UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE INGENIERÍA
CAMPUS I

COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

"TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS PARA EL DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE TESELADOS. UNA PROPUESTA SOBRE EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMATICA EDUCATIVA

PRESENTA

ING. ALFREDO RAÚL HERNÁNDEZ RUÍZ

DIRECTORA DE TESIS

DRA. ALMA ROSA PÉREZ TRUJILLO

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS, SEPTIEMBRE DE 2014

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE INGENIERÍA C-I

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
10 de Octubre de 2014.
Oficio F. I.01/1209/2014.

ING. ALFREDO RAÚL HERNÁNDEZ RUÍZ.
Alumno de la Maestría en Ciencias (con Especialidad en Matemáticas).
P r e s e n t e:

Por este medio comunico a Usted, que se le autoriza la impresión de su trabajo de tesis denominado: **"TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS PARA EL DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE TESELADOS. UNA PROPUESTA SOBRE EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA"**, para que pueda continuar con los trámites de titulación para la obtención del Grado de Maestro en Ingeniería.

Sin otro particular por el momento, aprovecho el medio para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR"

DR. FRANCISCO ALBERTO ALONSO FARRERA
DIRECTOR

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS
DIRECCIÓN DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

C. c.p. Dra. Daisy Escobar Castillejos. Coordinador de Investigación y Posgrado.-Facultad
C. c.p. Archivo/minutario
FAAF/mcm*

CIEES Nivel 1

GENERACIÓN Y GESTIÓN PARA LA INNOVACIÓN

2014 "AÑO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS Y DEL DR. MANUEL VELASCO SUÁREZ"

40 AÑOS UNACH

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas,
26 de septiembre de 2014.

DR. FRANCISCO ALBERTO ALONSO FARRERA
DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
P R E S E N T E

En nuestra calidad de sinodales del Examen de Grado de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del ***Ing. Alfredo Raúl Hernández Ruíz,*** nos permitimos manifestarle la aceptación del trabajo de tesis titulada: ***"Transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados. Una propuesta sobre el uso de la tecnología en el aula"***

Quedamos enterados de que formaremos parte del jurado del examen de grado, en la fecha y hora que se nos comunicará posteriormente.

ATENTAMENTE

Dra. Alma Rosa Pérez Trujillo
Directora de tesis

Dr. Miguel Solis Esquinca
Asesor de tesis

Mtro. Cristóbal Cruz Ruiz
Asesor de tesis

Mtro. Pierre-François Benoit Poirier
Asesor suplente de tesis

Dr. Hipólito Hernández Pérez
Asesor suplente de tesis

C.c.p. Archivo.

Dedicatoria

A Mayrita, por todo el amor demostrado al apoyarme en este camino, a Dilery por el amor que recibimos de ti, siendo ambas mi inspiración y motor para seguir adelante.

A mis padres Francisco Hernández y Mercedes Ruíz por apoyarme siempre, sus consejos han sido la base para emprender proyectos y sobre todo su ejemplo de vida en familia que junto con mis hermanos Adri, Gaby, Charis, Paty, Joako, Faby, Mechitas, nos apoyan para tener las fuerzas y la energía necesaria para ser felices.

A mis suegros Alexis López e Ilda Guillén por su invaluable e incondicional apoyo que con su cariño hacen que su familia adopte su modelo de vida y eso sirva de impulso para cumplir objetivos.

A toda la gran familia que sin el apoyo de cada uno de ustedes no hubiese sido posible lograr esta meta, los quiero a todos.

A mi directora de tesis la Dra. Ama Rosa Pérez Trujillo por dirigir este trabajo, por su paciencia y compromiso, por todos los conocimientos transmitidos durante este tiempo. Con su ejemplo de conocimientos y de logros académicos me ha trasmitido la forma de llevar a cabo logros importantes.

A mis maestros Miguel Solís, Cristóbal Cruz, Hipólito Hernández, German Ortega, Pierre Poirier, Rodolfo Trujillo por compartir su conocimiento, sus experiencias y su amistad.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se vierten los resultados de la investigación realizada sobre análisis y explicación de los polígonos que cubren el plano, partimos de la intensión de favorecer la mejor comprensión del tema en estudio en alumnos de segundo año de secundaria a través de una secuencia didáctica. La relevancia de esta investigación radica en la falta de importancia que se le da a las transformaciones geométricas y la construcción de teselados en el contexto escolar y las grandes dificultades que presentan los alumnos en la comprensión de este tema, por ello hemos implementado el uso de la tecnología como apoyo para aminorar estas dificultades, hemos observando en diferentes estudios realizados que dichas dificultades se generan desde el planteamiento del problema ya que se les dificulta la relación entre lo que ven en el salón de clases y lo que sucede en el entorno real, de ahí que nuestra propuesta trata de enlazar estos ámbitos.

La investigación está organizada en cuatro capítulos. En el primero de ellos, se puede ver la problemática sobre el tema de teselados, los antecedentes que muestran los estudios realizados por diferentes autores en torno a este tema, además de definir los objetivos de la investigación y la justificación de la misma.

El marco teórico y la metodología se pueden observar en el segundo capítulo, la teoría elegida es la teoría de situaciones, además, del marco de las competencias propuesto por la Secretaría de Educación Pública (SEP). La metodología utilizada es la ingeniería didáctica cuyas fases son descritas en este capítulo. Dentro del análisis preliminar se aborda la dimensión histórico-epistemológica donde se hace una recopilación de diferentes investigaciones y aportaciones hechas a través de la historia para construir el concepto de teselados, la dimensión cognitiva es abordada a parir de la propuesta de algunos autores, quienes establecen las etapas del desarrollo cognitivo y por último la dimensión didáctica, en la cual se describe brevemente cómo es abordado el tema en los libros de texto que fueron revisados y que se utilizan en el contexto escolar, así como la ubicación del tema dentro del programa de estudios del a SEP (2011a) y la forma de trabajar en el salón de clases.

En el capítulo tres se presenta el diseño de la secuencia didáctica, el cual es presentada a través de la explicación de las cuatro fases de la ingeniería didáctica, en primer lugar se encuentra la fase de planeación, después la fase del diseño, posteriormente la fase de experimentación y finalmente la fase de validación.

Por último en el capítulo cuatro presentamos las conclusiones principales que resultan de la investigación.

En los anexos de este escrito, se pueden observar la secuencia didáctica que hemos diseñado, así como algunas imágenes de las puestas en escena de la misma.

CAPITULO 1. ANTECEDENTES

En este primer capítulo se define la problemática de nuestra investigación así como también los objetivos que pretendemos alcanzar; al igual que se presenta la justificación de la elección del tema a abordar y el estado del arte de la investigación.

1.1 Planteamiento del problema

La disciplina Matemática Educativa atiende problemáticas relacionadas con la transmisión y construcción de saberes en el área del conocimiento de las matemáticas. Con ese marco se han identificado diversos fenómenos didácticos, uno de ellos, consiste en el reconocimiento de las dificultades que tienen los estudiantes de nivel básico en algunos de los temas de la geometría , de ahí que en nuestra investigación nos hemos enfocado en él y de manera específica en el de las transformaciones de figuras que permiten el diseño de los teselados, ya que consideramos que existe falta de interés por parte de los alumnos en cuanto al trabajo con el tema, lo anterior consideramos se debe en gran medida a lo que el currículum escolar y los libros de texto proponen para enseñar a los alumnos ya que éstos últimos en su mayoría muestran ejemplos poco prácticos.

Los resultados de investigaciones que han abordado el tema en cuestión plantean situaciones que hacen más accesible el medio para llegar a la comprensión del mismo, sin embargo, la práctica cotidiana en el aula muestra que por razones curriculares y el tiempo establecido en el abordaje de este tema no es suficiente para que la mayoría de los alumnos se sientan seguros en cuanto a la comprensión del mismo, no obstante el profesor agote los recursos que tiene programados en los libros de texto provocando con ello un vacío que a la postre redunda en resultados escolares nada favorecedores .

Considerando lo anterior, proponemos como una herramienta que coadyuva a solventar esta problemática: la visualización, creemos que esta herramienta juega un papel importante en el proceso de prueba que cognitivamente contribuye a facilitar la búsqueda de soluciones en una tarea geométrica. Aunado a lo anterior, consideramos enriquecer el discurso matemático en el tema de la modelación de teselados con el uso reflexivo de la calculadora Casio ClassPad 300 como una herramienta tecnológica cuyo uso permite la construcción de conocimiento matemático.

Nuestra investigación propone reforzar la comprensión de las características de los teselados usando la calculadora ClassPad 300 como herramienta tecnológica educativa, pretendiendo que el alumno pueda construir o explicar los conocimientos matemáticos alcanzando un plano argumentativo a través de este dispositivo electrónico didáctico favoreciendo con ello, el uso reflexivo de la tecnología en el aula.

Con relación a lo expuesto anteriormente, tenemos además, el interés por conocer las características de los polígonos que nos permiten cubrir un plano cuando se trabaja con tecnología, por ello nos preguntamos ¿Cómo favorecer el aprendizaje sobre transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados con la calculadora Casio ClassPad 300?, además, de acuerdo a la Reforma Integral de la Educación Básica propuesta por la SEP en el 2011, es necesario enseñar matemáticas en forma graduada y articulada, de tal manera que los alumnos vayan encontrando sentido a lo aprendido; por tal razón nos preguntamos primero ¿Cómo aborda el programa de la SEP el estudio de los teselados y cómo es abordado por los libros de texto? lo cual sirvió en gran medida como fundamento del diseño de la secuencia didáctica, lo que nos permitió articular el uso reflexivo de la tecnología y el quehacer cotidiano del aula.

1.2 Objetivos

Para efectos de esta investigación, con el fin de tener claro lo que se pretende lograr se plantearon los siguientes objetivos:

1.2.1 Objetivo general

Favorecer el aprendizaje sobre transformaciones geométricas en alumnos de segundo grado de secundaria, así como el diseño y construcción de teselados con la tecnología.

1.2.2 Objetivos específicos

- Analizar de qué manera es abordado el análisis y explicación de los polígonos que permiten cubrir el plano en los libros de texto.
- Revisar cómo el uso de la tecnología, en particular el uso de la calculadora ClassPad 300 permite una aproximación más atractiva en la trabajo con

tópicos de la geometría y con ello se logra la construcción de conocimiento matemático.

- Diseñar las actividades para una secuencia didáctica que permita favorecer la comprensión en el análisis y explicación de los polígonos que permiten cubrir el plano usando la calculadora Casio ClassPad 300.

1.3 Justificación

La presente investigación surge del interés de conocer de qué manera el diseño de una secuencia didáctica enfocada al análisis y explicación de los polígonos que permiten cubrir el plano puede contribuir a una mejor comprensión de aspectos geométricos en segundo grado de secundaria y así disminuir la problemática existente referente al tema en estudio.

De acuerdo a la Reforma integral de la Educación Básica de la SEP (2011b), los estándares curriculares están organizados en tres ejes temáticos que son: sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida y Manejo de la información. Estos ejes temáticos comprenden lo que se estudia de matemáticas en el cuarto período escolar (primero, segundo y tercer grado de secundaria) y se establecen así para favorecer la vinculación entre contenidos de distintas ramas de la matemática.

La integración de la temática en el programa de estudios se da a través del segundo eje temático forma, espacio y medida cuyos estándares curriculares indican que los alumnos sepan justificar la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o polígono y utilizar esta propiedad en la resolución de problemas (SEP, 2011a).

Entorno a las capacidades geométricas; particularmente, a los procesos cognitivos que evidencia el alumno al resolver un problema de geometría. El conocimiento de dichos procesos y sus relaciones sirve para diagnosticar al estudiante y dirige el desarrollo de las nociones y conceptos geométricos asociados; de igual manera, entender su desarrollo, evolución, tratamiento e integración en el currículo escolar puede ayudarnos a conocer el mapa cognitivo de los alumnos, facilitando el aprendizaje. Según Gutiérrez (2005, citado en Torregrosa & Quesada, 2007, p. 276)

> la principal dificultad está en la necesidad que tenemos de conocer lo que pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad

> matemática, cuáles son sus procesos de razonamiento, cómo analizan y transforman la información que les llega del exterior, cuándo y cómo toman decisiones, etc. Todo aquello para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo a Torregrosa & Quesada (2007) si logramos interpretar el proceso de resolución de los problemas que tienen que ver con aspectos geométricos que los estudiantes hacen, se puede intervenir de manera más eficaz en la construcción de esos saberes, a través de propuestas que se ajusten a las necesidades encontradas.

En este sentido, el análisis y explicación de los polígonos que permiten cubrir el plano consistirá en promover de manera gradual el desarrollo de este eje temático, y de este modo, lograr que los alumnos de secundaria puedan comprender la geometría de una manera significativa.

Se ha detectado que la problemática que presentan los alumnos de segundo grado de secundaria al querer comprender el estudio de los polígonos que permiten cubrir el plano, radica primero en comprender los aspectos básicos de geometría y así poder entender las formas básicas con las que están constituidos los teselados, dada esta justificación se presenta a continuación un estado del arte que permitió construir una idea integral sobre la geometría en el aula y que nos proporcionó algunos de los fundamentos para generar el diseño de una secuencia didáctica que ayude a los alumnos a comprender el tema en cuestión.

1.4 Estado del arte

Para efectos de nuestra investigación, haremos retomado algunos resultados de investigaciones que se han realizado y que tienen relación estrecha con la temática que abordamos: la geometría y su tratamiento en el aula, la visualización y finalmente el uso de la tecnología, en los siguientes apartados ahondaremos más sobre ellos.

1.4.1 Sobre la geometría en el aula

Retomamos a López & García (2008) quienes describen que la tendencias actuales sobre la enseñanza de la matemática promueven su aprendizaje mediante la resolución de problemas con la finalidad de enseñar matemáticas y además tener un medio a través del cual los alumnos construyen conocimientos matemáticos. Acorde con este enfoque, sugieren que la enseñanza de la Geometría gire en torno a la resolución de problemas que impliquen el uso de relaciones y conceptos geométricos. Argumentan que los problemas deben ser lo suficientemente difíciles para que realmente constituyan un reto para los alumnos y lo suficientemente fáciles para que cuenten con algunos elementos para su resolución.

Una situación problemática es aquella en la que se desea obtener un resultado pero no se conoce un camino inmediato para obtenerlo, en este sentido la concepción de problema es relativa, lo que para unos alumnos puede resultar un problema para otros no lo es si cuentan con un camino para su resolución. La concepción de un problema como una situación de aprendizaje es muy amplia, tales como: armar un rompecabezas, hacer un croquis del camino de la casa a la escuela, calcular el número de diagonales de un polígono cualesquiera, calcular la altura de un poste (sin medirlo), hallar el número de vértices de un poliedro a partir de su desarrollo plano, imaginar el resultado de girar un cuerpo geométrico o imaginar el cuerpo geométrico que se forma con cierto desarrollo plano.

Este enfoque supone un modelo de clase muy diferente a aquel en el que se acostumbra *mostrar* un concepto geométrico o dar una explicación de los contenidos para después aplicarlos a problemas. Comentan que se trata ahora de realizar tareas que lleven a los estudiantes a experiencias más significativas: visualizar, explorar y analizar, abstraer propiedades, clasificar, elaborar conjeturas y tratar de validarlas.

La propuesta que López & García (2008) exponen es que una enseñanza de la Geometría el docente dista mucho de ser un simple transmisor de contenidos geométricos. Sin descuidar éstos, proponen llevar a cabo los diferentes tipos de tareas (conceptualizar, investigar, demostrar) en las que se trabaje el desarrollo de las habilidades mencionadas (visualización, de trazos, comunicación, razonamiento lógico y transferencia), considerando los diferentes niveles de razonamiento geométrico propuestos por Van Hiele (reconocimiento, análisis, clasificación y deducción) expuesto en Fouz & Donosti (2006); todo ello bajo el enfoque de resolución de problemas.

Agregan que el punto de partida para el aprendizaje de la Geometría es el entorno físico: en esta disciplina el uso del material concreto (sobre todo en los primeros años de escolaridad) cobra particular importancia al constituirse en un primer acercamiento hacia los diferentes grados de abstracción que se espera que los alumnos alcancen, sin embargo, es necesario mencionar que se debe ser muy cauteloso en la utilización de este material, pues debe estar supeditada a actividades que realmente conduzcan a un aprendizaje adecuado de los contenidos geométricos y al desarrollo de habilidades geométricas mencionadas. Enfatizan que el uso de material concreto, por sí mismo, no garantiza un aprendizaje significativo, se requiere que el profesor tenga un propósito específico para que la actividad que realice el alumno lo conduzca al desarrollo de una habilidad y al aprendizaje de contenidos geométricos. Al utilizar material concreto se debe estar alerta de que realmente se use bajo el enfoque de resolución de problemas.

De acuerdo a lo antes expuesto, el tipo de abordaje de la geometría en el contexto escolar debe adecuado al contexto y enriquecido con material concreto en las primeras etapas, de ahí que la propuesta que nosotros hacemos en esta investigación es el diseño de una secuencia didáctica que de manera inicial invite al trabajo con material manipulable (rompecabezas) para luego dar paso al trabajo con la tecnología en donde se trabaja con construcciones abstractas.

1.4.2 Sobre el uso de la tecnología en matemáticas

Cuando se menciona el término tecnología, tenemos que considerar el acelerado desarrollo que la misma ha tenido en los últimos años, como consecuencia, el uso de la misma en el contexto escolar parece casi natural, con relación a lo señalado, muchos son los autores que han investigado y han obtenido resultados que avalan el uso de la tecnología en el aula de matemáticas (p. e. Miller, 1987; Chevallard, 1992; Cantoral & Mirón, 2000; Laborde, 2001; Suárez, 2006; Del Puerto & Minnaard, 2006; Pérez, 2008, entre otros).

De la revisión y análisis realizado, hemos retomado los resultados de investigación de Pérez (2008), la investigación giró en torno a llevar a aula de matemáticas los resultados de diversas investigaciones, se plantea además, la interrogante sobre cómo favorecer el uso de la tecnología en el aula de matemáticas, la respuesta a ésta es formular un conjunto de diseños didácticos que promuevan la resignificación de distintos tópicos matemáticos provenientes del Cálculo y Precálculo, a través del uso inteligente de la tecnología.

De acuerdo a la autora, el uso de herramientas tecnológicas favorece a tal grado las construcciones geométricas que permiten la resignificación de tópicos matemáticos provenientes del Cálculo y Precálculo, considera que el papel que juega la tecnología en las realizaciones didácticas, consiste en asumir que efectivamente es posible afectar la naturaleza del aprendizaje de ideas matemáticas entre los estudiantes, siempre que la intervención de la tecnología (medios y dispositivos didácticos) se acompañe seriamente de investigación en el campo de la Matemática Educativa; menciona además, que el uso de la tecnología permite a los estudiantes tener una visión global y local, tanto cualitativa como cuantitativa cuando trabaja con gráficas, en las que pueden explorar y además dar explicaciones de lo que sucede con la situación con la que trabajan, es decir, implica con este uso el hecho de enriquecer el argumento geométrico; además, de lo ya mencionado, se propone a la visualización como una herramienta que facilita el proceso de construcción de conocimiento matemático, en nuestra investigación hemos retomado también ésta herramienta, la cuales abordada en el siguiente apartado.

De manera particular, en nuestra investigación haremos uso de la calculadora graficadora Class Pad 300 en el diseño de nuestra situación didáctica, de ahí que nos parece importante mencionar la importancia que tiene el uso de la tecnología en el ámbito escolar. De acuerdo a Del Puerto & Minnaard (2006, citadas en Pérez, 2008, p. 13):

> … las calculadoras graficadoras facilitan la exploración y el descubrimiento, favoreciendo una activa aproximación al aprendizaje, promoviendo además la interacción entre estudiantes y maestros y entre el conjunto de estudiantes. Otros resultados de investigación reportados por estas autoras, señalan que la calculadora juega un papel en el proceso de aprendizaje, no para resolver problemas sino como ayuda complementaria al poder verificar con ella las respuestas, identificar errores, comprender situaciones propuestas y ahorrar tiempo al generar las representaciones gráficas rápidamente.

Como podemos ver, en nuestra investigación, hemos recuperado esta mirada, sobre la importancia del uso de esta tecnología en particular.

1.4.3 Sobre la visualización

Las experiencias tales como la construcción de modelos geométricos y su relación con la percepción visual toman especial importancia en el sentido en el que la representación se encuentra en estrecha conexión con el potencial humano de visualizar y la búsqueda de mecanismos de argumentación para lograr justificar afirmaciones (asociado al razonamiento discursivo). Según Mammana & Vilani (1998, en Fernández & Montoya, 2013), el aspecto visual en la geometría es predominante, recalcan que desde las tablillas babilónicas a los papiros egipcios, cuando se trató de escribir un problema geométrico, se inició la tradición de mezclar en las producciones escritas imágenes, símbolos especiales y el lenguaje natural para comunicar ideas. La visualización juega un papel importante en el proceso de prueba, no fundamental, pero que cognitivamente contribuye a facilitar la búsqueda de soluciones o alternativas en los pasos del razonamiento donde una articulación de estos procesos cognitivos es fundamental Duval (2005, en Fernández & Montoya, 2013). El uso de tecnología, por ejemplo, permite al estudiante la manipulación del entorno geométrico, ampliando su experiencia y validando enunciados, algo muy difícil de lograr al principio sin la mediación de un software. Por otro lado, las TICs ayudan a los estudiantes e sus conjeturas, pero no así en la demostración, suponemos que una inapropiada instrumentación Artigue (2002, en Fernández & Montoya, 2013), podría ocasionar incluso obstáculos en la demostración.

Fernández & Montoya (2013) puntualizan que la visualización ligada a los significados o imágenes (conceptualización) y la percepción ligada al mundo de los sentidos, ayudan para entender un problema, pero se debe tener en cuenta el no abuso, por la convicción que puede ocasionar en los estudiantes para no llevar a cabo el proceso de prueba o más explícitamente una demostración. Del razonamiento según Balacheff (1987, en Fernández & Montoya, 2013), surgen explicaciones que son aceptadas o no por una comunidad, aquellas explicaciones que son aceptadas por la comunidad (regidas por un contrato y *milieu*) conforman las pruebas, en las cuales se distingue las pruebas pragmáticas y las pruebas intelectuales y la respectiva tipología. A este esquema de trabajo es lo que se entiende como proceso de prueba y una demostración es una prueba de tipo intelectual. La propuesta de Fernández & Montoya (2013) es entregar una sugerencia de cómo promover el razonamiento de validación en el aula por medio de la Geometría Dinámica, verificando así el papel heurístico de la tecnología como artefacto en el sentido de Rabardel (1995, en Fernández & Montoya, 2013) que interfiere positivamente en una tarea geométrica propuesta a los estudiantes.

Por otro lado encontramos a Zimmermann & Cunningham (1991, p. 25-26), para quienes la “visualización en matemáticas es un proceso de formar imágenes (mentales, o con papel y lápiz, o con la ayuda de la tecnología) y usarlas con el propósito de tener un mejor entendimiento y estimular el proceso de descubrimiento matemático".

Considerando lo antes expuesto, creemos que la herramienta de visualización aunada a la tecnología favorecer el aprendizaje sobre transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados.

1.5 La investigación

En nuestra investigación, para el análisis y explicación de los polígonos que permiten cubrir el plano nos enfocaremos en las formas en las que podemos encontrar teselaciones como son regulares y semireguales puntualizando el caso de la teselación regular muy famosa llamada "La pajarita de Nazarí" diseño que prevalece en el importante espacio arquitectónico llamado la Alhambra[1], del cual exponemos un breve resumen de su historia:

> La Alhambra, denominada así por sus muros de color rojizo («*qa'lat al-Hamra*'», Castillo Rojo), está situada al este de la ciudad de Granada, España, frente a los barrios del Albaicín y de la Alcazaba.
>
> A pesar de la incorporación del castillo de la Alhambra al recinto amurallado de la ciudad en el siglo XI, lo que la convirtió en una fortaleza militar desde la que se dominaba toda la ciudad, no sería hasta el siglo XIII con la llegada del primer monarca nazarí, Mohamed ben Al-Hamar (Mohamed I, 1238-1273) cuando se fijaría la residencia real en La Alhambra. Este hecho marcó el inicio de su época de mayor esplendor.
>
> La mayor preocupación de los arquitectos de la Alhambra era cubrir decorativamente cada espacio, por pequeño que fuese. Cualquier elemento decorativo resultaba escaso. La mayoría de los arcos interiores son falsos, no sustentan ninguna estructura, simplemente decoran, las paredes están cubiertas de cerámica o yeserías.
>
> A pesar de tener prohibido el arte musulmán la representación de figuras, los temas de decoración en la Alhambra son muy variados, se utiliza la clásica decoración caligráfica, en concreto escritura cursiva y cúfica. El elemento decorativo más utilizado por los arquitectos granadinos será el ataurique, o decoración vegetal, y, en menor medida, la lacería y las redes de rombos.

Por otro lado, hemos de remarcar que la importancia de la presente investigación recae en el uso de tecnología, en específico del uso de la calculadora cuya implementación nos permite responder a cuestionamientos sobre cómo favorecer el aprendizaje sobre transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados con la

[1] Para mayor información remitirse a: http://www.alhambradegranada.org

calculadora Casio ClassPad 300 tomando como base el planteamiento que hace del tema el programa de la SEP y el abordaje de los libros de texto, para lograrlo se diseñó una secuencia didáctica que además de enriquecer el discurso matemático en el campo de los polígonos que cubren el plano den soporte a los alumnos en la comprensión de dicho tema.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En esta investigación emplearemos la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1986), además, del marco de las Competencias, propuestas por la SEP como eje rector en los planes y programas para la educación básica como marco teórico, y a la ingeniería Didáctica como metodología a seguir, pues a partir de ella hemos construido una secuencia didáctica que nos permite analizar y obtener los resultados deseados.

2.1 Teoría de situaciones

De acuerdo a De Faria Campos (2006) la teoría de situaciones es un antecedente directo de la Ingeniería Didáctica la cual se utiliza en Didáctica de las Matemáticas con una doble función como metodología de Investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje. De tal forma que la teoría propone un modelo en donde la enseñanza es vista como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar. Considerando que producir conocimientos supone tanto establecer nuevas relaciones, como transformar, y reorganizar otras, pero en todos los casos, producir conocimientos implica validarlos, según las normas y procedimientos aceptados por la comunidad matemática en la que dicha producción tiene lugar.

Se retoma además, las hipótesis de la epistemología genética de Jean Piaget como marco para modelar la producción de conocimientos, en la que se sostenía que el sujeto produce conocimiento como resultado de la adaptación a un medio resistente con el que interactúa. “El alumno aprende a adaptarse a un medio que es un factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por supuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje” (Brousseau, 1986).

Bajo la Teoría de Situaciones Brousseau describe la existencia de dos tipos de interacciones básicas: primero la interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego y segundo la interacción del docente con el alumno. De esta forma se manifiesta la situación a didáctica donde el alumno interactúa con el medio y produce un conocimiento independiente de la mediación del docente, pero de esta forma el alumno se confronta, rechaza, pone en juego sus propios conocimientos e incluso crean nuevos frente a la problemática en la que se encuentra. Derivado de estos tipos de interacciones, es decir de la relación sujeto-medio y alumno-docente. La teoría de Situaciones se concibe como un sistema, en el cual estos elementos no pueden ser independientes unos de otros. Esta es una de las razones por la que hemos retomado como el marco teórico en esta investigación. Así mismo, y como parte fundamental de nuestro marco teórico, las competencias serán parte de nuestro estudio.

2.2 Competencias

De acuerdo al Programa de Estudio 2011 de Educación básica, éste promueve el desarrollo de competencias, el logro de estándares curriculares y de aprendizajes esperados, entendiendo a la competencia como ”la capacidad de responder a diferentes situaciones e implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)” (SEP, 2011a, p. 29).

Para conocer un poco más sobre esta propuesta, a continuación mostramos un panorama general.

2.2.1 Las Competencias en los programas de estudio de la SEP

Den acuerdo a los programas de estudio 2011 de educación básica (SEP, 2011a, pp. 38-39), los alumnos deben adquirir cinco competencias a lo largo de los cuatro períodos de su educación básica (prescolar, primaria, secundaria) y a lo lardo de toda su vida, a las que le denominan las “Competencias para la vida”, y éstas se integran de la siguiente manera:

1. **Competencias para el aprendizaje permanente**. Para su desarrollo se requiere: habilidad lectora, integrarse a la cultura escrita, comunicarse en más de una lengua, habilidades digitales y aprender a aprender.

2. **Competencias para el manejo de la información**. Su desarrollo requiere: identificar lo que se necesita saber; aprender a buscar; identificar, evaluar,

seleccionar, organizar y sistematizar información; apropiarse de la información de manera crítica, utilizar y compartir información con sentido ético.

3. **Competencias para el manejo de situaciones**. Para su desarrollo se requiere: enfrentar el riesgo, la incertidumbre, plantear y llevar a buen término procedimientos; administrar el tiempo, propiciar cambios y afrontar los que se presenten; tomar decisiones y asumir sus consecuencias; manejar el fracaso, la frustración y la desilusión; actuar con autonomía en el diseño y desarrollo de proyectos de vida.

4. **Competencias para la convivencia**. Su desarrollo requiere: empatía, relacionarse emocionalmente con otros y la naturaleza; ser asertivo; trabajar de manera colaborativa; tomar acuerdos y negociar con otros; crecer con los demás; reconocer y valorar la diversidad social, cultural y lingüística.

5. **Competencias para la vida en sociedad**. Para su desarrollo se requiere: decidir y actuar con juicio frente a los valores y las normas sociales y culturales; proceder a favor de la democracia, la libertad, la paz, el respeto a la legalidad y a los derechos humanos; participar tomando en cuenta las implicaciones sociales del uso de la tecnología; combatir la discriminación y el racismo y conciencia de pertenencia a su cultura a su país y al mundo.

Además de las competencias para la vida, se promueven competencias de carácter disciplinario, dentro de ellas se encuentra las cuatro competencias matemáticas.

2.2.2 Competencia matemática

Continuando con la revisión documental, encontramos que desde el programa de estudios de la SEP se establecen cuatro competencias matemáticas, cuyo desarrollo es importante durante la Educación Básica:

1. **Resolver problemas de manera autónoma**. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; por ejemplo, problemas con solución única, otros con varías soluciones o ninguna solución; problemas en los que sobren o falten datos; problemas o situaciones

en los que sean los alumnos quienes planteen las preguntas. Se trata de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más un procedimiento, reconociendo cual o cuales son más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución.

2. **Comunicar información matemática**. Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación; se establezcan nexos entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; se deduzca la información derivada de las representaciones y se infieran propiedades, características o tendencias de la situación del fenómeno representado.

3. **Validar procedimientos y resultados**. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.

4. **Manejar técnicas eficientemente**. Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora. Muchas veces el manejo eficiente o deficiente de técnicas establece la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución incompleta o incorrecta. Esta competencia no se limita a usar de forma mecánica las operaciones aritméticas, sino que, apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones que se requieren en un problema y en evaluar la pertinencia de los resultados. Para lograr el manejo eficiente de una técnica es necesario que los alumnos la sometan a prueba en

> muchos problemas distintos; así adquirirían confianza en ella y la podrán adaptar a nuevos problemas (SEP, 2011. p. 23).

Además de la teoría explicada anteriormente, para dar respuesta a las preguntas de investigación hemos ocurrido a la Ingeniería Didáctica, la cual presentamos enseguida, a partir de la vinculación de la investigación con la misma.

2.3 Ingeniería Didáctica

Para Brousseau (1988), la perspectiva sistémica que considera a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto. Como se muestra en el siguiente esquema (Figura 1).

Los conocimientos didácticos se construyen partiendo de problemas que encuentran los profesores en el medio, teniendo en cuenta su experiencia profesional y accesibilidad, con el objetivo de hacer de esa didáctica un verdadero instrumento de desarrollo importante del profesor hacia el alumno un buen aprendizaje. En nuestro caso, las situaciones didácticas serán diseñadas con el apoyo de los profesores de nivel básico. De acuerdo a Artigue (1995) la metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada.

> …las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori* (Artigue, 1995, p. 37).

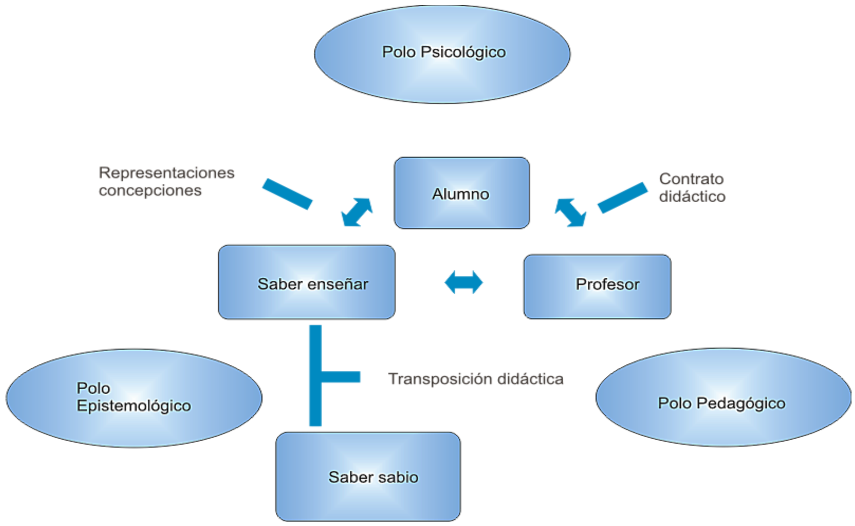


Fig. 1. El sistema didáctico (Fuente: Brousseau, 1988).

Para llevar a cabo el diseño de la secuencia didáctica recurrimos a la metodología de la ingeniería didáctica que consta de cuatro fases: 1) fase de análisis preliminar, 2) la fase de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería, 3) fase de experimentación y por último la fase de análisis *a posterior* y evaluación. Enseguida describimos estas fases.

2.3.1 Análisis Preliminar

Esta fase que es la de concepción, está basada no únicamente en los aspectos teóricos y en los conocimientos previos que el estudiante debe tener, sino además, en un determinado número de análisis preliminares. De acuerdo a Artigue (1995, p. 38) los más frecuentes son:

- En análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva
- Y por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación

A partir de ellos se pueden encontrar una serie de cuadros restrictivos (p.e. el cuadro algebraico de la resolución por fórmulas, el cuadro numérico de la resolución numérica aproximada y el cuadro geométrico del estudio global cualitativo de las gráficas soluciones de la ecuación) y se establece una serie de dimensiones que permiten la realización del análisis de estos cuadros:

- **Dimensión epistemológica**. Ésta se refiere a los aspectos relacionados con el conocimiento mismo.
- **Dimensión cognitiva**. Hace referencia a las concepciones de los estudiantes, a las dificultades y obstáculos que determinan la evolución de su aprendizaje.
- **Dimensión didáctica**. Se consideran el funcionamiento del sistema de enseñanza, los elementos didácticos tales como profesor, libros de texto, método de enseñanza.

Ahora bien considerando que en la investigación se pretende la resignificación de conocimiento matemático de nivel básico estos cuadros deberán obedecer a ese tipo de conocimiento en general y de manera particular a aquello que tienen relación estrecha en el análisis y explicación de los polígonos que permiten cubrir el plano.

Todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, de la ingeniería se retoman y profundizan en el transcurso de las diferentes fases de la misma, en función de las necesidades sentidas. Por lo tanto, los estudios preliminares tan sólo mantienen su calidad de preliminares en un primer nivel de elaboración.

Enseguida presentamos cada una de estas dimensiones acotadas a la investigación que hemos desarrollado.

2.3.1.1 Dimensión histórica-epistemológica

En nuestro caso esta dimensión es abordada a partir de una revisión histórica del concepto de teselados, comenzamos con una aproximación epistemológica de la geometría para luego abordar los distintos tipos de configuraciones de polígonos que permiten cubrir el plano.

2.3.1.1.1 Paradigma geométrico

La noción de paradigma geométrico se entenderá por "la caracterización de los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y distinguir las diferentes entidades constructivistas de la geometría puesta en juego". Montoya (2010 citado en Fernández & Montoya, 2013, p. 755) Esta concepción acoge tres componentes que le dan sustento: la primera de carácter cognitiva, en el sentido de Gonseth (1945-1955 citado en Fernández & Montoya, 2013, p. 755), donde plantea que los modos de pensamiento; intuición, experiencia y el razonamiento deductivo serán la base del geómetra para enfrentar una determinada tarea. La segunda componente es de carácter filosófica, en el sentido de Kuhn (1962 citado en Fernández & Montoya, 2013, p. 755) asociada a una concepción de paradigma donde la validación de los conocimientos construidos hace relación con las verdades y estrategias compartidas por la comunidad escolar según su concepción de la realidad; por último la tercera componente es de carácter epistemológico que hace referencia a la ubicación del modelo geométrico.

Estas tres componentes permiten identificar tres paradigmas geométricos que coexisten en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría, a saber, Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII), Geometría Axiomática Formalista (GIII).

a) Geometría natural (GI)

En esta geometría los objetos geométricos son percibidos en la abstracción de la realidad, la intuición juega el papel para calificar si el dibujo es o no representativo del objeto geométrico, es así como la visualización me permite evaluar si se logran concebir imágenes mentales. En este paradigma los medios de prueba son de tipo material, utilizando artefacto para la manipulación de los objetos, se permiten las mediciones con instrumentos, trabajo de pliegues y/o cortes, etc. La experimentación y la deducción actúan sobre la representación de los objetos geométricos, en la interface de los artefactos, visualización y percepción. En cuanto al modelo geométrico está ligado al mundo real, cuando se habla de real, en esta teoría, no se refiere al cotidiano sino a lo que existe. La geometría euclidiana está presente sólo en forma local, puesto que el razonamiento de validación aquí no exige ni se puede usar la axiomática.

b) Geometría axiomática natural (GII)

La representación de los objetos geométricos cambia con respecto al paradigma anterior, ya no se habla de dibujo sino de figuras geométricas, donde ella describe al objeto por medio de una propiedad; sin embargo, la visualización aún es fuerte, pero como representación inicial puesto que el razonamiento de validación se funda en las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático en el modelo geométrico, puesto en escena, es decir, propiedades, definiciones, etc. En este paradigma al abordar un problema geométrico se acepta el dibujo sólo inicialmente para extraer la información o la utilización de artefactos en la construcción, pero no como medio de prueba.

c) Geometría axiomática formalista (GIII)

En este paradigma, los objetos geométricos provienen de una axiomática que contiene todo el formalismo riguroso del modelo, el dibujo aquí podría guiar la intuición del geómetra, pero no debe ser usado para probar, pues el razonamiento de validación e esta geometría es exclusivamente a través del sistema axiomático formal, por tal razón los artefactos son instrumentos puramente teóricos. En GIII, surge la aparición de la aparición de la Geometría de Euclides, incluso las Geometrías no Euclidianas, el trabajo ya no es a nivel local en la resolución de los problemas geométricos.

En ocasiones es posible observar una transición entre los paradigmas, los más factibles entre GI y GII y entre GII y GIII, pero no es tan evidente el tránsito de GI a GIII. Lo anterior no quiere decir que los paradigmas geométricos sean un marco impreciso, sino abierto a la diversa gama de problemas donde si puede existir una transición, pero en otros el paradigma es claro.

Lo importante es la legitimidad de cada paradigma, cada uno de ellos se debe respetar, evitar el juicio de valor, no se trata de enjuiciar sino buscar el fundamento a partir de la teoría. En cada paradigma existe un espacio de trabajo geométrico, que corresponde a un ambiente organizado por y para el geómetra mediante la articulación de tres componentes, a saber: referencial teórico, el espacio local y real y los artefactos.

- La componente Referencial Teórico, corresponde al conjunto de definiciones, propiedades y relaciones articuladas por los axiomas y que finalmente determinan el modelo geométrico.

- La componente Espacio Local y Real, es la concepción por el individuo del modelo geométrico. El aspecto local se refiere a que el individuo trabaja con una parte del modelo y, el aspecto real se refiere a que los objetos son el resultante de la abstracción del modelo a partir de la realidad.
- La componente Artefactos, corresponde a todo lo que permite al geómetra manipular objetos geométricos con el objetivo de abordar un problema, en concordancia con su modelo geométrico.

Estas componentes del Espacio de Trabajo Geométrico se hacen más visibles dependiendo del paradigma geométrico, por ejemplo el referencial teórico tendrá más presencia a medida que el estudiante transite hacia GIII, los artefactos por su parte son evidentes en GI (regla, compás, doblar, cortar, etc.), pero a medida que se transita a GIII se transforman en instrumentos netamente teóricos.

Desde un punto de vista cognitivo, hay procesos asociados al Espacio de Trabajo Geométrico como lo son: visualización, construcción y prueba, relacionándose con las componentes del ETG conformando un espacio de trabajo epistemológico y cognitivo. El proceso cognitivo de visualización aporta en el proceso de construcción y vice versa, a la vez, el proceso cognitivo de construcción aporta en el proceso de prueba y viceversa, pero el proceso de visualización aporta en el sentido que se relacionan, que se emplea uno cuando se hace el otro, en la prueba pero no podemos asegurar que la prueba aporta en el proceso cognitivo de la visualización Montoya (2010, en Fernández & Montoya, 2013).

2.3.1.1.2 ¿Qué es la geometría?

El significado etimológico de la palabra geometría, “medida de la tierra”, nos indica su origen de tipo práctico, relacionado con las actividades de reconstrucción de los límites de las parcelas de terreno que tenían que hacer los egipcios, tras las inundaciones del Nilo. Pero la geometría dejó de ocuparte de la medida de la tierra. Con los griegos la geometría se interesó por el mundo de las formas, la identificación de sus componentes más elementales y de las relaciones y combinaciones entre dichos componentes (Godino & Ruíz, 2002).

La geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palabras como, *punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro, etc*. Tales términos y expresiones designan “figuras geométricas”, las cuales son consideradas como abstracciones, conceptos entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos. Por tanto, hay que tener en cuenta que la naturaleza de los entes geométricos es esencialmente distinta de los objetos perceptible, como una computadora, una mesa, un árbol. Un punto, una línea, un plano, un círculo, etc., to tienen ninguna consistencia material, ningún peso, color, densidad, etc.

Un problema didáctico crucial según Godino & Ruíz (2002) es que con frecuencia se usa la misma palabra para referirnos a los objetos perceptibles como determinada forma geométrica (“el triángulo es un instrumento de precisión”) y al concepto geométrico correspondiente (el triángulo isósceles). Además en la clase de matemáticas, y en los textos escolares no se diferencian los dos planos (objeto abstracto, realidad concreta) y encontramos expresiones como: “Dibuja una recta (un triángulo, etc.)”. Como entidades abstractas que son, parece obvio que no se puede dibujar una recta o un triángulo. Lo que se dibuja es un objeto perceptible que evoca o simboliza el objeto abstracto correspondiente. La recta, como entidad matemática, es ilimitada y carece de espesor, no así los dibujos que se hacen de ella. Del mismo modo, un triángulo no es una pieza de material de una forma especial, ni una imagen dibujada sobre el papel *es una forma controlada por su definición.*

Las entidades matemáticas y también las geométricas son creadas en última instancia mediante definiciones, reglas que fijan el uso de los términos y expresiones. Ciertamente que no serán reglas arbitrarias, sino que se harán de manera que sean útiles para la descripción del mundo que nos rodea – o de mundos imaginarios -, pero su naturaleza es la que hace que establecer una propiedad geométrica (por ejemplo, que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo plano sea un ángulo llano) sea un acto esencialmente distinto a descubrir que todos los leones son carnívoros. Esta naturaleza es de tipo “gramatical” (puesto que se deriva de las reglas de uso de las palabras y expresiones) y es la que concede a las entidades matemáticas su carácter necesario, universal y atemporal.

Pero superada la primera fase de clasificación de las formas, de identificación de las propiedades de las clases de objetos y la creación de un lenguaje que permita su descripción de manera precisa, la actividad geométrica se ocupa de estructurar el mundo de entidades geométricas creadas y de deducir las consecuencias lógicas que se derivan de los convenios establecidos. Rápidamente somos arrojados afuera del cómodo mundo de nuestras percepciones para entrar en el mundo del lenguaje, de la gramática y de la lógica. Cuando pedimos a un niño que entre una colección de paralelogramos identifique los rectángulos, no le exigimos que discrimine la forma perceptible de los rectángulos de entre las restantes figuras, sino que sea capaz de aplicar los convenio que hemos establecido para el uso de la palabra ‘rectángulo’. Siendo un poco exigentes, incluso podemos criticar la pertenencia de esa tarea, ya que visualmente es imposible saber si un romboide cuyos ángulos miden 89º (y 91º) debemos considerarlo o no como un rectángulo. La respuesta correcta que un niño debería dar sería algo así como,

“*Si estos ángulos de estas figuras son efectivamente rectos, entonces decimos que son rectángulos*”, también debería incluir los cuadros entre los rectángulos.

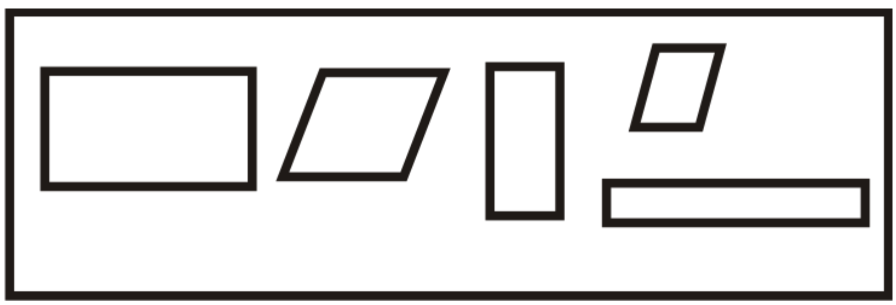


Fig. 2, Figuras geométricas (Fuente: Godino & Ruíz, 2002 p.457).

A manera de conclusión Godino & Ruíz (2002) propone que debemos tener claro que cuando hablamos de “figuras o formas geométricas” no nos referimos a ninguna clase de objetos perceptibles, aunque ciertamente los dibujos, imágenes y materializaciones concretas son, al menos en los primeros niveles del aprendizaje, la razón de ser del lenguaje geométrico y el apoyo intuitivo para la formulación de conjeturas sobre las relaciones entre las entidades y propiedades geométricas.

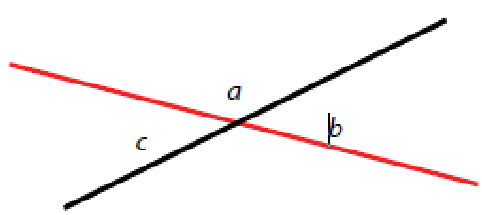
2.3.1.1.3 ¿Para qué estudiar geometría?

Según Bishop (1983, citado por Bressan, 2000, en García & López, 2008) dice que la Geometría modela el espacio que percibimos, es decir, la Geometría es la Matemática del espacio. Por ejemplo, una habitación: es muy probable que tenga forma de *prisma rectangular* con sus caras, aristas y vértices; las paredes y los techos generalmente son *rectangulares*; las paredes son *perpendiculares* al techo y éste es *paralelo* al piso;

si hay alguna ventana lo más seguro es que tenga forma de una *figura geométrica* con lados que son *segmentos de recta*; al abrir y cerrar la puerta se forman diferentes *ángulos*; si el piso está cubierto de mosaicos, éstos tienen forma de una o varias *figuras geométricas* que cubren el plano sin dejar huecos ni empalmarse y en él se pueden observar diversas transformaciones geométricas: *rotaciones, traslaciones y simetrías*.

No obstante que la presencia de la Geometría en el entorno inmediato podría ser una razón suficiente para justificar su enseñanza y su aprendizaje, cabe aclarar que no es la única. La Geometría ofrece, a quien la aprende, una oportunidad para emprender un viaje hacia formas superiores de pensamiento. García & López (2008) reportan que las personas construyen de manera intuitivas algunas relaciones y conceptos geométricos, producto de su interacción con el espacio; la enseñanza de la Geometría debe permitir avanzar en el desarrollo del conocimiento de ese espacio, de tal manera que en un momento dado pueda prescindir de él y manejar *mentalmente* imágenes de figuras y relaciones geométricas, es decir, hace uso de su capacidad de abstracción. El estudio de la Geometría permite al alumno estar en interacción con relaciones que ya no son el espacio físico sino un espacio conceptualizado y, por lo tanto, en determinado momento, la valides de las conjeturas que haga sobre las figuras geométricas ya no se comprobarán empíricamente sino que tendrán que apoyarse en razonamientos que obedecen a las reglas de argumentación en Matemáticas, en particular, la deducción de nuevas propiedades a partir de las que ya conocen.

Por ejemplo, en un nivel empírico, los alumnos podrían medir los ángulos de la siguiente figura y encontrar que la medida del ángulo α más la medida del ángulo ᵬ suman 180º y también, midiendo, pueden encontrar que el ángulo ᵬ mide lo mismo que el ángulo ƈ



.

Fig. 3. Medición de ángulos (Fuente: García & López, 2008 p.29).

En un nivel de razonamiento deductivo, *sin necesidad de medir*, los estudiantes pueden deducir que los ángulos a y b suman 180º y argumentar: porque los lados rojos de estos ángulos forman una línea recta y esto hace que ambos formen un ángulo de 180º.

También pueden deducir que los ángulos *b* y *c* miden lo mismo, con el siguiente razonamiento:

1.- El ángulo a más el ángulo b suman 180º.

2.- El ángulo a más el ángulo c suman 180º.

3.- Entonces el ángulo *b* y el ángulo *c* miden lo mismo.

Este tipo de razonamiento deductivo deber ser la culminación de una serie de actividades llevadas a cabo a lo largo de toda la Educación Básica; se espera que los alumnos que egresan de Educación Secundaria puedan hacer razonamientos similares.

García & López (2008), concluyen que el aspecto formativo de la enseñanza de la Geometría es tan relevante cono el aspecto informativo, es decir, los procesos de pensamiento que los alumnos desarrollan con un adecuando tratamiento de la Geometría en clase son tan importantes como el aprendizaje de los contenidos geométricos.

La Geometría:

- Se aplica en la realidad (en la vida cotidiana, la arquitectura, la pintura, la escultura, la astronomía, los deportes, la carpintería, la herrería, etc.).
- Se usa en el lenguaje cotidiano (por ejemplo, se dice; calles paralelas, tinacos cilíndricos, la escalera en espiral, etc.).
- Sirve en el estudio de otros temas de las Matemáticas (por ejemplo, un modelo geométrico de la multiplicación de números o expresiones algebraicas lo constituye el cálculo del área de rectángulos).
- Permite desarrollaren los alumnos su percepción del espacio, su capacidad de visualización y abstracción, su habilidad para elaborar conjeturas acerca de la relaciones geométricas en una figura o entre varias y su habilidad para argumentar al tratar de validar las conjeturas que hace.

- Constituye el ejemplo clásico de ciencia organizada lógica y deductivamente (a partir de axiomas y postulados se deducen teoremas).

2.3.1.1.4 Recubrimientos del plano con polígonos

El arte de los recubrimientos, o teselaciones, del plano mediante figuras poligonales tiene una historia tan antigua como la propia civilización. Diversos e imaginativos patrones han decorado las construcciones y objetos más diversos (muros, alfombras, ventanales, etc.). En tiempos recientes el interés por las teselaciones ha ido más allá de ser un interés puramente decorativo. Por ejemplo, en metalurgia y cristalografía interesa saber cómo se disponen de manera natural de una forma periódica. En arquitectura interesa conocer cómo se pueden combinar componentes estructurales simples para crear complejos constructivos más grandes, y los fabricantes de computadoras esperan poder integrar patrones de circuito electrónicos simples para formar potentes procesadores, como son la redes neuronales. El análisis matemático de los patrones de recubrimientos es una respuesta a estas necesidades contemporáneas- Al mismo tiempo la creación y exploración de las teselaciones o recubrimientos del plano proporciona un contexto interesante para la investigación geométrica y la resolución de problemas en las clases de matemáticas de educación primaria y secundaria.

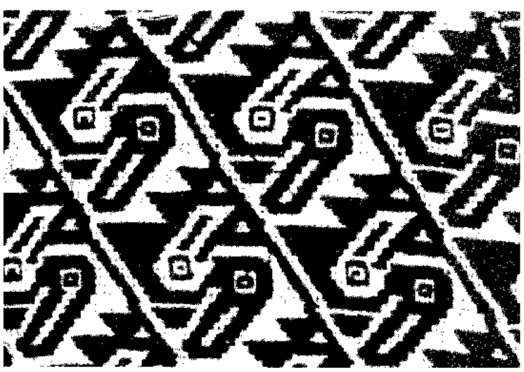
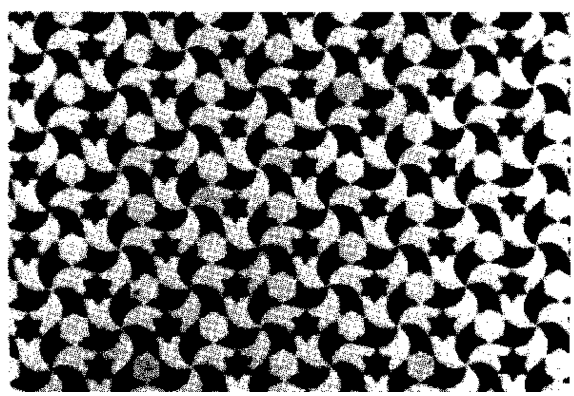



Fig. 4. Ejemplos de teselasiones (Fuete: Godino & Ruíz, 2002 p.476).

El diccionario de la Real Academia Española de la Lengua indica que la palabra tesela (del latín, tesella) significa "*Cada una de las piezas cúbicas de mármol, piedra, barro cocido o cualquier otro material, con que los antiguos formaban los pavimentos de mosaico*"

Según Godino & Ruíz (2002), desde un punto de vista matemático más general consideramos que una tesela es “cualquier curva cerrada simple, con su interior”. Un conjunto de teselas forma una teselación de una figura si dicha figura está completamente cubierta por las teselas sin solapamientos de puntos interiores de dichas figuras.

2.3.1.1.5 Teselasiones poligonales del plano

Se sabe que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualesquiera es de 180º. Dibujemos un triángulo en el que marcamos los ángulos con 1,2 y 3 y hagamos suficientes copias de él. La experiencia consiste en recortar dichos triángulos y colocarlos de forma que, en torno a un vértice, obtengamos 360º para cubrir el plano sin dejar huecos ni solapamientos.

Tres de ellos los podemos unir colocando en torno a un vértice cada uno de los tres ángulos del triángulo, que sabemos suman 180º y repetirlo dos veces (Fig. 5).

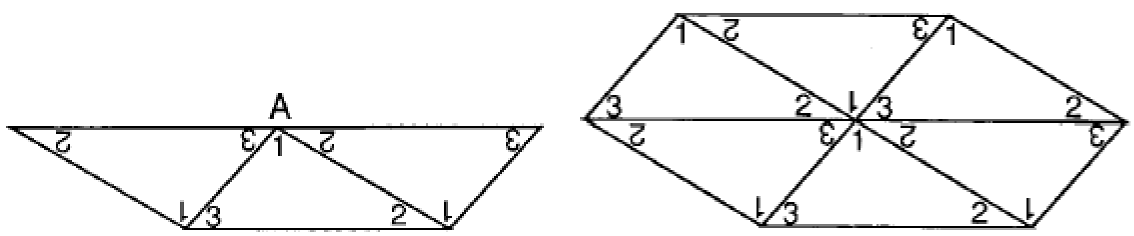


Fig. 5. Triangulo que cubre el plano (Fuente: Godino & Ruíz, 2002 p.477).

Repitiendo el proceso se consigue una teselación triangular (Fig. 6)

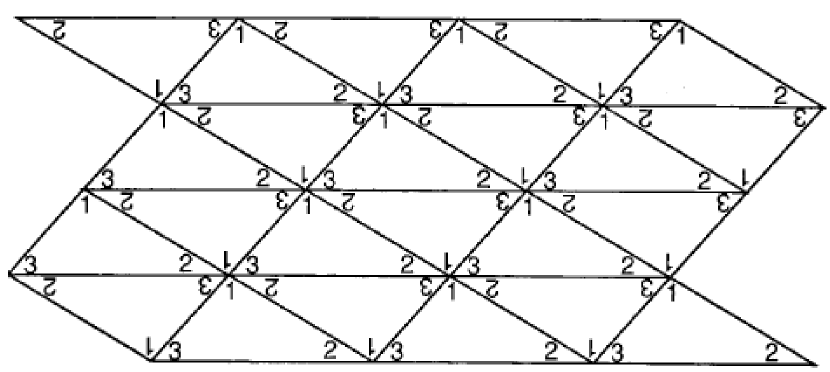


Fig. 6 Repetición recubrimiento del plano (Fuente: Godino & Ruíz, 2002 p.477).

2.3.1.1.6 Teselasiones semirregulares

Si utilizamos diversos tipos de polígonos regulares, podemos indagar las combinaciones de ellos que producen un cubrimiento del plano. Para ello debemos conocer los ángulos interiores de algunos polígonos regulares, como se muestra en la tabla siguiente:

Polígono	Nº de lados	Ángulo interior
Triángulo	3	60
Cuadrado	4	90
Pentágono reg.	5	108
Hexágono reg.	6	120
Heptágono reg.	7	128 4/7
Octógono reg.	8	135
Nonágono reg.	9	140
Decágono reg.	10	144
Dodecágono reg.	12	150
Pentadecágono reg.	15	156
Octadecágono reg.	18	160
Icógono	20	152

Tabla 1. Ángulos interiores de polígonos regulares. (Fuente: Godino & Ruíz, 2002 p.479).

Algunas de esas combinaciones dan lugar a teseleaciones con todos los vértices iguales. Estas teselaciones les llamamos semirregulares, y son 8 (Fig. 7). Las series de números puestos debajo de cada figura indican el orden de colocación de los distintos polígonos (3.3.3.4.4, quiere decir que se unen tres triángulos seguidos y a continuación dos cuadrados) En cambio existen otras combinaciones de polígonos regulares que cubren el plano pero no producen vértices idénticos. Algunas de esas combinaciones están en la figura 8.

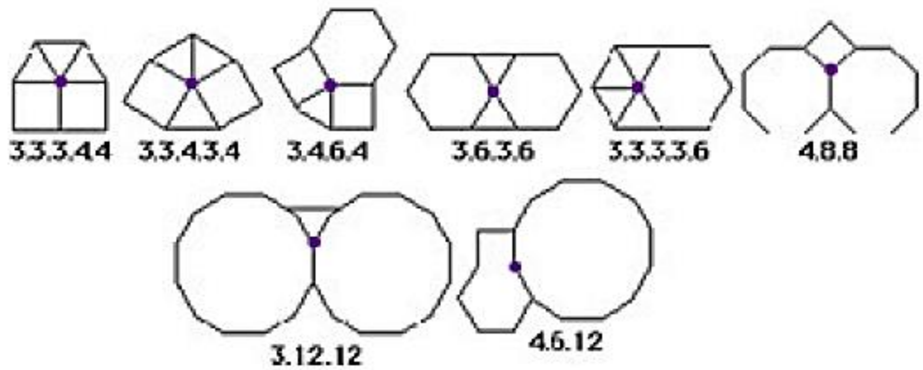


Fig. 7. Combinaciones de polígonos regulares que originan teselaciones semirregulares (Fuente: Godino & Ruíz, 2002, p. 479).

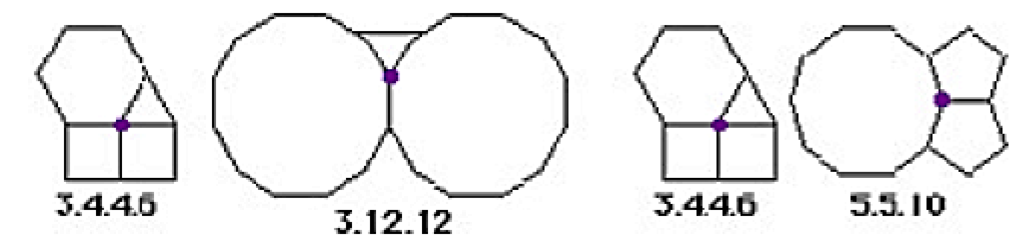


Fig. 8. Combinaciones de polígonos regulares que NO originan teselasiones semirregulares (Fuente: Godino & Ruíz, 2002, p. 480).

Un recubrimiento del plano formado por más de un tipo de polígono regular y con idpenticos vértices de figura se dice que es un recubrimiento semirregular. Esta condición adicional sobre los vértices de figura supone que los mismos tipos de polígonos deben concurrir en cada vértice, y deben ocurrir en el mismo orden.

Según Godino & Ruíz (2002), se puede demostrar que existen 18 modos de formar vértices de figuras con polígonos regualres de dos o más tipos. De estas 18 formas, ocho corresponden a teselaciones semirregulares, que son las indicadas en la figura 9.

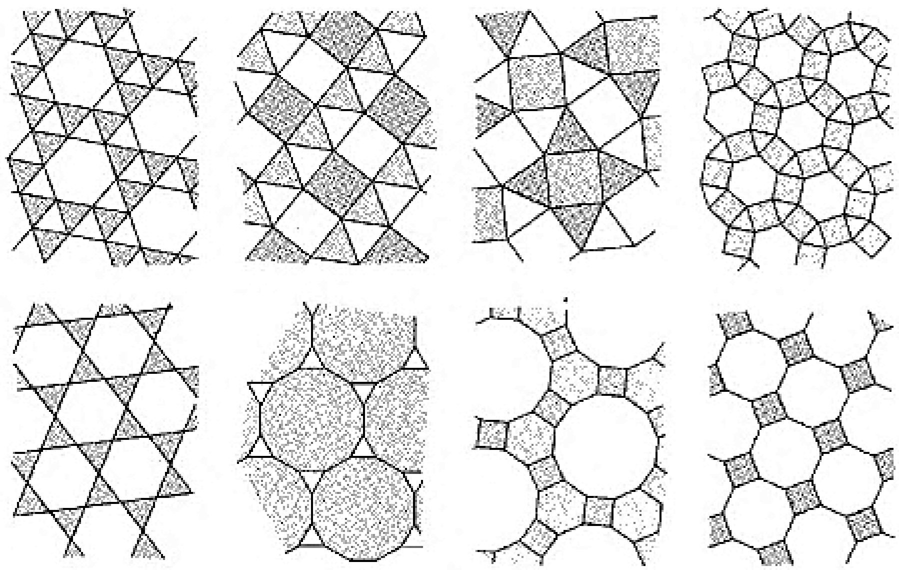


Fig. 9. Ocho tecelaciones semiregulares (Fuente: Godino & Ruíz, 2002, p. 480).

Godino & Ruíz (2002) menciona que una transformación del plano se dice que es un movimiento rígido si y sólo si la distancia entre cualquier par de puntos P y Q es la misma que la distancia entre sus imágenes en dicha transformación, esto es, $PQ = P'Q'$, para todo par de puntos P y Q.

Los movimientos rígidos también se le llaman isometrías debido a que conservan la forma y medidas de las figuras. Un modelo físico que permite materializar los movimientos rígidos del plano se puede hacer mediante una hoja de transparencias. Si tenemos cualquier figura sobre una hoja y hacemos una transparencia la podemos mover en una dirección, girar sobre un punto fijo, o darle la vuelta alrededor de una recta fija. En todos estos casos se obtiene una figura colocada en una posición diferente, pero la forma y dimensiones del a figura original no cambian.

Hay tres movimientos rígidos del plano básicos: traslaciones, giros y simetrías.

2.3.1.1.7 Traslaciones

Una traslación es un movimiento rígido en el que todos los puntos del plano se mueven en la misma dirección y la misma distancia. En la figura 10 el triángulo ABC se transforma en el A’B’C’ como consecuencia de la traslación definida por el vector de origen el punto A y extremo A’. Una traslación queda determinada dando un vector que especifique la dirección en la que se trasladan todos los puntos del plano y la distancia a la cual se trasladan, que es el módulo del vector (distancia entre el origen y el extremo)

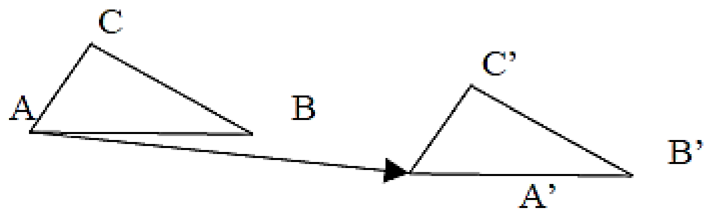


Fig. 10. Traslaciones (Fuente: Godino & Ruíz, 2002 p.530).

2.3.1.1.8 Giros

El giro o rotación es otro de los movimientos rígidos básicos. Consiste en girar todos los puntos del plano alrededor de un punto fijo (centro del giro) un cierto ángulo que será el ángulo de giro. En la figura 11 hemos representado sobre una supuesta hoja de papel el triángulo ABC, el segmento PQ y el dibujo de una mano (EGF). Al aplicar un giro a dicha hoja alrededor del punto fijo O y de amplitud 120º en el sentido contrario a las agujas del reloj se obtienen como imágenes transformadas las figuras A'B'C', P'Q', y la mano E'G'F'. Esta transformación se puede ejemplificar usando una hoja de transparencias para materializar las imágenes obtenidas al girar la hoja manteniendo fijo el punto O.

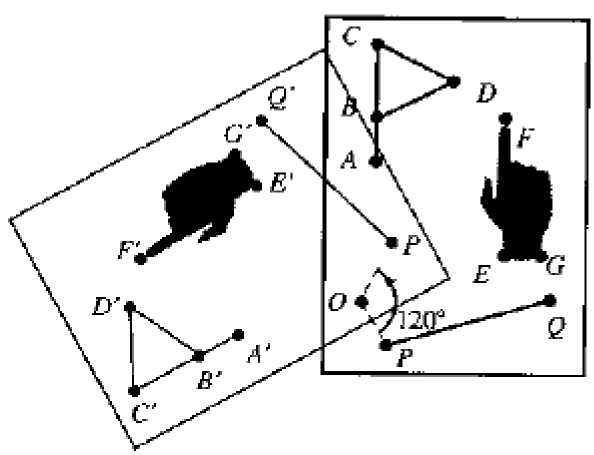


Fig. 11. Giros (Fuente: Godino & Ruíz, 2002, p. 531).

Un giro queda determinado al dar el centro O y la amplitud α del ángulo orientado correspondiente. Se considera que el giro es positivo si se produce en sentido contrario a las agujas del reloj y negativo cuando se hace en el sentido de las agujas del reloj. En un giro sólo se tienen en cuenta las posiciones iniciales y finales de los puntos.

2.3.1.1.9 Simetrías

La *simetría* o *reflexión* sobe un espejo es el movimiento rígido del plano que se produce fijando una recta r del plano y hallando para cada punto P otro punto P' de tal manera que la recta r es mediatriz del segmento PP'. Esto quiere decir que r es perpendicular a PP' y que pasa por el punto medio del segmento PP'.

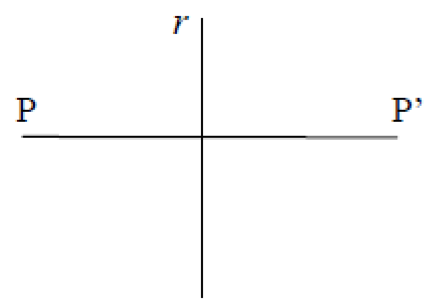


Fig. 12. Simetrías (Fuente: Godino & Ruíz, 2002, p. 531).

Se puede observar que una simetría invierte la orientación de las figuras: los puntos que están a la derecha del eje de simetría pasan a estar a la izquierda después de la transformación, y los que están a la izquierda pasan a la derecha.

Paling (1988, en Hernández & Soriano, 1997), dice que antes de comenzar la escuela todos los niños han observado y usado cuerpos o formas en tres dimensiones. Sus experiencias preescolares de este aspecto de las matemáticas son mucho mayores que esos otros tópicos o materias que son tratados en sus años de escuela. Deberíamos hacer buen uso de este fondo de experiencias. Este espacio sólo tiene significado cuando contiene objetos que podemos observar en relación los unos con los otros, o pueden observarse en movimiento, que cambian su posición relativa respecto a nosotros o respecto a otro objeto (Williams & Shuard, 1988, en Hernández & Soriano, 1997).

Las primeras experiencias del niño con su entorno son totalmente espaciales en particular a través de los sentidos de la vista y el tacto. La concepción que tiene el niño del espacio le proporciona un marco dentro del cual considera la realidad. La conceptualización que el niño hace del espacio es paralela, hasta cierto punto, a su representación cognitiva del mundo exterior. Holmes (1985, Dickson, Brown & Gibson 1991, y Ausubel & Sullivan 1983, en Hernández & Soriano, 1997) hablan de las investigaciones de Piaget y de su teoría de los conceptos espaciales en los niños. Piaget distingue entre percepción y representación. La capacidad de percepción del niño se desarrolla hasta los dos años y la capacidad de reconstrucción de imágenes espaciales comienza hacia la edad de dos años y se perfecciona a partir de los siete.

En cada uno de los estadios de desarrollo Piaget distingue una progresiva diferenciación de propiedades geométricas partiendo de la propiedades que el denomina *topológicas*, es decir, propiedades globales independientes de la forma o el tamaño. Piaget cita las siguientes:

1) **cercanía** (proximidad), por ejemplo, dibujar un hombre con los ojos muy juntos, aun cuando estos puedan haber sido situados por debajo de la boca,
2) **separación**, por ejemplo no traslapar la cabeza y el cuerpo,
3) **ordenación,** dibujar la nariz entre los ojos y la boca,
4) **cerramiento**, por ejemplo dibujar los ojos dentro de la cabeza, y
5) **continuidad**, por ejemplo, hacer que los brazos formen un continuo con el tronco y no con la cabeza (Dickson, Brown & Gibson, 1991 en Hernández & Soriano, 1997). Corresponden a la etapa de pensamiento preoperacional.

Durante la etapa operacional concreta del desarrollo, las concepciones topológicas del espacio ceden el paso a las proyectivas y euclidianas.

Al segundo grupo de propiedades Piaget las denomina propiedades *proyectivas*, es la capacidad del niño para predecir qué aspecto presenta un objeto al ser visto desde diferentes ángulos. En el espacio proyectivo, los objetos se localizan en relación uno con otro, aunque no hay ninguna medición. Hay ciertos indicios de que el niño preoperacional posee una concepción no verbalizada (en imagen) de las posiciones derecha-izquierda y adelante-atrás, lo que le permite ver los objetos desde otro punto de vista. Los niños tienen más dificultades para discriminar la posición izquierda-derecha que para distinguir la dimensión arriba-abajo.

El tercer grupo de propiedades geométricas Piaget las denomina *euclideas*, son las relativas a tamaños distancias y direcciones, que conducen a la medición de longitudes, áreas, etc. Las concepciones euclidianas agregan la dimensión de la medición y se hacen más refinadas y complejas a medida que el niño crece.

La conceptualización piagetiana del desarrollo espacial no concede mucha importancia a los determinantes innatos de la capacidad del niño para encarar las relaciones especiales. Recientes descubrimientos sobre la percepción indican que Piaget pudo haber subestimado ciertos determinantes perceptuales congénitos y también puede haber subestimado seriamente el papel que cumplen las imágenes, las que en el sistema piagetiano ocupan un segundo plano respecto a las acciones.

2.3.1.1.10 Notación Schläfli

Reyes (2007) resume que Ludwig Schläfli, Nació en 1814 en Grasswill, Berna, Suiza y murió en 1895 en Berna, Suiza, una de sus aportaciones más importantes fue la notación Schläfli, para nombrar a los poliedros regulares, sea p el número de aristas en una cara y q el número de cara adyacentes a un vértice. El símbolo Schläfli es $\{p,q\}$. La notación de Schläfli sirve para describir o denotar los mosaicos. Con este código se indica los polígonos que concurren en cada vértice (identificando cada polígono por su número de lados) y el orden en que lo hacen. Así, si en un vértice concurren p polígonos de n lados cada uno, describiremos el mosaico mediante la notación $\{p,q\}$, o bien $n.n.n\ \ldots,^{p}\ \ldots\ldots\ldots.n\ o\ n^{p}$.

- Triángulos equiláteros (seis en cada vértice) $\{3{,}6\}, 3^{6}\ o\ \{3.3.3.3.3.3\}$.
- Cuadrados (cuatro en cada vértice) $\{4{,}4\}, 4^{4}\ o\ \{4.4.4.4\}$.
- Hexágonos regulares (tres en cada vértice)$\{6{,}3\}, 6^{3}\ o\ \{6.6.6\}$.

2.3.1.1.11 Agrupación de Polígonos alrededor de un vértice

Al respecto Reyes (2007) describe que teniendo en cuenta la medida de los ángulos interiores de los polígonos regulares, el número máximo de polígonos que podemos colocar alrededor de un vértice es seis. Por tanto se agrupan seis triángulos equiláteros, (polígonos regulares de menor ángulo interior). El número mínimo de polígonos que podemos colocar es tres, que serán tres hexágonos (360º/3=120º medida del ángulo interior del hexágono).

Se puede estudiar de forma general, el número y la clase de polígonos que concurren en un vértice de cualquier mosaico de la forma siguiente:

Supongamos alrededor de un vértice del mosaico un grupo de r polígonos, cada uno de ellos de lado $n_i, l \leq i \leq r$, es decir $n_1, n_2, n_3 \ldots n_r$ con $3 \leq r \leq 6$.

Para cada $i = 1,2, \ldots r$ el ángulo interior del polígono es:

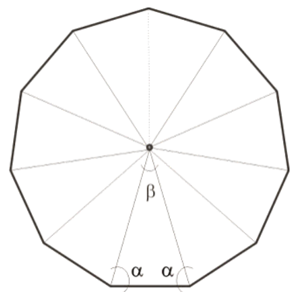


Fig. 13. Análisis de ángulos interiores (Fuente: Reyes, 2007 p.7).

$$2 \propto = 180° - \frac{360°}{n_i} = 180° \left(\frac{n_i - 2}{n_i}\right)$$

Como la suma de los ángulos interiores alrededor de un vértice debe ser 360°, se verificará:

$$180° \left(\frac{n_1-2}{n_1}\right) + 180° \left(\frac{n_2-2}{n_2}\right) + \cdots + 180° \left(\frac{n_r-2}{n_r}\right) = 360°, \text{ o bien}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i-2}{n_i} = 2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) = 2 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} = 2 \Leftrightarrow r - 2 = 2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} \text{ Por tanto:}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} = \frac{r-2}{r} \quad \boldsymbol{3 \leq r \leq 6}$$

Los casos geométricamente válidos en concurrencia de tres polígonos partiendo de un triángulo son:

3, 7, 42 **3, 9, 18** **3, 8, 24** **3, 10, 15** **3, 12, 12**

X=y lo que significa que un triángulo solo puede ir con polígonos iguales. El único caso válido es **{3, 12, 12**}.

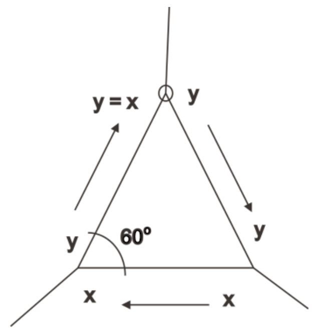


Fig. 14. Análisis de ángulos interiores del triángulo equilátero (Fuente: Reyes, 2007 p.8).

2.3.1.1.12 Grupos cristalográficos

Hay cuatro isometrías: los movimientos en el plano que conservan las distancias. Dos de ellas mantienen la orientación: la traslación y la rotación. Las otras dos invierten la orientación: la simetría y la simetría con desplazamiento. En matemáticas se ha estudiado este tema desde la óptica de las estructuras, y se ha demostrado que hay exactamente 17 grupos llamados cristalográficos planos. Reciben ese nombre porque surgen del trabajo de científicos y geómetras como Fedorov, que a finales del siglo XIX estudiaban la estructura de los cristales.

Para conocer las características de los mosaicos, basta con saber cómo es la célula básica que lo genera por repetición y cuáles son los movimientos necesarios para componerlo.

Lo primero que se hace es determinar un paralelogramo, llamado primitivo, que pueda generar el mosaico mediante dos vectores de traslación colocados sobre sus lados (no confundir con la célula básica que puede ser aún más pequeña al poder utilizar isometrías distintas de la traslación). Con rectas paralelas a los lados del paralelogramo se organiza una trama. De todos los paralelogramos posibles, se toma aquel que tenga los vértices sobre centros de rotación de orden máximo. Si no hay centros de rotación (orden 1), se hacen coincidir los ejes de simetría con los lados o con las diagonales.

La notación establecida por la Unión Internacional de Cristalografía (Comité Español), también conocida cono notación de Hermann-Mauguin, consta de cuatro símbolos ordenados:

- Símbolo 1. Es c (centrado) cuando el paralelogramo primitivo es un rombo que se puede enmarcar centrándolo en un rectángulo y p (primitivo) en cualquier otro caso de los 17 grupos, sólo dos son centrados: cm y cmm.
- Símbolo 2. El mayor orden de rotación que podamos encontrar. Puede ser 1 (ángulo de 360º), 2 (ángulo de 180º), 3 (ángulo de 120º), 4 (ángulo de 90º) o 6(ángulo 60º). Cuando un mosaico tiene un centro de rotación de un orden determinado, también tendrá otros centros de órdenes divisores.
- Símbolo 3. Corresponde al tipo de simetría y puede tener dos símbolos: m (mirror = espejo) simetría especular o axial y g (glide = deslizamiento), cuando tiene simetría como deslizamiento.
- Símbolo 4. La misma clasificación anterior, respecto a la presencia o no de un segundo tipo de ejes de simetría (m o g).

En el siguiente diagrama se expone un algoritmo para averiguar a cuál de los 17 grupos corresponde un mosaico. El nombre se encuentra en la penúltima columna en color naranja. En muchas ocasiones se usa una abreviatura estándar de esta cadena de símbolos, la vemos en la última columna en color amarillo. En esta forma abreviada, una m o algunos dígitos no aparecen porque pueden deducirse sin posibilidad de confusión con otro grupo. Es necesario advertir que los diseños $p31m$ y $p3m1$ son una excepción a esta notación

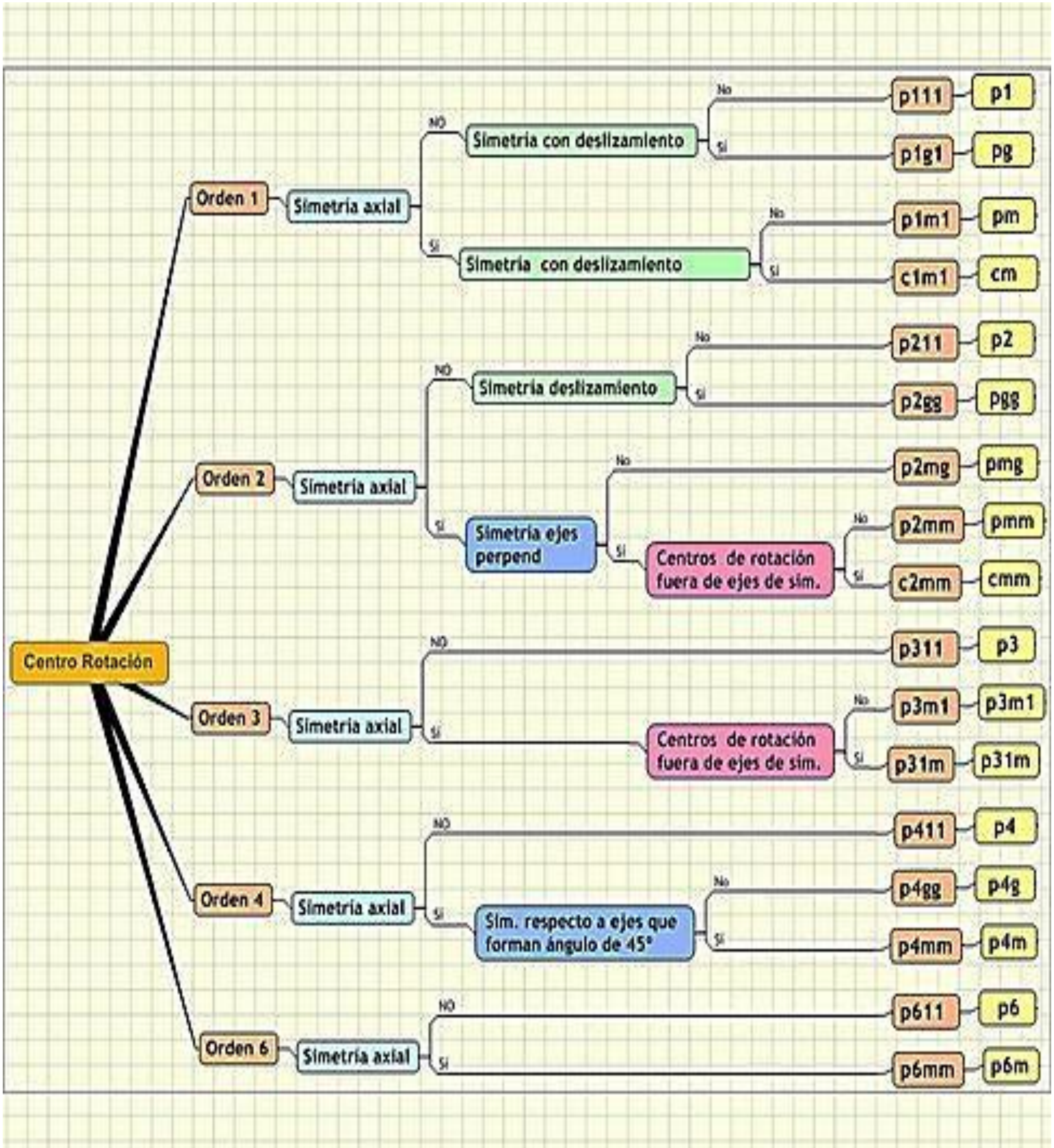
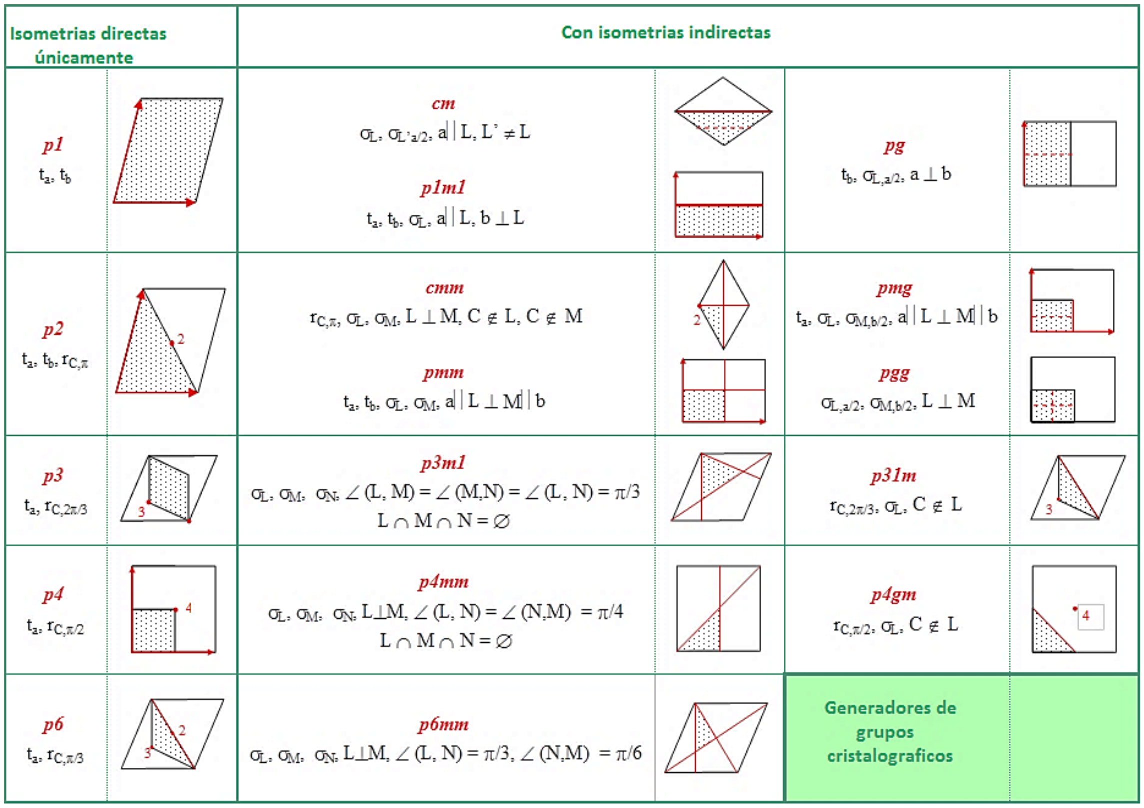


Fig. 15. 17 configuraciones de mosaicos (Fuente: Ruíz, 2006 p.85).



Isometrias directas únicamente		Con isometrias indirectas			
p1 t_a, t_b		*cm* $\sigma_L, \sigma_{L'a/2}, a \parallel L, L' \neq L$ *p1m1* $t_a, t_b, \sigma_L, a \parallel L, b \perp L$		*pg* $t_b, \sigma_{L,a/2}, a \perp b$	
p2 $t_a, t_b, r_{C,\pi}$		*cmm* $r_{C,\pi}, \sigma_L, \sigma_M, L \perp M, C \notin L, C \notin M$ *pmm* $t_a, t_b, \sigma_L, \sigma_M, a \parallel L \perp M \parallel b$		*pmg* $t_a, \sigma_L, \sigma_{M,b/2}, a \parallel L \perp M \parallel b$ *pgg* $\sigma_{L,a/2}, \sigma_{M,b/2}, L \perp M$	
p3 $t_a, r_{C,2\pi/3}$		*p3m1* $\sigma_L, \sigma_M, \sigma_N, \angle(L, M) = \angle(M,N) = \angle(L, N) = \pi/3$ $L \cap M \cap N = \varnothing$		*p31m* $r_{C,2\pi/3}, \sigma_L, C \notin L$	
p4 $t_a, r_{C,\pi/2}$		*p4mm* $\sigma_L, \sigma_M, \sigma_N, L \perp M, \angle(L, N) = \angle(N,M) = \pi/4$ $L \cap M \cap N = \varnothing$		*p4gm* $r_{C,\pi/2}, \sigma_L, C \notin L$	
p6 $t_a, r_{C,\pi/3}$		*p6mm* $\sigma_L, \sigma_M, \sigma_N, L \perp M, \angle(L, N) = \pi/3, \angle(N,M) = \pi/6$		Generadores de grupos cristalograficos	

Fig. 16. Isometrías (Fuente: Ruíz, 2006 p.86).

EL grupo cristalográfico al que pertenece el teselado en la Alhambra

El grupo al que pertenece es $P1$, los generadores son: t_a, t_b. Célula fundamental: paralelogramo

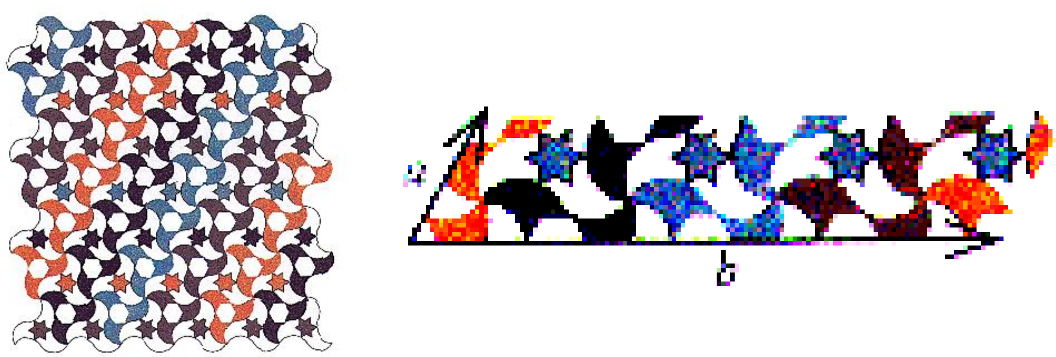


Fig. 17. Grupo cristalográfico fundamental La pajarita de Nazarí
(Fuente: Ruíz, 2006 p.91).

Para el caso específico de la pajarita de Nazarí.

El grupo al que pertenece es $P6$, los generadores son $r_{C,\pi/3}$, $r_{C',\pi}$ Célula fundamental: 1/6 diamante.

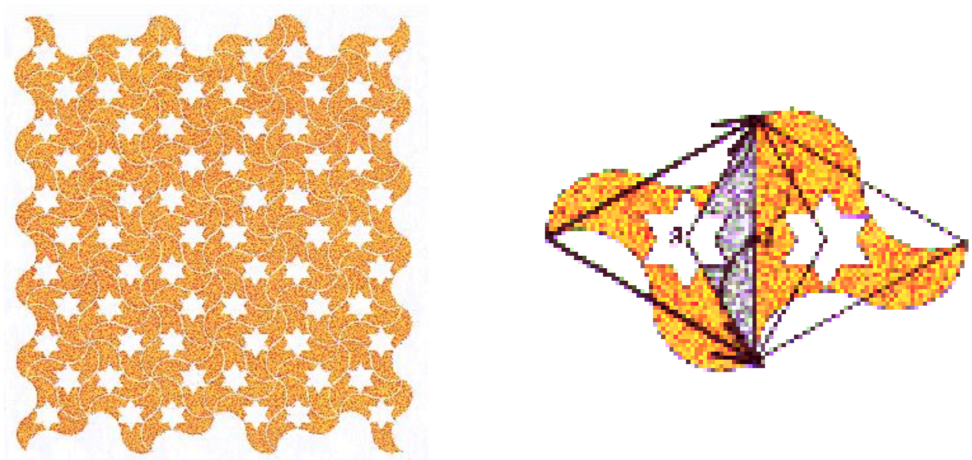


Fig. 18. Grupo cristalográfico fundamental La pajarita de Nazarí de la célula fundamental (Fuente: Ruíz, 2006 p.126).

2.3.1.2 Dimensión cognitiva

Este apartado corresponde a la dimensión cognitiva abordado a partir del punto de vista de Piaget quien considera que el logro cognitivo más importante relacionado con la etapa que transcurre durante la segunda infancia es el denominado pensamiento operacional concreto, caracterizado por un conjunto de conceptos que le permiten al niño razonar, período que corresponde a la edad de los alumnos de secundaria en la que está considerada nuestra secuencia (comenzando en los 12 años). Piaget descubrió que en algún momento entre los 5 y los 7 años, los niños comienzan a comprender ciertos principios lógicos (Inhelder & Piaget, 1964 en Berger 2006). Muy pronto aplican la lógica a situaciones *concretas*, es decir situaciones en las que se enfrentan a cosas reales, visibles y tangibles. Por lo tanto, los niños se vuelven pensadores más sistemáticos, objetivos, científicos y educables.

Vygotsky (1934/1994) estuvo de acuerdo con Piaget en el énfasis que éste puso en el pensamiento real del niño. Lo consideró como un gran progreso que superaba el deslucido enfoque del “aprendizaje sin sentido” del que eran partidarias las escuelas en esa época. Esas escuelas hacían que el niño estuviera “imposibilitado para cualquier intento de aplicar los conocimientos adquiridos” (pp. 356-357 en Berger 2006). Vygotsky también consideró que los niños tienen muchas ansias de aprender. Sin embargo, a diferencia de Piaget, Vigotsky observó que la instrucción impartida por otros es fundamental, y que el grupo de pares y los maestros proporcionan el punto que conecta el potencial evolutivo innato del niño con las habilidades y el conocimiento que brinda educación formal (Berger 2006).

2.3.1.3 Dimensión didáctica

Esta dimensión fue construida a partir del análisis documental, centrado en los libros de texto y en el programa de la materia de segundo año de secundaria. Además, de establecer cómo es abordado el tema de los polígonos que permiten cubrir el plano

a) Programas de estudio

> De acuerdo a los Programas de estudio (SEP, 2011) los Estándares Curriculares de Matemáticas presentan la visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticas. Comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos en los cuatro periodos escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática.
> Se organiza en:
> 1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
> 2. Forma, espacio y medida
> 3. Manejo de la información
> 4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas

Forma, espacio y medida alude a los fines más relevantes del estudio de la geometría. En los cinco bloque que comprende cada programa, los contenidos se organizan de tal manera que los alumnos vayan accediendo a ideas y recursos matemáticos cada vez más complejos en forma gradual, y por tanto, logren resolver problemas de manera autónoma, a la vez que pueden relacionar con lo que ya saben con lo que están por aprender.

Esta forma de trabajo que se propone en los libros de texto para abordar el análisis y explicación de los polígonos que permiten cubrir el plano está alejada de la realidad del aula, ya que el abordaje que se hace es a través de los de un proceso de identificación de patrones descritos en los mismos libros de texto y no a través del planteamiento de forma directa de espacios geométricos que el alumno pueda identificar del ambiente que lo rodea.

b) Descripción breve y análisis de los libros de texto

EL libro de texto gratuito que utilizan los alumnos de la escuela secundaria del estado ”José María Luis Mora”, en la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, es el libro editado y proporcionado por la SEP en el presente ciclo escolar.

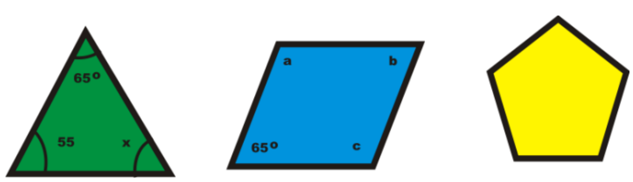
Libro de Texto oficial para 2º grado de secundaria “Estrategias del pensamiento” de Hernández, Solano & Jiménez (2013) Matemáticas II, segundo grado, Grupo editorial Patria. Educación Secundaria, México.

Este texto dirigido al 2º grado de Secundaria respeta los cinco bloques propuestos por la SEP, además aborda el tema de Análisis y explicación de las características de los polígonos que permiten cubrir el plano del tema figuras y cuerpos correspondiente al eje temático: forma , espacio y medida.

La lección 20, titulada Teselaciones, es dividida en

1) Lo que sabes
2) Actividades
3) Lo que aprendí
4) Notas importantes

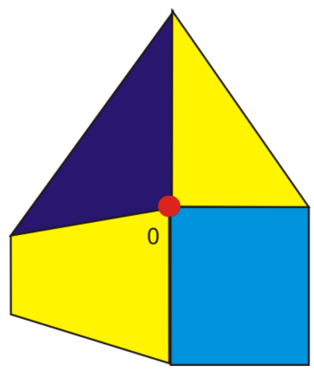
En el apartado de Lo que sabes, pregunta al alumno ilustrando un triángulo, un paralelogramo y un pentágono, cuál es la amplitud de sus ángulos interiores y cuanto suman los ángulos interiores de cada una de las figuras, además invita a que cada alumno compare sus respuestas, que argumenten sobre ellas y que con ayuda del profesor las unifiquen las respuestas.



.

A un costado la lección tiene un pequeño apartado titulado Glosario, el cual da la definición de Teselación o teselado, dice: “Es cuando se cubre una superficie con formas planas de manera que no se superponen ni hay huecos entre ellas”.
A continuación en Actividades dividido en tres secciones se le pide al alumno que busque en revistas o libros, imágenes de mosaicos con diversas figuras geométricas y que las presenta ante el grupo. Se les pide que comenten acerca de lugares donde hayan observado recubrimientos con diversos diseños en sus superficies y, si desean, presenten fotografías de ellos.

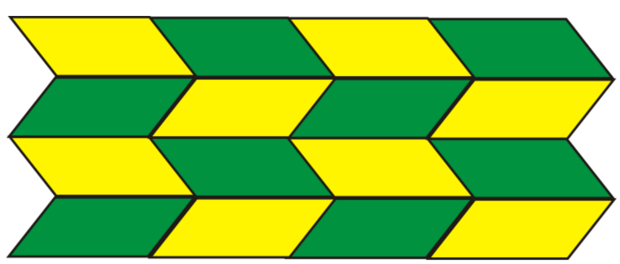
El siguiente ejercicio pide al alumno que analice la siguiente figura y que contestes ¿cuáles son los cuatro polígonos irregulares que concurren en el punto rojo y cuanto son los ángulos que concurren en el punto rojo?



Pide realizar una actividad que requiere el uso de cartoncillo, cartulina y tijeras, pide que:

a) Tracen en la cartulina polígonos irregulares de tres, cuatro y cinco lados,
b) Recorten varias figuras iguales a los polígonos que trazaron
c) Con los polígonos que recortaron. ¿Pudieron formar un teselado?
d) ¿Qué características tiene el polígono que diseñaron para cubrir el plano?

A continuación se les presenta la siguiente imagen:

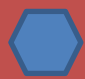


En donde se les informa a los alumnos que la figura corresponde a un teselado regular. Posteriormente pregunta si ¿Se aparece a alguno presentado en el grupo? Y posteriormente pregunta si los alumnos justifican si con cualquier cuadrilátero se puede cubrir el plano.

Después se les hacen las siguientes preguntas:
¿Qué características tienen los polígonos que permiten cubrir el plano?
¿Con cuáles polígonos regulares no se puede cubrir el plano? ¿a qué se debe esto?

Se pide la reflexión de las respuestas anteriores t se pide que los alumnos completen a siguiente tabla:

Poligono regular	**¿Tesela el plano?**	**Amplitud de los ángulos interiores**	**Número de polígonos que concurren en un vértice**	**Suma de los ángulos de los polígonos que concurren en un plano**
Tríangulo 				
Cuadrado 	Si	90^{o}	4	360^{o}
Pentágono 				

Hexágono 				
Heptágono 				
Octágono 				

Después de completar la tabla se le pide a los alumnos que con ayuda del profesor escriban la definición te teselado regular.

En la siguiente sección hay una actividad que los alumnos deben realizar en equipos con tres preguntas que dicen:

1. Tracen y recorten 10 polígonos de siete, nueve y diez lados con 3cm por lado. Realicen lo que se les pide. Combinando polígonos regulares formen teselados y contesten.
   - Escriban tres combinaciones con las que puedan cubrir el plano
     ____
     ____
     ____
   - Comparen sus teselados con los de otros equipos.
2. Completen la siguiente tabla, analízala y contesten.

Polígono regular	Número de ángulos	Suma de sus ángulos interiores	Amplitud de cada ángulo interior
Triángulo		180^{o}	

Cuadrado			
Pentágono	5		
Hexágono			
Heptágono			
Octágono			135^{o}
Eneágono			
Decágono			

¿Qué combinaciones de la última columna suman 180^{o}? (Anoten todas las combinaciones posibles).

____

____

____

3. Las combinaciones que acaban de presentar forman **teselados semirregulares**. Orientados por su profesor, escriban una definición.

   ____

   ____

   ____

En el siguiente apartado Lo que aprendí

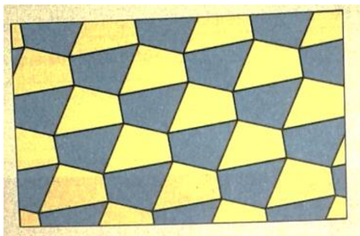
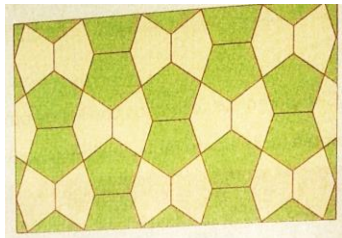
Pide a los alumnos que con papel bond, cartulina, cartoncillo, etc. Construyan un teselado irregular, uno regular y uno semirregular. Posterior a esto se les pide que presenten sus diseños al profesor y elijan los mejores para decorar su salón.

A manera de cierre de la lección, se presentan Notas importantes, que dicen:

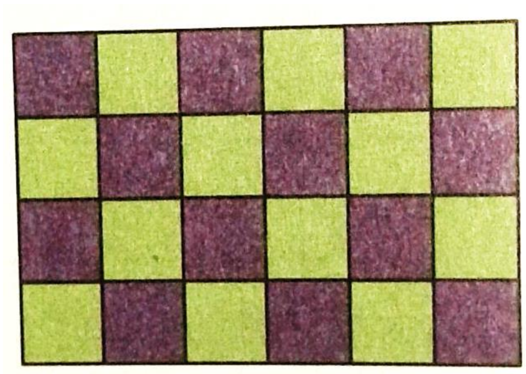
Considera esta información para complementar tus ideas.

Para cubrir el plano es necesario que la suma de los ángulos de los polígonos que concurren en el vértice sea 360^{o}.

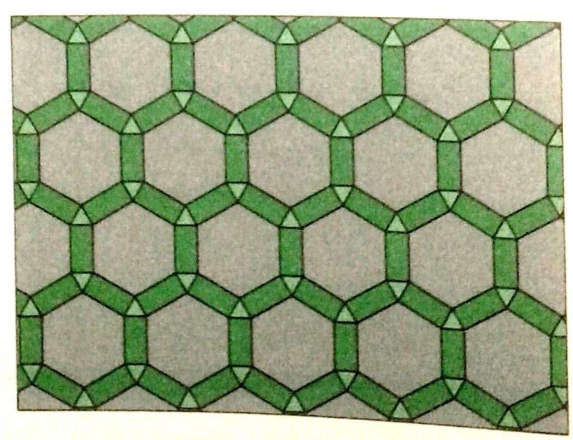
Una **teselación irregular** es un patrón que se forma cubriendo un plano repitiendo un polígono irregular o varios polígonos irregulares.

El **teselado regular** se logra repitiendo un polígono regular.



El **teselado semirregular** el patrón se forma con una combinación de polígonos regulares.



Enlázate

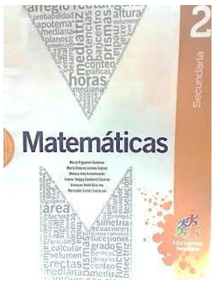
En las siguientes páginas encontrarás información acerca de las teselaciones. Te invitamos a que las visites para complementar lo analizado en esta lección.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teselaciones.html http://usuarios.multimania.es/acericotri/mosaregu.htm

http://usuarios.multimania.es/acericotri/mosasemi.htm

Consultados el 6 de marzo de 2012 a las 9:45 p.m.

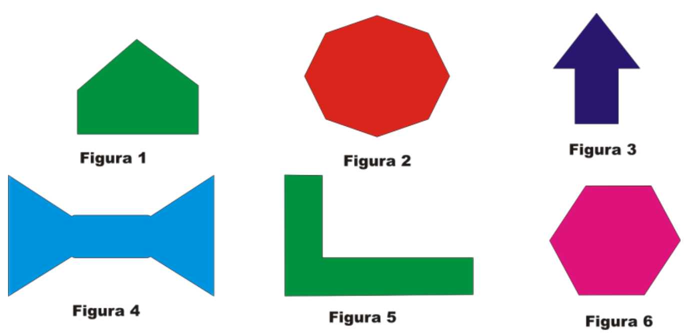
En hojas blancas reproduce el teselado que más te haya gustado y organiza tu propia galería o mantén una exposición grupal.



Corresponde ahora revisar el libro Matemáticas 2 de Trigueros, M., Lozano, Schulmaister, Sandoval, Jinich, & Cortés, de editorial Santillana.

Este texto dirigido al 2º grado de secundaria respeta los cinco bloques que corresponden al plan de estudios propuesto por la SEP, además aborda el tema de Teselas en la lección 22. Al inicio se describe que los conocimientos y habilidades a adquirir son conocer las características de los polígonos que permiten cubrir el plano y realizar recubrimientos del plano.

Se introduce al tema con un relato titulado Para remodelar el salón que dice: “El director de un colegio quiere cambiar las losetas de los pisos de los salones y les pidió a los alumnos que eligieran unas entre las siguientes losetas. La única condición es que con un solo diseño cubran todo el piso sin dejar huecos”



Hace un par de preguntas que son ¿Con qué losetas es posible cumplir con la condición que pide el director?¿Por qué?¿Qué losetas escogerías para tu salón?. De acuerdo a la dinámica del libro se debe generar un espacio de debate para contestar estas preguntas y enriquecer la discusión con preguntas de la sección titulada Preguntas para andar que hace las siguientes preguntas:

- ¿Cómo sabes que la loseta que elegiste cubriría todo el piso sin dejar huecos?
- ¿Cómo puedes saber si una figura que se repite cubrir completamente un plano sin traslaparse ni sobreponerse?
- ¿Dónde has visto planos cubiertos por la misma figura sin dejar huecos?
- ¿Qué características tienen las figuras u objetos que forman este tipo de recubrimientos?

La siguiente actividad corresponde a un trabajo en equipo, en donde se pide a los alumnos que elaboren un catálogo de mosaicos para tapizar una pared de su salón de clases con las siguientes instrucciones:

- Cada diseño deberán hacerlo en una hoja tamaño carta.
- Al finalizar, cada equipo tapizará con uno de sus diseños una superficie rectangular de la pared del salón, asignada por el profesor, de manera que la pared quede cubierta por todos los diseños.
- Necesitaran hojas de colores, tijeras, cinta adhesiva, regla, escuadras y compás.

Hasta este momento se considera razonable mencionar que los alumnos no tienen noción del porque tendrían que cubrir un espacio de la pared con un diseño geométrico, de lo que se considera más razonable la forma de iniciar el tema el libro que se analizó en párrafos anteriores.

Posteriormente entra de lleno al tema de Teselas y mosaicos con la siguiente definición:

La palabra teselado proviene del latín *tessella*. Así llamaban los romanos a las losetas que formaban el pavimento de sus ciudades. Ahora se llama tesela a cada una de las piezas que forman un mosaico y se utilizan para cubrir un plano. La tesela o mosaico debe tener las siguientes condiciones:

- No puede superponerse una tesela a otra.
- No puede quedar un hueco entre ellas.

Sugiriendo que antes de hacer la actividad grupal descrita anteriormente se realicen otras actividades que son:

- Copia varias veces la primera figura de la actividad inicial en una hoja blanca y recorta todas las copias que hagas.
- Busca la manera de juntarlas incluso rotándolas. Cubre toda la hoja de papel sin dejar huecos. Observa el ejemplo

- Repite lo mismo con las demás figuras de la actividad inicial.
- ¿Con todas las figuras se puede cubrir la hoja completa sin dejar huecos?____________________ ¿A qué crees que se debe? ____ ____

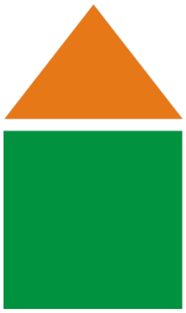
Los autores hacen la aclaración en este punto que hay piezas, figuras o motivos que no forman teselados agregan que para saber cuáles sí, es necesario tener algunos conocimientos geométricos, que se abordaran más adelante.

Continuando con la actividad muestran las figuras para ser analizadas en cuanto al tipo de triángulos que integran la primera figura, la medida de estos, cuantos triángulos formarían completamente una figura sin dejar huecos, cuanto suman los ángulos de los lados que concurren al vértice de la figura. Se pueden formar teselados con triángulos isósceles y escalenos, las mismas preguntas para la segunda figura.

Para el caso de la tercer figura formada por dos pentágonos las preguntas son en el mismo sentido de la formación de teselados, al término de las preguntas se sugiere que el alumno comparta sus respuestas con sus compañeros. Reflexionen y de acuerdo al cuestionario anterior se pide que contesten la siguiente pregunta:

¿Qué característica tiene la suma de los ángulos interiores de las figuras geométricas que cubren el plano, sin traslaparse ni sobreponerse, y que coinciden en un punto?

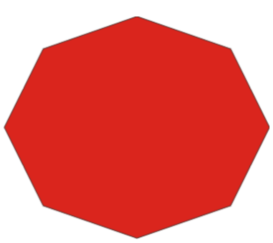
A continuación se presentan los tipos de teselados, haciendo la conjetura que el alumno seguramente habrá descubierto que un teselado es la suma de los ángulos interiores de las figuras geométricas que coinciden en un punto.



Para ejemplificar los teselados regulares se le pide al alumno que recorte tres veces el triángulo equilátero y dos veces el cuadrado de la figura contigua, haciendo las mismas preguntas que la actividad anterior después de definir que los teselados regulares se forma a partir de la repetición y traslación de polígonos regulares iguales, haciendo la aclaración que no todos los polígonos regulares sirven para cubrir el plano, para aclarar este concepto se pide que se llene la siguiente tabla:

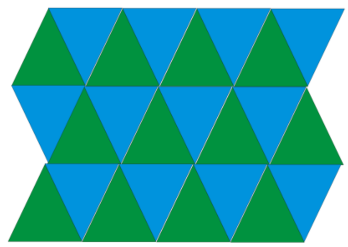
Polígonos regulares	Lados	Ángulo Interior	Suma de los ángulos interiores que coinciden con un vértice	¿Es posible teselar?
Triángulo equilátero	3	60º	6x60º=360º	Si
Cuadrado				
Pentágono	5	108º	3x108º=324º y 4x108º=432º	No
Hexágono				
Octágono				
Dodecágono	12	150º	2x150º=300º y 3x150º=450º	

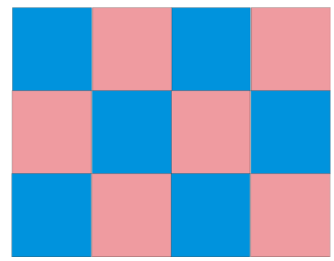
Posterior a la tabla se hacen las preguntas de ¿Con qué polígonos regulares se pueden hacer teselados? ¿Por qué no se puede usar otros?



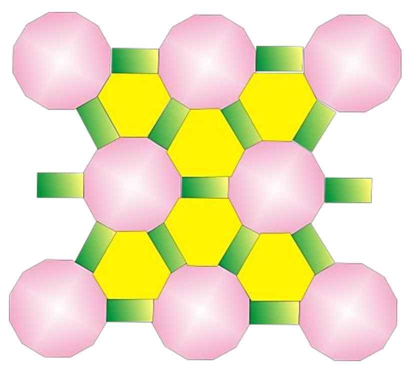
En la siguiente actividad proponen al alumno que copie varias veces el octágono en una hoja y que el alumno deduzca si es una figura que se puede teselar y por qué, y si no lo es, que el alumno sugiera con que figura adicional se puede lograr el teselado.

El siguiente punto es El nombre de los teselados, para dar nombre de un teselado regular es necesario contar cuántos lados tiene cada polígono que rodea un vértice y muestra el siguiente ejemplo que el nombre asignado es “6,6,6” y siguiere que el alumno deduzca el nombre de los otros dos.

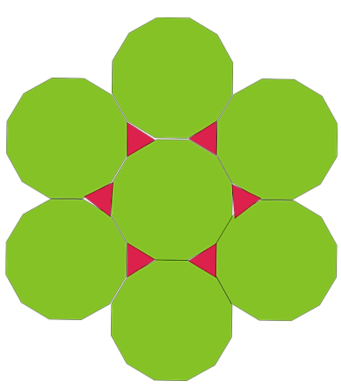




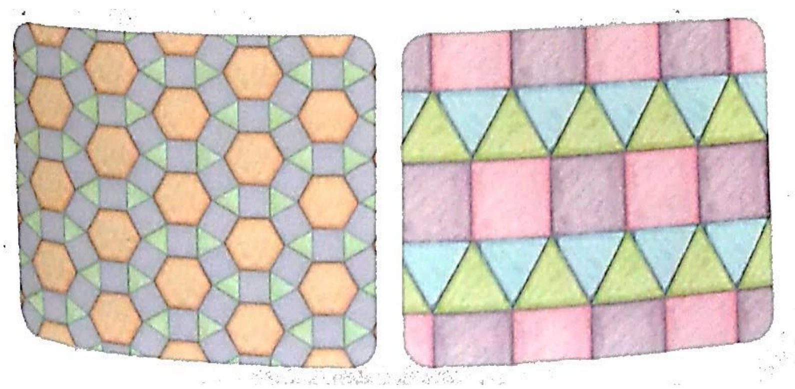
La lección continúa con el siguiente teselado donde se les pide a los alumnos que analice la figura partiendo de la elección de un vértice y posteriormente que se cambie de vértice, se espera que el alumno pueda comprender la composición del teselado pidiendo también el nombre de este.



El siguiente punto los autores dan por hecho que no es un teselado regular y le piden al alumno que deduzca el porqué de esta situación, así como también se le pide al alumno que especifique cuál es el patrón numérico que se forma en cada vértice del teselado.



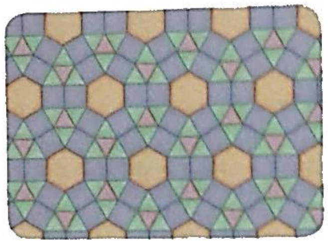
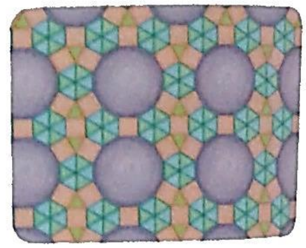
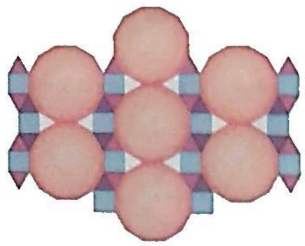
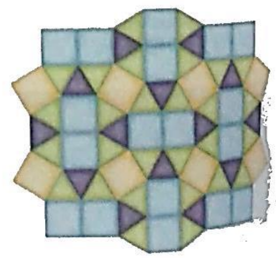
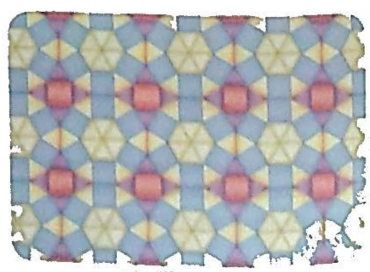
Los autores explican que los teselados anteriores son semirregulares. El primero se formó a partir de tres polígonos regulares diferentes: un cuadrado, un hexágono regular y un dodecágono regular. El segundo se formó con dos: un triángulo equilátero y un dodecágono regular, enriquecen la explicación comentando que los teselados semirregulares se forman con dos o más polígonos regulares (diferentes entre sí). El número de lados de los polígonos que rodean un vértice debe ser el mismo en todos los vértices del teselado. En este tipo de teselados, todos los polígonos que rodean cualquier vértice siempre son los mismos. Sólo existen ocho teselados semirregulares. Se muestra la siguiente figura para que los alumnos conozcan los teselados semirregulares y se les pide que encuentren los que faltan dándoles las siguientes pistas:



- Dos de los teselados están formados por hexágonos y triángulos.
- Otro teselado está formando por cuadrados y triángulos, y el teselado restante está formado por octágonos y cuadrados.

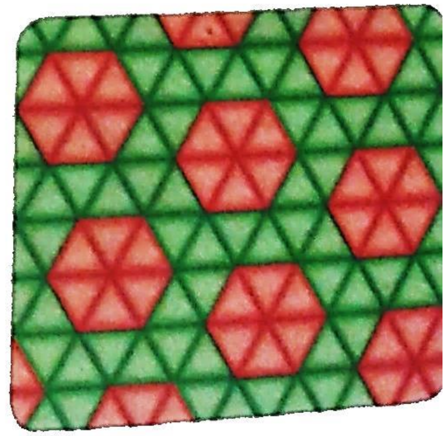
Hasta este punto los autores hacen una reafirmación de conocimientos con preguntas hacia los alumnos correspondientes a las especificaciones que caracterizan tanto a los teselados regulares como a los semirregulares.

En la siguiente sección los autores muestran 5 teselaciones, en las que se les pide a los alumnos que se integren en equipos y que argumenten que tipos de teselados son, que analicen sus vértices y que mencionen que nombre se les podría dar a estos.

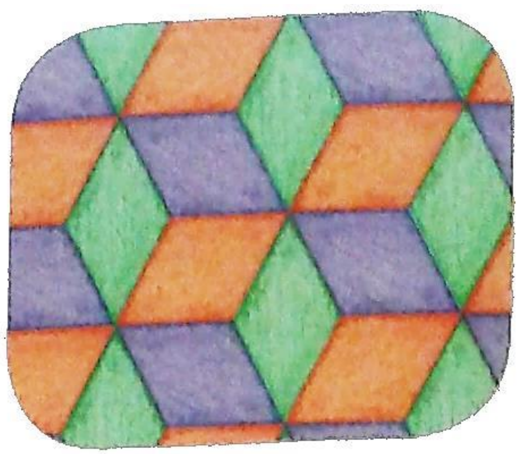






Los autores después de estos teselados explican se les da el nombre de semi-regulares, ya que se construyen combinando varios tipo de polígonos regulares, pero de modo que no todos los vértices tienen el mismo patrón. Dan la aclaración que cuando un teselado presenta diferentes patrones en cada dos o más vértices ya no se les puede dar un solo “nombre”.

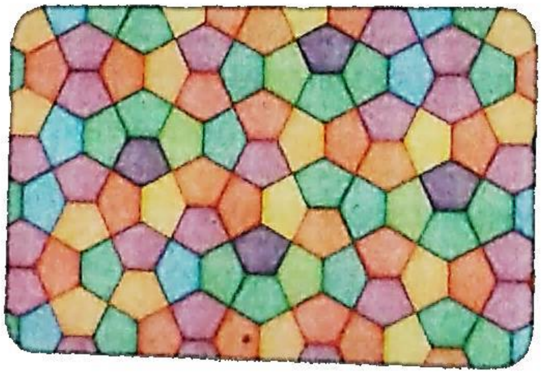
Explican también que existen veinte teselados con dos patrones distintos y 61 teselados con tres patrones distintos y que todavía no se sabe cuántos teselados existen con cuatro patrones. Explican también que con teselados regulares, cambiando la combinación de colores, se obtienen diseños muy distintos. Si además se usan diferentes polígonos regulares podemos encontrar gran variedad de teselados, mostrando los siguientes ejemplos:

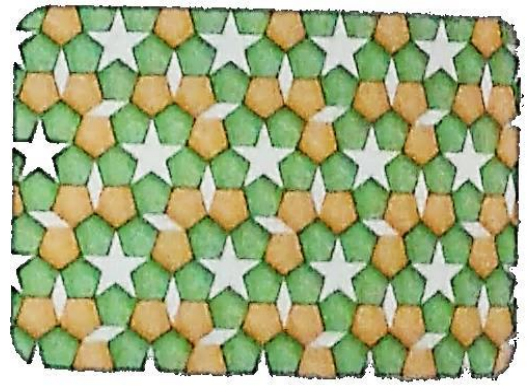


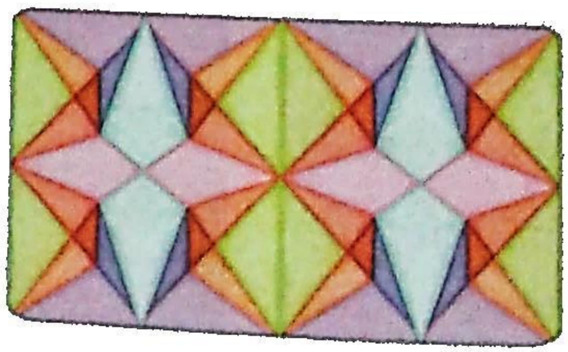
Ahora es el turno de los teselados irregulares, los autores explican que el teselado de la siguiente figura es irregular ya que está formado por rombos, que no son polígonos regulares porque no todos sus ángulos son iguales. Además, si contamos el número de polígonos que rodean un vértice, no siempre vamos a obtener la misma respuesta.



En lasiguiente actividad se le pide a los alumnos que analicen cada uno de los teselados y realicen sus conjeturas y piden que expliquen por que son teselados irregulares.



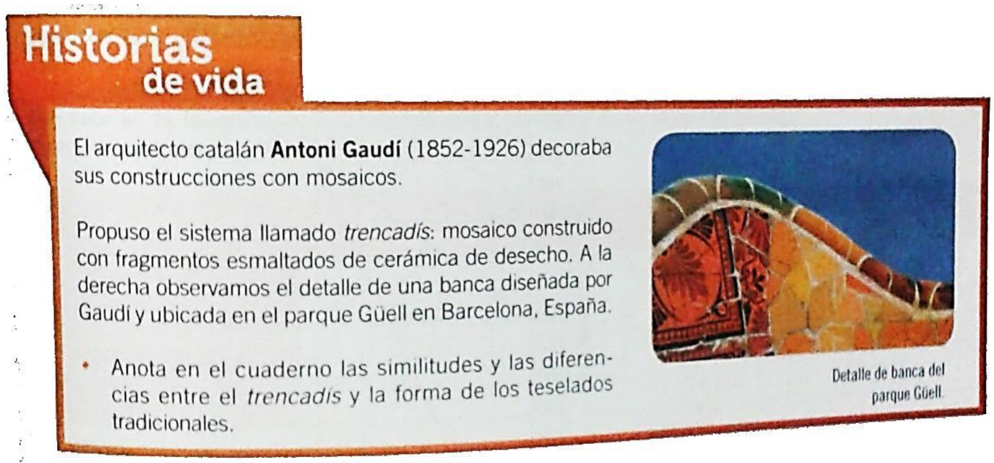




Continúa una reafirmación de conocimientos y piden que nuevamente los alumnos se reúnan en equipos y trabajen en el diseño de un teselado irregular además de preguntar si pudieron encontrar los cuatro teselados semirreguales, sino dan los nombres de cada uno:

3.6.3.6	3.3.3.3.6	3.3.4.3.4	4.8.8

Finalmente se pide a los alumnos que realicen en una cartulina el teselado que más les gusto para pegarlo en la pared del salón y deja el siguiente apartado nombrado historias de vida que es la única similitud al mundo real que hacen los autores después del ejercicio inicial del relato del director.



Historias de vida

El arquitecto catalán **Antoni Gaudí** (1852-1926) decoraba sus construcciones con mosaicos.

Propuso el sistema llamado *trencadís*: mosaico construido con fragmentos esmaltados de cerámica de desecho. A la derecha observamos el detalle de una banca diseñada por Gaudí y ubicada en el parque Güell en Barcelona, España.

- Anota en el cuaderno las similitudes y las diferencias entre el *trencadís* y la forma de los teselados tradicionales.

Detalle de banca del parque Güell.

c) El programa de la materia

En lo que respecta al tema de estudio de nuestra investigación, el programa de estudio (SEP, 2011) para secundaria, referente a Matemáticas nos habla figuras y cuerpos dentro del eje forma, espacio y medida.

De acuerdo a la revisión del programa, se encuentra que en el bloque III es donde se aborda el tema relacionado con el análisis y explicación de las características de los polígonos que permiten cubrir el plano como se observan en la figura 19.

En el programa (SEP, 2011), se establece que mediante el estudio de las matemáticas en la Educación Básica se pretende que los niños y adolescentes:

Justifique la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o polígono y utiliza esta propiedad en la resolución de problemas. Favoreciendo las siguientes competencias:

- Resolver problema de manera autónoma
- comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas efectivamente

Bloque III

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con expresiones algebraicas. • Justifica la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o polígono y utiliza esta propiedad en la resolución de problemas. • Resuelve problemas que implican usar la relación entre unidades cúbicas y unidades de capacidad. • Lee y comunica información mediante histogramas y gráficas poligonales.	**Problemas multiplicativos** • Resolución de cálculos numéricos que implican usar la jerarquía de las operaciones y los paréntesis, si fuera necesario, en problemas y cálculos con números enteros, decimales y fraccionarios. • Resolución de problemas multiplicativos que impliquen el uso de expresiones algebraicas, a excepción de la división entre polinomios.	**Figuras y cuerpos** • Formulación de una regla que permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono. • Análisis y explicitación de las características de los polígonos que permiten cubrir el plano. **Medida** • Relación entre el decímetro cúbico y el litro. Deducción de otras equivalencias entre unidades de volumen y capacidad para líquidos y otros materiales. Equivalencia entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y algunas unidades socialmente conocidas, como barril, quilates, quintales, etcétera.	**Proporcionalidad y funciones** • Representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación. **Análisis y representación de datos** • Búsqueda, organización y presentación de información en histogramas o en gráficas poligonales (de series de tiempo o de frecuencia), según el caso y análisis de la información que proporcionan. • Análisis de propiedades de la media y mediana.

Fig. 19. Ubicación del tema dentro de los programas de estudio de la SEP (Fuente: Programas SEP 2011 p.40).

El desarrollo de estas competencias implica la construcción de los aprendizajes esperados, para el caso que nos ocupa se propone lo siguiente: Adquiere los conocimientos necesarios para la identificación y análisis de las formas geométricas que cubren el plano.

a) Abordaje en el aula

El análisis y explicación de los polígonos que permiten cubrir el plano es de gran importancia, dado que, es un tema fundamental en estudios posteriores de matemáticas y en el aprendizaje de diversos contenidos en las materias de física y química, así como también son una herramienta útil para el estudios cartográficos y de mineralogía además de ser la base científica de la apreciación de las bellas artes desde el punto de vista geométrico.

Aunado a esto, el valor del aprendizaje de este tema se incrementa cuando se menciona que el caso de la geometría ha sido estudiado por varios autores. Una diversidad de modelos teóricos han servido para avanzar en esta línea de investigación, basada en el estudio de los procesos cognitivos que intervienen en el desarrollo de las capacidades geométricas; por ejemplo, los de Krutetskii (1976) en Torregrosa & Quesada (2007), donde se identifican distintas habilidades en la resolución de problemas. De manera general, los modelos de Fishbein, Presmeg & Dörfler se han centrado en dar una clasificación sobre la distintas imágenes mentales, atribuyéndoles ciertas acciones cognitivas; en concreto, Presmeg (1986a,1968b) en Torregrosa & Quesada (2007) muestra una clasificación de imágenes mentales y un modelo visual y analítico en ejes ortogonales, mientras que Fishbein (1993) en Torregrosa & Quesada (2007) presenta la teoría de conceptos figúrales, Bishop (1983,1989) en Torregrosa & Quesada (2007) distingue dos acciones cognitivas que han servido a otros autores para organizar un modelo integrador de imágenes mentales, representaciones externas, procesos y habilidades (Gutiérrez, 1996) en en Torregrosa & Quesada (2007), en tanto que Zazkis et al. (1996) en Torregrosa & Quesada (2007) exponen el modelo analizador /visualizador.

El alumno pocas veces logra retener el concepto del estudio de los polígonos que cubren el plano y extender los principios básicos a otros contextos, tales como el análisis de obras de arte, edificaciones, mapas cartográficos, estudios cristalográficos, mucho menos aún las aplicaciones científicas de investigación en el empleo de materiales semiconductores para micro o nano chips. Lo que es síntoma de que el trabajo realizado al respecto en los cursos de geometría no ha sido suficiente para lograr un aprendizaje real del tema.

Uno de los factores por los que el alumno de secundaria no logra visualizar el empleo de polígonos que cubren el plano fuera del contexto escolar es por la forma en que se aborda este tema en las aulas; muchas veces el tema es abordado a partir configuraciones ideales infiriendo que el alumno puede imaginar que estas configuraciones son representaciones de planos que se son fácilmente identificados en edificaciones con sentido geométrico, la falta de interés en la investigación en el tema previo a la impartición del mismo provoca que este no es apoyado con material gráfico como fotografías de recubrimientos teselares o elementos geométricos encontrados en edificios haciendo difícil la interpretación de la situación planteada.

En la escuela secundaria del estado ”José María Luis Mora” de la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas se realizó una entrevista informal para conocer como abordan los profesores de matemáticas de segundo grado el tema de análisis y explicación de los polígonos que cubren el plano, de lo que uno de los profesores nos comentó que aborda el tema de la siguiente manera:

Inicia con una lluvia de ideas sobre conceptos algebraicos que conocen los alumnos, a continuación hace una explicación de las los polígonos que cubren el plano de manera regular, el profesor hace la explicación que se trata del triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono, las únicas que pueden cubrir un plano de manera regular, se les pide a los alumnos que con material de papel realicen figuras geométricas para ejemplificar el concepto, posteriormente se pasa al tema de teselados semiregulares e irregulares haciendo la misma dinámica proponiendo a los alumnos como actividad final que diseñen su propio teselado.

2.3.2 Concepción y análisis *a priori*

En esta fase se toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema llamadas variables de comando, percibidas como pertinentes con relación al tema de estudio, se distinguen dos variables de comando:

- Las variables *macro-didácticas* o *globales*, concernientes a la organización global de la ingeniería.
- Y las variables *micro-didácticas* o *locales*, concernientes a la organización de una secuencia o de una fase.

Una de las originalidades de la metodología de la ingeniería didáctica reside en el modo de validación que es en esencia interna. Desde la misma fase de concepción se empieza el proceso de validación, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, directamente ligada a la concepción local de esta última (Artigue 1995, P.44)

El objetivo del análisis *a priori* según Artigue (1995), es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y sus significado. Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Artigue argumenta que tradicionalmente este análisis *a priori* comprende una parte descriptiva y una predictiva y se debe:

- Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características del a situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Analizar qué podría ser lo que están en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Prever los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

En el análisis *a priori*, no se ha otorgado tradicionalmente un lugar al juego del profesor. Aunque el estudiante se toma en cuenta en un doble nivel, descriptivo, como si la situación lo determinara por completo como actor del sistema, entendida tal situación, en esta investigación proponemos a los profesores que formen parte como actores principales, ya que desde la fase de diseño se ven involucrados con el diseño de la secuencia que le servirá para la construcción de las competencias y el desarrollo de sus habilidades.

En el siguiente capítulo se pueden observar a detalle los análisis *a priori* que hemos realizado para el diseño de la secuencia didáctica.

2.3.3 Puesta en escena

En la puesta en escena los estudiantes tienen contacto directo con las actividades de la secuencia siendo aquí la parte práctica donde estos son objetos de la investigación observados por el investigador, en la mayoría de los casos en presencia del profesor y de un observador.

A esta etapa sigue un análisis *a posteriori* que pone en evidencia lo que realmente hicieron los alumnos durante el desarrollo de la secuencia.

2.3.4 Análisis *a posteriori* y validación

Esta es la última fase de la ingeniería didáctica, en la que una vez completado el análisis *a posteriori* se realiza una confrontación entre ambos análisis para cada actividad de la secuencia con el objetivo de presentar conclusiones; de lo cual nos encargaremos en el siguiente capítulo.

.

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

Para desarrollar la secuencia nos apoyamos en cada una de las etapas de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, de tal forma que se pueda visualizar cada una de sus fases en la aplicación de esta investigación. En este capítulo se visualizará el diseño, puesta en escena y análisis de resultados de una secuencia didáctica diseñada para que los estudiantes de secundaria refuercen sus conocimientos en el tema de polígonos que cubren el plano.

3.1 Fase de planeación

En esta fase se elaboran los diferentes diseños (epistemológico, cognitivo y didáctico) que son la base fundamental del diseño de nuestra secuencia, en ella se reconoce aspectos históricos y aspectos didácticos retomados desde el contexto escolar, estas dimensiones de las que hablamos han sido relatadas en los apartados anteriores, por ello no son objeto de análisis de nueva cuenta.

3.2 Fase de diseño

Una vez que construimos nuestra fase de planeación teniendo los cimientos sólidos de nuestro punto de partida retomamos lo que nos permitirá sustentar y controlar los conflictos matemáticos a los que se someterán los alumnos de tal forma que nos permita evaluar los significados construidos. De acuerdo a Lezama (2003, p. 10)"este análisis se basa en un conjunto de hipótesis sobre lo que harán los estudiantes". Por otra parte, para Rotaeche (2008) la Situación Didáctica, comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento.

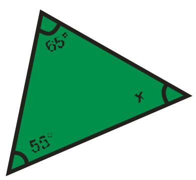
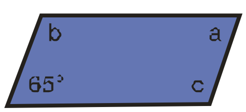
La secuencia didáctica está dividida en dos actividades que constan de preguntas y un ejercicio con la calculadora Casio ClassPad 300 que nos permitirán abordar el tema de los polígonos que cubren el plano de una manera graduada y articulada, tomando como base los libros de texto para segundo de secundaria, de los cuales presentamos su análisis en el capítulo dos y de estudios realizados por Ardila (2005), con estas actividades pretendemos abordar el tema en estudio de una manera más significativa, conduciendo al estudiante por una ruta de aprendizaje que lo lleve al análisis y explicación de las características de los polígonos que permiten cubrir el plano adicionando el uso de la calculadora como herramienta tecnológica.

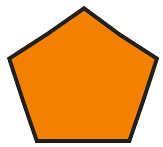
Cabe aclarar que las preguntas de la primera actividad fueron tomadas de los libros de texto para segundo grado de secundaria, adecuándolas con la finalidad de hacerlas más comprensibles para los alumnos y finalmente el ejercicio de construir un teselado (la pajarita de Nazarí) con la calculadora fue diseñada.

PREGUNTAS

Al inicio de la actividad se hace una introducción al tema de los teselados propiciando una lluvia de ideas en la que los alumnos se enfocan en el tema de geometría y en particular en los polígonos que cubren el plano. A continuación se comienzan con las preguntas de la actividad 1:

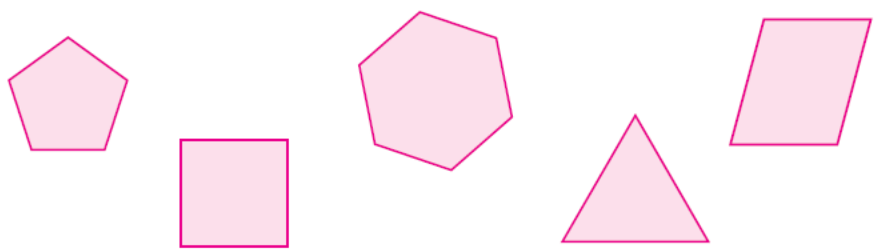
1.- Observa los siguientes polígonos y contesta:

	a) ¿Cuál es la amplitud del ángulo x? ____________________________________ b) ¿Cuánto suman los ángulos interiores del triángulo? ____________________________________
	c) Calcula la amplitud del: ángulo a:____________________________ ángulo b:____________________________ ángulo c:____________________________ d) ¿Cuántos suman los ángulos interiores del paralelogramo? ____

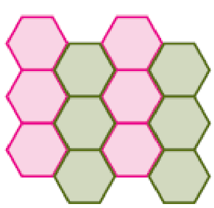
	e) ¿Cuánto suman los ángulos interiores del pentágono? f) Si el pentágono es regular, ¿cuánto mide cada ángulo interior?

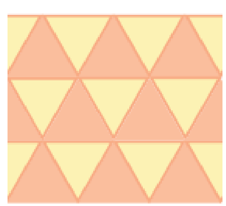
GLOSARIO: Teselación o Teselado, es cuando se cubre una superficie con formas planas de manera que no se superponen y no hay huecos entre ellas.

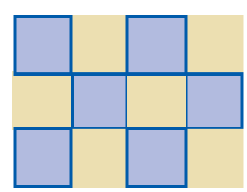
2.- Señala las figuras con las que es posible construir un mosaico regular.



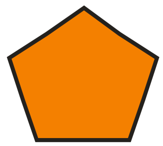
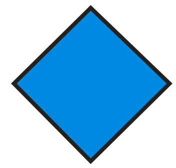
3.- En cada uno de los siguientes mosaicos, escribe el nombre del polígono utilizado como unidad básica.







4.- ¿Es factible crear mosaicos empleando pentágonos o rombos regulares como los que se muestran?

			
SI	**NO**	**SI**	**NO**
¿Por qué?		**¿Por qué?**	

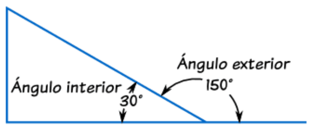
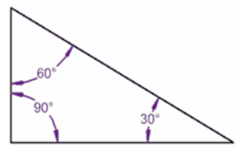
5.- ¿Qué consideras que hace que en algunos casos con una determinada figura se pueda crear un mosaico y en otros no, marca con una cruz tus consideraciones?

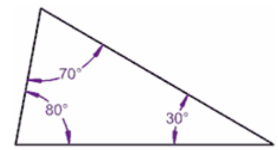
La longitud de los lados		**El número de sus lados**		**La medida de sus ángulos interiores**	
SI	NO	SI	NO	SI	NO

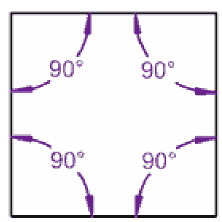
¿Cómo se inicia la construcción de un teselado?

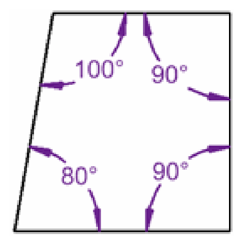
Imaginemos un piso que debe ser cubierto con losetas cuadradas y notamos que no hay espacios entre la unión de aristas. Ahora imaginemos que las losetas son triángulos; de igual forma, llenamos el piso sin dejar espacios. En el caso de un pentágono no se puede realizar tal cubrimiento, pero sí con el hexágono.

Podemos decir entonces, que el cubrimiento de un plano con polígonos regulares depende del número de lados que tengan. También se puede cubrir un plano por medio de una composición repetitiva de polígonos; a este tipo de arreglo se le conoce como mosaico semirregular.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Los ángulos interiores de polígonos, es un ángulo dentro de una figura

</td>
<td>Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°




90°+60°+30°=180° 80°+70°+30°=180°</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360° porque dentro de un cuadrado hay dos triángulos.




90°+90°+90°+90°=360°
80°+100°+90°+90°=360°</td>
</tr>
</table>

Por regla general

n= número de lados

suma de los ángulos interiores = $(n-2)x\ 180°$

cada ángulo = $(n-2)x180°/n$

Para que un polígono pueda ser usado como unidad básica se debe poder dividir 360° entre el ángulo interior y el resultado debe ser un número entero.

Por ejemplo, para el triángulo tenemos:

$$\frac{360°}{(n-2)x180°/n}$$

$\frac{360°}{(3-2)x180°/3} = 3$, Este polígono puede ser usado como célula básica

Ahora lo intentemos con el pentágono:

$$\frac{360°}{(5-2)x180°/5} = 3\frac{324}{108}$$

Para comprobar que con el pentágono no podemos cubrir el plano, hay que considerar que, la suma de sus ángulos internos es 540 y que cada uno de sus ángulos es igual a 108, podemos decir, lo que nos faltaría para que se pueda cubrir el plano es 360°-324° que son 36°, con lo cual podemos deducir que con un pentágono regular no podemos cubrir el plano.

6.- Ahora deduce para las siguientes figuras:

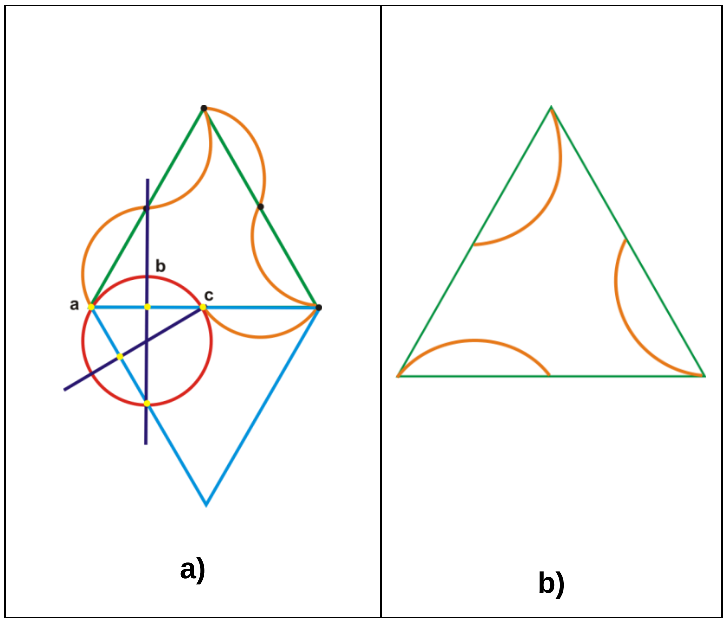
Polígono	**Número de lados**	**Resultado**	**Si o No cubre el plano**
Hexágono	6		
Heptágono	7		
Decágono	10		
Ocatadecágono	18		

En la actividad dos se tienen dos momentos que hay que tomar en cuenta el primero es construir y analizar la construcción del teselado pajarita de nazarí y el segundo es hacerlo con la ayuda de la calculadora Casio Classpad 300 con la intensión de hacerlo más didáctico y explicativo por medio de los comando de la calculadora.

EJERCICIO CON LA CALCULADORA CLASSPAD 300

Transformaciones geométricas isométricas

Con la finalidad de comprender de manera integral la generación de los polígonos que cubren el plano llevaremos a cabo la construcción del famoso teselado **"La Pajarita de Nazarí"** empleado los conceptos de igualdad, traslación, giro y simetrías.



a) b)

¿Cómo lo construimos?

Nuestra célula básica será un triángulo equilátero

1) Identificamos los puntos medios de cada lado del triángulo y los puntos medios de las secciones definidas por los puntos medios anteriores.

2) Reflejamos nuestro triangulo base.

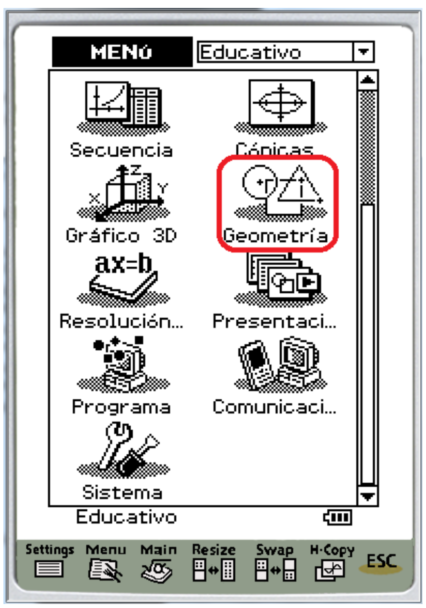
3) Trazamos dos líneas infinitas como se muestra en la figura haciendo que coincidan con los puntos medios.

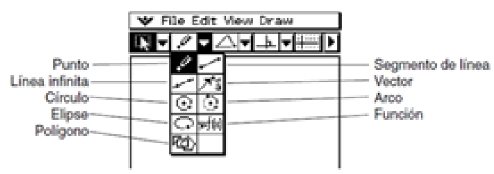
4) Construimos un círculo con centro en la intersección de las líneas infinitas y de radio con el punto c. Con esto identificamos nuestro primer arco *abc* que apoyados de rotaciones construiremos nuestra célula básica.

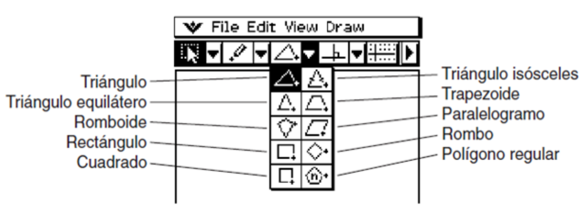
Para ser más representativa la actividad usaremos la calculadora Casio Classpad 300, con una secuencia de pasos que nos llevaran a construir nuestro teselado y al final se propone una actividad adicional esperando que los alumnos hayan comprendido el tema y que tengan los elementos necesarios para construirla.

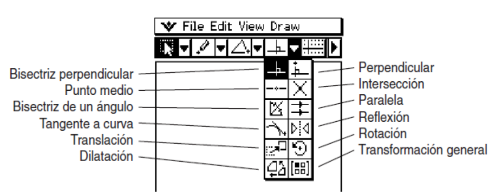
<u>EJERCICIO CON LA CALCULADORA CLASSPAD 300</u>

Para completar el ejercicio se dan a conocer las instrucciones básicas que los alumnos deben conocer de la calculadora para realizar la construcción geométrica:

<table>
<tr><td colspan="2">OPCIÓN GEOMETRÍA Y BARRAS DE HERRAMIENTAS</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


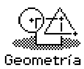
</td></tr>
<tr><td>


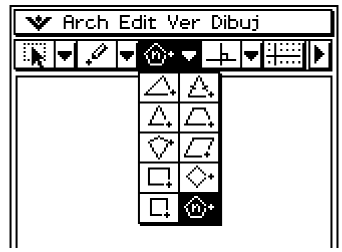
</td><td>


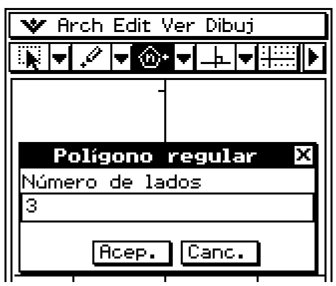
</td></tr>
</table>

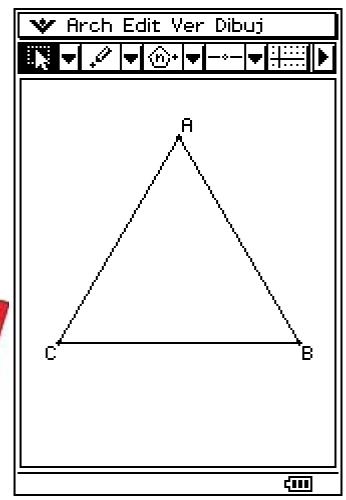
Se inicia la secuencia de pasos para realizar la construcción: **Ahora lo hagamos con la calculadora: Cubramos el plano con la Pajarita de Nazarí**

Dibujaremos un triángulo equilatero

En el menú principal, selecciona ***Geometría***,  despliega el menú  y elige , para dibujar un triángulo equilátero indica que

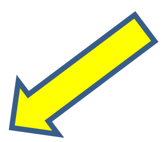






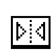
Nota Importante:

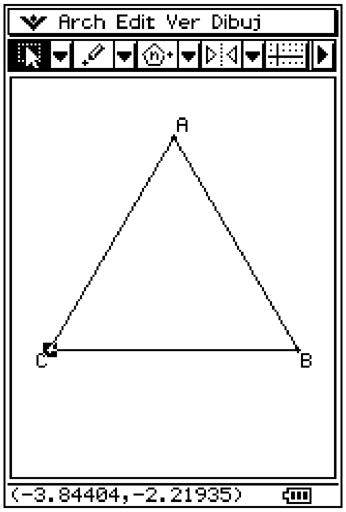
Damos un clic en la pantalla y aparece el triángulo.

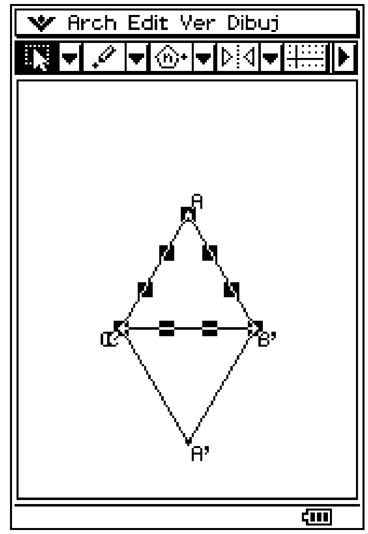


Obtendremos los puntos medios

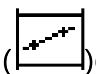
Para esto debemos seleccionar el punto A y el punto B, quedando seleccionados como se muestra en la siguiente figura:

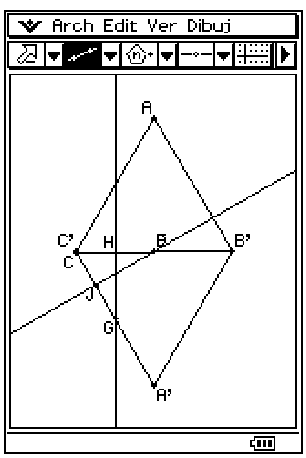
Seleccionamos la herramienta de reflexión  y tocamos el punto c obteniendo el siguiente trazo



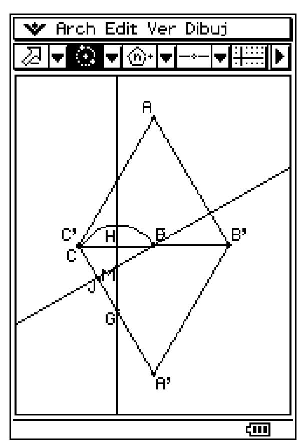


Después con la herramienta punto medio (), Obtenemos los puntos medios de *CB*, *C'A'*, posteriormente los puntos medios de *CB* y *CG* obteniendo los puntos H y J.

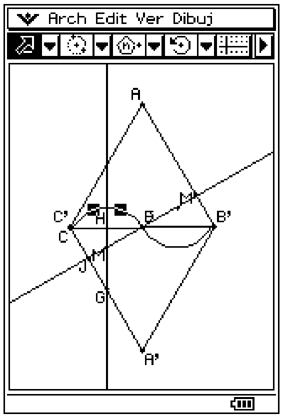
Trazamos las líneas infinitas ()de B a J y de H a G obteniendo:



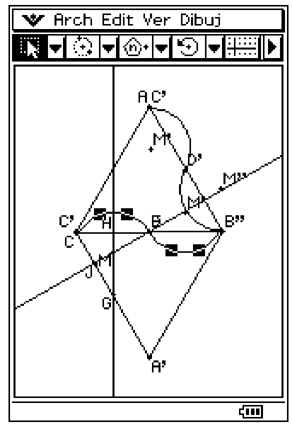
trazamos un arco con centro en la intersección de las líneas infinitas y extremos B y C:



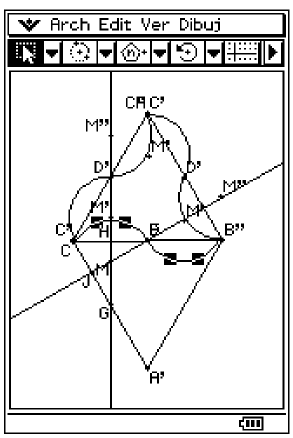
Obteniendo así nuestro arco base, posteriormente duplicamos el arco con una rotación de 180º



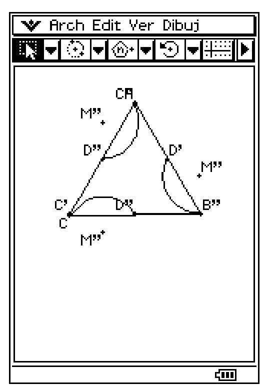
Seleccionamos nuestros dos arcos y hacemos una rotación en -60º con centro en B, obteniendo:



Tomando nuestros arcos base hacemos nuevamente una rotación de 60º con centro de rotación en C. Tenemos:

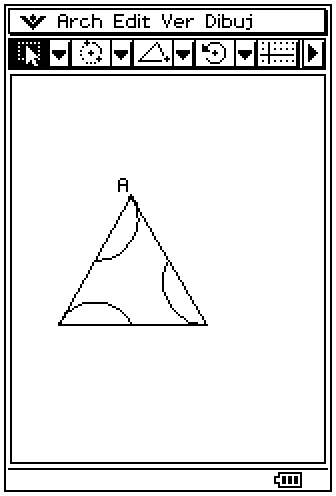


Quitamos nuestros trazos sobrantes y dejamos despejado nuestro triángulo equilátero que será nuestra célula base:

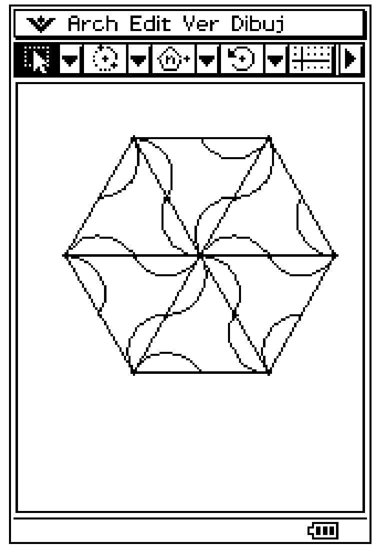


Haciendo uso del menú edit / propiedades / Ocultar; ocultaremos nuestros puntos y tenemos la siguiente figura:

Es momento de hacer un teselado con nuestra célula básica (triángulo equilátero):



Con la ayuda de el comando rotación y partiendo del vértice A construye el siguiente teselado:

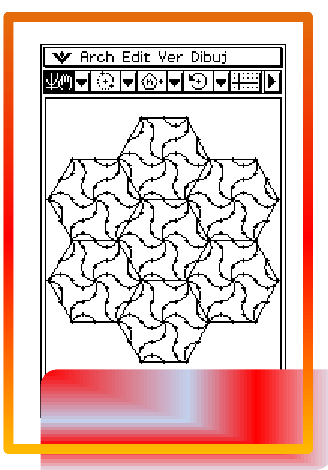


Que es lo que debes saber:

¿Qué puntos se deben seleccionar para comenzar a hacer las rotaciones?

¿Cuáles serán los ángulos de rotación para completar la figura?

¿Completaste el teselado? Construirías este teselado ¿Cómo?



3.3 Fase de experimentación

La implementación de la situación diseñada está compuesta de tres aspectos: la puesta en escena, las características de los estudiantes y la dinámica para llevar a cabo dicha situación. A continuación se da una explicación de cada uno de estos aspectos.

3.3.1 La puesta en escena

Esta se realizó en el aula de computación una escuela particular de regularización académica en la ciudad de San Cristóbal de las Casas, Chiapas; el espacio es el adecuado para esta actividad que permite la interacción entre los alumnos a manera de mesa de discusión. Dicho espacio permitió tomar fotografías a los alumnos a lo largo de la actividad enfocando lo que cada estudiante obtenía como resultado. La secuencia se aplicó en una sola sesión con duración de 2 horas.

3.3.2 Los estudiantes

Los estudiantes fueron en total cuatro alumnos de segundo grado. Los cuatro estudiantes se ubican entre los 13 y 14 años de edad (ver figura 20), y no habían abordado todavía el tema de los polígonos que cubren el plano.

Fig. 20. Puesta en escena.

3.3.3 La dinámica

Se les explicó en un primer momento a los alumnos participantes en lo que consistía este trabajo mostrándoles los materiales y equipos con los que trabajarían como se observa en la figura 21 y si autorizaban tomar fotografías durante el desarrollo de la secuencia. Se les comento que la secuencia consistía en dos actividades y un ejercicio con la calculadora. También se les indicó que contaban con 120 minutos para realizar la actividad. Asimismo el docente encargado de la aplicación de la secuencia estuvo en todo momento al pendiente de cualquier reacción, comentario o sugerencia de los alumnos, cuando éstos se encuentren resolviendo las actividades; puesto que todo detalle o aspecto que se vaya desarrollando será importante para los análisis posteriores.

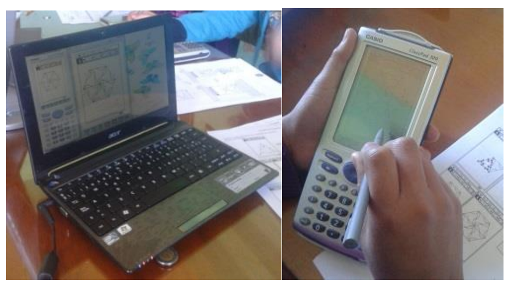


Fig. 21. Materiales y equipos utilizados en la secuencia.

3.4 Fase de validación

En este apartado daremos cuenta del proceso de validación de la secuencia que hemos diseñado, cabe hacer la aclaración que mostraremos de manera general los resultados de las distintas puestas en escena que hemos hecho, con ello pretendemos que sea visible e proceso por el cual ha atravesado la secuencia didáctica hasta llegar a la construcción de la versión final, la cual puede observarse en el anexo A que muestra tanto la secuencia sugerida como los materiales auxiliares para llevar a cabo mencionada secuencia.

La validación de la ingeniería se lleva a cabo al confrontar las hipótesis elaboradas en el análisis *a priori* y el análisis de los resultados de la fase experimental (denominada análisis *a posteriori*)(Lezama, 2003). Para esta investigación, hemos elaborado tablas que contiene esta confrontación para una lectura más cómoda.

<table>
<tr><td colspan="2">CONFRONTACIÓN ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI</td></tr>
<tr><td colspan="2">SECUENCIA DIDACTICA “TESELADOS”</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTA 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se les pide a los alumnos que Observen tres polígonos: un triángulo, un paralelogramo y un pentágono de los cuales los alumnos deben mencionar la medida de los ángulos.</td></tr>
<tr><td>Análisis a priori</td><td>Análisis a posteriori</td></tr>
<tr><td>• Conocimientos y habilidades:

Resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática.

• Intensiones didácticas:

La finalidad de que los alumnos se enfoquen en los principios básicos para la construcción de polígonos que cubren el plano.

• Consideraciones previas:

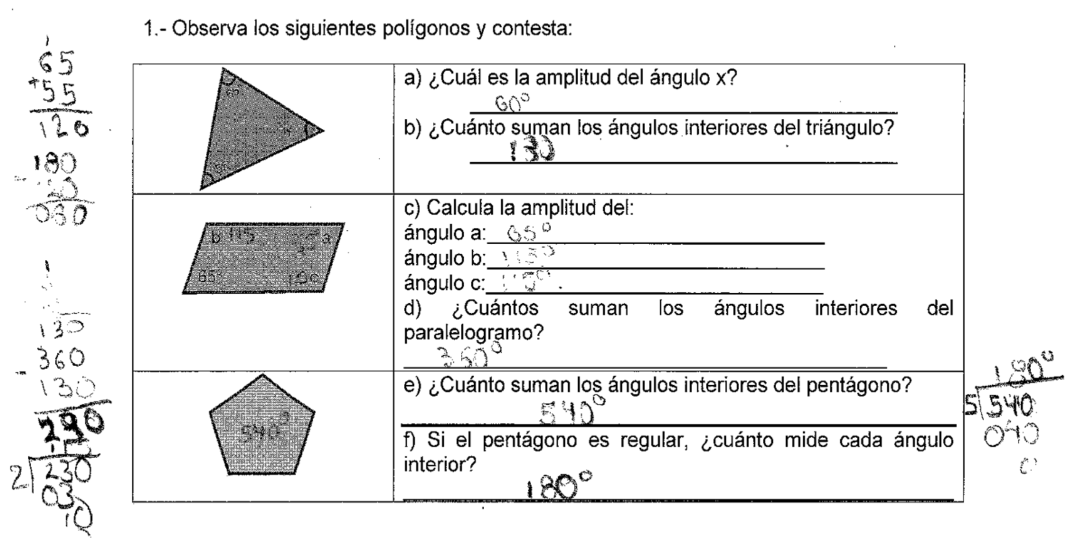
Se espera que los alumnos puedan obtener de su entorno y completar las preguntas de cada uno de los tres polígonos presentados. Triangulo:
- amplitud de X= 60
- Los ángulos interiores deben sumar 180^0.
- Paralelogramo:
- Angulo a: 65º
- Ángulo b: 115º
- Ángulo c: 115^0
- Los ángulos interiores del paralelogramo suman 360^0.

Pentágono:

Los ángulos interiores de un pentágono suman 540^o

Si el pentágono es regular cada ángulo interior mide 108º</td><td>En esta pregunta los alumnos no presentaron ninguna dificultad para contestar, apoyándose de operaciones básicas para completar lo que se les pedía. Pudieron corroborar que la teoría de los ángulos interiores de los polígonos se demostraba en esta actividad.</td></tr>
</table>

Confrontación
En este ejercicio se pudo observar que los alumnos por medio de operaciones básicas encontraron sin ningún problema los ángulos interiores de los polígonos. En este caso se les explicó que una primera intensión de la secuencia era que recordaran de los cursos previos de geometría que posteriormente les serviría para comprender en su conjunto el tema de polígonos que cubren el plano.


1.- Observa los siguientes polígonos y contesta:

	a) ¿Cuál es la amplitud del ángulo x? 60° b) ¿Cuánto suman los ángulos interiores del triángulo? 130
	c) Calcula la amplitud del: ángulo a: 65° ángulo b: 115° ángulo c: 115°. d) ¿Cuántos suman los ángulos interiores del paralelogramo? 360°
	e) ¿Cuánto suman los ángulos interiores del pentágono? 540° f) Si el pentágono es regular, ¿cuánto mide cada ángulo interior? 180°

PREGUNTA 2
Se le pide a los alumnos que señalen de las figuras geométricas que se le presentan (pentágono, cuadrado, hexágono, triangulo, paralelogramo), con cuales pueden construir un mosaico regular.

Análisis *a priori*	Análisis *a posteriori*
• **Conocimientos y habilidades:** Resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática. • **Intensiones didácticas:** Con la finalidad que los alumnos se enfoquen en el tema de los polígonos que cubren el plano	Hubo libertad en las preguntas con la intensión de que los alumnos entraran en la dinámica de interactuar con el profesor-investigador en los

<table>
<tr>
<td>

• **Consideraciones previas:**

Se espera que los alumnos con base a conocimientos generales tengan la visualización de seleccionar el cuadrado, el hexágono y el triángulo ya que son los polígonos de los cinco mostrados en la pregunta que cumplen con la característica que un polígono puede ser usado como célula básica mediante la siguiente regla general

n= número de lados

suma de los ángulos interiores = $(n-2)x\ 180°$

cada ángulo = $(n-2)x180°/n$

Para que un polígono pueda ser usado como unidad básica se debe poder dividir 360° entre el ángulo interior y el resultado debe ser un número entero.

$$\frac{360°}{(n-2)x180°/n}$$

Que de acuerdo al diseño de la secuencia hasta este momento los alumnos solo podrían concretar su respuesta con los conocimientos generales que tengan de acuerdo a su experiencia y es la finalidad de la pregunta observar cual es el grado de efectividad sin haberles mostrado el sustento matemático.

</td>
<td>

conocimientos previos de geométrica que los alumnos deben tener a lo largo de su formación académica, contestándose la pregunta con la mayoría de aciertos aunque algunos alumnos tuvieron cierta dificultad para visualizar que solamente el cuadrado, hexágono y triangulo cumplen las condiciones para cubrir el plano.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

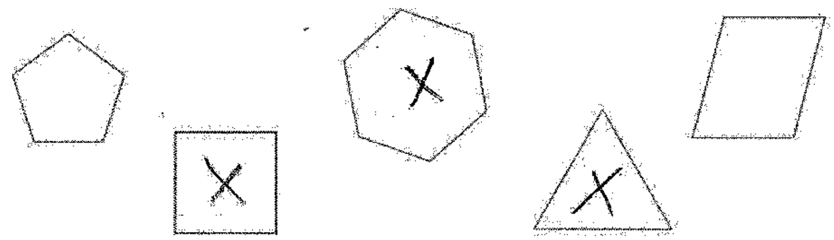
Confrontación

Se pudo observar que los alumnos prestaron atención a la breve explicación de un teselado que es cuando se cubre una superficie con formas planas de manera que

</td>
</tr>
</table>

no se superponen y no hay huecos entre ellas, contestando en la mayoría de los casos de forma correcta

2.- Señala las figuras con las que es posible construir un mosaico regular.



PREGUNTA 3

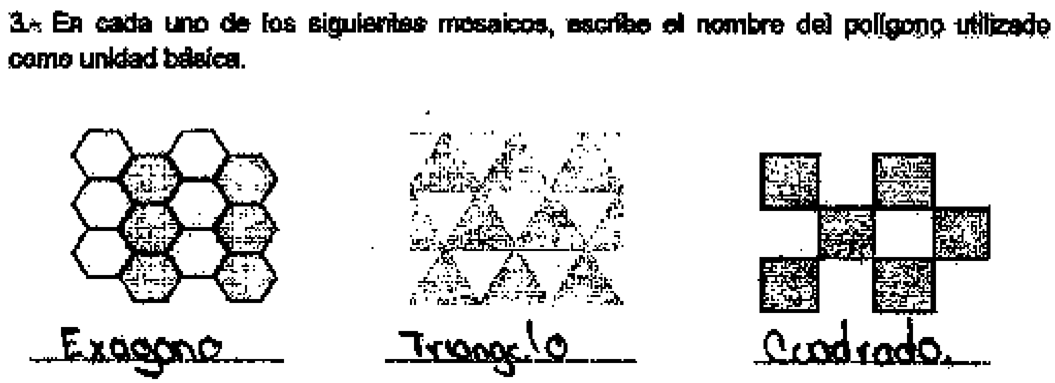
A manera de darle más elementos a los alumnos en la construcción de teselados se les presentan a los alumnos 3 ejemplos de mosaicos y se les pide que identifiquen el nombre del polígono utilizado como unidad básica.

Análisis *a priori*	**Análisis *a posteriori***
• **Conocimientos y habilidades:** Resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática. • **Intensiones didácticas:** Con la finalidad que los alumnos se enfoquen en el tema de la geometría y en la construcción de mosaicos se espera que se identifiquen con los polígonos que cubren el plano. • **Consideraciones previas:** Se espera que los alumnos respondan que los polígonos con los que están generados cada uno de los mosaicos son: hexágono, triángulo equilátero y	No hubo ninguna dificultad por parte de los alumnos en identificar los polígonos que generan los mosaicos, observándose al momento de la secuencia que los estudiantes mostraban interés por el tema ya que continuaban con preguntas relacionadas con el tema, como por ejemplo ¿Estos mosaicos son con los que están hechos los pisos de algunas casas?

<table>
<tr><td>cuadrado respectivamente.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">

Confrontación

En esta pregunta se les hizo fácil de responder a los alumnos, ya que en la pregunta anterior lograron identificar los polígonos que cubren el plano y que no se traslapan ni quedan espacios vacíos. Esto implica que comprendieron la forma en la que la superposición de los polígonos hace que se cubra el plano de manera regular.



</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">

PREGUNTA 4

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Puntualizando que debe existir un polígono básico regular, que este debe cumplir ciertas características y como previa inducción al concepto matemático se hace la pregunta ¿si es factible crear mosaicos empleando pentágonos o rombos regulares?</td></tr>
<tr><td>

Análisis *a priori*

</td><td>

Análisis *a posteriori*

</td></tr>
<tr><td>

- **Conocimientos y habilidades:**

Resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática.

- **Intensiones didácticas:**

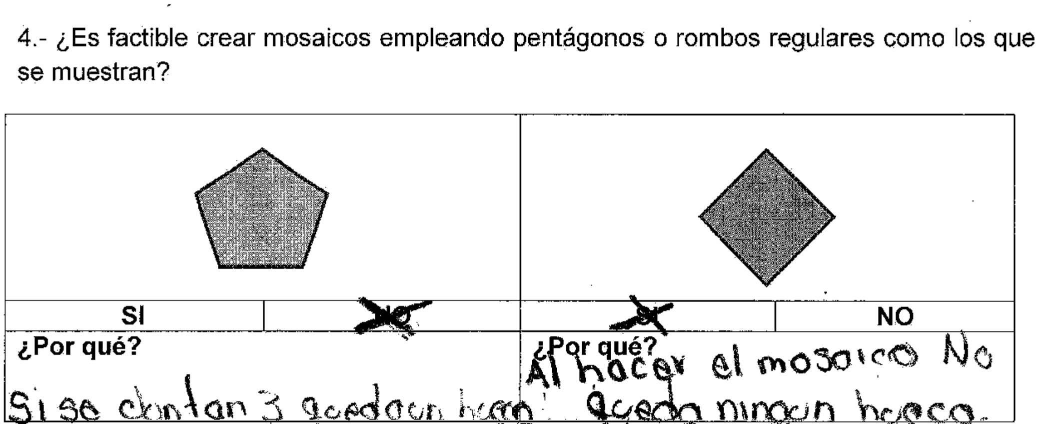
Con la finalidad que los alumnos conozcan las

</td><td>Los alumnos no tuvieron dificultad en contestar el</td></tr>
</table>

características de los polígonos que deben cubrir el plano se presenta esta pregunta previa al contexto matemático que se presentara en la siguiente actividad. • **Consideraciones previas:** Se espera que los alumnos puedan identificar que solamente con los rombos rectangulares se puede cubrir el plano de manera regular y que con pentágonos se necesitaría de otros polígonos adicionales para cubrir el plano y se convertiría en un cubrimiento de plano semiregular.	por qué los rombos pueden cubrir el plano y no así el pentágono.

Confrontación

Los alumnos han comprendido hasta esta etapa de la secuencia de manera general que polígonos se pueden utilizar para formar un polígono regular y que los que no cumplen con las condiciones para no dejar huecos ni sobreponerse se necesitarían de otros polígonos adicionales para cubrir el plano y esto haría que se convertiría en un cubrimiento de plano semirregular.



4.- ¿Es factible crear mosaicos empleando pentágonos o rombos regulares como los que se muestran?

SI	~~NO~~	~~SI~~	NO
¿Por qué? Si se chantan 3 quedan hueco		¿Por qué? Al hacer el mosaico No queda ningun hueco.	

PREGUNTA 5

Como antecedente al análisis matemático se le pregunta a los alumnos que consideren si la longitud de los lados, el número de sus lados o/y la medida de sus ángulos interiores hacen que con una determinada figura se pueda crear un mosaico.

Análisis *a priori*	Análisis *a posteriori*
• **Conocimientos y habilidades:** Resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática. • **Intensiones didácticas:** Con la finalidad que los alumnos se enfoquen en el tema de los polígonos regulares que cubren el plano. • **Consideraciones previas:** Se espera que los alumnos contesten que la medida de sus ángulos interiores es lo que hace que un polígono pueda crear un mosaico, sin importar la longitud de sus lados y como consecuencia de la medida de los ángulos interiores se espera que también contesten que si en el número de sus lados.	En esta pregunta hubo que intervenir ya que los alumnos tuvieron algunas dificultades para identificar que la medida de los ángulos interiores es lo que hace que se pueda configurar un mosaico regular.

Confrontación

En esta pregunta se generó cierta polémica ya que algunos alumnos argumentaron que solamente la medida de los ángulos interiores

5.- ¿Qué consideras que hace que en algunos casos con una determinada figura pueda crear un mosaico y en otros no, marca con una cruz tus consideraciones?

La longitud de los lados		El número de sus lados		La medida de sus ángul interiores	
SI	NO	SI	NO	SI	NO

PREGUNTA 6

En esta actividad se describe el sustento matemático de la teoría relacionada con los polígonos que cubren el plano de manera regular, terminando la sección con una tabla que los alumnos deben completar analizando cuatro polígonos representativos (hexágono, heptágono, decágono y octadecágono) que van a reafirmar lo que teóricamente se describe en la explicación matemática.

<table>
<tr><th>Análisis a priori</th><th>Análisis a posteriori</th></tr>
<tr><td>

• **Conocimientos y habilidades:**

Resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática.

• **Intensiones didácticas:**

Con la finalidad que los alumnos se enfoquen en el tema de los polígonos regulares que cubren el plano.

• **Consideraciones previas:**

Se espera que los alumnos completen la tabla y adquieran los conocimientos de los polígonos que cubren el plano quedando la tabla de la siguiente manera:

<table>
<tr><th>Polígono</th><th>Número de lados</th><th>Resultado</th><th>Si o No cubre el plano</th></tr>
<tr><td>Hexágono</td><td>6</td><td>3</td><td>Si</td></tr>
<tr><td>Heptágono</td><td>7</td><td>$2\frac{7}{5}$</td><td>No</td></tr>
<tr><td>Decágono</td><td>10</td><td>$2\frac{3}{6}$</td><td>No</td></tr>
<tr><td>Ocatadecágono</td><td>18</td><td>$22\frac{8}{16}$</td><td>No</td></tr>
</table>

</td><td>

Después de la explicación de cómo saber por medio de un sustento matemático como conocer si un polígono cubre el plano de forma regular los alumnos completaron la tabla y la mayoría llego a la respuesta que se esperaba.

Se pudo observar que los alumnos recurrieron además de la explicación matemática de cómo cubrir el plano de forma regular a los ejercicios previos y pudieron comprobar que el hexágono si cubre el plano de manera regular.

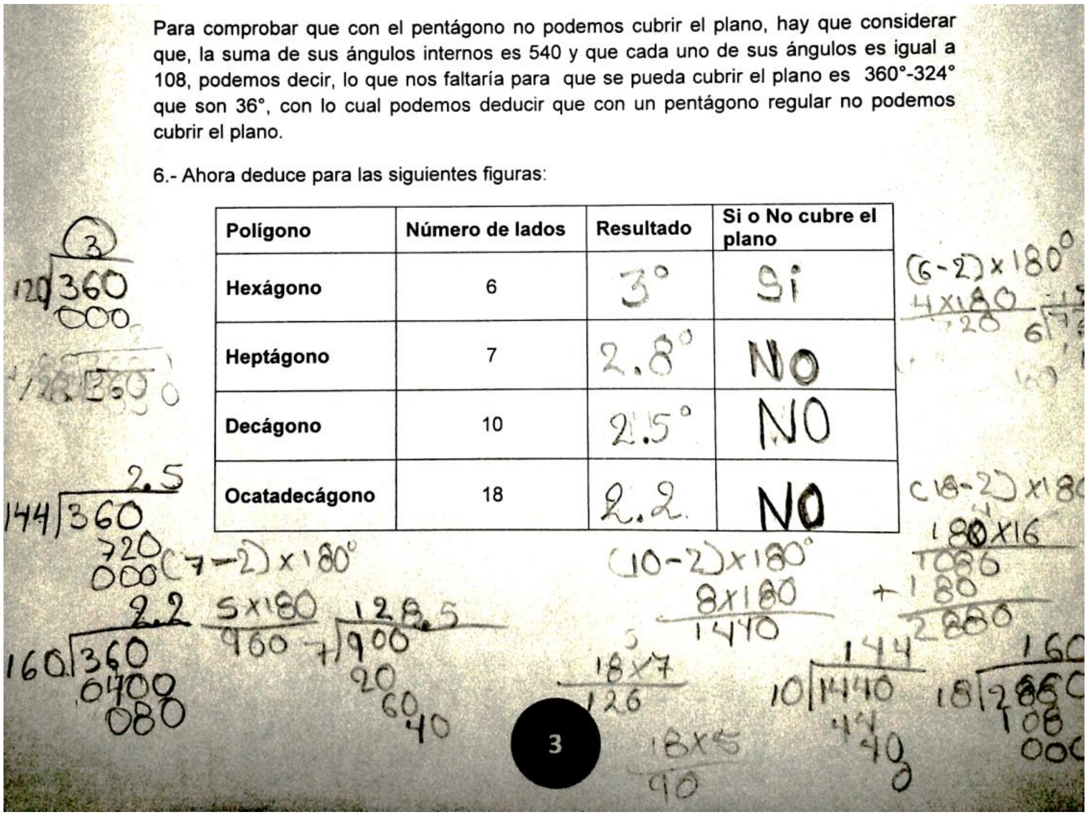
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Confrontación

Los alumnos comprendieron la explicación de cómo cubrir el plano de forma regular, enfocados en dicha explicación conjuntaron los datos necesarios para hacer las operaciones correspondientes y deducir si los polígonos sugeridos cumplían con las condiciones necesarias para dicho fin, acertando en la mayoría

</td></tr>
</table>

de las ocasiones.



Para comprobar que con el pentágono no podemos cubrir el plano, hay que considerar que, la suma de sus ángulos internos es 540 y que cada uno de sus ángulos es igual a 108, podemos decir, lo que nos faltaría para que se pueda cubrir el plano es 360°-324° que son 36°, con lo cual podemos deducir que con un pentágono regular no podemos cubrir el plano.

6.- Ahora deduce para las siguientes figuras:

Polígono	Número de lados	Resultado	Si o No cubre el plano
Hexágono	6	3°	Si
Heptágono	7	2.8°	No
Decágono	10	2.5°	NO
Ocatadecágono	18	2.2	NO

3

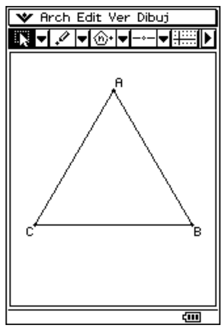
ACTIVIDAD 2

EJERCICIO CON LA CALCULADORA CASIO CLASSPAD 300

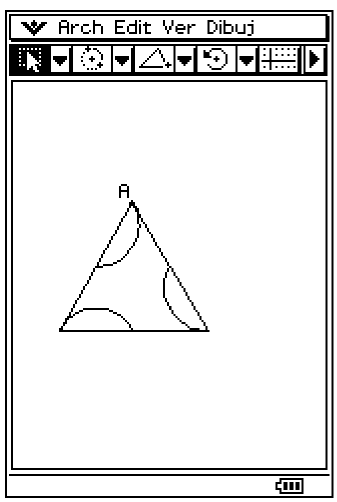
Análisis *a priori*	**Análisis *a posteriori***
• **Conocimientos y habilidades:** Resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática. • **Intensiones didácticas:** Con la finalidad que los alumnos se enfoquen en el tema de la geometría en específico de los polígonos que cubren el plano se muestra una actividad atractiva visualmente y didácticamente ilustrativa.	Los alumnos pudieron completar la actividad con cierto grado de dificultad ya que de primera

- **Consideraciones previas:**

Se presenta paso a paso la forma en la que se puede construir el teselado llamado “LA PAJARITA” iniciando con la construcción en la calculadora Casio ClassPad 300 con un triángulo equilátero, el cual se espera que quede de la siguiente forma:

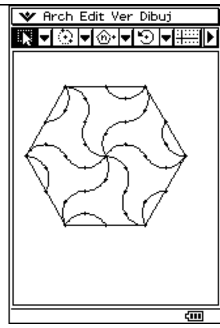


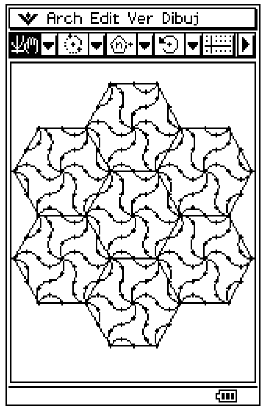
Siguiendo con una secuencia de pasos se espera que los alumnos lleguen a construir la siguiente figura



No sin antes hacer que los alumnos contesten un par de cuestionamientos que les servirán para reafirmar los conocimientos que han adquirido en esta secuencia, las preguntas son:

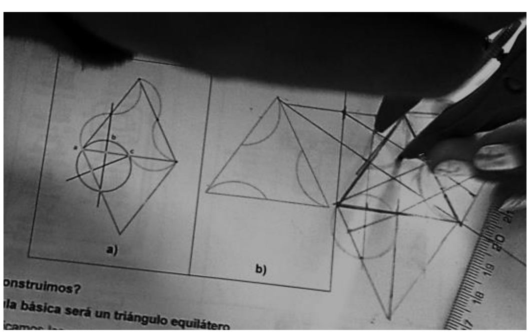
instancia se enfrentaron al uso de la calculadora ClassPad 300 por primera vez, como siguiente obstáculo que los alumnos tuvieron que lidiar fue la manipulación de los objetos para cambiar de tamaño los trazos aunque una vez dominados los botones de los menús de la calculadora fue más fácil de completar el ejercicio, finalmente pudieron completar la construcción de manera satisfactoria el cien por ciento de los alumnos que hicieron la actividad, aunque la parte final algunos alumnos fueron guiados por el profesor.

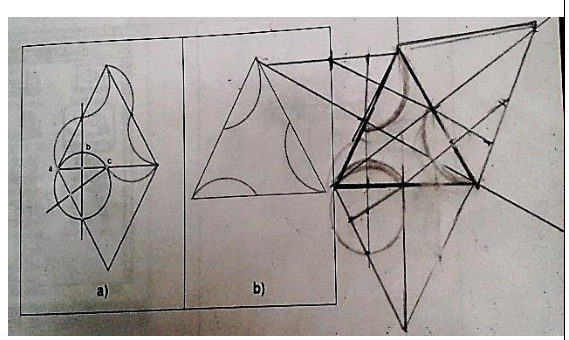
 ¿Qué puntos se deben seleccionar para comenzar a hacer las rotaciones? En esta pregunta se espera que los alumnos contesten que es el punto A del triángulo el punto de rotación. ¿Cuáles serán los ángulos de rotación para completar la figura? Se espera que los alumnos contesten que los ángulos de rotación son múltiplos de 60 por tratarse de un triángulo equilátero, siendo los ángulos 60, 120,180, 240 y 300. Y finalmente que los alumnos hagan la siguiente construcción a manera de reafirmar los conocimientos. Llenar un espacio más grande con teselaciones de la unidad que realizamos en esta actividad. Haciéndole las siguientes preguntas: ¿Completaste el teselado anterior?, construirías el siguiente teselado, ¿Cómo? Se espera que los alumnos contesten afirmativamente y que la forma de construir el teselado del ejemplo es que el punto de rotación va a partir de cada vértice externo del hexágono con un ángulo de rotación de 120^{o}.	En esta sección de la actividad con la calculadora los alumnos tuvieron ciertas dificultades para encontrar el punto de rotación del triángulo aunque otros dedujeron que era el punto A, el punto de rotación.

	Finalmente los alumnos construyeron el teselado tomando en cuenta las consideraciones previas que fueron sugeridas por el profesor que el punto de rotación en este caso no siempre sería el mismo y que el ángulo de rotación es de 120º.

Confrontación

Previo a la construcción con la calculadora se les pidió a los alumnos que hicieran la actividad usando material geométrico (Regla, escuadras, transportador, compas) para construir con en papel la célula básica del mosaico de la pajarita de Nazari pudiéndolo hacer con cierto grado de dificultad ya que se les complicó hacer los trazos quedando únicamente como ejemplo de que lo que a continuación se construiría con la calculadora se puede hacer con lápiz y papel.

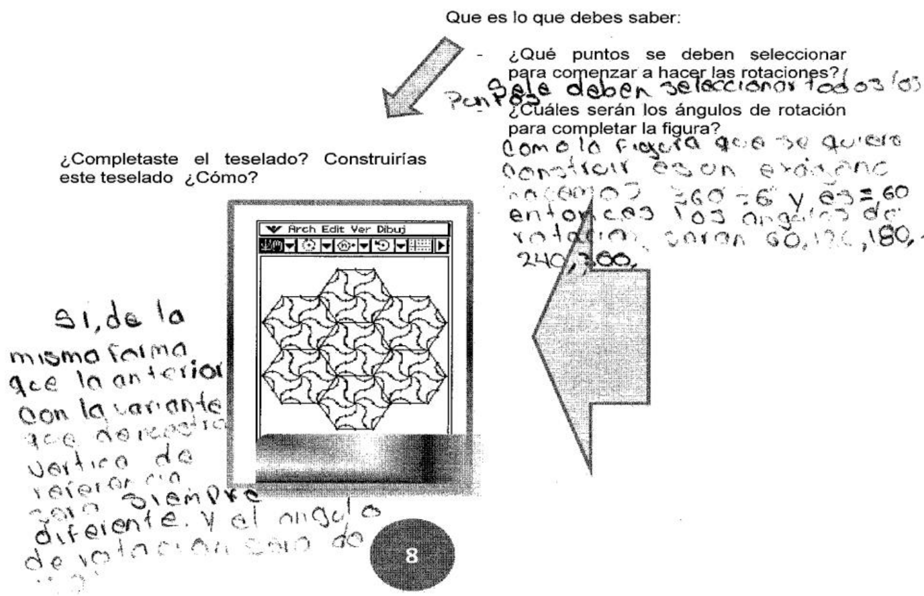




Posterior a la construcción en papel se realizó la actividad con la calculadora Casio ClassPad 300.

En este último ejercicio se pudo observar como el alumno tuvo la posibilidad de usar un recurso tecnológico que ayuda a enriquecer el discurso matemático, siendo atractivo y motivante ir construyendo con trazos que van identificando perfectamente en cada uno de los pasos a seguir hasta ver su teselado completo.

Hubo dificultades atribuidas a la falta de práctica e identificación con los equipos tecnológicos pero que finalmente con ayuda del profesor y el interés de los alumnos se llevó a cabo con construcciones geométricas esperadas. Los alumnos contestaron de manera convincente las interrogantes sugeridas que en el diseño de la secuencia se presentaron para saber sí comprendían lo que sucedía al construir un mosaico con los elementos que influían en la construcción de estos como son los puntos y los ángulos de rotación.



CAPITULO 4 CONCLUSIONES GENERALES

Las conclusiones a las que hemos llegado con esta investigación se abordan a partir de las respuestas a las interrogantes que nos planteamos al inicio de la misma, dentro de las cuales encontramos las siguientes: ¿Cómo favorecer el aprendizaje sobre transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados con la calculadora Casio ClassPad 300? Para dar respuesta a esta interrogante recurrimos al análisis de dos libros autorizados por la SEP, en este análisis encontramos que en los libros de texto el abordaje del análisis y explicación de los polígonos que cubren el plano se establece de forma teórica, ya que en la mayoría de los casos se presentan los casos obtenidos configuraciones preestablecidas y no se da pie a los alumnos que puedan descubrir por sí mismos y extraer fenómenos de la realidad y llevarlos al aula, es decir, no se propone la manipulación de las figuras que cubren el plano.

El diseño de la secuencia didáctica que se conforma de diferentes preguntas y una actividad con la calculadora ClassPad 300, tomando como base algunas actividades de los libros de texto para segundo de secundaria de los cuales presentamos su análisis en el capítulo dos y de estudios realizados por algunos autores, estas actividades nos permitieron abordar el tema en estudio de una manera más significativa, conduciendo al estudiante por una ruta de aprendizaje que lo llevó al análisis de transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados de una manera forma más sencilla.

Algo importante de resaltar es el hecho de que la secuencia fue estructurada de manera gradual, es decir, inicialmente preguntas simples en las cuales se enfocaba a los alumnos al tema de la geometría a manera de concentrar su atención en los conocimientos de geometría que tenían de sus experiencias propias, hasta llegar a las de mayor complejidad que en este caso fueron planteamientos que incluían operaciones producto de un sustento matemático en el que se describe la forma de definir los polígonos que cubren el plano y el ejercicio de construcción del teselado llamado la Pajarita de Nazarí con la calculadora que inciden de manera directa en nuestro tema de investigación, esto permitió que los conocimientos construidos o recuperados, según sea el caso, en las primeras actividades fueran aplicadas en las actividades subsecuentes.

De la investigación se rescatan varios aspectos de gran importancia que ayudan a los alumnos de segundo año de secundaria en el análisis de las transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados. Dichos aspectos son los siguientes:

- Se pudo observar que los alumnos tienen muchos conocimientos geométricos obtenidos de su entorno ya que sin haber abordado el tema, pudieron responder sin dificultad a la pregunta de dibujar objetos geométricos.

- Así mismo, pudieron identificar perfectamente los patrones de repetición cuando se les pidió que construyeran la célula básica que construiría una teselación.

- También se pudo comprobar que con el uso de material didáctico y el empleo de la calculadora como herramienta tecnológica los alumnos construyen habilidades cognitivas significativas porque los conocimientos que adquieren son más apegados a la realidad que con el aprendizaje tradicional donde el profesor imparte una clase y el alumno solo tiene la función de receptor.

- Se construyeron o reconstruyeron los conceptos geometría, trasladar, rotar, duplicar los manejan de manera adecuada.

Esto nos muestra que el uso de material didáctico y el uso de tecnología en el aula enriquecen el discurso matemático y hace que el alumno entienda de una mejor manera lo que sucede en su entorno por medio de modelos construidos en el salón de clases,

Con todas las observaciones y las respuestas obtenidas por la secuencia didáctica diseñada concluimos que los alumnos pueden llegar a analizar y explicar lo que sucede con los polígonos que cubren el plano con apoyo gráfico, esquemas y oraciones breves, lo cual facilitara la comprensión de las situaciones planteadas y la manipulación de material didáctico, con lo cual se logra la construcción de un aprendizaje significativo en el alumno.

Cabe aclarar que las situaciones plateadas para esta forma de análisis y explicación de los teselados es una de muchas situaciones que se pueden retomar, por lo cual esta investigación sienta un precedente de investigaciones futuras en cuanto al uso de los métodos para el planteamiento y resolución de ecuaciones.

Como hemos podido ver a lo largo del escrito, para nosotros era importante hacer evidente el como el uso de la tecnología (en nuestro caso la calculadora ClassPad 300) favorece la construcción de conocimiento matemático, siempre y cuando este uso este basado en actividades que promueven el manejo y conocimientos de conceptos inherentes al tema en cuestión, si bien es cierto, la problemática escolar no se resuelve del todo con la introducción de la tecnología, con los resultados obtenidos en la investigación, pudimos constatar que cuando los estudiantes trabajan con ella se encuentran inmersos en un ambiente mucho más dinámico y esto favorece la participación de los alumnos y la interacción entre ellos.

BIBLIOGRAFÍA

Ardila, F. (2005). *Teselaciones*. Congreso Nacional de Matemáticas, Universidad de Washington Seattle, EUA.

Artigue, M. (1995*). Ingeniería Didáctica en educación matemática. La enseñanza de los Principios del cálculo; problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Berger, S. (2006). *Psicología del Desarrollo: Infancia y Adolescencia, 7ª edición. Editorial medica panamericana. Madrid, España.*

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas.* Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemáticas, No. 19 (Versión castellana 1993).

Brousseau, G. (1988). *El contrato didáctico: el centro*. Investigación en Educación Matemática. El pensamiento salvaje, de Grenoble.

Cantoral, R., Castañeda, A., Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G., Montiel, G. y Sánchez, M. (2008*). Matemáticas 2*. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático. México: McGraw Hill.

De Faria, C. (2006). *Transposición Didáctica: Definición, Epistemología, Objeto de Estudio.* Centro de investigaciones Matemáticas y Meta- Matemáticas. Universidad de Costa Rica. Asociación de Matemática Educativa.

Fernández, D. & Montoya D., E. (2013).*Geometría dinámica: de la visualización a la prueba*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vo. 26. Pag. 753-766.

Fouz, F. & Donosti de,B. (2006), *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría*, Ataritzar Bidea,16, Donostia. ANUIES.

Godino, J. & Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros.* Departamento de didáctica de las matemáticas. Facultad de Ciencias de la Educación: Granada. España.

Gonseth, F. (1945-1955)- *La géométrie et le probléme de l´espace. Lausanne*: Éditions du Griffon.

Hernández, S., Solano G.,& Jiménez M. (2013). *Matemáticas, Estrategias del Pensamiento.* Segundo grado, Educación secundaria. Editorial Patria: México D.F.

Hernández P., F. & Soriano, A., E. (1997*) La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria una experiencia didáctica*. Universidad de Murcia.

Kuhn, T. (1962). *The estructure of scientific revolutions*. Traducción de Carlos Solís Santos. México: Fondo de Cultura Económica (Breviarios;213).

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN. México.

López, O. & García, S.(2008) *La enseñanza de la geometría, Materiales para apoyar la práctica educativa*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México, D.F.

Pérez, A. (2008). *Una vinculación de la matemática escolar y la investigación a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología* .Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Chiapas.

Reyes, M. (2007), *Mosaicos*, Universidad de Valladolid. Facultad de Educación. Curso Didáctica de la geometría en Educación Secundaria. Valladolid España.

Rotaeche, A. (2008). *La construcción del concepto del ángulo en estudiantes de secundaria*. Tesis de maestría, CICATA-IPN. México.

Ruíz, C. (2006). *Geometría en la Alhambra.* Seminario Internacional en Geometría Aplicada en Andalusia.Universidad de Granada: España.

Sadovsky, P (2005). *Enseñar matemáticas hoy*. *Miradas, sentidos y desafíos*. Sorzal: Buenos Aíres, Argentina.

Secretaría de Educación Pública (2011a*). Programas de estudio 2011*. Secretaría de Educación Pública. México.

Secretaría de Educación Pública (2011b*). Plan de estudios 2011*. Secretaría de Educación Pública. México.

Trigueros, M., Lozano, M., Schulmaister, M., Sandoval, I., Jinich, E., y Cortés, M., (2012). *Matemáticas 2*, 2º de secundaria. Editorial Santillana: México D.F.

Torregrosa, G. & Quesada H. (2007), *Coordinación de procesos cognitivos en geometría*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Julio, año/vol.10. México, D.F

Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991), *Visualization in teaching and learning mathematics.* MAA notes, Núm. 19, p. 25-26.

Alhambra http://www.alhambradegranada.org/es/info/introduccionhistorica.asp, Sitio relacionado al edificio de la Alhambra en Granada, España.

Manual de usuario (1999). Casio ClassPad 300, ClassPad 300 versión 2.20

ANEXO A

SECUENCIA DIDÁCTICA: TESELADOS

(SECUENCIA DIDÁCTICA EN FASE PRELIMINAR)

1.- Haz cinco dibujos que se relacionen con cinco figuras geométricas que puedes encontrar en: la naturaleza, las artes, la música, la calle, la casa, el deporte, los juegos o las profesiones.

2.- Imagina que has faltado a la última clase de matemáticas. Tu compañera Carolina te describe por teléfono una figura geométrica: "Traza con lápiz un círculo con ayuda de una moneda de cinco pesos. Dibuja con lápiz 2 círculos perpendiculares. Los extremos de estos diámetros son 4 puntos del círculo. Traza con tinta los segmentos que unen los puntos y que no pasan por el centro del círculo".

a) Dibuja aquí la figura **b) ¿Cómo se llama la figura trazada con tinta?**

3.- Se elige como sólido la pirámide regular de base cuadrada, es decir formada por un cuadrado y cuatro triángulos equiláteros, y se pide realizar el mayor número posible de patrones. A título de ejemplo, las figuras 1 y 2 representan dos patrones de dicha pirámide:

Figura 1

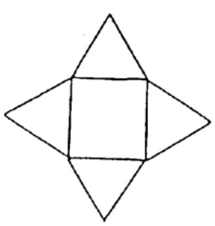
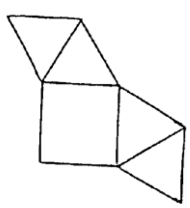
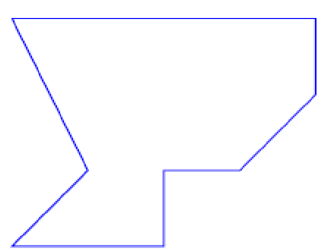


Figura 2



Representa mediante un esquema a mano alzada otros tres patrones de la pirámide de base cuadrada.

4.- Es posible teselar la región que se te presenta con las fichas que se te proporcionan:



SI	NO

¿Porqué?____

5.- ¿Puedes cubrir el plano con las figuras de pentominos que se te proporcionaron?

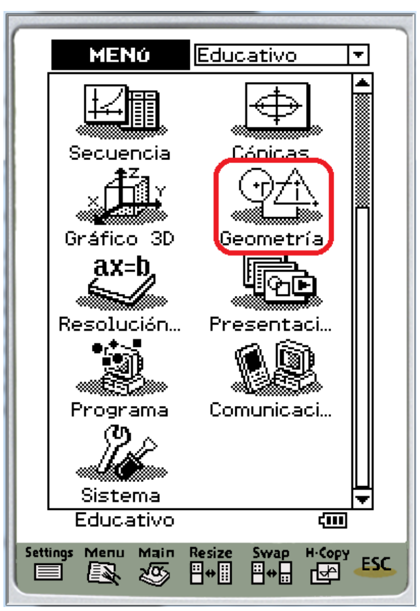
SI	**No**

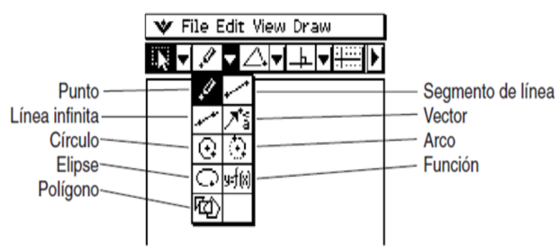
¿Porqué?____

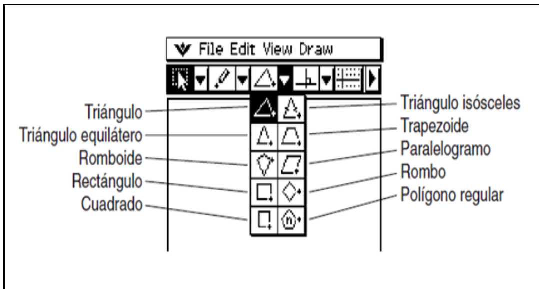
____

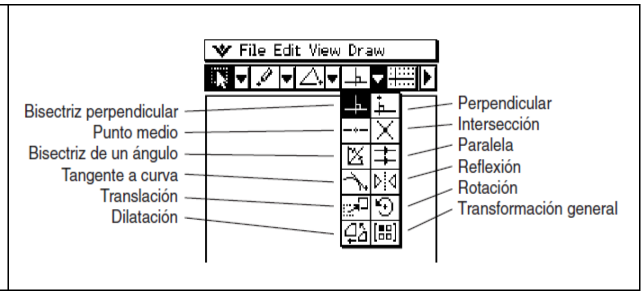
Uso de la calculadora CASIO ClassPad 300

OPCIÓN GEOMETRÍA Y BARRAS DE HERRAMIENTAS



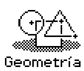


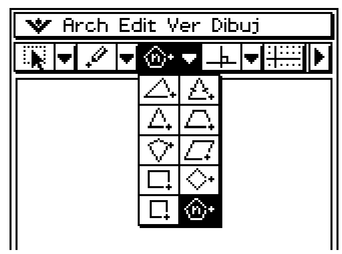


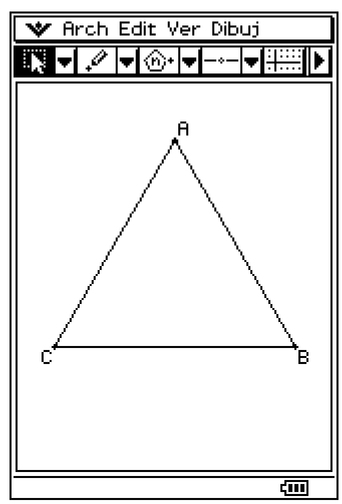


Ahora lo hagamos con la calculadora: Cubramos el plano con la Pajarita de Nazarí

Dibujaremos un triángulo equilatero

En el menú principal, selecciona ***Geometría***,  despliega el menú  y elige , para dibujar un triángulo equilátero indica que



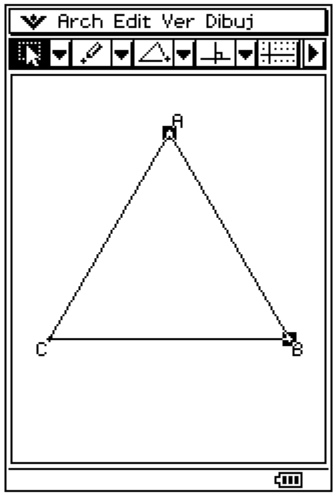


Nota Importante:

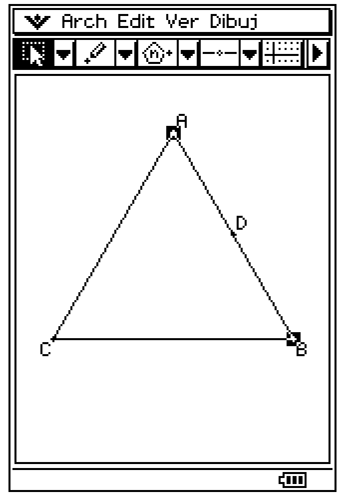
Damos un clic en la pantalla y aparece el triángulo.

Obtendremos los puntos medios

Para esto debemos seleccionar el punto A y el punto B, quedando seleccionados como se muestra en la siguiente figura:



Después punto medio), de esta manera obtenemos el punto D.

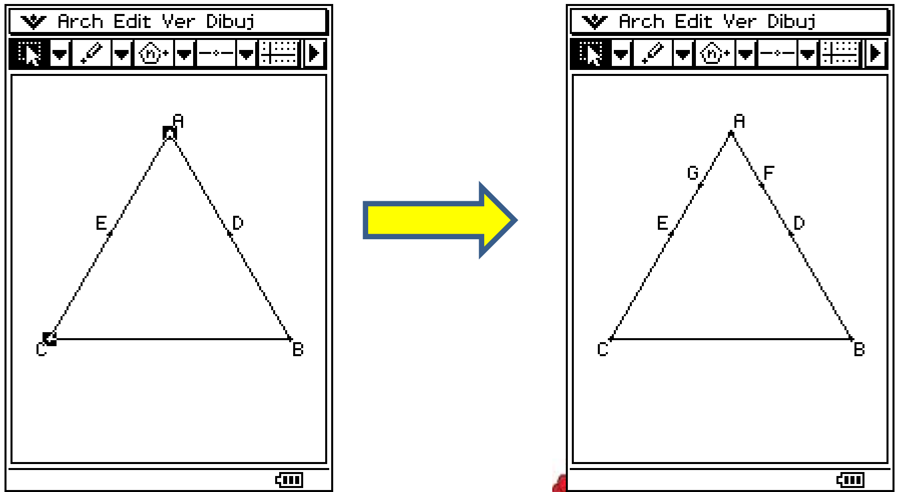


Nota importante:

Para quitar la selección de los puntos A y B damos un clic en un espacio en blanco fuera del triángulo

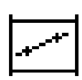
Hacemos el mismo procedimiento para obtener el punto medio E: Seleccionamos el punto A el punto C y con la herramienta punto medio() obtenemos el punto medio E:

Posteriormente obtenemos los puntos medios de AD y de AE con el mismo procedimiento con el que obtuvimos los punto medios D y E, quedando los puntos F y G de la siguiente manera:

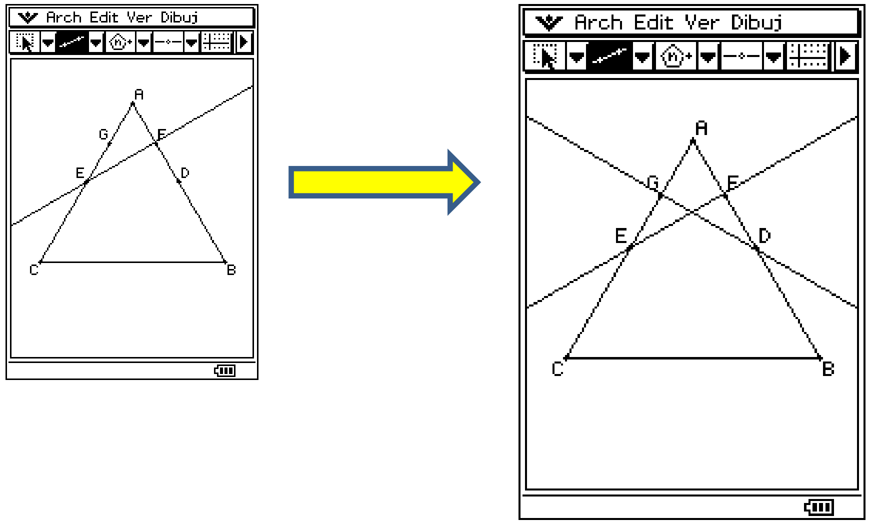


Nota importante:

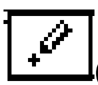
No se te olvide que para quitar la selección de los puntos seleccionados damos un clic en un espacio en blanco fuera del triángulo.

Trazamos dos líneas infinitas una que va de E a F y otra que va de D a G, el procedimiento es el siguiente: seleccionamos la herramienta  (línea infinita), después seleccionamos el punto E y posteriormente seleccionamos el punto F, quedando de la siguiente manera:

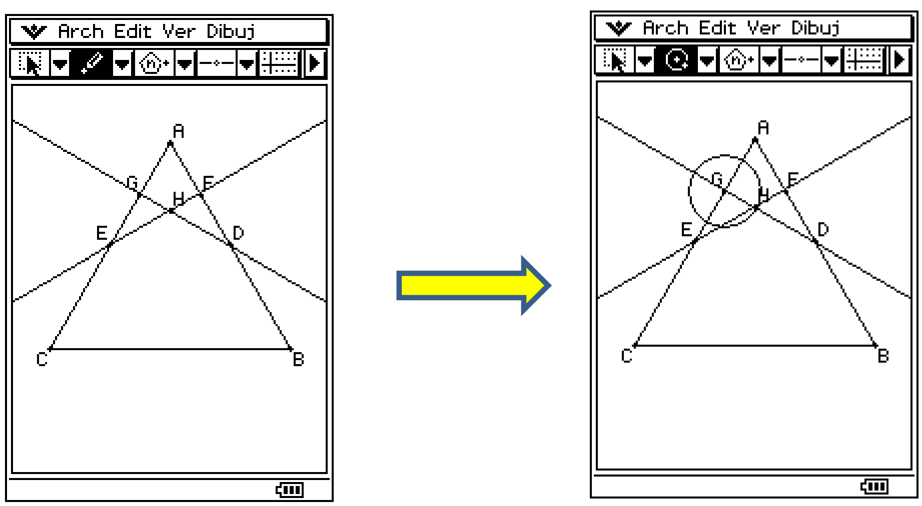
Hacemos lo mismo para los puntos D y G y nos queda el trazo asi:

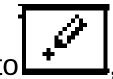


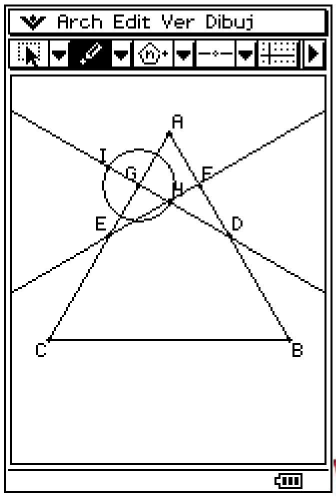
Hagamos círculos y arcos

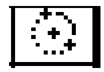
En la intersección de las líneas infinitas dibujamos el punto H con la herramienta (punto), quedando el trazo como se muestra en la figura:

Ahora creamos un circulo con centro en G y radio H. Para hacerlo nos vamos a el segundo menú y seleccionamos circunferencia.



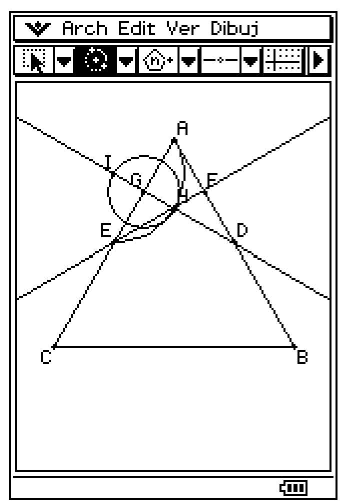
Dibujamos el punto I con la herramienta punto , que se encuentra ubicado en la intersección del radio de la circunferencia y la linea infinita D-G.

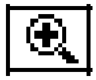
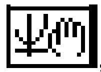


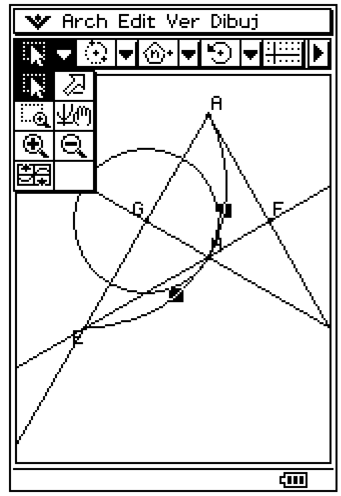
dibujaremos un arco con la herramienta arco  que va de AE y que pasa por H, construyelo con la opción arco del menú dibujo en el orden I, E, A.

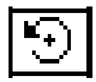
NOTA IMPORTANTE:

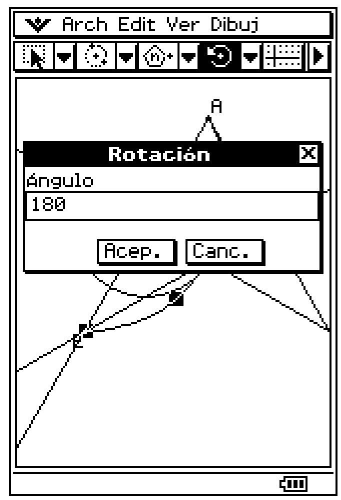
Es necesario que al trazar el arco los puntos se toquen el orden de los puntos I, E, A, de otra forma el arco tomara otras dimensiones.

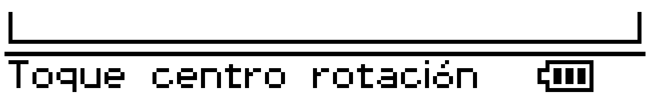


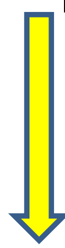
Con la opción rotación vamos a duplicar el arco con una rotación de 180^{O}, para lograr esto hacemos más grande la sección del trazo donde está el trazo con la opción de zoom  y podemos mover el trazo a la posición deseada con la instrucción de desplazamiento panorámico , esto con la finalidad de poder seleccionar el arco, para tomarlo de referencia como se muestra en la imagen.

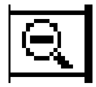
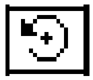


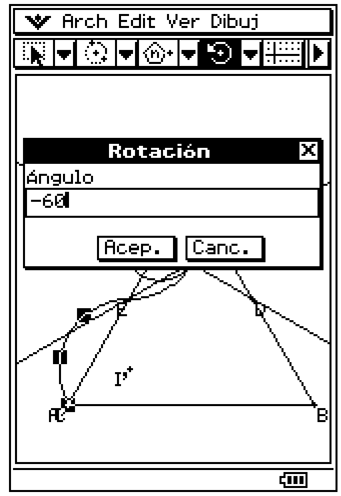
Ahora si nos vamos a la opción rotación  teniendo seleccionado el arco AHE como referencia. En la parte inferior de la pantalla indica que se toque el dentro de rotación en este caso el punto E como centro de rotación, con un ángulo de rotación de 180^{o}.







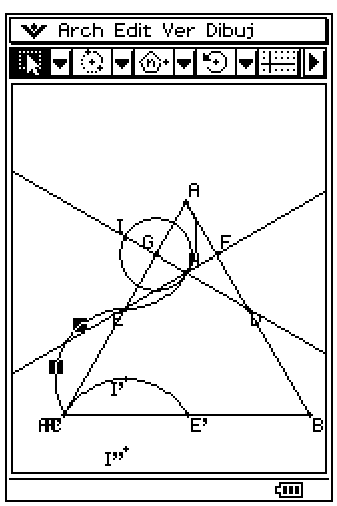
Disminuimos el zoom del trazo  para tener la figura completa, seleccionamos ahora el arco E,A’ y repetimos la operación con la opción de rotación  pero ahora con el arco de referencia E,A’, como punto de rotación A’ y con un ángulo de rotación de -60°.

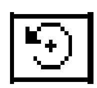


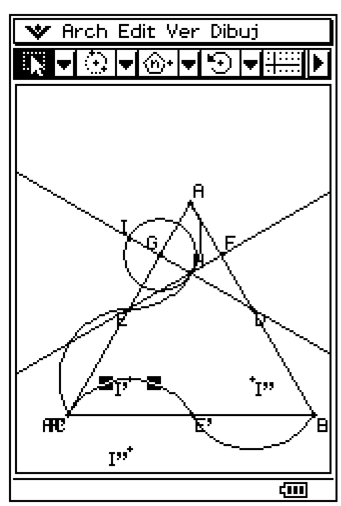
Nota importante:

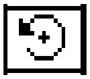
No se te olvide que para quitar la selección de los puntos seleccionados damos un clic en un espacio en blanco fuera del triángulo.

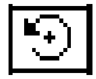
Quedando el trazo asi:

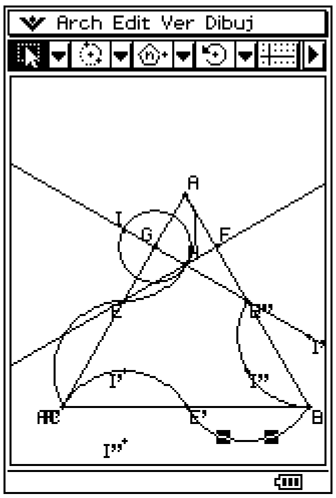


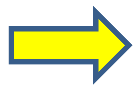
Repetimos la operación con la opción de rotación  pero ahora con el arco de referencia A’,E’, como punto de rotación E’ y con un ángulo de rotación de 180°.

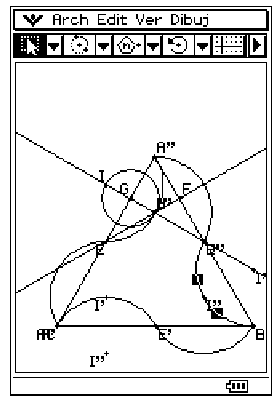


Un trazo mas con la opción de rotación  pero ahora con el arco de referencia B,E’, como punto de rotación B y con un ángulo de rotación de -60º.

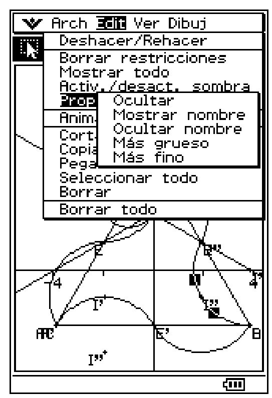
Y finalmente con la opción de rotación  pero ahora con el arco de referencia B,B’’, como punto de rotación B’’ y con un ángulo de rotación de 180º.





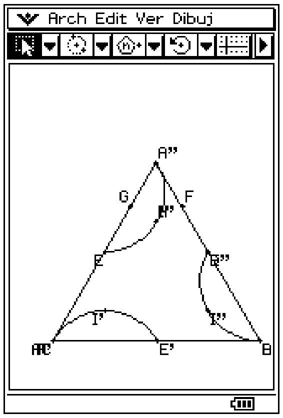


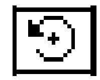
Ocultaremos todos los puntos que estan fuera del triangulo equilatero que construimos inicialmente incluyendo el circulo con radio H y las líneas infinitas E-F, D-G para esto seleccionamos los puntos un a uno y una vez selecionados nos vamos al menu Editar, Propiedades Ocultar.



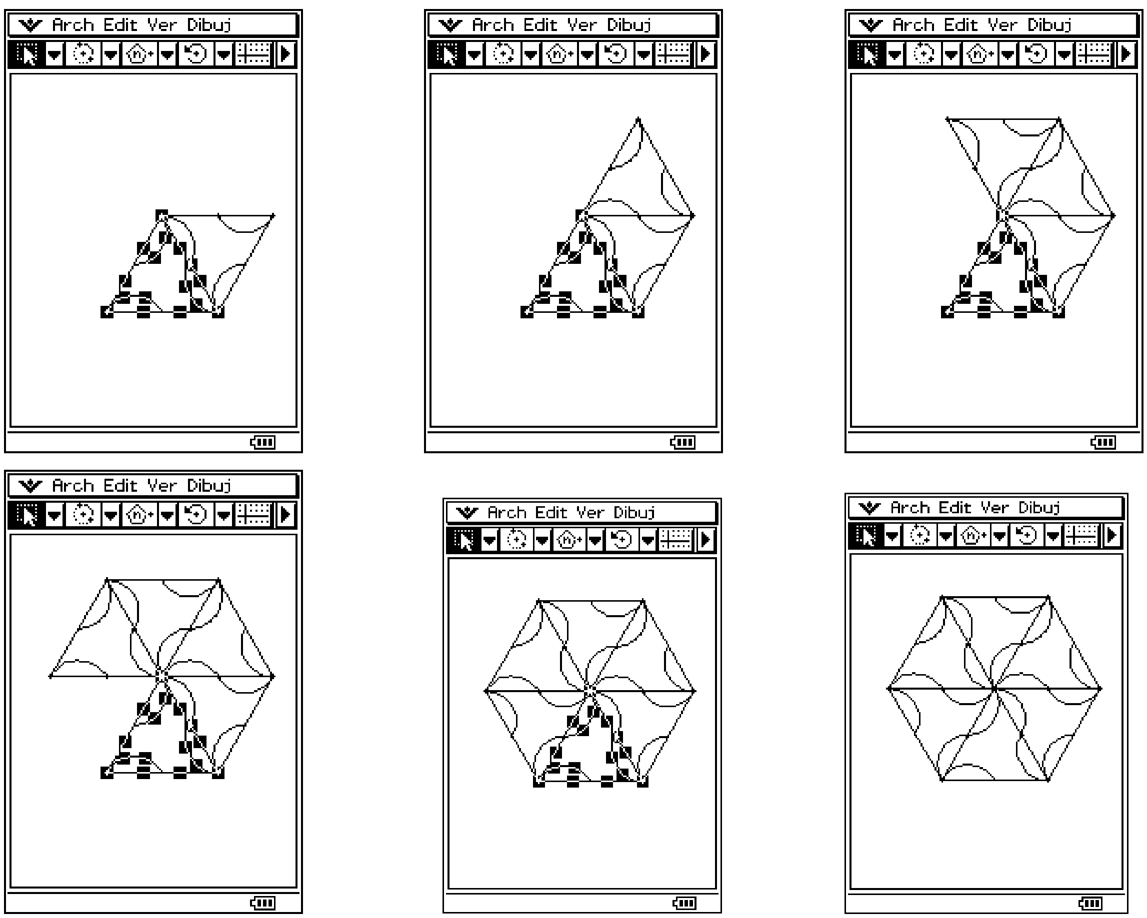
Completemos la Pajarita de Nazari

Tenemos la siguiente figura como resultado de ocultar los puntos mencionados:

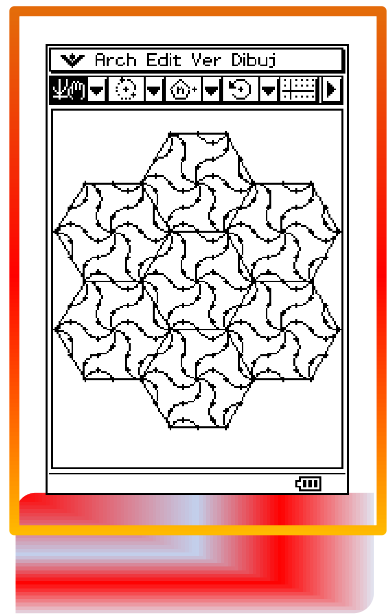


A continuación seleccionamos todos los puntos y hacemos tres rotaciones independientes  con tomando como punto de rotación al punto A con los ángulos de rotación 60^0, 120^0, 180^0, 240^0, 300^0.

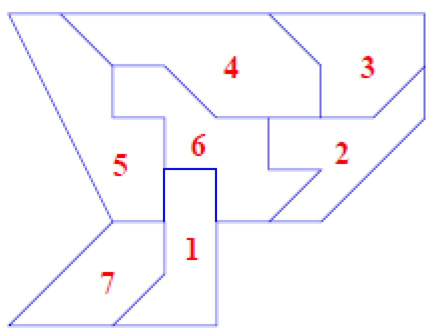
Quedando la secuencia de trazos de la siguiente manera:

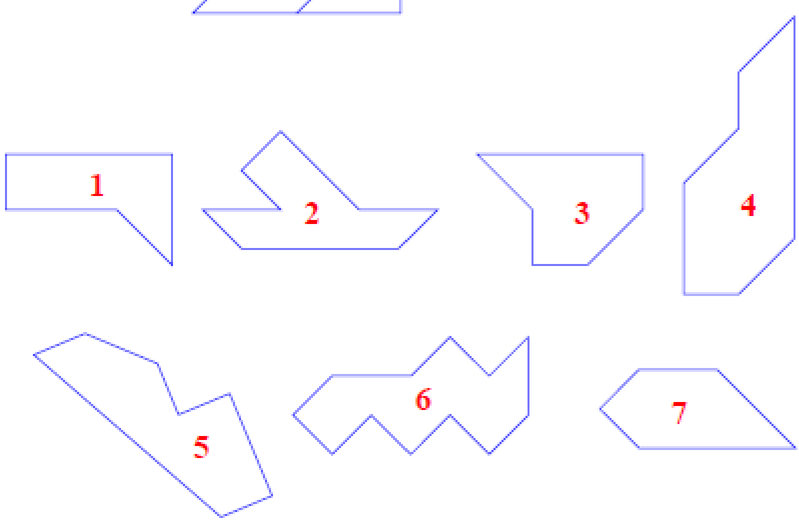


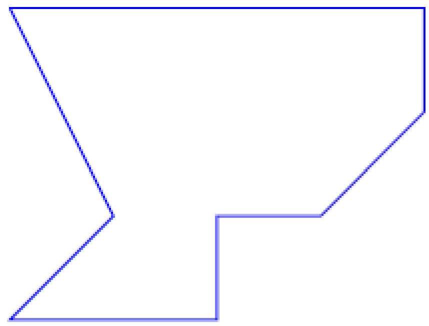
Como practica adicional obtén la siguiente figura y presenta al profesor tus resultados.

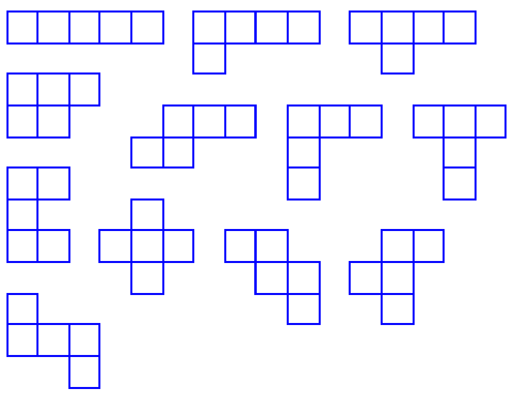


Materiales requeridos para llevar a cabo las preguntas 4 y 5 en esta propuesta.









Los 12 pentominós teselan un tablero de 3x20 o dos de 5x6