{\hbar}{2}\omega_0\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar}{2}\lambda(\hat{\sigma}_+e^{-i\omega t} + \hat{\sigma}_-e^{i\omega t}) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega_0(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|) + \frac{\hbar}{2}\lambda(|1\rangle\langle 0|e^{-i\omega t} - |0\rangle\langle 1|e^{i\omega t}) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2}\lambda \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \omega_0 & \lambda e^{-i\omega t} \\ \lambda e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{bmatrix}, \tag{3.30}
\end{aligned}$$

donde se ha sustituido los valores correspondientes a los operadores de transición atómica  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  y el operador de inversión  $\sigma_z$ . Sustituyendo este hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{\text{clás}}(t)|\Psi\rangle, \tag{3.31}$$

donde  $|\Psi\rangle$  está dada por la ec. (3.1), se obtiene

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_0(t) \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \omega_0 & \lambda e^{-i\omega t} \\ \lambda e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_0(t) \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

que conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$i\dot{C}_1(t) = \frac{\omega_0}{2}C_1(t) + \frac{\lambda}{2}e^{-i\omega t}C_0(t), \tag{3.33a}$$

$$i\dot{C}_0(t) = \frac{\lambda}{2}e^{i\omega t}C_1(t) - \frac{\omega_0}{2}C_0(t). \tag{3.33b}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales tiene soluciones de la forma

$$C_1(t) = A_1e^{iS_1t}, \tag{3.34a}$$

$$C_0(t) = A_0e^{iS_0t}, \tag{3.34b}$$

donde  $A_{0,1}$  y  $S_{0,1}$  son constantes por determinar independientes del tiempo. Sustituyendo las ecs. (3.34a)-(3.34b) en las ecs. (3.33a)-(3.33b), se obtiene

$$A_1S_1e^{iS_1t} = -\frac{\omega_0}{2}A_1e^{iS_1t} - \frac{\lambda}{2}A_0e^{-i(S_0-\omega)t}, \tag{3.35a}$$

$$A_0S_0e^{iS_0t} = -\frac{\lambda}{2}A_1e^{i(S_1+\omega_0)t} + \frac{\omega_0}{2}A_0e^{iS_0t}. \tag{3.35b}$$

Estas igualdades pueden satisfacerse simultáneamente tomando la condición

$$S_0 = S_1 + \omega. \quad (3.36)$$

En este caso las ecuaciones (3.35a) y (3.35b) se convierten en

$$\left(S_1 + \frac{\omega_0}{2}\right) A_1 + \frac{\lambda}{2} A_0 = 0, \quad (3.37a)$$

$$\frac{\lambda}{2} A_1 + \left(S_1 + \omega - \frac{\omega_0}{2}\right) A_0 = 0. \quad (3.37b)$$

La ecuación resultante de este sistema de ecuaciones es

$$S_1^2 + \omega S_1 + \frac{1}{2}\omega\omega_0 - \frac{1}{4}\omega_0^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 = 0,$$

cuyas soluciones están dadas por

$$S_1^\pm = -\frac{\omega}{2} \pm \Omega, \quad (3.38)$$

donde  $\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + \lambda^2}$  es la llamada frecuencia de Rabi [18] y  $\Delta = \omega - \omega_0$  es la desintonía.

De esta ecuación y de la ec. (3.36), se obtiene

$$S_1^1 = -\frac{\omega}{2} + \Omega, \quad S_1^0 = -\frac{\omega}{2} - \Omega, \quad S_0^1 = \frac{\omega}{2} + \Omega \quad \text{y} \quad S_0^0 = \frac{\omega}{2} - \Omega. \quad (3.39)$$

Usando estos resultados, las ecs. (3.34a) y (3.34b) se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} C_1(t) &= A_1^1 e^{iS_1^1 t} + A_1^0 e^{iS_1^0 t} \\ &= A_1^1 e^{-i(\frac{\omega}{2} - \Omega)t} + A_1^0 e^{-i(\frac{\omega}{2} + \Omega)t}, \end{aligned} \quad (3.40a)$$

$$\begin{aligned} C_0(t) &= A_0^1 e^{iS_0^1 t} + A_0^0 e^{iS_0^0 t} \\ &= A_0^1 e^{i(\frac{\omega}{2} + \Omega)t} + A_0^0 e^{i(\frac{\omega}{2} - \Omega)t}, \end{aligned} \quad (3.40b)$$

donde  $A_i^j$  con  $i, j = 0, 1$  son las constantes a evaluar a partir de las siguientes condiciones iniciales.

- Caso I: Considerando que en  $t = 0$ , el átomo está en el nivel inferior, es decir,  $C_1(0) = 0$  y  $C_0(0) = 1$ .

Sustituyendo estas condiciones iniciales en las ecs. (3.40a) y (3.40b), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = A_1^1 + A_1^0 &\Rightarrow & A_1^1 = -A_1^0 &\Rightarrow & A_1^1 - A_1^0 = -2A_1^0, \\ 1 = A_0^1 + A_0^0 &\Rightarrow & A_0^1 = 1 - A_0^0 &\Rightarrow & A_0^1 - A_0^0 = 1 - 2A_0^0. \end{aligned}$$

De las ecs. (3.40a) y (3.33a),

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= -i\left(\frac{\omega}{2} - \Omega\right)A_1^1 e^{-i\left(\frac{\omega}{2} - \Omega\right)t} - i\left(\frac{\omega}{2} + \Omega\right)A_1^0 e^{-i\left(\frac{\omega}{2} + \Omega\right)t} \\ &= -i\frac{\omega_0}{2}C_1(t) - i\frac{\lambda}{2}e^{-i\omega t}C_0(t). \end{aligned}$$

Al sustituir las condiciones iniciales se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(0) &= -i\left(\frac{\omega}{2} - \Omega\right)A_1^1 - i\left(\frac{\omega}{2} + \Omega\right)A_1^0 = -i\frac{\lambda}{2} \\ &\Rightarrow -\frac{\omega}{2}(A_1^1 + A_1^0) + \Omega(A_1^1 - A_1^0) = -\frac{\lambda}{2} \\ &\Rightarrow -2\Omega A_1^0 = -\frac{\lambda}{2} \\ &\Rightarrow \alpha_1^0 = \frac{\lambda}{4\Omega}, \end{aligned} \tag{3.41a}$$

$$\Rightarrow \alpha_1^1 = -\frac{\lambda}{4\Omega}. \tag{3.41b}$$

Haciendo el mismo procedimiento para  $C_0(t)$ ,

$$\alpha_0^0 = \frac{2\Omega + \Delta}{4\Omega}, \tag{3.42a}$$

$$\alpha_0^1 = \frac{2\Omega - \Delta}{4\Omega}. \tag{3.42b}$$

Sustituyendo estos valores en las ecs. (3.40a) y (3.40b), se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{\lambda}{4\Omega}e^{i\left(-\frac{\omega}{2} + \Omega\right)t} + \frac{\lambda}{4\Omega}e^{i\left(-\frac{\omega}{2} - \Omega\right)t} \\ &= -i\frac{\lambda}{2\Omega}e^{-\frac{i}{2}\omega t} \left( \frac{e^{i\Omega+} - e^{-i\Omega+}}{2i} \right) = -i\frac{\lambda}{2\Omega}e^{-\frac{i}{2}\omega t} \sin(\Omega t), \end{aligned} \tag{3.43a}$$

$$\begin{aligned} C_0(t) &= \frac{2\Omega - \Delta}{4\Omega}e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \Omega\right)t} + \frac{2\Omega + \Delta}{4\Omega}e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \Omega\right)t} \\ &= e^{\frac{i}{2}\omega t} \left( \frac{e^{i\Omega+} + e^{-i\Omega+}}{2} \right) + i\frac{\Delta}{2\Omega}e^{\frac{i}{2}\omega t} \left( \frac{e^{i\Omega+} - e^{-i\Omega+}}{2i} \right) \\ &= e^{\frac{i}{2}\omega t} \left( \cos(\Omega t) + i\frac{\Delta}{2\Omega} \sin(\Omega t) \right). \end{aligned} \tag{3.43b}$$

Las probabilidades correspondientes a los dos niveles de energía están dadas por

$$|C_1(t)|^2 = \frac{\lambda^2}{4\Omega^2} \sin^2(\Omega t), \quad (3.44a)$$

$$|C_0(t)|^2 = \cos^2(\Omega t) + \frac{\Delta^2}{4\Omega^2} \sin^2(\Omega t). \quad (3.44b)$$

- Caso II: Considerando que en  $t = 0$  el átomo está en el nivel superior, es decir,  $C_1(0) = 1$  y  $C_0(0) = 0$ .

Haciendo el mismo procedimiento que en el caso I, las probabilidades correspondientes a los dos niveles de energía están dadas por

$$|C_1(t)|^2 = \cos^2(\Omega t) + \frac{\Delta^2}{4\Omega^2} \sin^2(\Omega t), \quad (3.45a)$$

$$|C_0(t)|^2 = \frac{\lambda^2}{4\Omega^2} \sin^2(\Omega t). \quad (3.45b)$$

Cuando la frecuencia del campo es igual a la frecuencia asociada a los niveles de energía ( $\omega = \omega_0$ ); es decir, la desintonía es  $\Delta = 0$  (caso resonante), se tiene  $\Omega = \frac{\lambda}{2}$ .

Las amplitudes de probabilidad de los dos niveles, dado las condiciones iniciales, estarán dadas por

- Caso I: Cuando el átomo está inicialmente en el nivel inferior

$$|C_1(t)|^2 = \sin^2(\lambda t/2), \quad (3.46a)$$

$$|C_0(t)|^2 = \cos^2(\lambda t/2). \quad (3.46b)$$

- Caso II: Cuando el átomo está inicialmente en el nivel superior

$$|C_1(t)|^2 = \cos^2(\lambda t/2), \quad (3.47a)$$

$$|C_0(t)|^2 = \sin^2(\lambda t/2). \quad (3.47b)$$

A partir de las ecs. (3.46a)-(3.47b) se puede notar que si el átomo está inicialmente en el nivel inferior (o superior), entonces en ausencia de cualquier campo externo ( $\lambda = 0$ ), permanecerá siempre en el nivel inferior (o superior); es decir, el átomo se mantiene en su estado inicial por tiempo indefinido. Por lo tanto, el fenómeno de la emisión espontánea no puede explicarse utilizando un campo clásico.

### 3.5. Modelo de un átomo con dos niveles de energía interactuando con un campo cuantizado

El hamiltoniano de un átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético cuantizado unimodal está dado por

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{cuán}} &= \hat{H}_{\text{áto}} + \hat{H}_{\text{cam}} + \hat{H}_{\text{int cuán}} \\ &= \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger),\end{aligned}\quad (3.48)$$

donde se han sustituido los resultados obtenidos en las ecs. (2.11), (3.15) y (3.28).

En el caso del campo libre, los operadores de creación y aniquilación ( $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$ ) y los operadores de transición atómica ( $\hat{\sigma}_\pm$ ) evolucionan como

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}_\pm(t) = \hat{\sigma}_\pm(0)e^{i\pm\omega_0 t},$$

y tenemos entonces que

$$\begin{aligned}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) &= (\hat{\sigma}_+e^{i\omega_0 t} + \hat{\sigma}_-e^{-i\omega_0 t})(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \\ &= \hat{\sigma}_+\hat{a}e^{i(\omega_0-\omega)t} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_0-\omega)t} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger e^{i(\omega_0+\omega)t} + \hat{\sigma}_-\hat{a}e^{-i(\omega_0+\omega)t}.\end{aligned}$$

Nótese que cuando  $\omega_0 \approx \omega$  los dos últimos términos varían mucho más rápidamente que los dos primeros. El término  $\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$  corresponde a la emisión de un fotón y el átomo va desde el estado fundamental hasta el estado excitado, mientras que  $\hat{\sigma}_-\hat{a}$  corresponde a la absorción de un fotón y el átomo va del estado excitado al estado fundamental. Aplicando la RWA a la ec. (3.48), se obtiene

$$\hat{H}_{\text{cuán}} = \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger); \quad (3.49)$$

este hamiltoniano es el que se conoce como de Jaynes-Cummings [2].

Hay muchas maneras de resolver la dinámica del MJC. Una forma interesante de obtener la dinámica es encontrar primero los estados estacionarios del hamiltoniano de Jaynes-Cummings, conocidos comúnmente como “estados vestidos” [19]. Para llevar a

cabo esta tarea, reescribimos el hamiltoniano de Jaynes-Cummings en la forma

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{cuán}} &= \hat{H}_I + \hat{H}_{II} \\ &= \left[ \frac{1}{2} \hbar \omega \hat{\sigma}_z + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] + \left[ \frac{1}{2} \hbar \Delta \hat{\sigma}_z + \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \right],\end{aligned}\quad (3.50)$$

donde  $\Delta = \omega_0 - \omega$  es la desintonía. Se puede notar que la parte diagonal  $\hat{H}_I$  y la parte de interacción  $\hat{H}_{II}$  conmutan entre sí, lo que indica la existencia de una eigenfunción simultánea. En términos de los estados de número del campo, el término de interacción  $\hat{H}_{II}$  sólo provoca transiciones del tipo

$$|1\rangle|n\rangle \longleftrightarrow |0\rangle|n+1\rangle, \quad (3.51a)$$

$$|1\rangle|n-1\rangle \longleftrightarrow |0\rangle|n\rangle, \quad (3.51b)$$

donde  $n$  representa el número de fotones del campo. A los productos de estados  $|1\rangle|n-1\rangle$ ,  $|0\rangle|n\rangle$ , etc., se les conocen como “estados desnudos”. Para un  $n$  fijo, la dinámica está completamente confinada al espacio bidimensional de los estados del producto, ya sea  $(|1\rangle|n-1\rangle, |0\rangle|n\rangle)$ , ó  $(|1\rangle|n\rangle, |0\rangle|n-1\rangle)$ . Se puede denotar el producto de estados para un  $n$  dado como

$$|\Psi_{1n}\rangle = |1\rangle|n\rangle, \quad (3.52a)$$

$$|\Psi_{2n}\rangle = |0\rangle|n+1\rangle. \quad (3.52b)$$

Así, las eigenfunciones del hamiltoniano de interacción están dadas por

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_0^{n+1}(t)|\Psi_{2n}\rangle + C_1^n(t)|\Psi_{1n}\rangle] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_0^{n+1}(t)|n+1, 0\rangle + C_1^n(t)|n, 1\rangle].\end{aligned}\quad (3.53)$$

Utilizando esta base se obtienen los elementos de matriz de  $\hat{H}_{II}$ ,

$$\begin{aligned}\hat{H}_{II,11}^{(n)} &= \langle \Psi_{1n} | \hat{H}_{II} | \Psi_{1n} \rangle = \begin{bmatrix} \langle n | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \Delta & \lambda \hbar \hat{a} \\ \lambda \hbar \hat{a}^\dagger & -\frac{\hbar}{2} \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |n\rangle \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle n | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \Delta |n\rangle \\ \lambda \hbar \sqrt{n+1} |n+1\rangle \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \Delta \langle n | n \rangle = \frac{\hbar}{2} \Delta.\end{aligned}\quad (3.54)$$

Análogamente

$$\hat{H}_{II,12}^{(n)} = \langle \Psi_{1n} | \hat{H}_{II} | \Psi_{2n} \rangle = \lambda \hbar \sqrt{n+1}, \quad (3.55a)$$

$$\hat{H}_{II,21}^{(n)} = \langle \Psi_{2n} | \hat{H}_{II} | \Psi_{1n} \rangle = \lambda \hbar \sqrt{n+1}, \quad (3.55b)$$

$$\hat{H}_{II,22}^{(n)} = \langle \Psi_{2n} | \hat{H}_{II} | \Psi_{2n} \rangle = -\frac{\hbar}{2} \Delta. \quad (3.55c)$$

Por tanto,

$$\mathbf{H}_{II}^{(n)} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \Delta & 2\lambda\sqrt{n+1} \\ 2\lambda\sqrt{n+1} & -\Delta \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Para un  $n$  dado, los eigenvalores de  $\mathbf{H}_{II}^{(n)}$  son

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \Omega_n, \quad (3.57)$$

donde

$$\Omega_n = [\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)]^{1/2} \quad (3.58)$$

es la frecuencia de Rabi, que ahora incluye los efectos de la desintonía  $\Delta$ . Los eigenestados  $|n, \pm\rangle$  asociados a los eigenvalores están dados por

$$\begin{bmatrix} |n, +\rangle \\ |n, -\rangle \end{bmatrix} = T_n \begin{bmatrix} |n, 1\rangle \\ |n+1, 0\rangle \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

En la ec. (3.59), los estados  $|n, +\rangle$  y  $|n, -\rangle$  son comúnmente llamados *estados vestidos* y son construidos por la rotación de los *estados desnudos* con la matriz  $T_n$  dada por

$$T_n = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n) & \sin(\theta_n) \\ -\sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

La matriz  $T_n$  diagonaliza la matriz hamiltoniana (3.56) como  $\mathbf{H}_D = T_n \mathbf{H}_{II}^{(n)} T_n^{-1}$ . Las columnas de la matriz  $T_n$  corresponden a los eigenvectores de la matriz hamiltoniana (3.56); dichos eigenvectores se determinan mediante la ecuación  $(\mathbf{H}_{II}^{(n)} - \lambda_j I) X_j = 0$ . Presentamos a continuación el procedimiento:

- Para  $E_+ = \frac{\hbar}{2} \Omega_n$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \Delta - \Omega_n & 2\lambda\sqrt{n+1} \\ 2\lambda\sqrt{n+1} & -\Delta - \Omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
(\Omega_n - \Delta)\alpha_{11} &= 2\lambda\sqrt{n+1}\alpha_{12} \\
2\lambda\sqrt{n+1}\alpha_{11} &= (\Omega_n + \Delta)\alpha_{11} \\
\Rightarrow (\Omega_n - \Delta)2\lambda\sqrt{n+1}\alpha_{11}^2 &= (\Omega_n + \Delta)2\lambda\sqrt{n+1}\alpha_{12}^2 \\
\Rightarrow \alpha_{11} &= \sqrt{\frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n - \Delta}}\alpha_{12},
\end{aligned}$$

y donde se ha considerado únicamente la raíz positiva. Usando la condición de normalización,

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1, \quad (3.62)$$

que implica que

$$\begin{aligned}
\alpha_{12}^2 \left( \frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n - \Delta} + 1 \right) &= 1 \\
\alpha_{12}^2 \left( \frac{2\Omega_n}{\Omega_n - \Delta} \right) &= 1,
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n}}, \quad (3.63a)$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n}}. \quad (3.63b)$$

- Para  $E_- = -\frac{\hbar}{2}\Omega_n$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \Delta + \Omega_n & 2\lambda\sqrt{n+1} \\ 2\lambda\sqrt{n+1} & -\Delta + \Omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
(\Omega_n + \Delta)\alpha_{21} &= -2\lambda\sqrt{n+1}\alpha_{22} \\
2\lambda\sqrt{n+1}\alpha_{21} &= -(\Omega_n - \Delta)\alpha_{22} \\
\Rightarrow (\Omega_n + \Delta)2\lambda\sqrt{n+1}\alpha_{21}^2 &= (\Omega_n - \Delta)2\lambda\sqrt{n+1}\alpha_{22}^2 \\
\Rightarrow \alpha_{21} &= -\sqrt{\frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n + \Delta}},
\end{aligned}$$

y ahora se ha tomado únicamente la raíz negativa. Usando nuevamente la condición de normalización,

$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1, \quad (3.65)$$

lo que implica que

$$\alpha_{22}^2 \left( \frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n + \Delta} + 1 \right) = 1$$

$$\alpha_{22}^2 \left( \frac{2\Omega_n}{\Omega_n + \Delta} \right) = 1,$$

y por lo tanto,

$$\alpha_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n}}, \quad (3.66a)$$

$$\alpha_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n}}. \quad (3.66b)$$

La matriz de transformación está dada por

$$T_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n}} \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

y además

$$T_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n}} \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Los eigenestados  $|n, \pm\rangle$ , asociados a los eigenvalores de energía, están dados por

$$\begin{bmatrix} |n, +\rangle \\ |n, -\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_n) & \sin(\Theta_n) \\ -\sin(\Theta_n) & \cos(\Theta_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\Psi_{1n}\rangle \\ |\Psi_{0n}\rangle \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

donde se ha definido

$$\sin(\Theta_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n}}, \quad (3.70a)$$

$$\cos(\Theta_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n}}, \quad (3.70b)$$

y donde el ángulo  $\Theta_n$  está dado por

$$\Theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{\Omega_n(0)}{\Omega_n + \Delta} \right), \quad (3.71)$$

con  $\Omega_n(0) = 2\lambda\sqrt{n+1}$ . Los eigenestados  $|n, \pm\rangle$  también son conocidos como doblete de Jaynes-Cummings.

Las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo de los dos niveles de energía estarán dadas por

$$\begin{bmatrix} C_1^n(t) \\ C_0^{m+1}(t) \end{bmatrix} = T_n^{-1} \begin{bmatrix} e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\Omega_n t} \end{bmatrix} T_n \begin{bmatrix} C_1^n(0) \\ C_0^{m+1}(0) \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

que conduce al sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} C_1^n(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n} \right) C_1^n(0) e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t} + \frac{1}{2} \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} C_0^{m+1}(0) e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n} \right) C_1^n(0) e^{\frac{i}{2}\Omega_n t} - \frac{1}{2} \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} C_0^{m+1}(0) e^{\frac{i}{2}\Omega_n t}, \end{aligned} \quad (3.73a)$$

$$\begin{aligned} C_0^{m+1}(t) &= \frac{1}{2} \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} C_1^n(0) e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n} \right) C_0^{m+1}(0) e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} C_1^n(0) e^{\frac{i}{2}\Omega_n t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n} \right) C_0^{m+1}(0) e^{\frac{i}{2}\Omega_n t}. \end{aligned} \quad (3.73b)$$

Para calcular las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo de los dos niveles de energía, se consideran las siguientes condiciones iniciales.

- Caso III: El átomo al tiempo  $t = 0$  está en el nivel inferior, es decir,  $C_1^n = 0$  y  $C_0^{m+1} = 1$ .

Sustituyendo estas condiciones iniciales en las ecs. (3.73a) y (3.73b), se obtiene

$$\begin{aligned} C_1^n(t) &= \frac{1}{2} \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t} - \frac{1}{2} \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} e^{\frac{i}{2}\Omega_n t} \\ &= -i \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \left( \frac{e^{\frac{i}{2}\Omega_n t} - e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t}}{2i} \right) \\ &= -i \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t/2), \\ C_0^{m+1}(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_n - \Delta}{\Omega_n} \right) e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_n + \Delta}{\Omega_n} \right) e^{\frac{i}{2}\Omega_n t} \\ &= \frac{e^{\frac{i}{2}\Omega_n t} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t}}{2} + i \frac{\Delta}{\Omega_n} \left( \frac{e^{\frac{i}{2}\Omega_n t} - e^{-\frac{i}{2}\Omega_n t}}{2i} \right) \\ &= \cos(\Omega_n t/2) + i \frac{\Delta}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t/2). \end{aligned}$$

Así, las probabilidades correspondientes a los dos niveles de energía están dadas por

$$|C_1^n(t)|^2 = \frac{4\lambda^2(n+1)}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t/2), \quad (3.75a)$$

$$|C_0^{n+1}(t)|^2 = \cos^2(\Omega_n t/2) + \frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t/2). \quad (3.75b)$$

- Caso IV: El átomo al tiempo  $t = 0$  en el nivel superior, es decir,  $C_1^n = 1$  y  $C_0^{n+1} = 0$ .

Haciendo el mismo procedimiento que en el caso I, se obtiene

$$|C_1^n(t)|^2 = \cos^2(\Omega_n t/2) + \frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t/2), \quad (3.76a)$$

$$|C_0^{n+1}(t)|^2 = \frac{4\lambda^2(n+1)}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t/2). \quad (3.76b)$$

En el caso de la resonancia exacta (cuando la frecuencia del campo es igual a la frecuencia asociada con los niveles de energía)  $\Delta = 0$ , la frecuencia de Rabi se convierte en  $\Omega_n = 2\lambda\sqrt{n+1}$ ; luego, las poblaciones atómicas dependientes del tiempo de los dos niveles estarán dadas por

- Caso III:

$$|C_1^n(t)|^2 = \sin^2(\lambda\sqrt{n+1}t), \quad (3.77a)$$

$$|C_0^{n+1}(t)|^2 = \cos^2(\lambda\sqrt{n+1}t). \quad (3.77b)$$

- Caso IV:

$$|C_1^n(t)|^2 = \cos^2(\lambda\sqrt{n+1}t), \quad (3.78a)$$

$$|C_0^{n+1}(t)|^2 = \sin^2(\lambda\sqrt{n+1}t). \quad (3.78b)$$

## 3.6. Resultados numéricos y discusión

Se analiza ahora la evolución temporal de las probabilidades de permanencia del átomo en el nivel inferior y en el nivel superior para el modelo semiclásico y cuantizado. En las gráficas que presentamos a continuación, las curvas azules corresponden a la probabilidad del estado base y las rojas a las del estado excitado.

### 3.6.1. Modelo semiclásico

En el modelo semiclásico las gráficas numéricas de las probabilidades para el caso I y el caso II, dadas por las ecs. (3.46a)-(3.47b), se muestran en la figura 3.4 con  $\lambda = 2$ . La comparación de la figura 3.4a y la figura 3.4b muestra que el patrón de la oscilación de probabilidad del caso I es similar al del caso II, excepto que las probabilidades de nivel inferior y superior están intercambiadas.

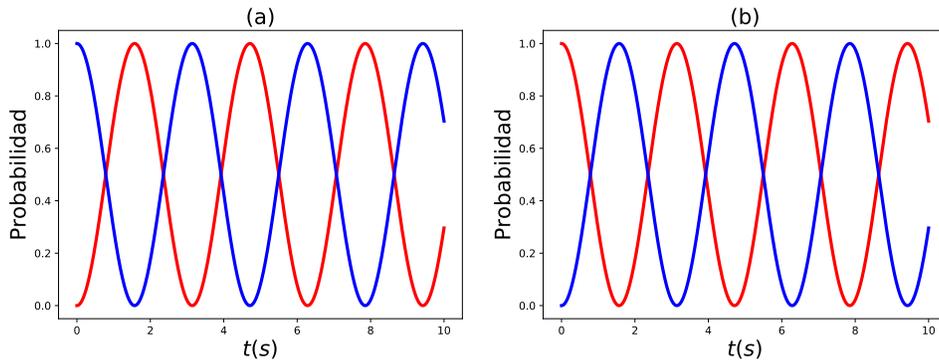


Figura 3.4: Oscilaciones de Rabi del modelo semiclásico correspondientes a los casos I y II con  $\lambda = 2$ .

### 3.6.2. Modelo cuantizado

En el modelo cuantizado, las gráficas de las probabilidades para los casos III y IV, dadas por las ecs. (3.77a)-(3.78b), se muestran en la figura 3.5 con  $\lambda = 1/\sqrt{2}$  y  $n = 1$ . De nuevo, la comparación de la figuras 3.5a y 3.5b muestra que el patrón de la oscilación de probabilidad del caso III es similar al del caso IV, excepto que las probabilidades de los niveles inferior y superior están intercambiadas, es decir, el patrón de oscilación permanece exactamente igual que el modelo semiclásico. Así, la distribución dinámica simétrica de la oscilación de Rabi se observa para el átomo de dos niveles tanto para el campo clásico como para el campo cuantizado. Además, cuando  $n \rightarrow 0$ , las ecs. (3.77a)-(3.78b) se reducen a las ecuaciones obtenidas para el modelo semiclásico; por lo tanto, las oscilaciones periódicas de Rabi del campo de vacío cuantizado no distorsiona el patrón

simétrico del sistema de dos niveles de energía.

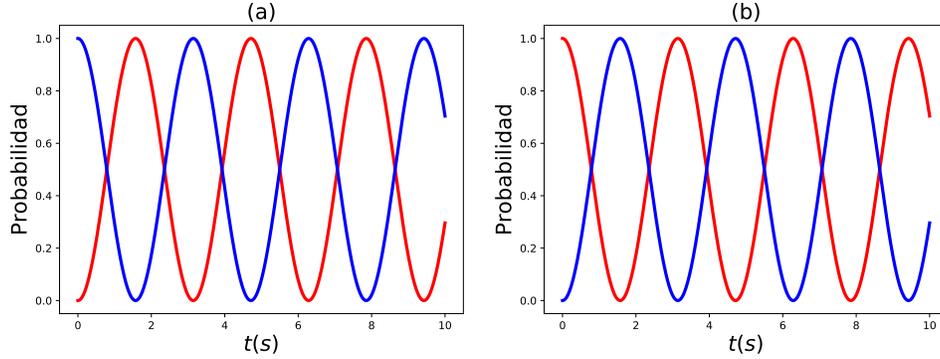


Figura 3.5: Oscilaciones de Rabi del modelo cuantizado correspondientes a los casos III y IV con  $\lambda = 1/\sqrt{2}$  y  $n = 1$ .

Considerando que el campo es un campo coherente, el valor promedio de las probabilidades para los casos III y IV está dado por

$$\langle P_1(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |C_1^n(t)|^2, \quad (3.79a)$$

$$\langle P_0(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |C_0^{n+1}(t)|^2, \quad (3.79b)$$

donde  $P_n = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$  es la distribución de Poisson dada por la ec. 2.37 y  $\bar{n}$  es el número promedio de fotones del campo. Para el campo coherente el fenómeno de colapso y resurgimiento de la población de los dos niveles para los casos III y IV se muestran en las figuras 3.6 y 3.7, con un número promedio de fotones  $\bar{n} = 15$ . Se observa que las figuras 3.6a y 3.6b son idénticas a las figuras 3.7b y 3.7a, respectivamente. Esto indica que, independientemente de las condiciones iniciales para los casos III y IV, la simetría de la oscilación de la probabilidad se mantiene similar a la del caso semiclásico y a la del caso cuántico cuando el campo es un campo de Fock.

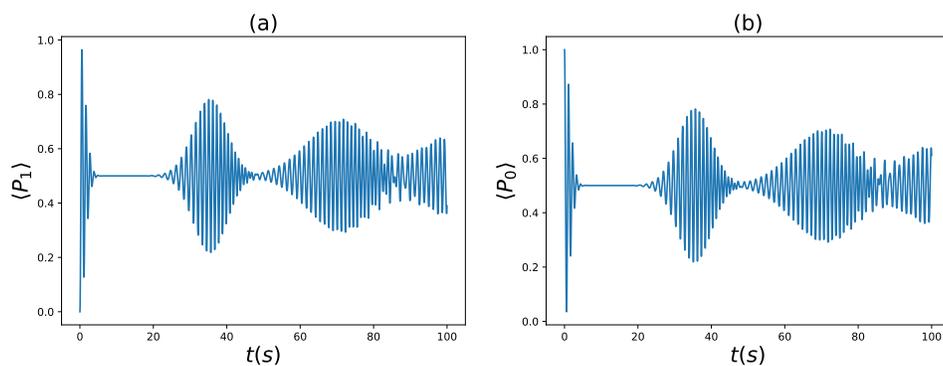


Figura 3.6: El colapso y resurgimiento de los dos niveles de energía para el caso III con  $\bar{n} = 15$ .

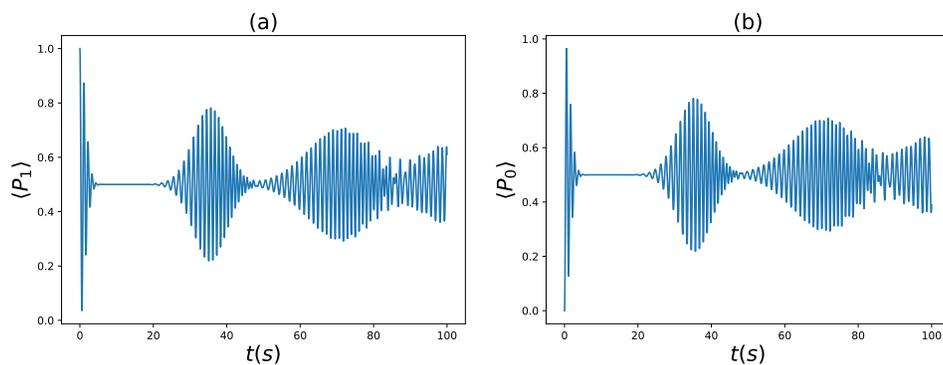


Figura 3.7: El colapso y resurgimiento de los dos niveles de energía para el caso IV con  $\bar{n} = 15$ .

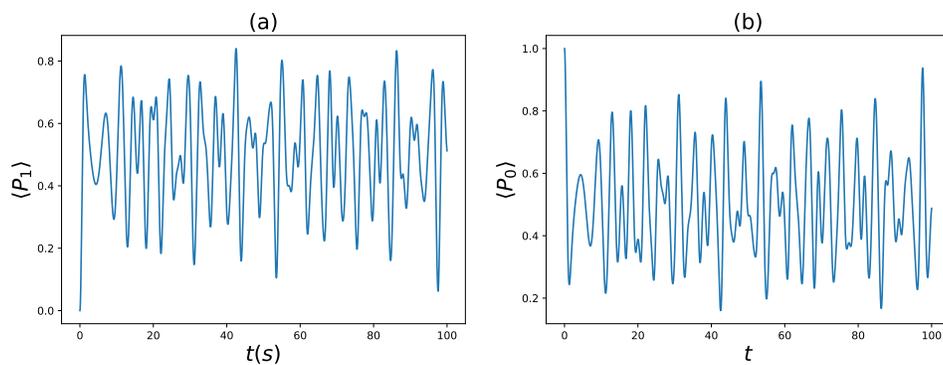


Figura 3.8: La inversión atómica de los dos niveles de energía para el caso III con  $\bar{n} = 2$ .

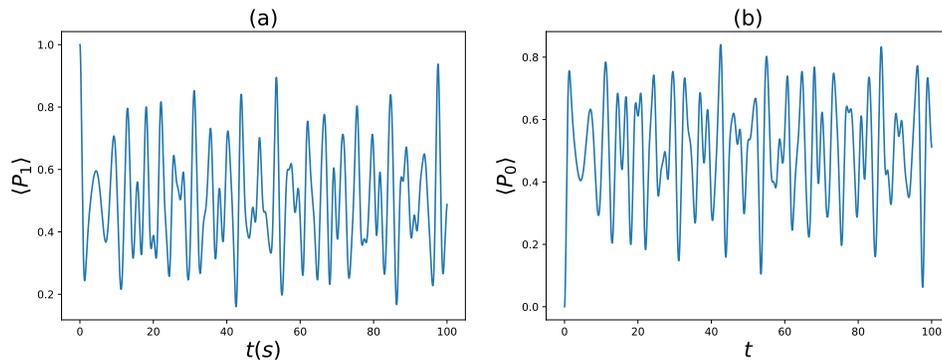


Figura 3.9: La inversión atómica de los dos niveles de energía para el caso IV con  $\bar{n} = 2$ .

En el caso en que el campo sea un campo térmico, el valor promedio de las probabilidades correspondientes a los casos III y IV están dadas por las ecs. (3.79a)-(3.79b), donde ahora  $P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}$  es la probabilidad de encontrar  $n$  fotones en el campo térmico dada por la ec. 2.51 y  $\bar{n}$  es el número promedio de fotones del campo. En las figuras 3.8 y 3.9 se presentan los resultados obtenidos usando el campo térmico con  $\bar{n} = 2$  como el estado inicial. No hay patrón y no se observan rasgos de colapso y resurgimiento. El comportamiento de los estados de energía del átomo es completamente errático y persiste aún cuando el tiempo  $t$  aumenta a un valor grande  $t = 100s$ . Esto se explica por que el estado térmico es una mezcla estadística que sólo tiene información mínima; a diferencia de los estados coherentes (que su función de onda puede definirse como la superposición lineal de estados numéricos), no tenemos suficiente información para formar la función de onda de un estado térmico. Por lo tanto, es físicamente lógico que cuando un estado de campo térmico inicial interactúa con el átomo, se obtenga un comportamiento errático de la probabilidad de que el átomo está en su estado fundamental contra el tiempo. Esto contrasta con el caso de un campo inicial coherente discutido anteriormente, que muestra un agradable colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi.

### 3.7. Conclusión

A partir del estudio de la interacción de un sistema de dos niveles con un campo electromagnético, se observó que existe una simetría dinámica en la oscilación de Rabi del sistema de dos niveles, tanto para el campo clásico como para el cuantizado en el caso de un estado de número. Para el campo coherente se observó el colapso y el resurgimiento de la población de los dos niveles, que también son simétricos, ya sea que el sistema esté poblado inicialmente en el nivel inferior o superior. Así, la simetría observada en la oscilación de Rabi del sistema de dos niveles para el campo clásico se preserva al cuantizar el campo. Para el campo térmico se observó que no existe un patrón y no muestra rasgos de colapso y resurgimiento; más aún, presentó un comportamiento de los niveles de energía completamente errático.

# Capítulo 4

## Modelo de Jaynes-Cummings para un átomo con tres niveles de energía

### 4.1. Introducción

La interacción de la luz con sistemas de dos, tres o más niveles de energía se ha vuelto importante durante las últimas décadas, ya que revela varios aspectos fundamentales de la óptica cuántica [5, 3]. La dinámica de un átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético unimodal se ha estudiado durante mucho tiempo para comprender muchos problemas sutiles de la electrodinámica de las cavidades. Este modelo se ha extendido para abarcar átomos de tres niveles interactuando con un campo de dos modos. Se observa que muchos fenómenos coherentes interesantes ocurren con el aumento del número de niveles del sistema, es decir, cuando el número de niveles es superior a dos. La evolución dinámica del sistema de tres niveles en presencia de dos campos monocromáticos fuertes, ha sido un tema de importancia fundamental. Ejemplos de interés actual son: la coherencia de dos fotones [7], el proceso de doble resonancia [8], la fluorescencia de resonancia [9] y el salto cuántico [10], entre otros. A partir de estos estudios se puede intuitivamente argumentar que las condiciones atómicas iniciales del sistema de tres niveles puede generar diversos efectos ópticos cuánticos que no suelen presentarse en

un sistema de dos niveles [20].

Estudiaremos las transiciones atómicas en la aproximación dipolar, lo cual implica que no habrá transiciones entre los niveles que tienen la misma paridad. Por lo tanto, existen únicamente tres diferentes configuraciones de sistemas de tres niveles de energía: tipo cascada ( $\Xi$ ), tipo lambda ( $\Lambda$ ) y tipo ve ( $V$ ); estas configuraciones se muestran en la figura 4.1.

De manera genérica el hamiltoniano de un sistema con tres niveles de energía bien definidos está dado por la matriz hermitiana

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_3 & h_{32} & h_{31} \\ h_{32} & \Delta_2 & h_{21} \\ h_{31} & h_{21} & \Delta_1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

donde  $h_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) son elementos de la transición específica y  $\Delta_i$  es la desintonía que se anula en la resonancia. A partir de la figura 4.1a se puede notar que el sistema de tipo  $\Xi$  está caracterizado por las transiciones  $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ , que según (4.1) corresponden a los elementos  $h_{21} \neq 0$ ,  $h_{32} \neq 0$  y  $h_{31} = 0$ ; así,

$$H^\Xi = \begin{bmatrix} \Delta_3 & h_{32} & 0 \\ h_{32} & \Delta_2 & h_{21} \\ 0 & h_{21} & \Delta_1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Similarmente el sistema de tipo  $\Lambda$  que corresponde a las transiciones  $1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2$ , mostrado en la figura 4.1b, puede ser descrito por el hamiltoniano con los elementos  $h_{21} = 0$ ,  $h_{32} \neq 0$  y  $h_{31} \neq 0$ , es decir,

$$H^\Lambda = \begin{bmatrix} \Delta_3 & h_{32} & h_{31} \\ h_{32} & \Delta_2 & 0 \\ h_{31} & 0 & \Delta_1 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Finalmente el sistema de tipo  $V$ , caracterizado por las transiciones  $3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$ , mostrado en la figura 4.1c, con los elementos  $h_{21} \neq 0$ ,  $h_{32} = 0$  y  $h_{31} \neq 0$ , tiene el hamiltoniano

$$H^V = \begin{bmatrix} \Delta_3 & 0 & h_{31} \\ 0 & \Delta_2 & h_{21} \\ h_{31} & h_{21} & \Delta_1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Se obtienen tres distintos hamiltonianos para tres configuraciones diferentes con niveles de energía  $E_3 > E_2 > E_1$ .

Este capítulo se inicia con una breve pero muy importante introducción a los principios básicos del grupo SU(3), necesarios para desarrollar el hamiltoniano de todas las posibles configuraciones de tres niveles. Después se estudia detalladamente un átomo con tres niveles de energía, haciendo uso de los operadores en el espacio de Hilbert; luego, mediante la aproximación dipolar, se analizan las interacciones del sistema átomo-campo. Mediante la aproximación de onda rotante se llega a la construcción de los hamiltonianos semiclásico y cuantizado para las tres distintas configuraciones y se resuelven analíticamente tomando diferentes condiciones iniciales. Finalmente se muestran los resultados numéricos tanto para el modelo semiclásico como para el modelo cuantizado.

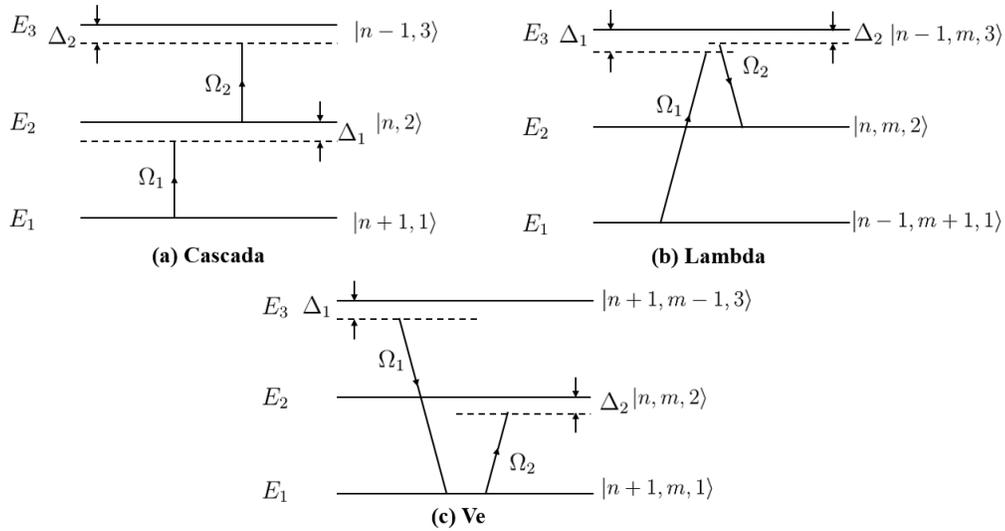


Figura 4.1: Configuraciones de los sistemas con tres niveles de energía tipo cascada, lambda y ve.

## 4.2. El grupo SU(3)

El grupo unitario especial de grado 3, denotado por SU(3), es un grupo de Lie de dimensión 8 que consiste de matrices unitarias  $3 \times 3$  con determinante igual a 1 conocidas

comúnmente como *matrices de Gell-Mann*, que generalizan a las matrices de Pauli,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Estas matrices tienen traza nula, son hermitianas y obedecen la relación de normalización  $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ . Además satisfacen las relaciones de conmutación y de anti-conmutación

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k, \quad \{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij} + 2d_{ijk}\lambda_k, \quad (4.6)$$

donde  $d_{ijk}$  y  $f_{ijk}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 8$ ) son constantes de estructura completamente simétricas y antisimétricas que caracterizan al grupo  $\text{SU}(3)$  [21]. Es habitual definir los operadores de cambio de espín  $T$ ,  $U$  y  $V$  como

$$T_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7), \quad V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5). \quad (4.7)$$

Estas matrices satisfacen el álgebra cerrada

$$\begin{aligned} [U_+, U_-] &= U_3, & [V_+, V_-] &= V_3, & [T_+, T_-] &= T_3, \\ [T_3, T_{\pm}] &= \pm 2T_{\pm}, & [T_3, U_{\pm}] &= \mp U_{\pm}, & [T_3, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm}, \\ [V_3, T_{\pm}] &= \pm T_{\pm}, & [V_3, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm}, & [V_3, V_{\pm}] &= \pm 2V_{\pm}, \\ [U_3, T_{\pm}] &= \mp T_{\pm}, & [U_3, U_{\pm}] &= \pm 2U_{\pm}, & [U_3, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm}, \\ [T_+, V_-] &= -U_-, & [T_+, U_+] &= V_+, & [U_+, V_-] &= T_-, \\ [T_-, V_+] &= U_+, & [T_-, U_-] &= -V_-, & [U_-, V_+] &= -T_+, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $T_3 = \lambda_3$ ,  $U_3 = (\sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3)/2$  y  $V_3 = (\sqrt{3}\lambda_8 + \lambda_3)/2$ ; es decir,

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

## 4.3. Hamiltoniano de un sistema con tres niveles de energía

### 4.3.1. Sistemas con $n$ niveles de energía

Se considera un átomo que tiene  $n$  niveles de energía, descritos por los vectores  $|j\rangle$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), tales que  $\langle k|j\rangle = \delta_{jk}$ . Los estados  $|j\rangle$  se representan en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_n$  como elementos de la base estándar

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, |j\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1_j \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, |n\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

En el proceso de la evolución temporal el estado cambia de tal forma que la norma  $\langle \Psi(t)|\Psi(t)\rangle$  se conserva; es decir,

$$|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle = \sum_j C_j(t)|j\rangle$$

con

$$\langle \Psi(t)|\Psi(t)\rangle = \sum_j |C_j(t)|^2 = 1.$$

El hamiltoniano atómico libre de este sistema tiene la forma

$$\hat{H}_{\text{ató}} = \sum_{j=1}^n E_j |j\rangle\langle j|, \quad (4.11)$$

donde  $\sum_{j=1}^n |j\rangle\langle j| = I$  y  $E_j$  son las energías de cada uno de los niveles  $|j\rangle$ . La configuración de los niveles de energía puede ser arbitraria, pero es cómodo escoger las energías de tal forma que  $E_j \leq E_{j+1}$ . Los operadores  $\hat{s}^{ij} = |j\rangle\langle i|$ ,  $j \neq i$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  generan las transiciones entre los niveles y satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$[\hat{s}^{ij}, \hat{s}^{lk}] = \delta_{ik}\hat{s}^{lj} - \delta_{lj}\hat{s}^{ik}.$$

Se pueden utilizar en vez de los  $n$  operadores diagonales  $\hat{s}^{jj} = |j\rangle\langle j|$ , los operadores de traza nula; por ejemplo,

$$\hat{s}_z^{jj+1} = \frac{1}{2} (|j+1\rangle\langle j+1| - |j\rangle\langle j|), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (4.12)$$

que tiene el sentido de los operadores de inversión atómica entre los niveles  $j+1$  y  $j$ . Obviamente van a haber  $n-1$  operadores independientes  $\hat{s}_z^{jj+1}$ . Los operadores  $|j\rangle\langle j|$  se expresan en términos de los  $\hat{s}_z^{jj+1}$  como

$$\hat{s}^{jj} = |j\rangle\langle j| = \frac{1}{n} + 2 \sum_{k=1}^{j-1} \hat{s}_z^{kk+1} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \hat{s}_z^{kk+1}. \quad (4.13)$$

Por lo tanto, el hamiltoniano libre (4.11) se escribe en términos de los operadores  $\hat{s}_z^{jj+1}$  de la forma [1]

$$\hat{H}_{\text{ató}} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{s}_z^{kk+1} \left[ E_k - \sum_{j=1}^k E_j \right] + E, \quad (4.14)$$

donde  $E$  es la energía media que se define como  $E = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_j$ . Los operadores  $\hat{s}_z^{jj+1}$ ,  $\hat{s}^{ij} = |j\rangle\langle i|$ ,  $j \neq i$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  forman una representación del álgebra  $\text{SU}(n)$ .

### 4.3.2. Sistemas con tres niveles de energía

En términos de los operadores diagonales  $|j\rangle\langle j|$ , el hamiltoniano atómico libre de un sistema con tres niveles de energía está dado por la ec. (4.11); es decir,

$$\hat{H}_{\text{ató}} = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| + E_3|3\rangle\langle 3|, \quad (4.15)$$

y se tiene la relación de cerradura  $|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| = I$ . Sin embargo, en términos de los operadores de inversión atómica, que son diferentes para estos sistemas (según las posibles transiciones), el hamiltoniano atómico libre toma distintas formas.

a) Para el sistema de tipo  $\Xi$ , los operadores de inversión dados por la ec. (4.12) se

definen como

$$\hat{s}_z^{12} = \frac{1}{2} (|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} U_3, \quad (4.16a)$$

$$\hat{s}_z^{23} = \frac{1}{2} (|3\rangle\langle 3| - |2\rangle\langle 2|) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} T_3, \quad (4.16b)$$

donde se ha usado la representación matricial de los estados  $|j\rangle$  dada por la ec. (4.10). El hamiltoniano libre atómico, dado por la ec. (4.14), toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{ató}}^{\Xi} &= 2 \sum_{k=1}^3 \hat{s}_z^{k k+1} \left[ E_k - \sum_{j=1}^k E_j \right] + E \\ &= 2 \left[ \hat{s}_z^{12} (E - E_1) + \hat{s}_z^{23} (2E - E_1 - E_2) \right] + E \\ &= \frac{1}{3} (-2E_1 + E_2 + E_3) U_3 + \frac{2}{3} (-2E_1 - E_2 + 2E_3) T_3 + E, \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde  $E = \frac{1}{3}(E_1 + E_2 + E_3)$  es la energía promedio.

De la figura 4.1a se observa que las energías de los tres niveles son:  $E_1 = -\hbar\omega_1$ ,  $E_2 = \hbar(\omega_1 - \omega_2)$  y  $E_3 = \hbar\omega_2$ . Así, se puede reescribir el hamiltoniano atómico libre para el sistema  $\Xi$  como

$$\hat{H}_{\text{ató}}^{\Xi} = \hbar\omega_1 U_3 + \hbar\omega_2 T_3. \quad (4.18)$$

b) Análogamente, para el sistema de tipo  $\Lambda$  los operadores de inversión se definen como

$$\hat{s}_z^{13} = \frac{1}{2} V_3, \quad \hat{s}_z^{32} = \frac{1}{2} T_3, \quad (4.19)$$

y el hamiltoniano libre toma la forma

$$\hat{H}_{\text{ató}}^{\Lambda} = \frac{2}{3} \hat{s}_z^{13} (-2E_1 + E_2 + E_3) + \hat{s}_z^{32} \frac{2}{3} (E_1 - 2E_2 + E_3) + E. \quad (4.20)$$

De la figura 4.1b se observa que las energías de los tres niveles son:  $E_1 = -\hbar\omega_1$ ,  $E_2 = -\hbar\omega_2$  y  $E_3 = \hbar(\omega_1 + \omega_2)$ . Se puede entonces reescribir el hamiltoniano atómico libre para el sistema  $\Lambda$  como

$$\hat{H}_{\text{ató}}^{\Lambda} = \hbar\omega_1 V_3 + \hbar\omega_2 U_3. \quad (4.21)$$

c) Finalmente, para el sistema de tipo  $V$  los operadores de inversión resultan

$$\hat{s}_z^{3\ 1} = \frac{1}{2}V_3, \quad \hat{s}_z^{1\ 2} = \frac{1}{2}U_3, \quad (4.22)$$

y el hamiltoniano libre toma la forma

$$\hat{H}_{\text{ató}}^V = \frac{2}{3}\hat{s}_z^{3\ 1}(-E_1 - E_2 + 2E_3) + \frac{2}{3}\hat{s}_z^{1\ 2}(-E_1 + 2E_2 - E_3) + E. \quad (4.23)$$

De la figura 4.1c se ve que las energías de los tres niveles son:  $E_1 = -\hbar(\omega_1 + \omega_2)$ ,  $E_2 = \hbar\omega_2$  y  $E_3 = \hbar\omega_1$ . El hamiltoniano atómico libre para el sistema  $V$  se reescribe como

$$\hat{H}_{\text{ató}}^V = \hbar\omega_1 V_3 + \hbar\omega_2 T_3. \quad (4.24)$$

## 4.4. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo

Un sistema de tres niveles de energía puede ser modelado por dos sistemas acoplados de dos niveles. Se puede, sin pérdida de generalidad, deducir el hamiltoniano de interacción átomo-campo del sistema de tres niveles a partir del acoplamiento de dos sistemas con dos niveles, dependiendo de la interacción entre los niveles. A continuación mostramos este hecho.

### 4.4.1. Energía dipolar eléctrica en un campo eléctrico uniforme

A partir de la ec. (3.19), el hamiltoniano de la interacción átomo-campo está dado por

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hat{d} \cdot \hat{E}, \quad (4.25)$$

donde  $\hat{d}$  es el operador dipolar eléctrico y  $\hat{E}$  es el campo eléctrico. Para el sistema de tres niveles habrá tres operadores dipolares distintos, uno para cada interacción entre los niveles; es decir,  $\hat{d}_{1\ 2}$  es el operador dipolar entre los niveles  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ ,  $\hat{d}_{1\ 3} = \hat{d}_{3\ 1}$  es el operador dipolar entre los niveles  $|1\rangle$  y  $|3\rangle$ , y  $\hat{d}_{2\ 3} = \hat{d}_{3\ 2}$  es el operador dipolar entre los

niveles  $|2\rangle$  y  $|3\rangle$ . Estos operadores están dados por

$$\hat{d}_{12} = \vec{d}(U_+ + U_-), \quad (4.26a)$$

$$\hat{d}_{23} = \vec{d}(T_+ + T_-), \quad (4.26b)$$

$$\hat{d}_{13} = \vec{d}(V_+ + V_-). \quad (4.26c)$$

Con base en lo anterior se puede ahora encontrar el operador dipolar eléctrico total y con ello el hamiltoniano de interacción átomo-campo para cada uno de los distintos modelos.

a) Para el sistema tipo  $\Xi$

$$\begin{aligned} \hat{d}^\Xi &= \hat{d}_{12} + \hat{d}_{23} = \vec{d}(U_+ + U_- + T_+ + T_-) \\ \Rightarrow \hat{H}_{\text{int}}^\Xi &= -\vec{d} \cdot \vec{E}(U_+ + U_- + T_+ + T_-). \end{aligned} \quad (4.27)$$

b) Para el sistema tipo  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \hat{d}^\Lambda &= \hat{d}_{13} + \hat{d}_{32} = \vec{d}(V_+ + V_- + T_+ + T_-) \\ \Rightarrow \hat{H}_{\text{int}}^\Lambda &= -\vec{d} \cdot \vec{E}(V_+ + V_- + T_+ + T_-). \end{aligned} \quad (4.28)$$

c) Para el sistema tipo  $V$

$$\begin{aligned} \hat{d}^V &= \hat{d}_{31} + \hat{d}_{12} = \vec{d}(V_+ + V_- + U_+ + U_-) \\ \Rightarrow \hat{H}_{\text{int}}^V &= -\vec{d} \cdot \vec{E}(V_+ + V_- + U_+ + U_-). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Hasta ahora no se ha especificado la naturaleza del campo de radiación con el cual el átomo interactúa; la derivación que conduce a las ecs. (4.27)-(4.29) es válida tanto para los campos clásicos como para los campos cuánticos. A continuación se muestran las diferencias en la forma en que se comporta el átomo al interactuar con campos clásicos y cuantizados.

#### 4.4.2. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo clásico

En este caso el átomo está interactuando con un campo electromagnético bimodal sinusoidal clásico, suponemos que el campo tiene la forma

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_{\mathbf{k}} \cos(\Omega_{\mathbf{k}}t) = \frac{\vec{E}_{\mathbf{k}}}{2} (e^{i\Omega_{\mathbf{k}}t} + e^{-i\Omega_{\mathbf{k}}t}), \quad (4.30)$$

donde  $E_{\mathbf{k}}$  ( $\mathbf{k} = 1, 2$ ) son las amplitudes del campo y  $\Omega_{\mathbf{k}}$  sus respectivas frecuencias (ver figura 4.1). Usando las ecs. (4.27)-(4.29) y aplicando la aproximación de onda rotante (RWA), se pueden escribir los hamiltonianos de interacción átomo-campo clásico para los tres tipos de sistemas en la forma que presentamos a continuación:

a) Para el sistema tipo  $\Xi$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int clás}}^{\Xi} &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \vec{d} \cdot \vec{E}_1 \right) (U_+ + U_-) (e^{i\Omega_1 t} + e^{-i\Omega_1 t}) + \left( \vec{d} \cdot \vec{E}_2 \right) (T_+ + T_-) (e^{i\Omega_2 t} + e^{-i\Omega_2 t}) \right] \\ &= \hbar\kappa_1 (U_+ e^{-i\Omega_1 t} + U_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (T_+ e^{-i\Omega_2 t} + T_- e^{i\Omega_2 t}).\end{aligned}\quad (4.31)$$

b) Para el sistema tipo  $\Lambda$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int clás}}^{\Lambda} &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \vec{d} \cdot \vec{E}_1 \right) (V_+ + V_-) (e^{i\Omega_1 t} + e^{-i\Omega_1 t}) + \left( \vec{d} \cdot \vec{E}_2 \right) (T_+ + T_-) (e^{i\Omega_2 t} + e^{-i\Omega_2 t}) \right] \\ &= \hbar\kappa_1 (V_+ e^{-i\Omega_1 t} + V_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (T_+ e^{-i\Omega_2 t} + T_- e^{i\Omega_2 t}).\end{aligned}\quad (4.32)$$

c) Para el sistema tipo  $V$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int clás}}^V &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \vec{d} \cdot \vec{E}_1 \right) (V_+ + V_-) (e^{i\Omega_1 t} + e^{-i\Omega_1 t}) + \left( \vec{d} \cdot \vec{E}_2 \right) (U_+ + U_-) (e^{i\Omega_2 t} + e^{-i\Omega_2 t}) \right] \\ &= \hbar\kappa_1 (V_+ e^{-i\Omega_1 t} + V_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (U_+ e^{-i\Omega_2 t} + U_- e^{i\Omega_2 t}),\end{aligned}\quad (4.33)$$

donde  $\kappa_1 = -\frac{1}{2\hbar}(\vec{d} \cdot \vec{E}_1)$ ,  $\kappa_2 = -\frac{1}{2\hbar}(\vec{d} \cdot \vec{E}_2)$  son las constantes de interacción o acoplamiento.

### 4.4.3. Hamiltoniano de la interacción átomo-campo cuantizado

Para este caso, el átomo está interactuando con un campo electromagnético bimodal cuantizado, que tiene la forma de la ec. (2.10a),

$$\vec{E}(t) = \hat{e}_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar\Omega_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \sin(kz),\quad (4.34)$$

donde  $\hat{e}_{\mathbf{k}}$  ( $\mathbf{k} = 1, 2$ ) es un vector de polarización arbitrario,  $\Omega_{\mathbf{k}}$  las frecuencias del campo bimodal y  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ ,  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente. De las ecs. (4.27)-(4.29) y aplicando la aproximación de onda rotante (RWA), se pueden escribir los hamiltonianos de interacción átomo-campo cuantizado para los tres tipos de sistemas:

a) Para el sistema tipo  $\Xi$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{int cuán}}^{\Xi} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left( \vec{d} \cdot \hat{e}_1 \right) \left( \frac{\hbar\Omega_1}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (U_+ + U_-) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) \right. \\
&\quad \left. + \left( \vec{d} \cdot \hat{e}_2 \right) \left( \frac{\hbar\Omega_2}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (T_+ + T_-) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) \right\} \sin(kz) \\
&= \hbar g_1 (U_+ \hat{a}_1 + U_- \hat{a}_1^\dagger) + \hbar g_2 (T_+ \hat{a}_2 + T_- \hat{a}_2^\dagger). \tag{4.35}
\end{aligned}$$

b) Para el sistema tipo  $\Lambda$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{int cuán}}^{\Lambda} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left( \vec{d} \cdot \hat{e}_1 \right) \left( \frac{\hbar\Omega_1}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (V_+ + V_-) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) \right. \\
&\quad \left. + \left( \vec{d} \cdot \hat{e}_2 \right) \left( \frac{\hbar\Omega_2}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (T_+ + T_-) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) \right\} \sin(kz) \\
&= \hbar g_1 (V_+ \hat{a}_1 + V_- \hat{a}_1^\dagger) + \hbar g_2 (T_+ \hat{a}_2 + T_- \hat{a}_2^\dagger). \tag{4.36}
\end{aligned}$$

c) Para el sistema tipo  $V$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{int cuán}}^V &= -\frac{1}{2} \left\{ \left( \vec{d} \cdot \hat{e}_1 \right) \left( \frac{\hbar\Omega_1}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (V_+ + V_-) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) \right. \\
&\quad \left. + \left( \vec{d} \cdot \hat{e}_2 \right) \left( \frac{\hbar\Omega_2}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (U_+ + U_-) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) \right\} \sin(kz) \\
&= \hbar g_1 (V_+ \hat{a}_1 + V_- \hat{a}_1^\dagger) + \hbar g_2 (U_+ \hat{a}_2 + U_- \hat{a}_2^\dagger), \tag{4.37}
\end{aligned}$$

donde  $g_1 = -(\vec{d} \cdot \hat{e}_1) \left( \frac{\Omega_1}{\hbar\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz)$  y  $g_2 = -(\vec{d} \cdot \hat{e}_2) \left( \frac{\Omega_2}{\hbar\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz)$  son las constantes de acoplamiento.

## 4.5. Modelo de un átomo con tres niveles de energía interactuando con un campo electromagnético bicromático clásico

### 4.5.1. Sistema tipo $\Xi$

El hamiltoniano del sistema tipo  $\Xi$  de un átomo con tres niveles interactuando con un campo electromagnético bimodal clásico está dado por

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{clás}}^{\Xi} &= \hat{H}_{\text{áto}}^{\Xi} + \hat{H}_{\text{int clás}}^{\Xi} \\ &= \hbar\omega_1 U_3 + \hbar\omega_2 T_3 + \hbar\kappa_1 (U_+ e^{-i\Omega_1 t} + U_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (T_+ e^{-i\Omega_2 t} + T_- e^{i\Omega_2 t}),\end{aligned}\quad (4.38)$$

donde se han sustituido los resultados obtenidos en las ecs. (4.18) y (4.31). De la figura 4.1a se nota que  $\Delta_1^{\Xi} = (2\omega_1 - \omega_2 - \Omega_1)$  y  $\Delta_2^{\Xi} = (2\omega_2 - \omega_1 - \Omega_2)$  representan la desintonía respectiva de las frecuencias de campo bimodal  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Por tanto se puede reescribir la ec. (4.38) como

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{clás}}^{\Xi} &= \hat{H}_I^{\Xi} + \hat{H}_{II}^{\Xi} \\ &= [\hbar(\Omega_1 + \omega_2 - \omega_1)U_3 + \hbar(\Omega_2 + \omega_1 - \omega_2)T_3] \\ &\quad + [\hbar(\Delta_1^{\Xi}U_3 + \Delta_2^{\Xi}T_3) + \hbar\kappa_1 (U_+ e^{-i\Omega_1 t} + U_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (T_+ e^{-i\Omega_2 t} + T_- e^{i\Omega_2 t})],\end{aligned}\quad (4.39)$$

donde  $\hat{H}_I^{\Xi}$  y  $\hat{H}_{II}^{\Xi}$  corresponden a las partes no perturbadas y de interacción, respectivamente. Usando el álgebra dada en la ec. (4.8) y los operadores de campo, es fácil mostrar que  $[\hat{H}_I^{\Xi}, \hat{H}_{II}^{\Xi}] = 0$  para  $\Delta_1^{\Xi} = \Delta_2^{\Xi}$ , que se identifican como la condición de resonancia de dos fotones.

Para el sistema de tres niveles tipo  $\Xi$  equidistante, se toma  $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$  y  $\Omega_1 = \Omega_2 = \omega$ . Por lo tanto, el modelo que describe el sistema de tres niveles tipo  $\Xi$

equidistante interactuando con un solo modo de campo clásico está dado por [22]

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{clás}}^{\Xi} &= \hbar\omega U_3 + \hbar\omega T_3 + \hbar(\omega_0 - \omega)U_3 + \hbar(\omega_0 - \omega)T_3 \\
&\quad + \frac{\hbar\kappa}{\sqrt{2}} (U_+e^{-i\omega t} + U_-e^{i\omega t} + T_+e^{-i\omega t} + T_-e^{i\omega t}) \\
&= \hbar\omega_0 (U_3 + T_3) + \frac{\hbar\kappa}{\sqrt{2}} [(U_+ + T_+) e^{-i\omega t} + (U_- + T_-) e^{i\omega t}] \\
&= \hbar\omega_0 I_z + \frac{\hbar\kappa}{\sqrt{2}} (I_+e^{-i\omega t} + I_-e^{i\omega t}), \tag{4.40}
\end{aligned}$$

donde

$$I_z = U_3 + T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad I_+ = U_+ + T_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_- = U_- + T_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

De esta manera se puede reescribir la ec. (4.40) en la forma matricial

$$\hat{H}_{\text{clás}}^{\Xi} = \hbar \begin{bmatrix} \omega_0 & \frac{\kappa}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t} & 0 \\ \frac{\kappa}{\sqrt{2}}e^{i\omega t} & 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t} \\ 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{2}}e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{bmatrix}. \tag{4.42}$$

A partir de la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \tag{4.43}$$

con

$$|\Psi(t)\rangle = C_3(t)|3\rangle + C_2(t)|2\rangle + C_1(t)|1\rangle, \tag{4.44}$$

donde  $C_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) son las amplitudes normalizadas dependientes del tiempo y los  $|j\rangle$  ( $j = 1, 2, 3$ ) están dados por las ec. (4.10), se pueden calcular las amplitudes de probabilidad de los tres estados. Sustituyendo la ec. (4.44) en la ecuación de Schrödinger, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{C}_3(t) \\ \dot{C}_2(t) \\ \dot{C}_1(t) \end{bmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} \omega_0 & \frac{\kappa}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t} & 0 \\ \frac{\kappa}{\sqrt{2}}e^{i\omega t} & 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t} \\ 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{2}}e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3(t) \\ C_2(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix}, \tag{4.45}$$

que se puede poner explícitamente

$$i\dot{C}_3(t) = \omega_0 C_3(t) + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} C_2(t), \quad (4.46a)$$

$$i\dot{C}_2(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} C_3(t) + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} C_1(t), \quad (4.46b)$$

$$i\dot{C}_1(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} C_2(t) - \omega_0 C_1(t), \quad (4.46c)$$

y cuya solución general es

$$C_3(t) = A_3 e^{iS_3 t}, \quad (4.47a)$$

$$C_2(t) = A_2 e^{iS_2 t}, \quad (4.47b)$$

$$C_1(t) = A_1 e^{iS_1 t}, \quad (4.47c)$$

donde  $A_n$  y  $S_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) son constantes por determinar. Sustituyendo las ecs. (4.47a)-(4.47c) en las ecs. (4.46a)-(4.46c) obtenemos

$$S_3 A_3 e^{iS_3 t} = -\omega_0 A_3 e^{iS_3 t} - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} A_2 e^{i(S_2 - \omega)t},$$

$$S_2 A_2 e^{iS_2 t} = -\frac{\kappa}{\sqrt{2}} A_3 e^{i(S_3 + \omega)t} - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} A_1 e^{i(S_1 - \omega)t},$$

$$S_1 A_1 e^{iS_1 t} = -\frac{\kappa}{\sqrt{2}} A_2 e^{i(S_2 + \omega)t} + \omega_0 A_1 e^{iS_1 t},$$

que implica  $S_3 = S_2 - \omega$  y  $S_1 = S_2 + \omega$ . Así,

$$(S_2 - \omega + \omega_0) A_3 + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} A_2 = 0, \quad (4.48a)$$

$$S_2 A_2 + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} (A_3 + A_2) = 0, \quad (4.48b)$$

$$(S_2 + \omega - \omega_0) A_1 + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} A_2 = 0. \quad (4.48c)$$

La solución de las ecs. (4.48a)-(4.48c) conduce al sistema

$$S_2^1 = 0, \quad S_2^2 = \Omega, \quad S_2^3 = -\Omega, \quad (4.49)$$

con  $\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \kappa^2}$  la frecuencia de Rabi. Así se tienen tres valores distintos de  $S_3$  y  $S_1$ , a saber

$$\begin{aligned} S_3^1 &= -\omega, & S_3^2 &= \Omega - \omega, & S_3^3 &= -\Omega - \omega, \\ S_1^1 &= +\omega, & S_1^2 &= \Omega + \omega, & S_1^3 &= -\Omega + \omega. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Usando las ecs. (4.49) y (4.50), las ecs. (4.47a)-(4.47c) pueden ser reescritas

$$C_3(t) = A_3^1 e^{-i\omega t} + A_3^2 e^{i(\Omega-\omega)t} + A_3^3 e^{i(-\Omega-\omega)t}, \quad (4.51a)$$

$$C_2(t) = A_2^1 + A_2^2 e^{i\Omega t} + A_2^3 e^{-i\Omega t}, \quad (4.51b)$$

$$C_1(t) = A_1^1 e^{i\omega t} + A_1^2 e^{i(\Omega+\omega)t} + A_1^3 e^{i(-\Omega+\omega)t}, \quad (4.51c)$$

donde las constantes  $A_n^m$  ( $n, m = 1, 2, 3$ ), se pueden determinar a partir de las siguientes condiciones iniciales.

- Caso I: Considerando que en  $t = 0$  el sistema está en el nivel inferior, es decir,  $C_3 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = 1$ .

Usando la condición  $C_3 = 0$  en la ec. (4.51a) se obtiene  $A_3^3 = -(A_3^1 + A_3^2)$ , tal que,

$$\begin{aligned} C_3(t) &= e^{-i\omega t} (A_3^1 + A_3^2 e^{i\Omega t} - A_3^1 e^{-i\Omega t} - A_3^2 e^{-i\Omega t}) \\ &= e^{-i\omega t} [A_3^1 (1 - e^{-i\Omega t}) + A_3^2 2i \sin(\Omega t)]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Sustituyendo la ec. (4.52) en la ec. (4.46a)

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\kappa} e^{i\omega t} [i\dot{C}_3(t) - \omega_0 C_3(t)] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\kappa} e^{i\omega t} \{ \omega C_3(t) - e^{-i\omega t} [A_3^1 \Omega e^{-i\Omega t} + 2\Omega A_3^2 \cos(\Omega t)] - \omega_0 C_3(t) \} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\kappa} \left\{ [(\omega - \omega_0) (1 - e^{-i\Omega t}) - \Omega e^{-i\Omega t}] A_3^1 \right. \\ &\quad \left. + [(\omega - \omega_0) 2i \sin(\Omega t) - 2\Omega \cos(\Omega t)] A_3^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Al tomar la condición  $C_2(0) = 0$  en la ec. (4.53) se obtiene  $A_3^2 = -\frac{A_3^1}{2} = -\frac{A}{2}$ .

Sustituyendo los valores de  $A_3^1$  y  $A_3^2$  en las ecs. (4.52) y (4.53)

$$\begin{aligned} C_3(t) &= e^{-i\omega t} \left[ A (1 - e^{-i\Omega t}) - \frac{A}{2} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) \right] \\ &= A e^{-i\omega t} [1 - \cos(\Omega t)], \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\kappa} \left\{ A [(\omega - \omega_0) (1 - e^{-i\Omega t}) - \Omega e^{-i\Omega t}] \right. \\ &\quad \left. - \frac{A}{2} [(\omega - \omega_0) (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) - \Omega (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})] \right\} \\ &= A \frac{\sqrt{2}}{\kappa} [(\omega - \omega_0) (1 - \cos(\Omega t)) + i\Omega \sin(\Omega t)]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Sustituyendo las ecs. (4.54) y (4.55) en la ec. (4.46b)

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= i \frac{\sqrt{2}}{\kappa} e^{i\omega t} \dot{C}_2(t) - e^{2i\omega t} C_3(t) \\
&= i \frac{\sqrt{2}}{\kappa} e^{i\omega t} \left[ A \frac{\sqrt{2}}{\kappa} (\omega - \omega_0) \sin(\Omega t) + i\Omega^2 \cos(\Omega t) \right] - e^{i\omega t} A [1 - \cos(\Omega t)] \\
&= A e^{i\omega t} \left\{ \frac{2}{\kappa^2} [(\omega - \omega_0) i\Omega \sin(\Omega t) - \Omega^2 \cos(\Omega t)] - [1 - \cos(\Omega t)] \right\}. \quad (4.56)
\end{aligned}$$

Tomando la condición  $C_1(0) = 1$  en la ec. (4.56) resulta que  $A = -\frac{\kappa^2}{2\Omega^2}$ . Sustituyendo este valor de  $A$  en las ecs. (4.54)-(4.56), se obtiene

$$\begin{aligned}
C_3(t) &= -\frac{\kappa^2}{2\Omega^2} e^{-i\omega t} [1 - \cos(\Omega t)] \\
&= -\frac{\kappa^2}{\Omega^2} e^{-i\omega t} \sin^2(\Omega t/2), \quad (4.57a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2(t) &= -\frac{\kappa}{\Omega^2 \sqrt{2}} [(\omega - \omega_0) (1 - \cos(\Omega t)) + i\Omega \sin(\Omega t)] \\
&= -\frac{\kappa}{\Omega^2 \sqrt{2}} [2(\omega - \omega_0) \sin^2(\Omega t/2) + i\Omega \sin(\Omega t)], \quad (4.57b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= \frac{e^{i\omega t}}{\Omega^2} \left[ \frac{\kappa^2}{2} (1 - \cos(\Omega t)) - (\omega - \omega_0) i\Omega \sin(\Omega t) + \Omega^2 \cos(\Omega t) \right] \\
&= \frac{e^{i\omega t}}{\Omega^2} [\kappa^2 \sin^2(\Omega t/2) - (\omega - \omega_0) i\Omega \sin(\Omega t) + \Omega^2 \cos(\Omega t)]. \quad (4.57c)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir de las ecs. (4.57a)-(4.57c), las probabilidades dependientes del tiempo de los tres niveles de energía están dadas por

$$|C_3(t)|^2 = \frac{\kappa^4}{\Omega^4} \sin^4(\Omega t/2), \quad (4.58a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{\kappa^2}{2\Omega^4} [4(\omega - \omega_0)^2 \sin^4(\Omega t/2) + \Omega^2 \sin^2(\Omega t)], \quad (4.58b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{\Omega^4} \left[ (\kappa^2 \sin^2(\Omega t/2) + \Omega^2 \cos(\Omega t))^2 + (\omega - \omega_0)^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t) \right]. \quad (4.58c)$$

- Caso II: Considerando ahora que en  $t = 0$ , el sistema está en el nivel medio, es decir,  $C_3(0) = 0$ ,  $C_2(0) = 1$ ,  $C_1(0) = 0$ .

Procediendo de manera similar al caso anterior, las correspondientes probabilidades

de los niveles de energía son

$$|C_3(t)|^2 = \frac{\kappa^2}{2\Omega^4} [4(\omega - \omega_0)^2 \sin^4(\Omega t/2) + \Omega^2 \sin^2(\Omega t)], \quad (4.59a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{4(\omega - \omega_0)^4}{\Omega^4} \sin^4(\Omega t/2) + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) \cos(\Omega t) + \cos^2(\Omega t), \quad (4.59b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{\kappa^2}{2\Omega^4} [4(\omega - \omega_0)^2 \sin^4(\Omega t/2) + \Omega^2 \sin^2(\Omega t)], \quad (4.59c)$$

donde se puede observar que las probabilidades de los niveles superior e inferior son iguales.

- Caso III: Cuando el sistema está inicialmente en el nivel superior, es decir,  $C_3(0) = 1$ ,  $C_2(0) = 0$ ,  $C_1(0) = 0$

Se obtienen las probabilidades siguientes

$$|C_3(t)|^2 = \frac{1}{\Omega^4} \left[ (\kappa^2 \sin^2(\Omega t/2) + \Omega^2 \cos(\Omega t))^2 + (\omega - \omega_0)^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t) \right], \quad (4.60a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{\kappa^2}{2\Omega^4} [4(\omega - \omega_0)^2 \sin^4(\Omega t/2) + \Omega^2 \sin^2(\Omega t)], \quad (4.60b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{\kappa^4}{\Omega^4} \sin^4(\Omega t/2). \quad (4.60c)$$

Se puede observar que la probabilidad del nivel medio para el caso III es idéntica a la del caso I, mientras que los niveles superior e inferior están intercambiados.

En el caso de la resonancia exacta se tiene que  $\Omega = \kappa$ , por tanto, las amplitudes de probabilidad de los tres niveles, dadas las condiciones iniciales, son

- Caso I:

$$|C_3(t)|^2 = \sin^4(\kappa t/2), \quad (4.61a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(\kappa t), \quad (4.61b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \sin^4(\kappa t/2) + \cos^2(\kappa t) + 2 \sin^2(\kappa t/2) \cos(\kappa t). \quad (4.61c)$$

- Caso II:

$$|C_3(t)|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(\kappa t), \quad (4.62a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \cos^2(\kappa t), \quad (4.62b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(\kappa t). \quad (4.62c)$$

- Caso III:

$$|C_3(t)|^2 = \sin^4(\kappa t/2) + \cos^2(\kappa t) + 2 \sin^2(\kappa t/2) \cos(\kappa t), \quad (4.63a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(\kappa t), \quad (4.63b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \sin^4(\kappa t/2). \quad (4.63c)$$

### 4.5.2. Sistema tipo $\Lambda$

El hamiltoniano del sistema tipo  $\Lambda$  de un átomo con tres niveles de energía interactuando con un campo electromagnético bimodal clásico está dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{clás}}^\Lambda &= \hat{H}_{\text{áto}}^\Lambda + \hat{H}_{\text{int clás}}^\Lambda \\ &= \hbar\omega_1 V_3 + \hbar\omega_2 T_3 + \hbar\kappa_1 (V_+ e^{-i\Omega_1 t} + V_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (T_+ e^{-i\Omega_2 t} + T_- e^{i\Omega_2 t}), \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde se han sustituido los resultados obtenidos en las ecs. (4.21) y (4.32). De la figura 4.1b es importante notar que  $\Delta_1^\Lambda = (2\omega_1 + \omega_2 - \Omega_1)$  y  $\Delta_2^\Lambda = (\omega_1 + 2\omega_2 - \Omega_2)$ , representan la desintonía respectiva de las frecuencias del campo bimodal  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Se puede reescribir la ec. (4.64) como

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{clás}}^\Lambda &= \hat{H}_I^\Lambda + \hat{H}_{II}^\Lambda \\ &= [\hbar(\Omega_1 - \omega_1 - \omega_2)V_3 + \hbar(\Omega_2 - \omega_1 - \omega_2)T_3] \\ &\quad + [\hbar(\Delta_1^\Lambda V_3 + \Delta_2^\Lambda T_3) + \hbar\kappa_1 (V_+ e^{-i\Omega_1 t} + V_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (T_+ e^{-i\Omega_2 t} + T_- e^{i\Omega_2 t})], \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde  $\hat{H}_I^\Lambda$  y  $\hat{H}_{II}^\Lambda$  son las partes no perturbadas y de interacción, respectivamente. Es fácil mostrar que  $[\hat{H}_I^\Lambda, \hat{H}_{II}^\Lambda] = 0$  para  $\Delta_1^\Lambda = -\Delta_2^\Lambda$ , que se identifican como la condición de resonancia de dos fotones.

Cuando la desintonía es igual a cero se tiene que  $\Delta_1^\Lambda = 0 = -\Delta_2^\Lambda$ , es decir,  $(2\omega_2 + \omega_1) - \Omega_2 = 0 = (\omega_2 + 2\omega_1) - \Omega_1$ , y el hamiltoniano del sistema de tres niveles tipo  $\Lambda$  queda [23]

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{clás}}^\Lambda &= \hbar(\omega_2 + 2\omega_1 - \omega_1 - \omega_2)V_3 + \hbar(\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_1 - \omega_2)T_3 \\ &\quad + \hbar\kappa_1(V_+e^{-i\Omega_1 t} + V_-e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2(T_+e^{-i\Omega_2 t} + T_-e^{i\Omega_2 t}) \\ &= \hbar\omega_1 V_3 + \hbar\omega_2 T_3 + \hbar\kappa_1(V_+e^{-i\Omega_1 t} + V_-e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2(T_+e^{-i\Omega_2 t} + T_-e^{i\Omega_2 t}).\end{aligned}\quad (4.66)$$

Usando los resultados obtenidos en las ecs. (4.7) y (4.9), se puede reescribir la ec. (4.66) en la forma matricial

$$H_{\text{clás}}^\Lambda = \begin{bmatrix} \hbar(\omega_1 + \omega_2) & \hbar\kappa_2 e^{-i\Omega_2 t} & \hbar\kappa_1 e^{-i\Omega_1 t} \\ \hbar\kappa_2 e^{i\Omega_2 t} & -\hbar\omega_2 & 0 \\ \hbar\kappa_1 e^{i\Omega_1 t} & 0 & \hbar\omega_1 \end{bmatrix}.\quad (4.67)$$

Aplicando la ecuación de Schrödinger al hamiltoniano anterior

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{C}_3(t) \\ \dot{C}_2(t) \\ \dot{C}_1(t) \end{bmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} \omega_1 + \omega_2 & \kappa_2 e^{-i\Omega_2 t} & \kappa_1 e^{-i\Omega_1 t} \\ \kappa_2 e^{i\Omega_2 t} & -\omega_2 & 0 \\ \kappa_1 e^{i\Omega_1 t} & 0 & \omega_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3(t) \\ C_2(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix},\quad (4.68)$$

obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$i\dot{C}_3(t) = (\omega_1 + \omega_2)C_3(t) + \kappa_2 e^{-i\Omega_2 t} C_2(t) + \kappa_1 e^{-i\Omega_1 t} C_1(t),\quad (4.69a)$$

$$i\dot{C}_2(t) = \kappa_2 e^{i\Omega_2 t} C_3(t) - \omega_2 C_2(t),\quad (4.69b)$$

$$i\dot{C}_1(t) = \kappa_1 e^{i\Omega_1 t} C_3(t) - \omega_1 C_1(t).\quad (4.69c)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales tiene soluciones de la forma

$$C_3 = A_3 e^{iS_3 t},\quad (4.70a)$$

$$C_2 = A_2 e^{iS_2 t},\quad (4.70b)$$

$$C_1 = A_1 e^{iS_1 t},\quad (4.70c)$$

donde  $A_n$  y  $S_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) son constantes independientes del tiempo por determinar. Sustituyendo las ecs. (4.70a)-(4.70c) en las ecs. (4.69a)-(4.69c)

$$\begin{aligned} S_3 A_3 e^{iS_3 t} &= -(\omega_1 + \omega_2) A_3 e^{iS_3 t} - \kappa_2 A_2 e^{i(S_2 - \Omega_2)t} - \kappa_1 A_1 e^{i(S_1 - \Omega_1)t}, \\ S_2 A_2 e^{iS_2 t} &= -\kappa_2 A_3 e^{i(S_3 + \Omega_2)t} + \omega_2 A_2 e^{iS_2 t}, \\ S_1 A_1 e^{iS_1 t} &= -\kappa_1 A_3 e^{i(S_3 + \Omega_1)t} + \omega_1 A_1 e^{iS_1 t}, \end{aligned}$$

que implica  $S_2 = S_3 + \Omega_2$  y  $S_1 = S_3 + \Omega_1$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} (S_3 + \omega_2 + \omega_1) A_3 + \kappa_2 A_2 + \kappa_1 A_1 &= 0, \\ (S_3 + \Omega_2 - \omega_2) A_2 + \kappa_2 A_3 &= 0, \\ (S_3 + \Omega_1 - \omega_1) A_1 + \kappa_1 A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dado que  $\Omega_2 = \omega_1 + 2\omega_2$  y  $\Omega_1 = 2\omega_1 + \omega_2$ ,

$$(S_3 + \omega_2 + \omega_1) A_3 + \kappa_2 A_2 + \kappa_1 A_1 = 0, \quad (4.71a)$$

$$\kappa_2 A_3 + (S_3 + \omega_2 + \omega_1) A_2 = 0, \quad (4.71b)$$

$$\kappa_1 A_3 + (S_3 + \omega_2 + \omega_1) A_1 = 0. \quad (4.71c)$$

La solución de las ecs. (4.71a)-(4.71c) conduce al sistema

$$S_3^1 = -(\omega_2 + \omega_1), \quad S_3^2 = -(\omega_2 + \omega_1) + \Delta, \quad S_3^3 = -(\omega_2 + \omega_1) - \Delta, \quad (4.72)$$

donde  $\Delta = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ , por lo que tenemos tres valores de  $S_2$  y  $S_1$ , a saber,

$$\begin{aligned} S_2^1 &= \omega_2, & S_2^2 &= \omega_2 + \Delta, & S_2^3 &= \omega_2 - \Delta, \\ S_1^1 &= \omega_1, & S_1^2 &= \omega_1 + \Delta, & S_1^3 &= \omega_1 - \Delta. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Usando las ecs. (4.72) y (4.73), las ecs. (4.70a)-(4.70c) pueden ser reescritas como

$$C_3(t) = A_3^1 e^{-i(\omega_2 + \omega_1)t} + A_3^2 e^{i(-(\omega_2 + \omega_1) + \Delta)t} + A_3^3 e^{i(-(\omega_2 + \omega_1) - \Delta)t}, \quad (4.74a)$$

$$C_2(t) = A_2^1 e^{i\omega_2 t} + A_2^2 e^{i(\omega_2 + \Delta)t} + A_2^3 e^{i(\omega_2 - \Delta)t}, \quad (4.74b)$$

$$C_1(t) = A_1^1 e^{i\omega_1 t} + A_1^2 e^{i(\omega_1 + \Delta)t} + A_1^3 e^{i(\omega_1 - \Delta)t}, \quad (4.74c)$$

donde las  $A_n^m$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) pueden ser calculadas a partir de las siguientes condiciones iniciales.

- Caso I: Considerando que en  $t = 0$ , el sistema se encuentra en el nivel inferior, es decir,  $C_1(0) = 1$ ,  $C_2(0) = 0$ ,  $C_3(0) = 0$ .

Usando la condición inicial  $C_2(0) = 0$  en la ec. (4.74b), se obtiene  $A_2^3 = -(A_2^1 + A_2^2)$ , de manera que,

$$\begin{aligned} C_2(t) &= A_2^1 e^{i\omega_2 t} + A_2^2 e^{i(\omega_2 + \Delta)t} - A_2^1 e^{i(\omega_2 - \Delta)t} - A_2^2 e^{i(\omega_2 - \Delta)t} \\ &= e^{i\omega_2 t} [A_2^1 (1 - e^{-i\Delta t}) + A_2^2 2i \sin(\Delta t)]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Sustituyendo la ec. (4.75) en la ec. (4.70b)

$$\begin{aligned} C_3(t) &= \frac{1}{\kappa_2} e^{-i(2\omega_2 + \omega_1)t} [i\dot{C}_2(t) + \omega_2 C_2(t)] \\ &= \frac{1}{\kappa_2} e^{-i(2\omega_2 + \omega_1)t} \{-\omega_2 C_2(t) + \Delta e^{i\omega_2 t} [A_2^1 e^{-i\Delta t} + A_2^2 2 \cos(\Delta t)] + \omega_2 C_2(t)\} \\ &= -\frac{\Delta}{\kappa_2} e^{-i(\omega_2 + \omega_1)t} [A_2^1 e^{-i\Delta t} + A_2^2 2 \cos(\Delta t)]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Usando ahora la condición  $C_3(0) = 0$  en la ec. (4.76), se llega a que  $A_2^2 = -\frac{A_2^1}{2}$ . Así se pueden reescribir las ecs. (4.75) y (4.76) como

$$\begin{aligned} C_3(t) &= -\frac{\Delta}{\kappa_2} e^{-i(\omega_2 + \omega_1)t} \left[ A_2^1 e^{-i\Delta t} - \frac{A_2^1}{2} e^{i\Delta t} - \frac{A_2^1}{2} e^{-i\Delta t} \right] \\ &= \frac{\Delta}{\kappa_2} e^{-i(\omega_2 + \omega_1)t} A_2^1 i \sin(\Delta t), \end{aligned} \quad (4.77a)$$

$$\begin{aligned} C_2(t) &= e^{i\omega_2 t} \left[ A_2^1 - A_2^1 e^{-i\Delta t} - \frac{A_2^1}{2} e^{i\Delta t} + \frac{A_2^1}{2} e^{-i\Delta t} \right] \\ &= e^{i\omega_2 t} A_2^1 (1 - \cos(\Delta t)) \\ &= 2e^{i\omega_2 t} A_2^1 \sin^2(\Delta t/2). \end{aligned} \quad (4.77b)$$

Sustituyendo las ecs. (4.77a) y (4.77b) en la ec. (4.69a),

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{\kappa_1} e^{i(\omega_2 + 2\omega_1)t} [i\dot{C}_3(t) - (\omega_2 + \omega_1)C_3(t) - \kappa_2 e^{-i(2\omega_2 + \omega_1)t} C_2(t)] \\ &= -e^{i\omega_1 t} A_2^1 \left[ \frac{\Delta^2}{\kappa_1 \kappa_2} \cos(\Delta t) + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} (1 - \cos(\Delta t)) \right]. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Usando la condición inicial  $C_1(0) = 1$  en la ec. (4.78) se obtiene que  $A_2^1 = -\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\Delta^2}$ .

Sustituyendo este resultado en las ecs. (4.77a)-(4.78) se llega finalmente a que

$$\begin{aligned} C_3(t) &= -\frac{\Delta}{\kappa_2} e^{-i(\omega_2+\omega_1)t} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\Delta^2} i \sin(\Delta t) \\ &= -e^{-i(\omega_2+\omega_1)t} \frac{\kappa_1}{\Delta} i \sin(\Delta t), \end{aligned} \quad (4.79a)$$

$$C_2(t) = -e^{i\omega_2 t} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\Delta^2} 2 \sin^2(\Delta t/2), \quad (4.79b)$$

$$\begin{aligned} C_1(t) &= e^{i\omega_1 t} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\Delta^2} \left[ \frac{\Delta^2}{\kappa_1 \kappa_2} \cos(\Delta t) + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} (1 - \cos(\Delta t)) \right] \\ &= \frac{e^{i\omega_1 t}}{\Delta^2} \left[ (\kappa_2^2 + \kappa_1^2) \cos(\Delta t) + \kappa_2^2 (1 - \cos(\Delta t)) \right] \\ &= \frac{e^{i\omega_1 t}}{\Delta^2} \left[ \kappa_2^2 + \kappa_1^2 \cos(\Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (4.79c)$$

Las probabilidades dependientes del tiempo de los tres niveles de energía son

$$|C_3(t)|^2 = \frac{\kappa_1^2}{\Delta^2} \sin^2(\Delta t), \quad (4.80a)$$

$$|C_2(t)|^2 = 4 \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2}{\Delta^4} \sin^4(\Delta t/2), \quad (4.80b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{\Delta^4} \left[ \kappa_2^2 + \kappa_1^2 \cos(\Delta t) \right]^2. \quad (4.80c)$$

- Caso II: Considerando ahora que el sistema está inicialmente en el nivel medio, es decir,  $C_1(0) = 0$ ,  $C_2(0) = 1$ ,  $C_3(0) = 0$ .

Las probabilidades de los tres niveles de energía están dadas por

$$|C_3(t)|^2 = \frac{\kappa_2^2}{\Delta^2} \sin^2(\Delta t), \quad (4.81a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{\Delta^4} \left[ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 \cos(\Delta t) \right]^2, \quad (4.81b)$$

$$|C_1(t)|^2 = 4 \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2}{\Delta^4} \sin^4(\Delta t/2). \quad (4.81c)$$

- Caso III: Cuando el sistema está inicialmente en el nivel superior, es decir,  $C_1(0) = 0$ ,  $C_2(0) = 0$ ,  $C_3(0) = 1$ .

Las probabilidades de los tres niveles de energía son

$$|C_3(t)|^2 = \cos^2(\Delta t), \quad (4.82a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{\kappa_2^2}{\Delta^2} \sin^2(\Delta t), \quad (4.82b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{\kappa_1^2}{\Delta^2} \sin^2(\Delta t). \quad (4.82c)$$

### 4.5.3. Sistema tipo $V$

El hamiltoniano del sistema tipo  $V$  de un átomo con tres niveles de energía interactuando con un campo electromagnético bimodal clásico está dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{clás}}^V &= \hat{H}_{\text{áto}}^V + \hat{H}_{\text{int clás}}^V \\ &= \hbar\omega_1 V_3 + \hbar\omega_2 U_3 + \hbar\kappa_1 (V_+ e^{-i\Omega_1 t} + V_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (U_+ e^{-i\Omega_2 t} + U_- e^{i\Omega_2 t}), \end{aligned} \quad (4.83)$$

donde se han sustituido los resultados obtenidos en las ecs. (4.24) y (4.33). De la figura 4.1c es importante notar que  $\Delta_1^V = (2\omega_1 + \omega_2 - \Omega_1)$  y  $\Delta_2^V = (\omega_1 + 2\omega_2 - \Omega_2)$ , representan la desintonía respectiva de las frecuencias del campo bimodal  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Así se puede reescribir la ec. (4.83) como

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{clás}}^V &= \hat{H}_I^V + \hat{H}_{II}^V \\ &= [\hbar(\Omega_1 - \omega_1 - \omega_2)V_3 + \hbar(\Omega_2 - \omega_1 - \omega_2)U_3] \\ &\quad + [\hbar(\Delta_1^V V_3 + \Delta_2^V U_3) + \hbar\kappa_1 (V_+ e^{-i\Omega_1 t} + V_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (U_+ e^{-i\Omega_2 t} + U_- e^{i\Omega_2 t})], \end{aligned} \quad (4.84)$$

donde  $\hat{H}_I^V$  y  $\hat{H}_{II}^V$  son las partes no perturbadas y de interacción, respectivamente. Es fácil mostrar que  $[\hat{H}_I^V, \hat{H}_{II}^V] = 0$  para  $\Delta_1^V = -\Delta_2^V$ , que se identifica como la condición de resonancia de dos fotones.

Cuando la desintonía es cero se tiene que  $\Delta_1^A = 0 = -\Delta_2^A$ , es decir,  $(2\omega_2 + \omega_1) - \Omega_2 = 0 = (\omega_2 + 2\omega_1) - \Omega_1$ , y el hamiltoniano del sistema tipo  $V$  está dado por [23]

$$\begin{aligned} \hat{H}^V &= \hbar(\Omega_1 - \omega_1 - \omega_2 + 2\omega_1 + \omega_2 - \Omega_1)V_3 + \hbar(\Omega_2 - \omega_1 - \omega_2 + 2\omega_2 + \omega_1 - \Omega_2)U_3 \\ &\quad + \hbar\kappa_1 (V_+ e^{-i\Omega_1 t} + V_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (U_+ e^{-i\Omega_2 t} + U_- e^{i\Omega_2 t}) \\ &= \hbar\omega_1 V_3 + \hbar\omega_2 U_3 + \hbar\kappa_1 (V_+ e^{-i\Omega_1 t} + V_- e^{i\Omega_1 t}) + \hbar\kappa_2 (U_+ e^{-i\Omega_2 t} + U_- e^{i\Omega_2 t}). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Usando los resultados obtenidos en las ecs. (4.7) y (4.9), se puede reescribir la ec. (4.85) en la forma matricial

$$\hat{H}^V = \begin{bmatrix} \hbar\omega_1 & 0 & \hbar\kappa_1 e^{-i\Omega_1 t} \\ 0 & \hbar\omega_2 & \hbar\kappa_2 e^{-i\Omega_2 t} \\ \hbar\kappa_1 e^{i\Omega_1 t} & \hbar\kappa_2 e^{i\Omega_2 t} & -\hbar(\omega_1 + \omega_2) \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

Aplicando la ecuación de Schrödinger al hamiltoniano anterior

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{C}_3(t) \\ \dot{C}_2(t) \\ \dot{C}_1(t) \end{bmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \kappa_1 e^{-i\Omega_1 t} \\ 0 & \omega_2 & \kappa_2 e^{-i\Omega_2 t} \\ \kappa_1 e^{i\Omega_1 t} & \kappa_2 e^{i\Omega_2 t} & -(\omega_1 + \omega_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3(t) \\ C_2(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$i\dot{C}_3(t) = \omega_1 C_3 + \kappa_1 e^{-i\Omega_1 t} C_1, \quad (4.88a)$$

$$i\dot{C}_2(t) = \omega_2 C_2 + \kappa_2 e^{-i\Omega_2 t} C_1, \quad (4.88b)$$

$$i\dot{C}_1(t) = -(\omega_1 + \omega_2) C_1 + \kappa_2 e^{i\Omega_2 t} C_2 + \kappa_1 e^{i\Omega_1 t} C_3. \quad (4.88c)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales posee soluciones de la forma

$$C_3(t) = A_3 e^{iS_3 t}, \quad (4.89a)$$

$$C_2(t) = A_2 e^{iS_2 t}, \quad (4.89b)$$

$$C_1(t) = A_1 e^{iS_1 t}, \quad (4.89c)$$

donde  $A_n$  y  $S_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) son constantes independientes del tiempo por determinar a partir de las condiciones iniciales. Sustituyendo las ecs. (4.89a)-(4.89c) en las ecs. (4.88a)-(4.88c) se obtiene

$$S_3 A_3 e^{iS_3 t} = -\omega_1 A_3 e^{iS_3 t} - \kappa_1 A_1 e^{i(S_1 - \Omega_1)t},$$

$$S_2 A_2 e^{iS_2 t} = -\omega_2 A_2 e^{iS_2 t} - \kappa_2 A_1 e^{i(S_1 - \Omega_2)t},$$

$$S_1 A_1 e^{iS_1 t} = -\kappa_1 A_3 e^{i(S_3 + \Omega_1)t} - \kappa_2 A_2 e^{i(S_2 + \Omega_2)t} + (\omega_1 + \omega_2) A_1 e^{iS_1 t},$$

que implica que  $S_2 = S_1 - \Omega_2$  y  $S_3 = S_1 - \Omega_1$ . Por tanto,

$$\begin{aligned}(S_1 - \Omega_1 + \omega_1)A_3 + \kappa_1 A_1 &= 0, \\ (S_1 - \Omega_2 + \omega_2)A_2 + \kappa_2 A_1 &= 0, \\ (S_1 - \omega_1 - \omega_2)A_1 + \kappa_1 A_3 + \kappa_2 A_2 &= 0.\end{aligned}$$

Dado que  $\Omega_2 = \omega_1 + 2\omega_2$  y  $\Omega_1 = 2\omega_1 + \omega_2$ ,

$$(S_1 - \omega_2 - \omega_1)A_3 + \kappa_1 A_1 = 0, \quad (4.90a)$$

$$(S_1 - \omega_2 - \omega_1)A_2 + \kappa_2 A_1 = 0, \quad (4.90b)$$

$$\kappa_1 A_3 + \kappa_2 A_2 + (S_1 - \omega_2 - \omega_1)A_1 = 0. \quad (4.90c)$$

La solución de las ecs. (4.90a)-(4.90c) conduce al sistema

$$S_1^1 = (\omega_1 + \omega_2), \quad S_1^2 = (\omega_1 + \omega_2) + \Delta, \quad S_1^3 = (\omega_1 + \omega_2) - \Delta, \quad (4.91)$$

donde  $\Delta = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  y se tienen tres valores de  $S_2$  y  $S_1$ , a saber,

$$\begin{aligned}S_2^1 &= -\omega_2, & S_2^2 &= -\omega_2 + \Delta, & S_2^3 &= -\omega_2 - \Delta, \\ S_3^1 &= -\omega_1, & S_3^2 &= -\omega_1 + \Delta, & S_3^3 &= -\omega_1 - \Delta.\end{aligned} \quad (4.92)$$

Usando las ecs. (4.91) y (4.92), se pueden reescribir las ecs. (4.89a)-(4.89c) como

$$C_3(t) = A_3^1 e^{-i\omega_1 t} + A_3^2 e^{i(-\omega_1 + \Delta)t} + A_3^3 e^{-i(\omega_1 + \Delta)t}, \quad (4.93a)$$

$$C_2(t) = A_2^1 e^{-i\omega_2 t} + A_2^2 e^{i(-\omega_2 + \Delta)t} + A_2^3 e^{-i(\omega_2 + \Delta)t}, \quad (4.93b)$$

$$C_1(t) = A_1^1 e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} + A_1^2 e^{i(\omega_2 + \omega_1 + \Delta)t} + A_1^3 e^{i(\omega_2 + \omega_1 - \Delta)t}, \quad (4.93c)$$

donde las  $A_n^m$  ( $n, m = 1, 2, 3$ ) son constantes a calcular mediante las condiciones iniciales siguientes:

- Caso I: Considerando que en  $t = 0$ , el sistema está en el nivel inferior, es decir,  $C_1(0) = 1$ ,  $C_2(0) = 0$ ,  $C_3(0) = 0$ .

Utilizando la condición inicial  $C_3(0) = 0$  en la ec. (4.93a) se obtiene que  $A_3^3 =$

$-(A_3^1 + A_3^2)$ , de manera que

$$\begin{aligned} C_3(t) &= A_3^1 e^{-i\omega_1 t} + A_3^2 e^{i(-\omega_1 + \Delta)t} - A_3^1 e^{-i(\omega_1 + \Delta)t} - A_3^2 e^{-i(\omega_1 + \Delta)t} \\ &= e^{-i\omega_1 t} [A_3^1 (1 - e^{-i\Delta t}) + 2iA_3^2 \sin(\Delta t)]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Sustituyendo la ec. (4.94) en la ec. (4.88c)

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{\kappa_1} e^{i(\omega_2 + 2\omega_1)t} [i\dot{C}_3(t) - \omega_1 C_3(t)] \\ &= \frac{1}{\kappa_1} e^{i(\omega_2 + 2\omega_1)t} [\omega_1 C_3(t) - \Delta e^{-i\omega_1 t} (A_3^1 e^{-i\Delta t} + 2A_3^2 \cos(\Delta t)) - \omega_1 C_3(t)] \\ &= -\frac{\Delta}{\kappa_1} e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} [A_3^1 e^{-i\Delta t} + 2A_3^2 \cos(\Delta t)]. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Usando la condición  $C_1(0) = 1$  en la ec. (4.95), se tiene  $A_3^2 = -\frac{1}{2} (\frac{\kappa_1}{\Delta} + A_3^1)$  y por lo tanto, a partir de las ecs. (4.94) y (4.95),

$$\begin{aligned} C_3(t) &= e^{-i\omega_1 t} \left[ A_3^1 (1 - e^{-i\Delta t}) - i \left( \frac{\kappa_1}{\Delta} + A_3^1 \right) \sin(\Delta t) \right] \\ &= e^{-i\omega_1 t} \left[ A_3^1 \left( 1 - e^{-i\Delta t} - \frac{1}{2} e^{i\Delta t} + \frac{1}{2} e^{-i\Delta t} \right) - i \frac{\kappa_1}{\Delta} \sin(\Delta t) \right] \\ &= e^{-i\omega_1 t} \left[ A_3^1 (1 - \cos(\Delta t)) - i \frac{\kappa_1}{\Delta} \sin(\Delta t) \right], \end{aligned} \quad (4.96a)$$

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{\Delta}{\kappa_1} e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} \left[ A_3^1 e^{-i\Delta t} - \left( \frac{\kappa_1}{\Delta} + A_3^1 \right) \cos(\Delta t) \right] \\ &= -\frac{\Delta}{\kappa_1} e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} \left[ A_3^1 \left( e^{-i\Delta t} - \frac{1}{2} e^{i\Delta t} - \frac{1}{2} e^{-i\Delta t} \right) - \frac{\kappa_1}{\Delta} \cos(\Delta t) \right] \\ &= e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} \left[ \frac{\Delta}{\kappa_1} A_3^1 i \sin(\Delta t) + \cos(\Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (4.96b)$$

Sustituyendo las ecs. (4.96a) y (4.96b) en la ec. (4.88b)

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \frac{1}{\kappa_2} e^{-i(2\omega_2 + \omega_1)t} [i\dot{C}_1(t) + (\omega_1 + \omega_2)C_1(t) - \kappa_1 e^{i(2\omega_1 + \omega_2)t} C_3(t)] \\ &= -e^{-i\omega_2 t} \left[ A_3^1 \left( \frac{\Delta^2}{\kappa_1 \kappa_2} \cos(\Delta t) + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} (1 - \cos(\Delta t)) \right) + \left( \frac{\Delta}{\kappa_2} - \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2 \Delta} \right) i \sin(\Delta t) \right] \\ &= -e^{-i\omega_2 t} \left[ A_3^1 \left( \frac{\Delta^2}{\kappa_1 \kappa_2} \cos(\Delta t) + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} (1 - \cos(\Delta t)) \right) + \frac{\kappa_2}{\Delta} i \sin(\Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Aplicando la condición  $C_2(0) = 0$  en la ec. (4.97), se obtiene  $A_3^1 = 0$  y por lo tanto,

las ecs. (4.96a)-(4.97) se convierten en

$$C_3(t) = -e^{-i\omega_1 t} \frac{\kappa_1}{\Delta} i \sin(\Delta t), \quad (4.98a)$$

$$C_2(t) = -e^{-i\omega_2 t} \frac{\kappa_2}{\Delta} i \sin(\Delta t), \quad (4.98b)$$

$$C_1(t) = e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} \cos(\Delta t). \quad (4.98c)$$

A partir de las ecs. (4.98a)-(4.98c), las probabilidades dependientes del tiempo de los tres niveles de energía están dados por

$$|C_3(t)|^2 = \frac{\kappa_1^2}{\Delta^2} \sin^2(\Delta t), \quad (4.99a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{\kappa_2^2}{\Delta^2} \sin^2(\Delta t), \quad (4.99b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \cos^2(\Delta t). \quad (4.99c)$$

- Caso II: Si el sistema se encuentra inicialmente en el nivel medio, es decir,  $C_1(0) = 0$ ,  $C_2(0) = 1$ ,  $C_3(0) = 0$ .

Las probabilidades correspondientes de los tres niveles de energía están dados por

$$|C_3(t)|^2 = 4 \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2}{\Delta^4} \sin^4(\Delta t/2), \quad (4.100a)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{\Delta^4} [\kappa_1^2 + \kappa_2^2 \cos(\Delta t)]^2, \quad (4.100b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{\kappa_2^2}{\Delta^2} \sin^2(\Delta t). \quad (4.100c)$$

- Caso III: Cuando el sistema se encuentra inicialmente en el nivel superior, es decir,  $C_1(0) = 0$ ,  $C_2(0) = 0$ ,  $C_3(0) = 1$ .

Las probabilidades correspondientes de los tres niveles de energía son

$$|C_3(t)|^2 = \frac{1}{\Delta^4} [\kappa_2^2 + \kappa_1^2 \cos(\Delta t)]^2, \quad (4.101a)$$

$$|C_2(t)|^2 = 4 \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2}{\Delta^4} \sin^4(\Delta t/2), \quad (4.101b)$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{\kappa_1^2}{\Delta^2} \sin^2(\Delta t). \quad (4.101c)$$

## 4.6. Modelo de un átomo con tres niveles de energía interactuando con un campo electromagnético bicromático cuantizado

### 4.6.1. Sistema tipo $\Xi$

El hamiltoniano del sistema tipo  $\Xi$  de un átomo de tres niveles de energía interactuando con un campo electromagnético bimodal cuantizado está dado por

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{cuán}}^{\Xi} &= \hat{H}_{\text{áto}}^{\Xi} + \hat{H}_{\text{cam}} + \hat{H}_{\text{int cuán}}^{\Xi} \\ &= \hbar\omega_1 U_3 + \hbar\omega_2 T_3 + \hbar \sum_{j=1}^2 \Omega_j \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_j + \hbar g_1 (U_+ \hat{a}_1 + U_- \hat{a}_1^{\dagger}) + \hbar g_2 (T_+ \hat{a}_2 + T_- \hat{a}_2^{\dagger}),\end{aligned}\quad (4.102)$$

donde se han sustituido los resultados obtenidos en las ecs. (4.18), (4.35) y (2.11). Dado que  $\Delta_1^{\Xi} = (2\omega_1 - \omega_2 - \Omega_1)$  y  $\Delta_2^{\Xi} = (2\omega_2 - \omega_1 - \Omega_2)$  representan la desintonía respectiva de las frecuencias del campo bimodal, se puede reescribir la ec. (4.102) como

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{cuán}}^{\Xi} &= \hat{H}_I^{\Xi} + \hat{H}_{II}^{\Xi} \\ &= \left[ \hbar(\Omega_2 - \omega_1 - \omega_2)T_3 + \hbar(\Omega_1 - \omega_2 - \omega_1)U_3 + \sum_{j=1}^2 \Omega_j \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_j \right] \\ &\quad + \left[ \hbar\Delta_1^{\Xi} U_3 + \hbar\Delta_2^{\Xi} T_3 + \hbar g_1 (U_+ \hat{a}_1 + U_- \hat{a}_1^{\dagger}) + \hbar g_2 (T_+ \hat{a}_2 + T_- \hat{a}_2^{\dagger}) \right],\end{aligned}\quad (4.103)$$

donde  $\hat{H}_I^{\Xi}$  y  $\hat{H}_{II}^{\Xi}$  son las partes no perturbadas y de interacción, respectivamente, que cumplen  $[\hat{H}_I^{\Xi}, \hat{H}_{II}^{\Xi}] = 0$ .

Para el sistema de tres niveles tipo  $\Xi$  equidistante, se toma  $g_1 = g_2 = g$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$  y  $\Omega_1 = \Omega_2 = \omega$ , por lo tanto, el hamiltoniano que describe el sistema de tres niveles tipo  $\Xi$  equidistante interactuando con un solo modo de campo cuantizado está dado por [22]

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{cuán}}^{\Xi} &= \hbar\omega_0(U_3 + T_3) + \hbar\omega \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \hbar g [(U_+ + T_+) \hat{a} + (U_- + T_-) \hat{a}^{\dagger}] \\ &= \hbar\omega (\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + I_z) + [\Delta I_z + \hbar g (I_+ \hat{a} + I_- \hat{a}^{\dagger})],\end{aligned}\quad (4.104)$$

donde  $\Delta = \hbar(\omega_0 - \omega)$ . Es fácil comprobar que las partes diagonales y de interacción del hamiltoniano conmutan entre sí. En términos de los estados de número de campo, el

término de interacción en  $\hat{H}_{II}^{\Xi}$  sólo provoca transiciones del tipo

$$|3\rangle|n-1\rangle \longleftrightarrow |2\rangle|n\rangle \longleftrightarrow |1\rangle|n+1\rangle, \quad (4.105)$$

donde  $n$  representa el número de fotones del campo. Los productos de estados  $|3\rangle|n-1\rangle$ ,  $|2\rangle|n\rangle$ , etc., son los estados desnudos. Se definen los siguientes producto de estados para un  $n$  dado

$$|\psi_{1n}\rangle = |3\rangle|n-1\rangle, \quad (4.106a)$$

$$|\psi_{2n}\rangle = |2\rangle|n\rangle, \quad (4.106b)$$

$$|\psi_{3n}\rangle = |1\rangle|n+1\rangle. \quad (4.106c)$$

Así, las eigenfunciones del hamiltoniano de interacción están dadas por

$$\begin{aligned} |\Psi_n^{\Xi}(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_1^{n+1}(t)|\psi_{3n}\rangle + C_2^n(t)|\psi_{2n}\rangle + C_3^{n-1}(t)|\psi_{1n}\rangle] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_1^{n+1}(t)|n+1, 1\rangle + C_2^n(t)|n, 2\rangle + C_3^{n-1}(t)|n-1, 3\rangle]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Utilizando esta base se obtienen los elementos de matriz de  $\hat{H}_{II}^{\Xi}$ ,

$$\begin{aligned} H_{II,11}^{\Xi,(n)} &= \langle\psi_{1n}|\hat{H}_{II}^{\Xi}|\psi_{1n}\rangle = \begin{bmatrix} \langle n-1| & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & g\hbar\hat{a} & 0 \\ g\hbar\hat{a}^\dagger & 0 & g\hbar\hat{a} \\ 0 & g\hbar\hat{a}^\dagger & -\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |n-1\rangle \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle n-1| & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta|n-1\rangle \\ g\hbar\sqrt{n}|n\rangle \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta\langle n-1|n-1\rangle = \Delta. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Análogamente

$$H_{II,12}^{\Xi,(n)} = \langle \psi_{1n} | \hat{H}_{II}^{\Xi} | \psi_{2n} \rangle = g\hbar\sqrt{n}, \quad (4.109a)$$

$$H_{II,13}^{\Xi,(n)} = \langle \psi_{1n} | \hat{H}_{II}^{\Xi} | \psi_{3n} \rangle = 0, \quad (4.109b)$$

$$H_{II,21}^{\Xi,(n)} = \langle \psi_{2n} | \hat{H}_{II}^{\Xi} | \psi_{1n} \rangle = g\hbar\sqrt{n}, \quad (4.109c)$$

$$H_{II,22}^{\Xi,(n)} = \langle \psi_{2n} | \hat{H}_{II}^{\Xi} | \psi_{2n} \rangle = 0, \quad (4.109d)$$

$$H_{II,23}^{\Xi,(n)} = \langle \psi_{2n} | \hat{H}_{II}^{\Xi} | \psi_{3n} \rangle = g\hbar\sqrt{n+1}, \quad (4.109e)$$

$$H_{II,31}^{\Xi,(n)} = \langle \psi_{3n} | \hat{H}_{II}^{\Xi} | \psi_{1n} \rangle = 0, \quad (4.109f)$$

$$H_{II,32}^{\Xi,(n)} = \langle \psi_{3n} | \hat{H}_{II}^{\Xi} | \psi_{2n} \rangle = g\hbar\sqrt{n+1}, \quad (4.109g)$$

$$H_{II,33}^{\Xi,(n)} = \langle \psi_{3n} | \hat{H}_{II}^{\Xi} | \psi_{3n} \rangle = -\Delta. \quad (4.109h)$$

Por tanto,

$$\mathbf{H}_{II}^{\Xi} = \begin{bmatrix} \Delta & g\hbar\sqrt{n} & 0 \\ g\hbar\sqrt{n} & 0 & g\hbar\sqrt{n+1} \\ 0 & g\hbar\sqrt{n+1} & -\Delta \end{bmatrix}. \quad (4.110)$$

En la resonancia ( $\Delta = 0$ ), los eigenvalores de  $\mathbf{H}_{II}^{\Xi}$  están dados por

$$\lambda_{\pm} = \pm\hbar\Omega_n \quad \text{y} \quad \lambda_0 = 0, \quad (4.111)$$

donde  $\Omega_n = g\sqrt{2n+1}$  es la frecuencia de Rabi. Los eigenestados asociados a los eigenvalores son

$$\begin{bmatrix} |n, 3\rangle \\ |n, 2\rangle \\ |n, 1\rangle \end{bmatrix} = T_n \begin{bmatrix} |n-1, 3\rangle \\ |n, 2\rangle \\ |n+1, 1\rangle \end{bmatrix}. \quad (4.112)$$

En la ec. (4.112), los estados  $|n, 3\rangle$ ,  $|n, 2\rangle$  y  $|n, 1\rangle$  son los estados vestidos, y son construidos por la rotación de los estados desnudos con la matriz de Euler  $T_n$  parametrizada como [24]

$$T_n = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.113)$$

donde,

$$\alpha_{11} = \cos(\psi) \cos(\phi) - \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi), \quad (4.114a)$$

$$\alpha_{12} = \cos(\psi) \sin(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\psi), \quad (4.114b)$$

$$\alpha_{13} = \sin(\psi) \sin(\theta), \quad (4.114c)$$

$$\alpha_{21} = -\sin(\psi) \cos(\phi) - \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\psi), \quad (4.114d)$$

$$\alpha_{22} = -\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\psi), \quad (4.114e)$$

$$\alpha_{23} = \cos(\psi) \sin(\theta), \quad (4.114f)$$

$$\alpha_{31} = \sin(\theta) \sin(\phi), \quad (4.114g)$$

$$\alpha_{32} = -\sin(\theta) \cos(\phi), \quad (4.114h)$$

$$\alpha_{33} = \cos(\theta). \quad (4.114i)$$

La matriz de Euler  $T_n$  diagonaliza el hamiltoniano (4.110) como  $\mathbf{H}_D^{\Xi} = T_n \mathbf{H}_{II}^{\Xi} T_n^{-1}$ . Las columnas de la matriz  $T_n$  corresponden a los eigenvectores de la matriz hamiltoniana (4.110); dichos eigenvectores se determinan mediante la ecuación  $(\mathbf{H}_{II}^{(n)} - \lambda_j I) X_j = 0$ . Presentamos a continuación el procedimiento:

- Para  $\lambda_+ = \hbar\Omega_n$

$$\hbar \begin{bmatrix} -\Omega_n & g\sqrt{n} & 0 \\ g\sqrt{n} & -\Omega_n & g\sqrt{n+1} \\ 0 & g\sqrt{n+1} & -\Omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.115)$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{11} = \frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n} \alpha_{12}, \quad \alpha_{12} = \frac{\Omega_n}{g\sqrt{n+1}} \alpha_{13}, \quad \alpha_{11} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \alpha_{13}.$$

Usando la condición de normalización

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^2 + \frac{\Omega_n^2}{g^2 n} \alpha_{11}^2 + \frac{n+1}{n} \alpha_{11}^2 &= 1 \\ \alpha_{11}^2 \left( 1 + \frac{2n+1}{n} + \frac{n+1}{n} \right) &= 1 \\ \alpha_{11}^2 \left( \frac{4n+2}{n} \right) &= 1,\end{aligned}$$

luego, tomando únicamente la raíz positiva

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}}, \quad (4.116a)$$

$$\alpha_{12} = \sqrt{\frac{2n+1}{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.116b)$$

$$\alpha_{13} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}. \quad (4.116c)$$

■ Para  $\lambda_0 = 0$

$$\hbar \begin{bmatrix} 0 & g\sqrt{n} & 0 \\ g\sqrt{n} & 0 & g\sqrt{n+1} \\ 0 & g\sqrt{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.117)$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{21} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \alpha_{23}, \quad \alpha_{22} = 0.$$

Usando la condición de normalización

$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\left( \frac{n+1}{n} \right) \alpha_{23}^2 + \alpha_{23}^2 &= 1 \\ \alpha_{23}^2 \left( \frac{n+1}{n} + 1 \right) &= 1,\end{aligned}$$

luego, tomando la raíz positiva

$$\alpha_{23} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}, \quad (4.118a)$$

$$\alpha_{21} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}. \quad (4.118b)$$

- Para  $\lambda_- = -\hbar\Omega_n$

$$\hbar \begin{bmatrix} \Omega_n & g\sqrt{n} & 0 \\ g\sqrt{n} & \Omega_n & g\sqrt{n+1} \\ 0 & g\sqrt{n+1} & \Omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.119)$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{31} = -\frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n}\alpha_{32}, \quad \alpha_{32} = -\frac{\Omega_n}{g\sqrt{n+1}}\alpha_{33}, \quad \alpha_{31} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\alpha_{33}.$$

Usando la condición de normalización

$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_{31}^2 + \frac{2n+1}{n}\alpha_{31}^2 + \frac{n+1}{n}\alpha_{31}^2 &= 1 \\ \alpha_{31}^2 \left( 1 + \frac{2n+1}{n} + \frac{n+1}{n} \right) &= 1 \\ \alpha_{31}^2 \left( \frac{4n+2}{n} \right) &= 1, \end{aligned}$$

luego, tomando nuevamente la raíz positiva

$$\alpha_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}}, \quad (4.120a)$$

$$\alpha_{32} = -\sqrt{\frac{2n+1}{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.120b)$$

$$\alpha_{33} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}. \quad (4.120c)$$

Los ángulos de Euler son

$$\theta = \cos^{-1} \left[ \sqrt{\frac{n+1}{4n+2}} \right], \quad \phi = \cos^{-1} \left[ \sqrt{\frac{2n+1}{3n+2}} \right], \quad \psi = \cos^{-1} \left[ \sqrt{\frac{2n}{3n+2}} \right], \quad (4.121)$$

y la matriz de Euler es

$$T_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \\ -\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} & 0 & \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \end{bmatrix}, \quad (4.122)$$

con

$$T_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} & -\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} & \sqrt{\frac{n}{2n+1}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \end{bmatrix}. \quad (4.123)$$

Las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo de los tres niveles de energía están dadas por

$$\begin{bmatrix} C_3^{n-1}(t) \\ C_2^n(t) \\ C_1^{n+1}(t) \end{bmatrix} = T_n^{-1} \begin{bmatrix} e^{-i\Omega_n t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Omega_n t} \end{bmatrix} T_n \begin{bmatrix} C_3^{n-1}(0) \\ C_2^n(0) \\ C_1^{n+1}(0) \end{bmatrix}. \quad (4.124)$$

Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} C_3^{n-1}(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \left[ \sqrt{\frac{n}{2n+1}} C_3^{n-1}(0) + C_2^n(0) + \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} C_1^{n+1}(0) \right] e^{-i\Omega_n t} \\ &+ \left( \frac{n+1}{2n+1} \right) C_3^{n-1}(0) - \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} C_1^{n+1}(0) \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \left[ \sqrt{\frac{n}{2n+1}} C_3^{n-1}(0) - C_2^n(0) + \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} C_1^{n+1}(0) \right] e^{i\Omega_n t}, \end{aligned} \quad (4.125a)$$

$$\begin{aligned} C_2^n(t) &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{n}{2n+1}} C_3^{n-1}(0) + C_2^n(0) + \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} C_1^{n+1}(0) \right] e^{-i\Omega_n t} \\ &+ \frac{1}{2} \left[ -\sqrt{\frac{n}{2n+1}} C_3^{n-1}(0) + C_2^n(0) - \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} C_1^{n+1}(0) \right] e^{i\Omega_n t}, \end{aligned} \quad (4.125b)$$

$$\begin{aligned} C_1^{n+1}(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \left[ \sqrt{\frac{n}{2n+1}} C_3^{n-1}(0) + C_2^n(0) + \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} C_1^{n+1}(0) \right] e^{-i\Omega_n t} \\ &- \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} C_3^{n-1}(0) + \left( \frac{n}{2n+1} \right) C_1^{n+1}(0) \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \left[ \sqrt{\frac{n}{2n+1}} C_3^{n-1}(0) - C_2^n(0) + \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} C_1^{n+1}(0) \right] e^{i\Omega_n t}. \end{aligned} \quad (4.125c)$$

Para calcular las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo de los tres niveles de energía se consideran las siguientes condiciones iniciales.

- Caso IV: Considerando que en  $t = 0$  el sistema está en el nivel inferior, es decir,  $C_3^{n-1}(0) = 0$ ,  $C_2^n(0) = 0$ ,  $C_1^{n+1}(0) = 1$ .

Sustituyendo estas condiciones iniciales en las ecs. (4.125a)-(4.125c)

$$\begin{aligned}
C_3^{m-1}(t) &= \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \left[ \left( \frac{e^{i\Omega_n t} + e^{-i\Omega_n t}}{2} \right) - 1 \right] \\
&= -\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} [1 - \cos(\Omega_n t)] = -2\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \sin^2(\Omega_n t/2), \\
C_2^m(t) &= -i\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \left( \frac{e^{i\Omega_n t} - e^{-i\Omega_n t}}{2i} \right) = -i\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \sin(\Omega_n t), \\
C_1^{m+1}(t) &= \frac{n+1}{2n+1} \left( \frac{e^{i\Omega_n t} + e^{-i\Omega_n t}}{2} \right) + \frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \cos(\Omega_n t) + \frac{n}{2n+1},
\end{aligned}$$

luego, las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo de los tres niveles de energía están dadas por

$$|C_3^{m-1}(t)|^2 = \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} \sin^4(\Omega_n t/2), \quad (4.126)$$

$$|C_2^m(t)|^2 = \frac{n+1}{2n+1} \sin^2(\Omega_n t), \quad (4.127)$$

$$|C_1^{m+1}(t)|^2 = 1 - 4 \left[ \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} + \left( \frac{n+1}{2n+1} \right)^2 \cos^2(\Omega_n t/2) \right] \sin^2(\Omega_n t/2). \quad (4.128)$$

- Caso V: Cuando el sistema está inicialmente ( $t = 0$ ) en el nivel medio, es decir,  $C_3^{m-1}(0) = 0$ ,  $C_2^m(0) = 1$ ,  $C_1^{m+1}(0) = 0$

Se obtiene

$$|C_3^{m-1}(t)|^2 = \frac{n}{2n+1} \sin^2(\Omega_n t), \quad (4.129a)$$

$$|C_2^m(t)|^2 = \cos^2(\Omega_n t), \quad (4.129b)$$

$$|C_1^{m+1}(t)|^2 = \frac{n+1}{2n+1} \sin^2(\Omega_n t). \quad (4.129c)$$

- Caso VI: Cuando el sistema está inicialmente ( $t = 0$ ) en el nivel superior, es decir,  $C_3^{m-1}(0) = 1$ ,  $C_2^m(0) = 0$ ,  $C_1^{m+1}(0) = 0$

Se obtiene

$$|C_3^{m-1}(t)|^2 = 1 - 4 \left[ \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} + \frac{n^2}{(2n+1)^2} \cos^2(\Omega_n t/2) \right] \sin^2(\Omega_n t/2), \quad (4.130a)$$

$$|C_2^m(t)|^2 = \frac{n}{2n+1} \sin^2(\Omega_n t), \quad (4.130b)$$

$$|C_1^{m+1}(t)|^2 = \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} \sin^4(\Omega_n t/2). \quad (4.130c)$$

Finalmente, se observa que en la resonancia, para un valor grande de  $n$ , las probabilidades de los casos IV, V y VI son idénticas a las de los casos I, II y III, respectivamente, indicando la validez del principio de correspondencia de Bohr.

### 4.6.2. Sistema tipo $\Lambda$

El hamiltoniano del sistema tipo  $\Lambda$  de un átomo de tres niveles de energía interactuando con un campo electromagnético cuantizado bimodal está dado por

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{cuán}}^{\Lambda} &= \hat{H}_{\text{áto}}^{\Lambda} + \hat{H}_{\text{cam}} + \hat{H}_{\text{int cuán}}^{\Lambda} \\ &= \hbar\omega_1 V_3 + \hbar\omega_2 T_3 + \hbar \sum_{j=1}^2 \Omega_j \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a} + \hbar g_1 \left( V_+ \hat{a}_1 + V_- \hat{a}_1^{\dagger} \right) + \hbar g_2 \left( T_+ \hat{a}_2 + T_- \hat{a}_2^{\dagger} \right),\end{aligned}\quad (4.131)$$

donde se han sustituido los resultados obtenidos en las ecs. (4.21), (4.36) y (2.11). Dado que  $\Delta_1^{\Lambda} = (2\omega_1 + \omega_2 - \Omega_1)$  y  $\Delta_2^{\Lambda} = (\omega_1 + 2\omega_2 - \Omega_2)$  representan la desintonía respectiva del campo bimodal con frecuencias  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , respectivamente, como se muestra en la figura 4.1b, se puede reescribir la ec. (4.131) como

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{cuán}}^{\Lambda} &= \hat{H}_I^{\Lambda} + \hat{H}_{II}^{\Lambda} \\ &= \left[ \hbar(\Omega_2 - \omega_1 - \omega_2) T_3 + \hbar(\Omega_1 - \omega_1 - \omega_2) V_3 + \sum_{j=1}^2 \Omega_j \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_j \right] \\ &\quad + \left[ \hbar\Delta_1^{\Lambda} V_3 + \hbar\Delta_2^{\Lambda} T_3 + \hbar g_1 \left( V_+ \hat{a}_1 + V_- \hat{a}_1^{\dagger} \right) + \hbar g_2 \left( T_+ \hat{a}_2 + T_- \hat{a}_2^{\dagger} \right) \right],\end{aligned}\quad (4.132)$$

donde  $\hat{H}_I^{\Lambda}$  y  $\hat{H}_{II}^{\Lambda}$  son las partes no perturbadas y de interacción, respectivamente, que cumplen  $[\hat{H}_I^{\Lambda}, \hat{H}_{II}^{\Lambda}] = 0$ .

En términos de los estados de número de campo, el término de interacción en  $\hat{H}_{II}^{\Lambda}$  sólo provoca transiciones del tipo

$$|1\rangle|n-1, m+1\rangle \longleftrightarrow |3\rangle|n-1, m\rangle \longleftrightarrow |2\rangle|n, m\rangle, \quad (4.133)$$

donde  $n$  y  $m$  representan el número de fotones correspondientes a los dos modos del campo bicromático. Los productos de estados  $|1\rangle|n-1, m+1\rangle$ ,  $|3\rangle|n-1, m\rangle$ , etc., son los estados

desnudos. Se definen los siguientes productos de estados para un  $n$  dado

$$|\psi_{1nm}\rangle = |3\rangle|n-1, m\rangle, \quad (4.134a)$$

$$|\psi_{2nm}\rangle = |2\rangle|n, m\rangle, \quad (4.134b)$$

$$|\psi_{3nm}\rangle = |1\rangle|n-1, m+1\rangle. \quad (4.134c)$$

Las eigenfunciones del hamiltoniano de interacción están dadas por [23]

$$\begin{aligned} |\Psi_n^\Lambda(t)\rangle &= \sum_{n,m=0}^{\infty} [C_1^{n-1,m+1}(t)|\psi_{3nm}\rangle + C_2^{n,m}(t)|\psi_{2nm}\rangle + C_3^{n-1,m}(t)|\psi_{1nm}\rangle] \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} [C_1^{n-1,m+1}(t)|n-1, m+1, 1\rangle + C_2^{n,m}(t)|n, m, 2\rangle + C_3^{n-1,m}(t)|n-1, m, 3\rangle]. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Utilizando esta base se obtienen los elementos de matriz de  $\hat{H}_{II}^\Lambda$ ,

$$\begin{aligned} H_{II,11}^{\Lambda,(nm)} &= \langle\psi_{1nm}|\hat{H}_{II}^\Lambda|\psi_{1nm}\rangle = \begin{bmatrix} \langle n-1, m| & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g_2\hbar\hat{a}_2 & g_1\hbar\hat{a}_1 \\ g_2\hbar\hat{a}_2^\dagger & 0 & 0 \\ g_1\hbar\hat{a}_1^\dagger & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |n-1, m\rangle \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle n-1, m| & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2\hbar\sqrt{n}|n, m\rangle \\ g_1\hbar\sqrt{m+1}|n-1, m+1\rangle \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Análogamente

$$H_{II,12}^{\Lambda,(nm)} = \langle\psi_{1nm}|\hat{H}_{II}^\Lambda|\psi_{2nm}\rangle = g_2\hbar\sqrt{n}, \quad (4.137a)$$

$$H_{II,13}^{\Lambda,(nm)} = \langle\psi_{1nm}|\hat{H}_{II}^\Lambda|\psi_{3nm}\rangle = g_1\hbar\sqrt{m+1}, \quad (4.137b)$$

$$H_{II,21}^{\Lambda,(nm)} = \langle\psi_{2nm}|\hat{H}_{II}^\Lambda|\psi_{1nm}\rangle = g_2\hbar\sqrt{n}, \quad (4.137c)$$

$$H_{II,22}^{\Lambda,(nm)} = \langle\psi_{2nm}|\hat{H}_{II}^\Lambda|\psi_{2nm}\rangle = 0, \quad (4.137d)$$

$$H_{II,23}^{\Lambda,(nm)} = \langle\psi_{2nm}|\hat{H}_{II}^\Lambda|\psi_{3nm}\rangle = 0, \quad (4.137e)$$

$$H_{II,31}^{\Lambda,(nm)} = \langle\psi_{3nm}|\hat{H}_{II}^\Lambda|\psi_{1nm}\rangle = g_1\hbar\sqrt{m+1}, \quad (4.137f)$$

$$H_{II,32}^{\Lambda,(nm)} = \langle\psi_{3nm}|\hat{H}_{II}^\Lambda|\psi_{2nm}\rangle = 0, \quad (4.137g)$$

$$H_{II,33}^{\Lambda,(nm)} = \langle\psi_{3nm}|\hat{H}_{II}^\Lambda|\psi_{3nm}\rangle = 0. \quad (4.137h)$$

Por tanto,

$$\mathbf{H}_{II}^{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & g_2 \hbar \sqrt{n} & g_1 \hbar \sqrt{m+1} \\ g_2 \hbar \sqrt{n} & 0 & 0 \\ g_1 \hbar \sqrt{m+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.138)$$

Los eigenvalores de  $\mathbf{H}_{II}^{\Lambda}$  son

$$\lambda_{\pm} = \pm \hbar \Omega_{nm} \quad \text{y} \quad \lambda_0 = 0, \quad (4.139)$$

donde  $\Omega_{nm} = \sqrt{g_1^2(m+1) + g_2^2 n}$  es la frecuencia de Rabi. Los eigenestados asociados a los eigenvalores están dados por

$$\begin{bmatrix} |nm, 3\rangle \\ |nm, 2\rangle \\ |nm, 1\rangle \end{bmatrix} = T_{nm} \begin{bmatrix} |n-1, m, 3\rangle \\ |n, m, 2\rangle \\ |n-1, m+1, 1\rangle \end{bmatrix}. \quad (4.140)$$

En la ec. (4.140), los estados  $|nm, 3\rangle$ ,  $|nm, 2\rangle$  y  $|nm, 1\rangle$  son los estados vestidos y son construidos por la rotación de los estados desnudos con la matriz de Euler dada por la ec. (4.113).

La matriz de Euler  $T_{nm}$  diagonaliza la matriz hamiltoniana (4.138) como  $\mathbf{H}_D^{\Lambda} = T_{nm} \mathbf{H}_{II}^{\Lambda} T_{nm}^{-1}$ . Las columnas de la matriz  $T_n$  corresponden a los eigenvectores de la matriz hamiltoniana (4.138); dichos eigenvectores se determinan mediante la ecuación  $(\mathbf{H}_{II}^{(n)} - \lambda_j I) X_j = 0$ . Presentamos a continuación el procedimiento:

- Para  $\lambda_+ = \hbar \Omega_{nm}$

$$\hbar \begin{bmatrix} -\Omega_{nm} & g_2 \sqrt{n} & g_1 \sqrt{m+1} \\ g_2 \sqrt{n} & -\Omega_{nm} & 0 \\ g_1 \sqrt{m+1} & 0 & -\Omega_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.141)$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{11} = \frac{\Omega_{nm}}{g_2 \sqrt{n}} \alpha_{12}, \quad \alpha_{11} = \frac{\Omega_{nm}}{g_1 \sqrt{m+1}} \alpha_{13}, \quad \alpha_{12} = \frac{g_2 \sqrt{n}}{g_1 \sqrt{m+1}} \alpha_{13}.$$

Usando la condición de normalización

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^2 + \frac{g_2^2 n}{\Omega_{nm}^2} \alpha_{11}^2 + \frac{g_1^2 (m+1)}{\Omega_{nm}^2} \alpha_{11}^2 &= 1 \\ \alpha_{11}^2 \left( \frac{\Omega_{nm}^2 + g_2^2 n + g_1^2 (m+1)}{\Omega_{nm}^2} \right) &= 1 \\ \alpha_{11}^2 (2) &= 1,\end{aligned}$$

luego, tomando únicamente la raíz positiva

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.142a)$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}}, \quad (4.142b)$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}}. \quad (4.142c)$$

■ Para  $\lambda_0 = 0$

$$\hbar \begin{bmatrix} 0 & g_2 \sqrt{n} & g_1 \sqrt{m+1} \\ g_2 \sqrt{n} & 0 & 0 \\ g_1 \sqrt{m+1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.143)$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{22} = -\frac{g_1 \sqrt{m+1}}{g_2 \sqrt{n}} \alpha_{23}, \quad \alpha_{21} = 0.$$

Usando la condición de normalización

$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{g_1^2 (m+1)}{g_2^2} \alpha_{23}^2 + \alpha_{23}^2 &= 1 \\ \alpha_{23}^2 \left( \frac{g_1^2 (m+1)}{g_2^2} + 1 \right) &= 1,\end{aligned}$$

luego, tomando ahora la raíz negativa

$$\alpha_{23} = -\frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{mn}}, \quad (4.144a)$$

$$\alpha_{22} = \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{mn}}. \quad (4.144b)$$

- Para  $\lambda_- = -\hbar\Omega_{nm}$

$$\hbar \begin{bmatrix} \Omega_{nm} & g_2\sqrt{n} & g_1\sqrt{m+1} \\ g_2\sqrt{n} & \Omega_{nm} & 0 \\ g_1\sqrt{m+1} & 0 & \Omega_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.145)$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{31} = -\frac{\Omega_{nm}}{g_2\sqrt{n}}\alpha_{32}, \quad \alpha_{31} = -\frac{\Omega_{nm}}{g_1\sqrt{m+1}}\alpha_{33}, \quad \alpha_{32} = \frac{g_2\sqrt{n}}{g_1\sqrt{m+1}}\alpha_{33}.$$

Usando la condición de normalización

$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_{31}^2 + \frac{g_2^2 n}{\Omega_{nm}^2} \alpha_{31}^2 + \frac{g_1^2 (m+1)}{\Omega_{nm}^2} \alpha_{31}^2 &= 1 \\ \alpha_{31}^2 \left( \frac{\Omega_{nm}^2 + g_2^2 n + g_1^2 (m+1)}{\Omega_{nm}^2} \right) &= 1 \\ \alpha_{11}^2(2) &= 1, \end{aligned}$$

luego, tomando nuevamente la raíz negativa

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.146a)$$

$$\alpha_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2\sqrt{n}}{\Omega_{nm}}, \quad (4.146b)$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1\sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}}. \quad (4.146c)$$

Los ángulos de Euler son

$$\theta = \cos^{-1} \left[ \frac{\sqrt{m+1}g_1}{\sqrt{2ng_2^2 + 2(m+1)g_1^2}} \right], \quad (4.147a)$$

$$\phi = -\cos^{-1} \left[ -\frac{\sqrt{n}g_2}{\sqrt{2ng_2^2 + (m+1)g_1^2}} \right], \quad (4.147b)$$

$$\psi = \cos^{-1} \left[ -\frac{\sqrt{2n}g_2}{\sqrt{2ng_2^2 + (m+1)g_1^2}} \right], \quad (4.147c)$$

y la matriz de Euler es

$$T_{nm} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} \\ 0 & \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} & -\frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} \end{bmatrix}, \quad (4.148)$$

con

$$T_{nm}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} & \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} & -\frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} \end{bmatrix}. \quad (4.149)$$

Las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo de los tres niveles de energía están dadas por

$$\begin{bmatrix} C_3^{m-1,m}(t) \\ C_2^{m,m}(t) \\ C_1^{m-1,m+1}(t) \end{bmatrix} = T_{nm}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-i\Omega_{nm}t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Omega_{nm}t} \end{bmatrix} T_{nm} \begin{bmatrix} C_3^{m-1,m}(0) \\ C_2^{m,m}(0) \\ C_1^{m-1,m+1}(0) \end{bmatrix}. \quad (4.150)$$

Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$C_3^{n-1,m}(t) = \frac{1}{2} \left[ C_3^{m-1,m}(0) + \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} C_2^{m,m}(0) + \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} C_1^{m-1,m+1}(0) \right] e^{-i\Omega_{nm}t} \\ + \frac{1}{2} \left[ C_3^{m-1,m}(0) - \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} C_2^{m,m}(0) - \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} C_1^{m-1,m+1}(0) \right] e^{i\Omega_{nm}t}, \quad (4.151a)$$

$$C_2^{n,m}(t) = \frac{1}{2} \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} \left[ C_3^{m-1,m}(0) + \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} C_2^{m,m}(0) + \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} C_1^{m-1,m+1}(0) \right] e^{-i\Omega_{nm}t} \\ + \frac{g_1^2(m+1)}{\Omega_{nm}^2} C_2^{m,m}(0) - \frac{g_1 g_2 \sqrt{n(m+1)}}{\Omega_{nm}^2} C_1^{m-1,m+1}(0) \quad (4.151b)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} \left[ -C_3^{m-1,m}(0) + \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} C_2^{m,m}(0) + \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} C_1^{m-1,m+1}(0) \right] e^{i\Omega_{nm}t}, \\ C_1^{m+1}(t) = \frac{1}{2} \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} \left[ C_3^{m-1,m}(0) + \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} C_2^{m,m}(0) + \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} C_1^{m-1,m+1}(0) \right] e^{-i\Omega_{nm}t} \\ - \frac{g_1 g_2 \sqrt{n(m+1)}}{\Omega_{nm}} C_2^{m,m}(0) + \frac{g_2^2 n}{\Omega_{nm}^2} C_1^{m-1,m+1}(0) \quad (4.151c) \\ + \frac{1}{2} \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} \left[ -C_3^{m-1,m}(0) + \frac{g_2 \sqrt{n}}{\Omega_{nm}} C_2^{m,m}(0) + \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} C_1^{m-1,m+1}(0) \right] e^{i\Omega_{nm}t}.$$

Para calcular las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo de los tres niveles de energía, se consideran las siguientes condiciones iniciales.

- Caso IV: Cuando el sistema está inicialmente ( $t = 0$ ) en el nivel inferior, es decir,  $C_3^{n-1,m} = 0$ ,  $C_2^{n,m} = 0$ ,  $C_1^{n-1,m+1} = 1$ .

Sustituyendo estas condiciones iniciales en las ecs. (4.151a)-(4.151c)

$$\begin{aligned}
C_3^{n-1,m}(t) &= -i \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} \left( \frac{e^{i\Omega_{nm}t} - e^{-i\Omega_{nm}t}}{2i} \right) = -i \frac{g_1 \sqrt{m+1}}{\Omega_{nm}} \sin(\Omega_{nm}t), \\
C_2^{n,m}(t) &= \frac{g_1 g_2 \sqrt{n(m+1)}}{\Omega_{nm}^2} \left[ \left( \frac{e^{i\Omega_{nm}t} + e^{-i\Omega_{nm}t}}{2} \right) - 1 \right] \\
&= \frac{g_1 g_2 \sqrt{n(m+1)}}{\Omega_{nm}^2} [\cos(\Omega_{nm}t) - 1] = -2 \frac{g_1 g_2 \sqrt{n(m+1)}}{\Omega_{nm}^2} \sin^2(\Omega_{nm}t/2), \\
C_1^{n-1,m+1}(t) &= \frac{g_1^2(m+1)}{\Omega_{nm}^2} \left( \frac{e^{i\Omega_{nm}t} + e^{-i\Omega_{nm}t}}{2} \right) + \frac{g_2^2 n}{\Omega_{nm}^2} \\
&= \frac{1}{\Omega_{nm}^2} [g_1^2(m+1) \cos(\Omega_{nm}t) + g_2^2 n],
\end{aligned}$$

luego, las amplitudes de probabilidad de los tres niveles de energía están dadas por

$$|C_3^{n-1,m}(t)|^2 = \frac{g_1^2(m+1)}{\Omega_{nm}^2} \sin^2(\Omega_{nm}t), \quad (4.152a)$$

$$|C_2^{n,m}(t)|^2 = 4 \frac{g_1^2 g_2^2 n(m+1)}{\Omega_{nm}^4} \sin^4(\Omega_{nm}t/2), \quad (4.152b)$$

$$|C_1^{n-1,m+1}(t)|^2 = \frac{1}{\Omega_{nm}^4} [g_1^2(m+1) \cos(\Omega_{nm}t) + g_2^2 n]^2. \quad (4.152c)$$

- Caso V: Cuando el sistema está inicialmente ( $t = 0$ ) en el nivel medio, es decir,  $C_3^{n-1,m} = 0$ ,  $C_2^{n,m} = 1$ ,  $C_1^{n-1,m+1} = 0$ .

Haciendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, se obtiene

$$|C_3^{n-1,m}(t)|^2 = \frac{g_2^2 n}{\Omega_{nm}^2} \sin^2(\Omega_{nm}t), \quad (4.153a)$$

$$|C_2^{n,m}(t)|^2 = \frac{1}{\Omega_{nm}^4} [g_1^2(m+1) + g_2^2 n \cos(\Omega_{nm}t)]^2, \quad (4.153b)$$

$$|C_1^{n-1,m+1}(t)|^2 = 4 \frac{g_1^2 g_2^2 n(m+1)}{\Omega_{nm}^4} \sin^4(\Omega_{nm}t/2). \quad (4.153c)$$

- Caso VI: Si el sistema está inicialmente ( $t = 0$ ) en el nivel superior, es decir,  $C_3^{n-1,m} = 1$ ,  $C_2^{n,m} = 0$ ,  $C_1^{n-1,m+1} = 0$

Se obtiene

$$|C_3^{n-1,m}(t)|^2 = \cos^2(\Omega_{nm}t), \quad (4.154a)$$

$$|C_2^{n,m}(t)|^2 = \frac{g_2^2 n}{\Omega_{nm}^2} \sin^2(\Omega_{nm}t), \quad (4.154b)$$

$$|C_1^{n-1,m+1}(t)|^2 = \frac{g_1^2 (m+1)}{\Omega_{nm}^2} \sin^2(\Omega_{nm}t). \quad (4.154c)$$

### 4.6.3. Sistema tipo $V$

El hamiltoniano del sistema tipo  $V$  de un átomo de tres niveles de energía interactuando con un campo electromagnético bimodal cuantizado está dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{cuán}}^V &= \hat{H}_{\text{áto}}^V + \hat{H}_{\text{cam}} + \hat{H}_{\text{int cuán}}^V \\ &= \hbar\omega_1 V_3 + \hbar\omega_2 U_3 + \hbar \sum_{j=1}^2 \Omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a} + \hbar g_1 (V_+ \hat{a}_1 + V_- \hat{a}_1^\dagger) + \hbar g_2 (U_+ \hat{a}_2 + U_- \hat{a}_2^\dagger), \end{aligned} \quad (4.155)$$

donde se han sustituidos los resultados obtenidos en las ecs. (4.23), (4.37) y (2.11). Dado que  $\Delta_1^V = (2\omega_1 + \omega_2 - \Omega_1)$  y  $\Delta_2^V = (\omega_1 + 2\omega_2 - \Omega_2)$  representan la desintonía respectiva del campo bimodal con frecuencias  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , respectivamente, como se muestra en la figura 4.1c, se puede reescribir la ec. (4.155) como

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{cuán}}^V &= \hat{H}_I^V + \hat{H}_{II}^V, \\ &= \left[ \hbar(\Omega_1 - \omega_1 - \omega_2)V_3 + \hbar(\Omega_2 - \omega_1 - \omega_2)U_3 + \sum_{j=1}^2 \Omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a} \right] \\ &\quad + \left[ \hbar\Delta_1^V V_3 + \hbar\Delta_2^V U_3 + \hbar g_1 (V_+ \hat{a}_1 + V_- \hat{a}_1^\dagger) + \hbar g_2 (U_+ \hat{a}_2 + T_- \hat{a}_2^\dagger) \right], \end{aligned} \quad (4.156)$$

donde  $\hat{H}_I^V$  y  $\hat{H}_{II}^V$  son las partes no perturbadas y de interacción, respectivamente, las cuales cumplen que  $[\hat{H}_I^V, \hat{H}_{II}^V] = 0$ , con  $\Delta_1^V = -\Delta_2^V$ .

En términos de los estados de número de campo, el término de interacción en  $\hat{H}_{II}^V$  sólo provoca transiciones del tipo

$$|3\rangle|n+1, m-1\rangle \longleftrightarrow |1\rangle|n+1, m\rangle \longleftrightarrow |2\rangle|n, m\rangle, \quad (4.157)$$

donde  $n$  y  $m$  representan el número de fotones correspondientes a los dos modos del campo bicromático. Los productos de estados  $|3\rangle|n+1, m-1\rangle$ ,  $|1\rangle|n+1, m\rangle$ , etc., son los estados desnudos. Se definen los siguientes productos de estados para un  $n$  dado

$$|\psi_{1nm}\rangle = |3\rangle|n+1, m-1\rangle, \quad (4.158a)$$

$$|\psi_{2nm}\rangle = |2\rangle|n, m\rangle, \quad (4.158b)$$

$$|\psi_{3nm}\rangle = |1\rangle|n+1, m\rangle. \quad (4.158c)$$

Las eigenfunciones del hamiltoniano de interacción están dadas por [23]

$$\begin{aligned} |\Psi_n^V(t)\rangle &= \sum_{n,m=0}^{\infty} [C_1^{n+1,m}(t)|\psi_{3nm}\rangle + C_2^{n,m}(t)|\psi_{2nm}\rangle + C_3^{n+1,m-1}(t)|\psi_{1nm}\rangle] \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} [C_1^{n+1,m}(t)|n+1, m, 1\rangle + C_2^{n,m}(t)|n, m, 2\rangle + C_3^{n+1,m-1}(t)|n+1, m-1, 3\rangle]. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Utilizando esta base se obtienen los elementos de matriz de  $\hat{H}_{II}^V$ ,

$$H_{II,11}^{V,(nm)} = \langle\psi_{1nm}|\hat{H}_{II}^V|\psi_{1nm}\rangle = 0, \quad (4.160a)$$

$$H_{II,12}^{V,(nm)} = \langle\psi_{1nm}|\hat{H}_{II}^V|\psi_{2nm}\rangle = 0, \quad (4.160b)$$

$$H_{II,13}^{V,(nm)} = \langle\psi_{1nm}|\hat{H}_{II}^V|\psi_{3nm}\rangle = g_1\hbar\sqrt{m}, \quad (4.160c)$$

$$H_{II,21}^{V,(nm)} = \langle\psi_{2nm}|\hat{H}_{II}^V|\psi_{1nm}\rangle = 0, \quad (4.160d)$$

$$H_{II,22}^{V,(nm)} = \langle\psi_{2nm}|\hat{H}_{II}^V|\psi_{2nm}\rangle = 0, \quad (4.160e)$$

$$H_{II,23}^{V,(nm)} = \langle\psi_{2nm}|\hat{H}_{II}^V|\psi_{3nm}\rangle = g_2\hbar\sqrt{n+1}, \quad (4.160f)$$

$$H_{II,31}^{V,(nm)} = \langle\psi_{3nm}|\hat{H}_{II}^V|\psi_{1nm}\rangle = g_1\hbar\sqrt{m}, \quad (4.160g)$$

$$H_{II,32}^{V,(nm)} = \langle\psi_{3nm}|\hat{H}_{II}^V|\psi_{2nm}\rangle = g_2\hbar\sqrt{n+1}, \quad (4.160h)$$

$$H_{II,33}^{V,(nm)} = \langle\psi_{3nm}|\hat{H}_{II}^V|\psi_{3nm}\rangle = 0. \quad (4.160i)$$

Por tanto,

$$\mathbf{H}_{II}^V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_1\hbar\sqrt{m} \\ 0 & 0 & g_2\hbar\sqrt{n+1} \\ g_1\hbar\sqrt{m} & g_2\hbar\sqrt{n+1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.161)$$

Los eigenvalores de  $\mathbf{H}_{II}^V$  están dados por

$$\lambda_{\pm} = \pm \hbar \Omega_{nm} \quad \text{y} \quad \lambda_0 = 0, \quad (4.162)$$

donde  $\Omega_{nm} = \sqrt{g_1^2 m + g_2^2 (n+1)}$  es la frecuencia de Rabi. Los eigenestados asociados a los eigenvalores son

$$\begin{bmatrix} |nm, 3\rangle \\ |nm, 2\rangle \\ |nm, 1\rangle \end{bmatrix} = T_{nm} \begin{bmatrix} |n+1, m-1, 3\rangle \\ |n, m, 2\rangle \\ |n+1, m, 1\rangle \end{bmatrix}. \quad (4.163)$$

En la ec. (4.163) los estados  $|nm, 3\rangle$ ,  $|nm, 2\rangle$  y  $|nm, 1\rangle$  son los estados vestidos y son construidos por la rotación de los estados desnudos con la matriz de Euler dada por la ec. (4.113).

La matriz de Euler  $T_{nm}$  diagonaliza la matriz hamiltoniana (4.161) como  $\mathbf{H}_D^V = T_{nm} \mathbf{H}_{II}^V T_{nm}^{-1}$ . Las columnas de la matriz  $T_n$  corresponden a los eigenvectores de la matriz hamiltoniana (4.161); dichos eigenvectores se determinan mediante la ecuación  $(\mathbf{H}_{II}^{(n)} - \lambda_j I) X_j = 0$ . Presentamos a continuación el procedimiento:

- Para  $\lambda_+ = \hbar \Omega_{nm}$

$$\hbar \begin{bmatrix} -\Omega_{nm} & 0 & g_1 \sqrt{m} \\ 0 & -\Omega_{nm} & g_2 \sqrt{n+1} \\ g_1 \sqrt{m} & g_2 \sqrt{n+1} & -\Omega_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.164)$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{11} = \frac{g_1 \sqrt{m}}{\Omega_{nm}} \alpha_{13}, \quad \alpha_{12} = \frac{g_2 \sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} \alpha_{13}, \quad \alpha_{11} = \frac{g_1 \sqrt{m}}{g_2 \sqrt{n+1}} \alpha_{12}.$$

Usando la condición de normalización

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1,$$

se obtiene

$$\frac{g_1^2 m}{\Omega_{nm}^2} \alpha_{13}^2 + \frac{g_2^2 (n+1)}{\Omega_{nm}^2} \alpha_{13}^2 + \alpha_{13}^2 = 1$$

$$\alpha_{13}^2 \left( \frac{g_1^2 m + g_2^2 (n+1)}{\Omega_{nm}^2} + 1 \right) = 1$$

$$\alpha_{13}^2(2) = 1,$$

luego, tomando únicamente la raíz positiva

$$\alpha_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.165a)$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1 \sqrt{m}}{\Omega_{nm}}, \quad (4.165b)$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2 \sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}}. \quad (4.165c)$$

■ Para  $\lambda_0 = 0$

$$\hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_1 \sqrt{m} \\ 0 & 0 & g_2 \sqrt{n+1} \\ g_1 \sqrt{m} & g_2 \sqrt{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.166)$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{21} = -\frac{g_2 \sqrt{n+1}}{g_1 \sqrt{m}} \alpha_{22}, \quad \alpha_{23} = 0.$$

Usando la condición de normalización

$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1,$$

se obtiene

$$\frac{g_2^2(n+1)}{g_1^2 m} \alpha_{22}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$$

$$\alpha_{22}^2 \left( \frac{g_2^2(n+1)}{g_1^2 m} + 1 \right) = 1,$$

luego, tomando la raíz positiva

$$\alpha_{22} = \frac{g_1 \sqrt{m}}{\Omega_{mn}}, \quad (4.167a)$$

$$\alpha_{21} = -\frac{g_2 \sqrt{n+1}}{\Omega_{mn}}. \quad (4.167b)$$

■ Para  $\lambda_- = -\hbar \Omega_{nm}$

$$\hbar \begin{bmatrix} \Omega_{nm} & 0 & g_1 \sqrt{m} \\ 0 & \Omega_{nm} & g_2 \sqrt{n+1} \\ g_1 \sqrt{m} & g_2 \sqrt{n+1} & \Omega_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.168)$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{31} = -\frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}}\alpha_{33}, \quad \alpha_{32} = -\frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}}\alpha_{33}, \quad \alpha_{31} = \frac{g_1\sqrt{m}}{g_2\sqrt{n+1}}\alpha_{32}.$$

Usando la condición de normalización

$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{g_1^2 m}{\Omega_{nm}^2} \alpha_{33}^2 + \frac{g_2^2 (n+1)}{\Omega_{nm}^2} \alpha_{33}^2 + \alpha_{33}^2 &= 1 \\ \alpha_{33}^2 \left( \frac{g_1^2 m + g_2^2 (n+1)}{\Omega_{nm}^2} + 1 \right) &= 1 \\ \alpha_{33}^2 (2) &= 1, \end{aligned}$$

luego, tomando nuevamente la raíz positiva

$$\alpha_{33} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{4.169a}$$

$$\alpha_{31} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}}, \tag{4.169b}$$

$$\alpha_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}}. \tag{4.169c}$$

Los ángulos de Euler son

$$\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad \phi = \cos^{-1} \left[ -\frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} \right], \quad \psi = -\frac{\pi}{2}, \tag{4.170}$$

y la matriz de Euler es

$$T_{nm} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} & \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \tag{4.171}$$

con

$$T_{nm}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} & -\frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} & \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \tag{4.172}$$

Las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo de los tres niveles de energía están dadas por

$$\begin{bmatrix} C_3^{n+1,m-1}(t) \\ C_2^{n,m}(t) \\ C_3^{n+1,m}(t) \end{bmatrix} = T_{nm}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-i\Omega_{nm}t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Omega_{nm}t} \end{bmatrix} T_{nm} \begin{bmatrix} C_3^{n+1,m-1}(0) \\ C_2^{n,m}(0) \\ C_3^{n+1,m}(0) \end{bmatrix}. \quad (4.173)$$

Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} C_3^{n+1,m-1}(t) &= \frac{1}{2} \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} \left[ \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} C_3^{n+1,m-1}(0) + \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} C_2^{n,m}(0) + C_1^{n+1,m}(0) \right] e^{-i\Omega_{nm}t} \\ &+ \frac{g_2^2(n+1)}{\Omega_{nm}^2} C_3^{n+1,m-1}(0) - \frac{g_1g_2\sqrt{m(n+1)}}{\Omega_{nm}^2} C_2^{n,m}(0) \end{aligned} \quad (4.174a)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} \left[ \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} C_3^{n+1,m-1}(0) + \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} C_2^{n,m}(0) - C_1^{n+1,m}(0) \right] e^{i\Omega_{nm}t},$$

$$\begin{aligned} C_2^{n,m}(t) &= \frac{1}{2} \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} \left[ \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} C_3^{n+1,m-1}(0) + \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} C_2^{n,m}(0) + C_1^{n+1,m}(0) \right] e^{-i\Omega_{nm}t} \\ &- \frac{g_1g_2\sqrt{m(n+1)}}{\Omega_{nm}^2} C_3^{n+1,m-1}(0) + \frac{g_1^2m}{\Omega_{nm}^2} C_2^{n,m}(0) \end{aligned} \quad (4.174b)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} \left[ \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} C_3^{n+1,m-1}(0) + \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} C_2^{n,m}(0) + C_1^{n+1,m}(0) \right] e^{i\Omega_{nm}t},$$

$$\begin{aligned} C_1^{n+1,m}(t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} C_3^{n+1,m-1}(0) + \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} C_2^{n,m}(0) + C_1^{n+1,m}(0) \right] e^{-i\Omega_{nm}t} \quad (4.174c) \\ &+ \frac{1}{2} \left[ -\frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{nm}} C_3^{n+1,m-1}(0) - \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{nm}} C_2^{n,m}(0) + C_1^{n+1,m}(0) \right] e^{i\Omega_{nm}t}. \end{aligned}$$

Para calcular las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo de los tres niveles de energía se consideran las siguientes condiciones iniciales:

- Caso IV: Considerando que en  $t = 0$ , el sistema está en el nivel inferior, es decir,  $C_3^{n+1,m-1} = 0$ ,  $C_2^{n,m} = 0$ ,  $C_1^{n+1,m} = 1$ .

Sustituyendo estas condiciones iniciales en las ecs. (4.174a)-(4.174c)

$$\begin{aligned} C_3^{n+1,m-1}(t) &= -i \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{mn}} \left( \frac{e^{i\Omega_{mn}t} - e^{-i\Omega_{mn}t}}{2i} \right) = -i \frac{g_1\sqrt{m}}{\Omega_{mn}} \sin(\Omega_{mn}t), \\ C_2^{n,m}(t) &= -i \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{mn}} \left( \frac{e^{i\Omega_{mn}t} - e^{-i\Omega_{mn}t}}{2i} \right) = -i \frac{g_2\sqrt{n+1}}{\Omega_{mn}} \sin(\Omega_{mn}t), \\ C_1^{n+1,m}(t) &= \frac{e^{i\Omega_{mn}t} + e^{-i\Omega_{mn}t}}{2} = \cos(\Omega_{mn}t). \end{aligned}$$

Las amplitudes de probabilidad de los tres niveles de energía están dadas por

$$|C_3^{n+1,m-1}(t)|^2 = \frac{g_1^2 m}{\Omega_{nm}^2} \sin^2(\Omega_{nm} t), \quad (4.175a)$$

$$|C_2^{n,m}(t)|^2 = \frac{g_2^2 (n+1)}{\Omega_{nm}^2} \sin^2(\Omega_{nm} t), \quad (4.175b)$$

$$|C_1^{n+1,m}(t)|^2 = \cos^2(\Omega_{nm} t). \quad (4.175c)$$

- Caso V: Cuando el sistema está inicialmente ( $t = 0$ ) en el nivel medio, es decir,  $C_3^{n+1,m-1} = 0$ ,  $C_2^{n,m} = 1$ ,  $C_1^{n+1,m} = 0$ .

Efectuando el mismo procedimiento que en el caso anterior, se obtiene

$$|C_3^{n+1,m-1}(t)|^2 = 4 \frac{g_2^2 g_1^2 m (n+1)}{\Omega_{nm}^4} \sin^4(\Omega_{nm} t/2), \quad (4.176a)$$

$$|C_2^{n,m}(t)|^2 = \frac{1}{\Omega_{nm}^4} [g_1^2 m + g_2^2 (n+1) \cos(\Omega_{nm} t)]^2, \quad (4.176b)$$

$$|C_1^{n+1,m}(t)|^2 = \frac{g_2^2 (n+1)}{\Omega_{nm}^2} \sin^2(\Omega_{nm} t). \quad (4.176c)$$

- Caso VI: Si el sistema está en el nivel superior, es decir,  $C_3^{n+1,m-1} = 1$ ,  $C_2^{n,m} = 0$ ,  $C_1^{n+1,m} = 0$

Se obtiene

$$|C_3^{n+1,m-1}(t)|^2 = \frac{1}{\Omega_{nm}^4} [g_1^2 m \cos(\Omega_{nm} t) + g_2^2 (n+1)]^2, \quad (4.177a)$$

$$|C_2^{n,m}(t)|^2 = 4 \frac{g_2^2 g_1^2 m (n+1)}{\Omega_{nm}^4} \sin^4(\Omega_{nm} t/2), \quad (4.177b)$$

$$|C_1^{n+1,m}(t)|^2 = \frac{g_1^2 m}{\Omega_{nm}^2} \sin^2(\Omega_{nm} t). \quad (4.177c)$$

## 4.7. Resultados numéricos y discusión

Se analiza ahora la evolución temporal de las probabilidades del nivel superior (línea roja), del nivel medio (línea azul) y del nivel inferior (línea verde) para el modelo semiclásico y cuantizado de las tres diferentes configuraciones de sistemas de tres niveles de energía:  $\Xi$ ,  $\Lambda$  y  $V$ .

### 4.7.1. Sistema tipo $\Xi$

#### Modelo semiclásico

La evolución temporal de las probabilidades correspondientes a los casos I, II y III están graficadas en la figura 4.2. En las figuras 4.2a y 4.2c se observa que para los casos I y III las probabilidades  $|C_3(t)|^2$  y  $|C_1(t)|^2$  alcanzan alternativamente un valor máximo igual a la unidad, mientras que  $|C_2(t)|^2$  no. La comparación de estas dos figuras muestra que las probabilidades dependientes del tiempo de los niveles superior e inferior son similares pero en fase opuesta. Luego, a partir de la evolución temporal de las curvas de probabilidad, está claro que la probabilidad oscila alternativamente entre los niveles superior e inferior.

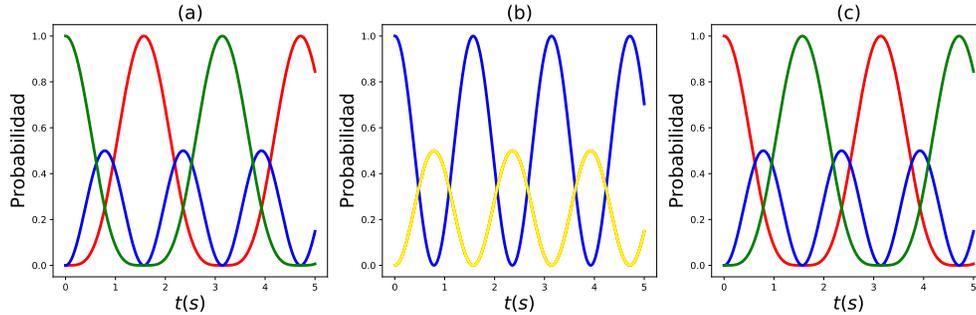


Figura 4.2: Oscilaciones de Rabi del sistema tipo  $\Xi$  semiclásico correspondientes a los casos I, II y III con  $\kappa = 2$ .

La figura 4.2b muestra que las probabilidades de los sistemas superior e inferior son siempre iguales, y la probabilidad  $|C_2(t)|^2$  alcanza el valor máximo igual a la unidad periódicamente. El campo resonante exactamente sinusoidal interactúa con el sistema inicialmente en el nivel medio, de tal manera que la probabilidad de los niveles superior e inferior son siempre iguales. Esta distribución dinámica simétrica entre los niveles superior e inferior es el resultado de la interacción del sistema con el campo clásico.

#### Modelo cuantizado

La evolución temporal de las probabilidades correspondientes a los casos IV, V y VI están graficadas en la figura 4.3. De la figura 4.3a se puede observar que cuando el átomo

está inicialmente en el nivel inferior, la probabilidad  $|C_1^{n+1}(t)|^2$  oscila entre cero y uno, se puede notar que su comportamiento es diferente al caso I del modelo semiclásico, debido a que la probabilidad de  $|C_3^{m-1}(t)|^2$  nunca toca la unidad. De la figura 4.3b se puede observar que cuando el átomo está inicialmente en el nivel medio, la probabilidad  $|C_2^m(t)|^2$  alcanza el valor máximo de la unidad periódicamente, y en contraste con la situación semiclásica correspondiente en el caso II, se puede notar que las probabilidades de los niveles superior e inferior no son iguales.

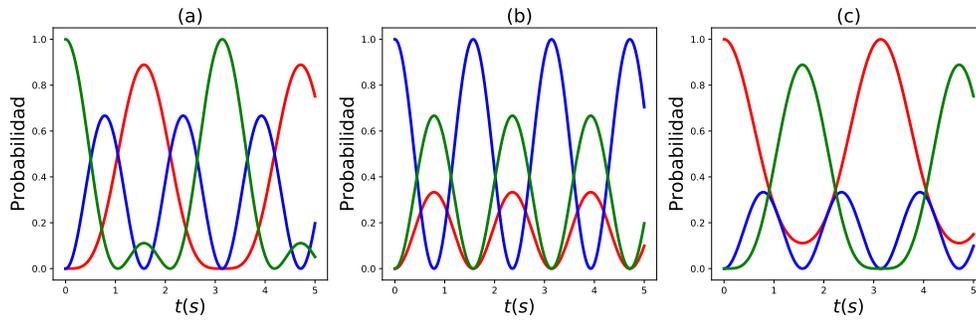


Figura 4.3: Oscilaciones de Rabi del sistema tipo  $\Xi$  cuantizado correspondientes a los casos IV, V y VI con  $g = 2/\sqrt{3}$  y  $n = 1$ .

Las probabilidades de los estados del sistema inicialmente en el nivel superior están representadas en la figura 4.3c, la cual muestra que aunque posee la misma frecuencia de Rabi en el caso IV, el patrón de oscilación no es similar a éste. Luego, la simetría observada en las oscilaciones de Rabi para el modelo semiclásico se rompe en la cuantización del campo. Por lo tanto, se puede notar que para un campo vacío inicial, es decir, para el número de estado  $n = 0$ , cuando el sistema está inicialmente en el nivel medio, la población del sistema no puede ir al nivel superior en absoluto, esto provoca que oscile entre los niveles de energía inferior y medio. Por lo tanto, la asimetría en la oscilación de Rabi surge debido a la fluctuación del vacío.

Considerando que el campo es un campo coherente, el valor promedio de las probabi-

lidades para los casos IV, V y VI está dado por

$$\langle P_3(t) \rangle = \sum_n P_n |C_3^{m-1}(t)|^2, \quad (4.178a)$$

$$\langle P_2(t) \rangle = \sum_n P_n |C_2^m(t)|^2, \quad (4.178b)$$

$$\langle P_1(t) \rangle = \sum_n P_n |C_1^{m+1}(t)|^2, \quad (4.178c)$$

donde  $P_n = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$  es la función de distribución de Poisson dada por la ec. 2.37 y  $\bar{n}$  es número promedio de fotones del campo. Para el campo coherente el fenómeno de colapso y resurgimiento de la población para los casos IV, V y VI se muestra en las figuras 4.4-4.6, con un número promedio de fotones  $\bar{n} = 50$ . Cuando el sistema está inicialmente en el nivel medio, la distribución simétrica de poblaciones de niveles superiores e inferiores no se observan hasta que  $\bar{n}$  es muy alto. Sin embargo, incluso si  $\bar{n} = 50$ , los valores numéricos de las poblaciones dependientes del tiempo de los niveles superior e inferior no son exactamente iguales, pero casi iguales, y se convierten exactamente iguales en el límite  $\bar{n} \rightarrow \infty$ . Además, si el sistema es poblado inicialmente en el nivel superior o en el inferior, exhibe dinámicas de población similares. La reproducción de este resultado análogo al modelo semiclásico, muestra la proximidad del estado coherente al campo clásico con un número promedio de fotones  $\bar{n}$  grande.

En caso de que el campo sea un campo térmico, el valor promedio de las probabilidades correspondientes a los casos IV, V y VI están dadas por las ecs. (4.178a)-(4.178c), donde en este caso  $P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}$  es la probabilidad de encontrar  $n$  fotones en el campo térmico dada por la ec. 2.51 y  $\bar{n}$  es el número promedio de fotones del campo. En las figuras 4.7-4.9 se presentan los resultados obtenidos usando el campo térmico como el estado de campo inicial con  $\bar{n} = 50$ . Se puede notar que en semejanza al MJC, el comportamiento de los estados de energía del átomo es completamente errático, es decir, no existe algún patrón y no se observan rasgos de colapso y resurgimiento.

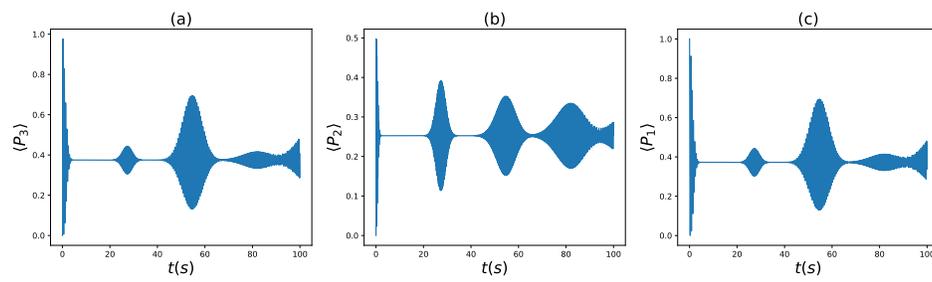


Figura 4.4: El colapso y el resurgimiento del sistema tipo  $\Xi$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso IV con  $\bar{n} = 50$ .

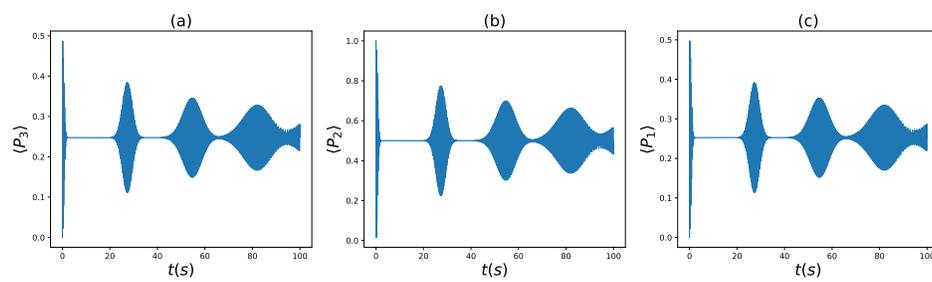


Figura 4.5: El colapso y el resurgimiento del sistema tipo  $\Xi$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso V con  $\bar{n} = 50$ .

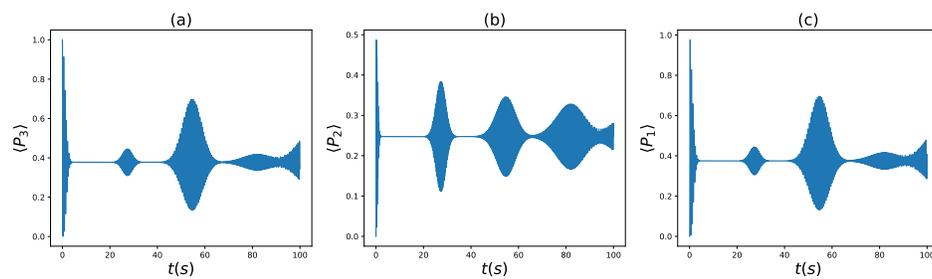


Figura 4.6: El colapso y el resurgimiento del sistema tipo  $\Xi$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso VI con  $\bar{n} = 50$ .

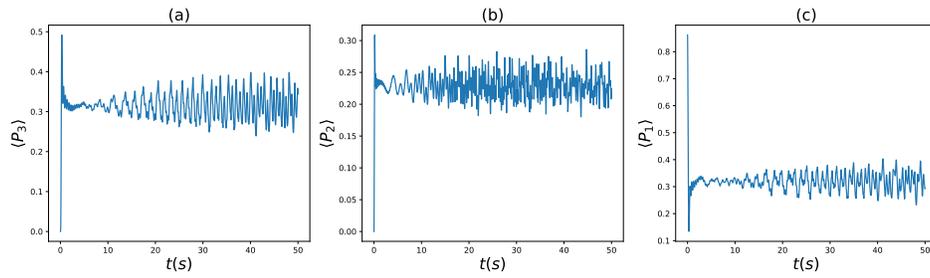


Figura 4.7: La inversión atómica del sistema tipo  $\Xi$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso IV con  $\bar{n} = 50$ .

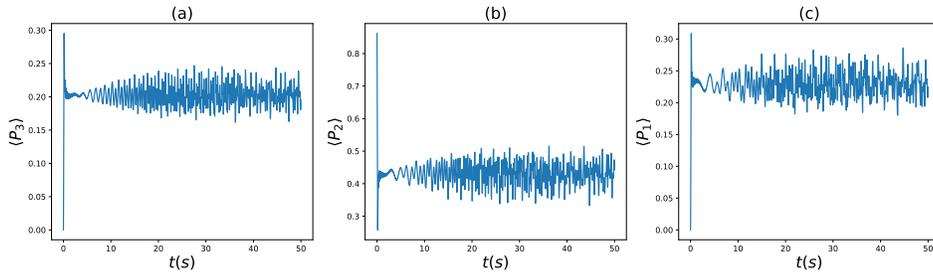


Figura 4.8: La inversión atómica del sistema tipo  $\Xi$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso V con  $\bar{n} = 50$ .

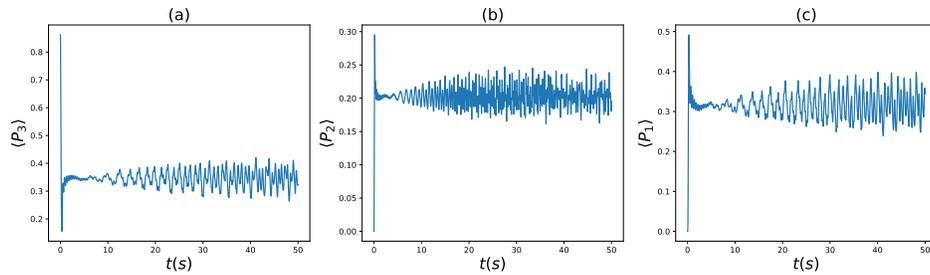


Figura 4.9: La inversión atómica del sistema tipo  $\Xi$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso VI con  $\bar{n} = 50$ .

### 4.7.2. Sistemas tipo $\Lambda$ y $V$

Cabe destacar que la configuración tipo  $\Lambda$  está asociada a procesos como STIRAP (Stimulated Raman Adiabatic Passage), EIT (Electromagnetically Induced Transparency),

etc., mientras que la configuración tipo  $V$  corresponde a fenómenos como el salto cuántico, el efecto zenón cuántico, etc., lo que indica que ambos procesos son fundamentalmente diferentes. Por lo tanto, es natural examinar la simetría de inversión entre los modelos comparando sus oscilaciones de Rabi y estudiando el efecto de la cuantización del campo en esa simetría.

Antes de mostrar los resultados numéricos de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  semiclásico y cuantizado, se consideran sus resultados analíticos. Si se comparan los casos I, II y III de ambos sistemas se encuentra que las probabilidades en el caso I (caso III) del sistema tipo  $\Lambda$  son las mismas que las del caso III (caso I) del sistema tipo  $V$ , con la diferencia que las probabilidades del primer y tercer nivel se intercambian. También los modelos respectivos del caso II son similares, con la misma diferencia de que las probabilidades del primer y tercer nivel se intercambian. En cambio, para el modelo cuantizado, el caso IV (caso VI) del sistema tipo  $\Lambda$  ya no es el mismo que en el caso VI (caso IV) del sistema tipo  $V$ . Esta ruptura de la simetría es evidente al comparar los resultados analíticos obtenidos anteriormente; se puede notar también que en el caso V ambos sistemas son completamente distintos.

### **Modelo semiclásico**

La evolución temporal de las probabilidades correspondientes a los casos I, II y III para los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  son graficadas numéricamente en la figura 4.10. A partir del estudio comparativo de las gráficas de las figuras 4.10a (4.10c) y 4.10f (4.10d), se encuentra que el patrón de la oscilación de probabilidad del sistema tipo  $\Lambda$  para el caso I (caso III) es similar al del sistema tipo  $V$  para el caso III (caso I). También se observa que en ambos casos la oscilación del nivel 2 permanece inalterada, mientras que la oscilación del nivel 3 (nivel 1) del sistema tipo  $\Lambda$  para el caso I es idéntica a la del nivel 1 (nivel 3) del sistema tipo  $V$  para el caso III. Luego, para el caso II, la comparación de las gráficas de las figuras 4.10b y 4.10e muestran que la evolución temporal de las probabilidades del nivel 2 de ambos sistemas sigue siendo similar, excepto que los niveles 3 y 1 son intercambiados. De la dinámica de las curvas de probabilidad se concluye que las configuraciones tipo  $\Lambda$

y  $V$  son esencialmente idénticas entre sí, ya que una configuración se puede obtener de otra simplemente por la inversión seguida del intercambio de probabilidades.

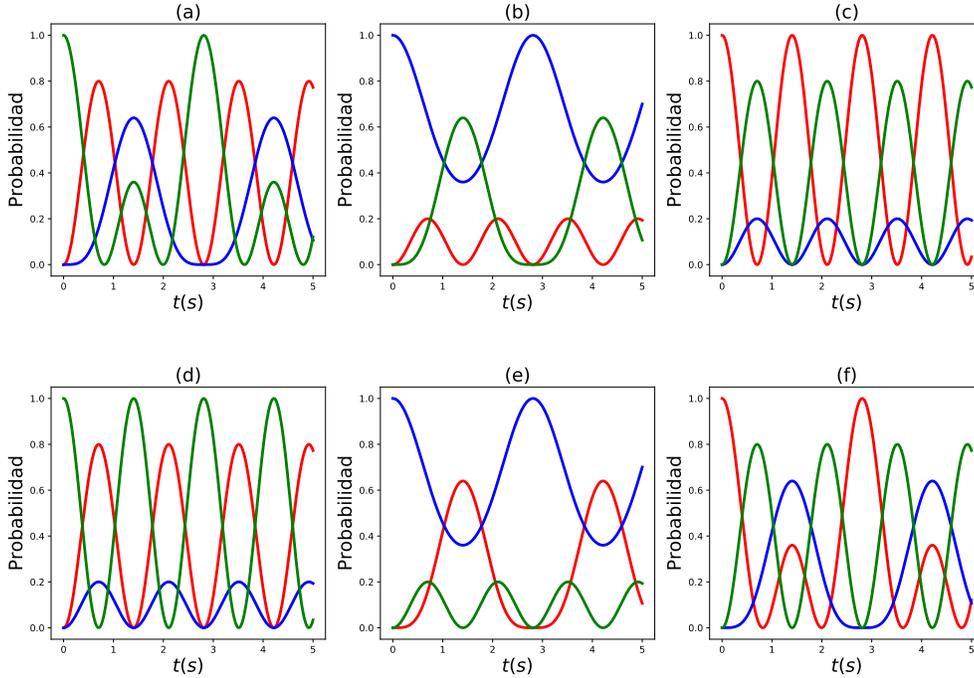


Figura 4.10: Oscilaciones de Rabi de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  semiclásicos correspondiente a los casos I, II y III, respectivamente, con  $\kappa_1 = 2$  y  $\kappa_2 = 1$ .

### Modelo cuantizado

En el caso del campo cuantizado, la evolución temporal de las probabilidades correspondientes a los casos IV, V y VI para los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  están graficados numéricamente en la figura 4.11. Nótese que la simetría observada en el caso de los modelos semiclásicos entre el caso I (caso III) del sistema tipo  $\Lambda$  y el caso III (caso I) del sistema tipo  $V$ , ya no existe entre el caso IV (caso VI) del sistema  $\Lambda$  y el caso VI (caso = IV) del sistema de  $V$  para los modelos cuantizados. Además, para el caso V los patrones de oscilación del sistema tipo  $\Lambda$ , que se muestran en la figura 4.11b, son completamente diferentes de los del sistema  $V$  mostrado en la figura 4.11e. Por lo tanto, para el campo cuantizado, a diferencia del caso semiclásico, la simetría en el patrón de la oscilación de

Rabi en todos los casos se pierde completamente, independientemente del hecho de que los sistemas permanezcan inicialmente en el nivel 1, nivel 2 o nivel 3.

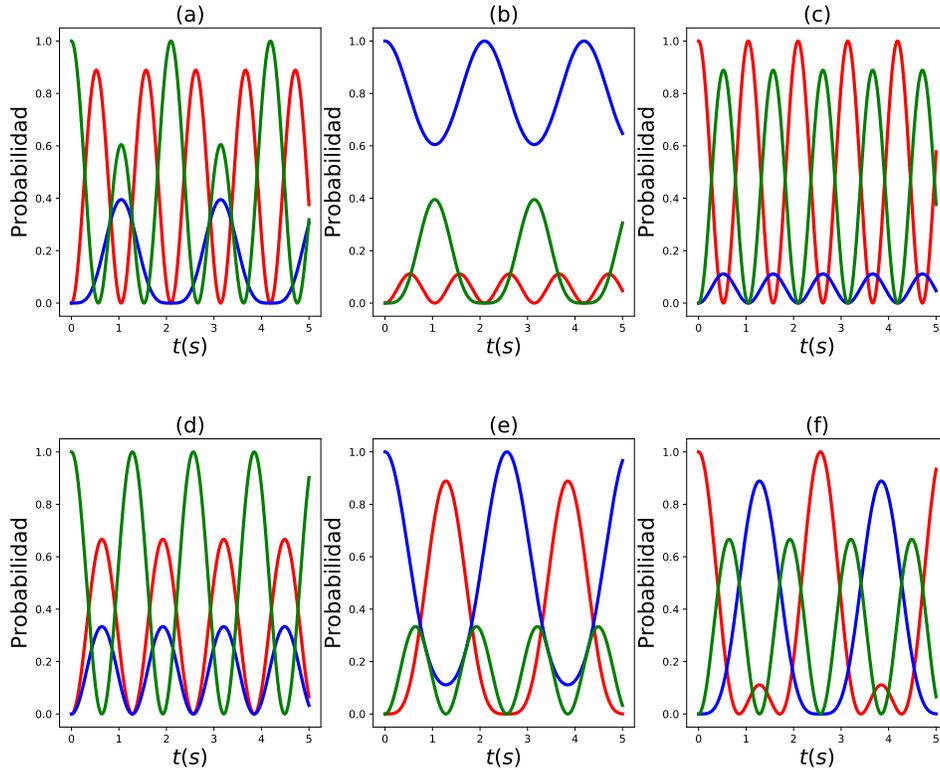


Figura 4.11: Oscilaciones de Rabi de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  cuantizados correspondiente a los casos I, II y III, respectivamente, con  $g_1 = 2$ ,  $g_2 = 1$  y  $n = m = 1$ .

La causa de esta ruptura de simetría de la oscilación de Rabi tiene el siguiente origen cuántico. Obsérvese que debido a la aparición de los términos  $(n + 1)$  ó  $(m + 1)$ , varios elementos de las matrices de transformación en las ecs. 4.148 y 4.171 no desaparecen, incluso cuando  $m$  y  $n$  son iguales a cero. Como consecuencia de la fluctuación del vacío, también se pierde la simetría de las amplitudes de probabilidad de los estados vestidos de ambos modelos, formados por la superposición coherente de los estados desnudos. En otras palabras, la invertibilidad entre los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  expuestos por los modelos semiclásicos, desaparecen como consecuencia directa de la cuantización de los modos de la cavidad.

Considerando ahora que los sistemas  $\Lambda$  y  $V$  están en un campo coherente. El promedio de las probabilidades de los tres niveles están dadas por

$$\langle P_3(t) \rangle_\Lambda = \sum_{n,m} P_n P_m |C_3^{n-1,m}(t)|^2, \quad (4.179)$$

$$\langle P_2(t) \rangle_\Lambda = \sum_{n,m} P_n P_m |C_2^{n,m}(t)|^2, \quad (4.180)$$

$$\langle P_1(t) \rangle_\Lambda = \sum_{n,m} P_n P_m |C_1^{n-1,m+1}(t)|^2, \quad (4.181)$$

para el sistema tipo  $\Lambda$ , y

$$\langle P_3(t) \rangle_V = \sum_{n,m} P_n P_m |C_3^{n+1,m-1}(t)|^2, \quad (4.182)$$

$$\langle P_2(t) \rangle_V = \sum_{n,m} P_n P_m |C_2^{n,m}(t)|^2, \quad (4.183)$$

$$\langle P_1(t) \rangle_V = \sum_{n,m} P_n P_m |C_1^{n+1,m}(t)|^2, \quad (4.184)$$

para el sistema tipo  $V$ , donde  $P_n = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$  y  $P_m = e^{-\bar{m}} \frac{\bar{m}^m}{m!}$  son funciones de distribución de Poisson con  $\bar{n}$  y  $\bar{m}$  los números promedio de fotones de los dos modos cuantizados, respectivamente. Las figuras 4.12-4.14 muestran las gráficas numéricas de las ecs. (4.179)-(4.181) y de las ecs. (4.182)-(4.184) para los casos IV, V y VI, respectivamente, donde el colapso y el resurgimiento de la oscilación de Rabi es claramente evidente. Se observa que en todos los casos, el colapso y resurgimiento del nivel 2 de ambos sistemas son idénticos entre sí. Además, se observa que el colapso y resurgimiento para el sistema tipo  $\Lambda$  inicialmente en el nivel 3 (nivel 1), es el mismo que en el sistema tipo  $V$  si está inicialmente en el nivel 1 (nivel 3). Por otra parte, si el sistema está inicialmente en el nivel 2, el colapso y resurgimiento de ambos sistemas son idénticos entre sí. Esta es precisamente la situación que se obtuvo en el caso del modelo semiclásico. De este modo se restaura la simetría rota en el caso del modelo cuantizado, indicando que el campo coherente está muy próximo al campo clásico.

En caso de que el modo de campo se encuentre inicialmente en un campo térmico, el valor promedio de las probabilidades correspondientes a los casos IV, V y VI están

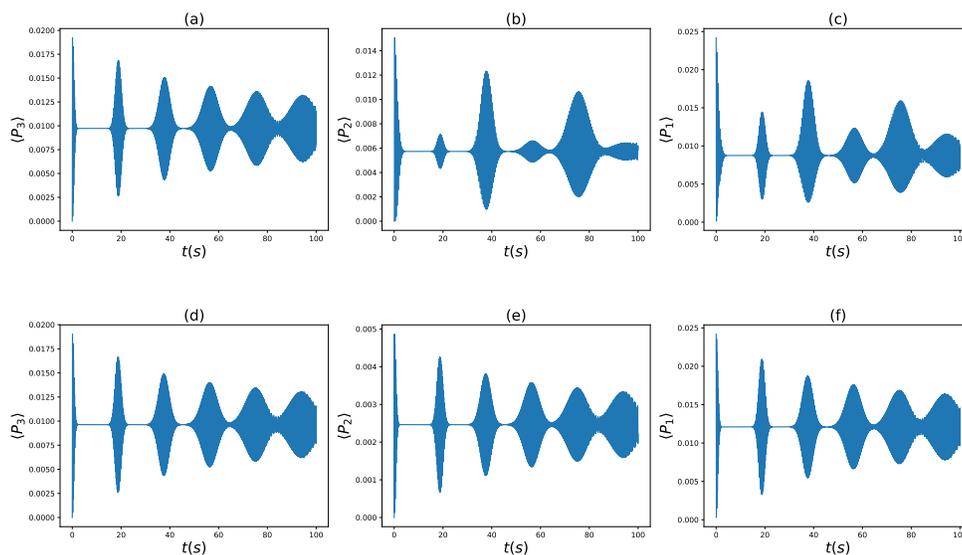


Figura 4.12: El colapso y resurgimiento de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso IV, con  $\bar{n} = 50$  y  $\bar{m} = 40$ .

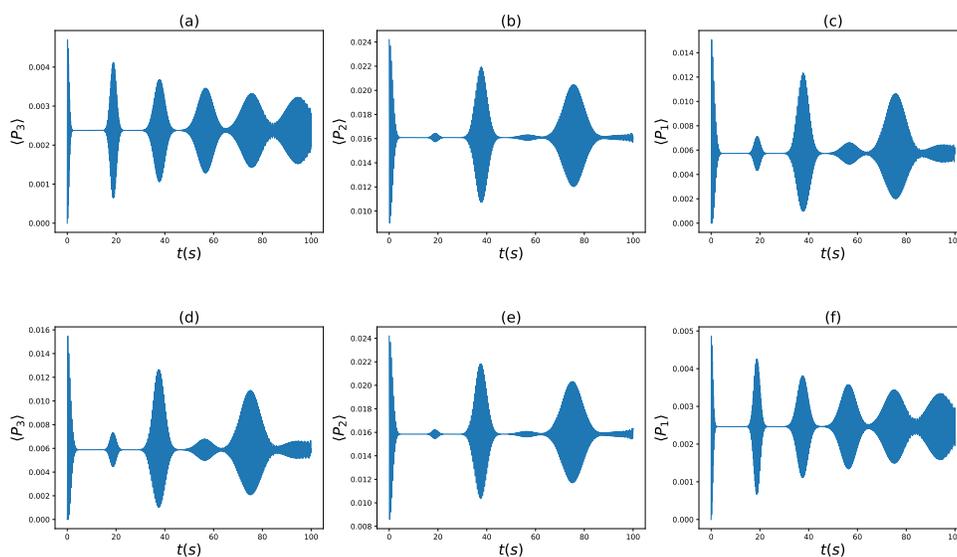


Figura 4.13: El colapso y resurgimiento de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso V, con  $\bar{n} = 50$  y  $\bar{m} = 40$ .

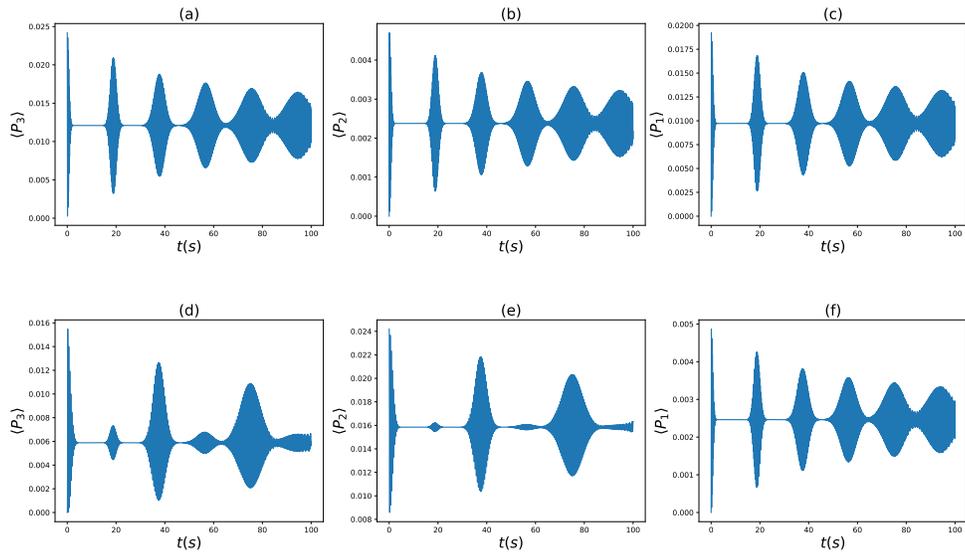


Figura 4.14: El colapso y resurgimiento de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso VI, con  $\bar{n} = 50$  y  $\bar{m} = 40$ .

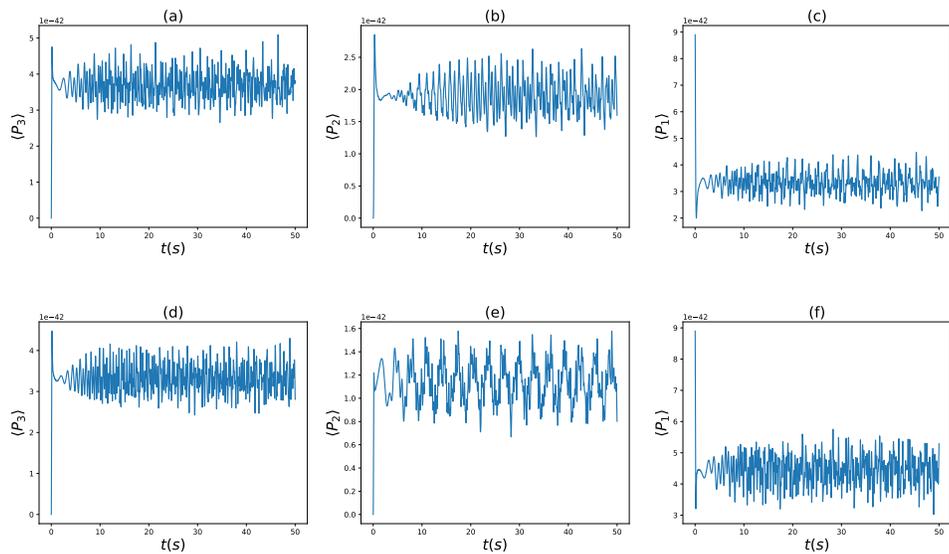


Figura 4.15: La inversión atómica de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso IV, con  $\bar{n} = 50$  y  $\bar{m} = 40$ .

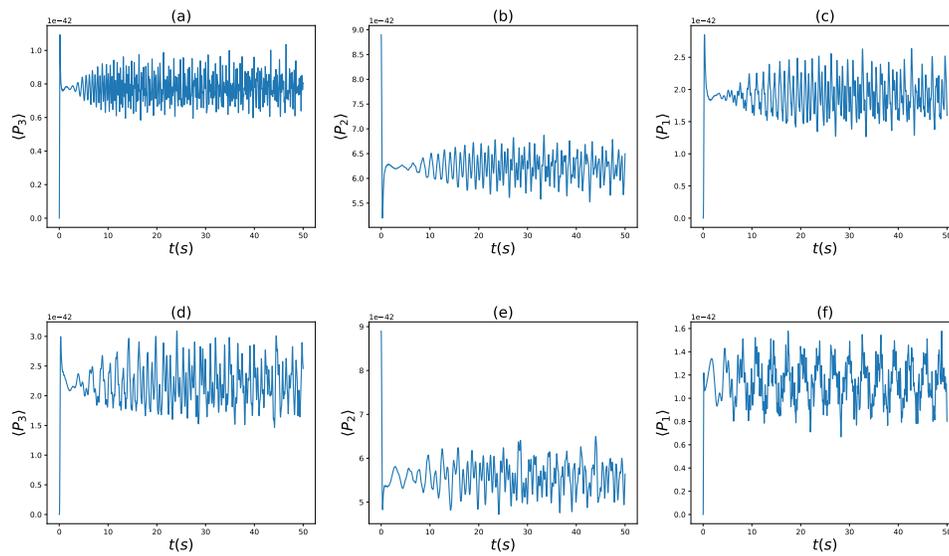


Figura 4.16: La inversión atómica de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso V, con  $\bar{n} = 50$  y  $\bar{m} = 40$ .

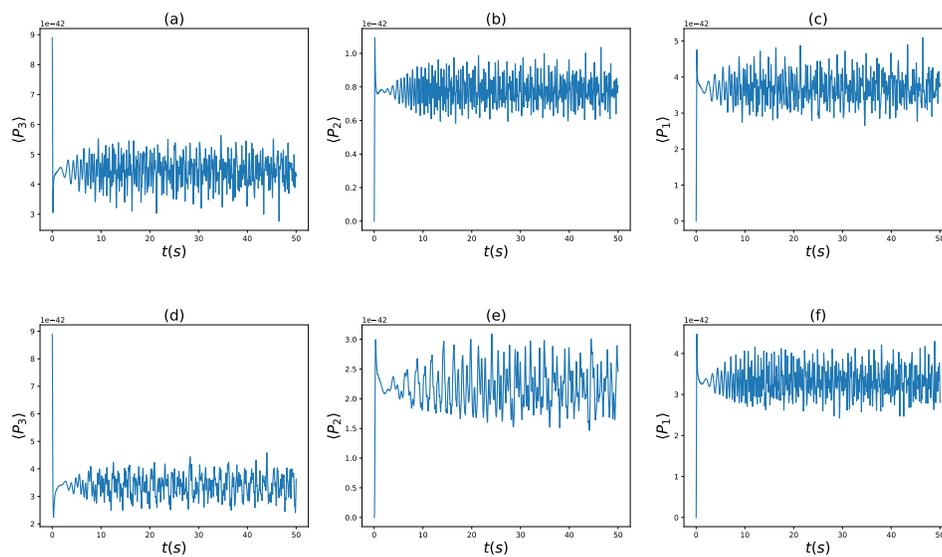


Figura 4.17: La inversión atómica de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$  para los tres niveles de energía correspondientes al caso VI, con  $\bar{n} = 50$  y  $\bar{m} = 40$ .

dadas por las ecs. (4.179)-(4.184), donde en este caso  $P_n$  y  $P_m$  representan la probabilidad de encontrar  $n$  y  $m$  fotones en el campo térmico dada por la ec. 2.51, además  $\bar{n}$  y  $\bar{m}$  son los numeros promedio de fotones del campo. En las figuras 4.15-4.17 se presentan los resultados obtenidos usando el campo térmico como el estado de campo inicial con  $\bar{n} = 50$  y  $\bar{m} = 40$ . Se puede notar que para estos sistemas tampoco existe algún patrón y no se observan rasgos de colapso y resurgimiento.

## 4.8. Conclusión

Haciendo uso de la aproximación dipolar eléctrica, de la aproximación de onda rotante y mediante los operadores de cambio de espín del grupo  $SU(3)$  se desarrollaron analíticamente las soluciones de los modelos semiclásico y cuantizado de los sistemas con tres niveles de energía tipo:  $\Xi$ ,  $\Lambda$  y  $V$ .

Se calcularon las probabilidades de transición de los tres niveles de energía del sistema tipo  $\Xi$  para tres condiciones iniciales distintas. Cuando el sistema se encuentra inicialmente en el nivel medio, el campo clásico interactúa de tal manera que las poblaciones dinámicas de los niveles superior e inferior son siempre iguales. Para el campo cuántico en el estado de número esta simetría en la dinámica de la población de los niveles superior e inferior es destruida. La restauración de la simetría se observó tomando el campo coherente con un gran número de fotones promedio.

En el caso de los sistemas tipo  $\Lambda$  y  $V$ , las probabilidades de transición de los tres niveles se calcularon con diferentes condiciones iniciales para los campos bimodales clásicos y cuantizados. Se observó que la simetría de inversión mostrada por los sistemas de tipo  $\Lambda$  y  $V$  semiclásicos está destinada a ser completamente destruida por las fluctuaciones del vacío en el caso cuántico. Se discutió la interacción de los sistemas de tipo  $\Lambda$  y  $V$  con el campo coherente y se observó la restauración de la simetría dinámica, indicando que el campo coherente con el número de fotones promedio grande es el estado más cercano al

estado clásico.

Finalmente, se pudo notar que cuando los tres sistemas se encontraban inicialmente en un campo térmico no presentaron ningún patrón y tampoco se observaron rasgos de colapso y resurgimiento, más aun, presentaron un comportamiento completamente errático.

# Bibliografía

- [1] A. B. Klimov and S. M. Chumakov, *Tópicos de Óptica Cuántica*, Primera edición (2005).
- [2] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [3] B. W. Shore and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* **40**, 1195 (1993).
- [4] C. A. Blockley, D. F. Walls and H. Risken, *Europhys. Lett.* **17**, (2001).
- [5] H. J. Yoo and J. H. Eberly, *Phys. Rep.* **118**, 239 (1985).
- [6] P. L. Knight and P. M. Radmore, *Phys. Lett. A* **90**, 342 (1982).
- [7] P. W. Milloni and J. H. Eberly, *J. Chem. Phys.* **68**, 1602 (1978).
- [8] B. Sobolewsca, *Opt. Commun.* **19**, 185 (1976).
- [9] B. Mollow, *Phys. Rev.* **188**, 1969 (1969).
- [10] R. J. Cook and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1023 (1985).
- [11] C. C. Gerry and P. L Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, (2005).
- [12] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, revised edition Reading: Addison-Wesley, (1994).
- [13] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963); J. R. Klauder, *J. Math. Phys.* **4**, (1963).

- [14] Hector M. Moya-Cessa and Francisco Soto-Eguibar, *Introduction to Quantum Optics*, Rinton Press, (2011).
- [15] J. H. Eberly, N.B. Narozhny and J. J. Sanchez-Mondragon *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1323 (1980).
- [16] G. Rempe, H. Walther and N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 353 (1987).
- [17] L. Allen and J.H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Dover Publications Inc. (1987).
- [18] I. I. Rabi, *Phys. Rev.* **51**, 652 (1937).
- [19] P. L. Knight and P. W. Milonni, *Phys. Rep.* **66**, 21 (1980).
- [20] F. T. Hioe and J. H. Eberly, *Phys. Rev.* **A25**, 2168 (1982).
- [21] D. B. Lichtenberg, *Unitary Symmetry and Elementary Particles*, Academic Press, (1970).
- [22] M. R. Nath, S. Sen and G. Gangopadhyaya, *Pramana-J. Phys.* **61**, 1089 (2003).
- [23] M. R. Nath, S. Sen and G. Gangopadhyaya, *Pramana-J. Phys.* **71**, 77 (2008).
- [24] Stephen T. Thornton, Jerry B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Fifth edition (2004).