Universidad Autónoma de Chiapas

Facultad de Ciencias en
Física y Matemáticas

funciones inducidas en productos simétricos de continuos

T E S I S

Que para obtener el título de:
Maestro en ciencias Matemáticas

Presenta:

Lic. Ángel Manuel Gil Villafuerte

Director de tesis:
Dr. Hugo Villanueva Méndez

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. *Junio 2018*

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
13 de junio de 2018
Oficio No. FCFM/0271/18

Dr. Hugo Villanueva Méndez
Presidente y Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"FUNCIONES INDUCIDAS EN PRODUCTOS SIMÉTRICOS DE CONTINUOS".

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestro en Ciencias Matemáticas del **Lic. Ángel Manuel Gil Villafuerte** con matrícula escolar: X090024.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

"Por la conciencia de la necesidad de servir"

UNACH fm FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Dr. Sendic Estrada Jiménez

DIRECCIÓN FCFM

Director

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
SEJ /jmag

Índice general

Agradecimientos

Agradezco a Dios por sobre todas las cosas, reconociendo que sin él nada puedo, nada tengo y nada soy.

A mi madre María Villafuerte, sabiendo que jamás existirá una forma de agradecerte toda una vida de amor y apoyo incondicional que me has brindado. Nada de esto hubiera sido posible sin ti, por lo que este logro también es tuyo. Con amor, cariño y admiración a una gran mujer como lo eres tú, esta tesis está dedicada a ti.

Al director de tesis Dr. Hugo Villanueva, gracias por la dirección y asesoramiento que me ha dado en esta tesis en un marco de confianza y amistad, fundamentales para la realización de este trabajo. Gracias también por todas las enseñanzas como profesor y amigo durante mi formación académica.

A los doctores Javier Sánchez y Aarón Quiñones, quienes fueron mis profesores y amigos durante este proceso de aprendizaje. Gracias por todas las enseñanzas que con responsabilidad y esmero ponían en cada clase, así como por todo el apoyo que me han brindado y por tan valiosas correcciones y sugerencias hechas en esta tesis.

A los profesores Armando Mendoza, Florencio Corona y Rosario Soler, a quienes conozco y les tengo aprecio desde la licenciatura, gracias por brindarme siempre su amistad y confianza en cada proceso de mi formación académica.

A mis compañeros de clase José Antonio y Elda Janeth, gracias por su compañerismo, apoyo incondicional y por todas las platicas sostenidas dentro y fuera del aula que sin dudarlo me hicieron más fácil este camino.

Prefacio

Los continuos e hiperespacios son dos ramas de la topología que han sido estudiadas fuertemente en los últimos años. La primera de ellas se encarga de estudiar propiedades de los espacios métricos, compactos y conexos. Los hiperespacios se encargan de estudiar subespacios particulares del conjunto potencia de un espacio.

La teoría de hiperespacios de continuos es una línea de investigación en topología que apareció aproximadamente en la década de 1910 a 1920. Cabe mencionar que México tiene un grupo grande y variado de especialistas dedicado a la investigación en estas áreas de la matemática.

Aunque los continuos e hiperespacios son, primordialmente, objeto de estudio de los topólogos, aparecen de manera natural en otras ramas de la matemática, como en los sistemas dinámicos y las ecuaciones diferenciales, así como también en la física y la química.

Dentro de los subconjuntos del producto potencia de un espacio, es de nuestro interés considerar a aquellos subconjuntos que tienen a lo más n puntos del espacio, donde n es un número natural. A este hiperespacio se le conoce como el n-ésimo producto simétrico, y fue introducido por K. Borsuk y S. Ulam en 1931. Es en este hiperespacio que está dirigído el trabajo de esta tesis.

Una función continua y sobreyectiva entre continuos, define de manera natural, otra función continua y sobreyectiva entre hiperespacios de continuos. De manera general, a esto se le llama función inducida en hiperespacios. Existen diversos trabajos sobre funciones inducidas en hiperespacios. Las funciones inducidas en los productos simétricos no son la excepción, se ha trabajado en ello particularmente en los últimos 8 años.

Se trabaja con direfentes clases de funciones entre continuos y para cada una de estas clases se estudia cuándo la función inducida pertenece o no a la misma clase de la función original, de la misma manera, se estudia el reverso.

En esta tesis se da una recapitulación de resultados encontrados en 28 clases de funciones orientadas en el estudio de las funciones inducidas de los productos simétricos de continuos. Existen muchas funciones que no han sido analizadas en este sentido y que podrían ser campo de investigación en el área de hiperespacios de continuos, por lo que considero que este trabajo puede ayudar a las personas interesadas en la investigación de esta área o áreas afines.

En el capítulo uno se dan los preliminares a la tesis. En este capítulo se dan los resultados básicos de la teoría de continuos e hiperespacios que se utilizarán. Se supone que el lector tiene conocimientos básicos de topología y de espacios métricos.

En el capítulo dos se trabaja con diferentes clases de funciones orientadas en el estudio de las funciones inducidas de los productos simétricos de continuos.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dividido en dos secciones principales en los cuales se dan definiciones, resultados y ejemplos que nos ayudarán a introducirnos en los conceptos matemáticos que utilizaremos en esta tesis. En la primer sección damos una introducción a los hiperespacios y dotamos de una topología al mismo. En la segunda sección damos resultados relacionados a la conexidad de espacios métricos y topológicos.

1.1. Notación

Iniciamos dando algunas notaciones y definiciones que adoptaremos para esta tesis.

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, usaremos la notación I_n para designar a un conjunto de índices de n elementos, es decir, $I_n := \{1, \ldots, n\}$.

Decimos que un conjunto X es **no degenerado** si tiene más de un elemento. Si X tiene exactamente un elemento, diremos que de X es **degenerado**. Usaremos la notación $|X|$ para designar la cardinalidad de un conjunto X.

Sean X un conjunto arbitrario y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X, denotaremos por $\bigcup \mathcal{A}$ a la unión de todos los miembros contenidos en $\mathcal{A}$, es decir, $\bigcup \mathcal{A} = \{x \in X : \text{existe } A \in \mathcal{A} \,\text{con}\, x \in A\}$.

Sean (X, d) un espacio métrico, A un subconjunto de X, x un punto en X, y ϵ un número mayor que cero. Denotamos:
(i) El **diámetro** de A por $\text{diám}_X(A)$, donde $\text{diám}_X(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.
(ii) La **bola abierta** (**cerrada**) centrada en x de radio ϵ, por $B_d(x, \epsilon)$ ($\overline{B}_d(x, \epsilon)$, respectivamente), donde $B_d(x, \epsilon) = \{x' \in X : d(x, x') < \epsilon\}$ ($\overline{B}_d(x, \epsilon) = \{x' \in X : d(x, x') \leq \epsilon\}$).
(iii) La **cerradura** de A en X por $\text{cl}_X(A)$. Si no hay confusión del espacio en cuestión, entonces se denotará a la cerradura de A en X por $\overline{A}$.
(iv) El **interior** de A por $\text{int}_X(A)$.
(v) La **frontera** de A en X por $\text{fr}_X(A)$.
(vi) El **complemento** de A por $X \setminus A$.

Denotamos por S^1 al círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen, es decir, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio topológico, se define el* ***producto topológico*** *de n copias de X consigo mismo, como el conjunto $X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n-veces}$, con la topología producto.*

1.2. Hiperespacios

La teoría de continuos e hiperespacios están muy relacionadas y, como en esta tesis trabajamos los hiperespacios de continuos, iniciamos con la definición de lo que entendemos por un continuo.

Definición 1.2.1. *Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

Ejemplos 1.2.2. *Los siguientes son ejemplos de continuos.*
1. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, el intervalo $[a, b]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la métrica usual.
2. Para algún $x \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, la bola cerrada $\overline{B}_d(x, \epsilon))$, donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}$.
3. El circulo unitario S^1.
*4. La **curva senoidal del topólogo**, definida por $\{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$.*

Definición 1.2.3. *Dado un conjunto no vacío X, un **hiperespacio** de X es una familia de subconjuntos de X.*

Trabajaremos con algunos hiperespacios distinguidos:

Definición 1.2.4. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$, se denotan los siguientes hiperespacios:*
(i) CL(X)= $\{A \subset X : A \neq \emptyset, A\, es\ cerrado\}$,
(ii) $2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset, A\, es\ compacto\}$
(iii) $C(X) = \{A \in 2^X : A\, es\ conexo\}$
(iv) $C_n(X) = \{A \in 2^X : A\, tiene\ a\ lo\ más\, n\, componentes\}$
(v) $F_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset, |A| \leq n\}$.

Al espacio $C(X)$ se le conoce como el **hiperespacio de subcontinuos** de X y, al hiperespacio $F_n(X)$, como el **n-ésimo producto simétrico** de X.

Definición 1.2.5. *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \in 2^X$, y $\epsilon > 0$. Se define la **nube** centrada en A de radio ϵ como el conjunto*

$$N_d(A, \epsilon) = \{x \in X : existe\, y \in A\ tal\ que\, d(x, y) < \epsilon\}.$$

Si no hay confusión de la métrica utilizada pondremos $N(A, \epsilon)$ para designar a $N_d(A, \epsilon)$.

Definición 1.2.6. *Sean (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \in 2^X$, se define la **métrica de Hausdorff** como*

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\,\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(B, \epsilon)\ y\ B \subset N_d(A, \epsilon)\}.$$

Notemos que cuando $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ son conjuntos unipuntuales entonces $H_d(A, B) = d(a, b)$. El siguiente teorema muestra que en efecto, H_d define una métrica para 2^X.

Teorema 1.2.7. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, entonces la función H_d es, en efecto, una métrica para 2^X.*

Demostración. Sean $A, B, C \in 2^X$. Definamos $E(A,B) = \{\epsilon > 0 : A \subset N(B,\epsilon)$ y $B \subset N(A,\epsilon)\}$.
(i) Mostremos primero que la métrica de Hausdorff está bien definida. En efecto, por la compacidad de X, para cada $p, q \in X$, se tiene que $d(p,q) < \text{diám}(X) + 1 := \delta$. Si $a \in A$, entonces $d(a,b) < \delta$ para cada $b \in B$, así $A \subset N(B,\delta)$. Análogamente $B \subset N(A,\delta)$. Por lo tanto, $\delta \in E(A,B)$ y entonces $E(A,B) \neq \emptyset$. Como $E(A,B)$ está acotado inferiormente por 0, existe $H_d(A,B) = \text{ínf}\, E(A,B)$.
(ii) De la definición se observa que $H_d(A,B) \geq 0$.
(iii) Mostremos que $H_d(A,B) = 0$ si y sólo si $A = B$. En efecto, si $A = B$ y $\epsilon > 0$, entonces $A \subset N(B,\epsilon)$, por lo que $\epsilon \in E(A,B)$. Esto implica que ínf $E(A,B) = 0$. Ahora supongamos que $H_d(A,B) = 0$. Sean $a \in A$, y $\epsilon > 0$. Ya que $H_d(A,B) = 0 < \epsilon$, ϵ no es cota inferior de $E(A,B)$. Se sigue que existe $\delta \in E(A,B)$ tal que $\delta < \epsilon$. Como $A \subset N(B,\delta)$ y $B \subset N(A,\delta)$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta$. Por lo tanto, $b \in B(a,\delta) \subseteq B(a,\epsilon)$. Así, $B(a,\epsilon) \cap B \neq \emptyset$. Notemos que hemos probado que $a \in \overline{B}$. Como $B \in 2^X$, $\overline{B} = B$, es decir, $a \in B$. Por lo tanto $A \subset B$. Análogamente se prueba que $B \subset A$. Por lo tanto, $A = B$.
(iv) Es claro que $H_d(A,B) = H_d(B,A)$.
(v) Mostremos que $H_d(A,B) \leq H_d(A,C) + H_d(C,B)$. Es decir, que ínf $E(A,B) \leq$ ínf $E(A,C)$ +ínf $E(C,B)$. Para esto, mostraremos que ínf $E(A,B) \leq$ ínf$\{\delta + \eta : \delta \in E(A,C)\,\text{y}\,\eta \in E(C,B)\}$. En efecto, Sean $\delta \in E(A,C)$ y $\eta \in E(C,B)$. Se sigue que $A \subset N(C,\delta)$ y $C \subset N(B,\eta)$. Dado $a \in A$, existe $c \in C$ tal que $d(a,c) < \delta$. Además, existe $b \in B$ tal que $d(c,b) < \eta$. Así, $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < \delta + \eta$, por lo que $A \subset N(B, \delta+\eta)$. De manera similar $B \subset N(A,\delta+\eta)$. Por lo tanto, $\delta + \eta \in E(A,B)$. Tenemos que ínf $(A,B) \leq \delta + \eta$, por lo que $H_d(A,B)$ es cota inferior de $\{\delta + \eta : \delta \in E(A,C),\ \text{y}\, \eta \in E(C,B)\}$. Por lo tanto, $H_d(A,B) \leq$ ínf$\{\delta + \eta : \delta \in E(A,C)\,\text{y}\,\eta \in E(C,B)\}$. Esto completa la prueba de que H_d es una métrica para 2^X.

■

1.2.1. Topología para los hiperespacios

Es importante definir de manera general una topología para los hiperespacios de conjuntos. Por lo que daremos una topología para el hiperespacio $CL(X)$, como en los capítulos posteriores trabajaremos cuando X es un continuo, entonces en particular X será métrico compacto y así $CL(X) = 2^X$. Con esto, ya que para todo natural n se tiene que $F_n(X), C_n(X)$ y $C(X)$ están contenidos en 2^X, entonces tendremos también una topología para cada uno de estos hiperespacios, a saber, la topología del subespacio obtenida de la topología en 2^X.

Definición 1.2.8. *Sea (X,τ) un espacio topológico. La **topología de Vietoris** para $CL(X)$ es la topología más chica, denotada por τ_V, para $CL(X)$, con la siguiente propiedad: $\{A \in CL(X) : A \subset U\} \in \tau_V$ si $U \in \tau$, y $\{A \in CL(X) : A \subset B\}$ es τ_V-cerrado si B es τ-cerrado.*

Notemos que existe una topología cumpliendo las propiedades anteriores, a saber la topología discreta. Sean (X,τ) un espacio topológico y $U, U_1, U_2, \ldots, U_n$ elementos de τ. Usaremos las siguientes notaciones para algunos conjuntos que son distinguidos en $CL(X)$:
(i) $\Gamma(U) = \{A \in CL(X) : A \subset U\}$,
(ii) $\Lambda(U) = \{A \in CL(X) : A \cap U \neq \emptyset\}$,
(iii) $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \{A \in CL(X) : A \subset \cup_{i=i}^n U_i, A \cap U_i \neq \emptyset, \text{para todo } i \in I_n\}$.

Observemos que $\Gamma(U) = \langle U\rangle$, $\Lambda(U) = \langle X, U\rangle$ y $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = [\Gamma(\cup_{i=1}^n U_i)] \cap [\cap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$.

Queremos dar una base a la topología de Vietoris, para esto demostraremos el siguiente resultado.

Lema 1.2.9. *Si $U = \cup_{i=1}^n U_i$ y $V = \cup_{j=1}^m V_j$, entonces*

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle = \langle V\cap U_1, \ldots, V\cap U_n, U\cap V_1, \ldots, U\cap V_m\rangle.$$

Demostración. Sea $A \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$ entonces

$$\begin{aligned} A \subset U\cap V &= (\cup_{i=1}^n U_i) \cap (\cup_{j=1}^m V_j) \\ &= [(V \cap (\cup_{i=1}^n U_i)] \cup [U \cap (\cup_{j=1}^m V_j)] \\ &= [\cup_{i=1}^n (V\cap U_i)] \cup [\cup_{j=1}^m (U \cap V_j)]. \end{aligned}$$

Además, $A\cap (V\cap U_i) = A\cap U_i \neq \emptyset$ y $A\cap(U\cap V_j) = A\cap V_j \neq \emptyset$, por lo que $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle \subset \langle V\cap U_1, \ldots, V\cap U_n, U\cap V_i, \ldots, U\cap V_m\rangle$.
Para la otra contención, sea $A \in \langle V\cap U_1, \ldots, V\cap U_n, U\cap V_1, \ldots, U\cap V_m\rangle$ entonces

$$\begin{aligned} A \subset [\bigcup_{i=1}^n (V\cap U_i)] \cup [\bigcup_{j=1}^m (U\cap V_j)] &= [(V\cap (\bigcup_{i=1}^n U_i)] \cup [U \cap (\bigcup_{j=1}^m V_j)] \\ &= [V\cap U] \cup [U\cap V] \\ &= U\cap V. \end{aligned}$$

Concluimos que $A\subset U$ y $A \subset V$. Además, $A\cap U_i = A\cap(V\cap U_i)\neq\emptyset$, para cada $i \in I_n$, por lo que $A\in\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Similarmente, $A\cap V_j = A\cap (U\cap V_j) \neq \emptyset$, para cada $j\in I_m$, por lo que $A\in \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$.

■

Estamos listos para mostrar una base para la topología de Vietoris.

Teorema 1.2.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico. El conjunto*

$$\mathfrak{B}_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle : U_i \in \tau \text{ para cada } i, n\in\mathbb{N}\}$$

es base para la topología de Vietoris τ_V. Además, el conjunto

$$\mathcal{P} = \{\langle U\rangle : U\in\tau\} \cup \{\langle X, U\rangle : U \in \tau\}$$

es una subbase para la misma topología.

Demostración. Notemos que $\{A \in CL(X) : A \subset U\} = \langle U\rangle$ y $\{A\in CL(X) : A \subset B\} = CL(X)\setminus \langle X, X\setminus B\rangle$. Por definición τ_V es la topología más chica para $CL(X)$ que contiene a

$$S = \{\langle U\rangle : U\in\tau\}\cup\{\langle X, U\rangle : U\in\tau\}.$$

Por lo que la familia $\hat{S}$ de intersecciones finitas de miembros de S , es una base para τ_V. Así, basta probar que $\hat{S} = \mathfrak{B}_V$. En efecto, notemos que

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \langle \cup_{i=1}^n U_i\rangle \cap\ (\cap_{i=1}^n \langle X, U_i\rangle) \in \hat{S},$$

así que $\mathfrak{B}_V \subset \hat{S}$. Para la otra contención, utilizaremos el Lema 1.2.9, para probar que la intersección de cualesquiera dos miembros de $\hat{S}$, está en $\mathfrak{B}_V$, con lo que la prueba quedará completa. En efecto,
(i) $\langle U_1\rangle \cap\langle U_2\rangle = \langle U_1, U_2\rangle \in \mathfrak{B}_V$,
(ii) $\langle U_1\rangle\cap\langle X, U_2\rangle = \langle U_1, U_1\cap U_2\rangle \in\mathfrak{B}_V$,
(iii) $\langle X, U_1\rangle \cap \langle X, U_2\rangle = \langle X, U_1, U_2\rangle \in \mathfrak{B}_V$.
Para la segunda parte, sea

$$\mathcal{P}' = \{\cap\mathcal{L} : \mathcal{L}\subset\mathcal{P} \text{ y } \mathcal{L} \text{ es finito}\}.$$

Notemos que $\mathfrak{B}_V \subset \mathcal{P}'$. Además, $\mathcal{P}\subset\mathfrak{B}_V$. Por el Lema 1.2.9, $\mathfrak{B}_V$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Tenemos que $\mathcal{P}'\subset\mathfrak{B}_V$. Por lo tanto, $\mathcal{P}' = \mathfrak{B}_V$. Esto muestra que $\mathcal{P}$ es una subbase para τ_V.

■

Es natural preguntarnos si la topología de Vietoris coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. El Teorema 1.2.12 da una respuesta afirmativa. Para probar dicho teorema daremos antes el siguiente resultado.

Lema 1.2.11. *Si (X,d) es un espacio métrico compacto, $A,B \in 2^X$, y $\epsilon > 0$, entonces $H_d(A,B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subset N_d(B,\epsilon)$ y $B \subset N_d(A,\epsilon)$.*

Demostración. Supongamos que $H_d(A,B) < \epsilon$. De la definición de H_d, se sigue que $A \subset N_d(B,\epsilon)$ y $B \subset N_d(A,\epsilon)$. Para la otra implicación, supongamos que $A \subset N_d(B,\epsilon)$ y $B \subset N_d(A,\epsilon)$. Notemos que $N_d(B,\epsilon) = \cup_{b\in B} B_d(b,\epsilon)$. Así, $A \subset \cup_{b\in B} B_d(b,\epsilon)$. Como A es compacto, existen números positivos $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$, tales que $\epsilon_i < \epsilon$, para cada $i \in I_n$, y existen $b_i \in B$, para cada $i \in I_n$, tales que $A \subset \cup_{i=1}^n B_d(b_i,\epsilon_i)$. Ya que $\cup_{i=1}^n B_d(b_i,\epsilon_i) \subset \cup_{i=1}^n N_d(B,\epsilon_i)$ se sigue que $A \subset \cup_{i=1}^n N_d(B,\epsilon_i)$.
Sea m_A =máx$\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}$. Se tiene que $A \subset \cup_{i=1}^n N_d(B,\epsilon_i) \subset N_d(B,m_A)$. De manera similar, como $B \subset N_d(A,\epsilon)$ y B es compacto, exite un número $m_B > 0$, con $m_B < \epsilon$ y $B \subset N_d(A,m_B)$. Sea m =máx$\{m_A,m_B\}$. Tenemos que $m < \epsilon$, $A \subset N_d(B,m)$ y $B \subset N_d(A,m)$, por lo que concluimos que $H_d(A,B) \leq m < \epsilon$.

■

Teorema 1.2.12. *Sean (X,d) un espacio métrico compacto y τ_H la topología para 2^X generada por la métrica de Hausdorff, se tiene que $\tau_V = \tau_H$.*

Demostración. Veamos que $\tau_V \subset \tau_H$. Sea $U \in \tau$. Probaremos que:
(i) $\Gamma(U) = \langle U\rangle \in \tau_H$,
(ii) $\Lambda(U) = \langle X,U\rangle \in \tau_H$.
Para probar (i), sea $A \in \Gamma(U)$, así $A \subset U$. Sea $\epsilon =\dfrac{1}{2}\ d(A,X\setminus U) > 0$. Mostraremos que $B_H(A,\epsilon) := \{B \in 2^X : H_d(A,B) < \epsilon\} \subset \Gamma(U)$. En efecto, notemos primero que si $x \in N(A,\epsilon)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < \epsilon$. Si ocurriera que $x \notin U$, tendríamos que $d(A,X\setminus U) \leq d(a,x) < \epsilon = \dfrac{1}{2}d(A,X\setminus U)$, lo cual no es cierto, por lo que $x \in U$, y así $N(A,\epsilon) \subset U$. Por tanto, si $B \in B_H(A,\epsilon)$, entonces por el Lema 1.2.11, $B \subset N(A,\epsilon) \subset U$. Así $B \in \Gamma(U)$.
Para probar (ii), sea $A \in \Lambda(U)$, entonces $A\cap U \neq \emptyset$. Sea $p \in A\cap U$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(p,\epsilon) \subset U$. Mostraremos que $B_H(A,\epsilon) \subset \Lambda(U)$. En efecto, sea $B \in B_H(A,\epsilon)$, entonces $A \subset N(B,\epsilon)$. Como $p \in A$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(p,b) < \epsilon$, por lo que $b \in B_d(p,\epsilon) \subset U$, y así $b \in U\cap B$, es decir, $B \in \Lambda(U)$.
Ahora veamos que $\tau_H \subset \tau_V$. Sean $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Mostraremos que $B_H(A,\epsilon) \in \tau_V$, es decir, queremos probar que existen $U_1,\ldots,U_n$ elementos de τ tales que $A \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subset B_H(A,\epsilon)$. En efecto, por la compacidad de A, existen $U_1,\ldots,U_n$ en τ, tales que para cada $i \in I_n$, el diám$(U_i) < \dfrac{\epsilon}{2}$, $A \subset \cup_{i=i}^n U_i \subset N(A,\dfrac{\epsilon}{2})$, y que $A\cap U_i \neq \emptyset$. Por lo anterior, $A \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. Sean $B \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle$ y $a \in A$, entonces existe un índice $i \in I_n$, tal que $a \in U_i$. Además, existe $b \in B\cap U_i$, por lo que $d(a,b) \leq$ diám$(U_i) < \epsilon$, es decir, $A \subset N(B,\epsilon)$. De manera similar $B \subset N(A,\epsilon)$. Por el Lema 1.2.11, $H_d(A,B) < \epsilon$, y así $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subset B_H(A,\epsilon)$.

■

El siguiente lema es útil para probar que la intersección de continuos anidados es un continuo. Además, servirá para probar algunos teoremas del siguiente capítulo.

Lema 1.2.13. *Sea (X_n) una sucesión de espacios métricos compactos tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$. Sea $X = \cap_{i=i}^{\infty} X_i$. Si U es un subconjunto abierto de X_1, tal que $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset U$ para todo $n \geq N$. En particular, si para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_n \neq \emptyset$, entonces $X \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que el enunciado es falso, entonces podemos suponer que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X_n \setminus U$. Así, existe una sucesión de elementos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X_1 \setminus U$. Por la compacidad de $X_1 \setminus U$, podemos suponer que existe $p \in X_1 \setminus U$ tal que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p. Sea $k \in \mathbb{N}$, puesto que $X_{n+1} \subset X_n$, entonces para cada $i \geq k$, $x_i \in X_k$. Así $(x_i)_{i\geq k} \subset X_k$, por lo que $p \in X_k$. Entonces, $p \in \bigcap_{i=i}^{\infty} X_i = X \subset U$, lo cual es una contradicción. Para probar la segunda parte, supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n \neq \emptyset$. Si ocurriera que $X = \emptyset$, entonces tomando $U = \emptyset$, se tiene que $X \subset U$, y por lo anterior existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset U = \emptyset$, es decir, $X_N = \emptyset$, lo cual es falso.

■

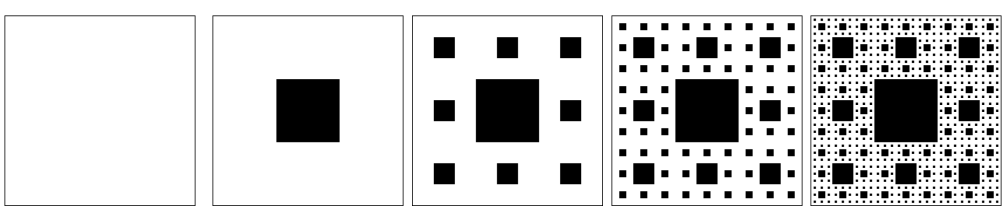
Una manera de construir continuos es tomar la intersección de continuos anidados. Esto es lo que garantiza el siguiente resultado.

Proposición 1.2.14. *Sea (X_n) una sucesión de continuos tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$, entonces $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ es un continuo.*

Demostración. Por el Lema 1.2.13, X es un espacio métrico no vacío, y es compacto al ser cerrado. Mostremos que X es conexo. Supongamos que no lo es, por lo que $X = A \cup B$, con A y B subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X. En particular, A y B son compactos, y por la normalidad de X_1, existen subconjuntos abiertos y ajenos de X_1, V y W, tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$, se sique que $X = A \cup B \subset U$ y, por el Lema 1.2.13, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que $X_N \subset U = V \cup W$. Por la conexidad de X_N, podemos suponer sin perdida de generalidad que $X_N \subset V$, pero entonces $B \subset X \subset X_N \subset V$, es decir, $B \subset V \cap W$, lo cual es falso.

■

Ejemplo 1.2.15. *Sean $X_0 = [0,1]^2$ el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$, $X_1 = X_0 \setminus C_1$, donde C_1 es un cuadrado (oscuro) como se muestra en el inciso (b), sea $X_2 = X_1 \setminus C_2$, con C_2 los cuadrados en oscuro del inciso (c). De manera inductiva se define X_n, para cada $n \in \mathbb{N}$ (para $n = 3$ y $n = 4$ se vizualiza en los incisos (d) y (e), respectivamente). Por la Proposición 1.2.14, $X = \cap_{i=0}^{\infty} X_i$ es un continuo. A este continuo X se le llama* ***Carpeta de Sierpinski****. La figura indica la construcción de dicho continuo.*



(a) Paso 1 (b) Paso 2 (c) Paso 3 (d) Paso 4 (e) Paso 5

Carpeta de Sierpinski

1.2.2. Compacidad de hiperespacios

En esta sección se prueba, entre otras cosas, que los hiperespacios 2^X, $C(X)$ y $F_n(X)$ son continuos, si X es un continuo. Iniciamos con el siguiente resultado que nos proporciona una métrica para el espacio X^n. La prueba, siendo elemental de la teoría de espacios métricos, se deja de ejercicio al lector.

Lema 1.2.16. *Sea (X,d) un espacio métrico. La función $D : X^n \times X^n \longrightarrow [0,\infty)$, definida por*

$$D[(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)] = \text{máx}\{d(x_1,y_1),\ldots,d(x_n,y_n)\},$$

es una métrica para X^n.

El siguiente lema garantiza que la métrica definida en el lema anterior, induce la topología producto.

Lema 1.2.17. *La topología para X^n, inducida por la métrica D del Lema 1.2.16, coincide con la topología producto para X^n.*

Una prueba a este lema se puede encontrar en [4]. Ahora veamos que $F_n(X)$ es compacto y conexo, para ello mostremos el siguiente resultado.

Proposición 1.2.18. *Sea (X,d) un espacio métrico. La función $g : X^n \longrightarrow F_n(X)$, definida por*

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \{x_1,\ldots,x_n\},$$

es continua y suprayectiva.

Demostración. Cada elemento de $F_n(X)$ se puede escribir de la forma $\{x_1,\ldots,x_n\}$, donde por supuesto, puede ser que $x_i = x_j$ para algunos $i,j \in I_n$ e $i \neq j$. Se tiene que $g(x_1,\ldots,x_n) = \{x_1,\ldots,x_n\}$, es decir, g es sobreyectiva. Por el Lema 1.2.17, podemos considerar a X^n con la métrica D definida en 1.2.16. Sea $\epsilon > 0$, se probará que g es uniformemente continua. En efecto, sean $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in X^n$ tales que

$$D((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \text{máx}\{d(x_1,y_1),\ldots,d(x_n,y_n)\} < \epsilon,$$

entonces $d(x_i,y_i) < \epsilon$, para todo $i \in I_n$. Por lo que $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset N(\epsilon,\{y_1,\ldots,y_n\})$, y $\{y_1,\ldots,y_n\} \subset N(\epsilon,\{x_1,\ldots,x_n\})$. Así $H_d(\{x_1,\ldots,x_n\},\{y_1,\ldots,y_n\}) < \epsilon$, es decir,

$$H_d(g(x_1,\ldots,x_n),g(y_1,\ldots,y_n)) < \epsilon,$$

por lo que g es uniformemente continua.

■

Estamos listos para mostrar que el hiperespacio $F_n(X)$ es un continuo.

Teorema 1.2.19. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces el hiperespacio $F_n(X)$ es compacto y conexo.*

Demostración. Por el Teorema de Tychonoff, el espacio X^n es compacto, pues X es compacto. Además, se sabe que X^n es conexo si X es conexo. Por la Proposición 1.2.18, $F_n(X)$ es la imagen continua de un conjunto compacto y conexo, por lo que $F_n(X)$ es compacto y conexo.

■

Corolario 1.2.20. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo, el hiperespacio $F_n(X)$ es un continuo.*

Ahora mostremos que 2^X es un continuo. Primero veamos que es compacto.

Teorema 1.2.21. *Si X es un espacio métrico compacto entonces 2^X es compacto.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.10, el conjunto

$$\mathscr{P} = \{\Gamma(U) : U \in \tau\} \cup \{\Lambda(U) : U \in \tau\}$$

es una subbase para la topología de Vietoris. Sean $\sum$ y Ω dos conjuntos de índices. Puesto que $\mathscr{P}$ es una subbase, elijamos Ł $\subset \mathscr{P}$, digamos $L = \{\Gamma(U_\sigma) : \sigma \in \sum\} \cup \{\Lambda(V_w) : \omega \in \Omega\}$, tal que $2^X = \cup L$. Se sigue que

$$2^X = [\cup_{\sigma\in\sum}\Gamma(U_\sigma)] \cup [\cup_{\omega\in\Omega}\Lambda(V_\omega)].$$

Sea $Y = X \setminus \cup_{\omega\in\Omega}V_\omega$. Si $Y = \emptyset$, $X = \cup_{\omega\in\Omega}V_\omega$ y, por la compacidad de X, existe $\omega_1, \ldots, \omega_n$ tales que $X = \cup_{i=1}^n V_{\omega_i}$. Por lo tanto, $2^X = \cup_{i=1}^n \Lambda(V_{\omega_i})$, es decir, 2^X es compacto. Supongamos $Y \neq \emptyset$. Se sigue que $Y \notin \Lambda(V_\omega)$, para todo $\omega \in \Omega$. Además, notemos que Y es cerrado en X, así $Y \in 2^X$. Existe entonces $\alpha \in \sum$ tal que $Y \in \Gamma(U_\alpha)$, por lo que $Y \subset U_\alpha$. Así, $X \setminus U_\alpha \subset X \setminus Y = \cup_{\omega\in\Omega}V_\omega$. Como $X \setminus U_\alpha$ es un conjunto cerrado no vacío, $X \setminus U_\alpha$ es compacto, por lo que existen $\omega_1, \ldots, \omega_m$ tales que $X \setminus U_\alpha \subset \cup_{i=1}^m V_{\omega_i}$.
Afirmamos que $2^X = \Gamma(U_\alpha) \cup [\cup_{i=1}^m \Lambda(V_{\omega_i})]$. En efecto, sea $A \in 2^X$, entonces $A \subset U_\alpha$ o $A \cap (X \setminus U_\alpha) \neq \emptyset$, es decir, $A \in \Gamma(U_\alpha)$ o $A \cap (\cup_{i=1}^m V_{\omega_i}) \neq \emptyset$. Si $A \cap (\cup_{i=1}^m V_{\omega_i}) \neq \emptyset$, existe $j \in I_m$ tal que $A \cap V_{\omega_j} \neq \emptyset$, así $A \in \cup_{i=1}^n \Lambda(V_{\omega_i})$. Por lo tanto, $A \in \Gamma(U_\alpha)$ o $A \in \cup_{i=1}^n \Lambda(V_{\omega_i})$.

■

Para mostrar la conexidad de 2^X necesitamos el siguiente resultado.

Lema 1.2.22. *El conjunto $F(X) = \cup_{n=1}^\infty F_n(X)$ es denso en 2^X*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Por la compacidad de A, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset \cup_{i=1}^n B(a_i, \epsilon) = N(\{a_1, \ldots, a_n\}, \epsilon)$. Además, $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A \subset N(A, \epsilon)$, por lo que $H(A, \{a_1, \ldots, a_n\}) < \epsilon$. Como $\{a_1, \ldots, a_n\} \in F(X) \cap B_H(A, \epsilon)$, $F(X)$ es denso en 2^X.

■

Teorema 1.2.23. *Si X es un continuo, entonces 2^X es un continuo.*

Demostración. Sea g la función definida en la Proposición 1.2.18, entonces $g(X^n) = F_n(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $F_n(X)$ es conexo y $F_1(X) \subset F_n(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $F(X) = \cup_{n=1}^\infty F_n(X)$ es conexo, pues es la unión de conexos que intersecan a un conexo en común, a saber $F_1(X)$. Así, $\overline{F(X)}$ es conexo. Por el Lema 1.2.22, $2^X = \overline{F(X)}$, por lo que 2^X es conexo. Por el Teorema 1.2.21, 2^X es compacto, por lo tanto, 2^X es un continuo.

■

Mostraremos que $C(X)$ es un continuo. Comenzaremos definiendo el siguiente concepto.

Definición 1.2.24. *Sean (X, d) un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Una $(d, \epsilon)-$**cadena** en X es un subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X tal que $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$, para todo $i \in I_{n-1}$.*

Decimos que una $(d, \epsilon)-$cadena $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X con $p = x_1$ y $q = x_n$, va de p a q. Si no importa el orden, diremos que une a p con q.

Si Z es un subconjunto de X, diremos que Z es $(d, \epsilon)-$**encadenado** si cualesquiera dos puntos de Z pueden ser unidos por una $(d, \epsilon)-$cadena en Z. Si Z es $(d, \epsilon)-$ encadenado para todo $\epsilon > 0$, decimos que Z es **d-bien encadenado**. Veremos en el Corolario 1.2.26, que todo espacio métrico es d-bien encadenado. Para este fin, mostraremos antes el siguiente resultado.

Lema 1.2.25. *Sean (X, d) un espacio métrico, $Z \subset X$ y $\epsilon > 0$. Entonces*

$$\mathscr{C}(Z, \epsilon) = \{x \in X : \textit{existe}\, z \in Z \textit{ tal que existe una}\, (d, \epsilon) - \textit{cadena que une a}\, x\, \textit{con}\, z\},$$

es un subconjunto abierto y cerrado de X.

Demostración. Sea $x \in \mathscr{C}(Z, \epsilon)$, entonces existen $z \in Z$ y $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ tales que $x_1 = x$, $x_n = z$, y $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Veamos que $B(x, \epsilon) \subset \mathscr{C}(Z, \epsilon)$. En efecto, sea $y \in B(x, \epsilon)$, el conjunto $\{y, x_1, \ldots, x_n\}$ es una $(d, \epsilon) - \textit{cadena}$ que une a y con $x_n = z$, es decir, $y \in \mathscr{C}(Z, \epsilon)$. Por lo tanto, $\mathscr{C}(Z, \epsilon)$ es un conjunto abierto. Probemos ahora que $\mathscr{C}(Z, \epsilon)$ es cerrado. Sea $y \in \overline{\mathscr{C}(Z, \epsilon)}$. Se sigue que existe $x \in B(y, \epsilon) \cap \mathscr{C}(Z, \epsilon)$, por lo que $x \in \mathscr{C}(Z, \epsilon)$, y $y \in B(x, \epsilon)$. Así, $y \in \mathscr{C}(Z, \epsilon)$, por lo que $\mathscr{C}(Z, \epsilon)$ es cerrado.

■

Un razonamiento similar al anterior muestra el siguiente resultado.

Corolario 1.2.26. *Todo espacio métrico conexo (X, d) es d-bien encadenado.*

Demostración. Sean X un espacio conexo y $\epsilon > 0$. Dado $x \in X$, consideremos

$$\mathscr{C}(\{x\}, \epsilon) = \{x' \in X : \text{existe una } (d, \epsilon) - \text{cadena que une a } x' \text{ con } x\}.$$

Claramente $x \in \mathscr{C}(\{x\}, \epsilon)$ y así por la conexidad de X y el Lema 1.2.25, $\mathscr{C}(\{x\}, \epsilon) = X$. Concluimos que X es $d-$bien encadenado.

■

Para probar la compacidad de $C(X)$ utilizaremos el siguiente lema.

Lema 1.2.27. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en 2^X que converge a un elemento $A \in 2^X$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$, A_n es $(d, \epsilon_n)-$encadenado, donde $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a cero, entonces $A \in C(X)$.*

Demostración. Supongamos que A no es conexo en 2^X. Tenemos que $A = K \cup L$, con K y L cerrados y ajenos no vacíos de A, y por tanto de X. Por la normalidad de X, existen U y V subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset U$, $L \subset V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Así, $A \in \langle U, V \rangle$, por lo que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$, $A_n \in \langle U, V \rangle$. Sea $\delta = d(\overline{U}, \overline{V}) > 0$, como $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_2$, $\epsilon_n < \delta$. Sean $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$, entonces $A_n \in \langle U, V \rangle$, por lo que $A_n \cap U \neq \emptyset$, $A_n \cap V \neq \emptyset$, $A_n \subset U \cup V$ y A_n es $(d, \epsilon_n)-$encadenado. Sean $x \in A_n \cap U$, y $y \in A_n \cap V$. Se sique que existe una $(d, \epsilon)-$cadena $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset A_n$, con $x_1 = x$ y $x_r = y$. Sea $m = \text{máx}\{i \in I_r : x_i \in U\}$. Notemos que $m \neq r$, pues $x_r = y \in V$, por lo que $x_m \in U$ y $x_{m+1} \notin U$. Ya que $A_n \subset U \cup V$, $x_{m+1} \in V$, pero entonces $\delta = d(\overline{U}, \overline{V}) \leq d(x_m, x_{m+1}) < \epsilon_n < \delta$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $A \in C(X)$.

■

Estamos listos para probar que $C(X)$ es compacto.

Teorema 1.2.28. *Si (X, d) es un espacio métrico compacto, entonces $C(X)$ es compacto.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.21, 2^X es compacto. Mostraremos que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en $C(X)$ que converge a un elemento $A \in 2^X$. En particular, $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$. Consideremos $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, una sucesión de números mayores que cero, que convergen a cero. Puesto que A_n es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Corolario 1.2.26, A_n es $(d, \epsilon_n)-$encadenado. Por el Lema 1.2.27, A es conexo, es decir, $C(X)$ es cerrado.

■

Si un espacio métrico (X, d) es compacto, se puede probar que $C(X)$ es arco conexo. Para probar esta afirmación se necesita un estudio más profundo de algo llamado *arcos ordenados* en $C(X)$. Una demostración al siguiente teorema se puede encontrar en [9, Teorema 14.9].

Teorema 1.2.29. *Si X es un continuo entonces $C(X)$ es arco conexo.*

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.2.30. *Si X es un continuo entonces $C(X)$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.28, $C(X)$ es compacto y, por el Teorema 1.2.29, $C(X)$ es conexo. Por lo tanto, $C(X)$ es un continuo.

■

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.2.28, es el siguiente corolario.

Corolario 1.2.31. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces cada sucesión de subcontinuos de X tiene una subsucesión convergiendo a un subcontinuo de X, por lo que cada sucesión convergente de subcontinuos de X tiene un subcontinuo de X como su límite.*

1.2.3. Productos simétricos

En esta sección se dan algunos resultados que son importantes en los productos simétricos. Las siguientes dos definiciones son de gran importancia para la tesis pues la usaremos en cada sección del siguiente capítulo.

Definición 1.2.32. *Decimos que una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios métricos es un **mapeo** si f es una función continua y sobreyectiva.*

Definición 1.2.33. *Para $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$ y $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ un elemento arbitrario de $F_n(X)$, definimos la función $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$, por*

$$F_n(f)(A) = \{f(a_1), \ldots, f(a_k)\}.$$

*A la función $F_n(f)$ le llamaremos **función inducida por f**.*

Notemos que como subconjuntos, $F_n(f)(A) = f(A)$. Dado un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios métricos, surge de manera natural definir las funciones *inducidas* por f para los hiperespacios 2^X, $C(X)$, $C_n(X)$, etcétera. En la presente tesis estudiaremos el producto simétrico de X, $F_n(X)$, cuando X es un continuo.

El siguiente teorema garantiza la continuidad y sobreyectividad de $F_n(f)$, si f es un mapeo.

Teorema 1.2.34. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo, entonces la función $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un mapeo.*

Demostración. Sea $B = \{b_1, \ldots, b_r\} \in F_n(Y)$. Cómo f es sobreyectiva, para cada $i \in I_r$, existe $a_i \in f^{-1}(b_i)$. Por lo tanto, $A = \{a_1, \ldots, a_r\} \in (F_n(f))^{-1}(B)$. Para probar la continuidad de $F_n(f)$, sean $A = \{a_1, \ldots, a_r\} \in F_n(X)$, con $r \leq n$, y $\epsilon > 0$. Demostraremos que existe $\delta > 0$ tal que $F_n(f)(B_{H_d}(A, \delta)) \subseteq B_{H_{d'}}(F_n(f)(A), \epsilon)$. Definamos $A' = \{a'_1, \ldots, a'_k\} = F_n(f)(A)$, con $k \leq r$. Es decir, queremos mostrar que para todo $B' = \{b'_1, \ldots, b'_s\} \in F_n(f)(B_{H_d}(A, \delta))$, $B' \in B_{H_{d'}}(A', \epsilon)$, es decir, que $H_{d'}(A', B') < \epsilon$. Por el Lema 1.2.11, mostraremos que $A' \subset N_{d'}(B', \epsilon)$ y $B' \subset N_{d'}(A', \epsilon)$.
En efecto, ya que f es continua, para cada $i \in I_r$, existe $\delta_i > 0$ tal que $f(B_d(a_i, \delta_i)) \subset B_{d'}(a'_i, \epsilon)$, para algún $i \in I_k$. Sea $\delta :=$mín$\{\delta_1, \ldots, \delta_r\} > 0$, entonces para cada $i \in I_r$,

$$f(B_d(a_i, \delta)) \subseteq B_{d'}(a'_i, \epsilon). \tag{1}$$

Sea $B' = \{b'_1, \ldots, b'_s\} \in F_n(f)(B_{H_d}(A, \delta))$, entonces existe $B = \{b_1, \ldots, b_m\} \in B_{H_d}(A, \delta)$, con $s \leq m \leq n$, tal que $F_n(f)(B) = B'$, Así, tenemos que $H_d(A, B) < \delta$, es decir,

$$A \subset N_d(B, \delta) \quad y \quad B \subset N_d(A, \delta). \tag{2}$$

Mostremos que $B' \subset N_{d'}(A', \epsilon)$. Sea $i \in I_s$, y supongamos que $d'(b'_i, a'_j) \geq \epsilon$ para todo $j \in I_k$. Así, para algún $\alpha \in I_m$ tal que $f(b_\alpha) = b'_i$, se tiene por (1) que $b_\alpha \notin B_d(a_j, \delta)$ para todo $j \in I_k$, pero esto contradice que $B \subset N_d(A, \delta)$ en (2). Por lo tanto, existe $j \in I_k$ tal que $d'(b'_i, a'_j) < \epsilon$, es decir, $B' \subset N_{d'}(A', \epsilon)$.
Para la otra contención, sea $a' \in A'$. Existe $a_j \in A$, para algún $j \in I_r$, tal que $f(a_j) = a'$. Para esta $j \in I_r$, por (2), existe $\alpha \in I_m$ tal que $d(b_\alpha, a_j) < \delta$, lo cuál implica que $b_\alpha \in B_d(a_j, \delta)$ y, por (1), para algún $i \in I_s$, se tiene que $f(b_\alpha) = b'_i \in B_{d'}(a', \epsilon)$, es decir, $d'(a', b'_i) < \epsilon$, y así $A' \subset N_{d'}(B', \epsilon)$.

■

Denotemos por Top' a la cetegoria de espacios topológicos, entonces la función inducida por f, $F_n(f)$, define un funtor $F_n(f) : Top' \longrightarrow Top'$, con los mapeos como sus morfismos. Esto es lo que garantiza la siguiente proposición.

Proposición 1.2.35. *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Z$, y $h : X \longrightarrow Y$ mapeos, y A un elemento de $F_n(X)$. Tenemos que*
(i) $F_n(f) = Id_{F_n(X)}$ si f es el mapeo identidad ($f = Id_X$).
(ii) $F_n(g \circ h) = F_n(g) \circ F_n(h)$.

Demostración.
(i) $F_n(f)(A) = f(A) = A$
(ii) $F_n(g \circ h)(A) = (g \circ h)(A) = g(h(A)) = g(F_n(h)(A)) = F_n(g)(F_n(h)(A)) = (F_n(g) \circ F_n(h))(A)$.

■

De la proposición anterior tenemos que $F_n(f)$ lleva la identidad en la identidad y que distribuye composiciones.

El siguiente teorema generaliza al Teorema 1.2.34. Una demostración al teorema siguiente se puede encontrar en [9, Teorema 13.3].

Teorema 1.2.36. *Sean X y Y espacios métricos compactos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Definamos $2^f : 2^X \longrightarrow 2^Y$ por $2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$. Sea $C(f) = 2^f|_{C(X)} : C(X) \longrightarrow C(Y)$. Entonces, 2^f (y así $C(f)$) es continua.*

Dada una colección finita, $U_1 \ldots, U_m$, de subconjuntos de un espacio X, $\langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$, denota el siguiente subconjunto de $F_n(X)$:

$$\left\{A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i, \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in I_m\right\}.$$

Se sigue del Teorema 1.2.10, que la familia de todos los subconjuntos de $F_n(X)$ de la forma $\langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$, donde cada U_i es un subconjunto abierto de X, forma una base para la topología del subespacio (inducida por la topología de Vietoris de $CL(X)$) de $F_n(X)$.

Lema 1.2.37. *Sea (X, d) un continuo, entonces la función $h : X \longrightarrow F_1(X)$, definida por $h(x) = \{x\}$, es un homeomorfismo.*

Demostración. Claramente la función h es biyectiva. Afirmamos que $h(U) = \langle U\rangle_1$. En efecto, sea $A \in h(U)$, entonces existe $x \in U$ tal que $A = h(x)$, es decir, $A = \{x\} \subset U$, por lo que $A \in \langle U\rangle_1$. Sea $A \in \langle U\rangle_1$, entonces $A \subset U$ y $|A| = 1$, entonces existe $x \in X$ tal que $\{x\} = A \subset U$, por lo que $x \in U$ y $h(x) = A$. Es decir, $A \in h(U)$. Por lo tanto, $h(U) = \langle U\rangle_1$. Si U es un subconjunto abierto de X, entonces por el comentario antes de este lema se tiene que $\langle U\rangle_1$ es un abierto básico de $F_1(X)$, por lo que $\langle U\rangle_1$ es un abierto en $F_1(X)$. Por lo tanto, h es una función abierta.
Mostremos que h es continua. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Queremos probar que existe $\delta > 0$ tal que $h(B_d(x, \delta)) \subset B_{H_d}(h(x), \epsilon)$. En efecto, sean $\delta = \epsilon$ y $A \in h(B_d(x, \delta)) = \langle B_d(x, \delta)\rangle_1$. Así, $|A| = 1$, digamos $A = \{y\}$, para algún $y \in X$. Como $\{y\} \subset B_d(x, \delta) = B_d(x, \epsilon)$, $d(x, y) < \epsilon$, por lo que $H_d(\{x\}, \{y\}) < \epsilon$. Por lo tanto, $\{y\} = A \in B_{H_d}(\{x\}, \epsilon) = B_{H_d}(h(x), \epsilon)$. Con esto h es biyectiva, abierta y continua, lo cual hace que h sea un homeomorfismo.

■

Una prueba al siguiente teorema se puede encontrar en [11, Lema 3].

Teorema 1.2.38. *Si (X, d) es un continuo, $n \geq 2$, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$, y $\epsilon > 0$ son tales que $d(x_i, x_j) < \epsilon$, para cada $x_i, x_j \in \{x_1, \ldots, x_r\}$ y $x_i \neq x_j$, entonces*

$$F_n(X) \setminus \langle B_d(x_1, \epsilon), \ldots, B_d(x_r, \epsilon)\rangle_n$$

es conexo.

El siguiente corolario garantiza que para $n \geq 2$, el complemento de cualquier elemento $A \in F_n(X)$ es conexo.

Corolario 1.2.39. *Sea (X, d) un continuo. Si $n \geq 2$ y $p = \{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$, entonces $F_n(X) \setminus \{p\}$ es conexo.*

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \text{mín}\,\{d(x_i, x_j) : x_i, x_j \in \{x_1, \ldots, x_r\} \text{ y } x_i \neq x_j\}$. Notemos que $\{x_1, \ldots, x_r\} = \cap_{l=N}^{\infty}\langle B(x_1, l), \ldots, B(x_r, l)\rangle_n$. Por el Teorema 1.2.38 y, para cada $l \geq N$, $F_n(X) \setminus \langle B(x_1, \frac{1}{l}), \ldots, B(x_r, \frac{1}{l})\rangle_n$ es conexo. Así, $F_n(X) \setminus \{x_1, \ldots, x_r\} = F_n(X) \setminus \cap_{l=N}^{\infty}\langle B(x_1, \frac{1}{l}), \ldots, B(x_r, \frac{1}{l})\rangle_n = \cup_{l=N}^{\infty} F_n(X) \setminus \langle B(x_1, \frac{1}{l}), \ldots, B(x_r, \frac{1}{l})\rangle_n$, y es conexo al ser unión de conjuntos conexos con intersección no vacía.

■

1.3. Conexidad en espacios

Esta sección está dividida en dos subsecciones donde se dan definiciones y resultados importantes referentes a la conexidad de espacios topológicos.

Definición 1.3.1. *Sean X un espacio topológico, y U y V subconjuntos de X. Decimos que U y V están* ***separados*** *si*

$$\overline{U} \cap V = \emptyset = U \cap \overline{V}.$$

Diremos que U y V forman una ***separación*** *de X, y lo denotaremos por $X = U|V$, si $X = U \cup V$, $U \neq \emptyset \neq V$, y U y V están separados.*

Recordemos que un espacio topológico X es conexo si no existen subconjuntos abiertos U y V en X satisfaciendo que $X = U \cup V$, $U \neq \emptyset \neq V$, y $U \cap V = \emptyset$. El siguiente lema establece una equivalencia muy útil de la conexidad.

Lema 1.3.2. *Si X es un espacio topológico, y A es un subconjunto de X, entonces A es no conexo si y sólo si existe una separación de A.*

Demostración. Supongamos que A no es conexo, entonces existen U y V subconjuntos abiertos en A tales que $A = U \cup V$, $U \neq \emptyset \neq V$, y $U \cap V = \emptyset$. Mostremos que $\overline{U} \cap V = \emptyset = U \cap \overline{V}$. En efecto, supongamos que existe $x \in \overline{U} \cap V$. Como V es abierto de A que contiene a x, y $x \in \overline{U}$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual es falso. Así, $\overline{U} \cap V = \emptyset$. De manera similar se prueba que $U \cap \overline{V} = \emptyset$. Por lo tanto, U y V forman una separación de A.
Para el regreso, supongamos que existe una separación de A. Se sigue que existen U y V subconjuntos de A, tales que $A = U \cup V$, $U, V \neq \emptyset$, y $\overline{U} \cap V = \emptyset = U \cap \overline{V}$. Ya que $U \cap V \subset \overline{U} \cap V = \emptyset$, tenemos que $U \cap V = \emptyset$. Mostremos que U y V son cerrados en A. En efecto, $\overline{U} = \overline{U} \cap A = \overline{U} \cap (U \cup V) = (\overline{U} \cap U) \cup (\overline{U} \cap V) = U \cup \emptyset = U$. Así, U es cerrado en A. De manera similar se prueba que V es cerrado en A. Por lo tanto, A no es conexo.

■

El siguiente lema garantiza que una componente de la preimagen de un continuo, es un continuo.

Lema 1.3.3. *Si X y Y son espacios métricos compactos, $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo, B un subcontinuo de Y, y A una componente de $f^{-1}(B)$, entonces A es un subcontinuo de X.*

Demostración. Por definición A es conexo en X. Como B es un subcontinuo de Y, B es un cerrado en Y. Como f es continua, $f^{-1}(B)$ es un cerrado en X. Como A es cerrado en un cerrado, A es cerrado en X, el cual es compacto, es decir, A es compacto en X. Como f es sobreyectiva $A \neq \emptyset$, por lo tanto, A es un subcontinuo de X.

■

1.3.1. Teoremas de golpes en la frontera

En esta sección demostraremos teoremas importantes que serán útiles en el siguiente capítulo.

Lema 1.3.4. *Sean (X, d) un espacio métrico, y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en 2^X que converge a $A \in 2^X$. Se tiene que, $p \in A$ si y sólo si existe $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en X que converge a p y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$.*

Demostración. Supongamos que $p \in A$. Sea $\epsilon_1 > 0$ tal que $H_d(A_1, A) < \epsilon_1$. Por el Lema 1.2.11, $A \subset N(A_1, \epsilon_1)$. Como $p \in A$, existe $a_1 \in A_1$ tal que $d(p, a_1) < \epsilon_1$. Así, para $n \in \mathbb{N}$, sea $\epsilon_n > 0$ y $a_n \in A_n$ tales que $d(p, a_n) < \epsilon_n$. Notemos que como la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a A, podemos pedir que la sucesión $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ converja a cero. Sea $\epsilon > 0$. Como la sucesión$(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n > N$, $0 < \epsilon_n < \epsilon$. Por lo tanto, si $n > N$, $d(p, a_n) < \epsilon_n < \epsilon$. Hemos probado que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a p, y $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Para el regreso, sea $\epsilon > 0$. Como la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, p) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq N$. De la misma manera, como la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a A, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$, para cada $n \geq K$. Sean $M = \text{máx}\{N, K\}$ y $r \geq M$. Como $H_d(A_r, A) < \frac{\epsilon}{2}$, $A_r \subset N(A, \frac{\epsilon}{2})$. Así, para $a_r \in A_r$, existe $x_r \in A$ tal que $d(a_r, x_r) < \frac{\epsilon}{2}$. Se sique que si $n \geq M$, $d(p, x_n) \leq d(p, a_n) + d(a_n, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Hemos probado que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A, converge a p. Como $A \in 2^X$, A es cerrado en X. Por lo tanto, $p \in A$.

■

El siguiente teorema se conoce como el **Teorema del cable cortado**.

Teorema 1.3.5. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y A, B subconjuntos cerrados no vacíos de X. Si ningún subconjunto conexo (o quivalentemente, ninguna componente) de X intersecta a A y B, entonces $X = X_1 \cup X_2$, con X_1 y X_2 subconjuntos cerrados y ajenos tales que $A \subset X_1$, y $B \subset X_2$.*

Demostración. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe K_n una $(d, \frac{1}{2^n})-$cadena que une un punto $a_n \in A$ con un punto $b_n \in B$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \in 2^X$. Por el Teorema 1.2.21, 2^X es compacto, por lo que podemos suponer que la sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un elemento $K \in 2^X$. Además, como la sucesión $(1/2^n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, por el Lema 1.2.27, $K \in C(X)$. Por otra parte, por la compacidad de X podemos suponer que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $a \in A$. De manera similar la sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $b \in B$. Como $a_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Lema 1.3.4, $a \in K \cap A$. De forma similar $b \in K \cap B$, pero esto implica que K es un conexo que interseca a A y a B, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathscr{C}(A, \epsilon) \cap B = \emptyset$, con $\mathscr{C}(A, \epsilon)$ como se definió en 1.2.25. Definiendo $X_1 = \mathscr{C}(A, \epsilon)$, y $X_2 = X \setminus X_1$, se tiene el resultado.

■

Ahora veamos una serie de teoremas que se conocen como **Teoremas de golpes en la frontera**. El primero de ellos es el siguiente teorema.

Teorema 1.3.6. *Sean X un continuo y U un subconjunto propio, abierto y no vacío de X. Sea K una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap fr_X(U) \neq \emptyset$, es decir, $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $K \cap \text{fr}_X(U) = \emptyset$. Notemos que K y $\text{fr}_X(U)$ son cerrados en $\overline{U}$, y ninguna componente de $\overline{U}$ interseca a ambos. Por el Teorema 1.3.5, $\overline{U} = M_1 \cup M_2$, con M_1 y M_2 cerrados ajenos de $\overline{U}$ tales que $K \subset M_1$ y $\text{fr}_X(U) \subset M_2$. Sea $M_3 = M_2 \cup (X \setminus U)$. Notemos que M_3 es cerrado, $X = M_1 \cup M_3$, y que M_1, y M_3 son no vacíos. Además, $M_1 \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cup (X \setminus U)) = M_1 \cap (X \setminus U) \subset \overline{U} \cap (X \setminus U) = \text{fr}_X(U) \subset M_2$. Se sigue que $M_1 \cap M_3 = \emptyset$. Esto contradice la conexidad de X.

■

El siguiente resultado es una consecuencia importante del teorema anterior.

Lema 1.3.7. *Si X es un continuo no degenerado, entonces X contiene un subcontinuo propio no degenerado. Mas aún, si A es un subcontinuo propio de X, y U es un abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subsetneq B \subset U$.*

Demostración. Mostremos primero la segunda parte. Sean X un continuo, A un subcontinuo propio de X, y U un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$. Por la normalidad de X existe un subconjunto abierto V de X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Sea B la componente de $\overline{V}$ que contiene a A, entonces B es un subcontinuo de X tal que $A \subset B \subset \overline{V} \subset U$. Por el Teorema 1.3.6, $B \cap \mathrm{fr}_X(V) \neq \emptyset$. Así, $B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$. Sea $b \in B \cap (X \setminus V)$. Puesto que $A \subset V$, $X \setminus V \subset X \setminus A$, por lo que $b \notin A$, es decir, $A \subsetneq B$.
Para la primera parte, sean $p, q \in X$, $p \neq q$, y U un subconjunto abierto de X tal que $A := \{p\} \subset X \setminus \{q\} = U$. Por lo anterior, existe B un subcontinuo de X tal que $A \subsetneq B \subset X \setminus \{q\}$, con lo cual B es no degenerado y propio de X.

■

El siguiente teorema es conocido como el teorema de golpes en la frontera II.

Teorema 1.3.8. *Sea X un continuo y E un subconjunto propio no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $cl_X(K) \cap fr_X(E) \neq \emptyset$ o, equivalentemente $cl_X(K) \cap cl_X(X \setminus E) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que $\mathrm{cl}_X(K) \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus E) = \emptyset$. Como $\mathrm{cl}_X(X \setminus E) \neq \emptyset$ (y $\mathrm{cl}_X(K) \neq \emptyset$) se tiene que $\mathrm{cl}_X(K)$ es un subcontinuo propio de X. Sea $U = X \setminus \mathrm{cl}_X(X \setminus E)$. Tenemos que $\mathrm{cl}_X(K) \subset U$. Por el Lema 1.3.7, existe un subcontinuo B de X tal que $K \subset \mathrm{cl}_X(K) \subsetneq B \subset U \subset E$. Así, $K \subsetneq B \subset E$. Esto contradice la maximalidad de K. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(K) \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus E) \neq \emptyset$.

■

El siguiente corolario es una observación útil a los teoremas anteriores.

Corolario 1.3.9. *Sean X, E y K como en el Teorema 1.3.8. Se tiene que:*
(i) Si E es abierto entonces $cl_X(K) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$.
(ii) Si E es cerrado entonces $K \cap cl_X(X \setminus E) \neq \emptyset$.

Demostración. (i) se sigue del Teorema 1.3.8, y (ii) se sigue del Teorema 1.3.6.

■

1.3.2. Continuos de Peano

Esta sección es una introducción a los continuos de Peano y está basado en el capítulo VIII de [13].

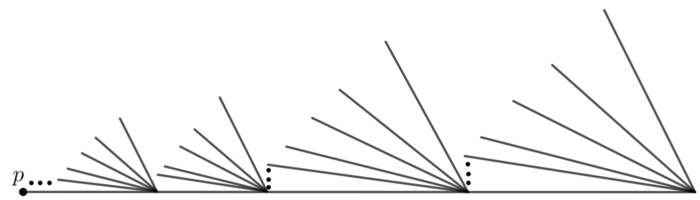
Definición 1.3.10. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Decimos que X es **localmente conexo en p** si para toda vecindad U de p, existe V un subconjunto abierto y conexo de X tal que $p \in V \subset U$. Decimos que X es **localmente conexo** si lo es en cada punto de X.*

Definición 1.3.11. *Un espacio métrico X es llamado un **espacio de Peano** si es localmente conexo. Un **continuo de Peano** es un continuo localmente conexo.*

Como veremos en el capítulo siguiente, en algunas clases de funciones la hipótesis de que un continuo sea de Peano será de gran importancia.

Definición 1.3.12. *Sean X un espacio topológico, y $p \in X$. Decimos que X es **conexo en pequeño** (cik) **en p** si para cada N vecindad abierta de p, existe una vecindad conexa U de p tal que $p \in U \subset N$. Decimos que X es **cik** si lo es en cada punto de X.*

Notemos que un espacio localmente conexo en p implica que es conexo en pequeño en p. Sin embargo, el recíproco no es cierto. La siguiente figura muestra un continuo X que es cik en p, pero que no es localmente conexo en p.



El siguiente teorema establece una equivalencia importante entre conexidad local y conexidad en pequeño.

Teorema 1.3.13. *Para todo espacio métrico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(1) X es localmente conexo,
(2) Las componentes de subconjuntos abiertos de X son abiertos en X,
(3) X es cik en todo punto.

Demostración. (1) implica (3) es inmediata de las definiciones. Mostremos (3) implica (2). Para esto, sean U un subconjunto abierto de X, C una componente de U, y x un punto en C. Como X es cik en x y U es una vecindad abierta de x, entonces existe una vecindad conexa V de x tal que $x \in V \subset U$. Como C es la componente que tiene a x, entonces $V \subset C$. Así, C es un abierto de X. Probemos que (2) implica (1). En efecto, sean $x \in X$, U un abierto en X que contiene a x, y V la componente de x en U. Por hipótesis, V es abierto en X. Por lo tanto, X es localmente conexo en x, y así es localmente conexo en todo punto. ■

Los siguientes resultados son importantes en el estudio de continuos de Peano.

Definición 1.3.14. *Sea X un espacio métrico. Decimos que un subconjunto no vacío Y de X tiene la **propiedad S** si para todo $\epsilon > 0$ existen $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos conexos no vacíos de Y tales que $Y = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, y diám$_X(A_i) < \epsilon$, para todo $i \in I_n$.*

Teorema 1.3.15. *Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad S, entonces (X, d) es un espacio de Peano.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.13, mostremos que X es cik. Sean $p \in X$, y $\epsilon > 0$. Como X tiene la propiedad S, existen $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos conexos no vacíos de X tal que $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, y diám$_X(A_i) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $G = \bigcup\{A_i : p \in \overline{A_i}\}$. Notemos que G es conexo, que el diám$_X(G) < \epsilon$, y que $p \notin \overline{X \setminus G}$. Ya que, $\overline{X \setminus G} = X \setminus \mathrm{int}_X(G)$, $p \in \mathrm{int}_X(G)$. Se sigue que G es una vecindad de p. Por lo tanto, X es cik en p.

■

El siguiente resultado muestra que, si además X es compacto, entonces los dos conceptos son equivalentes.

Teorema 1.3.16. *Un espacio métrico compacto no vacío es de Peano si y sólo si X tiene la propiedad S. En particular, un continuo X es de Peano si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, X es una unión finita de subcontinuos de diámetro menor que ϵ.*

Demostración. Si X tiene la propiedad S, por el Teorema 1.3.15, X es de Peano. Para la otra implicación, sea $\epsilon > 0$. Como X es localmente conexo, para cada $x \in X$, existe un subconjunto abierto y conexo V_x de X tal que $x \in V_x$, y $\text{diám}_X(V_x) < \epsilon$. Así, la familia $\{V_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X que es compacto, por lo que existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \cup_{i=1}^n V_{x_i}$, es decir, X tiene la propiedad S.
Para la segunda parte, consideremos $\overline{V}_{x_i}$ los cuales son subcontinuos de X.

■

Teorema 1.3.17. *Si (X, d) es un espacio métrico, y Y es un subconjunto de X tal que Y tiene la propiedad S, entonces para cualquier subconjunto Z tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, Z tiene la propiedad S. Por tanto, es de Peano.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, entonces existen $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos conexos no vacíos de Y tal que $Y = \cup_{i=1}^n A_i$, y $\text{diám}_Y(A_i) < \epsilon$, para cada $i \in I_n$. Sea $B_i = Z \cap \text{cl}_Y(A_i)$. Notemos que para cada $i \in I_n$, $B_i = \text{cl}_Z(A_i)$. Así, cada B_i es conexo, y $\text{diám}_Y(B_i) < \epsilon$. Además, $\cup_{i=1}^n B_i = Z \cap (\cup_{i=1}^n \text{cl}_Y(A_i)) = Z \cap Y = Z$.

■

Definición 1.3.18. *Sean (X, d) un espacio métrico, y $\epsilon > 0$. Una **$S(\epsilon)$-cadena** es una colección finita y no vacía $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ de subconjuntos de X tales que:*
(1) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$, para cada $i \in I_{n-1}$,
(2) L_i es conexo para cada $i \in I_n$,
(3) $\text{diám}_X(L_i) < (\epsilon \cdot 2^{-i})$, para cada $i \in I_n$.

Si $\mathcal{L}$ es una $S(\epsilon)-$cadena, entonces cada $L_i \in \mathcal{L}$ es llamado **eslabón** de $\mathcal{L}$. Si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, decimos que $\mathcal{L}$ es una $S(\epsilon)-$cadena de x a y. Si A es un subconjunto de X y ϵ es un número mayor que cero, definimos

$$S(A, \epsilon) = \{y \in X : \text{existe}\, x \in A \,\text{tal que existe una}\, S(\epsilon) - \text{cadena de}\, x \,\text{a}\, y\}.$$

Lema 1.3.19. *Si (X, d) es un espacio métrico, A un subconjunto no vacío de X, y $\epsilon > 0$, entonces:*
(1) $\text{diám}(S(A, \epsilon)) \leq \text{diám}_X(A) + 2\epsilon$,
(2) Si A es conexo, $S(A, \epsilon)$ es conexo,
(3) Si (X, d) tiene la propiedad S, $S(A, \epsilon)$ es abierto en X.

Demostración. (1) Sean $x, y \in S(A, \epsilon)$, existen entonces $a, b \in A$ y L_x y L_y $S(\epsilon)-$cadenas de a a x, y de b a y, respectivamente. Se sigue que, $d(x, a) \leq \sum_{L \in L_x} \text{diám}_X(L) < \sum_{i=1}^{\infty} (\epsilon \cdot 2^{-i}) = \epsilon$. De manera similar, $d(b, y) < \epsilon$. Por lo tanto, $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq \text{diám}_X(A) + 2\epsilon$.
(2) Notemos que toda $S(\epsilon)-$cadena es conexa. Además, $S(A, \epsilon)$ es unión de $S(\epsilon)-$ cadenas, todas intersecan a A. Por la conexidad de A, $S(A, \epsilon)$ es conexo.
(3) Sea $x \in S(A, \epsilon)$, existen $a \in A$, y $L = \{L_1, \ldots, L_n\}$ una $S(\epsilon)-$cadena de a a x. Como X tiene la propiedad S, por el Teorema 1.3.15, X es de Peano. Se sigue que existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $x \in U$, y $\text{diám}_X(U) < (\epsilon \cdot 2^{-(n+1)})$. Sea $L' = \{L_1, \ldots, L_n, L_{n+1} = U\}$. Como $x \in U \cap L_n$, L' es una $S(\epsilon)-$ cadena de a a cualquier punto de U, es decir, $U \subset S(A, \epsilon)$, por lo que $S(A, \epsilon)$ es abierto.

■

El siguiente resultado muestra cuándo los conjuntos de la forma $S(A, \epsilon)$ tienen la propiedad S. Una demostración a este lema se puede encontrar en [13, Proposición 8.7].

Lema 1.3.20. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si X tiene la propiedad S entonces para cada subconjunto no vacío A de X y cada $\epsilon > 0$, $S(A,\epsilon)$ tiene la propiedad S.*

Teorema 1.3.21. *Si (X,d) es un espacio métrico con la propiedad S, entonces para todo $\epsilon > 0$, X es la unión finita de conexos, cada uno de los cuales tiene la propiedad S, y de diámetro menor que ϵ; más aún, dichos conexos se pueden elegir abiertos o cerrados en X.*

Demostración. Como X tiene la propiedad S, $X = \cup_{i=1}^{n} A_i$, con A_i conexo y $\text{diám}_X(A_i) < \epsilon$, para cada $i \in I_n$. Sean $B_i = S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$. Por (2) y (3) del Teorema 1.3.19, B_i es conexo, y $\text{diám}(B_i) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon$, respectivamente. Por (3) del mismo Teorema, B_i es abierto. Además, por el Lema 1.3.20, B_i tiene la propiedad S, para cada $i \in I_n$. Para tomar cerrados a todos los conexos, basta considerar $\text{cl}_X(B_i)$, para todo $i \in I_n$.

■

Lema 1.3.22. *Si Y es un continuo de peano, y B es un subcontinuo de Y, entonces existe una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de Peano de Y tal que $\cap_{i=1}^{\infty} B_i = B$ y, para cada i, el $int_Y(B_i)$ contiene a B.*

Demostración. Fijemos un entero positivo i. Definamos B_i como sigue. Por el Teorema 1.3.16, Y tiene la propiedad S. Por el Teorema 1.3.21, existen subconjuntos abiertos y conexos $U_1, \ldots, U_n$ de Y tal que para cada $k \in I_n$, U_k tiene la propiedad S, $\text{diám}_Y(U_k) < 1 \setminus i$, $U_k \cap B \neq \emptyset$, y $B \subset \cup_{i=1}^{n} U_k$.
Sea $B_i = \cup_{i=1}^{n} \overline{U}_k$. Teniendo así definido B_i para cada i, se tiene que la sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene las propiedades descritas (el hecho de que B_i es de peano se sigue del Teorema 1.3.17, sabiendo que cada $\overline{U}_k$ es de Peano).

■

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del lema anterior.

Corolario 1.3.23. *Sean X un espacio localmente conexo y $p \in X$, existe entonces una sucesión de subcontinuos de X, $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que $\cap_{i=i}^{\infty} B_i = \{p\}$, y para cada i, $B_{i+1} \subset B_i$ y $p \in int_X(B_i)$.*

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado que será útil más adelante, una demostración se puede encontrar en [14, Pág. 50, (4.15)].

Lema 1.3.24. *Si Y es un continuo localmente conexo, $y \in Y$ es un punto tal que $Y \setminus \{y\}$ es conexo, entonces existe un subconjunto A de Y, que es lo suficientemente pequeño tal que es abierto, conexo, $y \in A$ y $Y \setminus A$ es conexo.*

Capítulo 2

Funciones inducidas en los productos simétricos de continuos

El estudio de este capítulo está basado principalmente en los artículos [1], [2], [3] y [5].

En lo que sigue de la tesis, salvo que se indique lo contrario, las letras X y Y denotarán siempre continuos y supondremos que tienen métrica d y d', respectivamente.

Dada una clase de funciones $\mathcal{M}$, el objetivo principal de cada sección es contestar a las siguientes preguntas:

(i) Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo y $f \in \mathcal{M}$, ¿Para qué natural n se tiene que el mapeo $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ pertenece a $\mathcal{M}$?

(ii) Si n es un número natural tal que $n \geq 2$, $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un mapeo y $F_n(f) \in \mathcal{M}$, ¿La función $f : X \longrightarrow Y$ pertenece a $\mathcal{M}$?

En algunos casos, estas preguntas se contestan de manera directa a través de resultados que se ponen y demuestran en cada sección, o se exhibe un ejemplo para probar que alguno de los mapeos no pertenece a la clase de funciones que se estudia. Cuado pedimos que Y sea localmente conexo, algunas clases de funciones se preservan al pasar a la función inducida.

2.1. Homeomorfismos

Iniciamos el estudio de las funciones inducidas en los productos simétricos, con la clase de función que es más común preguntarnos, esta es, la clase homeomorfismos.

Definición 2.1.1. *Decimos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo si f es continua, biyectiva y f^{-1} es continua.*

Veamos algunos resultados previos al teorema principal de esta sección.

Lema 2.1.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f : X \longrightarrow Y$ es sobreyectiva si y sólo si la función $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es sobreyectiva.*

Demostración. Ya probamos en el Teorema 1.2.34 que $F_n(f)$ es sobreyectiva si f es sobreyectiva. Para la otra implicación, sea $y \in Y$, entonces $\{y\} \in F_n(Y)$. De manera que si $F_n(f)$ es sobreyectiva, entonces $F_n(f)^{-1}(\{y\})$ es no vacío. Sea $A \in F_n(X)$ tal que $F_n(f)(A) = \{y\}$, entonces $f(A) = \{y\}$, por lo que existe $x \in A \subset X$ tal que $f(x) = y$, es decir, f es sobreyectiva.

■

Mostremos el análogo para funciones inyectivas.

Lema 2.1.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva si y sólo si la función $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que f es inyectiva. Sean A y B dos elementos distintos en $F_n(X)$. Como $A \neq B$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $p \in X$ con $p \in A$ y $p \notin B$, entonces $f(p) \in f(A)$, pero $f(p) \notin f(B)$, pues f es inyectiva. Así, $f(A) \neq f(B)$, es decir, $F_n(f)(A) \neq F_n(f)(B)$, por lo que $F_n(f)$ es inyectiva. Supongamos que $F_n(f)$ es inyectiva. Sean $p, q \in X$, con $p \neq q$, entonces $\{p\} \neq \{q\}$, por lo que $F_n(f)(\{p\}) \neq F_n(f)(\{q\})$, es decir, $f(p) \neq f(q)$; por lo que f es inyectiva.

■

Con lo anterior tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.1.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f : X \longrightarrow Y$ es biyectiva si y sólo si $F_n(f)$ es biyectiva.*

Del Teorema 1.2.34 sabemos que la continuidad de la función f implica la continuidad de la función $F_n(f)$. Veamos que el recíproco también es cierto.

Lema 2.1.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es continua, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, $p \in X$, y $\epsilon > 0$. Supongamos que $F_n(f)$ es continua. Mostremos que existe un número $\delta > 0$ tal que $f(B_d(p, \delta)) \subset B_{d'}(f(p), \epsilon)$. Como $\{p\} \in F_n(X)$, y $F_n(f)$ es continua, existe $\delta_0 > 0$ tal que $F_n(f)(B_{H_d}(\{p\}, \delta_0)) \subset B_{H_{d'}}(\{f(p)\}, \epsilon)$. Elijamos $\delta = \delta_0$, y sea $y \in f(B_d(p, \delta))$. Se sigue que existe $q \in B_d(p, \delta)$ tal que $f(q) = y$ y, $d(q, p) < \delta$; es decir, $\{q\} \in B_{H_d}(\{p\}, \delta)$, por lo que $F_n(f)(\{q\}) = \{f(q)\} \in B_{H_{d'}}(\{f(p)\}, \epsilon)$. Así, $d'(f(p), f(q)) < \epsilon$, es decir, $d'(f(p), y) < \epsilon$, por lo tanto, $y \in B_{d'}(f(p), \epsilon)$.

■

Corolario 2.1.6. *Si $n \geq 2$ entonces $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo si y sólo si $F_n(f)$ es un mapeo.*

Demostración. La sobreyectividad en ambas direcciones se obtiene del Corolario 2.1.4, la continuidad de $F_n(f)$ se sigue del Teorema 1.2.34 y la continuidad de f del lema anterior.

■

Mostremos el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.1.7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo si y sólo si la función $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que f es un homeomorfismo. Por el Corolario 2.1.4, $F_n(f)$ es biyectiva y, por el Teorema 1.2.34, $F_n(f)$ es continua. Además, notemos que la función inversa de $F_n(f)$ es $F_n(f)^{-1} = F_n(f^{-1}) : F_n(Y) \longrightarrow F_n(X)$. Nuevamente, como f^{-1} es continua, por el Teorema 1.2.34, $F_n(f^{-1})$ es continua. Por lo tanto, $F_n(f)$ es un homeomorfismo. Supongamos ahora que $F_n(f)$ es un homeomorfismo. Por el Corolario 2.1.4, f es biyectiva y, por el Lema 2.1.5, f es continua. Como la función inversa $F_n(f)^{-1} = F_n(f^{-1})$ es continua, entonces la inversa de f, f^{-1}, es continua. Por lo tanto, f es un homeomorfismo.

■

2.2. Mapeo simple

La clase de mapeos que estudiamos en esta sección son, de manera intuitiva, mapeos *casi inyectivos*, pues las preimagenes de conjuntos unipuntuales tienen a lo más dos elementos.

Definición 2.2.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **simple** si $f^{-1}(y)$ tiene a lo más dos elementos para toda $y \in Y$.*

El Ejemplo 2.2.4 muestra un ejemplo de un mapeo simple y de uno que no lo es.

El siguiente resultado muesta una condición suficiente para que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ sea un homeomorfismo.

Proposición 2.2.2. *Si $n \geq 2$, y $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un mapeo simple, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Mostraremos que f es inyectiva, pues de serlo, entonces $Id_X = f^{-1} \circ f$ y por el Lema 2.1.5, f es continua y de la igualdad anterior se tendría que f^{-1} es continua, esto implicaría que f es un homeomorfismo. Razonando por contradicción, supongamos que f no es inyectiva. Sean $y \in Y$, $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, y tal que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Se sigue que, $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\} \in F_n(f)^{-1}(\{y\})$, contradiciendo que $F_n(f)$ es un mapeo simple, por lo tanto, f es inyectiva, y así un homeomorfismo.

■

El teorema importante de esta sección se obtiene de manera inmediata de la proposición anterior.

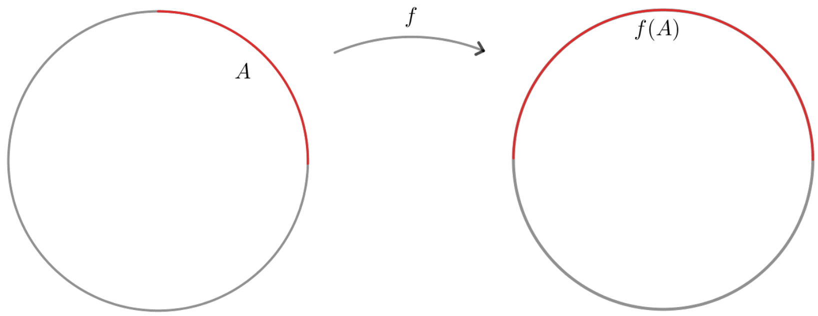
Teorema 2.2.3. *Si $F_n(f)$ es un mapeo simple y $n \geq 2$, entonces f también lo es.*

Demostración. Si $F_n(f)$ es un mapeo simple entonces, por la Proposición 2.2.2, f es un homeomorfismo; por lo tanto, f es un mapeo simple.

■

El recíproco del teorema anterior no se cumple ya que existe un mapeo simple f tal que $F_n(f)$ no lo es, para cada $n \geq 2$. Éste es el siguiente:

Ejemplo 2.2.4. *Sea $f : S^1 \longrightarrow S^1$ el mapeo definido por $z \mapsto z^2$. La siguiente figura describe el comportamiento de la función f sobre un subconjunto A de X.*
Notemos que f es un mapeo simple; sin embargo, afirmamos que para cada $n \geq 2$, $F_n(f)$ no es un mapeo simple. En efecto, sean $z, z_1, z_2 \in S^1$ con $z_1 \neq z_2$ y tales que $f(z_1) = z = f(z_2)$. Notemos que $\{z_1\}, \{z_2\}, \{z_1, z_2\} \in F_n(f)^{-1}(\{z\})$, por lo que $F_n(f)$ no es un mapeo simple para todo $n \geq 2$.



2.3. Mapeo abierto

La clase de funciones abiertas es de gran importancia al estudiar propiedades topológicas, pues esta clase se define en terminos de abiertos de un espacio topológico.

Definición 2.3.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es* ***abierto*** *si $f(U)$ es abierto en Y para cada subconjunto abierto U de X.*

El mapeo f descrito en el Ejemplo 2.3.7 es un ejemplo de un mapeo abierto. Veremos en ese mismo ejemplo que $F_n(f)$ no es un mapeo abierto para $n \geq 3$.

El primer resultado de esta sección nos ayudará a probar que si el mapeo inducido $F_n(f)$ es abierto, entonces f también lo es.

Lema 2.3.2. *Sean X un continuo, $n, r \in \mathbb{N}$ tales que $r \leq n$, y sean $U_1, \ldots, U_r$ subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup\langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$ es un subconjunto abierto de X.*

Demostración. Sea $x \in \bigcup\langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$. Se sigue que existe $A_x \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$ tal que $x \in A_x$. Definamos $J = \{j \in I_r : x \in U_j\}$. Como $x \in U_1 \cup \cdots \cup U_r$, $J \neq \emptyset$. Afirmamos que $\cap_{j\in J} U_j \subset \bigcup\langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$. En efecto, sean $y \in \cap_{j\in J} U_j$, y $A = \{y\} \cup (A_x \setminus \{x\})$. Es claro que $A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$. Además, para $k \in I_r$, $A \cap U_k = (\{y\} \cap U_k) \cup [(A_x \setminus \{x\}) \cap U_k]$, de manera que si $\{y\} \cap U_k = \emptyset$, entonces $k \notin J$, por lo que $x \notin U_k$. Así que, $(A_x \setminus \{x\}) \cap U_k \neq \emptyset$, es decir, $A \cap U_k \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$. Así, $y \in \bigcup\langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$. Como $\cap_{j\in J} U_j$ es un subconjunto abierto de X que contiene a x, concluimos que $\bigcup\langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$ es un subconjunto abierto de X.

■

El siguiente corolario garantiza que la unión como subconjuntos de X de los elementos de un abierto en $F_n(X)$, es un abierto en X.

Corolario 2.3.3. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$, y $\mathfrak{C}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$, entonces $\bigcup\mathfrak{C}$ es un subconjunto abierto de X.*

Demostración. Sea $x \in \bigcup\mathfrak{C}$, entonces existe $A_x \in \mathfrak{C}$ tal que $x \in A_x$. Como $\mathfrak{C}$ es un abierto en $F_n(X)$, existen $U_1, \ldots, U_r$ subconjuntos abiertos de X tal que $A_x \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n \subset \mathfrak{C}$. Por el Lema 2.3.2, $\bigcup\langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$ es un subconjunto abierto de X, y claramente $x \in \bigcup\langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n \subset \bigcup\mathfrak{C}$, por lo tanto, $\bigcup\mathfrak{C}$ es un subconjunto abierto de X.

■

El primer teorema importante de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.3.4. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es un mapeo abierto entonces f es un mapeo abierto.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X. Como consecuencia a los teoremas 1.2.10 y 1.2.12, se tiene que $\langle U \rangle_n$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Por lo que $F_n(f)(\langle U \rangle_n)$ es un subconjunto abierto de $F_n(Y)$ y, por el Corolario 2.3.3, se tiene que $\bigcup[F_n(f)(\langle U \rangle_n)]$ es un subconjunto abierto de Y. Mostraremos que $\bigcup[F_n(f)(\langle U \rangle_n)] = f(U)$. En efecto, sea $y \in \bigcup[F_n(f)(\langle U \rangle_n)]$, entonces existe $B \in F_n(f)(\langle U \rangle_n)$ tal que $y \in B$, y existe $A \in \langle U \rangle_n$ tal que $F_n(f)(A) = B$. Así existe $a \in A \subset U$ tal que $f(a) = y$, es decir, $y \in f(U)$. Para la otra contención, sean $y \in f(U)$ y $a \in U$ tales que $f(a) = y$. Definamos $A = \{a\}$ y $B = \{y\}$, entonces $A \in \langle U \rangle_n$ y $F_n(f)(A) = B$, así $B \in F_n(f)(\langle U \rangle_n)$, es decir, $y \in \bigcup[F_n(f)(\langle U \rangle_n)]$. Concluimos que $f(U)$ es un abierto en Y; por tanto, f es un mapeo abierto.

■

Veamos que el recíproco es cierto para $n = 2$.

Teorema 2.3.5. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo abierto, entonces $F_2(f)$ es un mapeo abierto.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_2(X)$, $B \in F_2(f)(\mathcal{U})$ y $A = \{p, q\} \in \mathcal{U}$ tal que $F_2(f)(A) = B$. Como $\mathcal{U}$ es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_H(A, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Como $B(p, \epsilon)$ es un subconjunto abierto de X, y como f es abierta, entonces $f(B(p, \epsilon))$ es un subconjunto abierto de Y, por lo que para cada $r \in f(B(p, \epsilon))$, existe $\delta_r > 0$ tal que $B(r, \delta_r) \subset f(B(p, \epsilon))$. En particular $f(p) \in f(B(p, \epsilon))$, por lo que $B(f(p), \delta_{f(p)}) \subset f(B(p, \epsilon))$. De manera similar existe $\delta_{f(q)} > 0$ tal que $B(f(q), \delta_{f(q)}) \subset f(B(q, \epsilon))$. Sea $\delta :=$mín$\{\delta_{f(p)}, \delta_{f(q)}\} > 0$. Tenemos que

$$B(f(p), \delta) \subset f(B(p, \epsilon)) \text{ y } B(f(q), \delta) \subset f(B(q, \epsilon)).$$

Si $f(p) \neq f(q)$, entonces podemos pedir a δ tal que $B(f(p), \delta) \cap B(f(q), \delta) = \emptyset$. Afirmamos que $B_H(B, \delta) \subset F_2(f)(\mathcal{U})$. En efecto, sea $C = \{a, b\} \in B_H(B, \delta)$, entonces $H_d(C, B) < \delta$. Si $f(p) \neq f(q)$, como $B = \{f(p), f(q)\} \subset N_d(C, \delta)$, entonces existen $r, s \in C$ tal que $d(f(p), r) < \delta$ y $d(f(q), s) < \delta$, esto obliga a pedir $r \neq s$, pues si $r = s$ tenemos que

$$r = s \in B(f(p), \delta) \cap B(f(q), \delta),$$

lo cual no es cierto por como hemos elegido a δ. Por lo tanto, en caso de que $f(p) \neq f(q)$, entonces supondremos que $a \in B(f(p), \delta)$ y $b \in B(f(q), \delta)$. En el caso $f(p) = f(q)$, entonces $a, b \in B(f(p), \delta) = B(f(q), \delta)$. Por lo que en ambos casos supondremos que $a \in B(f(p), \delta) \subset f(B(p, \epsilon))$ y $b \in B(f(q), \delta) \subset f(B(q, \epsilon))$. Se sigue que existen $x \in B(p, \epsilon)$ y $y \in B(q, \epsilon)$ tales que $f(x) = a$ y $f(y) = b$. Notemos que $H_d(\{x, y\}, A = \{p, q\}) < \epsilon$. Así, $\{x, y\} \in B_H(A, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Es decir, $F_2(f)(\{x, y\}) = \{f(x), f(y)\} = \{a, b\} = C$, por lo tanto $C \in F_2(f)(\mathcal{U})$.

■

Para el caso $n \geq 3$, el recíproco no es cierto. Para dar el ejemplo, necesitamos el siguiente teorema que generaliza al Teorema 2.3.4.

Teorema 2.3.6. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, $n \geq 3$, y Y no degenerado. Si $F_n(f)$ es un mapeo abierto, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Ya que $F_n(f)$ es abierto, entonces por el Teorema 2.3.4, f es abierto. Además, como f es continua y sobreyectiva, bastará probar que f es inyectiva para mostrar que f es un homeomorfismo. Supongamos, razonando por contradicción, que f no es inyectiva. Así, existen x_1 y x_2 en X tales que $x_1 \neq x_2$, pero $f(x_1) = f(x_2)$. Como Y es no degenerado, entonces existe $x_3 \in X$ tal que $f(x_3) \neq f(x_1)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$B(f(x_1), \epsilon) \cap B(f(x_3), \epsilon) = \emptyset. \tag{1}$$

Por la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que los conjuntos $B(x_1, \delta), B(x_2, \delta)$ y $B(x_3, \delta)$ son disjuntos por pares, y

$$f(B(x_1, \delta)) \cup f(B(x_2, \delta)) \subset B(f(x_1), \epsilon), \tag{2}$$

y tal que $f(B(x_3, \delta)) \subset B(f(x_3), \epsilon)$. Sea $A = \{x_1, x_2, x_3\}$. Como $F_n(f)$ es un mapeo abierto, entonces $F_n(f)(B_H(A, \delta))$ es un subconjunto abierto de $F_n(Y)$. Como $\{f(x_1), f(x_3)\} \in F_n(f)(B_H(A, \delta))$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que

$$B_H(\{f(x_1), f(x_3)\}, \alpha) \subset F_n(f)(B_H(A, \delta)).$$

Podemos suponer que $\alpha < \epsilon$. Elijamos $n - 1$ elemntos $y_1, \ldots, y_{n-1} \in B(f(x_3), \alpha) \setminus \{f(x_3)\}$ tales que $y_1 \neq y_j$ si $i \neq j$. Sea $L = \{f(x_1), y_1, \ldots, y_{n-1}\}$. Es claro que

$$L \subset B_H(\{f(x_1), f(x_3)\}, \alpha) \subset F_n(f)(B_H(A, \delta)). \tag{3}$$

Se sigue que existe $B \in B_H(A, \delta)$ tal que $F_n(f)(B) = L$. Así, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_1 \in B(x_1, \delta)$ y $b_2 \in B(x_2, \delta)$, por lo que $b_1 \neq b_2$. Además, existen $r_1, \ldots, r_{n-1} \in B$ tales que $f(r_i) = y_i$ para cada $i \in I_{n-1}$. Ya que $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$, entonces $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$. Note que $f(x_1) \notin B(f(x_3), \alpha)$, pues de lo contrario $d'(f(x_1), f(x_3)) < \delta < \epsilon$, lo que contradice (1). Por lo tanto, de (3), como $\{f(x_1), f(x_3)\} \subset N(L, \delta)$, se tiene que existe un índice $i \in I_{n-1}$ tal que para $y_i \in L$, $d'(y_i, f(x_3)) < \epsilon$, es decir, $f(r_i) = y_i \in B(f(x_3), \delta)$. Por (1), $f(r_i) \notin B(f(x_1), \epsilon)$ y, por (2), $f(r_i) \notin f(B(x_1, \delta)) \cup f(B(x_2, \delta))$. Esto implica que $r_i \notin B(x_1, \delta) \cup B(x_2, \delta)$. Así, $r_i \neq x_1, x_2$. Notemos que los elementos $b_1, b_2, r_1, \ldots, r_{n-1} \in A$ son todos distintos; pero esto es una contradicción, pues $A \in F_n(X)$. De la contradicción concluimos que f es inyectiva.

■

Veamos un contraejemlo para $n \geq 3$.

Ejemplo 2.3.7. *Sean $X = [-1, 1]$, $Y = [0, 1]$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función definida por, $f(x) = |x|$. Notemos que f es sobreyectiva, continua, abierta, y no inyectiva. Supongamos que la función inducida $F_n(f)$, para $n \geq 3$, es un mapeo abierto. Por el Teorema 2.3.6 tenemos que f es un homeomorfismo, lo cual no es cierto. Concluimos que $F_n(f)$ no es un mapeo abierto.*

2.4. Mapeo monótono

La siguiente clase de función surge de manera natural cuando se hacen cuestionamientos sobre la conexidad de subconjuntos en X y en $F_n(X)$. Como se verá en algunas secciones más adelante, si una mapeo pertenece a la clase de funciones monótonos, entonces f pertenece, en su gran mayoría, a las otras clases de funciones que se estudian en las secciones siguientes.

Definición 2.4.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es* ***monótono*** *si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada y en Y.*

A continuación damos un par de ejemplos donde mostramos un mapeo que es monótono y otro que no.

Ejemplo 2.4.2. *Definamos*

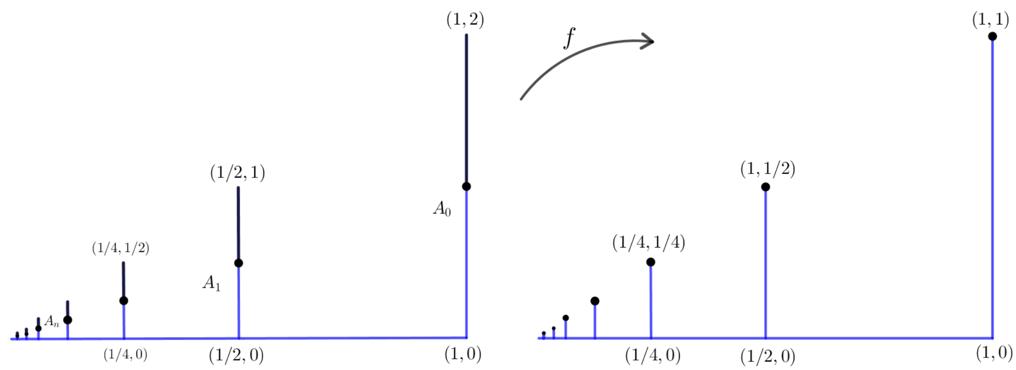
$$I = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\},$$

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/2^n, y \in [0, 1/2^{n-1}]\},$$

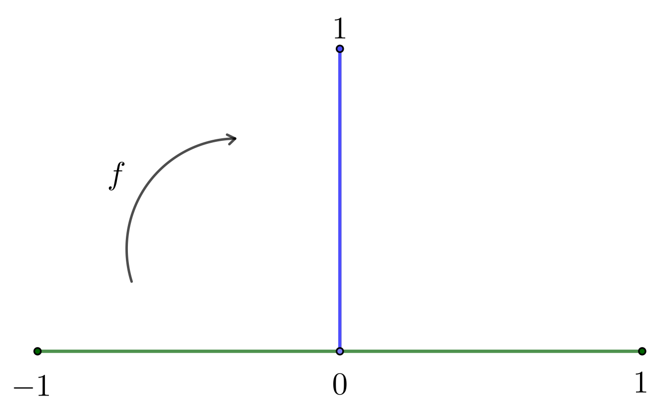
para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, $X = I \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ *y* $f : X \longrightarrow f(X)$ *una función definida por*

$$f((x, y)) = \begin{cases} (x, y) & si\ y \leq x, \\ (x, x) & si\ x \leq y. \end{cases}$$

La siguiente figura describe el comportamiento de la función f*, donde* f *mapea la sección marcada en negro en el respectivo punto resaltado de cada* A_n *y se comporta como la identidad en la sección marcada de azul. Notemos que* f *es un mapeo monótono.*



Ejemplo 2.4.3. *Consideremos el mapeo* $f : [-1, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *definido por* $f(x) = |x|$ *para cada* $x \in [-1, 1]$*. Para cada* $y \neq 0$ *se tiene que* $f^{-1}(y) = \{-y, y\}$ *no es un subconjunto conexo. Concluimos que* f *no es un mapeo monótono.*



Los siguientes lemas nos servirán para probar el Teorema 2.4.6 y también nos serán útiles en secciones posteriores.

Lema 2.4.4. *Sean* X *un continuo, y* $C_1, \ldots, C_r$ *subconjuntos conexos de* X*. Si* $n \geq r$*, entonces* $\langle C_1, \ldots, C_r \rangle_n$ *es un subconjunto conexo de* $F_n(X)$*.*

Demostración. Tomemos dos elementos arbitrarios $\{x_1, \ldots, x_t\}$ y $\{y_1, \ldots, y_s\}$ de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$. Definamos $(x) = \{x_1, \ldots, x_t\}$ y $(y) = \{y_1, \ldots, y_s\}$. Puesto que para cada $i \in I_r$, $(x) \cap C_i \neq \emptyset \neq (y) \cap C_i$, entonces para cada $i \in I_r$, existe $x_{j_i} \in C_i$ para algún $j_i \in I_t$, y existe $y_{k_i} \in C_i$ para algún $k_i \in I_s$. Probaremos la siguiente afirmación:

$(*)$ Existe un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ que contiene a (x) y $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$.

Para probar $(*)$ supongamos que $(x) \neq \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$. Así, $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\} \subsetneq (x)$, por lo que existe $x_\alpha \in (x) \setminus \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$. Sabemos que $x_\alpha \in C_u$ para algún $u \in I_r$. Definamos $f : \{x_{j_1}\} \times \cdots \times \{x_{j_r}\} \times C_u \longrightarrow \langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ por $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}, c) \mapsto \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}, c\}$. Es fácil ver que f es continua. Sea $A = f(\{x_{j_1}\} \times \cdots \times \{x_{j_r}\} \times C_u)$. Notemos que A es la imagen continua de un conexo, por lo que A es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$. Además, $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}, \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}, x_\alpha\} \in A$. Si $(x) = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}, x_\alpha\}$, entonces tenemos que $(*)$ está probado.
Supongamos que $(x) \neq \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}, x_\alpha\}$, entonces existe $x_v \in (x) \setminus \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}, x_\alpha\}$. $x_v \in C_v$, para algún $v \in I_r$. Aplicando el argumento previo a x_v, podemos encontrar un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ que contiene a $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$ y $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}, x_\alpha, x_v\}$. Haciendo el argumento anterior un número finito de veces, se puede obtener un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ que contiene a $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$ y (x). Esto concluye la prueba de $(*)$.
Afirmamos que existe un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ que contiene a $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$ y $\{y_{k_1}, \ldots, y_{k_r}\}$. Para este fin, definamos $f_1 : C_1 \times \{x_{j_2}\} \times \cdots \times \{x_{j_r}\} \longrightarrow \langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$, por $(c, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}) \mapsto \{c, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$. Notemos que f_1 es continua. Consideremos $A_1 = f(C_1 \times \{x_{j_2}\} \times \cdots \times \{x_{j_r}\})$. Se sigue que A_1 es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ que contiene a $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$ y $\{y_{k_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$. Definamos $f_2 : \{y_{k_1}\} \times C_2 \times \{x_{j_3}\} \times \cdots \times \{x_{j_r}\} \longrightarrow \langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$, por $(y_{k_1}, c, x_{j_3}, \ldots, x_{j_r}) \mapsto \{y_{k_1}, c, x_{j_3}, \ldots, x_{j_r}\}$. Notemos que f_2 es continua. Consideremos $A_2 = f(\{y_{k_1}\} \times C_2 \times \{x_{j_3}\} \times \cdots \times \{x_{j_r}\})$. Tenemos que A_2 es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ que contiene a $\{y_{k_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$ y $\{y_{k_1}, y_{k_2}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$. Similarmente definimos $A_3, \ldots, A_r$.
De una manera similar a la prueba dada para $(*)$, podemos construir un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ que contenga a $\{y_{k_1}, \ldots, y_{k_r}\}$ y (y). Así, usando los conjuntos $A_1, \ldots, A_r$, podemos construir un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ que contenga a los elementos (x) y (y). Por lo tanto, $\langle C_1, \ldots, C_r\rangle_n$ es conexo.

■

Lema 2.4.5. *Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto conexo de 2^X tal que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subset 2^X$ tal que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. Supongamos que $\bigcup \mathcal{A}$ no es conexo. Se sigue que existen A_1 y A_2 subconjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos de $\bigcup \mathcal{A}$, tales que $\bigcup \mathcal{A} = A_1 \cup A_2$. Sea $B \in \mathcal{A} \cap C(X)$. Tenemos que $B \subset A_1$ o $B \subset A_2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $B \subset A_1$. Sean

$$B_1 = \{M \in \mathcal{A} : M \subset A_1\}$$

y

$$B_2 = \{M \in \mathcal{A} : M \cap A_2 \neq \emptyset\}.$$

Ya que $B \in \mathcal{A}$ y $B \subset A_1$, $B_1 \neq \emptyset$. Puesto que $A_2 \neq \emptyset$ y $A_2 \subset \bigcup \mathcal{A}$, $B_2 \neq \emptyset$.
Si existiera $L \in B_1 \cap B_2$, entonces $L \subset A_1$ y $L \cap A_2 \neq \emptyset$, pero esto implica que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, lo cuál es falso, por lo que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Mostremos que $\mathcal{A} = B_1 \cup B_2$. Es claro que $B_1 \cup B_2 \subset \mathcal{A}$. Sea $A' \in \mathcal{A}$, y supongamos que $A' \notin B_2$. Así, $A' \cap A_2 = \emptyset$, por lo que $A' \subset A_1$, es decir, $A' \in B_1$. Por lo que $\mathcal{A} \subset B_1 \cup B_2$.
Notemos que B_1 es un cerrado en $\mathcal{A}$ (por la definición de la topología de Vietoris en 1.2.8). Veamos que B_2 es un cerrado en $\mathcal{A}$. En efecto, el complemento de B_2 es $\mathcal{A} \setminus B_2 = \Gamma(\bigcup \mathcal{A} \setminus A_2)$, el cual es un abierto en $\mathcal{A}$, pues $\bigcup \mathcal{A} \setminus A_2$ es un abierto en $\mathcal{A}$. Así, B_2 es un cerrado en $\mathcal{A}$. Por lo tanto, B_1 y B_2 forman una separación de $\mathcal{A}$, lo que contradice la conexidad de $\mathcal{A}$.

■

Estamos listos para mostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.4.6. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo, y $n \geq 2$, f es monótono si y sólo si $F_n(f)$ es monótono.*

Demostración. Supongamos que f es un mapeo monónoto. Sea $B = \{b_1, \ldots, b_r\} \in F_n(Y)$, con $r \leq n$. Veamos que $F_n(f)^{-1}(B) = \langle f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_r)\rangle_n$. En efecto, sea $A \in F_n(f)^{-1}(B)$, entonces $F_n(f)(A) = f(A) = B$, por lo que $A \subseteq \cup_{i=1}^r f^{-1}(b_i)$. Sea $i \in I_r := \{1, \ldots, r\}$, como $b_i \in B = f(A)$, existe $x_i \in A$ tal que $f(x_i) = b_i$, así $x_i \in f^{-1}(b_i)$, por lo que $A \cap f^{-1}(b_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in I_r$. Por lo tanto, $A \in \langle f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_r)\rangle_n$. Sea $A \in \langle f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_r)\rangle_n$. Para cada $i \in I_r$ se tiene que $A \cap f^{-1}(b_i) \neq \emptyset$, entonces $B \subset f(A)$. Por otra parte, $A \subset \cup_{i=1}^r f^{-1}(b_i)$, así $f(A) \subset f(\cup_{i=1}^r f^{-1}(b_i)) = B$, entonces $A \in F_n(f)^{-1}(B)$. Como f es monótona, entonces $f^{-1}(b_i)$ es conexo para cada $i \in I_r$. Luego por el Lema 2.4.4, se tiene que $F_n(f)$ es monótono.
Para la otra parte, sea $y \in Y$, entonces $\{y\} \in F_n(Y)$. Notemos que $\bigcup(F_n(f)^{-1}(\{y\})) = f^{-1}(y)$. En efecto, sea $x \in \bigcup(F_n(f))^{-1}(\{y\})$, se sigue que existe $A \in (F_n(f)^{-1}(\{y\}))$ tal que $x \in A$ y $f(A) = \{y\}$. Así, $f(x) = y$, por lo que $x \in f^{-1}(y)$. Sea $x \in f^{-1}(y)$, entonces $\{x\} \in F_n(f)^{-1}(\{y\})$, así que $x \in \bigcup(F_n(f)^{-1}(\{y\}))$. Por hipótesis $F_n(f)^{-1}(\{y\})$ es conexo y, por el Lema 2.4.5, se sigue que $\bigcup(F_n(f)^{-1}(\{y\}))$ es conexo, es decir, $f^{-1}(\{y\})$ es conexo.

■

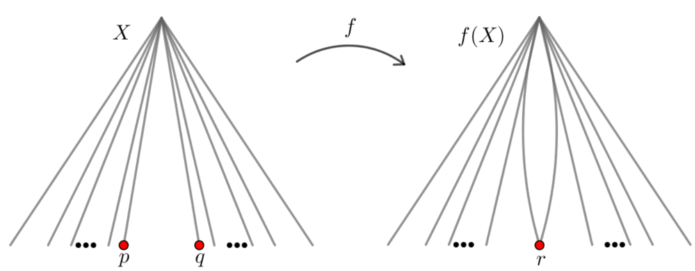
2.5. Mapeo confluente

En esta sección, aparte de los mapeos confluentes definiremos y veremos resultados sobre otras clases de funciones que nos ayudarán al estudio de las funciones confluentes.

Definición 2.5.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **confluente** siempre que para cada subcontinuo B de Y, y cada componente C de $f^{-1}(B)$, tenemos que $f(C) = B$.*

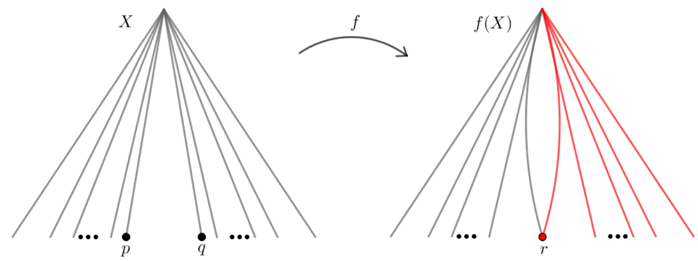
El mapeo descrito en el Ejemplo 2.4.3 es un ejemplo de mapeo confluente ya que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ consta de una o dos componentes, a saber $\{-y\}$ y $\{y\}$. De la definición de f se tiene que $f(-y) = y = f(y)$. El siguiente ejemplo muestra un mapeo que no es confluente.

Ejemplo 2.5.2. *Consideremos el mapeo $f : X \longrightarrow f(X)$ que identifica los puntos p y q a un punto r como se identifica en la siguiente figura. Consideremos el subcontinuo B que*



está marcado de rojo en $f(X)$ (ver siguiente figura) y notemos que $f^{-1}(B) = \{\{p\}, B\}$. Ya que $f(p) \neq B$ concluimos que f no es un mapeo confluente.

El siguiente resultado es una generalización del Lema 2.4.5.



Lema 2.5.3. *Sean X un espacio Hausdorff compacto, $n \in \mathbb{N}$, y $\mathfrak{B}$ un subconjunto conexo de 2^X tal que $\mathfrak{B} \cap C_n(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathfrak{B} \in C_n(X)$.*

Demostración. Supongamos que $\bigcup \mathfrak{B}$ tiene más de n componentes. Se sigue que existen subconjuntos $A_1, \ldots, A_{n+1}$ de X separados por pares y no vacíos tales que $\bigcup \mathfrak{B} = A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}$. Sea $B \in \mathfrak{B} \cap C_n(X)$, entonces B tiene a lo más n componentes y $B \subset A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}$. Supongamos que para algún índice m, $A_i \cap B \neq \emptyset$ para cada $i \in I_m$ y, $A_i \cap B = \emptyset$, para cada $i \in \{m+1, \ldots, n+1\}$. Así que, $m \leq n$. Sean

$$\mathfrak{K} = \{C \in \mathfrak{B} : C \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i\},$$

y

$$\mathfrak{L} = \{C \in \mathfrak{B} : C \cap (\bigcup_{i=m+1}^{n+1} A_i) \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, pues $B \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Afirmamos que $\mathfrak{L} \neq \emptyset$. En efecto, dado $p \in A_{n+1} \subset \bigcup \mathfrak{B}$, existe $C \in \mathfrak{B}$ tal que $p \in C$, por lo que $C \cap (\cup_{i=m+1}^{n+1} A_i) \neq \emptyset$, y así $\mathfrak{L} \neq \emptyset$. Ya que $\bigcup \mathfrak{B} = (\cup_{i=1}^{m} A_i) \cup (\cup_{j=m+1}^{n+1} A_j)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{K} \cup \mathfrak{L}$. Veamos que $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{L}$ son subconjuntos separados. Supongamos, razonando por el contrario, que existe $D \in \mathrm{cl}_{2^X}(\mathfrak{K}) \cap \mathfrak{L}$. Definamos $\mathcal{Z} = \{E \in 2^X : E \subset \mathrm{cl}_X(A_1 \cup \cdots \cup A_m)\}$. Notemos que, por la definición de la topología de Vietoris, $\mathcal{Z}$ es un cerrado en 2^X. Además, es claro que $\mathfrak{K} \subset \mathcal{Z}$, por lo que $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathfrak{K}) \subset \mathcal{Z}$, y así $D \in \mathcal{Z}$. Ya que $D \in \mathfrak{L}$, $\mathrm{cl}_X(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \cap (A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues las uniones $(A_1 \cup \cdots \cup A_m)$ y $(A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1})$ son separados.
De manera similar, supongamos que existe $D \in \mathfrak{K} \cap \mathrm{cl}_{2^X}(\mathfrak{L})$. Definamos $\mathcal{W} = \{E \in 2^X : E \cap \mathrm{cl}_X(A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \emptyset\}$. Por la topología de Vietoris, $\mathcal{W}$ es un cerrado en 2^X y, como $\mathfrak{L} \subset \mathcal{W}$, $\mathrm{cl}_{2^X} \mathfrak{L} \subset \mathcal{W}$, por lo que $D \in \mathcal{W}$. Como $D \in \mathfrak{K}$, $\mathrm{cl}_X(A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_m) \neq \emptyset$, lo cual es una contradiccion, pues las uniones $(A_1 \cup \cdots \cup A_m)$ y $(A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1})$ son separados. Por lo tanto, $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{L}$ son subconjuntos separados, lo que implica que $\mathfrak{B}$ no es conexo, lo cual es falso. Concluimos que $\bigcup \mathfrak{B}$ tiene a lo más n componentes.

■

Si además pedimos que el conjunto $\mathfrak{B}$ del lema anterior sea compacto, entonces $\bigcup \mathfrak{B}$ es un subconjunto cerrado de X. Esto es de utilidad en los mapeos confluentes, pues una característica de las componentes es que son subconjuntos cerrados.

Lema 2.5.4. *Sean X un espacio Hausdorff compacto, $n \in \mathbb{N}$, y $\mathfrak{B}$ un subcontinuo de 2^X tal que $\mathfrak{B} \cap C_n(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathfrak{B}$ es un subconjunto cerrado con a lo más n componentes.*

Demostración. Definamos $B = \bigcup \mathfrak{B}$, y sea $p \in \mathrm{cl}_X(B)$. Para cada vecindad cerrada M de p en X, sea $\mathcal{A}_M = \{A' \in \mathfrak{B} : A' \cap M \neq \emptyset\}$. Puesto que $\mathfrak{B} \setminus \mathcal{A}_M = \{A' \in \mathfrak{B} : A' \subset X \setminus M\}$ es un abierto básico en $\mathfrak{B}$, se tiene que $\mathcal{A}_M$ es un subconjunto cerrado (y así compacto) en $\mathfrak{B}$. Notemos que si M y N son vecindades cerradas de p en X con $M \subset N$, entonces $\mathcal{A}_M \subset \mathcal{A}_N$. Además, cada $\mathcal{A}_M$ es no vacío, pues que M sea vecindad de p implica que

$M \cap B \neq \emptyset$, por lo que existe un $A' \in \mathfrak{B}$ tal que $M \cap A' \neq \emptyset$, y así $A' \in \mathcal{A}_M$. Se sigue que $\mathfrak{C} = \{\mathcal{A}_M : M$ es una vecindad cerrada de p en $X\}$ es una familia de subconjuntos compactos de $\mathfrak{B}$ con la propiedad de la intersección finita. De aquí que $\cap\mathfrak{C} \neq \emptyset$, por lo que existe $A_0 \in \mathfrak{B}$ tal que $A_0 \in \mathcal{A}_M$ para cada vecindad cerrada M de p en X, pero esto implica que $p \in \mathrm{cl}_X(A_0) = A_0$. Por lo que $p \in B$, y por lo tanto B es un subconjunto cerrado de X. Para la última parte del lema, como $\mathfrak{B}$ es en particular conexo con $\mathfrak{B} \cap C_n(X) \neq \emptyset$, se sigue del Lema 2.5.3 que $\bigcup\mathfrak{B}$ tiene a lo más n componentes. .

■

El siguiente lema es de gran importancia al dar condiciones necesarias para obtener componentes en $F_n(X)$.

Lema 2.5.5. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, $n \geq 2$, B un subcontinuo de Y, y C una componente de $f^{-1}(B)$, entonces $F_n(C)$ es una componente de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$.*

Demostración. Por el Corolario 1.2.20, $F_n(C)$ es un conexo contenido en $F_n(X)$. Es claro que $F_n(C) \subset (F_n(f))^{-1}(F_n(B))$. Sea $\mathfrak{C}$ la componente de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$ tal que $F_n(C) \subset \mathfrak{C}$. Mostremos que $\bigcup\mathfrak{C}$ es un subcontinuo de X. En efecto, puesto que $\mathfrak{C}$ es una componente de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B)) \subset 2^X$, se tiene que $\mathfrak{C}$ es conexo en 2^X y, puesto que $F_n(C) \subset \mathfrak{C}$, existe $\{x\} \in F_n(C) \subset \mathfrak{C}$ tal que $\{x\} \in \mathfrak{C} \cap C(X)$. Por el Lema 2.4.5, se tiene que $\bigcup\mathfrak{C}$ es conexo en X. Mostremos que $\mathfrak{C}$ es compacto en 2^X. Puesto que B es un subcontinuo de Y, $F_n(B)$ es un subcontinuo de Y (Corolario 1.2.20), por lo que $F_n(B)$ es un subconjunto cerrado de $F_n(Y)$ y, como la función $F_n(f)$ es continua (Teorema 1.2.34), $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$ es un subconjunto cerrado de $F_n(X)$. Como $\mathfrak{C}$ es una componente de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$, entonces $\mathfrak{C}$ es un subconjunto cerrado de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$. Por lo tanto, $\mathfrak{C}$ es un cerrado en $F_n(X)$, el cual es un continuo. Por lo tanto, $\mathfrak{C}$ es compacto en $F_n(X)$, y así compacto en 2^X. Como $\mathfrak{C}$ es compacto y conexo en 2^X, $\mathfrak{C} \in C(2^X)$. Veamos que $\mathfrak{C} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathfrak{C}$, entonces A tiene a lo más n elementos (pues $F_n(f)(A) \in F_n(B)$), así A tiene a lo más n componentes, es decir, $A \in C_n(X)$, por lo que $\mathfrak{C} \cap C_n(X) = \mathfrak{C} \neq \emptyset$. Por el Lema 2.5.4, $\bigcup\mathfrak{C}$ es un subconjunto cerrado de X, el cual es compacto, por lo que $\bigcup\mathfrak{C}$ es compacto en X. Como $\bigcup\mathfrak{C}$ es compacto y conexo en X, $\bigcup\mathfrak{C} \in C(X)$.
Afirmamos que $C \subset \bigcup\mathfrak{C} \subset f^{-1}(B)$. En efecto, si $x \in C$, entonces $\{x\} \in F_n(C)$, por lo que $\{x\} \in \mathfrak{C}$ y entonces $x \in \bigcup\mathfrak{C}$. Si $y \in \bigcup\mathfrak{C}$, existe $A \in \bigcup\mathfrak{C}$ tal que $y \in A$, por lo que $f(y) \subset f(A) = F_n(f)(A) \in F_n(B)$, entonces $F_n(f)(A) \subset B$, por lo que $y \in f^{-1}(B)$. Esto prueba que $C \subset \bigcup\mathfrak{C} \subset f^{-1}(B)$. Por ser C una componente de $f^{-1}(B)$, la cual está contenida en un subconjunto conexo, $\bigcup\mathfrak{C}$, de $f^{-1}(B)$, se tiene que $C = \bigcup\mathfrak{C}$. Esto nos ayudará a probar que $F_n(C) = \mathfrak{C}$. La parte $F_n(C) \subset \mathfrak{C}$ ya la tenemos por definición de $\mathfrak{C}$. Para la otra contención, sea $A \in \mathfrak{C}$, entonces $A \subset \bigcup\mathfrak{C} = C$, así $A \in F_n(C)$. Al ser $\mathfrak{C} = F_n(C)$, hemos probado que $F_n(C)$ es una componente de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$.

■

Con los resultados previos podemos mostrar que si $F_n(f)$ es confluente, entonces f también lo es.

Teorema 2.5.6. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es confluente, entonces f es confluente.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y y C una componente de $f^{-1}(B)$. Por el Lema 2.5.5, $F_n(C)$ es una componente de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$. Como B es un continuo, entonces por el Corolario 1.2.20, $F_n(B)$ es un continuo, y como $B \subset Y$, $F_n(B)$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$. Por hipótesis $F_n(f)$ es confluente, así $F_n(f)(F_n(C)) = F_n(B)$. Probemos que $f(C) = B$. La contención $f(C) \subset B$ es clara. Ahora, sea $b \in B$, así $\{b\} \in F_n(B)$, por lo que existe $H \in F_n(C)$ tal que $F_n(f)(H) = f(H) = \{b\}$, lo cual implica que $b \in f(C)$, por lo que $B \subset f(C)$.

■

Existe un mapeo confluente $f : X \longrightarrow Y$, donde Y no es localmente conexo, y tal que la función $F_2(f)$ no es confluente. Éste se da en [5, Ejemplo 3.18]. Sin embargo, si Y es localmente conexo y $f : X \longrightarrow Y$ es confluente, entonces $F_2(f)$ es confluente. Este es el resultado del Teorema 2.5.19. Para probar este teorema, daremos antes algunos resultados y definiciones. Comencemos con la siguiente clase de funciones.

Definición 2.5.7. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **cuasi interior** si siempre que $y \in Y$, y U es un subconjunto abierto de X que contiene una componente de $f^{-1}(y)$, se tiene que $y \in int_Y(f(U))$.*

Lema 2.5.8. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es mapeo confluente y Y es localmente conexo, entonces f es un mapeo cuasi interior.*

Demostración. Sean $y \in Y$, C una componente de $f^{-1}(y)$ y U un subconjunto abierto de X tal que $C \subset U$. Queremos mostrar que $y \in \text{int}_Y(f(U))$. Como Y es localmente conexo, por el Lema 1.3.23, existe una sucesión de subcontinuos de Y, $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, tales que $\cap_{i=1}^{\infty} B_i = \{y\}$, y para cada i, $B_{i+1} \subset B_i$ e $y \in \text{int}_Y(B_i)$. Para cada i, sea C_i la componente de $f^{-1}(B_i)$ tal que $C \subset C_i$. Como para cada i, $f^{-1}(B_{i+1}) \subset f^{-1}(B_i)$, se tiene que $C \subset C_{i+1} \subset f^{-1}(B_i)$, por lo que $C_{i+1} \subset C_i$. Sea $K = \cap_{i=1}^{\infty} C_i$. Por la Proposición 1.2.14, se tiene que K es un continuo. Notemos que $C \subset K$, y que $K \subset f^{-1}(y)$, ya que si $x \in K$, entonces para cada i, $f(x) \in f(C_i) \subset B_i$, por lo que $f(x) \in \cap_{i=1}^{\infty} B_i = \{y\}$, así $x \in f^{-1}(y)$. Como C es una componente de $f^{-1}(y)$ contenido en el conexo K que tambien está contenido en $f^{-1}(y)$, se sigue que $C = K$. Por el Lema 1.2.13, se tiene que existe un número natural N tal que para todo $i \geq N$, $C_i \subset U$. Sea $j \geq N$, entonces $f(C_j) \subset f(U)$. Como f es un mapeo confluente y cada B_i es un continuo de Y, se tiene que $f(C_j) = B_j \subset U$. Además, como $y \in \text{int}_Y(B_j)$, concluimos que $y \in \text{int}_Y(f(U))$.

■

El siguiente resultado es útil al trabajar con mapeos cuasi interior.

Lema 2.5.9. *Sean X y Y espacios métricos compactos, $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, $y \in Y$, y U un subconjunto abierto de X que contiene a $f^{-1}(y)$, entonces $y \in int_Y(f(U))$.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que existe un abierto U de X que contiene a $f^{-1}(y)$, tal que $y \notin \text{int}((f(U))$. Se sigue que existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos en $Y \setminus f(U)$ que converge a y. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in f^{-1}(y_n)$. Notemos que $x_n \notin U$. Como X es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos en X que converge a un $x \in X$. Notemos que $x \notin U$. Como f es continua, $(f(x_{n_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Es decir, $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Así $x \in f^{-1}(y) \subset U$, lo cual es una contradicción.

■

Una consecuencia inmediata es la siguiente implicación entre clases de funciones:

Corolario 2.5.10. *Si $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo monótono, entonces f es un mapeo cuasi interior.*

Demostración. Sean $y \in Y$, C una componente de $f^{-1}(y)$, y U un subconjunto abierto de X tal que $C \subset U$. Como f es monótono, $C = f^{-1}(y)$. Así, $f^{-1}(y) \subset U$. Por el Lema 2.5.9, $y \in \text{int}(f(U))$, por lo tanto, f es cuasi interior.

$\blacksquare$

La siguiente clase de funciones que veremos es la siguiente:

Definición 2.5.11. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo. Decimos que f es **OM**, si existe un continuo Z, un mapeo abierto $g : Z \longrightarrow Y$ y un mapeo monótono $h : X \longrightarrow Z$, tal que $f = g \circ h$.*

Veamos que los dos conceptos son equivalentes:

Teorema 2.5.12. *Si $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo entonces f es cuasi interior si y sólo si f es OM.*

Demostración. Supongamos que f es un mapeo cuasi interior. Sean $Z = F_1(X)$, $g : Z \longrightarrow Y$ la función definida por, $\{x\} \mapsto f(x)$, y sea $h : X \longrightarrow Z$ la función definida por $x \mapsto \{x\}$. Por el Corolario 1.2.20, Z es un continuo y por el Teorema 1.2.37, h es un homeomorfismo, por lo que h es un mapeo monótono. Además, es claro que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "g."] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Mostremos que g es un mapeo abierto. Es claro que la función g es un mapeo. Sea V un subconjunto abierto de Z, veamos que $g(V)$ es un subconjunto abierto de Y. Si $p \in g(V)$, entonces existe $\{q\} \in V$ tal que $g(\{q\}) = f(q) = p$. De aquí que, $q \in f^{-1}(p)$. Sea C la componente de $f^{-1}(p)$ que contiene a q. Como h es un homeomorfismo, $h^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X. Afirmamos que $C \subset h^{-1}(V)$. En efecto, sea $c \in C$, si suponemos que $c \notin h^{-1}(V)$, entonces $h(c) = \{c\} \notin V$, y así $g(\{c\}) \notin g(V)$, pero $g(\{c\}) = f(c) = p$, y $p \in g(V)$, tendríamos una contradicción, por lo que $c \in h^{-1}(V)$, es decir, $C \subset h^{-1}(V)$. Como f es cuasi interior, $p \in \mathrm{int}_Y(f(h^{-1}(V)))$. Por la conmutatividad del diagrama, $f(h^{-1}(V)) = g(V)$. Así que, $p \in \mathrm{int}_Y(g(V))$. Por lo tanto, $g(V) = \mathrm{int}_Y(g(V))$, por lo que $g(V)$ es un subconjunto abierto de Y. Concluimos que f es un mapeo OM.
Para la otra implicación, supongamos que f es un mapeo OM. Se sigue que existen un continuo Z, un mapeo abierto $g : Z \longrightarrow Y$, y un mapeo monótono $h : X \longrightarrow Z$ tal que $f = g \circ h$. Sean $y \in Y$, C una componente de $f^{-1}(y)$, y U un subconjunto abierto de X tal que $C \subset U$. Mostremos que $y \in \mathrm{int}_Y(f(U))$. Sea $p \in g^{-1}(y)$, como h es monótono, $h^{-1}(p)$ es conexo en X. Veamos que $h^{-1}(p) \subset C$. En efecto, notemos que $g(h(h^{-1}(p))) = y = f(h^{-1}(p))$, y que $f(C) = y$. Por el Corolario 2.5.10, h es cuasi interior, por lo que $p \in \mathrm{int}_Z(h(U))$. Así, $g(p) = y \in g(\mathrm{int}_Z(h(U))) \subset g(h(U))$. Como g es un mapeo abierto, $g(\mathrm{int}_Z(h(U)))$ es un subconjunto abierto de Y, por lo que $y \in \mathrm{int}_Y(g(h(U))) = \mathrm{int}_Y(f(U))$. Por lo tanto, f es un mapeo cuasi interior.

$\blacksquare$

Existe una equivalencia para definir un mapeo monótono, ésta es el siguiente:

Lema 2.5.13. *Si X y Y son espacios métricos compactos, y $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, entonces $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$ si y sólo si $f^{-1}(B)$ es conexo para cada subconjunto conexo B de Y.*

Demostración. Si suponemos que $f^{-1}(B)$ es conexo para cada B subconjunto conexo de Y, entonces $f^{-1}(y)$ es un conexo, pues $\{y\}$ es un conexo en Y, para cada $y \in Y$. Para la otra implicación, supongamos que $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$. Sea B un subconjunto conexo de Y. Supongamos, por el contrario, que $f^{-1}(B)$ no es conexo. Se sigue que existen subconjuntos V y W tales que $f^{-1}(B) = V|W$. Sean $E = \{y \in B : f^{-1}(y) \subset V\}$,

y $F = \{y \in B : f^{-1}(y) \subset W\}$. Veamos que E y F forman una separación para B. Supongamos que $E = \emptyset$, entonces para cada $y \in B$, como $f^{-1}(y)$ es un conexo contenido en $f^{-1}(B) = V|W$, entonces $f^{-1}(y) \subset W$. Lo anterior prueba que $V = \emptyset$, lo cual es falso. Por lo tanto, $E \neq \emptyset$. Análogamente $F \neq \emptyset$. Como para cada $y \in B$, $f^{-1}(y) \subset V$ o $f^{-1}(y) \subset W$, entonces $B \subset E \cup F$, es decir, $B = E \cup F$.
Mostremos que E y F son separados. En efecto, veamos primero que $\overline{E} \cap F = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe $y \in \overline{E} \cap F$, entonces $f^{-1}(y) \subset W$. Como $y \in \overline{E}$, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en E que convergen a y. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(y_n) \subset V \subset \overline{V}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $w_n \in f^{-1}(y_n)$. Por la compacidad de X podemos suponer que la sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento w. Por la continuidad de f, la sucesión $(f(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(w)$. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(w_n) = y_n$, tenemos que $f(w) = y$, por lo que $w \in f^{-1}(y)$. Además, notemos que $w_n \subset V \subset \overline{V}$, por lo que $w \in \overline{V}$. Así, $w \in \overline{V} \cap W$, lo cual es falso, pues V y W son separados. De manera similar se puede mostrar que $E \cap \overline{F} = \emptyset$. Hemos probado que $B = E|F$, lo cual contradice la conexidad de B. Por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es conexo.

■

La siguiente implicación entre clases de funciones es inmediata del lema anterior.

Proposición 2.5.14. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo monótono, entonces f es un mapeo confluente.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y y C una componente de $f^{-1}(B)$. Por el Lema 2.5.13, $f^{-1}(B)$ es conexo. Así, $C = f^{-1}(B)$, por lo que $f(C) = B$, es decir, f es un mapeo confluente.

■

El siguiente resultado sirve para probar que los mapeos abiertos son confluentes.

Lema 2.5.15. *Sean X y Y espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo abierto. Si Z es un subconjunto de Y, entonces $f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$ es un mapeo abierto.*

Demostración. Sean $g = f|_{f^{-1}(Z)}$, y W un subconjunto abierto de $f^{-1}(Z)$. Se sigue que existe un subconjunto abierto U de X tal que $W = U \cap f^{-1}(Z)$. Es claro que $g(W) = f(U) \cap Z$ y, como f es un mapeo abierto, se tiene que $g(W)$ es un abierto en Z. Por lo tanto, g es un mapeo abierto.

■

Otra implicación entre clases de funciones es la siguiente.

Proposición 2.5.16. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo abierto, entonces f es un mapeo confluente.*

Demostración. Supongamos que f no es confluente. Se sigue que existen B un subcontinuo de Y, y C una componente de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) \neq B$. Ya que $f(C) \subset B$, existe $p \in B$ tal que $f^{-1}(p) \cap C = \emptyset$. Por lo tanto, $f^{-1}(B)$ no es conexo. Así que, $f^{-1}(B) = G|H$ (1.3.2), con G y H de subconjuntos abiertos de $f^{-1}(B)$ tales que $C \subset G$ y $f^{-1}(p) \subset H$. Notemos que $f(G)$ es un cerrado en B (pues G, siendo cerrado en $f^{-1}(B)$, es compacto), pero también $f(G)$ es abierto en B (pues G es un abierto en $f^{-1}(B)$ y $f|_{f^{-1}(B)}$ es un mapeo abierto por el Lema 2.5.15). Además, $f(G) \neq B$. Por lo que B no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, f es confluente.

■

Veamos que la composición de mapeos confluentes es concluente.

Lema 2.5.17. *Si $h : X \longrightarrow Z$ y $g : Z \longrightarrow Y$ son mapeos confluentes, entonces $g \circ h : X \longrightarrow Y$ es un mapeo confluente.*

Demostración. Sean B un subcontinuo de Y, y C una componente de $(g \circ h)^{-1}(B)$. Mostremos que $g(h(C)) = B$. Como C es conexo en X, $h(C)$ es conexo en Z, y como $C \subset (g \circ h)^{-1}(B) = h^{-1}(g^{-1})(B)$, entonces $h(C) \subset g^{-1}(B)$. Es decir, $h(C)$ es un subconjunto conexo de $g^{-1}(B)$. Sea D la componente de $g^{-1}(B)$ que contiene a $h(C)$. Ya que $C \subset h^{-1}(D) \subset h^{-1}(g^{-1}(B))$, C es una componente de $h^{-1}(D)$. Notemos que D es un subcontinuo de Z. En efecto, Como B es cerrado en Y , y g es continua, $g^{-1}(B)$ es cerrado en Z. Tenemos que D es cerrado (y así compacto) en Z. Ya que D es conexo por definición, se tiene que D es un subcontinuo de Z. Como h es confluente, $h(C) = D$ y, como g es confluente, $g(D) = B$. Es decir, $g(h(C)) = B$. Por lo tanto, $g \circ h$ es confluente.

■

Veamos que los mapeos cuasi interior son confluentes.

Proposición 2.5.18. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo cuasi interior, entonces f es confluente.*

Demostración. Por el Teorema 2.5.12, f es un mapeo OM. Entonces, exiten un continuo Z, un mapeo abierto $g : Z \longrightarrow Y$, y un mapeo monótono $h : X \longrightarrow Z$ tales que $f = g \circ h$. De las proposiciones 2.5.16 y 2.5.14, g y h son mapeos confluentes y, por el Lema 2.5.17, $g \circ h$ es un mapero confluente, es decir, f es un mapeo confluente.

■

Estamos listos para probar el resultado que garantiza que la función $F_2(f)$ es confluente, si $f : X \longrightarrow Y$ es confluente y Y es localmente conexo.

Teorema 2.5.19. *Sean Y un continuo localmente conexo y $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo confluente, entonces $F_2(f)$ es confluente.*

Demostración. Por el Lema 2.5.8 se tiene que f es cuasi interior y, por el Teorema 2.5.12, f es OM, por lo que existe un continuo Z, un mapeo monótono $h : X \longrightarrow Z$, y un mapeo abierto $g : Z \longrightarrow Y$ tales que $f = g \circ h$. Por los teoremas 2.4.6 y 2.3.5, $F_2(h)$ es monótono y $F_2(g)$ es abierto. Por (ii) de la Proposición 1.2.35, $F_2(f) = F_2(g) \circ F_2(h)$, por lo que $F_2(f)$ es OM. Por el Teorema 2.5.12, $F_2(f)$ es cuasi interior y, por la Proposición 2.5.18, $F_2(f)$ es confluente.

■

El siguiente lema fue probado en [6, Lema 3.1] por H. Hosokawa, quién inició el estudio de las funciones inducidas en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X. Este lema es útil, entre otras cosas que veremos más adelante, para dar una equivalencia entre la clase de mapeos confluentes $F_n(f)$ y la clase de mapeos monótonos f.

Lema 2.5.20. *Si $\mathfrak{K}$ un subcontinuo de 2^X, y $K \in \mathfrak{K}$, entonces cada componente de $\bigcup \mathfrak{K}$ interseca a K.*

Demostración. Supongamos que el enunciado es falso, existe entonces una componente C de $\bigcup \mathfrak{K}$ tal que $C \cap K = \emptyset$. Se sigue que C es un subconjunto cerrado en $\bigcup \mathfrak{K}$. Además, como $K \in 2^X$, K es un cerrado en X tal que $K \subset \bigcup \mathfrak{K}$. Como $K = \bigcup \mathfrak{K} \cap K$, K es un cerrado en $\bigcup \mathfrak{K}$. Así que, por el Lema 1.3.5, existe una separación $\bigcup \mathfrak{K} = A \cup B$, de $\bigcup \mathfrak{K}$, tal que $K \subset A$ y $C \subset B$. Sean $K_0 = \{L \in \mathfrak{K} : L \subset A\}$ y $K_1 = \{L \in \mathfrak{K} : L \cap B \neq \emptyset\}$. Note que $K_0 \neq \emptyset$, pues $K \in K_0$. Veamos que $K_1 \neq \emptyset$. Sea $c \in C \subset \bigcup \mathfrak{K}$, entonces existe $W \in \mathfrak{K}$ tal que $c \in W$, así que $c \in W \cap B$, por lo que $W \in K_1$. Afirmamos que $\mathfrak{K} = K_0 \cup K_1$. Sea $L \in \mathfrak{K}$

y supongamos que $L \cap B = \emptyset$, puesto que $L \subset \bigcup \mathfrak{K} = A \cup B$, entonces $L \subset A$, por lo que $L \in K_0$.
Mostremos que $K_0 \cap K_1 = \emptyset$. Si no fuera así, entonces existe $W \in K_0 \cap K_1$, así, en particular $W \in A$, por lo que $W \cap B = \emptyset$, pero entonces $W \notin K_1$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathfrak{K} = K_0 \cup K_1$. Veamos que K_0 es un subconjunto cerrado en $\mathfrak{K}$. Notemos que $\mathfrak{K} \setminus K_0 = \{L \in \mathfrak{K} : L \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\} = \langle X, X \setminus A\rangle = \Lambda(X \setminus A)$. Por el Teorema 1.2.10, $\Lambda(X \setminus A)$ es un subbásico de 2^X, por lo que $\Lambda(X \setminus A)$ es un abierto en $\mathfrak{K}$, y así K_0 es un subconjunto cerrado en $\mathfrak{K}$. Veamos que K_1 es un cerrado en $\mathfrak{K}$. En efecto, $\mathfrak{K} \setminus K = \{L \in \mathfrak{K} : L \subset (X \setminus B)\} = \langle X \setminus B\rangle$ es un abierto básico en 2^X, por el Teorema 1.2.10. Así, K_1 es un cerrado en $\mathfrak{K}$. Por lo tanto, existe una separación de $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} = K_0 \cup K_1$, lo cual contradice la conexidad de $\mathfrak{K}$.

■

Teorema 2.5.21. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo y $n \geq 3$, entonces $F_n(f)$ es un mapeo confluente si y sólo si f es un mapeo monótono.*

Demostración. Si f es un mapeo monótono entonces, por el Teorema 2.4.6, $F_n(f)$ es monótono y, por la Proposición 2.5.14, $F_n(f)$ es confluente.
Ahora supongamos que $F_n(f)$ es un mapeo confluente. Supongamos que f no es monótono. Por tanto, existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es conexo. Sean P y Q componentes distintas de $f^{-1}(y)$, y sean $p \in P$ y $q \in Q$. Elijamos $z \in Y \setminus \{y\}$. Por el Lema 1.3.7, existe un subcontinuo R de Y tal que $\{z\} \subsetneq R \subset Y \setminus \{y\}$.
Sean $\mathscr{K} = \{\{y\} \cup K : K \in F_{n-1}(R)\}$, y $\mathcal{G} : F_{n-1}(Y) \longrightarrow F_n(Y)$ la función definida por $\mathcal{G}(K) = \{y\} \cup K$, para todo $K \in F_{n-1}(Y)$. Es claro que $\mathcal{G}$ es un mapeo tal que $\mathcal{G}(F_{n-1}(R)) = \mathscr{K}$. Notemos que $\mathscr{K}$ es la imagen continua de un subconjunto compacto y conexo, es decir, $\mathscr{K}$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$. Tomemos $s \in X$ tal que $f(s) = z$. Sea S la componente de $f^{-1}(R)$ tal que $s \in S$, y sea $\mathfrak{C}$ la componente de $(F_n(f))^{-1}(\mathscr{K})$ tal que $\{p, q, s\} \in \mathfrak{C}$. Sea $Z = \bigcup \mathfrak{C}$. Por la definición de $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ es un conexo en 2^X, además, $\{p, q, s\} \in \mathfrak{C} \cap C_n(X)$. Por el Lema 2.5.3, $Z \in C_n(X)$. Notemos que $P \cup Q \cup S \subset Z$.
Veamos que P es una componente de Z. En efecto, sea P' la componente de Z tal que $P \subset P'$. Asumamos que $P \subsetneq P'$. Sea $w \in P' \setminus f^{-1}(y)$. Es claro que:
(i) $f(w) \in f(P') \cap R$, y
(ii) $y \in \{y\} \cap f(P')$.
Mostremos:
(iii) $f(P') \subset \{y\} \cup R$. En efecto, sea $x \in f(P')$ y supongamos que $x \notin \{y\}$. Existen $r \in P'$ tal que $f(r) = x$, y $D \in \mathfrak{C}$ tal que $r \in D$. Se sique que $f(r) \in f(D)$, y $f(D) \in \mathscr{K}$. Como $f(r) = x \neq y$, existe $D' \in F_{n-1}(R)$ tal que $f(r) \in D'$, es decir, $x \in R$.
Por (iii), y como $\{y\} \cap R = \emptyset$, tenemos que $f(P')$ esta contenido en dos subconjuntos disjuntos, que por (i) y (ii), $f(P')$ intersecta a ambos. Esto contradice la conexidad de $f(P')$. Por lo tanto, $P' \subset f^{-1}(y)$, de aquí que $P = P'$. Similarmente Q es una componente de Z.
Afirmamos que $F_n(f)(\mathfrak{C}) \subset \{\{y\} \cup K : K \in F_{n-2}(R)\}$. En efecto, sea $A \in \mathfrak{C}$. Como $\mathfrak{C}$ es cerrado en $F_n(f)^{-1}(\mathscr{K})$, y $F_n(f)^{-1}(\mathscr{K})$ es cerrado (ya que $\mathscr{K}$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$) en 2^X, entonces $\mathscr{K}$ es cerrado en 2^X, es decir, $\mathscr{K}$ es compacto en 2^X. Por definición, $\mathfrak{C}$ es conexo en 2^X. Por lo tanto, $\mathfrak{C}$ es un subcontinuo de 2^X. Por el Lema 2.5.20, $A \cap P \neq \emptyset$, y $A \cap Q \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(A) \in \{\{y\} \cup K : K \in F_{n-2}(R)\}$. Ya que $\{\{y\} \cup K : K \in F_{n-2}(R)\} \subsetneq \mathscr{K}$, $F_n(f)(\mathfrak{C}) \subsetneq \mathscr{K}$. Por lo tanto, $F_n(f)$ no es confluente.

■

Existe un mapeo confluente $f : X \longrightarrow Y$ tal que, para cada $n \geq 3$, la función inducida $F_n(f)$ no es confluente.

Ejemplo 2.5.22. *Sean $X = [-1, 1]$, $Y = [0, 1]$, y $f : X \longrightarrow Y$ una función definida por, $f(x) = |x|$. Es fácil ver que el mapeo f es confluente, pero no es monótono. Por el Teorema 2.5.21, se tiene que para $n \geq 3$, $F_n(f)$ no es un mapeo confluente. Notemos que en este* *ejemplo Y es incluso localmente conexo.*

2.6. Mapeo atriódico

Definición 2.6.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **atriódico** si para cada subcontinuo B de Y, existen dos componentes C y D de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) \cup f(D) = B$ y, para cada componente E de $f^{-1}(B)$, tenemos que $f(E) = B$, o $f(E) \subset f(C)$, o $f(E) \subset f(D)$.*

El Ejemplo 2.6.4 nos proporciona una ejemplo de una función que pertenece (y de otra que no) a la clase de mapeos atriódicos.

El siguiente lema nos ayudará a probar que si la función inducida $F_n(f)$ es un mapeo atriódico, entonces f también lo es.

Lema 2.6.2. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, $n \geq 2$, $B_1, \ldots, B_n$ subcontinuos disjuntos a pares de Y, y E_j una componente de $f^{-1}(B_j)$, para cada $j \in I_n$, entonces $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle_n$ es una componente de $F_n(f)^{-1}(\langle B_1, \ldots, B_n \rangle_n)$.*

Demostración. Definamos $\mathcal{E}_n = \langle E_1, \ldots, E_n \rangle_n$. Como E_i es cerrado para cada $i \in I_n$, $\mathcal{E}_n$ es cerrado en $F_n(X)$ que es compacto. Así, $\mathcal{E}_n$ es compacto. Además, por el Lema 2.4.4, $\mathcal{E}_n$ es conexo. Por lo tanto, $\mathcal{E}_n$ es un subcontinuo de $F_n(X)$. De manera similar se muestra que $\langle B_1, \ldots, B_n \rangle_n$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$. Notemos que $\mathcal{E}_n \subset F_n(f)^{-1}(\langle B_1, \ldots, B_n \rangle_n)$. Sea $\mathcal{E}$ la componenete de $F_n(f)^{-1}(\langle B_1, \ldots, B_n \rangle_n)$ que contiene a $\mathcal{E}_n$. Por el Lema 2.5.3, $\bigcup \mathcal{E}$ tiene a lo más n componentes en X. Notemos que $\cup_{i=1}^{n} E_i \subset \bigcup \mathcal{E}$. Como $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $\bigcup \mathcal{E}$ tiene exactamente n componentes, digamos $E'_1, \ldots, E'_n$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $E_i \subset E'_i$, para cada $i \in I_n$. Afirmamos que $f(\bigcup \mathcal{E}) \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$. Para esto, sea $x \in \bigcup \mathcal{E}$. Existe $B \in \mathcal{E}$ tal que $x \in B$, por lo que $F_n(f)(B) \in \langle B_1, \ldots, B_n \rangle_n$, es decir, $f(B) \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$, por lo que $f(x) \in \cup_{i=1}^{n} B_i$. Ya que E_j es una componente de $f^{-1}(B_j)$, tenemos que $\bigcup \mathcal{E} = \cup_{j=1}^{n} E_j$, y $E'_j = E_j$, para cada $j \in I_n$.
Sea $A \in \mathcal{E}$. Por el Lema 2.5.20, $A \cap E_i \neq \emptyset$, para cada $i \in I_n$. Además, como $A \subset \cup_{i=1}^{n} E_i$, $A \in \mathcal{E}_n$. De aquí que, $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_n$ es una componente de $F_n(f)^{-1}(\langle B_1, \ldots, B_n \rangle_n)$.

■

Teorema 2.6.3. *Sean $n \geq 2$, y $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ un mapeo atriódico, entonces f es un mapeo atriódico.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y. Si $B = Y$, entonces $f^{-1}(B)$ tiene una sola componente, a saber X, y $f(X) = Y$. Supongamos $B \neq Y$. Sean $y_1, \ldots, y_{n-1}$ puntos distintos en $Y \setminus B$. Consideremos el conjunto:

$$\mathcal{B} = \{\{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{b\} : b \in B\}.$$

Notemos que $\mathcal{B}$ es homeomorfo a B. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$. Además, es claro que $\mathcal{B} \cap F_1(Y) = \emptyset$. Ya que $F_n(f)$ es atriódico, existen dos componentes $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ de $F_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$ tales que $F_n(f)(\mathcal{C}) \cup F_n(f)(\mathcal{D}) = \mathcal{B}$ y, para cada componente $\mathcal{E}$ de $F_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$, se tiene que $F_n(f)(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$, o $F_n(f)(\mathcal{E}) \subset F_n(f)(\mathcal{C})$, o $F_n(f)(\mathcal{E}) \subset F_n(f)(\mathcal{D})$. Mostremos las siguientes afirmaciones:
(i) $\bigcup \mathcal{C} \subset f^{-1}(y_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(y_{n-1}) \cup f^{-1}(B)$. En efecto, sea $x \in \bigcup \mathcal{C}$, existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$, y $F_n(f)(A) \in \mathcal{B}$. Se sigue que $f(A) = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{b\}$, para algún $b \in B$. Así, $x \in \cup_{i=1}^{n-1} f^{-1}(y_i) \cup f^{-1}(b) \subset \cup_{i=1}^{n-1} f^{-1}(y_i) \cup f^{-1}(B)$.
(ii) $\bigcup \mathcal{C} \cap f^{-1}(y_j) \neq \emptyset$, para cada $j \in I_{n-1}$. Para esto, sean $j \in I_{n-1}$ y $A \in \mathcal{C}$. Ya que $F_n(f)(A) \in \mathcal{B}$, existe $k \in K$ tal que $f(A) = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{k\} := K$. Como $y_j \in K$, existe

$a \in A$ tal que $f(a) = y_j$. Es decir, $a \in f^{-1}(y_j)$. Como $a \in A \subset \bigcup \mathcal{C}$, $\bigcup \mathcal{C} \cap f^{-1}(y_j) \neq \emptyset$.
(iii) $\bigcup \mathcal{C} \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcup \mathcal{C}$, existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$, y $F_n(f)(A) \in \mathcal{B}$. De aquí que, $f(A) = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{b\}$, para algún $b \in B$. Así, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, es decir, $a \in f^{-1}(b) \subset f^{-1}(B)$. Como $a \in A \subset \bigcup \mathcal{C}$, $\bigcup \mathcal{C} \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$.
Como los y_i son distintos a pares y $B \cap \{y_i\} = \emptyset$, para cada $i \in I_{n-1}$, entonces por (i),(ii) y (iii), $\bigcup \mathcal{C}$ tiene al menos n componentes. Por otra parte, por el Lema 2.5.3, $\bigcup \mathcal{C}$ tiene a lo más n componentes. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{C}$ tiene exactamente n componentes, digamos $C_1, \ldots, C_n$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que para cada $j \in I_{n-1}$, $C_j \subset f^{-1}(y_j)$ y, $C_n \subset f^{-1}(B)$. Similarmente, $\bigcup \mathcal{D}$ tiene exactamente n componentes, digamos $D_1, \ldots, D_n$. Podemos suponer que $D_i \subset f^{-1}(y_i)$, para cada $i \in I_{n-1}$, y $D_n \subset f^{-1}(B)$. Sean C y D las componentes de $f^{-1}(B)$ que contienen a C_n y D_n, respectivamente.
Mostraremos que $f(C) \cup f(D) = B$. Claramente $f(C) \cup f(D) \subset B$. Sea $b \in B$, entonces $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}$. Sin perdida de generalidad, suongamos que $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{b\} \in F_n(f)(\mathcal{C})$. Se sigue que existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $f(A) = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{b\}$. Así, $b \in f(A) \subset f(\bigcup \mathcal{C}) \subset \cup_{i=1}^{n} f(C_i)$. Como $b \notin \cup_{i=1}^{n-1} f(C_i)$, $b \in C_n \subset f(C)$. Por lo tanto, $f(C) \cup f(D) = B$.
Sean E una componente de $f^{-1}(B)$ y, para cada $j \in I_{n-1}$, E_j una componente de $f^{-1}(y_j)$. Definamos $\mathcal{E} := \langle E_1, \ldots, E_{n-1}, E\rangle_n$.
Por el Lema 2.6.2, $\mathcal{E}$ es una componente de $F_n(f)^{-1}(\langle \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-1}\}, B\rangle_n)$.
Ya que $F_n(f)^{-1}(\langle \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-1}\}, B\rangle_n) = F_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$, $\mathcal{E}$ es una componente de $F_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$.
Como $F_n(f)$ es atriódico, entonces $F_n(f)(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$, o $F_n(f)(\mathcal{E}) \subset F_n(f)(\mathcal{C})$, o $F_n(f)(\mathcal{E}) \subset F_n(f)(\mathcal{D})$.
Supongamos que $F_n(f)(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$. Mostremos que $f(E) = B$. Es claro que $f(E) \subset B$. Sea $b \in B$, entonces $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}$. Se tiene que existe $A \in \mathcal{E}$ tal que $f(A) = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \cup \{b\}$. Así, existe $x \in A$, tal que $f(x) = b$. Como $x \notin \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$, $x \notin \cup_{i=1}^{n-1} E_{n-1}$. Por lo que $x \in E$, es decir, $b \in f(E)$. Por lo tanto, $f(E) = B$.
Supongamos que $F_n(f)(\mathcal{E}) \subset F_n(f)(\mathcal{C})$. Mostremos que $f(E) \subset f(C)$. En efecto, sea $y \in f(E)$. Existe $e \in E$ tal que $f(e) = y$. Para cada $i \in I_{n-1}$, sea e_i un punto en E_i. Así $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e\} \in \mathcal{E}$. Por hipótesis, existe $C' \in \mathcal{C}$ tal que $F_n(f)(\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e\}) = F_n(f)(C')$, es decir, $\{y_1, \ldots, y_{n-1}, f(e)\} = f(C')$. En particular, $f(e) \in f(C')$. Como $C' \subset \bigcup \mathcal{C} = \cup_{i=1}^{n} C_i$ y, $y \notin \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$, $f(e) \in f(C_n) \subset f(C)$. Así, $y \in f(C)$. Por lo tanto, $f(E) \subset f(C)$.
De manera similar se puede probar que si $F_n(f)(\mathcal{E}) \subset F_n(f)(\mathcal{D})$, entonces $f(E) \subset f(D)$. Por lo tanto, f es un mapeo atriódico.

■

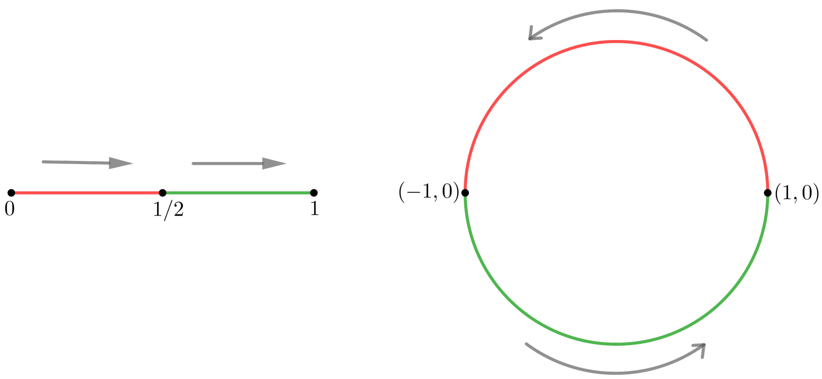
El recíproco del teorema anterior no se cumple ya que existe un mapeo atriódico $f : X \longrightarrow Y$ tal que, para cada $n \geq 2$, el mapeo $F_n(f)$ no es atriódico como veremos a continuación.

Ejemplo 2.6.4. *Sean $X = [0,1]$ y $Y = S^1$. Sea $f : X \longrightarrow Y$ la función definida por, $f(x) = (cos(2\pi x), sen(2\pi x))$, para cada $x \in X$. La siguiente figura describe el comportamiento de la función f.*

Notemos que f es un mapeo atriódico. Mostremos que, para cada $n \geq 2$, $F_n(f)$ no es atriódico. Para esto, mostremos primero que

$$\mathcal{Q} := \{\{f(s), f(t)\} : s \in [0, \tfrac{1}{4}], t \in [\tfrac{3}{4}, 1] \text{ y } s + t = 1\} \cup F_1(f([0, \tfrac{1}{4}] \cup [\tfrac{3}{4}, 1])),$$

es un subcontinuo de $F_n(S^1)$. Consideremos $\mathcal{Q} = J_1 \cup J_2$, con $J_1 = \{\{f(s), f(t)\} : s \in [0, \frac{1}{4}], t \in [\frac{3}{4}, 1]$ y $s + t = 1\}$, y $J_2 := F_1(f([0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]))$. Notemos que J_1 es homeomorfo a $f([0, \frac{1}{4}])$ (el cuadrante superior derecho de S^1), por lo que J_1 es un subcontinuo de $F_2(S^1)$. Además, ya que $f([0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1])$ es un subcontinuo de S^1 (consta de los puntos de S^1 cuya primera coordenada es mayor o igual a cero), J_2 es un subcontinuo de $F_1(S^1)$. Como $\{f(0)\} \in J_1 \cap J_2$, $J_1 \cup J_2$ es conexo. Así, $\mathcal{Q} \in C(F_n(S^1))$.
Ahora notemos que las componentes de $F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ son $C_1 = \{\{s,t\} : s \in [0, \frac{1}{4}], t \in [\frac{3}{4}, 1]$ y $s + t = 1\}$, $C_2 = F_1([0, \frac{1}{4}])$ y $C_3 = F_1([\frac{3}{4}, 1])$, y que $F_n(f)(C_i \cup C_j) \neq \mathcal{Q}$, para $i \neq j$. Por lo tanto, $F_n(f)$ no es atriódico, para cada $n \geq 2$.



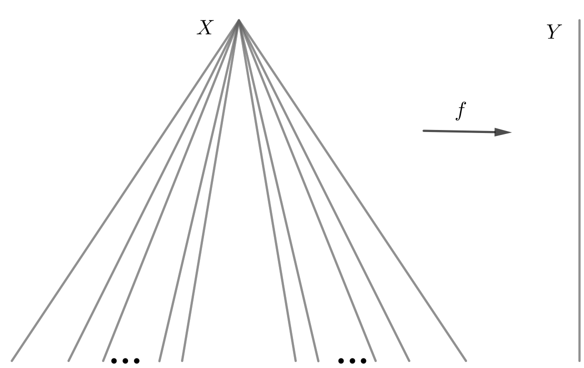
2.7. Mapeo ligero

La clase de mapeo de esta sección estudia la disconexidad de las preimagenes de elementos de Y.

Definición 2.7.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es* ***ligero*** *si $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo para cada $y \in Y$, es decir, si $f^{-1}(y)$ no tiene subconjuntos conexos con más de un punto para cada $y \in Y$.*

El Ejemplo 2.4.2 muestra un mapeo f que no es ligero ya que $f^{-1}((1,1)) = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, 2]\}$ es un conjunto conexo con más de un punto. El siguiente ejemplo muestra un mapeo que es ligero.

Ejemplo 2.7.2. *Consideremos el mapeo proyección en la primer coordenado del continuo X en el continuo $Y = [0, 1]$ como se muestra en la siguiente figura. Es claro que la función f es un mapeo ligero.*



Veamos el primer resultado de mapeos ligeros.

Lema 2.7.3. *Si A es un subcontinuo de X, y $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo ligero, entonces la función $f|_A : A \longrightarrow f(A)$ es también un mapeo ligero.*

Demostración. En efecto, $f|_A$ es claramente continua y sobreyectiva, por lo que es un mapeo. Además, si $f|_A$ no fuera ligero, entonces existe un $b \in f(A)$ tal que $f^{-1}|_A(b)$ no es totalmente disconexo en $A \subset X$. Pero entonces $f^{-1}(b)$ no es totalmente disconexo, contradiciendo que f es un mapeo ligero. Por lo tanto, $f|_A$ es un mapeo ligero.

■

De este lema tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.7.4. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo y $n \geq 3$. Si $F_n(f)$ es un mapeo ligero, entonces $F_m(f)$ es un mapeo ligero, para cualquier natural $m \leq n$.*

Demostración. Notemos que $F_m(X)$ es un subcontinuo de $F_n(X)$. Consideremos la función restricción $F_n(f)|_{F_m(X)} : F_m(X) \longrightarrow F_n(f)(F_m(X))$. Afirmamos que $F_n(f)(F_m(X)) = F_m(Y)$. En efecto, sea $B \in F_n(f)(F_m(X))$, entonces existe un $A \in F_m(X)$ tal que $F_n(f)(A) = B$. Así, $|F_n(f)(A)| \leq m$, pues $|A| \leq m$, por lo que $F_n(f)(A) = B \in F_m(Y)$. Sea $B \in F_m(Y)$. Supongamos $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$, con $r \leq m$. Por ser f sobreyectiva, para cada $i \in I_r$ existe $a_i \in f^{-1}(b_i)$. Consideremos $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$, entonces $f(A) = B$. Por lo tanto $A \in F_m(X)$, es decir $B \in F_n(f)(F_m(X))$. Además, sea $A = \{a_1, \ldots, a_r\} \in F_m(X)$, entonces $F_n(f)|_{F_m(X)}(A) = F_n(f)(A) = \{f(a_1), \ldots, f(a_r)\} = F_m(f)(A)$, es decir, $F_n(f)|_{F_m(X)} = F_m(f)$. Por lo tanto, si suponemos que para $m \leq n$, $F_m(f)$ no es un mapeo ligero, entonces la función restricción $F_n(f)|_{F_m(X)} : F_m(X) \longrightarrow F_n(f)(F_m(X))$, no sería un mapeo ligero, lo cual, por el lema anterior, sabemos que eso no pasa cuando $F_n(f)$ es ligero. Por lo tanto, la función $F_m(f) : F_m(X) \longrightarrow F_m(Y)$ es un mapeo ligero.

■

Para probar el teorema principal de esta sección, veamos primero el siguiente resultado.

Lema 2.7.5. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $k \leq n$ y $C_1, \ldots, C_k$ subconjuntos cerrados totalmente disconexos de X, tales que $C_i \cap C_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces $\langle C_1, \ldots, C_k\rangle_n$ es un subconjunto totalmente disconexo de $F_n(X)$.*

Demostración. Supongamos que $\langle C_1, \ldots, C_k\rangle_n$ no es totalmente disconexo en $F_n(X)$. Se sigue que existe una componente no degenerada C de $\langle C_1, \ldots, C_k\rangle_n$. Por el Lema 2.5.3, $\bigcup C$ tiene a lo más n componentes. Supongamos $\bigcup C = \cup_{i=1}^{s} K_i$, con $s \leq n$, y K_i es componente de $\bigcup C$, para cada $i \in I_s$. Si K_i fuese degenerado para cada $i \in I_s$, entonces C es degenerado, lo cual es falso. Por lo tanto, existe un índice $r \in I_s$ tal que K_r es no degenerado. Como K_r es una componente de $\bigcup C \subset \cup_{i=1}^{k}\{C_i\}$ y los C_i son disjuntos dos a dos, entonces existe un índice $\alpha \in I_k$ tal que $K_r \subset C_\alpha$, pero esto implica que C_α es no degenerado, lo cual es falso. Por lo tanto $\langle C_1, \ldots, C_k\rangle_n$ es totalmente disconexo en $F_n(X)$.

■

Si un mapeo f pertenece a la clase de funciones que son mapeos ligeros, entonces el mapeo inducido $F_n(f)$ también pertenece a la misma clase. El recíproco también es cierto.

Teorema 2.7.6. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo y $n \geq 2$. Entonces, $F_n(f)$ es ligero si y sólo si f es ligero.*

Demostración. Supongamos que $F_n(f)$ es un mapeo ligero. Por el Lema 2.7.4, $F_1(f)$ también es ligero. Por el Lema 1.2.37, las funciones $h : X \longrightarrow F_1(X)$, $x \mapsto \{x\}$ y $g : Y \longrightarrow F_1(Y)$, $y \mapsto \{y\}$, son homeomorfismos. Además, es claro que $g \circ f = F_1(f) \circ h$. Así, sea $y \in Y$, entonces $f^{-1}(y) = h^{-1}[(F_1(f))^{-1}(g^{-1}(y))]$. Puesto que g y h son homeomorfismos, y $F_1(f)$ es un mapeo ligero, se tiene que $h^{-1}[(F_1(f))^{-1}(g^{-1}(y))]$ es totalmente disconexo, es decir, $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo. Por lo tanto, f es un mapeo ligero.

Para la otra implicación, supongamos que f es un mapeo ligero. Sea $B = \{b_1, \ldots, b_s\} \in F_n(Y)$, con $s \leq n$ y $b_i \neq b_j$ para $i \neq j$. En la demostración del Teorema 2.4.6, se mostró que $(F_n(f))^{-1}(B) = \langle f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_s)\rangle_n$. Puesto que $b_i \neq b_j$ para $i \neq j$, entonces $f^{-1}(b_i) \cap f^{-1}(b_j) = \emptyset$, para cada $i \neq j$. Además, como f es un mapeo ligero se tiene que para cada $i \in I_s$, el subconjunto $f^{-1}(b_i)$ es totalmente disconexo. Por el Lema 2.7.5, se tiene que $\langle f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_s)\rangle_n = (F_n(f))^{-1}(B)$ es totalmente disconexo. Por lo tanto, $F_n(f)$ es un mapeo ligero.

■

2.8. Mapeo unión

Definición 2.8.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **unión** siempre que para cada subcontinuo B de Y, y para cada dos componentes C y D de $f^{-1}(B)$, tenemos que $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$.*

Un ejemplo de un mapeo unión está dado en Ejemplo 2.8.3. El primer resultado que veremos es el siguiente.

Teorema 2.8.2. *Sean $n \in \mathbb{N}$, y $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ un mapeo unión, entonces f es un mapeo unión.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, B un subcontinuo de Y, y C y D dos componentes de $f^{-1}(B)$. Supongamos que $F_n(f)$ es un mapeo unión. Por el Corolario 1.2.20, $F_n(B)$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$ y, por el Lema 2.5.5, $F_n(C)$ y $F_n(D)$ son componentes de $F_n(f)^{-1}(F_n(B))$. Por tanto, $F_n(f)(F_n(C)) \cap F_n(f)(F_n(D)) \neq \emptyset$, por lo que existen $E \in F_n(C)$, y $F \in F_n(D)$ tales que $F_n(f)(E) = F_n(f)(F)$, es decir, $f(E) = f(F)$. Ya que $E \subset C$ y $F \subset D$, $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es un mapeo unión.

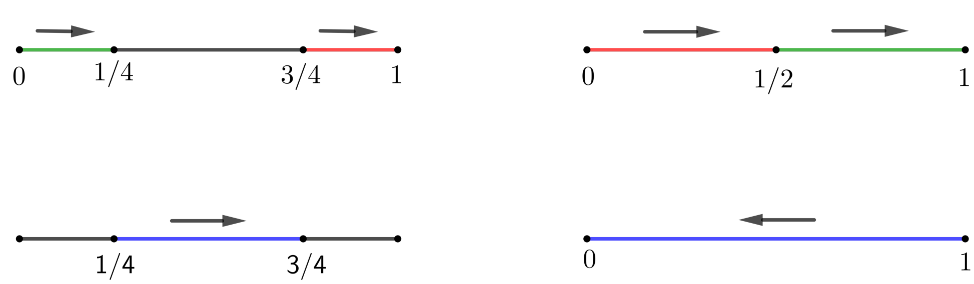
■

Existe un mapeo unión $f : X \longrightarrow Y$, tal que $F_2(f)$ no es un mapeo unión. Así, el recíproco del teorema anterior no se cumple.

Ejemplo 2.8.3. *Sean $X = [0,1] = Y$, y $f : X \longrightarrow Y$ el mapeo definido por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} & si \quad x \in [0, \frac{1}{4}], \\ -2x + \frac{3}{2} & si \quad x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ 2x - \frac{3}{2} & si \quad x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

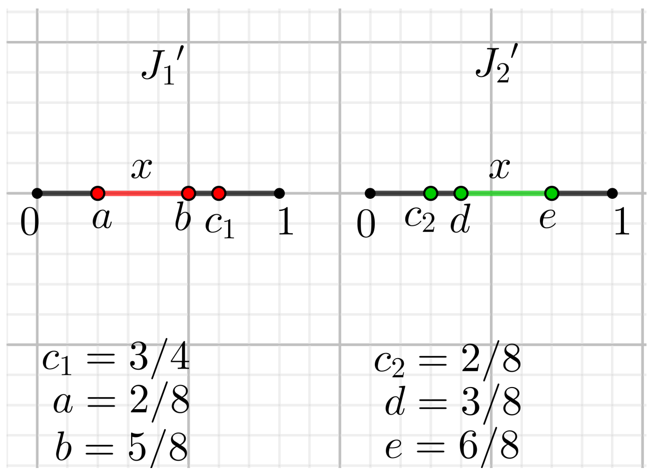
La siguiente figura describe el comportamiento del mapeo f.



Se puede probar que f es un mapeo unión. Mostremos que $F_2(f)$ no es un mapeo unión. Para esto, sea

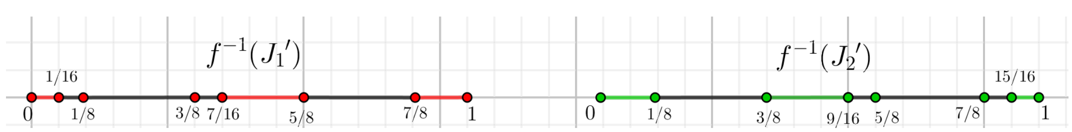
$$\mathcal{B} = \{\{\tfrac{3}{4}, x\} : x \in [\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{8}]\} \cup \{\{\tfrac{1}{4}, x\} : x \in [\tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{4}]\}.$$

Denotemos por $J_1 = \{\{\frac{3}{4}, x\} : x \in [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]\}$, *y* $J_2 = \{\{\frac{1}{4}, x\} : x \in [\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]\}$. *Notemos que* J_1 *y* J_2 *son subcontinuos de* $F_2(Y)$. *Además, el punto* $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ *es un punto en común de* J_1 *y* J_2, *por lo que* $\mathcal{B} = J_1 \cup J_2$ *es un subcontinuo de* $F_2(Y)$.
Sean $J_1' = \{x : x \in [\frac{2}{8}, \frac{5}{8}]\} \cup \{\frac{3}{4}\}$, *y* $J_2' = \{\frac{2}{8}\} \cup \{x : x \in [\frac{3}{8}, \frac{6}{8}]\}$. *Notemos que* J_1' *representa la selección de los puntos de* J_1 *en* Y *(eligiendo siempre el punto* c_1*). De manera análoga* J_2' *con* J_2.



Calculemos $f^{-1}(J_1')$:
(i) $f^{-1}([\frac{2}{8}, \frac{1}{2}]) = [\frac{7}{8}, 1] \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}] \cup \{0\}$,
(ii) $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]) = [0, \frac{1}{16}] \cup \{1\} \cup [\frac{7}{16}, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{3}{4}\}$,
(iii) $f^{-1}(\frac{3}{4}) = \{\frac{1}{8}\} \cup \{\frac{3}{8}\}$.

Calculemos $f^{-1}(J_2')$:
(i) $f^{-1}(\frac{2}{8}) = \{\frac{7}{8}\} \cup \{\frac{5}{8}\}$,
(ii) $f^{-1}([\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]) = \{0\} \cup [\frac{15}{16}, 1] \cup [\frac{1}{2}, \frac{9}{16}]$,
(iii) $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{6}{8}]) = [0, \frac{1}{8}] \cup \{1\} \cup [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$.



Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
F_2(f)^{-1}(\mathcal{B}) &= \{\{1/8, x\} : x \in [0, 1/16]\} \cup \{\{1/8, x\} : x \in [7/16, 5/8]\} \\
&\cup \{\{1/8, x\} : x \in [7/8, 1]\} \cup \{\{3/8, x\} : x \in [0, 1/16]\}\} \\
&\cup \cup\{\{3/8, x\} : x \in [7/16, 5/8]\} \cup \{\{3/8, x\} : x \in [7/8, 1]\} \\
&\cup \{\{5/8, x\} : x \in [0, 1/8]\} \cup \{\{5/8, x\} : x \in [3/8, 9/16]\} \\
&\cup \{\{5/8, x\} : x \in [15/16, 1]\} \cup \{\{7/8, x\} : x \in [0, 1/8]\} \\
&\cup \{\{7/8, x\} : x \in [3/8, 9/16]\} \cup \{\{7/8, x\} : x \in [15/16, 1]\}.
\end{aligned}$$

Sean $\mathcal{C} = \{\{\frac{1}{8}, x\} : x \in [0, \frac{1}{16}]\}$, *y* $\mathcal{D} = \{\{\frac{7}{8}, x\} : x \in [\frac{15}{16}, 1]\}$. *Notemos que* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}$ *son dos componentes de* $F_2^{-1}(\mathcal{B})$. *Además,* $F_2(\mathcal{C}) = \{\{\frac{3}{4}, x\} : x \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]\}$, *y* $F_2(f)(\mathcal{D}) = \{\{\frac{1}{4}, x\} : x \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]\}$. *Así,* $F_2(\mathcal{C}) \cap F_2(\mathcal{D}) = \emptyset$. *Por lo tanto,* $F_2(f)$ *no es un mapeo unión.*

2.9. Mapeo semi abierto

Pedir que un mapeo mande abiertos en abiertos puede ser mucho, pero podemos pedir que el interior de las imagenes de abiertos sea no vacío. Esto es lo que define a la clase de mapeos semi abiertos que estudiamos en esta sección.

Definición 2.9.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **semi abierto** si para todo subconjunto abierto y no vacío U de X, tenemos que $int_Y(f(U)) \neq \emptyset$.*

El resultado principal de esta sección garantiza que los mapeos f y $F_n(f)$ pertenecen a la clase de mapeos semi abiertos, si alguno de ellos pertenece a esta clase.

Teorema 2.9.2. *Si $n \geq 2$, entonces f es semi abierto si y sólo si $F_n(f)$ es semi abierto.*

Demostración. Supongamos que f es un mapeo semi abierto. Sea $n \geq 2$. Mostremos que $F_n(f)$ es un mapeo semi abierto. Sean $\mathcal{U} \in F_n(X)$, y sea $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{U}$. Por la primera parte del Teorema 1.2.10, y el Teorema 1.2.12, existen $U_1, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos de X tales que $\mathcal{A}_0 \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle_n \subset \mathcal{U}$. Como f es semi abierto, para cada $j \in I_k$, $\mathrm{int}_Y(f(U_j)) \neq \emptyset$. Así, por lo teoremas mencionados, $\langle int_Y(f(U_1)), \ldots, int_Y(f(U_k)) \rangle_n$ es un subconjunto abierto de $F_n(Y)$. Afirmamos que $\langle int_Y(f(U_1)), \ldots, int_Y(f(U_k)) \rangle_n \subset F_n(f)(\mathcal{U})$. En efecto, sea $\mathcal{B} \in \langle int_Y(f(U_1)), \ldots, int_Y(f(U_k)) \rangle_n$. Para cada $j \in I_k$, sea $B_j = \mathcal{B} \cap int_Y(f(U_j))$. Notemos que existe $A_j \subset U_j$ tal que $|A_j| = |B_j|$, y $f(A_j) = B_j$.
Sea $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$. Se sigue que $A \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle_n$, y $F_n(f)(A) = \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{B} \in F_n(f)(\langle U_1, \ldots, U_k \rangle_n) \subset F_n(f)(\mathcal{U})$. Hemos probado que $\mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(f)(\mathcal{U})) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F_n(f)$ es semi abierto.
Ahora, sea $n \geq 2$, y supongamos que $F_n(f)$ es semi abierto. Mostremos que f es semi abierto. Sea U un subconjunto abierto de X. Por el Teorema 1.2.10, $\langle U \rangle_n$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Como $F_n(f)$ es semi abierto, $\mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(f)(\langle U \rangle_n)) \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(f)(\langle U \rangle_n))$, existe $\mathcal{V}$ un subconjunto abierto de $F_n(Y)$ tal que

$$\mathcal{A} \in \mathcal{V} \subset F_n(f)(\langle U \rangle_n). \tag{2.9.4}$$

Por el Corolario 2.3.3, $\bigcup \mathcal{V}$ es un subconjunto abierto de Y. Como $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$, $\bigcup \mathcal{V} \neq \emptyset$. Afirmamos que $\bigcup \mathcal{V} \subset f(U)$. Para probar esto, sea $y \in \bigcup \mathcal{V}$. Existe $D \in \mathcal{V}$ tal que $y \in D$. Por (2.9.4), existe $C \in \langle U \rangle_n$ tal que $F_n(f)(C) = D$, es decir, $f(C) = D$. Ya que $C \subset U$, $D \subset f(U)$, es decir, $y \in f(U)$. Así, $\bigcup \mathcal{V} \subset f(U)$. Hemos probado que existe un subconjunto abierto y no vacío de Y que está contenido en $f(U)$. De aquí que, $\mathrm{int}_Y(f(U)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es semi abierto.

■

2.10. Mapeo cuasi interior

La definición de mapeo cuasi interior fue dada en la Definición 2.5.7. Para esta clase de mapeo también tenemos el estudio en las funciones inducidas de los productos simétricos. Recordemos la definición en esta sección.

Podemos debilitar un poco la condición de que un mapeo sea abierto, esto es, que el mapeo sea cuasi interior. La definición fue dada en 2.5.7. Recordémosla en esta sección.

Definición 2.10.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **cuasi interior** si siempre que $y \in Y$, y U es un subconjunto abierto de X que contiene una componente de $f^{-1}(y)$, se tiene que $y \in int_Y(f(U))$.*

Vea el comentario final de esta sección para ejemplos de mapeos cuasi interior.
Uno de los teoremas principales de esta sección es el siguiente:

Teorema 2.10.2. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es cuasi interior, entonces f es cuasi interior.*

Demostración. Sean $y \in Y$, U un subconjunto abierto de X, y C una componente de $f^{-1}(\{y\})$ tal que $C \subset U$. Queremos mostrar que $y \in \text{int}_Y(f(U))$. Por el Lema 2.5.5, $F_n(C)$ es una componente de $(F_n(f))^{-1}(\{y\})$. Sea $A \in F_n(C)$, $A \subset C \subset U$ y, como A tiene a lo más n componentes, $A \in \langle U \rangle_n$. Además, como $\langle U \rangle_n$ es un abierto en la topología de Vietoris para $F_n(Y)$, y como $F_n(f)$ es un mapeo cuasi interior, $\{y\} \in \text{int}_{F_n(Y)}(F_n(f)(\langle U \rangle_n)$. Se sigue que existe un abierto V en $F_n(Y)$ tal que $\{y\} \in V \subset F_n(f)(\langle U \rangle_n)$. Podemos suponer a V como un elemento básico en la topología de Vietoris, por lo que existen $U_1, \ldots, U_m$ subconjuntos abiertos en Y tales que $V = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$. Definamos $V' = U_1 \cap \cdots \cap U_m$. Notemos que V' es un subconjunto abierto de Y no vacío, pues $y \in V'$. Afirmamos que $V' \subset f(U)$. En efecto, sea $x \in V'$, $x \in U_i$ para cada $i \in I_m$, por lo que $\{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \subset F_n(f)(\langle U \rangle_n)$, entonces existe $D \in \langle U \rangle_n$ tal que $F_n(f)(D) = \{x\}$, así $D \subset U$, por lo que $f(D) \subset f(U)$, es decir, $f(D) = \{x\} \subset f(U)$, así que $V' \subset f(U)$. Como $y \in V'$, entonces $y \in \text{int}_Y(f(U))$. Por lo tanto, f es cuasi interior.

■

Veamos que el recíproco al teorema anterior es cierto para $n = 2$. Sin embargo, para $n \geq 3$ no se cumple, esto lo veremos en el Ejemplo 2.12.6 (Ver el comentario final de esta sección).

Teorema 2.10.3. *Si $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo cuasi interior entonces $F_2(f)$ es cuasi interior.*

Demostración. Como f es cuasi interior, por el Teorema 2.5.12, existe un continuo Z, un mapeo monótono $h : X \longrightarrow Z$, y un mapeo abierto $g : Z \longrightarrow Y$ tales que $f = g \circ h$. Por el Teorema 2.4.6, $F_2(h)$ es monótono, y por el Teorema 2.3.5, $F_2(g)$ es un mapeo abiero. Por (ii) de la Proposición 1.2.35, $F_2(f) = F_2(g) \circ F_2(h)$, por lo que $F_2(f)$ es un mapeo OM. Por el Lema 2.5.12, $F_2(f)$ es un mapeo cuasi interior.

■

El siguiente resultado da una equivalencia entre mapeos monótonos f y mapeos cuasi interior $F_n(f)$.

Teorema 2.10.4. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo y $n \geq 3$, entonces f es un mapeo monótono si y sólo si $F_n(f)$ es un mapeo cuasi interior.*

Demostración. Si f es monótona, entonces por el Teorema 2.4.6, $F_n(f)$ es monótono para $n \geq 2$, y por el Corolario 2.5.10, $F_n(f)$ es un mapeo cuasi interior para $n \geq 2$. Para el regreso, supongamos que $F_n(f)$ es un mapeo cuasi interior, con $n \geq 3$. Por la Proposición 2.5.18, $F_n(f)$ es confluente y por el Teorema 2.5.21 f es un mapeo monótono.

■

Existe un mapeo cuasi interior f tal que, para cada $n \geq 3$, el mapeo inducido $F_n(f)$ no es cuasi interior. Este es el Ejemplo 2.12.6. Para ver el ejemplo necesitamos el Lema 2.12.5 que veremos en la sección siguiente y que garantiza que todo mapeo MO es un mapeo OM, seguido del Teorema 2.5.12 que garantiza que la clase de mapeos OM es equivalente la clase de mapeos cuasi interior.

2.11. Mapeo casi abierto

Podemos debilitar un poco la condición de que un mapeo sea abierto, esto es, que el mapeo sea casi abierto. Veamos la definición.

Definición 2.11.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **casi abierto** si para cada $y \in Y$, existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $y \in \cap\{int_Y(f(U)) : x \in U, U$ es un abierto en $X\}$.*

De la definición de mapeo casi abierto se puede probar de manera directa el siguiente teorema.

Teorema 2.11.2. *Si $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un mapeo casi abierto, con $n \geq 2$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo casi abierto.*

Demostración. Sea $n \geq 2$ y supongamos que $F_n(f)$ es un mapeo casi abierto. Mostremos que f es un mapeo casi abierto. Para esto, sea $y \in Y$. Ya que $F_n(f)$ es casi abierto, entonces existe $\mathcal{A} \in F_n(f)^{-1}(\{y\})$ tal que

$$\{y\} \in \cap\{\mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(f)(\mathcal{U})) : \mathcal{A} \in \mathcal{U}, \text{ y } \mathcal{U} \text{ es un abierto en } F_n(X)\}.$$

Sea $x \in \mathcal{A}$. Ya que $F_n(f)(\mathcal{A}) = \{y\}$, se sigue que $x \in f^{-1}(y)$. Queremos probar que $y \in \cap\{\mathrm{int}_Y(f(U)) : x \in U \text{ y } U \text{ es un abierto en } X\}$. Para esto, sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Probemos que $y \in \mathrm{int}_Y(f(U))$.
En efecto, notemos que $\mathcal{A} \in \langle X, U\rangle_n$. Ya que $\langle X, U\rangle_n$ es un abierto en $F_n(X)$, se sigue que $\{y\} \in \mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(f)(\langle X, U\rangle_n))$. Por el Teorema 1.2.10, existen $U_1, \ldots, U_r$ subconjuntos abiertos de Y tales que $\{y\} \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n \subset F_n(f)(\langle X, U\rangle_n)$. Sea $V = \cap_{i=1}^r U_i$. Notemos que V es un subconjunto abierto de Y, y que $y \in V$. Afirmamos que $V \subset f(U)$. En efecto, sea $w \in V$, entonces $\{w\} \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$. Se sigue que existe $B \in \langle X, U\rangle_n$ tal que $F_n(f)(B) = \{w\}$. Como $B \cap U \neq \emptyset$ y $f(B) = \{w\}$, entonces $B \cap U \subset f^{-1}(w)$. Se sigue que $w \in f(U)$. Por tanto, $V \subset f(U)$. Hemos mostrado que $y \in V \subset f(U)$, con V un subconjunto abierto en Y. Así, $y \in \mathrm{int}_Y(f(U))$. La prueba está completa.

■

El recíproco del teorema anterior también es cierto, para ver una prueba de esta afirmación demos antes el siguiente resultado.

Lema 2.11.3. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo, $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_r$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de X, con $r \leq n$, entonces*

$$\langle int_Y(f(U_1)), \ldots, int_Y(f(U_r))\rangle_n \subset F_n(f)(\langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n).$$

Demostración. Sea $B \in \langle \mathrm{int}_Y(f(U_1)), \ldots, \mathrm{int}_Y(f(U_r))\rangle_n$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(b) \cap U_i : i \in I_r, b \in B \cap \mathrm{int}_Y(f(U_i))\}.$$

Notemos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Además, como $r \leq n$ y $|B| \leq n$, entonces existe $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{A}_0| \leq n$, para cada $U \in \{U_1, \ldots, U_r\}$, existe $N \in \mathcal{A}_0$ tal que $N \subset U$, y tal que para cada $b \in B$, existe $M \in \mathcal{A}_0$ tal que $M \subset f^{-1}(b)$.
Sean $h : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \bigcup \mathcal{A}_0$ una función tal que $h(L) \in L$, para cada $L \in \mathcal{A}_0$, y

$$A = \{h(L) : L \in \mathcal{A}_0\}.$$

Notemos que $|A| \leq |\mathcal{A}_0|$, por lo que $A \in F_n(X)$. Afirmamos que $A \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n \cap F_n(f)^{-1}(B)$.

Mostremos primero que $A \in \langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n$. En efecto, sea $a \in A$. Se sigue que existen $U \in \{U_1, \ldots, U_r\}$ y $b \in B$, tales que $U \cap f^{-1}(b) \in \mathcal{A}_0$ y $h(U \cap f^{-1}(b)) = a$. Ya que $h(U \cap f^{-1}(b)) \in U \cap f^{-1}(b)$, entonces $a \in U$, por lo que $A \subset \cup_{i=1}^{r} U_i$. Ahora, sea $U \in \{U_1, \ldots, U_r\}$. Por la elección de $\mathcal{A}_0$, existe $N \in \mathcal{A}_0$ tal que $N \subset U$. Así, $h(N) \in U \cap A$, es decir, $U \cap A \neq \emptyset$. Esto prueba que $A \in \langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n$.
Veamos ahora que $A \in F_n(f)^{-1}(B)$. En efecto, ya que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, tenemos que $F_n(f)(A) \subset B$. Para probar la otra contención, sea $b \in B$. Por la elección de $\mathcal{A}_0$, existe $M \in \mathcal{A}_0$ tal que $M \subset f^{-1}(b)$. Por tanto, $h(M) \in A$ y $f(h(M)) = b$. Concluimos que $F_n(f)(A) = B$.
Como $A \in \langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n$ y $F_n(f)(A) = B$, se tiene que $B \in F_n(f)(\langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n)$. Esto completa la prueba.

■

Teorema 2.11.4. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo casi abierto y $n \geq 2$ entonces $F_n(f)$ es un mapeo casi abierto.*

Demostración. Supongamos que f es un mapeo casi abierto, y $n \geq 2$. Mostremos que $F_n(f)$ es un mapeo casi abierto. Para este fin, sea $B \in F_n(Y)$. Como f es casi abierto, entonces para cada $b \in B$ existe $a_b \in X$ satisfaciendo:

$$b \in \cap\{\mathrm{int}_Y(f(U)) : a_b \in U, \text{ y } U \text{ es un abierto en } X\}.$$

Sea $A = \{a_b : b \in B\}$. Notemos que $A \in F_n(f)^{-1}(B)$. Mostremos que

$$B \in \cap\{\mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(f)(\mathcal{U})) : A \in \mathcal{U}, \text{ y } \mathcal{U} \text{ es un abierto en } F_n(X)\}.$$

En efecto, sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Mostremos que $B \in \mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(f)(\mathcal{U}))$.
Por el Teorema 1.2.10, existen $U_1, \ldots, U_r$ subconjuntos abiertos de X, con $r \leq n$, tales que $A \in \langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n \subset \mathcal{U}$. Así, $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in I_r$. Sea $j \in I_r$. Consideremos $a_b \in A$, para algún $b \in B$, tal que $a_b \in A \cap U_j$. Se sigue que $b \in \mathrm{int}_Y(f(U_j))$, es decir, $\mathrm{int}_Y(f(U_j)) \neq \emptyset$. Así, $\mathrm{int}_Y(f(U_i))$ es un subconjunto abierto no vacío de Y, para cada $i \in I_r$. Por el Teorema 1.2.10, $\langle \mathrm{int}_Y(f(U_1)), \ldots, \mathrm{int}_Y(f(U_r)) \rangle_n$ es un subconjunto abierto no vacío de $F_n(Y)$. Por el Lema 2.11.3, tenemos que

$$\langle \mathrm{int}_Y(f(U_1)), \ldots, \mathrm{int}_Y(f(U_r)) \rangle_n \subset F_n(f)(\langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n) \subset F_n(f)(\mathcal{U}).$$

Afirmamos que $B \in \langle \mathrm{int}_Y(f(U_1)), \ldots, \mathrm{int}_Y(f(U_r)) \rangle_n$. En efecto, sea $b \in B$. Ya que $A \subset \cup_{i=1}^{r} U_i$, entonces existe $U \in \{U_1, \ldots, U_r\}$ tal que $a_b \in U$. Esto, y la elección de a_b, implican que $b \in \mathrm{int}_Y(f(U))$. Así, $b \in \cup_{i=1}^{r} \mathrm{int}_Y(f(U_i))$. Por último, sea $U \in \{U_1, \ldots, U_r\}$. Como $A \in \langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n$, tenemos que $A \cap U \neq \emptyset$. Así, existe $c \in B$ tal que $a_c \in U$. Por la elección de a_c, se sigue que $c \in \mathrm{int}_Y(f(U))$, por lo que $B \cap \mathrm{int}_Y(f(U)) \neq \emptyset$. Concluimos que $B \in \langle \mathrm{int}_Y(f(U_1)), \ldots, \mathrm{int}_Y(f(U_r)) \rangle_n$. Por lo tanto, $B \in \mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(f)(\mathcal{U}))$. Esto termina la prueba.

■

De los dos teoremas de esta sección se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.11.5. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo y $n \geq 2$ entonces f es un mapeo casi abierto si y sólo si $F_n(f)$ es un mapeo casi abierto.*

2.12. Mapeo MO

Definición 2.12.1. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo. Decimos que f es* ***MO****, si existen un continuo Z, un mapeo abierto $h : X \longrightarrow Z$ y un mapeo monótono $g : Z \longrightarrow Y$, tales que $f = g \circ h$.*

El Ejemplo 2.12.6 nos da un ejemplo de un mapeo f que cuasi interior, pero que $F_n(f)$ no lo es para $n \geq 3$.
El primer resultado de mapeos MO es el siguiente:

Teorema 2.12.2. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo MO, entonces $F_2(f)$ es un mapeo MO.*

Demostración. Como f es un mapeo MO, existe un continuo Z, un mapeo abierto $h : X \longrightarrow Z$, y un mapeo monótono $g : Z \longrightarrow Y$ tales que $f = g \circ h$. Por los Teoremas 2.3.5 y 2.4.6, $F_2(h)$ es un mapeo abierto, y $F_2(g)$ es un mapeo monótono. Además, $F_2(f) = F_2(g) \circ F_2(h)$. Por lo tanto, $F_2(f)$ es un mapeo MO.

■

El teorema anterior no se cumple para los casos $n \geq 3$. Antes de dar un ejemplo veamos unos resultados que necesitamos. El primero de ellos es el siguiente:

Lema 2.12.3. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo monótono entonces f es un mapeo MO.*

Demostración. Supongamos que f es un mapeo monótono. Sean $Z = F_1(X)$, $g : Z \longrightarrow Y$ un mapeo definido por, $\{x\} \mapsto f(x)$, y sea $h : X \longrightarrow Z$ un mapeo definido por, $x \mapsto \{x\}$. Por el Corolario 1.2.20, Z es un continuo y, por el Lema 1.2.37, h es un homeomorfismo, por lo que h es un mapeo abierto. Además, es claro que $f = g \circ h$. Mostremos que g es un mapeo monótono. En efecto, sea $y \in Y$, como f es monótono, $f^{-1}(y)$ es conexo y, como h es homeomorfismo, $h(f^{-1}(y))$ es conexo. Puesto que $h(f^{-1}(y)) = g^{-1}(y)$, $g^{-1}(y)$ es conexo, por lo que g es monótono. Por lo tanto, f es un mapeo MO.

■

El siguiente resultado nos da una condición suficiente para que el mapeo $F_n(f)$ sea MO.

Teorema 2.12.4. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo monótono, entonces para $n \geq 3$, $F_n(f)$ es un mapeo MO.*

Demostración. Como f es un mapeo monótono, se sigue del Teorema 2.4.6 que $F_n(f)$ es un mapeo monótono, para $n \geq 3$. Por el Lema 2.12.3, $F_n(f)$ es un mapeo MO.

■

Es natural preguntarnos si existe una relación entre los mapeos OM que se definió en 2.5.11 y los mapeos MO. El siguiente resultado nos da una respuesta afirmativa.

Lema 2.12.5. *Todo mapeo MO es un mapeo OM.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo MO. Se sigue que existen un continuo Z, un mapeo monótono $g : Z \longrightarrow Y$, y un mapeo abierto $h : X \longrightarrow Z$ tales que $f = g \circ h$. Por el Corolario 2.5.10, g es cuasi interior. Afirmamos que f es cuasi interior; en efecto, sean $y \in Y$, C una componente de $f^{-1}(y)$, y U un subconjunto abierto de X tal que $C \subset U$. Como h es abierto, $h(U)$ es un abierto en Z. Como g es monótono, $g^{-1}(y)$ es conexo y así consta de una sola componente. Notemos que $g^{-1}(y) \subset h(U)$. Como g es cuasi interior, $y \in \operatorname{int}_Y(g(h(U))) = \operatorname{int}_Y(f(U))$. Por lo tanto, f es cuasi interior. Por el Teorema 2.5.12, f es OM.

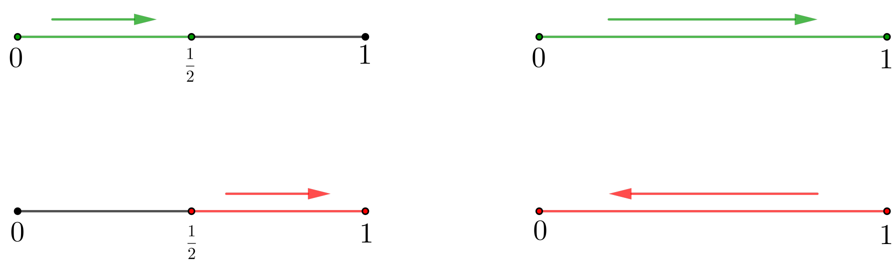
■

Estamos listos para ver un ejemplo que muestra la existencia de un mapeo *MO* f tal que $F_n(f)$ no lo es, para $n \geq 3$.

Ejemplo 2.12.6. *Consideremos la función* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$*, definido por,*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La siguiente figura describe el comportamiento de la función f*.*



Veamos que f *es un mapeo MO pero, para* $n \geq 3$*,* $F_n(f)$ *no es OM (y entonces tampoco es MO).*
En efecto, notemos que f *es un mapeo abierto y que* $f = id \circ f$*. Así,* f *es un mapeo MO. Supongamos que* $F_n(f) : F_n([0,1]) \longrightarrow F_n([0,1])$ *es un mapeo OM, para* $n \geq 3$*. Se sigue que existen un continuo* Z*, un mapeo monótono* $\mathcal{G} : F_n([0,1]) \longrightarrow Z$*, y un mapeo abierto* $\mathcal{H} : Z \longrightarrow F_n([0,1])$ *tal que* $F_n(f) = \mathcal{H} \circ \mathcal{G}$*.*
Observemos que para cada $y \in [0,1]$*,* $f^{-1}(y)$ *tiene a lo más dos elementos. Así, para cada* M *subconjunto finito de* $[0,1]$*,* $f^{-1}(M)$ *es finito, y* $\mathcal{P}(f^{-1}(M)) := \{N : N \subset M\}$ *es finito. Sea* $A \in F_n([0,1])$*. Afirmamos que* $F_n(f)^{-1}(A) \subset \mathcal{P}(f^{-1}(A))$*. Para esto, sea* $B \in F_n(f)^{-1}(A)$*, entonces* $F_n(f)(B) = A$*, por lo que* $f(B) = A$*. Así,* $B \subset f^{-1}(A)$*, es decir,* $B \in \mathcal{P}(f^{-1}(A))$*. Por tanto,* $F_n(f)^{-1}(A) \subset \mathcal{P}(f^{-1}(A))$*. Como* A *es un subconjunto finito de* $[0,1]$*,* $F_n(f)^{-1}(A)$ *es finito.*
Dado $z \in Z$*,* $F_n(f)(\mathcal{G}^{-1}(z)) = (\mathcal{H} \circ \mathcal{G})(\mathcal{G}^{-1}(z)) = \mathcal{H}(z)$*. Así,* $\mathcal{G}^{-1}(z) \subset F_n(f)^{-1}(\mathcal{H}(z))$*. Como* $\mathcal{G}$ *es monótono, y* $F_n(f)^{-1}(\mathcal{H}(z))$ *es finito,* $\mathcal{G}^{-1}(z)$ *es un conjunto unipuntual. Se sigue que* $\mathcal{G}$ *es un mapeo inyectivo. Notemos que* $\mathcal{G}$ *es un homeomorfismo y, en particular* $\mathcal{G}$ *es abierto. Ya que* $\mathcal{H}$ *es abierto,* $F_n(f) = \mathcal{H} \circ \mathcal{G}$ *es abierto. Por el Teorema 2.3.6,* f *es un homeomorfismo, lo cual es falso. Por lo tanto,* $F_n(f)$ *no es un mapeo OM. Por el Lema 2.12.5,* $F_n(f)$ *no es MO.*

Si la función inducida $F_n(f)$ pertenece a la clase de funciones MO entonces f también pertenece a esta clase.

Teorema 2.12.7. *Si* $F_n(f)$*, con* $n \geq 3$*, es un mapeo MO entonces* f *es un mapeo MO.*

Demostración. El resultado se obtiene de una implicación de resultados previos. Como $F_n(f)$ es un mapeo MO, por el Lema 2.12.5, $F_n(f)$ es un mapeo OM y, por el Lema 2.5.12, $F_n(f)$ es un mapeo cuasi interior. Por el Teorema 2.5.18, $F_n(f)$ es confluente. Como $n \geq 3$, entonces por el Teorema 2.5.21 f es monótono y, finalmente por el Teorema 2.12.3 f es MO.

■

No encontré una respuesta para la siguiente pregunta que trata el caso $n = 2$ en el teorema anterior.

Pregunta 6.6 Si $F_2(f)$ es un mapeo MO, ¿$f : X \longrightarrow Y$ es MO?

2.13. Mapeo OM

Recordemos la definición de mapeo OM que se dió en 2.5.11.

Definición 2.13.1. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo. Decimos que f es **OM**, si existen un continuo Z, un mapeo abierto $g : Z \longrightarrow Y$ y un mapeo monótono $h : X \longrightarrow Z$, tales que $f = g \circ h$.*

Un ejemplo de un mapeo OM y otro que no lo es, se dan en el Ejemplo 2.12.6.

Recordemos también que por el Teorema 2.5.12 la clase de mapeos OM y la clase de mapeos cuasi interior son equivalentes, de manera que los resultados obtenidos en esta sección para mapeos OM pueden ser obtenidos de los análogos a los resultados de los mapeos cuasi interior. Sin embargo, damos algunas demostraciones alternas de esta sección.

La siguiente definición es una caracterización importante de los mapeos cuasi interior o mapeos OM.

Definición 2.13.2. *Dada una sucesión $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ de elementos en X, se define $\boldsymbol{limsup}_{m\to\infty} A_m$ como el conjunto de puntos $x \in X$ tal que existe una secuencia de números positivos $m_1 < m_2 < \cdots$, y existen puntos $x_{m_k} \in A_{m_k}$ tal que la sucesión $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a x.*

Proposición 2.13.3. *Un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es cuasi interior si y sólo si para cada sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que converge a un punto $y \in Y$, se tiene que lim $sup_{n\to\infty} f^{-1}(y_n)$ interseca a cada componente de $f^{-1}(y)$.*

Demostración. Supongamos que f es cuasi interior y sea $y \in Y$. Tomemos una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y que converge a y. Sean C una componente de $f^{-1}(y)$ y U un abierto de X que contiene a C. Como f es cuasi interior, $y \in \text{int}_Y(f(U))$, es decir, $f(U)$ es una vecindad de y en Y. Así, existe un natural N tal que para todo $n \geq N$, $y_n \in f(U)$. Se sigue que $f^{-1}(y_n) \subset U$, para cada $n \geq N$. Tomando puntos de estos conjuntos cerrados lo suficientemente cerca de C, obtenemos $C \cap limsup_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) \neq \emptyset$.
Para mostrar el regreso, sean U un subconjunto abierto de X, y C una componente de $f^{-1}(y)$ contenida en U. Razonando por contradicción, supongamos que $y \notin \text{int}_Y(f(U))$. Se sigue que existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $Y \setminus f(U)$ que converge a y. Así, $f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(Y \setminus f(U)) = X \setminus f^{-1}(f(U)) \subset X \setminus U$. Como $X \setminus U$ es un cerrado en X, entonces $limsup_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U \subset X \setminus C$, es decir, $C \cap limsup_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = \emptyset$, lo cual es falso. Por lo tanto, $y \in \text{int}_Y(f(U))$.

■

El siguiente teorema es una caracterización de los mapeos OM.

Teorema 2.13.4. *Un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es OM si y sólo si para cada sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que converge a un punto $y \in Y$, se tiene que lim $sup_{n\to\infty} f^{-1}(y_n)$ interseca a cada componente de $f^{-1}(y)$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.5.12 y de la Proposición 2.13.3.

■

El siguiente teorema es el análogo al Teorema 2.10.2.

Teorema 2.13.5. *Sea $n \geq 2$ y $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo. Si $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un mapeo OM, entonces f es OM.*

Demostración. Sean $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en Y que converge a un punto $y \in Y$, y C una componente de $f^{-1}(y)$. Para probar que f es un mapeo OM, por el Teorema 2.13.4, basta probar que $C \cap limsup_{m\to\infty} f^{-1}(y_m) \neq \emptyset$. Por el Lema 2.5.5, $F_1(C)$ es una componente de $F_1(f)^{-1}(F_1(\{y\})) = F_1(f)^{-1}(\{y\})$. Como $F_1(f)^{-1}(\{y\}) \subset F_n(f)^{-1}(\{y\})$ y $F_1(C)$ es conexo, consideremos la componente $\mathcal{C}$ de $F_n(f)^{-1}(\{y\})$ que contiene a $F_1(C)$. Por el Lema 2.5.3, $\bigcup \mathcal{C}$ es conexo. Afirmamos que $C = \bigcup \mathcal{C}$. En efecto, sea $x \in C$, entonces $\{x\} \in F_1(C) \subset \mathcal{C}$. De aquí que, $x \in \bigcup \mathcal{C}$. Ahora, sea $x \in \bigcup \mathcal{C}$, existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$. Ya que $A \in \mathcal{C} \subset F_n(f)^{-1}(\{y\})$, $F_n(f)(A) = \{y\}$. Así, $f(x) = y$, por lo que $x \in f^{-1}(y)$. Se sigue que $\bigcup \mathcal{C} \subset f^{-1}(y)$. Ya que $\bigcup \mathcal{C}$ es conexo, $C \subset \bigcup \mathcal{C}$ y C es una componente de $f^{-1}(y)$, tenemos que $C = \bigcup \mathcal{C}$.
Como $F_n(f)$ es OM y $(\{y_m\})_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión en $F_n(Y)$ que converge a $\{y\}$, por el Teorema 2.13.4, existe $A \in \mathcal{C} \cap Limsup_{m\to\infty} F_n(f)^{-1}(\{y_m\})$. Así, existen enteros positivos $m_1 < m_2 < \cdots$, y elementos $A_{m_k} \in F_n(f)^{-1}(\{y_{m_k}\})$ tal que $(A_{m_k})_{m=1}^{\infty}$ converge en $F_n(X)$ a A. Sea $x \in A$. Por el Lema 1.3.4, existe una sucesión de puntos $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ en X que converge a x, tal que $x_{m_k} \in A_{m_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Ya que $F_n(f)(A_{m_k}) = \{y_{m_k}\}$,$f(x_{m_k}) = y_{m_k}$. Así, $x_{m_k} \in f^{-1}(y_{m_k})$. Se sigue que $x \in limsup_{m\to\infty} f^{-1}(y_m)$. Además, como $x \in A \in \mathcal{C}$, y $\bigcup \mathcal{C} = C$, $x \in C$. Por lo tanto, $x \in C \cap limsup_{m\to\infty} f^{-1}(y_m)$. Esto completa la prueba.

■

EL siguiente teorema es el equivalente al Teorema 2.10.3.

Teorema 2.13.6. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo OM, entonces $F_2(f)$ es OM.*

Demostración. Análogo a la demostración del Teorema 2.12.2.

■

Por el Ejemplo 2.12.6, existe un mapeo $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que es OM (pues f es abierto y $f = f \circ id$), pero que $F_n(f)$ no lo es, para cada $n \geq 3$.

2.14. Mapeo homeomorfismo local

El concepto de homeomorfismo local es muy importante en el estudio de propiedadades topológicas. Veamos la definición:

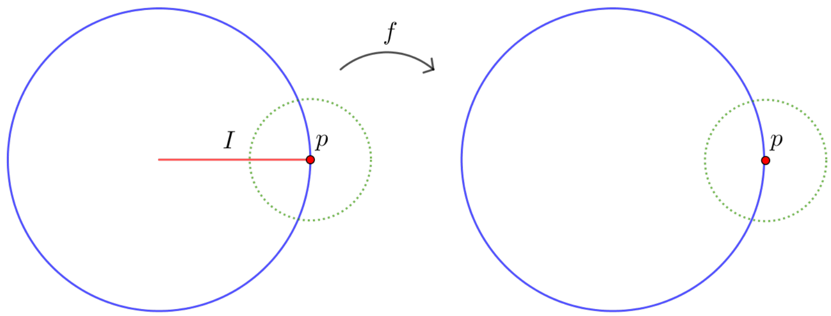
Definición 2.14.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es* ***homeomorfismo local*** *si para cada $x \in X$, existe un abierto U de X tal que $x \in U$, $f(U)$ es abierto en Y, y la función restricción $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ es un homeomorfismo.*

Un ejemplo de un mapeo homeomorfismo local f se da en el Ejemplo 2.2.4, esto ya que para cada punto p de S^1 se puede elegir un subconjunto abierto lo suficientemente pequeño U de S^1 que contenga a p y que $f|_U$ sea un homeomorfismo. El siguiente ejemplo muestra un mapeo que no es homeomorfismo local.

Ejemplo 2.14.2. *Sea $I = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$ y $f : S^1 \cup I \longrightarrow S^1$ el mapeo que es la identidad en S^1 y que mapea I en el punto $p = (1,0)$. Veamos la siguiente figura.*

Notemos que no existe un abierto U de $S^1 \cup I$ que contenga al punto p y que $f|_U$ sea un homeomorfismo, por lo que concluimos que f no es un mapeo homeomorfismo local (aunque sí lo sea en cada punto de $S^1 \setminus I$).

El siguiente resultado muestra que una condición suficiente para que un mapeo f sea abierto es que sea un mapeo homeomorfismo local. Este resultado servirá para probar el



Teorema principal de esta sección.

Lema 2.14.3. *Todo mapeo homeomorfismo local es un mapeo abierto.*

Demostración. En efecto, sean $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo local, y U un subconjunto abierto de X. Mostremos que $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y. Para esto, sea $y \in f(U)$, entonces existe $x \in U$ tal que $f(x) = y$. Como f es un homeomorfismo local, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V$, $f(V)$ es un abierto en Y, y la restricción $f|_V : V \longrightarrow f(V)$ es un homeomorfismo. Ya que $U \cap V$ es un abierto en X y $U \cap V \subset V$ se sigue que $U \cap V$ es un abierto en V. Como $f|_V$ es un homeomorfismo, entonces $f|_V(U \cap V)$ es un abierto en V, el cual es asu vez un abierto en Y. Se sigue que $f|_V(U \cap V)$ es un abierto en Y. Además, como $x \in U \cap V$, entonces $y = f(x) \in f|_V(U \cap V) \subset f(U)$. Esto prueba que $f(U)$ es un abierto en Y.

■

La siguiente proposición es una caracterización de los mapeos homeomorfismo local. El lector puede consultar [12, Teorema 4.27].

Proposición 2.14.4. *si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo, entonces f es un homeomorfismo local si y sólo si f es un mapeo abierto y existe un entero positivo n tal que $|f^{-1}(y)| = n$, para cada $y \in Y$.*

Los resultados principales de esta sección se obtienen como una consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 2.14.5. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo y $n \geq 2$, entonces $F_n(f)$ es un homeomorfismo local si y sólo si f es un homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que $F_n(f)$ es un homeomorfismo local para $n \geq 3$. Por el Lema 2.14.3, $F_n(f)$ es un mapeo abierto y, por el Teorema 2.3.4, f es un homeomorfismo. Veamos el caso $n = 2$.
Supongamos que $F_2(f)$ es un homeomorfismo local. Mostremos que f es un homeomorfismo. Por hipótesis f es una función continua y sobreyectiva. Por el Lema 2.14.3, $F_2(f)$ es un mapeo abierto y, por el Teorema 2.3.4, f es un mapeo abierto. Mostremos que f es una función inyectiva. Para este fin, mostraremos que $|f^{-1}(y)| = 1$, para cada $y \in Y$. En efecto, por la Proposición 2.14.4 existe un entero positivo m tal que $|F_2(f)^{-1}(A)| = m$, para cada $A \in F_2(Y)$. Afirmamos que $m = \frac{|f^{-1}(y)|(|f^{-1}(y)|+1)}{2}$, para cada $y \in Y$. Para probar esto, sea $y \in Y$. Notemos que $|F_2(f)^{-1}(\{y\}) \cap F_1(X)| = |f^{-1}(y)|$, y que el conjunto $F_2(f)^{-1}(\{y\}) \cap (F_2(X) \setminus F_1(X))$ consta de los subconjuntos de dos elementos de X que son mapeados por

f sobre $\{y\}$. Así, $|F_2(f)^{-1}(\{y\}) \cap (F_2(X) \setminus F_1(X))|$ es el coeficiente binomial de $\binom{|f^{-1}(y)|}{2}$. Ya que $\binom{|f^{-1}(y|)}{2} = \frac{|f^{-1}(y)|!}{2(|f^{-1}(y)|-2)!} = \frac{|f^{-1}(y)|(|f^{-1}(y)|-1)}{2}$, se sique que

$$m = |F_2(f)^{-1}(\{y\})| = |f^{-1}(y)| + \frac{|f^{-1}(y)|(|f^{-1}(y)| - 1)}{2} = \frac{|f^{-1}(y)|(|f^{-1}(y)| + 1)}{2}.$$

Como y fue arbitrario, se sigue que la igualdad anterior es cierta para cada $y \in Y$.
De la igualdad anterior se sigue que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $r = |f^{-1}(y)|$, para cada $y \in Y$. Finalmente, sea $\{a, b\} \in F_n(Y)$, con $a \neq b$. Notemos que $F_2(f)^{-1}(\{a, b\}) = \langle f^{-1}(a), f^{-1}(b)\rangle_2$, y que $|\langle f^{-1}(a), f^{-1}(b)\rangle_2| = |f^{-1}(a) \times f^{-1}(b)| = r^2$. Así, $m = r^2 = \frac{r(r+1)}{2}$, es decir, $r^2 = r$, por lo que $r = 1$. Esto termina la prueba de que f es un homeomorfismo.
La otra implicación del enunciado se sigue del Teorema 2.1.7, y del hecho de que cada homeomorfismo es un homeomorfismo local.

■

Teorema 2.14.6. *Si $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un mapeo homeomorfismo local, con $n \geq 2$, entonces f también lo es.*

Demostración. Sean $n \geq 2$ y $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ un mapeo homeomorfismo local. Por el Teorema 2.14.5, f es un homeomorfismo. Notemos que todo homeomorfismo es un homeomorfismo local. Concluimos que f es un mapeo homeomorfismo local.

■

El siguiente resultado muestra que el recíproco al teorema anterior no es cierto.

Teorema 2.14.7. *Existe un mapeo homeomorfismo local f tal que $F_n(f)$ no es un mapeo homeomorfismo local para todo $n \geq 2$.*

Demostración. En efecto, la función f del Ejemplo 2.14.2 es un mapeo homeomorfismo local. Supongamos que $F_n(f)$ es un mapeo homeomorfismo local para algún $n \geq 2$, entonces por el Teorema 2.14.5 f es un homeomorfismo, lo cual no es cierto pues f no es inyectiva. Concluimos que para cada $n \geq 2$, $F_n(f)$ no es un mapeo homeomorfismo local.

■

2.15. Mapeo fuertemente monótono

Las funciones que pertenecen a la clase de función que veremos en esta sección, estudian la irreducibilidad de las preimágenes de continuos irreducibles. Comencemos esta sección con un par de definiciones.

Definición 2.15.1. *Decimos que un continuo X es **irreducible** si no existe un subcontinuo propio de X que contenga a $\{p, q\}$ para algunos p y q en X.*

Ejemplo 2.15.2. *El continuo $[0, 1]$ es irreducible, pues para $0, 1 \in [0, 1]$, no existe un subcontinuo propio de $[0, 1]$ que contenga a $\{0, 1\}$.*

Definición 2.15.3. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **fuertemente monótono** si $f^{-1}(B)$ es un continuo irreducible para cada subcontinuo irreducible B de Y.*

En el Ejemplo 2.15.6 se da un ejemplo de un mapeo fuertemente monótono (y de otro que no lo es).

El siguiente resultado nos da una caracterización de los mapeos monótonos (de donde podemos suponer el por qué del nombre fuertemente monótono).

Lema 2.15.4. *Para un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ son equivalentes las siguientes afirmaiones:*
(1) f es monótono.
(2) Para cada subcontinuo irreducible B de Y, tenemos que $f^{-1}(B)$ es un continuo.

Demostración. Si f es monótono, entonces $f^{-1}(B)$ es un subcontinuo de X, para todo $B \in C(Y)$ (la conexidad se sigue del Lema 2.5.13 y la compacidad de que B es cerrado en Y y f es continua). Supongamos ahora que (2) es cierto. Sea B un subcontinuo de Y, mostremos que $f^{-1}(B)$ es conexo. Para esto, sea $p \in f^{-1}(B)$. Se tiene que $f(p) \in B$ y, por [10, Teorema 1, p.192], se sigue que para cada $b \in B \setminus \{f(p)\}$, existe un subcontinuo irreducible $B^b_{f(p)}$ entre $f(p)$ y b contenido en B. Notemos que $B = \bigcup\{B^b_{f(p)} : b \in B\}$. Se sigue que $f^{-1}(B) = \bigcup\{f^{-1}(B^b_{f(p)}) : b \in B\}$. Por la hipótesis de (2), tenemos que para cada $b \in B \setminus \{f(p)\}$, $f^{-1}(B^b_{f(p)})$ es un continuo. Ya que $p \in f^{-1}(B^b_{f(p)})$ para cada $b \in B \setminus \{f(p)\}$, tenemos que $f^{-1}(B)$ es la unión de una familia de continuos con intersección no vacía. Se sigue que, $f^{-1}(B)$ es conexo. Por el Lema 2.5.13, f es monótono.

■

Teorema 2.15.5. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es un mapeo fuertemente monótono, entonces f también lo es.*

Demostración. Supongamos que $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un mapeo fuertemente monótono. Sean Q un subcontinuo irreducible de Y, y E un elemento en $F_{n-1}(Y \setminus Q)$ con $|E| = n-1$, digamos $E = \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Sea $\mathcal{Q} = \langle Q, \{e_1\}, \ldots, \{e_{n-1}\}\rangle_n$. Notemos que

$$\mathcal{Q} = \{\{q\} \cup E : q \in Q\}.$$

Tenemos que $\mathcal{Q}$ es una familia de subconjuntos de n elementos de Y, y es homeomorfo a Q. Por lo tanto, $\mathcal{Q}$ es un subcontinuo irreducible de $F_n(Y)$. Como $F_n(f)$ es fuertemente monótono, entonces $F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ es un continuo irreducible, digamos irreducible entre A y B. Sean $a \in A \cap f^{-1}(Q)$, y $b \in B \cap f^{-1}(Q)$. Afirmamos que $f^{-1}(Q)$ es irreducible entre a y b. Para este fin, por el Lema 2.15.4, tenemos que $F_n(f)$ es monótono y, por el Teorema 2.4.6, f es monótono. Sea $\mathcal{E} = \{f^{-1}(e_1), \ldots, f^{-1}(e_{n-1})\}$. Como f es monótono, $\mathcal{E} \subset C(X)$, y $f^{-1}(Q) \in C(X)$. Definamos

$$\langle\{f^{-1}(Q)\} \cup \mathcal{E}\rangle_n = \langle f^{-1}(Q), f^{-1}(e_1), \ldots, f^{-1}(e_{n-1})\rangle_n.$$

Mostremos que $F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q}) = \langle\{f^{-1}(Q)\} \cup \mathcal{E}\rangle_n$. En efecto, sea $C \in F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$, se sigue que existe $q \in Q$ tal que $F_n(f)(C) = \{q\} \cup E$, y así $|C| = n$. Además, para cada $i \in I_{n-1}$, $C \subset f^{-1}(Q) \cup f^{-1}(e_i)$, $C \cap f^{-1}(e_i) \neq \emptyset$, y $C \cap f^{-1}(Q) \neq \emptyset$. Lo anterior implica que $C \in \langle\{f^{-1}(Q)\} \cup \mathcal{E}\rangle_n$. Para la otra contención, sea $C \in \langle\{f^{-1}(Q)\} \cup \mathcal{E}\rangle_n$, entonces $|C| = n$ y $F_n(f)(C) = \{q\} \cup E$, para algún $q \in Q$. Se sigue que $F_n(f)(C) \in \mathcal{Q}$, es decir, $C \in F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$. Por lo tanto,

$$F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q}) = \langle\{f^{-1}(Q)\} \cup \mathcal{E}\rangle_n.$$

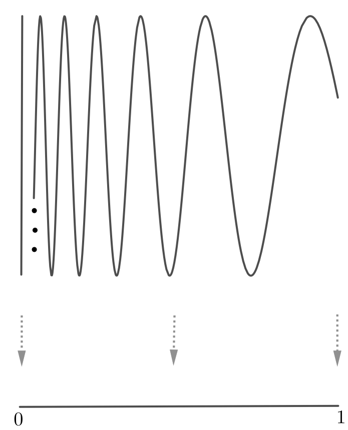
Ahora mostremos que $f^{-1}(Q)$ es irreducible entre a y b. En efecto, Sea Z un subcontinuo de X tal que $a, b \in Z \subset f^{-1}(Q)$. Notemos que $A, B \in Z \cup f^{-1}(E)$, $Z \cap A \neq \emptyset \neq Z \cap B$, y $A \cap f^{-1}(e_i) \neq \emptyset \neq B \cap f^{-1}(e_i)$, para cada $i \in I_{n-1}$. Se sigue que $A, B \in \langle Z, f^{-1}(e_1), \ldots, f^{-1}(e_{n-1})\rangle_n =: \langle\{Z\} \cup \mathcal{E}\rangle_n$. Como $Z \subset f^{-1}(Q)$, tenemos que $\langle\{Z\} \cup \mathcal{E}\rangle_n \subset$

$\langle \{f^{-1}(Q)\} \cup \mathcal{E} \rangle_n$. Ademá, ya que $f^{-1}(Q)$ y $f^{-1}(e_i)$ son subcontinuos de X, para cada $i \in I_{n-1}$, se sigue del Lema 2.4.4 que $\langle \{Z\} \cup \mathcal{E} \rangle_n$ es un subcontinuo de $F_n(X)$ satisfaciendo que $A, B \in \langle \{Z\} \cup \mathcal{E} \rangle_n \subset F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$. Ya que $F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ es irreducible entre A y B, se sigue que $F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q}) = \langle \{Z\} \cup \mathcal{E} \rangle_n$.
Sean $x \in f^{-1}(Q)$ y $K \in \langle \{f^{-1}(Q)\} \cup \mathcal{E} \rangle_n$ con $x \in K$. Como $f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(e_i) = \emptyset$, para cada $i \in I_{n-1}$, entonces $x \notin f^{-1}(e_i)$, para cada $i \in I_{n-1}$. Además, como $\langle \{f^{-1}(Q)\} \cup \mathcal{E} \rangle_n = \langle \{Z\} \cup \mathcal{E} \rangle_n$, se sigue que $K \in \langle \{Z\} \cup \mathcal{E} \rangle_n$, por lo que $x \in Z$. Así, $f^{-1}(Q) = Z$. Por lo tanto, $f^{-1}(Q)$ es irreducible entre a y b. Esto concluye la prueba.

■

El siguiente Ejemplo muestra que el recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir, que existe un mapeo fuertemente monótono $f : X \longrightarrow Y$, tal que $F_n(F)$ no es fuertemente monótono, para cada $n \geq 2$.

Ejemplo 2.15.6. *Sean* $X = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$, *y* $Y = [0, 1]$. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función definida por* $f((x, y)) = x$. *Veamos la siguiente figura.*



El continuo Y *es irreducible entre los puntos* 0 *y* 1 *(los extremos del intervalo), y* $f^{-1}(Y)$ *es irreducible entre los puntos* $(0, y)$ *(para algún* $y \in [-1, 1]$*) y* $f^{-1}(1)$. *Como los subcontinuos* B *de* Y *que son irreducibles son subintervalos, se sigue de un razonamiento similar a lo anterior que* $f^{-1}(B)$ *es irreducible. Por lo tanto,* f *es un mapeo fuertemente monótono. Mostremos que* $F_n(f)$ *no lo es, para* $n \geq 2$.
En efecto, sea $\mathcal{I} = \{\{0, y\} : y \in [0, 1]\}$. *Notemos que* $\mathcal{I}$ *es un subconjunto de* $F_2(Y)$ *que es homeomorfo a* Y, *por lo que* $\mathcal{I}$ *es un subcontinuo irreducible de* $F_2(Y)$. *Mostremos que* $F_n(f)^{-1}(\mathcal{I})$ *no es irreducible. En efecto, notemos primero que*

$$F_n(f)^{-1}(\mathcal{I}) = \{\{(0, y'), (y, sen(1/y))\} : y' \in [-1, 1], y \in (0, 1]\} \cup \{(0, y') : y' \in [-1, 1]\}.$$

Sean $A, B \in F_n(f)^{-1}(\mathcal{I})$. *Se sique que existen* $a \in A \cap f^{-1}(0)$ *y* $b \in B \cap f^{-1}(0)$. *Sean* $\mathcal{A} = \{\{a, x\} : x \in X\}$, $\mathcal{B} = \{\{b, x\} : x \in X\}$, *y* $\mathcal{F} = \langle f^{-1}(0) \rangle_n \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. *Notemos que* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *son homeomorfos a* X, *por lo que* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in C(F_n(X))$. *Además, como* $f^{-1}(0)$ *es conexo y cerrado,* $f^{-1}(0)$ *es un subcontinuo de* X, *por lo que* $\langle f^{-1}(0) \rangle_n \in C(F_n(X))$. *Ya que* $\{a\} \in \langle f^{-1}(0) \rangle_n \cap \mathcal{A}$, *y* $\{b\} \in \langle f^{-1}(0) \rangle_n \cap \mathcal{B}$, *se sique que* $\mathcal{F} \in C(F_n(X))$.
Sea $c \in f^{-1}(0)$, *con* $a \neq c \neq b$, *entonces* $\{c, x\} \notin \mathcal{F}$, *para cada* $x \in X \setminus \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$. *Así,* $\mathcal{F}$ *es un subcontinuo propio de* $F_n(X)$. *Finalmente, tenemos que* $A \in \langle f^{-1}(0) \rangle_n$ *o* $A \in \mathcal{A}$, *y* $B \in \langle f^{-1}(0) \rangle_n$ *o* $B \in \mathcal{B}$, *es decir,* $A, B \in \mathcal{F}$. *Por lo tanto,* $F_n(f)^{-1}(\mathcal{I})$ *no es irreducible. Esto prueba que* $F_n(f)$ *no es un mapeo fuertemente monótono, para* $n \geq 2$.

2.16. Mapeo casi monótono

En esta sección estudiamos la clase de funciones que debilita de manera natural a la clase de funciones que son mapeos monótonos, esto es, que las preimagenes de subcontinuos con interior no vacío sean conexos.

Definición 2.16.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es* ***casi monótono*** *si siempre que para cada subcontinuo B de Y con interior no vacío, se tiene que $f^{-1}(B)$ es conexo.*

Un ejemplo de un mapeo que es casi monótono y otro donde no lo es se dan en el Ejemplo 2.16.6.
El primer resultado importante de esta sección es el siguiente:

Teorema 2.16.2. *Sea $n \geq 2$, si $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un mapeo casi monótono, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo casi monótono.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y con interior no vacío. Mostremos que $f^{-1}(B)$ es conexo. Por el Lema 2.4.4, $\langle B \rangle_n$ es conexo. Además, como B es cerrado en Y, $\langle B \rangle_n$ es cerrado en $F_n(Y)$, por lo que $\langle B \rangle_n$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$ y, como $\langle \text{int}_Y(B) \rangle_n \subset \langle B \rangle_n$, $\text{int}_{F_n(Y)}(\langle B \rangle_n) \neq \emptyset$. Se sigue que $F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n)$ es conexo. Veamos que $F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n) \cap C(X) \neq \emptyset$. En efecto, sea $b \in B$, existe $a \in f^{-1}(b)$, por lo que $\{a\} \in F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n)$, y $\{a\} \in C(X)$. Por el Lema 2.4.5, $\bigcup F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n)$ es conexo. Afirmamos que $\bigcup F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n) = f^{-1}(B)$. En efecto, sea $x \in f^{-1}(B)$, entonces $\{f(x)\} \in \langle B \rangle_n$. Así, $\{x\} \in F_n(f)^{-1}(\{f(x)\}) \subset F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n)$. Por lo tanto, $x \in \bigcup F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n)$. Para la otra contención, sea $x \in \bigcup F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n)$, entonces existe $A \in F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n)$ tal que $x \in A$. Ya que $F_n(f)(A) \in \langle B \rangle_n$, $f(A) \subset B$, por lo que $f(x) \in B$, y así $x \in f^{-1}(B)$. Hemos probado que $\bigcup F_n(f)^{-1}(\langle B \rangle_n) = f^{-1}(B)$. Por lo tanto, f es casi monótono.

■

El siguiente resultado muestra que si el espacio Y es un continuo de Peano entonces la clase de mapeos monótonos y la clase de mapeos casi monótonos coinciden.

Proposición 2.16.3. *Si Y es localmente conexo entonces $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo casi monótono si y sólo si f es monótono.*

Demostración. Si f es un mapeo monótono entonces, por el Lema 2.5.13, f es casi monótono. Supongamos que f es casi monótono. Sea $y \in Y$, como Y es localmente conexo, por el Lema 1.3.22, existe una sucesión $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de Peano de Y, tal que $\{y\} = \cap_{n=1}^{\infty} Y_n$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $y \in \text{int}_Y(Y_n)$, y $Y_{n+1} \subset Y_n$. Como f es casi monótono, $f^{-1}(Y_n)$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $f^{-1}(y) = \cap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(Y_n)$ es conexo. Por lo tanto, f es un mapeo monótono.

■

Una manera de garantizar que la función inducida $F_n(f)$ es un mapeo casi monótono, si f lo es, es que el contino Y sea de Peano.

Teorema 2.16.4. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo casi monótono y Y es localmente conexo, entonces $F_n(f)$ es casi monótono, para cada $n \geq 2$.*

Demostración. Sea $n \geq 2$. Como Y es localmente conexo y f es casi monótono, por la Proposición 2.16.3, f es monótono y por el Teorema 2.4.6 $F_n(f)$ es un mapeo monótono.

Por el Lema 2.5.13, $F_n(f)$ es casi monótono.

■

El siguiente lema sirve para mostrar que la condición de que Y sea un continuo de Peano en el teorema anterior, es necesaria. Para ello definamos $C_0(X) = \{A \in C(X) : \mathrm{int}_X(A) \neq \emptyset\}$, el cual nos servirá en el siguiente lema.

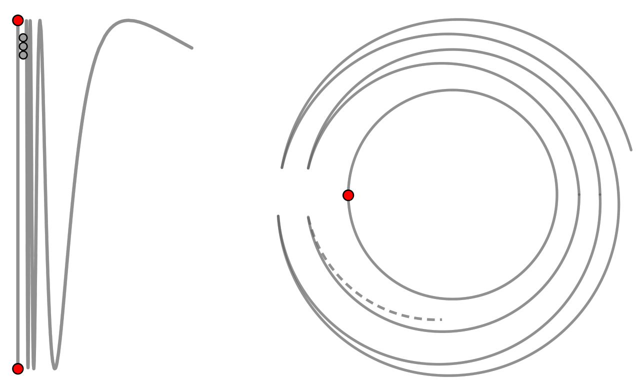
Lema 2.16.5. *Para $n \geq 2$, $\{\langle K \rangle_n : K \in C_0(X)\} \subset C_0(F_n(X))$.*

Demostración. Sea $K \in C_0(X)$. Como $K \in C(X)$, $\langle K \rangle_n$ es un subcontinuo de $F_n(X)$. Como $\mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$, $\langle \mathrm{int}_X(K) \rangle_n$ es un abierto no vacío en $F_n(X)$. Ya que $\langle \mathrm{int}_X(K) \rangle_n \subset \langle K \rangle_n$, $\mathrm{int}_{F_n(X)} \langle K \rangle_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\langle K \rangle_n \in C_0(F_n(X))$.

■

Existe un mapeo casi monótono $f : X \longrightarrow Y$, donde Y no es localmente conexo, tal que $F_n(f)$ no es casi monótono para $n \geq 2$, este mapeo es descrito en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.16.6. *Sean $X = \{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$, y Y el espacio identificación de X obtenido de identificar los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ a un punto. Sea $f : X \longrightarrow Y$ la función identificación. Veamos la siguiente figura.*



Notemos que f es casi monótono. Sean

$$Q = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in [\frac{1}{2}, 1]\} \quad y \quad \mathcal{Q} = F_1(Y) \cup \langle f(Q) \rangle_n.$$

Afirmamos que $\mathcal{Q}$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$. En efecto, como $(0,-1), (0,1) \notin Q$, $f(Q)$ es homeomorfo a Q. Así, $f(Q)$ es cerrado y conexo en Y. Se tiene que $\langle f(Q) \rangle_n$ es un cerrado en $F_n(X)$ que es compacto. Por tanto, $\langle f(Q) \rangle_n$ es compacto en $F_n(Y)$. Además, por el Lema 2.4.4, $\langle f(Q) \rangle_n$ es conexo. Por lo tanto, $\langle f(Q) \rangle_n \in C(F_n(X))$. Ya que $F_1(Y) \cap \langle f(Q) \rangle_n = F_1(f(Q)) \neq \emptyset$, $\mathcal{Q}$ es conexo. Como $\mathcal{Q}$ es unión de dos cerrados en $F_n(Y)$, $\mathcal{Q}$ es compacto. Por lo tanto, $\mathcal{Q} \in C(F_n(Y))$. Además, es claro que $f(Q) \in C_0(Y)$. Por el Lema 2.16.5, $\langle f(Q) \rangle_n \in C_0(F_n(Y))$. Así, deducimos que $\mathcal{Q} \in C_0(F_n(Y))$. Ahora notemos que

$$F_n(f)^{-1}(\mathcal{Q}) = F_n(f)^{-1}(F_1(Y)) \cup F_n(f)^{-1}(\langle f(Q) \rangle_n) = (F_1(X) \cup \{(0,1), (0,-1)\}) \cup \langle Q \rangle_n,$$

el cual no es conexo, por lo tanto, $F_n(f)$ no es casi monótono, para $n \geq 2$.

2.17. Mapeos cuasi monónoto y débilmente monótono

En esta sección se estudia un par de clases que debilitan el ser un mapeo casi monótono. Veamos las definiciones de estas clases de mapeos.

Definición 2.17.1. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo y B un subcontinuo de Y con interior no vacío, decimos que f es un mapeo:*
(i) ***cuasi monónoto*** *si $f^{-1}(B)$ tiene un número finito de componentes y cada una de estas componentes es mapeada por f sobre B.*
(ii) ***débilmente monótono*** *si cada componente de $f^{-1}(B)$ es mapeada por f sobre B.*

Notemos que todo mapeo cuasi monótono es débilmente monótono. Ejemplos de funciones que pertenecen (y también de las que no pertenecen) a las clases de mapeos de la definición anterior se dan en el Ejemplo 2.17.6.

El primer resultado de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.17.2. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es cuasi monótono entonces f es cuasi monótono.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y tal que $\mathrm{int}_Y(B) \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathrm{int}_Y(B)$, existe un subconjunto abierto de Y, U, tal que $y \in U \subset B$. Así $\{y\} \in \langle U \rangle_n \subset F_n(B)$. Como $F_n(B)$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$ tal que $\mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(B)) \neq \emptyset$ y, $F_n(f)$ es un mapeo cuasi monótono, entonces $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$ tiene un número finito de componentes $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_r$, y $F_n(f)(\mathcal{K}_i) = F_n(B)$, para cada $i \in I_r$. Sea C una componente de $f^{-1}(B)$, por el Lema 2.5.5, $F_n(C)$ es una componente de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$, por lo que existe $j \in I_r$ tal que $F_n(C) = \mathcal{K}_j$.
Afirmamos que $\bigcup \mathcal{K}_j$ es conexo. En efecto, notemos primero que $\mathcal{K}_j$ es un subcontinuo de 2^X, pues por definición es conexo y, al ser componente es cerrado en $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$, como $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$ es cerrado en 2^X, $\mathcal{K}_j$ es cerrado en 2^X, el cual es compacto. Así $\mathcal{K}_j$ es compacto en 2^X. Por lo tanto, $\mathcal{K}_j \in C(2^X)$. Como cada elemento de $\mathcal{K}_j$ tiene a lo más n componentes, $\mathcal{K}_j \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Lema 2.5.4, entonces $\bigcup \mathcal{K}_j$ es un subconjunto cerrado de X. Sea W una componente de $\bigcup \mathcal{K}_j$, W es cerrado en un subconjunto cerrado de X, por lo que W es cerrado en X, y así W es compacto. Se sigue que W es un subcontinuo de X, por lo que $\mathcal{K}_j \cap C(X) \neq \emptyset$. Como se cumplen las hipótesis del Lema 2.4.5, $\bigcup \mathcal{K}_j$ es un subconjunto conexo.
Notemos que $C \subset \bigcup \mathcal{K}_j \subset f^{-1}(B)$, por lo que concluimos que $C = \bigcup \mathcal{K}_j$. Así, $f^{-1}(B)$ tiene a lo más r componentes. Además, si $b \in B$, $\{b\} \in F_n(B)$, por lo que existe $A \in \mathcal{K}_j$ tal que $F_n(f)(A) = \{b\}$. Es decir, $A \in F_n(C)$, y $b \in f(A) \subset f(C)$, por lo que $f(C) = B$. Por lo tanto, f es un mapeo cuasi monótono.

■

El análogo al teorema anterior, para la clase de mapeos débilmente monótonos, también es cierto.

Teorema 2.17.3. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es débilmente monótono, entonces f es débilmente monótono.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y tal que $\mathrm{int}_Y(B) \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathrm{int}_Y(B)$, existe un subconjunto abierto de Y, U, tal que $y \in U \subset B$. Tenemos que $\{y\} \in \langle U \rangle_n \subset F_n(B)$. Como $F_n(B)$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$ tal que $\mathrm{int}_{F_n(Y)}(F_n(B)) \neq \emptyset$ y, $F_n(f)$ es un mapeo débilmente monótono, entonces cada componente de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$ es mapeada por $F_n(f)$ sobre $F_n(B)$. Sea C una componente de $f^{-1}(B)$, por el Lema 2.5.5, $F_n(C)$ es una componente de $(F_n(f))^{-1}(F_n(B))$, por lo que $F_n(f)(F_n(C)) = F_n(B)$. Sea $b \in B$, existe $A \in F_n(C)$ tal que $F_n(f)(A) = f(A) = \{b\}$. Así, $b \in f(A) \subset f(C)$, por lo que $B \subset f(C)$. Ya que $f(C) \subset B$, $f(C) = B$. Por lo tanto, f es un mapeo débilmente monótono.

■

Los recíprocos a los Teoremas 2.17.2 y 2.17.3 no se cumplen. Para ver el ejemplo mostremos antes dos resultados. El primero de ellos garantiza que ser un continuo de Peano X es equivalente en $F_n(X)$.

Lema 2.17.4. *X es localmente conexo si y sólo si $F_n(X)$ es localmente conexo, con $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_r\} \in F_n(X)$, y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ que contiene a $\mathcal{A}$. Por el Teorema 1.2.10 , podemos elegir $U_1, \ldots, U_r$ subconjuntos abiertos de X tal que $\mathcal{A} \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n \subset \mathcal{U}$ y, para cada $i \in I_r$, $a_i \in U_i$. Com X es localmente conexo, existen $V_1, \ldots, V_r$ subconjuntos abiertos y conexos de X tal que para cada $i \in I_r$, $a_i \in V_i \subset U_i$. Se tiene que $\mathcal{A} \in \langle V_1, \ldots, V_r\rangle_n \subset \langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n$. Por el Teorema 1.2.10, y el Lema 2.4.4, $\langle V_1, \ldots, V_r\rangle_n$ es un subconjunto abierto y conexo en $F_n(X)$, respectivamente; por lo tanto, $F_n(X)$ es localmente conexo en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ fue arbitrario, $F_n(X)$ es localmente conexo.
Para la otra implicación, sean $x_0 \in X$, U un subconjunto abierto de X que contiene a x_0, y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $F_n(X)$ es localmente conexo. Ya que $\{x_0\} \in \langle U\rangle_n$, existe un subconjunto abierto y conexo de $F_n(X)$, $\mathcal{W}$, tal que $\{x_0\} \in \mathcal{W} \subset \langle U\rangle_n$. Por el Corolario 2.3.3, $\bigcup \mathcal{W}$ es un subconjunto abierto de X y, como $\mathcal{W} \cap C(X) \neq \emptyset$, por el Lema 2.4.5, $\bigcup \mathcal{W}$ es un subconjunto conexo de X. Además, es claro que $x_0 \in \bigcup \mathcal{W} \subset U$. Por lo tanto, X es localmente en x_0. Como x_0 fue dado arbitrariamente, X es localmente conexo.

■

El segundo resultado previo al ejemplo que queremos dar es la siguiente implicación condicionada entre clases de funciones.

Lema 2.17.5. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo débilmente monótono y Y es localmente conexo, entonces f es confluente.*

Demostración. Sean B un subcontinuo de Y, y A una componente de $f^{-1}(B)$. Consideremos la sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ como en el Teorema 1.3.22. Como $B \subset B_i$, $A \subset f^{-1}(B_i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea A_i la componente de $f^{-1}(B_i)$ que contiene a A. Por el Lema 1.3.3, A_i es un subcontinuo de X, para cada $i \in N$. Por el Corolario 1.2.31,
(1) existe una subsucesión $(A_{i(j)})_{j\in N}$ de $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, que converge a A^*, para algún A^* subcontinuo de X. Como $A \subset A_{i(j)}$, para cada $j \in \mathbb{N}$,
(2)$A \subset A^*$. Ya que cada B_i es un subcontinuo de Y con $\text{int}_Y(B_i) \neq \emptyset$ (1.3.22), y f es por hipótesis débilmente monótono, entonces
(3) $f(A_{i(j)}) = B_{i(j)}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Además, notemos que como $\cap_{j=1}^{\infty}(B_{i(j)}) = B$, entonces
(4) la sucesión $\{B_{i(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ converge a B. Por (1) y por el Teorema 1.2.36, $(f(A_{i(j)}))$ converge a $f(A^*)$. Por (3) y (4),
(5) $f(A^*) = B$. Por (2) y (5), $A \subset A^* \subset f^{-1}(B)$. Ya que A es una componente de $f^{-1}(B)$ y, por (1), A^* es un subcontinuo de X, $A = A^*$. Por (5), $f(A) = B$. Por lo tanto, f es confluente.

■

Veamos ahora un ejemplo de un mapeo f que es cuasi monótono y débilmente monótono, pero que $F_n(f)$ no pertenece a ninguna de estas dos clases de funciones, para $n \geq 3$.

Ejemplo 2.17.6. *Notemos que el mapeo $f : [-1, 1] \longrightarrow [0, 1]$, definido por, $f(x) = |x|$, es cuasi monótono (y así débilmente monótono), pero no es monótono. Afirmamos que para cada $n \geq 3$, $F_n(f)$ no es cuasi monótono ni débilmente monótono. En efecto, razonando por contradicción, supongamos que $F_n(f)$ es débilmente monótono. Como $[0, 1]$ es un espacio localmente conexo, se sigue del Lema 2.17.4 que $F_n([0, 1])$ es localmente conexo. Por el Lema 2.17.5, $F_n(f)$ es un mapeo confluente. Así, si $n \geq 3$, entonces por el Teorema 2.5.21,*

f es monótono, lo cual es falso. Por lo tanto, si $n \geq 3$, $F_n(f)$ no es débilmente monótono y, por lo tanto, tampoco es cuasi monótono.

No encontré una respuesta a la siguiente pregunta para el caso $n = 2$. El lector puede consultar [2, Capítulo 9].

Pregunta 2.17.7. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es cuasi monótono (respectivamente débilmente monótono), ¿$F_2(f)$ es cuasi monótono (débilmente monótono)?*

2.18. Mapeos débilmente confluente y seudo confluente

En esta sección se estudian dos clases de funciones que debilitan el concepto de mapeo confluente. Veamos las definiciones.

Definición 2.18.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **débilmente confluente** siempre que para cada subcontinuo B de Y, existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$.*

Un ejemplo de un mapeo que es débilmente confluente es la función proyección del Ejemplo 2.7.2. Un ejemplo de un mapeo que no es débilmente confluente es la función f del Ejemplo 2.6.4, ya que las componenetes de $f^{-1}(B)$, con $B = \{(x, y) \in S^1 : x \geq 0\}$, son los subintervalos $[0, 1/4]$ y $[3/4, 1]$, pero ninguna de estas componentes son mapeadas por f sobre B.

Definición 2.18.2. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **seudo confluente** siempre que para cada subcontinuo irreducible B de Y, existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$.*

Notemos que todo mapeo confluente es débilmente confluente, y todo mapeo débilmente confluente es seudo confluente. Para un ejemplo de esta clase de mapeos el lector puede ver el último parrafo de esta sección.

En [5, Ejemplo 3.18] se prueba la existencia de un mapeo débilmente confluente $f : X \longrightarrow Y$ tal que $F_2(f)$ no es débilmente confluente. La prueba es muy técnica por lo que damos la referencia al lector para consultar los detalles.

Mostremos que si la función inducida $F_n(f)$ pertenece a la clase de funciones débilmente confluentes, entonces f también pertenece a la misma clase de funciones. Veamos antes el siguiente resultado.

Lema 2.18.3. *Sea $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $F_n(X)$ tal que $\mathcal{A} \cap F_m(X) \neq \emptyset$, para algún $m \leq n$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in C_m(X)$, y cada componente de $\bigcup \mathcal{A}$ interseca cada elemento de $\mathcal{A} \cap F_m(X)$.*

Demostración. Por el Lema 2.5.3, $\bigcup \mathcal{A} \in C_m(X)$ y por el Lema 2.5.20, cada componente de $\bigcup \mathcal{A}$ interseca a cada elemento de $\mathcal{A}$ (y así, a cada elemento de $\mathcal{A} \cap F_m(X)$).

■

Teorema 2.18.4. *Si $F_n(f)$ es débilmente confluente, con $n \geq 2$, entonces f es débilmente confluente.*

Demostración. Supongamos que $F_n(f)$ es débilmente confluente. Sea B un subcontinuo de Y. Tenemos que $F_1(B)$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$, por lo que existe una componente $\mathcal{B}$ de $F_n(f)^{-1}(F_1(B))$ tal que $F_n(f)(\mathcal{B}) = F_1(B)$.
Sea $G = \bigcup\{E : E \in \mathcal{B}\}$. Es claro que $G \subset f^{-1}(B)$. Elijamos C una componente de G, y sea D la componente de $f^{-1}(B)$ que contiene a C. Dado $b \in B$, existe $E \in \mathcal{B}$ tal que $F_n(f)(E) = \{b\}$. Ya que $\mathcal{B}$ es cerrado y conexo, por el Lema 2.18.3, E interseca cada componente de G, por lo que existe $z \in C \cap E$. Así $f(z) = y$, y como $z \in C \subset D$, $f(z) = y \in f(D)$. Es decir, $B \subset f(D)$, por lo que $f(D) = B$. Por lo tanto, f es débilmente confluente.

■

El análogo al Teorema anterior también es cierto para la clase de funciones seudo confluentes.

Teorema 2.18.5. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es seudo confluente entonces f es seudo confluente.*

Demostración. Sea B un subcontinuo irreducible de Y. Si $B = Y$, entonces $f^{-1}(B)$ tiene una sola componente, a saber X, y $f(X) = B$. Por tanto, f es seudo confluente. Supongmos que $B \neq Y$. Por el Lema 1.3.7, existen $b_1, \ldots, b_{n-1}$ puntos distintos a pares en $Y \setminus B$. Sean $D = \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$, y $\mathcal{K} = \{D \cup K : K \in F_1(B)\}$. Puesto que D es constante y $F_1(B)$ es homeomorfo a B, $\mathcal{K}$ es homeomorfo a B. Así, $\mathcal{K}$ es un subcontinuo irreducible de $F_n(Y)$, y $\mathcal{K} \cap F_1(Y) = \emptyset$. Por hipótesis $F_n(f)$ es seudo confluente, entonces existe $\mathcal{C}$ una componenete de $F_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$ tal que $F_n(f)(\mathcal{C}) = \mathcal{K}$.
Sea $\mathcal{B}_n := \langle f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_{n-1}), f^{-1}(B)\rangle_n$. Notemos que $F_n(f)^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{B}_n$. Sea

$$\varphi : \mathcal{B}_n \longrightarrow f^{-1}(b_1) \times \cdots \times f^{-1}(b_{n-1}) \times f^{-1}(B)$$

una función definida por $A = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, b\} \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, b)$, para cada $A \in \mathcal{B}_n$, con $x_i \in f^{-1}(b_i)$, para cada $i \in I_{n-1}$. Notemos que φ es un homeomorfismo. Consideremos la función proyección

$$\pi_n : f^{-1}(b_1) \times \cdots \times f^{-1}(b_{n-1}) \times f^{-1}(B) \longrightarrow f^{-1}(B),$$

definida por $A = (x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \mapsto b$, para cada A en $f^{-1}(b_1) \times \cdots \times f^{-1}(b_{n-1}) \times f^{-1}(B)$. Definamos $C = \pi_n(\varphi(\mathcal{C}))$. Como φ y π_n son continuas, y $\mathcal{C}$ es conexo, C es un subconjunto conexo de $f^{-1}(B)$. Afirmamos que $f(C) = B$. Claramente $f(C) \subset B$. Sea $b \in B$, existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $f(A) = D \cup \{b\} \in \mathcal{K}$. Así que, existe un único elemento x_b en A tal que $f(x_b) = b$. Así, $x_b \in f^{-1}(b)$. Además, $\pi_n(\varphi(A)) = x_b$, por lo que $x_b \in C$, y $f(x_b) = b$, es decir, $b \in f(C)$. Por tanto, $f(C) = B$. Sea C' la componente de $f^{-1}(B)$ que contiene a C. Es claro que $f(C') = B$. Por lo tanto, f es seudo confluente.

■

Existe un mapeo seudo confluente $f : X \longrightarrow Y$ tal que $F_2(f)$ no es seudo confluente. Una prueba a esta afirmación se encuentra en [2, Ejemplo 10.7], por lo que el recíproco del teorema anterior no es cierto.

2.19. Mapeos semi confluente y débilmente semi confluente

Recordemos que los mapeos confluentes son aquellos que mapean cada componente de la preimagen de cada subcontinuo, de manera sobreyectiva al subcontinuo. Si no se puede garantizar mapear estas componenetes de manera sobreyectiva en el subcontinuo, nos gustaría tener una relación de orden respecto a la contención de conjuntos de las imagenes de cada par de estas componentes. Esto es lo que estudia las clases de mapeos de esta sección.

Definición 2.19.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es* ***semi confluente*** *siempre que para cada subcontinuo B de Y, y para cada dos componentes C y D de $f^{-1}(B)$, tenemos que $f(C) \subset f(D)$, o $f(D) \subset f(C)$.*

El primere teorema importante de esta sección es el siguiente:

Teorema 2.19.2. *Si para $n \geq 2$, $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es semi confluente entonces f es semi confluente.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, B un subcontinuo de Y, y C y D dos componentes de $f^{-1}(B)$. Supongamos que $F_n(f)$ es un mapeo semi confluente. Por el Corolario 1.2.20, $F_n(B)$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$ y, por el Lema 2.5.5, $F_n(C)$ y $F_n(D)$ son componentes de $F_n(f)^{-1}(F_n(B))$. De aquí que, $F_n(f)(F_n(C)) \subset F_n(f)(F_n(D))$ o $F_n(f)(F_n(D)) \subset F_n(f)(F_n(C))$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $F_n(f)(F_n(C)) \subset F_n(f)(F_n(D))$. Afirmamos que $f(C) \subset f(D)$. En efecto, sea $y \in f(C)$, entonces $y = f(c)$ para algún $c \in C$. Así, $\{c\} \in F_n(C)$, por lo que $F_n(f)(\{c\}) = \{f(c)\} = \{y\} \in F_n(f)(F_n(D))$. Así, existe $A \in F_n(D)$ tal que $F_n(f)(A) = f(A) = \{y\}$, y existe $a \in A \subset D$ tal que $f(a) = y$, es decir, $y \in f(D)$, por lo que $f(C) \subset f(D)$. Por lo tanto, f es semi confluente.

■

En [5, Ejemplo 3.18] se prueba la existencia de un mapeo semi confluente $f : X \longrightarrow Y$ tal que $F_2(f)$ no es semi confluente, por lo que el recíproco al teorema anterior no es cierto.

Una manera de debilitar la clase de mapeos semi confluentes es pedir que los subcontinuos de la imagen sean *gordos*, es decir, que sean de interior no vacío. Esto es lo que define la siguiente clase de mapeos.

Definición 2.19.3. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es* ***débilmente semi confluente*** *siempre que para cada subcontinuo B de Y con interior no vacío, y para cada dos componentes C_1, C_2 de $f^{-1}(B)$, tenemos que $f(C_1) \subset f(C_2)$ o $f(C_2) \subset f(C_1)$.*

El siguiente resultado garantiza que si $F_n(f)$ pertenece a la clase de mapeos débilmente semi confluentes, entonces f también pertenece a esta clase de mapeos.

Teorema 2.19.4. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es un mapeo débilmente semi confluente, entonces f también lo es.*

Demostración. Sean B un subcontinuo de Y con interior no vacío, y C_1 y C_2 dos componente de $f^{-1}(B)$. Por el Lema 2.16.5, $\langle B\rangle_n$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$ con interior no vacío y, por el Lema 2.5.5, $\langle C_1\rangle_n$ y $\langle C_2\rangle_n$ son componentes de $F_n(f)^{-1}(\langle B\rangle_n)$. Ya que $F_n(f)$ es un mapeo débilmente semi confluente, tenemos que $F_n(f)(\langle C_1\rangle_n) \subset F_n(f)(\langle C_2\rangle_n)$ o $F_n(f)(\langle C_2\rangle_n) \subset F_n(f)(\langle C_1\rangle_n)$.
Sin perdida de generalidad supongamos que $F_n(f)(\langle C_1\rangle_n) \subset F_n(f)(\langle C_2\rangle_n)$. Afirmamos que $f(C_1) \subset f(C_2)$. En efecto, sea $x \in f(C_1)$. Se sigue que existe $c \in C_1$ tal que $f(c) = x$, por lo que $\{c\} \in \langle C_1\rangle_n$. Así, $F_n(f)(\{c\}) \in F_n(f)(\langle C_2\rangle_n)$, entonces $f(\{c\}) = \{x\} \in F_n(f)(\langle C_2\rangle_n)$. Se sigue que existe $A \in \langle C_2\rangle_n$ tal que $F_n(f)(A) = \{x\}$. Sea $a \in A$, entonces $a \in C_2$ y $f(a) = x$, es decir, $x \in f(C_2)$. Por lo tanto, $f(C_1) \subset f(C_2)$. Esto prueba que f es un mapeo débilmente semi confluente.

■

El converso al teorema anterior no se cumple. El lector puede consultar [1, Ejemplo 3.15] para encontrar un ejemplo de un mapeo débilmente semi confluente $f : X \longrightarrow Y$, tal que

$F_2(f)$ no es débilmente semi confluente. El ejemplo es muy técnico y algo extenso, motivo por lo cual la prueba no se ha incluido aquí.

2.20. Mapeos localmente confluente y localmente débilmente confluente

Definición 2.20.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **localmente confluente** (**localmente débilmente confluente**) si para cada $y \in Y$, existe una vecindad cerrada de y, V, tal que la función restricción $f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \longrightarrow V$ es un mapeo confluente (débilmente confluente).*

Ya que un mapeo confluente es claramente un mapeo débilmente confluente, se tiene que los mapeos localmente confluentes son localmente débilmente confluentes. Para ejemplos de estas clases de funciones el lector puede ver el último parrafo de esta sección.

La siguiente proposición nos da una caracterización de los mapeos localmente confluentes y localmente débilmente confluentes, respectivamente.

Proposición 2.20.2. *Un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es localmente confluente (localmente débilmente confluente respectivamente) si y sólo si existe un número $\epsilon > 0$ tal que para cada subcontinuo B de Y con diám$_Y(B) < \epsilon$, cada componente de $f^{-1}(B)$ es mapeada por f sobre B (existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$).*

Una demostración a las afirmaciones de la proposición anterior se pueden encontrar en [12, Teorema 4.38] y [12, Teorema 4.37] para la caracterización de los mapeos localmente confluentes y localmente débilmente confluentes, respectivamente.

El siguiente resultado nos será de utilidad para probar el Teorema 2.20.4.

Lema 2.20.3. *Si B es un subconjunto de un espacio métrico (Y, d), y ϵ es un número mayor que cero tal que diám$_Y(B) < \epsilon$, entonces diám$_{F_n(Y)}(F_n(B)) < \epsilon$.*

Demostración. Veamos primero que $H_d(E, F) < \epsilon$, para cada $E, F \in F_n(B)$. En efecto, sean $E, F \in F_n(B)$, ya que $E, F \subset B$, tenemos que $d(e, f) \leq$ diám$_Y(B) < \epsilon$, para cada $e \in E$ y $f \in F$. Así, $E \subset N(F, \epsilon)$ y $F \subset N(E, \epsilon)$. Por el Lema 1.2.11, $H_d(E, F) < \epsilon$.
Se sigue que el diám$_{F_n(Y)}(F_n(B)) \leq \epsilon$. Supongamos que diám$_{F_n(Y)}(F_n(B)) = \epsilon$, entonces para todo $\delta > 0$ existe $A \in \{H_d(E, F) : E, F \in F_n(B)\}$ tal que $\epsilon - \delta < A \leq \epsilon$. Ya que $A = H_d(E, F)$, para algunos $E, F \in F_n(B)$, se sigue de la primera parte que $A < \epsilon$, es decir, $0 < \epsilon - A$. De aquí que $\epsilon - (\epsilon - A) < A$, lo cual es falso. Por lo tanto, diám$_{F_n(Y)}(F_n(B)) < \epsilon$.

■

Veamos el primer Teorema importante de esta sección.

Teorema 2.20.4. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es un mapeo localmente confluente, entonces f también lo es.*

Demostración. Ya que $F_n(f)$ es localmente confluente, se sigue de la Proposición 2.20.2 que existe un número $\epsilon > 0$ tal que para cada subcontinuo $\mathcal{B}$ de $F_n(Y)$ con diám$_{F_n(Y)}(\mathcal{B}) < \epsilon$, y para cada componente $\mathcal{C}$ de $F_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$ se tiene que $F_n(f)(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$.
Sean B un subcontinuo de Y con diám$_Y(B) < \epsilon$, y C una componente de $f^{-1}(B)$. En base

a la Proposición 2.20.2 queremos mostrar que $f(C) = B$. Para este fin, por el Corolario 1.2.20, $F_n(B)$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$ y, por el Lema 2.20.3, $\text{diám}_{F_n(Y)}(F_n(B)) < \epsilon$. Además, por el Lema 2.5.5, $F_n(C)$ es una componente de $F_n(f)^{-1}(F_n(B))$. Se sigue del primer párrafo que $F_n(f)(F_n(C)) = F_n(B)$.
Veamos ahora que $f(C) = B$. En efecto, sea $b \in B$. Como $\{b\} \in F_n(B)$, existe $A \in F_n(C)$ tal que $f(A) = \{b\}$. Sea $a \in A \subset C$, entonces $f(a) = b$, es decir, $b \in f(C)$. La contención $f(C) \subset B$ es inmediata. Se sigue de la Proposición 2.20.2 que f es un mapeo localmente confluente.

■

El siguiente lema nos ayudará a probar el Teorema 2.20.6.

Lema 2.20.5. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, $\mathcal{B}$ un subconjunto finito y no vacío de 2^Y, $n \geq 2$, y $\mathcal{C}$ un subconjunto de $F_n(f)^{-1}(\langle\mathcal{B}\rangle_n)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(1) si $\mathcal{B}$ es una colección disjunta a pares y $|\mathcal{B}| \leq n$, entonces $\mathcal{C}$ es una componente de $F_n(f)^{-1}(\langle B\rangle_n)$.
(2) Existe un subconjunto finito y no vacío de 2^X, $\mathcal{A}$, tal que
(i) $|\mathcal{A}| \leq n$,
(ii) $\mathcal{A} \subset \bigcup\{C : C\,\text{es una componente de}\, f^{-1}(B),\,\text{para cada}\, B \in \mathcal{B}\}$,
(iii) $\mathcal{A} \cap C \neq \emptyset$ para cada C componente de $f^{-1}(B)$, para cada $B \in \mathcal{B}$,
(iv) $\mathcal{C} = \langle\mathcal{A}\rangle_n$.
Además, si $|\mathcal{B}| = n$, entonces $|\mathcal{A}| = n$.

Una demostración al lema anterior se encuentra en [1, Proposición 2.2]. El segundo teorema importante de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.20.6. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es un mapeo localmente débilmente confluente, entonces f también lo es.*

Demostración. En base a la Proposioción 2.20.2, mostraremos que si B es un subcontinuo de Y tal que $\text{diám}_Y(B) < \epsilon$, entonces $f(C) = B$ para alguna componente C de $f^{-1}(B)$. Para esto, como $F_n(f)$ es un mapeo localmente débilmente confluente, se sigue de la Proposición 2.20.2 que existe un número $\epsilon > 0$ tal que si $\mathcal{B}$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$ con $\text{diám}_{F_n(Y)}(\mathcal{B}) < \epsilon$, entonces existe $\mathcal{C}$ una componente de $F_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$ tal que $F_n(f)(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$. Sean B un subcontinuo de Y tal que $\text{diám}_Y(B) < \epsilon$, y $E \in F_{n-1}(Y \setminus B) \setminus F_{n-2}(Y \setminus B)$, digamos $E = \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Sea $\mathcal{B} = \langle\{\mathcal{B}\} \cup F_1(E)\rangle_n$. Notemos que $\mathcal{B} = \{\{b\} \cup E : b \in B\}$, y así $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de n elementos de Y que es homeomorfa a B. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$. Por el Lema 2.20.3, tenemos que $\text{diám}_{F_n(Y)}(\mathcal{B}) < \epsilon$. Por el primer párrafo, existe una componente $\mathcal{C}$ de $F_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$ tal que $F_n(f)(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$. Sean

$$C_B = \{C \subset X : C\,\text{es una componente de}\, f^{-1}(B)\},$$

y para cada $i \in I_{n-1}$, sean

$$C_i = \{C \subset X : C\,\text{es una componente de}\, f^{-1}(e_i)\}.$$

Notemos que las condiciones de (1) del Lema 2.20.5 se cumplen, por lo tanto, del mismo lema, (2) nos garantiza que:
(i) Existe una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de 2^X, con $|A| = n$, digamos $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$,
(ii) $\mathcal{A} \subset C_B \cup \bigcup\{C_i : i \in I_{n-1}\}$,
(iii) $|\mathcal{A} \cap C_B| = 1$, y $|\mathcal{A} \cap C_i| = 1$ para cada $i \in I_{n-1}$,
(iv) $\mathcal{C} = \langle A_1, \ldots, A_n\rangle_n$.
Ya que $F_n(f)(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, y de (iv), tenemos que $F_n(f)(\langle A_1, \ldots, A_n\rangle_n) = \mathcal{B}$. Sea $C \in \mathcal{A} \cap C_B$. Afirmamos que $f(C) = B$. La contención $f(C) \subset B$ es clara. Para la otra contención, sea $b \in B$. Tenemos que $\{b\} \cup E \in \mathcal{B}$, por lo que existe $D \in \langle A_1, \ldots, A_n\rangle_n$ tal que

$F_n(f)(D) = \{b\} \cup E$. Así, existen $d \in D$ tal que $f(d) = b$, y $A_i \in \mathcal{A}$ (para algún $i \in I_n$) tal que $d \in A_i$. Puesto que $\mathcal{A} \cap C_B = C$, se sigue que $A_i = C$. Hemos probado que $d \in C$ y, como $f(d) = b$, tenemos que $B \subset f(C)$. Así, $f(C) = B$. Esto concluye la demostración.

■

Los conversos respectivos de los teoremas 2.20.4 y 2.20.6 no se cumplen. El lector puede consultar [1, Ejemplo 3.15] para encontrar un ejemplo de un mapeo localmente confluente (y así localmente débilmente confluente) $f : X \longrightarrow Y$ tal que $F_2(f)$ no es localmente débilmente confluente (y entonces tampoco es localmente confluente). El ejemplo es muy técnico y algo extenso por lo que se deja la referencia al lector para consultar los detalles.

2.21. Mapeos refinable y monótonamente refinable

En esta sección se estudia un par de clases de funciones que están relacionadas de manera directa con las distancias de cada continuo. Demos antes la siguiente definición.

Definición 2.21.1. *Dados $\epsilon > 0$, y $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, decimos que f es un **ϵ-mapeo** si diám$(f^{-1}(y)) < \epsilon$, para todo $y \in Y$.*

De manera intuitiva, los $\epsilon-$mapeos miden que tan cerca está la función de ser inyectiva. El siguiente resultado es de utilidad para estudiar a los mapeos de esta sección.

Lema 2.21.2. *Si $n \geq 2$ y $\epsilon > 0$ entonces $f : X \longrightarrow Y$ es un $\epsilon-$mapeo si y sólo si $F_n(f)$ es un $\epsilon-$mapeo.*

Demostración. Supongamos que f es un $\epsilon-$mapeo. Sean $B \in F_n(f)(Y)$, y $A_1, A_2 \in F_n(f)^{-1}(B)$. Como $F_n(f)(A_1) = F_n(f)(A_2)$, para cada $a_1 \in A_1$, existe $a_2 \in A_2$ tal que $f(a_1) = f(a_2)$. Como f es $\epsilon-$mapeo, diám$(f^{-1}(f(a_1)) < \epsilon$. Por tanto $d(a_1, a_2) < \epsilon$, es decir, $A_1 \subset N(A_2, \epsilon)$. De manera similar $A_2 \subset N(A_1, \epsilon)$. Se sigue del Lema 1.2.11, que $H_d(A_1, A_2) < \epsilon$. Por lo tanto, $F_n(f)$ es un $\epsilon-$mapeo.
Supongamos que $F_n(f)$ es un $\epsilon-$mapeo. Sean $y \in Y$, y $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$. Notemos que $\{x_1\}, \{x_2\} \in F_n(f)^{-1}(\{y\})$. Como $F_n(f)$ es un $\epsilon-$mapeo, $d(x_1, x_2) = H_d(\{x_1\}, \{x_2\}) < \epsilon$. Por lo tanto, f es un $\epsilon-$mapeo.

■

Notemos que para la clase de funciones que son $\epsilon-$mapeos, el lema anterior es un análogo al estudio que tenemos en cada sección de este capítulo. Veamos las definiciones de las clases de mapeos de esta sección.

Definición 2.21.3. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es **refinable (monótonamente refinable)** si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\epsilon-$mapeo ($\epsilon-$mapeo monótono) $g : X \longrightarrow Y$, tal que $d'(f(x), g(x)) < \epsilon$, para todo $x \in X$.*

Un ejemplo de mapeos refinables se encuentra en [7, Capítulo 3]. El siguiente resultado nos servirá para probar el teorema más importante de esta sección.

Lema 2.21.4. *Si $n \geq 2$, $\epsilon > 0$, y $f, g : X \longrightarrow Y$ son dos mapeos, entonces para cada $x \in X$ $d'(f(x), g(x)) < \epsilon$ si y sólo si para cada $A \in F_n(X)$, $H_{d'}(F_n(f)(A), F_n(g)(A)) < \epsilon$.*

Demostración. Supongamos que para cada $x \in X$, $d'(f(x), g(x)) < \epsilon$. Sea $A \in F_n(X)$. Para cada $a \in A$, $d'(f(a), g(a)) < \epsilon$, entonces $F_n(f)(A) \subset N(F_n(g)(A), \epsilon)$, y $F_n(g)(A) \subset N(F_n(f)(g), \epsilon)$. Por el Lema 1.2.11, $\mathrm{H}_{d'}(F_n(f)(A), F_n(g)(A)) < \epsilon$.
Para la otra implicación, supongamos que para cada $A \in F_n(X)$, $H_{d'}(F_n(f)(A), F_n(g)(A)) < \epsilon$. Sea $x \in X$, entonces $\mathrm{H}_{d'}(F_n(f)(\{x\}), F_n(g)(\{x\})) < \epsilon$.
Ya que $\mathrm{H}_{d'}(F_n(f)(\{x\}), F_n(g)(\{x\})) = d'(f(x), g(x))$, se tiene que $d'(f(x), g(x)) < \epsilon$.

■

Teorema 2.21.5. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo refinable (respectivamente, monótonamente refinable), entonces $F_n(f)$ es un mapeo refinable (monótonamente refinable) para cada $n \geq 2$.*

Demostración. Como $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo refinable, existe $g : X \longrightarrow Y$ un $\epsilon-$mapeo ($\epsilon-$mapeo monótono) tal que, para cada $x \in X$, $d'(f(x), g(x)) < \epsilon$. Por el Lema 2.21.4 (por Lema 2.21.4 y Teorema 2.4.6), $F_n(g)$ es un $\epsilon-$mapeo ($\epsilon-$mapeo monónoto). Además, por el Lema 2.21.2, $\mathrm{H}_{d'}(F_n(f)(A), F_n(g)(A)) < \epsilon$, para cada $A \in F_n(X)$. Por lo tanto, $F_n(f)$ es refinable (monótonamente refinable).

■

Las siguientes preguntas siguen abiertas (el lector puede consultar [3, (i), Pregunta 8.6])

Pregunta 2.21.6. *Sea $n \geq 2$. ¿Si $F_n(f)$ es refinable, entonces f es refinable?*

Pregunta 2.21.7. *Sea $n \geq 2$. ¿Si $F_n(f)$ es monótonamente refinable, entonces f es monótonamente refinable?*

2.22. Mapeos libremente descomponible y fuertemente libremente descomponible

Definición 2.22.1. *Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es:*
*(i) **libremente descomponible** si cuando A y B son subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, entonces existen dos subcontinuos propios A' y B' de X, tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subset A$, y $f(B') \subset B$.*
*(ii) **fuertemente libremente descomponible** si cuando A y B son subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, tenemos que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos.*

Es claro de las definiciones anteriores que todo mapeo monótono es fuertemente libremente descomponible, y que todo mapeo fuertemente libremente descomponible es libremente descomponible. Algunos autores prefieren llamar mapeo débilmente monótono a la clase de mapeo fuertemente libremente descomponible. Nosotros adoptaremos el nombre que se da en esta sección pues ya hemos usado el nombre de mapeo débilmente monótono en secciones anteriores.

El Ejemplo 2.22.7 muestra ejemplos de mapeos que pertenecen (y que no pertenecen) a las clases de mapeos de la definición anterior. Además, el Ejemplo 2.5.2 muestra un mapeo que es libremente descomponible pero que no es fuertemente libremente descomponible (el subcontinuo B y su complemento son los que funcionan).

El siguiente lema da una condición suficiente para que un mapeo libremente descomponible sea un mapeo monótono.

Lema 2.22.2. *Si Y es un continuo localmente conexo, $y \in Y$ es un punto tal que $Y \setminus \{y\}$ es conexo, y $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo libremente descomponible, entonces f es un mapeo monótono.*

Demostración. Por el Lema 1.3.24, existe un subconjunto lo suficientemente pequeño A_1 de Y tal que es abierto, conexo, $y \in A_1$ y $Y \setminus A_1$ es conexo. Sea $B_1 = Y \setminus A_1$. Es claro que $\overline{A}_1$ y B_1 son subcontinuos propios de $Y = \overline{A}_1 \cup B_1$. Un razonamiento inductivo, muestra que existe una sucesión $(\overline{A}_n, B_n)_{n=1}^{\infty}$ de parejas de subconjuntos de Y tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $y \in A_{n+1} \subset A_n$, $B_n = Y \setminus A_n$, $Y = \overline{A}_n \cup B_n$, y $\overline{A}_n$ y B_n son subcontinuos propios de Y. Como f es libremente descomponible, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen A'_n y B'_n subcontinuos propios de X, tales que $X = A'_n \cup B'_n$, $f(A'_n) \subset \overline{A}_n$, y $f(B'_n) \subset B_n$. Notemos que $A'_1 \supseteq A'_2 \supseteq \cdots$. Por lo tanto, $f^{-1}(y) = \cap\{A'_n\}$. Además, $\cap\{A'_n\}$ es conexo al ser $(A'_n)_{n=1}^{n}$ una sucesión anidada de conexos no vacíos. Por lo tanto, $f^{-1}(y)$ es conexo, es decir, f es monótono.

■

El siguiente resultado da equivalencias importantes cuando Y es un continuo de Peano.

Proposición 2.22.3. *Sean Y un continuo de Peano, $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, y $n \geq 2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(1) $F_n(f)$ es libremente descomponible,
(2) $F_n(f)$ es monótono,
(3) f es monótono.

Demostración. Por el Teorema 2.4.6, (2) y (3) son equivalentes. La parte (2) implica (1) es inmediato. Probemos que (1) implica (2). Supongamos que $F_n(f)$ es libremente descomponible. Como Y es localmente conexo, por el Lema 2.17.4, $F_n(Y)$ es localmente conexo. Además, por el Corolario 1.2.39, Para cada $B \in F_n(Y)$, $F_n(Y) \setminus B$ es conexo. Por el Lema 2.22.2, $F_n(f)$ es monótono.

■

Un resultado inmediato de la proposición anterior es que si Y es un continuo de Peano, entonces la clase de mapeos fuertemente libremente descomponible es equivalente a la clase de mapeos libremente descomponibles.

Corolario 2.22.4. *Sean Y un continuo de Peano, $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, y $n \geq 2$, entonces $F_n(f)$ es fuertemente libremente descomponible si y sólo si $F_n(f)$ es libremente descomponible.*

Demostración. Supongamos que $F_n(f)$ es libremente descomponible. Por la Proposición 2.22.3, $F_n(f)$ es monótono. Como todo mapeo monótono es fuertemente libremente descomponible, $F_n(f)$ es fuertemente libremente descomponible. La otra implicación es inmediata de las definiciones.

■

El siguiente teorema se prueba en [8, Teorema 4.1], y es el resultado más reciente en esta tesis.

Teorema 2.22.5. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es un mapeo libremente descomponible entonces f es un mapeo libremente descomponible.*

Demostración. Supongamos que $F_n(f)$ es libremente descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Afirmamos que

$$F_n(f)(Y) = \langle A\rangle_n \cup \langle B, Y\rangle_n.$$

En efecto, sea $K \in F_n(Y)$, entonces $K \subset Y = A \cup B$. Si $K \subset A$, entonces $K \in \langle A\rangle_n$. Si no, entonces existe $b \in K$ tal que $b \in Y \setminus A \subset B$, por lo que $K \in \langle B, Y\rangle_n$. Así, $F_n(Y) \subset \langle A\rangle_n \cup \langle B, Y\rangle_n$. Por lo tanto, $F_n(f)(Y) = \langle A\rangle_n \cup \langle B, Y\rangle_n$. De manera similar se tiene que

$$F_n(f)(Y) = \langle B\rangle_n \cup \langle A, Y\rangle_n.$$

Observemos que $\langle A\rangle_n$, $\langle B, Y\rangle_n$, $\langle B\rangle_n$ y $\langle A, Y\rangle_n$ son subcontinuos propios de $F_n(Y)$. Ya que $F_n(f)$ es libremente descomponible, entonces existen subcontinuos propios de $F_n(X)$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{B}_1$, tales que

$$\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{B}_0 = F_n(X) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1,$$

$$F_n(f)(\mathcal{A}_0) \subset \langle A\rangle_n,\ F_n(f)(\mathcal{B}_0) \subset \langle B, Y\rangle_n,$$

$$F_n(f)(\mathcal{B}_1) \subset \langle B\rangle_n \text{ y } F_n(f)(\mathcal{A}_1) \subset \langle A, Y\rangle_n.$$

Sean $M = \bigcup \mathcal{A}_0$, y $N = \bigcup \mathcal{B}_1$. Como B es subcontinuo propio de Y, $Y \setminus B \neq \emptyset$. Sean $y_0 \in Y \setminus B$, y $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$. Se tiene que $\{x_0\} \in \mathcal{A}_0$. Así, $\mathcal{A}_0 \cap C(X) \neq \emptyset$. Por el Lema 2.5.4, M es un subcontinuo de X. De manera similar se prueba que N es un subcontinuo de X. Si $x \in M$, entonces existe $A_x \in \mathcal{A}_0$ tal que $x \in A_x$. Así, $F_n(f)(A_x) \in \langle A\rangle_n$, por lo que $f(x) \in A$. Hemos probado que $f(M) \subset A$. De manera similar se prueba que $f(N) \subset B$. Veamos que M es un subconjunto propio de X. En efecto, ya que $f(M) \subset A \subsetneq Y$, existe $y \in Y \setminus f(M)$. De aquí que, $f^{-1}(y) \cap M = \emptyset$. Como f es sobreyectiva, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, por lo que $M \subsetneq X$. Similarmente, N es propio en X. Si suponemos que $X = M \cup N$, hemos terminado, es decir, f es libremente descomponible.
Supongamos que $X \neq M \cup N$. Se sigue que $X \setminus (M \cup N) \neq \emptyset$ y, por (i) del Corolario 1.3.9, si C es una componente de $X \setminus (M \cup N)$, entonces $\mathrm{cl}_X(C) \cap (M \cup N) \neq \emptyset$. Sean

$$\mathcal{C} = \{C \subset X : C \text{ es una componente de } X \setminus (M \cup N) \text{ y } \mathrm{cl}_X(C) \cap M \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{D} = \{C \subset X : C \text{ es una componente de } X \setminus (M \cup N) \text{ y } \mathrm{cl}_X(C) \cap N \neq \emptyset\},$$

$A' = \bigcup\{\mathrm{cl}_X(C) : C \in \mathcal{C}\} \cup M$, y $B' = \bigcup\{\mathrm{cl}_X(C) : C \in \mathcal{D}\} \cup N$. Es claro que $\mathrm{cl}_X(A')$ y $\mathrm{cl}_X(B')$ son subcontinuos de X. Mostremos que son propios. Para esto, como $A \subsetneq Y$ y f es sobre, entonces $X \setminus f^{-1}(A) \neq \emptyset$. Sea $x \in X \setminus f^{-1}(A)$, entonces $\{x\} \notin \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$, y $\{x\} \in \mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}_1$. Así, $x \in N$ y $x \notin M$. Se sigue que $X \setminus f^{-1}(A) \subset N$ y $(X \setminus f^{-1}(A)) \cap M = \emptyset$. Notemos que entonces $(X \setminus f^{-1}(A)) \cap A' = \emptyset$. Como $f^{-1}(A)$ es cerrado en X, entonces $X \setminus f^{-1}(A)$ es abierto en X. Así, si suponemos que $(X \setminus f^{-1}(A)) \cap \mathrm{cl}_X(A') \neq \emptyset$, tendríamos que $(X \setminus f^{-1}(A)) \cap A' \neq \emptyset$, lo cual es falso. Se sigue que, $(X \setminus f^{-1}(A)) \cap \mathrm{cl}_X(A') = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(A')$ es propio. De manera similar, $\mathrm{cl}_X(B')$ es propio.
Ya que, para cada componente C de $X \setminus (M \cup N)$, el conjunto $\mathrm{cl}_X(C)$ interseca a M o a N, entonces $X = \mathrm{cl}_X(A') \cup \mathrm{cl}_X(B')$.
Mostremos que $f(\mathrm{cl}_X(A')) \subset A$. En efecto, ya sabemos que $f(M) \subset A$. Sea $x \in A' \setminus M$. Se sigue que existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de $X \setminus (M \cup N)$ que converge a x. Afirmamos que $f(X \setminus M \cup N) \subset A \cap B$. En efecto, si $x \in X \setminus M$, $\{x\} \notin \mathcal{A}_0$. Así que, $\{x\} \in \mathcal{B}_0$ y, $\{f(x)\} \in \langle B, Y\rangle_n$, por lo que $f(x) \in B$. De manera similar, si $x \in X \setminus N$, entonces $f(x) \in A$. Por lo tanto, $f(X \setminus M \cup N) \subset A \cap B$. De aquí que, $f(x_n) \in A$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $f(x) \in A$. Hemos probado que $f(A') \subset A$, entonces $\mathrm{cl}_Y(f(A')) \subset \mathrm{cl}(_Y(A)) = A$. Como f es continua, se sigue que $f(\mathrm{cl}_X(A')) \subset \mathrm{cl}_Y(f(A'))$. Por lo tanto, $f(\mathrm{cl}_X(A')) \subset A$. De manera similar se obtiene que $f(\mathrm{cl}_X(B')) \subset B$. Hemos probado que f es libremente descomponible.

■

El análogo al teorema anterior en la clase de mapeos fuertemente libremente descomponibles también se cumple.

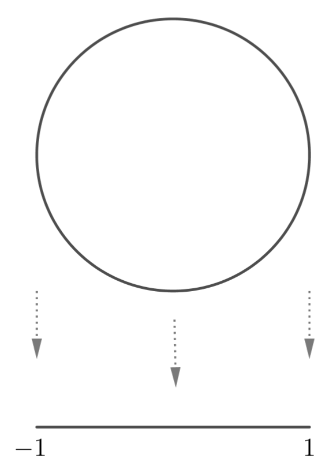
Teorema 2.22.6. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo, y $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es un mapeo fuertemente libremente descomponible, entonces f es un mapeo fuertemente libremente descomponible.*

Demostración. Supongamos que $F_n(f)$ es un mapeo fuertemente libremente descomponible. Sean B_1 y B_2 subcontinuos propios de Y tales que $Y = B_1 \cup B_2$. Tenemos que $\langle Y, B_1\rangle_n$ y $\langle B_2\rangle_n$ son subcontinuos de $F_n(Y)$ (la conexidad se sigue del Lema 2.4.4, y la compacidad de que B_1 y B_2 son cerrados en Y). Como B_1 y B_2 son propios, entonces $\langle Y, B_1\rangle_n$ y $\langle B_2\rangle_n$ son subcontinuos propios de $F_n(Y)$. Además, como $Y = B_1 \cup B_2$, se tiene que $F_n(Y) = \langle Y, B_1\rangle_n \cup \langle B_2\rangle_n$. Como $F_n(f)$ es fuertemente libremente descomponible, entonces $F_n(f)^{-1}(\langle B_2\rangle_n)$ es conexo.
Sea K una componente de $f^{-1}(B_2)$. Por el Lema 2.5.5, $F_n(K)$ es una componente de $F_n(f)^{-1}(\langle B_2\rangle_n)$. Así que, $F_n(K) = F_n(f)^{-1}(\langle B_2\rangle_n)$. Afirmamos que $K = f^{-1}(B_2)$. Claramente $K \subset f^{-1}(B_2)$. Sea $x \in f^{-1}(B_2)$, entonces existe $b \in B_2$ tal que $f(x) = b$. Como $\{b\} \in \langle B_2\rangle_n$, entonces $\{x\} \in F_n(f)^{-1}(\langle B_2\rangle_n) = F_n(K)$. Así, $x \in K$, por lo que $f^{-1}(B_2) \subset K$. Por lo tanto, $K = f^{-1}(B_2)$. Hemos probado que $f^{-1}(B_2)$ es conexo. De manera similar se prueba que $f^{-1}(B_1)$ es conexo. Por lo tanto, f es fuertemente libremente descomponible.

■

Existen un continuo de Peano Y y un mapeo fuertemente libremente descomponible $f : X \longrightarrow Y$ (y así libremente descomponible), tal que $F_n(f)$ no es libremente descomponible (y entonces no es fuertemente libremente descomponible), para cada $n \geq 2$, como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.22.7. *Sea $f : S^1 \longrightarrow [-1, 1]$ la función definida por, $f((x, y)) = x$, para cada $(x, y) \in S^1$. Veamos la siguiente imagen.*



Claramente f no es un mapeo monótono, pero sí es un mapeo fuertemente libremente descomponible y libremente descomponible. Por la Proposición 2.22.3, para $n \geq 2$, $F_n(f)$ no es libremente descomponible y, por consecuencia, tampoco es fuertemente libremente descomponible.

Conclusiones

Como vimos a lo largo de la tesis, el estudio de hiperespacio de continuos en las funciones inducidas es una aŕea de las matemáticas muy ineresante, ya que aunque en su mayoría son definiciones fáciles de entender, cuando se intenta resolver los cuestionamientos de ver si se preserva o no las clases de funciones al pasar a las funciones inducidas o de las funciones inducidas a la función original, puede ser una tarea nada fácil. En general, considero que los continuos e hiperespacios tienen el beneficio de presentarce interesantes como un campo de estudio para los matemáticos, pero como en todas las áreas de las matemáticas, queda de manifiesto el rigor, la creatividad y la complejidad en muchas de sus demostraciones.

Bibliografía

[1] J. Anaya, F. Capulín, D. Maya and F. Orozco, Induced mappings on symmetric products of continua, Topology and its Applications, Volume 214, 2016, Pages 100-108.

[2] F. Barragán, Induced maps on n-fold symmetric product suspensions, Topology and its Applications. Volume 158, 2011, Pages 1192–1205.

[3] F. Barragán, S. Macías and J. Tenorio, More on induced maps on n- fold symmetric product suspensions, Glasnik Matematićki. Volume 50 (70), 2015, Pages 489-512.

[4] R. García de la Rosa, El hiperespacio de subconjuntos finitos de un continuo, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1995.

[5] G. Higuera and A. Illanes, Induced mappings on symmetric products, Topology Proceedings. Volume 37, 2011, Pages 367-411.

[6] H. Hosokawa, Induced mappings on hyperspaces, Tsukuba J. Math. Volume 21, 1997, Pages 239–250.

[7] H. Hosokawa, Mappings of Hyperspaces Induced by Refinable Mappings, Bulletin of Tokio Gakugei University, sector 4, Pages 1-8, 1990.

[8] A. Illanes, J. Naranjo, J. Vega and Y. Velázquez, Induced mappings on symmetric products, some answers. Topology and its Applications, Volume 243, 1 July 2018, Pages 52-64,

[9] A. Illanes and S. Nadler, Jr., Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Marcel Dekker, Inc. Vol. 216, New York, Basel, 1999.

[10] K. Kuratowski, Topology Volume 2, Academic Press; PWN, New York; Warsaw, 1968.

[11] S. Macías, Aposyndetic properties of symmetric products of continua, Topology Proceedings. Volume 22, 1997, Pages 281–296.

[12] T. Maćkowiak, Continuous mappings on continua, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) Volume 158, 1979, Pages 1–91.

[13] S. Nadler Jr., Continuum Theory: An Introduction, Pure Applied Mathematics (Monographs and Textbooks), Volume 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[14] G. Whyburn, Analytyc topology, American Mathematical Society, Colloquium Publications 28, Providence, 1942.