



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
CAMPUS I

UNA PRUEBA DEL TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN
MEDIANTE LA TEORÍA DE RUNGE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

FABIOLA ALEGRÍA HERNÁNDEZ. X150002

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RUSSELL AARÓN QUIÑONES ESTRELLA

Co-DIRECTOR DE TESIS:

DR. ELI VANNEY ROBLERO MÉNDEZ



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; Agosto de 2025

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
26 de Junio de 2025
Oficio No. FCFM/0387/25

Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella
Director de tesis.
Profesor de tiempo completo
De la facultad de ciencias en física y matemáticas Unach.
p r e s e n t e

Estimado Dr. Russell

Por este medio me permito informarle que, una vez efectuada la revisión de la tesis de nominada:

"Una prueba del teorema del mapeo de Riemann mediante la teoría de Runge"

Ha sido aceptada para sustentar el examen de grado de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la
Lic. Fabiola Alegría Hernández con matrícula escolar X150002.

Por lo tanto, se Autoriza la Impresión de la tesis en virtud de haber cumplido con los requisitos correspondientes.

Sin más por el momento quedo de Usted, enviándole un cordial saludo.

Atentamente
"Por la conciencia de la necesidad de servir"



DIRECCIÓN
FCFM

Dr. Orlando Díaz Hernández
Director

C. c. p. Dra. María del Rosario Soler Zapata, Secretaria Académica de la FCFM
Dr. Javier Sánchez Martínez.- Coordinador del Posgrado en Ciencias Matemáticas.
Mtro. René Solís López.-, Encargado del Control Escolar Posgrado de la FCFM
Archivo.

Oficio FCFM/CIP/005/2025

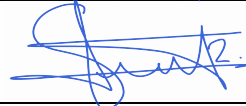
A quién corresponda

El que suscribe, Comité de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas de la universidad autónoma de Chiapas, hace constar que mediante minuta de fecha 30 de julio del 2025 de los integrantes del NAB de la Maestría en Ciencias Matemáticas, que el **Dr. Eli Vanney Roblero Méndez** de la Universidad de Guadalajara, fue autorizado para ser Co-director de la estudiante **Lic. Fabiola Alegría Hernández**.

Sin más por el momento, reciba un afectuoso saludo.

ATENTAMENTE

“Por la conciencia de la necesidad de servir”

Grado académico y nombre completo	Cargo en el CIP	Firma
Dr. Orlando Díaz Hernández	Presidente	
Dr. Ariel Flores Rosas	Secretario	
Dr. Roberto Arceo Reyes	Representante de los Cuerpos Académicos	
Dr. Víctor Iván Ruiz Pérez	Vocal titular del Consejo Consultivo de Investigación y Posgrado	
Dr. Armando Mendoza Pérez	Representante de los Núcleos Académicos de los Programas de Posgrado	
Dr. Javier Sánchez Martínez	Representante de las profesoras y los profesores con reconocimiento vigente en el ámbito de la investigación científica, tecnológica, humanística y de innovación.	
Lic. Jesús Erick Pérez Pérez	Representación estudiantil de la Maestría en Ciencias Físicas	

Revisión: 0

Agradecimientos

Le doy gracias, como siempre, a mi madre y hermano quienes siempre me han apoyado y brindado ánimos, a mi difunto padre, que a pesar de que no logró ver este trabajo concluido, sé que estaría feliz de verme completar un logro académico más.

Agradezco al Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella, quien amablemente acepto ser director de esta tesis, le agradezco mucho todos los conocimientos, la paciencia y consejos que me brindó para concluir este trabajo, sus explicaciones y clases fueron clave para presentar un trabajo de calidad.

Al Dr. Eli Vanney Roblero Méndez, quien fue mi asesor de tesis en licenciatura, trabajo que me motivo a realizar el presente, le agradezco por continuar como co-director de esta tesis.

Agradezco a los profesores: Dr. Florencio Corona Vázquez, Dr. José Antonio Martínez Cortéz y Dr. Javier Sánchez Martínez, por tomarse el tiempo de leer este trabajo así como también por los comentarios realizados para que el resultado final fuese mucho mejor.

Agradezco a los profesores con quienes tuve el gusto de tomar clases durante la maestría y, en general, a todos los profesores de la facultad que siempre estuvieron con total disposición para brindarme apoyo así como también consejos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico que me brindaron para realizar esta maestría.

Finalmente, pero no menos importante, agradezco a Irving Harim Hernández Méndez por estar presente con su apoyo incondicional, su ánimo constante y su calidez en cada etapa de este proceso.

Espero que este trabajo refleje un poco de todo el agradecimiento que tengo a las personas mencionadas y aquellas, que por falta de espacio, no es posible mencionar en estas líneas.

Introducción

En este trabajo se asume que el lector está familiarizado con análisis complejo, topología, variedades diferenciables y álgebra, ya que se utilizan herramientas como espacios segundo numerables, formas diferenciales, entre otras propias de dichas áreas y que no se definen aquí.

Las superficies de Riemann fueron definidas en 1851 por el matemático alemán Bernhard Riemann en su tesis de doctorado. Tuvieron que pasar años para que la idea de Riemann fuese desarrollada y modernizada, actualmente las superficies de Riemann tienen presencia en distintas áreas como geometría algebraica, geometría compleja y teoría de potencial.

El teorema del mapeo de Riemann establece que toda superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfa al disco unitario, al plano complejo o a la esfera de Riemann. A pesar de que el enunciado es fácil de recordar, sus pruebas pueden requerir de conocimiento en distintas áreas. La primera demostración fue realizada de manera independiente por Koebe y Poincaré en 1907, seguido de esto se han dado muchas otras pruebas que utilizan distintas herramientas, por ejemplo, funciones armónicas e integrales de Dirichlet y triangulación de superficies de Riemann.

La prueba que aquí se presenta está basada en análisis complejo, teoría de cubrientes y algo de topología. El primer capítulo está dedicado a introducir las superficies de Riemann, las funciones holomorfas, biholomorfas, meromorfas, entre otras, así como también ejemplos de estas superficies; pasamos después a dar conceptos topológicos necesarios para la teoría y se finaliza con el cubriente universal.

En el capítulo dos nos adentramos en la teoría de gavillas para presentar el grupo de cohomología de Čech y su relación con el grupo de DeRham, se presentan también las k -formas para $k = 1, 2$ en superficies de Riemann así como también el concepto de integración.

En el tercer capítulo se trabaja el problema de Dirichlet en superficies de Riemann y se da la solución mediante el método de Oskar Perron, posteriormente, se introducen los conjuntos Runge cuyas fronteras tienen propiedades específicas.

Finalmente, en el capítulo cuatro se da la demostración basada en conjuntos Runge.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	II
1 Superficies de Riemann	1
1.1 Funciones entre superficies de Riemann	6
1.2 Propiedades de funciones holomorfas entre superficies de Riemann	8
1.3 Sobre cubrientes.	14
1.4 El cubriente universal	21
2 Cohomología de Čech y grupo de DeRham	25
2.1 Pregavillas y gavillas	25
2.2 Formas complejas	32
2.2.1 Derivación exterior de formas	35
2.2.2 Integración de 1-formas	39
2.2.3 Períodos y sumandos de automorfía	43
2.2.4 Integración de 2-formas	47
2.3 Grupo de DeRham	50
2.3.1 Grupo de cohomología de Čech	50
2.3.2 Sucesiones exactas	57
3 Problema de Dirichlet y teoría Runge	62
3.1 Formas armónicas	62
3.2 Problema de Dirichlet en superficies de Riemann	70
3.3 Conjuntos Runge	82

4 El teorema del mapeo de Riemann	89
4.1 Preliminares	89
4.2 Teorema principal	93
A Otros resultados necesarios para enunciar el mapeo de Riemann	98
B Inversión respecto a un círculo y principio de reflexión de Schwarz.	102
Conclusión	105
Bibliografía	106

Capítulo 1

Superficies de Riemann

En este capítulo se dan los preliminares para poder presentar la definición de una superficie de Riemann y algunos ejemplos de estas. Para más información sobre el tema se pueden consultar [1], [3], y [17].

Definición 1.0.1. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y segundo numerable.

1) Una **carta compleja** en X es un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V$ de un abierto $U \subset X$ sobre un abierto $V \subset \mathbb{C}$. Dos cartas complejas $\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i$, $i = 1, 2$ se dice que son **holomórficamente compatibles** si la función

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

es biholomorfa en el sentido usual.

2) Un **atlas complejo** en X (también llamado **atlas holomorfo** en X) es una colección $\mathcal{U} = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i\}_{i \in I}$ de cartas complejas en X que son holomórficamente compatibles y que además cubren a X , es decir, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Dos atlas holomorfos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ en X son llamados **analíticamente equivalentes** si cada carta de $\mathcal{U}$ es compatible con cada carta de $\mathcal{U}'$.

La demostración de la siguiente proposición es rutinaria por lo tanto será omitida.

Proposición 1.0.2. La relación anterior para atlas holomorfos es una relación de equivalencia.

A una clase de equivalencia se le llama una **estructura compleja** para la variedad bidimensional X , y se denota como Σ .

Definición 1.0.3. Una **superficie de Riemann** es un par (X, Σ) , donde X es una variedad bidimensional conexa y Σ es una estructura compleja en X .

En adelante solo escribiremos X en lugar de (X, Σ) para denotar a una superficie de Riemann, quedando implícito que X tiene una estructura compleja.

A continuación presentaremos algunos ejemplos de superficies de Riemann, en lo que sigue $\mathbb{C}^\times$ denotará al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 1.0.4. El plano complejo $\mathbb{C}$.

Su estructura compleja está definida por el atlas cuya única carta es la función identidad.

Ejemplo 1.0.5. El espacio proyectivo complejo de dimensión 1, denotado por $\mathbb{CP}^1$.

Este espacio está dado por

$$\mathbb{CP}^1 := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \sim,$$

donde la relación de equivalencia es $(z_1, w_1) \sim (z_2, w_2)$ si y solo si $z_2 = \lambda z_1$, $w_2 = \lambda w_1$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, las clases de equivalencia son denotadas por $[z : w]$. Para las cartas (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) se define lo siguiente:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{[z : w] \in \mathbb{CP}^1 : w \neq 0\}, & \phi_1([z : w]) &= \frac{z}{w}, \\ U_2 &:= \{[z : w] \in \mathbb{CP}^1 : z \neq 0\}, & \phi_2([z : w]) &= \frac{w}{z}, \end{aligned}$$

aquí, la función de transición $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ está dada por $z \mapsto \frac{1}{z}$, la cual es biholomorfa.

Ejemplo 1.0.6. El conjunto $X := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = \operatorname{sen}(z)\}$ es una superficie de Riemann.

Comencemos considerando para cada $n \in \mathbb{Z}$ al conjunto B_n de $\mathbb{C}$ que es la banda infinita descrita por $\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi < \operatorname{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2} + n\pi$, se sabe que la imagen de esta banda infinita bajo la función seno es el plano complejo, tal como se muestra en la figura 1.1, para una demostración de esto se pueden consultar las páginas 48 a 52 de [2], o bien, en el ejemplo 1 de la sección 89 de [18]. Observe además que si consideramos las bandas infinitas A_n de $\mathbb{C}$ descritas por $\frac{n\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \pi + \frac{n\pi}{2}$ la imagen de estos abiertos bajo la función seno es el plano complejo.

Ahora bien, para ver que X es una superficie de Riemann, primero observemos que X es un subconjunto de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y como $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable, X también lo es.

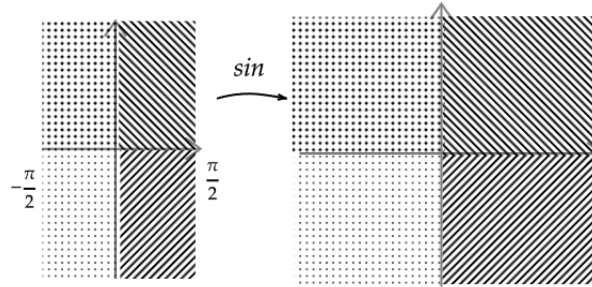


Figura 1.1: Conjunto B_0 y su imagen bajo la función seno.

Por otro lado, consideremos la función continua $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dada por $z \mapsto (z, \sin z)$. Notemos que $g(\mathbb{C}) = X$ y por ser $\mathbb{C}$ conexo se sigue que X es conexo.

Ahora bien, solo resta dar un atlas holomorfo para X , con este objetivo consideremos la función proyección en X sobre la primera coordenada restringida a A_n , denotémosla como $\pi_1|_{A_n}$, y consideremos $\varphi_{A_n} = \sin \circ (\pi_1|_{A_n})$. Note que $\varphi_{A_n} : A_n \longrightarrow U_n \subset \mathbb{C}$, donde $U_n = \sin(A_n)$, tenemos entonces una colección $\mathcal{U} = \{\varphi_{A_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, la cual es un atlas holomorfo para X , ya que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \times U_n = X$, además cada φ_{A_n} es continua, y su inversa también ya que la función seno envía de manera biyectiva la imagen de las bandas A_n al plano complejo. Todo lo anterior nos dice que φ_{U_n} es un biholomorfismo para toda n .

Finalmente resta verificar que las cartas son holomórficamente compatibles, para ello observe que las intersecciones de los A_n son bandas infinitas de longitud $\frac{\pi}{2}$ en las cuales la función seno sigue siendo holomorfa.

Concluimos que el conjunto X es, en efecto, una superficie de Riemann.

Ejemplo 1.0.7. La esfera de Riemann $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

La topología está formada por conjuntos abiertos usuales $U \subset \mathbb{C}$ y aquellos de la forma $V \cup \{\infty\}$, donde $V \subset \mathbb{C}$ es el complemento de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Con lo anterior, es rutinario verificar que $\mathbb{P}^1$ es un espacio Hausdorff y compacto que además es homeomorfo a S^2 . Consideremos

$$U_1 := \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C},$$

$$U_2 := \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}.$$

Definamos $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, pongamos que φ_1 es la función identidad y

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{C}^\times \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}.$$

Notemos que ambas funciones son homeomorfismos. Además, la inversa de φ_2 es la siguiente:

$$\varphi_2^{-1}(z) = \begin{cases} \infty & \text{si } z = 0 \\ \frac{1}{z} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}.$$

Notemos que $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^\times$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ con $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$, la cual es holomorfa. Con lo anterior, tenemos un atlas holomorfo para $\mathbb{P}^1$, y en consecuencia es una variedad bidimensional, además como U_1 y U_2 son conexos con intersección no vacía se sigue que $\mathbb{P}^1$ es también conexa.

Consideremos el atlas $\mathcal{U} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ y observemos que las cartas de dicho atlas son holomórficamente compatibles ya que $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^\times$ y la función $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ dada por $z \mapsto \frac{1}{z}$ es biholomorfa. Lo anterior nos da una estructura compleja para $\mathbb{P}^1$ con lo cual concluimos que es una superficie de Riemann.

Ejemplo 1.0.8. Cualquier dominio D (esto es, un subconjunto abierto, conexo y no vacío) de una superficie de Riemann X es también una superficie de Riemann. Para obtener una estructura compleja sobre D se procede como sigue: para cada $\varphi : V \longrightarrow V'$ carta de X , se consideran las funciones $\phi_V : U \longrightarrow U'$, donde $U = V \cap D$ y $U' = \varphi(U)$, la colección de estas cartas da como resultado una estructura compleja para D .

De lo anterior se obtiene que los dominios $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ también son superficies de Riemann.

Ejemplo 1.0.9. El toro complejo.

Sean ω_1 y ω_2 dos números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Defina

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\},$$

Γ es llamada un **retículo** generado por ω_1 y ω_2 , véase la figura 1.2.

Dos complejos $z, z' \in \mathbb{C}$ son equivalentes módulo Γ si $z - z' \in \Gamma$, el conjunto de clases es el toro complejo y se denotará como $T_\Gamma := \mathbb{C}/\Gamma$, con la topología cociente este espacio es:

- Hausdorff: Para demostrar esto usaremos el siguiente resultado sobre el toro complejo, omitiremos

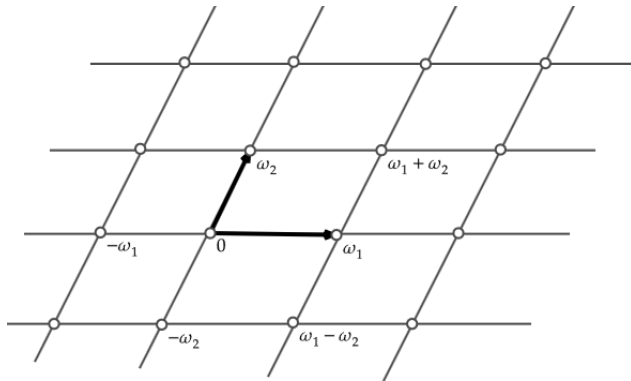


Figura 1.2: Los puntos blancos son elementos del retículo generado por ω_1 y ω_2 .

su demostración pero se puede consultar en la página 70 de [4]. Si ζ y z son dos puntos en $\mathbb{C}$ que no son equivalentes módulo $\sim_\Gamma$ entonces ζ está a una distancia positiva de $[z]_\Gamma$.

Por otro lado, sean z y w dos puntos en $\mathbb{C}$ tales que $[z]_\Gamma \neq [w]_\Gamma$, afirmamos que estos conjuntos están a una distancia positiva. Procediendo por contradicción, supongamos que existen $z'_j \sim_\Gamma z$ y $w'_j \sim_\Gamma w$ tales que $|w'_j - z'_j| \rightarrow 0$. Tenemos así que $z'_j = z + \gamma_j$ para algún $\gamma_j \in \Gamma$. Se tiene entonces que $w_j - \gamma_j$ es una sucesión de puntos en $[w]_\Gamma$ que converge al punto z , sin embargo, esto contradice que $[w]_\Gamma$ esté a una distancia positiva de z .

Con lo anterior, notemos que podemos considerar vecindades disjuntas de $[z]_\Gamma$ y $[w]_\Gamma$, con lo cual se sigue que el toro es Hausdorff.

- Segundo numerable: tenemos que la proyección canónica $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ es abierta, en efecto, si $V \subset \mathbb{C}$ es abierto entonces $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in \Gamma} (\omega + V)$ y como cada conjunto $\omega + V$ es abierto, la unión anterior también lo es. Como π es abierta y $\mathbb{C}$ es segundo numerable, el cociente $\mathbb{C}/\Gamma$ también lo es. En efecto, si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una base numerable para la topología de $\mathbb{C}$ entonces $\{\pi(U_i)\}_{i \in I}$ es una colección numerable de conjuntos abiertos para la topología de $\mathbb{C}/\Gamma$.
- Conexo: como $\mathbb{C}$ es conexo, $\mathbb{C}/\Gamma = \pi(\mathbb{C})$ también lo es.

Para las cartas, consideremos $V \subset \mathbb{C}$ abierto tal que no hay dos elementos de V equivalentes bajo Γ . Tenemos $U := \pi(V)$ es abierto y la proyección canónica $\pi| : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Observemos que su inversa $\varphi_V : U \rightarrow V$ es una carta compleja en $\mathbb{C}/\Gamma$.

Considerando la colección $\mathcal{U}$ de cartas φ_V tales que V es un abierto de $\mathbb{C}$ tal como los que se describieron en el párrafo anterior, se tiene entonces que el toro complejo es una superficie de Riemann.

1.1. Funciones entre superficies de Riemann

Una vez dada la definición de una superficie de Riemann, así como también algunos ejemplos, se pueden dar las definiciones de funciones entre ellas y resultados importantes sobre estas funciones.

Definición 1.1.1. Sean X y Y superficies de Riemann. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es llamada **holomorfa**, si para cada par de cartas $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X y $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en Y con $f(U_1) \subset U_2$, la función

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2,$$

es holomorfa en el sentido usual. Una función es llamada **biholomorfa** si es biyectiva y tanto ella como su inversa son holomorfas.

Al conjunto de funciones holomorfas en Y se le denota por $\mathcal{O}(Y)$.

Notación 1.1.2. Para $r \in (0, \infty]$ usaremos las siguientes notaciones,

1. Para $r \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, denotaremos $D_0(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$.
2. Para $r = 1$, se tiene el disco unitario centrado en el origen, el cuál será denotado por $\mathbb{E}$.
3. Para $r = \infty$, se define $D_0(\infty)$ como el plano complejo $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.1.3. La función de **Cayley** $c : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{E}$ dada por

$$c(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

es un biholomorfismo entre $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{E}$. En ocasiones también se le llama **transformación de Cayley** y es útil dentro de la geometría hiperbólica (véase apéndice B).

Tenemos que $|c(z)| = \frac{|z - i|}{|z + i|}$, geométricamente se puede observar que como z está en el semiplano superior se cumple que $|z - i| < |z - (-i)|$, de donde $|c(z)| < 1$, por lo tanto $c(z) \in \mathbb{E}$, esto nos dice que la función de Cayley está bien definida, más aún, el único punto donde no está definida es $z = -i$ y como este no se encuentra en el semiplano superior, c es holomorfa en todo $\mathbb{H}^2$.

Por otro lado, su inversa está dada por $b(z) = i \frac{1+z}{1-z}$, mediante un cálculo directo se puede verificar que si z se encuentra en el disco unitario entonces $\text{Im}(b(z)) > 0$ y además $c \circ b = \text{Id} = b \circ c$. Finalmente, podemos observar que la función b es holomorfa en $\mathbb{E}$ ya que el único punto donde no está bien definida es $z = 1$, el cual no se encuentra en $\mathbb{E}$.

A continuación retomamos algunas de las propiedades que tiene el toro complejo.

Proposición 1.1.4. Sean Γ y Γ' dos retículos en $\mathbb{C}$, si existe $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$ entonces la función $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $z \mapsto \alpha z$, induce una función holomorfa entre los toros T_Γ y $T_{\Gamma'}$.

Demostración.

Sea $\psi : T_\Gamma \rightarrow T_{\Gamma'}$ dada por $[z]_\Gamma \mapsto [\alpha z]_{\Gamma'}$. Veamos que esta función está bien definida.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $[z_1]_\Gamma = [z_2]_\Gamma$ esto implica que $[z_1 - z_2]_\Gamma = [0]_\Gamma$ entonces $z_1 - z_2 \in \Gamma$, así $\alpha(z_1 - z_2) \in \alpha\Gamma$ y dado que $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$ se sigue que $[\alpha(z_1 - z_2)]_{\Gamma'} = [0]_{\Gamma'}$, luego $[\alpha z_1]_{\Gamma'} - [\alpha z_2]_{\Gamma'} = [0]_{\Gamma'}$ y finalmente se obtiene que $[\alpha z_1]_{\Gamma'} = [\alpha z_2]_{\Gamma'}$.

Recordemos que $\mathbb{C}/\Gamma$ y $\mathbb{C}/\Gamma'$ tienen estructura de grupo (ya que Γ, Γ' son subgrupos normales de $\mathbb{C}$), entonces debemos verificar que ψ es un morfismo de grupos, lo cual se obtiene fácilmente. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\psi([z_1 + z_2]_\Gamma) = [\alpha(z_1 + z_2)]_{\Gamma'} = [\alpha z_1]_{\Gamma'} + [\alpha z_2]_{\Gamma'} = \psi([z_1]_\Gamma) + \psi([z_2]_\Gamma).$$

Por otro lado, sean (φ_V, V) $(\varphi_{V'}, V')$ cartas de $\mathbb{C}/\Gamma$ y $\mathbb{C}/\Gamma'$ respectivamente (recuerde que en el ejemplo 1.0.9 se construyeron las cartas como la inversa de la proyección canónica sobre el toro) entonces el diagrama de la figura 1.3 conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \\ \varphi_V \uparrow & \searrow & \uparrow \varphi_{V'} \\ \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}/\Gamma' \end{array}$$

Figura 1.3: Morfismo entre toros complejos.

Por lo tanto, $\varphi_{V'} \circ \psi \circ \varphi_V^{-1} = \varphi$ y así $\psi = \varphi_{V'}^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_V$, de donde se observa que ψ es holomorfa. ■

En la siguiente sección se presentarán más propiedades sobre el toro complejo.

Definición 1.1.5. Sea X una superficie de Riemann y Y un subconjunto abierto de X . Se dice que una función holomorfa $f : Y' \rightarrow \mathbb{C}$ es **meromorfa en Y** , donde $Y' \subset Y$ es un conjunto abierto, si se satisface lo siguiente:

1) $Y \setminus Y'$ solo contiene puntos aislados.

2) Para cada $p \in Y \setminus Y'$ se satisface $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$.

A los puntos de $Y \setminus Y'$ se les llama **polos de f** . El conjunto de todas las funciones meromorfas en Y lo denotaremos por $\mathcal{M}(Y)$.

Ejemplo 1.1.6. Sea $n \geq 1$ y sea $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$, con $c_k \in \mathbb{C}$. Se tiene que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa. Si pensamos a $\mathbb{C}$ como subconjunto de $\mathbb{P}^1$ tenemos que $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, se concluye que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$.

Algunos resultados conocidos de variable compleja en se conservan en superficies de Riemann, las demostraciones se basan en llevar el problema al plano complejo mediante cartas y ahí usar los resultados conocidos. A continuación enunciamos algunos, las demostraciones se pueden consultar en el capítulo 1 de [3] o en el capítulo 2 de [13].

Teorema 1.1.7 (de la singularidad removible de Riemann). Sea U un conjunto abierto en una superficie de Riemann y un punto a en U . Supongamos que la función $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ es acotada en una vecindad de a . Con lo anterior, f se puede extender de manera única a una función $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$.

Teorema 1.1.8 (de la identidad). Sean X y Y superficies de Riemann y $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ dos funciones holomorfas que coinciden en un conjunto $A \subset X$ teniendo un punto límite $a \in X$, se concluye entonces que f_1 y f_2 son iguales.

1.2. Propiedades de funciones holomorfas entre superficies de Riemann

A continuación se presentan algunas de las características que poseen las funciones holomorfas entre superficies de Riemann. En los resultados que siguen las funciones serán consideradas como no-constantes

a menos que se indique lo contrario.

Teorema 1.2.1 (Comportamiento local de funciones holomorfas). *Sean X y Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa. Sea $a \in X$ y $b := f(a)$. Tenemos que existe un entero $k \geq 1$ y cartas $\varphi : U \rightarrow V$ en X y $\psi : U' \rightarrow V'$ en Y con las siguientes propiedades:*

$$1) \ a \in U, \ \varphi(a) = 0; \ b \in U', \ \psi(b) = 0.$$

$$2) \ f(U) \subset U'.$$

$$3) \ \text{La función } F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V' \text{ está dada por } F(z) = z^k, \quad \text{para cada } z \in V.$$

Demostración.

Como Y es una superficie de Riemann, existe una carta (ψ, U') alrededor de b . Dado que f es continua, existe un abierto W con $a \in W$ y $f(W) \subset U'$.

Consideremos una carta (φ_1, U_1) alrededor de a y definamos $U := W \cap U_1$ y $\varphi := \varphi_1|_U$. Observe que además, si $\varphi_1(a)$ es distinto de cero, mediante una traslación de $\mathbb{C}$ podemos obtener que $\varphi_1(a) = 0$, reemplazando (φ_1, U_1) por (φ, U) tenemos cartas (U, φ) y (U', ψ) que satisfacen las propiedades 1) y 2).

Por otro lado, como f es no constante, por el teorema de la identidad (teorema 1.1.8), f es no constante en un abierto contenido en U , como φ es sobreyectiva desde U a V , la función $f \circ \varphi^{-1}$ es no constante en un abierto contenido en V y como $f \circ \varphi^{-1}(V_1) \subset U'$ y ψ es inyectiva en U' se sigue que la función

$$f_1 := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V_1 \rightarrow V' \subset \mathbb{C},$$

es no constante en V_1 . Notemos que $f(0) = 0$, es decir, un cero para la función holomorfa f_1 , con lo cual existe $k \geq 1$ tal que $f_1(z) = z^k g(z)$, donde g es una función holomorfa en V_1 con $g(0) \neq 0$. Se sigue que g no se anula en un disco que contiene al cero, y por lo tanto, la función logaritmo compleja está bien definida, se define entonces la función $h(z) = e^{\log(g(z))/k}$, con z en un disco que contiene al cero. Con lo anterior se tiene que $h^k = g$.

Por lo tanto, existe una vecindad de cero y una función holomorfa h en esta misma vecindad tal que $h^k = g$.

Notemos que la función $\alpha : V_2 \rightarrow V$ dada por $z \mapsto \alpha(z) = zh(z)$ es biholomorfa de $V_2 \subset V_1$ sobre V , donde V_2 es una vecindad de cero. Tomemos $U := \varphi_1^{-1}(V_2)$, reemplazando la carta $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ por la

carta $\varphi : U \longrightarrow V$ donde $\varphi = \alpha \circ \varphi_1$.

Por construcción, la función $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ satisface que $F(z) = z^k$. ■

Al número k del teorema 1.2.1 se le llama **multiplicidad** con la que la función f toma el valor de b en el punto a o simplemente se dice que f tiene **multiplicidad** k en el punto a , esto lo denotamos por $\text{mult}_a(f) = k$.

El siguiente corolario se obtiene aplicando el teorema 1.2.1.

Corolario 1.2.2. *Si X y Y son superficies de Riemann y $f : X \longrightarrow Y$ es una función holomorfa entonces se satisfacen lo siguientes resultados:*

- 1) f es abierta.
- 2) Si f es inyectiva entonces f es biholomorfa de X sobre $f(X)$.

Demostración.

- 1) Si tomamos una vecindad U de $a \in X$, del teorema 1.2.1 se sigue que la imagen de U bajo f es también una vecindad de $f(a)$, lo cual implica que f es abierta.
- 2) Dado que f es inyectiva, el valor de k en el teorema 1.2.1 es igual a 1 para todo $a \in X$, se tiene así que $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ es holomorfa, ya que está dada por la identidad. ■

El siguiente resultado es conocido en el plano complejo, y a continuación veremos que también es válido en superficies de Riemann.

Teorema 1.2.3 (Principio del módulo máximo). *Si X es una superficie de Riemann y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante entonces el valor absoluto de f no alcanza su máximo.*

Demostración.

Supongamos que existe un punto $a \in X$ tal que $R := |f(a)| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ entonces $f(x) \in K := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Como $f(X)$ es abierto $f(a)$ se encuentra en el interior de K , esto contradice la hipótesis de que $f(a) \in \partial K$, donde ∂K denota la frontera del conjunto K . ■

Como aplicación del teorema del módulo máximo tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2.4. *Sean X una superficie de Riemann y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante, se tiene que $\operatorname{Re}(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sin máximo.*

Demostración.

Por contradicción, supongamos que $\operatorname{Re}(f)$ tiene un máximo en un punto z_0 .

Definamos $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) := e^{f(z)}$, la cual es una función holomorfa. Observe que si $f = u + iv$, entonces

$$|e^f| = |e^{u+iv}| = |e^u| = e^{\operatorname{Re}(f)},$$

por lo tanto $|g(z)| = e^{\operatorname{Re}(f)}$.

Por la hipótesis hecha tenemos que para todo $z \in X$, $\operatorname{Re}(f(z)) \leq \operatorname{Re}(f(z_0))$ y así $|g(z)| = e^{\operatorname{Re}(f(z))} \leq e^{\operatorname{Re}(f(z_0))} = |g(z_0)|$, por lo tanto $|g(z)|$ alcanza su máximo en z_0 . Luego, por el principio del módulo máximo se tiene que g es una función constante, por lo tanto f también debe ser constante, lo cual es una contradicción. ■

Teorema 1.2.5. *Sean X y Y superficies de Riemann con X compacto y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante. Se tiene que Y es compacto y además f es sobreyectiva.*

Demostración.

Observe que el conjunto $f(X) \subset Y$ es compacto, en particular cerrado, y por 1) del corolario 1.2.2, es también abierto. Como Y es conexo (por ser una superficie de Riemann), se sigue que $f(X) = Y$, con lo cual se tiene lo deseado. ■

Como consecuencia del teorema 1.2.5 y recordando que $\mathbb{C}$ no es compacto, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.6. *Toda función holomorfa en una superficie de Riemann compacta es constante.*

Otro teorema importante es el teorema de Liouville cuya prueba se obtiene usando el teorema de la singularidad removible de Riemann (teorema 1.1.7) y el corolario anterior.

Teorema 1.2.7 (de Liouville). *Toda función holomorfa y acotada $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es constante.*

Para finalizar esta sección, utilizaremos el teorema 1.2.5 para demostrar otras propiedades del toro complejo.

Proposición 1.2.8. *Para $\tau \in \mathbb{H}^2$ denotemos por $X(\tau)$ al toro correspondiente al retículo generado por la $\mathbb{R}$ -base $\{1, \tau\}$, entonces todo toro T_Γ es biholomorfo a uno de la forma $X(\tau)$.*

Demostración.

Sea $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$, con $w_1 = a + ib$ y $w_2 = u + iv$, tenemos así que

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{(a + ib)(u - iv)}{u^2 + v^2},$$

entonces

$$\operatorname{Im} \left(\frac{w_1}{w_2} \right) = \frac{bu - av}{u^2 + v^2},$$

por la tricotomía de los números reales debe ocurrir un solo caso de los siguientes:

$$1) \quad bu - av > 0,$$

$$2) \quad av - bu > 0,$$

$$3) \quad av - bu = 0.$$

Observemos que 3) no puede ocurrir, ya que si $av - bu = 0$ entonces $\frac{w_1}{w_2}$ no tiene parte imaginaria, es decir, es algún número real $x = \frac{w_1}{w_2}$ lo cual implica que $w_1 = xw_2$, sin embargo esto es una contradicción a la independencia lineal de w_1 y w_2 . Por lo tanto solo puede ocurrir 1) o 2), supongamos, sin pérdida de generalidad, que $bu - av > 0$, en caso contrario solo cambiamos el cociente por $\frac{w_2}{w_1}$.

Tenemos que $\tau := \frac{w_1}{w_2}$ se encuentra en el semiplano superior, además se cumple la igualdad

$$\mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = w_2(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}),$$

en efecto,

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 &\Leftrightarrow x = nw_1 + mw_2, \quad n, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = w_2 \left(n \frac{w_1}{w_2} + m \right) \\ &\Leftrightarrow x = w_2(n\tau + m) \Leftrightarrow x \in w_2(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Denotemos por $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ y $\Gamma' = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, de lo anterior, en particular, tenemos que $w_2\Gamma' \subset \Gamma$, entonces por la proposición 1.1.4 la multiplicación por $w_2 \in \mathbb{C}^\times$ induce una función holomorfa (que además es morfismo de grupos) $\psi : X(\tau') \rightarrow X(\tau)$, observe que esta función es no constante y además $X(\tau')$ es compacto, así que por el teorema 1.2.5 se sigue que ψ es sobreyectiva.

Por otro lado, sea $[z]_{\Gamma'} \in \ker \psi$, se tiene lo siguiente,

$$[z]_{\Gamma'} \in \ker \psi \Leftrightarrow \psi([z]_{\Gamma'}) = [0]_{\Gamma} \Leftrightarrow w_2 z \in \Gamma \Leftrightarrow z \in w_2^{-1} \Gamma \Leftrightarrow z \in \Gamma',$$

de esta forma $\ker \psi = \Gamma'$ y así ψ es inyectiva.

Con lo anterior concluimos que ψ es un biholomorfismo. ■

Proposición 1.2.9. Si $\tau \in \mathbb{H}^2$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ y se considera $\tau' := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ entonces $\tau' \in \mathbb{H}^2$ y $X(\tau)$ es biholomorfo a $X(\tau')$.

Demostración.

Sea $\tau = u + iv$ con $v > 0$, tenemos que

$$\tau' = \frac{a(u + iv) + b}{c(u + iv) + d} = \frac{(au + b) + aiv}{(cu + d) + cvi} \cdot \frac{(cu + d) - cvi}{(cu + d) - cvi},$$

luego

$$Im(\tau') = \frac{acuv + adv - acuv - bcv}{(cu + d)^2 + (cv)^2} = \frac{(ad - bc)v}{(cu + d)^2 + (cv)^2},$$

dado que $ad - bc = 1$ y $v > 0$, concluimos que $Im(\tau') > 0$, es decir, $\tau' \in \mathbb{H}^2$.

Por otro lado, sean $\Gamma = \{1, \tau\}$, $\Gamma' = \{1, \tau'\}$ dos retículos y $\alpha = c\tau + d$. Observe que α es distinto de cero, ya que si $c\tau + d = 0$ entonces $\tau = -\frac{d}{c}$, es decir, τ es un número real, lo cual no es posible dado que τ está en el semiplano superior.

Tenemos además que,

$$\begin{pmatrix} \alpha\tau' \\ \alpha \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, luego por la proposición A.0.1 del apéndice A se sigue que $\alpha\Gamma' = \Gamma$, en particular $\alpha\Gamma' \subset \Gamma$ y por la proposición 1.1.4, la función $z \mapsto \alpha z$ induce una función holomorfa (que de hecho es morfismo de grupos)

$$\psi : X(\tau') \mapsto X(\tau).$$

Este morfismo de grupos es nuestro candidato a ser biholomorfismo.

Nuevamente, por el teorema 1.2.5 tenemos que ψ es sobreyectiva, ya que es una función holomorfa, no constante, con $X(\tau')$ compacto.

Por otro lado, sea $[z]_{\Gamma'} \in \ker \psi$, se tiene que

$$[z]_{\Gamma'} \in \ker \psi \iff \psi([z]_{\Gamma'}) = [0]_{\Gamma} \iff \alpha z \in \Gamma \iff z \in \alpha^{-1}\Gamma \iff z \in \Gamma',$$

donde en la última bicondicional hemos usado el hecho de que $\Gamma' = \alpha^{-1}\Gamma$.

Lo anterior nos dice que $\ker \psi = \Gamma'$.

Por lo tanto ψ es un biholomorfismo entre $X(\tau)$ y $X(\tau')$. ■

1.3. Sobre cubrientes.

En esta sección se presentarán algunos resultados de la teoría de espacios cubrientes y funciones con puntos de ramificación.

Definición 1.3.1. Sean X y Y espacios topológicos y $p : Y \longrightarrow X$ una función continua. Para $x \in X$, el conjunto $p^{-1}(x)$ es llamado la **fibra de p sobre x** . Si $y \in p^{-1}(x)$ entonces se dice que y **se encuentra sobre x** .

Definición 1.3.2. Sean, X , Y y Z espacios topológicos, si $p : Y \longrightarrow X$ y $q : Z \longrightarrow X$ son funciones continuas entonces una función $f : Y \longrightarrow Z$ se dice que **preserva fibras** si $p = q \circ f$. Esto significa que cualquier punto $y \in Y$, que se encuentra sobre $x \in X$, es enviado bajo f a un punto que también se encuentra sobre x .

Recuerde que un subconjunto A de un espacio topológico es llamado **discreto** si cada punto $a \in A$ tiene una vecindad V tal que $V \cap \{a\} = \{a\}$. Si tenemos dos espacios topológicos X y Y y una función $p : Y \longrightarrow X$, se dice que p es **discreta** si la fibra $p^{-1}(x)$ de todo punto $x \in X$ es un subconjunto discreto de Y .

En lo que sigue se consideran funciones no constantes a menos que se indique lo contrario.

Teorema 1.3.3. Sean X y Y superficies de Riemann. Si $p : Y \longrightarrow X$ es holomorfa entonces p es abierta y discreta.

Demostración.

Por 1) del corolario 1.2.2 se sabe que las funciones entre superficies de Riemann son abiertas. Para ver

que p es discreta, sean $b \in Y$ y $a = p(b) \in X$, por el teorema 1.2.1 se sabe que existe un entero $k \geq 1$ y cartas (ϕ, U) , (ψ, U') en X y Y , respectivamente, tales que $F := \psi \circ \phi^{-1}$ y $F(z) = z^k$, más aún, se tiene que $F(0) = 0$. Luego, como los ceros de las funciones holomorfas son aislados (véase pág. 73 de [16]) se deduce que, en alguna vecindad de b , este punto es la única preimagen de a , es decir, $p^{-1}(\{a\})$ es discreto, y en consecuencia, p es una función discreta. ■

Definición 1.3.4. Sean X y Y superficies de Riemann y $p : Y \rightarrow X$ holomorfa. Un punto $y \in Y$ es llamado **punto de ramificación de p** si no existe vecindad V de y tal que $p|_V$ sea inyectiva. La función p es llamada **función holomorfa no ramificada** si no tiene puntos de ramificación.

Observación 1.3.5. Observe que un punto y es de ramificación para p si $\text{mult}_y(p) \geq 2$.

Ejemplo 1.3.6. La función exponencial $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ es una función holomorfa no ramificada ya que es inyectiva en todo subconjunto $V \subset \mathbb{C}$ que no contenga dos puntos que difieran de un múltiplo entero de $2\pi i$.

Ejemplo 1.3.7. Los puntos de ramificación de la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ dada por $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ son -1 y 1 .

Para ver lo anterior, notemos que por el teorema de la función inversa en $\mathbb{C}$, aquellos puntos donde la derivada de la función se anule son posibles puntos de ramificación.

Tenemos que $f'(z) = 0$ si y solo si $1 - \frac{1}{z^2} = 0$, es decir, si y solo si $z = \pm 1$.

Para $z = 1$, como $f(z) = 1$ si y solo si $(z - 1)^2 = 0$ esto nos dice que $z = 1$ tiene multiplicidad 2 y por lo tanto sí es un punto de ramificación.

De manera similar se tiene que el punto $z = -1$ tiene multiplicidad 2 y por lo tanto es de ramificación.

De aquí en adelante I denotará al intervalo $[0, 1]$, a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.3.8. Sea X un espacio topológico, con a y b puntos en X . Dos curvas $u, v : I \rightarrow X$ que unen a con b son llamadas **homotópicas** si existe una función continua $A : I \times I \rightarrow X$ con las siguientes propiedades:

$$\text{I)} \quad A(t, 0) = u(t) \text{ para todo } t \in I,$$

$$\text{II)} \quad A(t, 1) = v(t) \text{ para todo } t \in I,$$

III) $A(0, s) = a$ y $A(1, s) = b$ para todo $s \in I$.

Si u y v son homotópicas se denota por $u \sim v$.

Definición 1.3.9. Sean X un espacio topológico y $u, v : I \rightarrow X$ dos curvas cerradas en X , que no necesariamente tienen el mismo punto inicial. Decimos que las curvas u y v son **homotópicas libres** si existe una función continua $A : I \times I \rightarrow X$ con las siguientes propiedades:

I) $A(t, 0) = u(t)$ para todo $t \in I$,

II) $A(t, 1) = v(t)$ para todo $t \in I$,

III) $A(0, s) = A(1, s)$ para todo $s \in I$.

Definición 1.3.10. Sean X , Y y Z espacios topológicos, $p : Y \rightarrow X$ y $f : Z \rightarrow X$ funciones continuas. Un **levantamiento de f con respecto a p** es una función continua $g : Z \rightarrow Y$ tal que $f = p \circ g$, es decir, el diagrama que se muestra en la figura 1.4 conmuta.

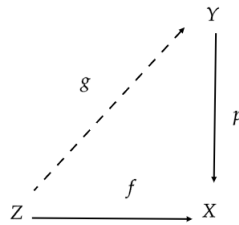


Figura 1.4: Levantamiento de f con respecto a p .

Los siguientes teoremas son resultados topológicos conocidos, por lo cual omitimos sus demostraciones, estas pueden consultarse en la sección 5 de [3] o en la sección 54 de [14].

Teorema 1.3.11 (Unicidad del levantamiento y levantamiento de curvas homotópicas). Sean X y Y espacios Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local, se tiene lo siguiente:

a) Suponga que Z es un espacio topológico conexo y $f : Z \rightarrow X$ una función continua.

Si $g_1, g_2 : Z \rightarrow Y$ son dos levantamientos de f y $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ para algún punto $z_0 \in Z$ entonces $g_1 = g_2$.

b) Sean $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local, a y b dos puntos distintos en X y un punto $\hat{a}$ en Y tal que $p(\hat{a}) = a$. Más aún, supongamos que tenemos una función continua $A : I \times I \rightarrow X$ tal que $A(0, s) = a$ y $A(1, s) = b$ para todo $s \in I$ y definamos $u_s(t) := A(t, s)$. Si toda curva u_s puede ser

levantada a una curva $\hat{u}_s$ con punto inicial $\hat{a}$ entonces $\hat{u}_0$ y $\hat{u}_1$ tienen los mismos puntos finales y son homotópicas.

Teorema 1.3.12. Si X , Y y Z son superficies de Riemann, $p : Y \rightarrow X$ una función holomorfa no ramificada y $f : Z \rightarrow X$ una función holomorfa entonces todo levantamiento de f , $g : Z \rightarrow Y$, es holomorfo.

Demostración.

Tomemos un punto $c \in Z$ y definamos $b := g(c)$ y $a := p \circ g(c)$, como g es un levantamiento de f tenemos que $a = f(c)$. Como p es no ramificada existe una vecindad V de b y U de a tal que $p|_V : V \rightarrow U$ es biholomorfa. Consideremos $\varphi : U \rightarrow V$ la inversa de $p|_V$, dado que g es continua, podemos encontrar una vecindad abierta W de c tal que $g(W) \subset V$ (véase figura 1.5); como $f = p \circ g$, se tiene que $g|_W = \varphi \circ f|_W$ y así g es composición de funciones holomorfas en c y por lo tanto g misma es holomorfa en el punto c . ■

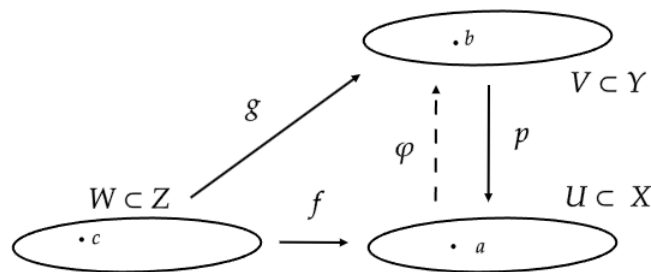


Figura 1.5: Levantamiento de f

Definición 1.3.13. Sean X un espacio topológico, a, b y c puntos en X y $u : I \rightarrow X$, $v : I \rightarrow X$ curvas que unen a con b y b con c , respectivamente. Se definen las siguientes operaciones.

a) La **curva producto**, denotada por $u * v : I \rightarrow X$, que une a con c está dada por

$$(u * v)(t) := \begin{cases} u(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

b) La **curva inversa**, denotada por u^- o también u^{-1} , que une b con a , está definida como sigue

$$u^-(t) := u(1 - t), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Consideraremos la definición de grupo fundamental en términos de clases de homotopía junto con la operación producto dada en 1.3.13, para más detalles sobre este grupo se puede consultar [3] o bien [14].

A continuación presentamos un ejemplo particular en el cual, a través de la teoría de levantamientos, podemos probar que el primer grupo fundamental, $\pi_1(X)$, de una superficie de Riemann X no es abeliano.

Ejemplo 1.3.14. Sean X y Y las siguientes superficies de Riemann:

$$X := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \text{ y } Y = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Considere los caminos $u : I \rightarrow X$, $u(t) = 1 - e^{2\pi it}$ y $v : I \rightarrow X$, $v(t) = -1 + e^{2\pi it}$. Si para $j = 1, 2$, las curvas $w_j : I \rightarrow Y$ son los levantamientos de $u * v$ y $v * u$ respecto a la función $\text{sen} : Y \rightarrow X$, con $w_j(0) = 0$ entonces se tiene que $w_1(1) = 2\pi$ y $w_2(1) = -2\pi$ y por lo tanto $\pi_1(X)$ no es abeliano.

Para justificar lo anterior, observemos que las curvas u y v son círculos unitarios centrados en 1 y -1 , respectivamente, recorridos con dirección contraria a las manecillas del reloj, tal como se comentó en el ejemplo 1.0.6, la función $\text{sen}(z)$ envía la banda infinita $\{x + iy : -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$ al semiplano superior.

Ahora bien, es posible expresar la curva u como un producto de curvas de tal manera que una de ellas esté contenida en $\mathbb{H}^2$ y la otra en $\mathbb{H}_-^2$ (el semiplano inferior), llamemos a estas curvas b y a respectivamente, así $u = a * b$.

De igual manera tenemos curvas c y d con las propiedades anteriores tales que $v = c * d$.

Con lo anterior tenemos que $u * v = (a * b) * (c * d)$ y así para estudiar el levantamiento de $u * v$ podemos estudiar las cuatro curvas anteriores.

Como u y v son continuas, cada una de las curvas en las que se descomponen también son continuas y entonces podemos considerar sus levantamientos.

Sean $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$ los levantamientos de a, b, c y d respecto a la función seno.

En la figura 1.6 podemos observar como la curva a inicia en el origen, permanece en el área no-sombreada y termina en el punto $A := 2$, su levantamiento $\hat{a}$ también debe comenzar en el origen, permanecer en el área no-sombreada y terminar en $\hat{A} := \text{sen}^{-1}(A)$. Luego, razonando de manera similar para la curva b , se tiene que $\hat{b}$ inicia en $\hat{A}$, permanece en el área sombreada y termina en un punto $\hat{B} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ que

satisface $\sin(\hat{B}) = 0$, podemos deducir que $\hat{B} = \pi$.

De igual manera, la curva $\hat{c}$ inicia en $\hat{B}$, permanece en el área sombreada, termina en $\hat{C} = \sin^{-1}(-2)$ y finalmente, la curva $\hat{d}$ inicia en $\hat{C}$, permanece en el área no-sombreada y termina en un punto $\hat{D} \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ tal que $\sin(\hat{D}) = 0$, y así $\hat{D} = 2\pi$.

Tenemos entonces que $w_1(1) = (\hat{a} * \hat{b} * \hat{c} * \hat{d})(1) = \hat{d}(1) = \hat{D} = 2\pi$.

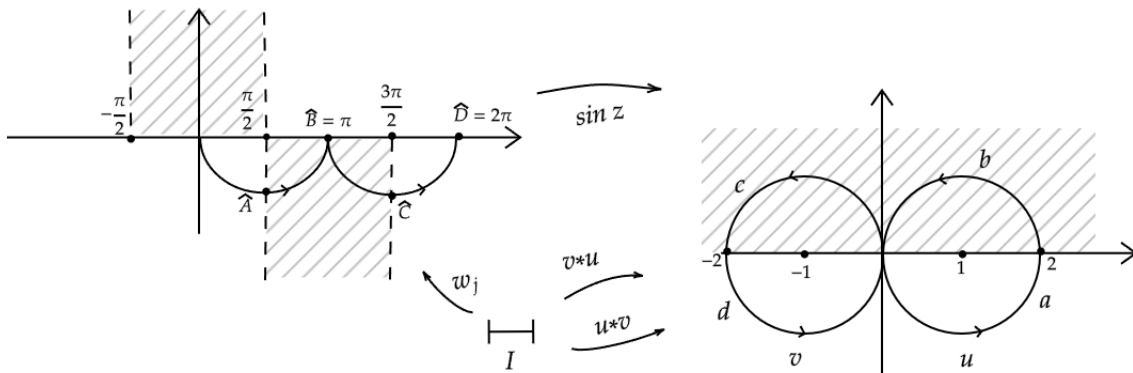


Figura 1.6: Levantamiento de $u * v$.

De igual manera podemos proceder con la curva $v * u$ ya que se tiene $v * u = c * d * a * b$. En la figura 1.7 se muestran los levantamientos correspondientes a las curvas, se tiene así que B' es el punto final de la curva $\hat{b}$, por lo tanto $\sin(B') = 0$ y como B' está entre $-\frac{5\pi}{2}$ y $-\frac{3\pi}{2}$ se sigue que $B' = -2\pi$.

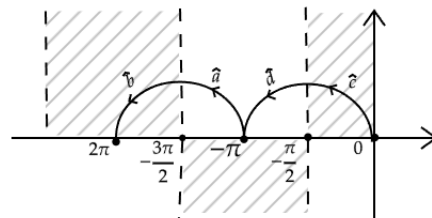


Figura 1.7: Descomposición de la curva $v * u$.

Por lo tanto $w_2(1) = (\hat{c} * \hat{d} * \hat{a} * \hat{b})(1) = \hat{b}(1) = -2\pi$.

Concluimos que $w_1(1) = 2\pi$ y $w_2(1) = -2\pi$, más aún si las curvas $u * v$ y $v * u$ fuesen homotópicas entonces, por el teorema 1.3.11, sus levantamientos tendrían los mismos puntos finales, así $u * v \neq v * u$ en $\pi_1(X)$, por lo tanto $\pi_1(X)$ no es abeliano.

A continuación pasamos a presentar algunos resultados sobre la teoría de funciones cubrientes.

Definición 1.3.15. Sean X y Y espacios topológicos. Una función sobreyectiva $p : Y \longrightarrow X$ es llamada **función cubriente** si se satisface lo siguiente: todo punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que las preimágenes $p^{-1}(U)$ pueden ser representadas como

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

donde los conjuntos V_j , $j \in J$ son abiertos disjuntos a pares de Y , y todas las funciones $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ son homeomorfismos (véase la figura 1.8). En particular observemos que p es un homeomorfismo local.

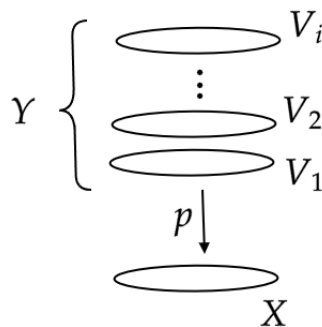


Figura 1.8: Función cubriente.

Ejemplo 1.3.16.

1. Sea X un espacio topológico, la función identidad $i : X \longrightarrow X$ es una función cubriente.
2. La función $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ es una función cubriente.
3. La función $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ es una función cubriente.

Los siguientes resultados nos permiten aplicar la teoría de levantamiento de curvas a las funciones cubrientes, y viceversa. Su demostración se puede consultar en la sección 4 de [3].

Teorema 1.3.17. Sean X y Y espacios topológicos se tiene que toda función cubriente $p : Y \longrightarrow X$ tiene la propiedad del levantamiento de curvas.

En lo que sigue, un espacio topológico **simplemente conexo** es aquel cuyo primer grupo fundamental es trivial. Análogamente se define una variedad simplemente conexa.

Teorema 1.3.18. Sean X y Y espacios Hausdorff y $p : Y \longrightarrow X$ una función cubriente. Suponga que Z es un espacio topológico simplemente conexo, arco conexo y localmente arco conexo y $f : Z \longrightarrow X$

es una función continua. Tenemos que para cada elección de puntos $z_0 \in Z$ y $y_0 \in Y$ con $f(z_0) = p(y_0)$ existe un único levantamiento $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ tal que $\hat{f}(z_0) = y_0$.

Teorema 1.3.19. Sea X una variedad, Y un espacio Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local con la propiedad del levantamiento de curvas, se tiene que p es una función cubriente.

1.4. El cubriente universal

Para la demostración del teorema del mapeo de Riemann es necesario hacer uso de el cubriente universal, en esta sección presentaremos su definición y algunos resultados que serán relevantes. También haremos uso del primer grupo fundamental y propiedades del morfismo inducido entre estos grupos, estos resultados se pueden consultar en libros de álgebra abstracta o topología algebraica, por ejemplo en la sección 1.3 de [6].

Definición 1.4.1. Sean X y Y espacios topológicos conexos y $p : Y \rightarrow X$ una función cubriente, $p : Y \rightarrow X$ es llamada el **cubriente universal de X** si satisface la siguiente propiedad universal: para cada función cubriente $q : Z \rightarrow X$ con Z conexo y cada elección de puntos $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ con $p(y_0) = q(z_0)$ existe exactamente una función continua que preserva fibras $f : Y \rightarrow Z$ tal que $f(y_0) = z_0$, (véase la figura 1.9).

El cubriente universal es único salvo isomorfismos, una prueba de esto se puede consultar en la página 261 de [11].

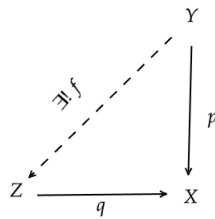


Figura 1.9: El cubriente universal.

Las superficies de Riemann que más adelante estaremos usando son aquellas que son simplemente conexas, en ese caso particular existe un resultado importante respecto al cubriente universal, el cual presentamos a continuación y cuya demostración se obtiene directamente del teorema 1.3.18.

Teorema 1.4.2. *Si X y Y son variedades conexas, Y es simplemente conexa y $p : Y \rightarrow X$ es una función cubriente entonces p es el cubriente universal de X .*

A continuación presentamos dos tipos de cubrientes que se estarán usando.

Definición 1.4.3. *Sean X y Y espacios topológicos y $p : Y \rightarrow X$ una función cubriente.*

1. Una **transformación deck para p** es un homeomorfismo $f : Y \rightarrow Y$ tal que $p \circ f = p$. Al conjunto de todas las transformaciones deck de $p : Y \rightarrow X$, tal como en la definición anterior, lo denotamos por $\text{Deck}(Y/X)$. Observe que con la composición usual de funciones este conjunto resulta ser un grupo.
2. Si X y Y son Hausdorff y conexos, decimos que p es **de Galois** si el grupo de transformaciones deck actúa transitivamente en las fibras, esto es, para cada par de puntos $y_0, y_1 \in Y$ con $p(y_0) = p(y_1)$ existe una transformación deck $f : Y \rightarrow Y$ tal que $f(y_0) = y_1$.

Proposición 1.4.4. *Sean X y Y dos superficies de Riemann tales que $p : Y \rightarrow X$ es un cubriente (no ramificado) entonces cada elemento de $\text{Deck}(Y/X)$ es función holomorfa (y así un automorfismo de Y).*

Demostración.

Sea $f \in \text{Deck}(Y/X)$ una transformación deck, es decir un homeomorfismo $f : Y \rightarrow Y$ tal que $p \circ f = p$. Observe que esta igualdad nos dice que f es un levantamiento de p respecto a p , y como p es una función holomorfa no ramificada, por el teorema 1.3.12 tenemos que el levantamiento f es holomorfa. ■

Proposición 1.4.5. *Sean X, Y espacios Hausdorff y sea $p : Y \rightarrow X$ una cubriente con $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ tal que $p(y_0) = x_0$, si los espacios son arco conexos entonces el morfismo asociado a los grupos fundamentales $p_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ con $p_*(y_0) = x_0$ es inyectivo.*

Demostración.

Para ver que el morfismo es inyectivo veremos que su kernel es trivial.

Sea $[u] \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $[u] \in \ker p_*$, esto es $p_*([u]) = [C_{x_0}]$, donde C_{x_0} es la curva constante x_0 , tenemos así que $p \circ u$ es homotópica a C_{x_0} en X .

Por el teorema 1.3.18, cualquier levantamiento de $p \circ u$ y de C_{x_0} que inicien en el mismo punto deben

ser homotópicas en Y .

Note que u es un levantamiento de $p \circ u$ que inicia en y_0 y la curva constante C_{y_0} es un levantamiento de C_{x_0} que también inicia en y_0 . Por el teorema mencionado, u es homotópica a C_{y_0} en Y , así $[u] = [C_{y_0}]$, por lo tanto el kernel de p_* es trivial. ■

Proposición 1.4.6. *Sean X, Y espacios Hausdorff, $p : Y \rightarrow X$ una cubriente con $y_0 \in Y$ y $x_0 \in X$ tal que $p(y_0) = x_0$, si los espacios son conexos y p es de dos hojas entonces es de Galois.*

Demostración.

Para ver que p es de Galois, debemos probar que si $a, b \in Y$ con $p(a) = p(b)$ entonces existe $f \in \text{Deck}(Y/X)$ con $f(a) = b$.

Sea $y \in Y$, como p es cubriente de dos hojas entonces $p^{-1}(p(y)) = \{y, w\}$. Definamos la función $f : Y \rightarrow Y$ tal que $f(y) := w$, es decir, la función que envía el punto y al otro elemento de la fibra de $p(y)$.

Es claro que f satisface la condición planteada al inicio, y además para todo $y \in Y$, $(p \circ f)(y) = p(f(y)) = p(w) = p(y)$, es decir, $p \circ f = p$.

Finalmente, como p es un homeomorfismo local (por ser cubriente) se sigue que f es también un homeomorfismo local (de hecho es su propia inversa), con todo lo anterior se concluye que f , en efecto, se encuentra en $\text{Deck}(Y/X)$. ■

Terminamos esta sección con el siguiente teorema, el cual nos brinda dos propiedades importantes sobre el cubriente universal, no solo para superficies de Riemann sino en general para cualquier variedad, su demostración se puede consultar en la página 34 de [3].

Teorema 1.4.7. *Sea X una variedad conexa y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal, se tiene entonces que p es Galois y $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(X)$.*

Este teorema nos brinda una forma de calcular el grupo fundamental de algunas variedades, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.8. $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}$.

1. Como $\mathbb{C}$ es conexo y simplemente conexo, observemos que $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ es el cubriente universal.

Consideremos $\tau_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z + 2\pi ni$ con $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\exp \circ \tau_n = \exp$, en efecto, $\exp(\tau_n(z)) = \exp(z + 2\pi ni) = \exp(z)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos así que $\tau_n \in \text{Deck}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times)$. Por otro lado, si $f \in \text{Deck}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times)$ entonces $\exp(f(0)) = \exp(0) = 1$ lo cual implica que $f(0) = 2\pi ni$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Como $\tau_n \in \text{Deck}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times)$ tal que $\tau_n(0) = 2\pi ni$ se sigue que $\tau_n = f$. Con lo anterior concluimos que $\text{Deck}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times) = \{\tau_n : n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el teorema anterior implica que $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}$.

2. Sea $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ un retículo en $\mathbb{C}$ y consideremos el toro $T_\Gamma := \mathbb{C}/\Gamma$. Observemos que, como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, la proyección canónica al cociente $\mathbb{C} \rightarrow T_\Gamma$ es la cubriente universal del toro T_Γ . Para $\gamma \in \Gamma$ denotemos por $\tau_\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a la traslación por γ , análogo a como se hizo en el ejemplo 1, se puede verificar que $\text{Deck}(\mathbb{C} \rightarrow T_\Gamma) \simeq \{\tau_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, es decir, el grupo de transformaciones deck del toro actúa por traslaciones, lo cual implica que $\pi_1(T_\Gamma) \simeq \Gamma \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Proporcionamos otra forma de expresar el grupo fundamental del toro mediante la notación del teorema de Seifert - Van Kampen (véase página 43 de [6] y la figura 1.10), sea $\beta_i = p \circ \gamma_i$, $i = 1, 2$, donde $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por $t \mapsto t\alpha_i$, así $\pi(X) = \langle \beta_1, \beta_2 : \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1 \rangle$.

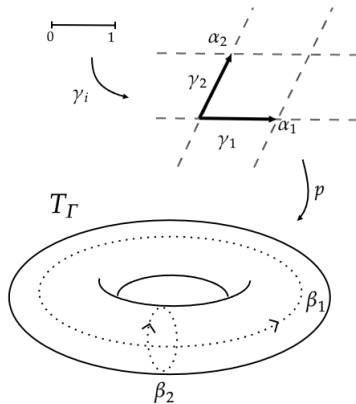


Figura 1.10: Generadores del grupo fundamental del toro complejo.

Capítulo 2

Cohomología de Čech y grupo de DeRham

Calcular grupos de cohomología, en general, puede resultar difícil, en nuestro caso nos enfocaremos en la cohomología de Čech con la cual es posible calcular el grupo de DeRham, con este objetivo, usaremos cubiertas abiertas de espacios topológicos; también se dará un repaso a las bases de la teoría de gavillas. Conociendo la teoría de gavillas aprovecharemos a hablar un poco de las formas diferenciables.

2.1. Pregavillas y gavillas

Gran parte del estudio de superficies de Riemann requiere recuperar información o propiedades globales a partir de conocimientos locales, para este objetivo, aplicar la teoría de gavillas resulta muy conveniente.

Una ventaja que ofrecen las pregavillas y gavillas es que permiten usarse con distintas categorías (anillos, módulos, álgebras, grupos, etc.), para nuestro estudio estaremos trabajando en la categoría de grupos abelianos, a menos que se indique lo contrario.

Definición 2.1.1. Sea X un espacio topológico con topología τ . Una **pregavilla** $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre X , $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \tau}$ es:

1. Una colección de grupos abelianos $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \tau}$,
2. Una familia de morfismos $\{\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)\}_{V \subset U}$,

de tal manera que:

I) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, $\rho_{U,U} = 1_{\mathcal{F}(U)}$ para todo $U \in \tau$.

II) Si $W \subset V \subset U$ entonces $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V} = \rho_{U,W}$.

De manera intuitiva, siguiendo la notación de la definición de arriba, una pregavilla en un espacio topológico X consiste en una asignación: a cada abierto U de X le asignamos un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ y a cada par $V \subset U$ un morfismo $\rho_{U,V}$, dichos morfismos se pueden pensar como *funciones restricción*, esto se debe a que si $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}(V)$ están formados por funciones, lo cual ocurrirá en muchas ocasiones, y consideramos $f \in \mathcal{F}(U)$ entonces $\rho_{U,V}(f) = f|_V$.

Para familiarizarnos con la noción de pregavillas, a continuación veremos algunos ejemplos más detallados.

Ejemplo 2.1.2.

Recordemos que si R es un campo, una R -álgebra es un espacio vectorial dotado de un producto bilineal.

1. Sea $X = \mathbb{R}^n$ con τ la topología usual, se definirá la pregavilla de $\mathbb{R}$ -álgebras de funciones continuas real valuadas, denotada por $\mathcal{F} := \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, se define el siguiente conjunto

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\};$$

se sabe que estos conjuntos de funciones forman una $\mathbb{R}$ -álgebra con las operaciones usuales de suma y multiplicación de funciones. Para las funciones ρ consideremos la restricción usual de funciones.

Pasemos ahora a verificar las condiciones I) y II) de la definición 2.1.1.

Para I) notemos que $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\emptyset) = \emptyset$ y que $\rho_{U,U} = 1_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(U)}$, es decir, la función identidad.

Para II), si $V \subset U$, como $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(U) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(V)$ es la restricción usual de funciones, tenemos que se satisface lo deseado de manera inmediata.

Con todo lo anterior vemos que, en efecto, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ es una pregavilla.

2. Sea X una variedad diferenciable, para $U \subset X$ abierto, se define la pregavilla de $\mathbb{R}$ -álgebras de funciones diferenciables, denotada por $\mathcal{E}_X$, como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{E}_X(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\},$$

junto con la restricción usual de funciones. Note que el conjunto es una $\mathbb{R}$ -álgebra con las operaciones usuales y además se verifican de manera inmediata las propiedades I) y II) de la definición 2.1.1.

3. De igual manera, si X es un espacio topológico, se pueden obtener las pregavillas de funciones holomorfas y meromorfas, denotadas por $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{M}_X$, respectivamente.

4. Sea X un espacio topológico localmente conexo. Sea G un grupo abeliano fijo, se define la **pregavilla constante** G_X como sigue: Sea U un abierto de X y $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ su descomposición en componentes conexas, dado que X es localmente conexo, cada U_α es un subconjunto abierto de X .

Sean $G_X(\emptyset) = 0$ y $G_X(U) = \prod_{\alpha \in A} G$, esto es, el producto de G tantas veces como componentes conexas tenga U . Por ejemplo, si U tiene solo dos componentes conexas entonces $G_X(U) = G \times G$. Para la funciones restricción, estas se definen como sigue, sea V un abierto de X tal que $V \subset U \subset X$. Si $V = \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$ y $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ son las descomposiciones en componentes conexas, para cada $\beta \in B$ existe un único $\alpha_\beta \in A$, que depende de β , con $V_\beta \subset U_{\alpha_\beta}$, definamos entonces

$$\begin{aligned} \rho_{U,V} : \prod_{\alpha \in A} G &\longrightarrow \prod_{\beta \in B} G \\ (g_\alpha)_{\alpha \in A} &\longmapsto (g_{\alpha_\beta})_{\beta \in B} \end{aligned} .$$

Veamos que, en efecto, se tiene una pregavilla.

Para I) debemos considerar el caso cuando $U = V$, aquí se tiene que $\alpha_\beta = \beta$, por lo tanto $(g_{\alpha_\beta})_{\beta \in B} = (g_\beta)_{\beta \in B} = (g_\alpha)_{\alpha \in A}$, lo cual implica que $\rho_{U,V} = 1_{G(U)}$.

Para II) consideremos abiertos $W \subset V \subset U$ y sus descomposiciones conexas, para U y V usaremos la misma notación presentada arriba y para W consideremos $W = \bigcup_{\gamma \in C} W_\gamma$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} G_X(U) &\xrightarrow{\rho_{U,V}} G_X(V) \xrightarrow{\rho_{V,W}} G_X(W) \\ (g_\alpha)_{\alpha \in A} &\longmapsto (g_{\alpha_\beta})_{\beta \in B} \longmapsto (g_{\alpha_{\beta_\gamma}})_{\gamma \in C} \end{aligned} ,$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} G_X(U) & \xrightarrow{\rho_{U,W}} G_X(W) \\ (g_\alpha)_{\alpha \in A} & \longmapsto (g_{\alpha_{\gamma'}})_{\gamma' \in C}, \end{aligned}$$

por la unicidad en la elección de los índices en C , tenemos que $\alpha_{\beta_\gamma} = \alpha_{\gamma'}$, lo cual implica que $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V} = \rho_{U,W}$.

Definición 2.1.3. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre X . Se dice que $\mathcal{F}$ es **gavilla** si para cada abierto $U \subset X$ y para cada familia de abiertos $U_j \subset X$ tales que $U = \bigcup_{j \in I} U_j$, se satisface lo siguiente:

- a) Axioma de identidad: si $s, t \in \mathcal{F}(U)$ son elementos tales que $\rho_{U,U_j}(t) = \rho_{U,U_j}(s)$ para todo $j \in I$ entonces $t = s$.
- b) Axioma de pegado: si tenemos una colección $\{s_j \in \mathcal{F}(U_j)\}_{j \in I}$ tal que

$$s_j|_{U_i \cap U_j} = s_i|_{U_i \cap U_j},$$

para todo $i, j \in I$ entonces existe $t \in \mathcal{F}(U)$ con $t|_{U_j} = s_j$, para todo $j \in I$.

Notación 2.1.4. A partir de ahora usaremos la siguiente notación $U_{ij} := U_i \cap U_j$.

Observación 2.1.5. Respecto a la definición 2.1.3 tenemos lo siguiente:

- A) El primer inciso de dicha definición se puede replantear de la siguiente manera: si tenemos $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U,U_j}(t) = 0$ para todo $j \in I$ entonces $t = 0$.
- B) Por el inciso a), la t que existe en el inciso b) es única.
- C) $\mathcal{F}(\emptyset)$ contiene solo un elemento. En efecto, para el abierto $\emptyset \subset X$ se considera la cubierta con $I = \emptyset$, $\{U_i\}_{i \in \emptyset}$ se sigue entonces que para dos elementos $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(\emptyset)$ la condición $s_1|_{U_i} = s_2|_{U_i}$ se cumple por vacuidad y así se concluye que $s_1 = s_2$.

Ejemplo 2.1.6.

1. La pregavilla $\mathcal{O}_X$ del ejemplo 2.1.2 es una gavilla con la restricción usual de funciones. Como los elementos que forman dichas gavillas son funciones holomorfas, el inciso a) de la definición 2.1.3 se obtiene gracias al teorema de la identidad (teorema 1.1.8) y el inciso b) del lema del pegado de espacios topológicos (véase la página 108 de [14]).

2. Veremos ahora un ejemplo de una pregavilla que no es gavilla.

Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano, supongamos que X tiene dos abiertos disjuntos no vacíos U_1, U_2 y que G contiene al menos dos elementos distintos s_1 y s_2 .

Definamos una pregavilla $\mathcal{G}$ en X como sigue: para todo abierto $U \subset X \setminus \{\emptyset\}$ sea $\mathcal{G}(U) := G$ y $\mathcal{G}(\emptyset) = 0$. Para las funciones restricción, sea $V \subset U$ abierto no vacío, definamos $\rho_{U,V} := \text{id}_G$ y $\rho_{U,\emptyset} := 0$.

Primero veamos que es una pregavilla. Por construcción, tenemos que se satisface el inciso 1) de la definición 2.1.1. Para el inciso 2), sean $U, V, W \subset X$ abiertos tales que $W \subset V \subset U$ y $s \in \mathcal{G}(U)$, analicemos algunos de los posibles casos, los otros casos se pueden analizar de manera similar:

- Supongamos que $U \neq \emptyset$,
 - Si $V = \emptyset$, observemos que entonces $W = \emptyset$ y entonces $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}(s) = \rho_{V,W}(0) = 0$, y por otro lado $\rho_{U,W}(s) = 0$.
 - Si $W = \emptyset$ entonces $V \neq \emptyset$, o bien, $V = \emptyset$, en cualquiera de los dos casos se verifica que $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}(s) = 0 = \rho_{U,W}(s)$.
- Supongamos que $U = \emptyset$, esto implica que $W = \emptyset = V$ por lo cual $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}(s) = 0 = \rho_{U,W}(s)$.

Por lo tanto $\mathcal{G}$ es una pregavilla.

Ahora bien, por otro lado, dados $s_1, s_2 \in G$, como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, se tiene que $s_1|_{U_{12}} = 0 = s_2|_{U_{12}}$ pero observemos que no existe $t \in \mathcal{G}(U_1 \cup U_2) = G$ tal que $t|_{U_1} = s_1$ y $t|_{U_2} = s_2$, por lo tanto no se satisface el inciso b) de la definición 2.1.3.

Una vez establecidas las pregavillas y gavillas, como muchos objetos en matemáticas, podemos definir funciones entre estas, pasaremos ahora a ver estas definiciones.

Definición 2.1.7. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ pregavillas, con ρ y r sus respectivas funciones restricción. Un **morfismo de pregavillas** $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es una familia de morfismos de grupos abelianos $\{\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)\}$ tales que, si $V \subset U$ es un abierto, el diagrama de la figura 2.1 conmuta.

Un **morfismo de gavillas** $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de las pregavillas en cuestión.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{U,V} \downarrow & & \downarrow r_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Figura 2.1: Morfismo de pregavillas.

Observación 2.1.8. Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}'$ pregavillas sobre un espacio topológico X , con sus respectivos morfismos $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ y $\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}'$ se tienen las siguientes propiedades.

- a) El **morfismo identidad de pregavillas** $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ está dado por $1_{\mathcal{F}(U)} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ la identidad.
- b) El **morfismo composición de pregavillas** $\psi \circ \phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$ está dado por $(\psi \circ \phi)_U = \psi_U \circ \phi_U$.
- c) Se satisface que $1_{\mathcal{G}} \circ \phi = \phi = \phi \circ 1_{\mathcal{F}}$ y $\eta \circ (\psi \circ \phi) = (\eta \circ \psi) \circ \phi$.

Notación 2.1.9. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ pregavillas sobre X se denota por $\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ a la colección de todos los morfismos $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de pregavillas.

Definición 2.1.10. Se dice que un morfismo de pregavillas $\phi \in \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es **isomorfismo de pregavillas** si existe $\psi \in \text{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ tal que $\psi \circ \phi = 1_{\mathcal{F}}$ y $\phi \circ \psi = 1_{\mathcal{G}}$.

A continuación veremos una alternativa para saber cuando tenemos un isomorfismo.

Proposición 2.1.11. Sea $\phi \in \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, ϕ es isomorfismo de pregavillas si y solo si $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es isomorfismo para todo abierto $U \subset X$.

Demostración.

Supongamos que existe $\psi \in \text{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ tal que $1_{\mathcal{F}} = \psi \circ \phi$ y $1_{\mathcal{G}} = \phi \circ \psi$ tenemos que dado un abierto U en X , $1_{\mathcal{F}(U)} = \psi_U \circ \phi_U$ y $1_{\mathcal{G}(U)} = \phi_U \circ \psi_U$. Por lo tanto $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es isomorfismo.

Recíprocamente supongamos ahora que para todo abierto $U \subset X$, el morfismo $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es isomorfismo, con esto tenemos que existe su inversa $\phi_U^{-1} : \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$.

Sea $\psi \in \text{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ con $\psi_U := \phi_U^{-1}$ para todo abierto $U \subset X$, a continuación veremos que ψ es morfismo.

Sean $V \subset U$ un abierto, y $\rho_{U,V}$, $r_{U,V}$ las funciones restricción asociadas a las pregavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente. Consideremos $y \in \mathcal{G}(U)$ y definamos $x := \phi_U^{-1}(y)$, por la definición 2.1.7, tenemos que

$$r_{U,V}(\phi_U(x)) = \phi_V(\rho_{U,V}(x)),$$

luego, por como se definió x , tenemos que $r_{U,V}(y) = \phi_V(\rho_{U,V}(x))$ y por lo tanto $\rho_{U,V}(x) = \phi_V^{-1}(r_{U,V}(y))$, se sigue entonces que

$$\rho_{U,V}(\phi_U^{-1}(y)) = \rho_{U,V}(x) = \phi_V^{-1}(r_{U,V}(y)),$$

por lo tanto, ψ es un morfismo de pregavillas, y con ello satisface que $\psi \circ \phi = 1_{\mathcal{F}}$ y $\phi \circ \psi = 1_{\mathcal{G}}$. ■

Notación 2.1.12. Si $\phi \in \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es isomorfismo, se denota por ϕ^{-1} al morfismo $\psi \in \text{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ dado por $\psi_U = \phi_U^{-1}$.

Definición 2.1.13. Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio topológico X y un punto a en X . Se define una relación de equivalencia sobre $\bigsqcup_{a \in U} \mathcal{F}(U)$ como sigue: para $f \in \mathcal{F}(U)$, $g \in \mathcal{F}(V)$, $f \sim_a g$ si y solo si existe un abierto $W \subset X$ con $a \in W \subset U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$.

El **tallo de $\mathcal{F}$ en a** se define como $\mathcal{F}_a := \bigsqcup_{a \in U} \mathcal{F}(U) / \sim_a$.

Por otro lado, si $\phi \in \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ entonces para cada $a \in X$ se tiene una función inducida en los tallos $\phi_a : \mathcal{F}_a \longrightarrow \mathcal{G}_a$ tal como sigue: sea $[f] \in \mathcal{F}_a$ para algún $f \in \mathcal{F}(U)$, definimos

$$\phi_a([f]) := [\phi_U(f)],$$

donde $\phi_U(f) \in \mathcal{G}(U)$.

Sea $W := U \cap V$ y consideremos $a \in W$; para $[f], [g] \in \mathcal{F}_a$, $f \in \mathcal{F}(U)$, $g \in \mathcal{F}(V)$ tenemos que $f|_W, g|_W \in \mathcal{F}(W)$, definamos

$$[f] + [g] := [f|_W + g|_W].$$

Veamos que esta operación suma está bien definida. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(U)$ y $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(V)$ tales que $[f_1] = [f_2]$ y $[g_1] = [g_2]$, tenemos que existen abiertos W' y W'' de X tales que $f_1|_{W'} = f_2|_{W'}$ y $g_1|_{W''} = g_2|_{W''}$. Hagamos $\tilde{W} := W' \cap W''$, con esto se tiene que $(f_1 + g_1)|_{\tilde{W}} = (f_2 + g_2)|_{\tilde{W}}$ y en consecuencia, se sigue que $[(f_1 + g_1)|_{\tilde{W}}] = [(f_2 + g_2)|_{\tilde{W}}]$.

Proposición 2.1.14. La función ϕ_a está bien definida y es un morfismo de grupos.

Demostración.

Denotemos por ρ y r a las funciones restricción asociadas a las gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente.

Sea $f \in \mathcal{F}(U)$, si $[f] = [g]$ entonces $g \in \mathcal{F}(V)$ y existe $W \subset U \cap V$ tal que $\rho_{U,W}(f) = \rho_{V,W}(g) \in \mathcal{F}(W)$, con lo cual tenemos lo siguiente

$$r_{U,W}(\phi_U(f)) = \phi_W(\rho_{U,W}(f)) = \phi_W(\rho_{V,W}(g)) = r_{V,W}(\phi_V(g)),$$

luego $[\phi_U(f)|_W] = [\phi_V(g)|_W]$ y entonces $\phi_a(f) = \phi_a(g)$; con esto vemos que la función sí está bien definida.

Por otro lado, sean $[f], [g] \in \mathcal{F}_a$, se tiene

$$\begin{aligned} \phi_a([f] + [g]) &= \phi_a(f|_W + g|_W) = [\phi_W(f|_W + g|_W)] = [\phi_W(f|_W)] + [\phi_W(g|_W)] \\ &= [\phi_U(f)|_W] + [\phi_V(g)|_W] = [\phi_U(f)] + [\phi_V(g)] = \phi_a([f]) + \phi_a([g]). \end{aligned}$$

por lo tanto la función es un morfismo de grupos. ■

2.2. Formas complejas

Una superficie de Riemann es en particular una variedad diferenciable real (de dimensión 2), por lo tanto es posible utilizar la teoría de formas diferenciables, más aún, podemos hablar de integración. En esta sección serán presentadas las definiciones y los resultados necesarios correspondientes a formas para superficies de Riemann. Para un estudio más profundo de formas diferenciables en variedades complejas puede consultar [8].

Comencemos recordando algunas nociones de análisis complejo para fijar algunas notaciones.

Notación 2.2.1. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, e identifiquemos a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ escribiendo $z = x + iy$. Denotaremos por $\mathcal{E}(U)$ a la $\mathbb{C}$ -álgebra de funciones $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ que son infinitamente diferenciables con respecto a x, y .

Mediante las derivadas parciales usuales $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ es posible definir los siguientes operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

En ocasiones, para simplificar la notación, denotaremos los operadores anteriores como ∂ y $\bar{\partial}$, respectivamente.

Una vez dados los operadores anteriores tenemos los siguientes resultados conocidos.

Proposición 2.2.2. *Para U un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{E}(U)$ con $f = u + iv$, tenemos que las siguientes son equivalentes:*

- I) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$,
- II) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann),
- III) f es holomorfa.

Demostración.

La equivalencia II) $\Leftrightarrow$ III) se cumple ya que es clásica y puede consultarse en cualquier libro de variable compleja, por ejemplo [8] y [12]. Por otro lado para probar que II es equivalente a I, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0.$$

■

Considerando el morfismo $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ y de la proposición anterior tenemos que $\ker \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \mathcal{O}(U)$.

Observemos que todo lo anterior es respecto al plano complejo, si queremos definir una noción de función diferenciable en una superficie de Riemann, podemos hacerlo mediante cartas complejas.

Notación 2.2.3. Sean X una superficie de Riemann y un abierto $Y \subset X$, denotemos por $\mathcal{E}(Y)$ al conjunto de todas las funciones $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para cada carta $z : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ en X con $U \subset Y$ existe una función $\tilde{f} \in \mathcal{E}(V)$ con $f|_U = \tilde{f} \circ z$.

Observemos que $\tilde{f} = f \circ z^{-1}$, por lo tanto $\tilde{f}$ está determinada únicamente por f .

Daremos a continuación una función derivación en superficies de Riemann.

Definición 2.2.4. Consideremos una superficie de Riemann X , $a \in X$ y (U, z) una carta alrededor de a , donde $z = x + iy$, tomemos además una función f que es diferenciable en una vecindad de a , con estos elementos se define

$$d_a f := d'_a f + d''_a f,$$

donde

$$d'_a f = \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z, \quad d''_a f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z}.$$

Observación 2.2.5. *Bajo la notación de la definición anterior, una función f es holomorfa si y solo si $d''f = 0$.*

Definición 2.2.6. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , una **1-forma** ω en Y es llamada:*

- a) **Diferenciable**, si con respecto a cada carta (U, z) , ω se puede escribir como $w = f dz + g d\bar{z}$ en $U \cap Y$ donde $f, g \in \mathcal{E}(U \cap Y)$.
- b) **Holomorfa**, si con respecto a cada carta (U, z) , ω se puede escribir como $w = f dz$ en $U \cap Y$ donde $f \in \mathcal{O}(U \cap Y)$.

Definición 2.2.7. *Una 1-forma ω en un abierto Y de una superficie de Riemann X se dice que es una forma **meromorfa** en Y si existe un abierto $Y' \subset Y$ tal que se cumple lo siguiente:*

- I) ω es una 1-forma holomorfa en Y' ,
- II) $Y \setminus Y'$ contiene solo puntos aislados,
- III) ω tiene un polo en cada punto $a \in Y \setminus Y'$.

Notación 2.2.8. *Sean X una superficie de Riemann, U un abierto de X y Y un abierto tal como en la definición 2.2.7. Se denota por $\mathcal{E}^{(1)}(U)$, $\Omega(U)$ y $\mathcal{M}^{(1)}(Y)$ a los espacios vectoriales de 1-formas diferenciables, holomorfas y meromorfas, respectivamente. Observemos que junto con la restricción usual de funciones tienen estructuras de gavillas de espacios vectoriales sobre X .*

Ejemplo 2.2.9. *Analicemos las 1-formas holomorfas en $\mathbb{P}^1$, es decir, la gavilla $\Omega(\mathbb{P}^1)$.*

Sean $U_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$, y $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, con coordenadas z y w respectivamente, las cuales, por el ejemplo 1.0.7, satisfacen que $w = \frac{1}{z}$ en $U_1 \cap U_2$.

Sea $\eta \in \Omega(\mathbb{P}^1)$, en cada carta tenemos lo siguiente

$$\eta = f_1 dz, \quad \eta = f_2 dw,$$

donde $f_1 \in \Omega(U_1)$ y $f_2 \in \Omega(U_2)$ y además en $U_{1,2}$ se tiene

$$f_2(w)dw = \eta = f_1(z)dz = f_1\left(\frac{1}{w}\right)d\left(\frac{1}{w}\right) = -f_1\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}dw,$$

por lo tanto $f_2(w) + f_1\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2} = 0$, de donde se sigue que $f_2(w) = -f_1\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}$, y por el hecho de que tanto f_1 y f_2 son holomorfas se sigue que la igualdad se obtiene solo cuando $f_1 = f_2 = 0$, por lo tanto, $\omega = 0$.

De todo lo anterior podemos concluir que $\Omega(\mathbb{P}^1) = 0$, es decir, toda 1-forma holomorfa en $\mathbb{P}^1$ es trivial.

Definición 2.2.10. Sea X una superficie de Riemann y $Y \subset X$ un abierto. Una **2-forma diferenciable en Y** es aquella que, respecto a cualquier carta compleja (U, z) en X , puede ser escrita como $\omega = f dz \wedge d\bar{z}$ con $f \in \mathcal{E}(U \cap Y)$.

Notación 2.2.11. Denotamos por $\mathcal{E}^{(2)}(Y)$ al espacio vectorial de todas las 2-formas diferenciables en Y .

2.2.1. Derivación exterior de formas

Para un abierto U de una superficie de Riemann, ya que conocemos los espacios $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ y $\mathcal{E}^{(2)}(U)$, estamos interesados en definir funciones entre ellos, es decir, funciones que tomen 1-formas y su imagen sea una 2-forma. Comencemos recordando que si ω es una 1-forma esta puede ser escrita como la siguiente suma finita

$$\omega = \sum_k f_k dg_k, \quad (*)$$

donde f_k y g_k son funciones infinitamente diferenciables, puede consultar [5], [8] o [19].

Definición 2.2.12. Si U es un abierto de una superficie de Riemann y ω es una 1-forma como en (*), se definen las siguientes funciones:

$$1) \quad d\omega := \sum_k df_k \wedge dg_k,$$

$$2) \quad d'\omega := \sum_k d'f_k \wedge dg_k,$$

$$3) \quad d''\omega := \sum_k d''f_k \wedge dg_k.$$

Para que la definición anterior tenga sentido, debemos probar que las expresiones dadas no dependen de la representación como suma finita de la 1-forma. Haremos la prueba para el operador d , los otros casos son similares.

Proposición 2.2.13. Si ω es una 1-forma tal que puede ser escrita como

$$\omega = \sum_k f_k dg_k \quad y \quad \omega = \sum_j \tilde{f}_j d\tilde{g}_j,$$

tenemos entonces que

$$\sum_k df_k \wedge dg_k = \sum_j d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j.$$

Demostración.

Primero tenemos que

$$dg_k = \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy, \quad d\tilde{g}_j = \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} dy,$$

usando lo anterior obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \sum_k f_k dg_k &= \sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} dy, \\ \sum_j \tilde{f}_j d\tilde{g}_j &= \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} dx + \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

luego por hipótesis, ambas expresiones de la derecha son iguales y por lo tanto

$$\left(\sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} - \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} \right) dx + \left(\sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} - \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \right) dy = 0,$$

con lo cual se tiene que

$$\sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x}, \quad \sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y},$$

si ahora derivamos respecto a x y y y restamos las expresiones se tiene

$$\sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \right). \quad (1)$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_k df_k \wedge dg_k &= \sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} dx + \frac{\partial f_k}{\partial y} dy \right) \wedge \left(\frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy \right) \\ &= \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} \right) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Análogamente, podemos obtener la siguiente expresión

$$\sum_j d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j = \sum_j \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} \right) dx \wedge dy. \quad (3)$$

Mediante (1) vemos que las expresiones (2) y (3) son iguales, con lo cual se obtiene lo deseado. ■

Notación 2.2.14. Para una superficie de Riemann compacta X , tenemos la siguiente notación

$$\mathcal{L}(X) := \ker(\mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X)).$$

Teniendo los operadores definidos, se satisfacen las siguientes propiedades.

Proposición 2.2.15. *Sea U un abierto no vacío de una superficie de Riemann, $f \in \mathcal{E}(U)$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$, se cumple lo siguiente.*

1. $ddf = d'd'f = d''d''f = 0$.
2. $d\omega = d'\omega + d''\omega$.
3. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$, con reglas similares para d' y d'' .
4. $d'd''f = -d''d'f$.
5. Sean f y g funciones holomorfas, si $\omega = f dz + \bar{g} d\bar{z}$ entonces $d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0$.

Demostración.

Estas propiedades se obtienen directamente de las definiciones.

1. $ddf = d(1 \cdot df) = d1 \wedge df = 0$, donde la última igualdad se tiene ya que $d1 = 0$.

$d'(d'f) = d'\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) = d'\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge dz = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz \wedge dz = 0$, de manera similar se obtiene el resultado para el operador d'' .

2. Suponga $\omega = \sum_k f_k dg_k$, se tiene

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_k df_k \wedge dg_k = \sum_k (d'f_k + d''f_k) \wedge dg_k \\ &= \sum_k d'f_k \wedge dg_k + \sum_k d''f_k \wedge dg_k = d'\omega + d''\omega. \end{aligned}$$

3. Sea $\omega = \sum_k g_k dh_k$ con g_k, h_k funciones diferenciables, se tiene

$$\begin{aligned} d(f\omega) &= d\left(f \sum_k g_k dh_k\right) = d\left(\sum_k (fg_k) dh_k\right) = \sum_k d(fg_k) \wedge dh_k \\ &= \sum_k (fdg_k + g_k df) \wedge dh_k = \sum_k fdg_k \wedge dh_k + \sum_k g_k df \wedge dh_k \\ &= f \sum_k dg_k \wedge dh_k + df \wedge \left(\sum_k g_k dh_k\right) = fd\omega + df \wedge \omega. \end{aligned}$$

4. De 1 y 2 tenemos lo siguiente:

$$d'd''f + d''d'f = (d' + d'')(d' + d'')f = 0,$$

con lo cual se concluye el resultado.

5. Tenemos que $\omega = f dz + \bar{g} d\bar{z}$, usando los incisos 1, 2 y 3 de esta proposición y el inciso I de la proposición 2.2.2 se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} d\omega &= d'(f dz + \bar{g} d\bar{z}) + d''(f dz + \bar{g} d\bar{z}) = d''(f dz) + d'(\bar{g} d\bar{z}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} = \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \right) dz \wedge d\bar{z} = 0. \end{aligned}$$

■

Pasamos ahora a la definición de algunos tipos de formas importantes.

Definición 2.2.16. Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X . Una 1-forma diferenciable $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ es llamada **cerrada** si $d\omega = 0$ y **exacta** si existe una función $f \in \mathcal{E}(Y)$ tal que $\omega = df$.

Directamente de la definición anterior se pueden obtener las siguientes observaciones.

Observación 2.2.17.

a) Como $ddf = 0$, toda forma exacta es cerrada.

b) Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , toda 1-forma holomorfa $\omega \in \Omega(Y)$ es cerrada.

La última función para formas que definiremos es el pull-back.

Definición 2.2.18. Sean X y Y superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa. Para cada abierto U de Y la función F induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{E}(U) &\longrightarrow \mathcal{E}(F^{-1}(U)) \\ f &\longmapsto f \circ F \end{aligned}$$

Ya sabemos que localmente una 1-forma se expresa como $\omega = \sum_j f_j dg_j$, análogamente para una 2-forma, esta se puede expresar $\omega = \sum_j f_j dg_j \wedge dh_j$ con f_j, g_j y h_j funciones diferenciables, con esto se puede definir el **pull-back de k -formas diferenciables** $F^* : \mathcal{E}^{(k)}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(k)}(F^{-1}(U))$, con $k = 1, 2$, como sigue

$$\begin{aligned} F^* \left(\sum_j f_j dg_j \right) &:= \sum_j (F^* f_j) d(F^* g_j). \\ F^* \left(\sum_j f_j dg_j \wedge dh_j \right) &:= \sum_j (F^* f_j) d(F^* g_j) \wedge d(F^* h_j). \end{aligned}$$

De manera similar a como se hizo con los operadores d, d', d'' se puede probar que esta definición no depende de la representación de la forma.

Proposición 2.2.19. *Sea U un abierto de una superficie de Riemann X , para $f \in \mathcal{E}(U)$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ se tiene lo siguiente*

$$\text{I)} \quad F^*(df) = d(F^*f), \quad F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

$$\text{II)} \quad F^*(d'f) = d'(F^*f), \quad F^*(d'\omega) = d'(F^*\omega).$$

Demostración.

Estos resultados se obtienen usando las definiciones 2.2.12, 2.2.18 y el inciso 4 de la proposición 2.2.15, demostraremos solo la propiedad I ya que la II es similar.

i) Sabemos que $df = d'f + d''f = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$, luego

$$\begin{aligned} F^*(df) &= \left(F^* \frac{\partial f}{\partial z} \right) d(F^*z) + \left(F^* \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) d(F^*\bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ F \right) d(z \circ F) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ F \right) d(\bar{z} \circ F) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ F \right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ F \right) d\bar{z}, \end{aligned}$$

y por otro lado tenemos que

$$d(F^*f) = d'F^*f + d''F^*f = \frac{\partial F^*f}{\partial z}dz + \frac{\partial F^*f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

de las expresiones anteriores vemos que, en efecto, $F^*(df) = d(F^*f)$.

Por otro lado sea $\omega = \sum_k f_k dg_k$, donde f_k y g_k son funciones diferenciables, se tiene lo siguiente

$$F^*(d\omega) = F^* \left(\sum_k df_k \wedge dg_k \right) = \sum_k d(F^*f_k) \wedge d(F^*g_k).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d \left(F^* \left(\sum_k f_k dg_k \right) \right) = d \left(\sum_k (F^*f_k) d(F^*g_k) \right) \\ &= \sum_k d(F^*f_k) \wedge d(F^*g_k) + (F^*f_k) d(d(F^*g_k)) \\ &= \sum_k d(F^*f_k) \wedge d(F^*g_k), \end{aligned}$$

concluimos así que $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$. ■

2.2.2. Integración de 1-formas

Con los conceptos de formas diferenciables establecidos, podemos pasar a describir la integración de contorno para superficies de Riemann.

Definición 2.2.20. Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una 1-forma diferenciable, decimos que una curva $c : [0, 1] \rightarrow X$ es **continuamente diferenciable por partes en X** si existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ y cartas (U_k, z_k) , con $z_k = x_k + iy_k$ para $k = 1, \dots, n$ tal que $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ y las funciones

$$x_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R},$$

tienen derivadas continuas de primer orden.

Observemos que con respecto a cada carta de (U_k, z_k) podemos escribir la 1-forma ω como $\omega = f_k dx_k + g_k dy_k$, donde las funciones f_k y g_k son diferenciables.

Definición 2.2.21. Bajo la notación de arriba, se define **la integral de ω a lo largo de la curva c** como sigue

$$\int_c \omega = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(c(t)) \frac{dx_k}{dt}(c(t)) + g_k(c(t)) \frac{dy_k}{dt}(c(t)) \right) dt.$$

A continuación presentamos un resultado que se obtiene directamente de la definición anterior.

Teorema 2.2.22. Sea X una superficie de Riemann, $c : [0, 1] \rightarrow X$ una curva continuamente diferenciable por partes y $F \in \mathcal{E}(X)$, se tiene entonces lo siguiente

$$\int_c dF = F(c(1)) - F(c(0)).$$

Demostración.

Por la definición 2.2.20, existen $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ y cartas (U_k, z_k) que satisfacen las condiciones de dicha definición, tenemos así que en U_k ,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_c dF &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(c(t)) \frac{dx_k}{dt}(c(t)) + \frac{\partial F}{\partial y_k}(c(t)) \frac{dy_k}{dt}(c(t)) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{d}{dt} F(c(t)) \right) dt = \sum_{k=1}^n (F(c(t_k)) - F(c(t_{k-1}))) \\ &= F(c(t_n)) - F(c(t_0)) = F(c(1)) - F(c(0)), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se debe a que se tiene una suma telescópica. ■

Definición 2.2.23. Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, decimos que una función $F \in \mathcal{E}(X)$ es una **primitiva de ω** si $dF = \omega$.

De manera local, por ejemplo en discos de radio finito centrados en el origen, es posible garantizar la existencia de primitivas para 1-formas cerradas, sin embargo, de manera global sus primitivas existen como funciones multivaluadas, esto es lo que establecemos en el siguiente teorema, cuya demostración se puede consultar en la página 71 de [3]. Nosotros estamos interesados en las consecuencias de este teorema.

Teorema 2.2.24. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una 1-forma diferencial cerrada, existe una función cubriente $p : \hat{X} \rightarrow X$ con $\hat{X}$ conexa, y una primitiva $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ de la 1-forma diferencial $p^*\omega$.*

Corolario 2.2.25. *Si X es una superficie de Riemann, $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferencial cerrada entonces existe una primitiva $f \in \mathcal{E}^{(1)}(\tilde{X})$ de $\pi^*\omega$.*

Demostración.

Sea $p : \hat{X} \rightarrow X$ la función cubriente dada por el teorema anterior y $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ una primitiva de $p^*\omega$, es decir, $dF = p^*\omega$. Como π es el cubriente universal existe una función que preserva fibras $\tau : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$. Definamos $f := \tau^*F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ y observemos que $\tau^*p^* = (p \circ \tau)^* = \pi^*$, luego tenemos lo siguiente

$$df = d(\tau^*F) = \tau^*(dF) = \tau^*(p^*\omega) = \pi^*\omega,$$

concluimos con lo anterior que f es una primitiva de $\pi^*\omega$. ■

Corolario 2.2.26. *En una superficie de Riemann simplemente conexa X toda 1-forma diferenciable cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tienen una primitiva $F \in \mathcal{E}(X)$.*

Demostración.

Como por hipótesis X es simplemente conexa, la función identidad $id : X \rightarrow X$ es su cubriente universal, así se tiene el resultado por el corolario anterior. ■

Con las herramientas anteriores ya estamos en posición de integrar 1-formas diferenciables cerradas, el siguiente teorema nos indica como hacerlo.

Teorema 2.2.27. *Sea X una superficie de Riemann y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal. Supongamos que $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ es una 1-forma diferencial cerrada y $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ es una primitiva de $p^*\omega$. Si $c : [0, 1] \rightarrow X$ es una curva continuamente diferenciable por partes y $\hat{c} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ es un levantamiento de c , tenemos entonces que*

$$\int_c \omega = F(\hat{c}(1)) - F(\hat{c}(0)).$$

Demostración.

Sea $v : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ una curva continuamente diferenciable por partes y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$.

Tomemos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ una partición de $[0, 1]$ y cartas (U_k, z_k) con $z_k = x_k + iy_k$ y tal que v es diferenciable en U_k . Sabemos que en cada U_k tenemos $\omega = f_k dx_k + g_k dy_k$, y además

$$p^* \omega = p^*(f_k dx_k + g_k dy_k) = p^* f_k d(p^* x_k) + p^* g_k d(p^* y_k),$$

luego

$$\begin{aligned} \int_v p^* \omega &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(p^* f_k(v(t)) \frac{d(p^* x_k)}{dt}(v(t)) + p^* g_k(v(t)) \frac{d(p^* y_k)}{dt}(v(t)) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(p \circ v(t)) \frac{dx_k(p \circ v(t))}{dt} + g_k(p \circ v(t)) \frac{dy_k(p \circ v(t))}{dt} \right) dt = \int_{p \circ v} \omega. \end{aligned}$$

En nuestro caso tenemos $c = p \circ \hat{c}$ y entonces

$$\int_{\hat{c}} p^* \omega = \int_{p \circ \hat{c}} \omega = \int_c \omega.$$

Por otro lado, como F es primitiva de $p^* \omega$, $dF = p^* \omega$, con lo cual se sigue

$$\int_{\hat{c}} p^* \omega = \int_{\hat{c}} dF = F(\hat{c}(1)) - F(\hat{c}(0)). \quad \blacksquare$$

Corolario 2.2.28. *Bajo las condiciones del teorema anterior, las siguientes afirmaciones son válidas.*

1. *La integral es independiente de la elección de la primitiva de $p^* \omega$.*
2. *La integral es independiente del levantamiento de la curva c .*

Demostración.

1. Sea G otra primitiva de $p^* \omega$, como tanto F y G son primitivas existe una constante a tal que $G = F + a$, con lo cual

$$\int_{\hat{c}} p^* \omega = \int_{\hat{c}} dG = G(\hat{c}(1)) - G(\hat{c}(0)) = F(\hat{c}(1)) - F(\hat{c}(0)) = \int_{\hat{c}} dF.$$

2. Sean u y v dos levantamientos de la curva c , como la cubriente universal $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es de Galois (teorema 1.4.7) existe una transformación deck $\sigma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \sigma = p$ y $v = \sigma \circ u$, tenemos así que $p^* \omega = (p \circ \sigma)^* \omega = \sigma^*(p^* \omega) = \sigma^*(dF) = d(\sigma^* F)$, por lo tanto $\sigma^* F$ es también primitiva de $p^* \omega$ y entonces $\sigma^* F - F = cte$. Luego

$$\begin{aligned} F(v(1)) - F(v(0)) &= F(\sigma \circ u(1)) - F(\sigma \circ u(0)) = F \circ \sigma(u(1)) - F \circ \sigma(u(0)) = \\ &= \sigma^* F(u(1)) - \sigma^* F(u(0)) = F(u(1)) - F(u(0)). \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor de la integral es el mismo para ambos levantamientos. \blacksquare

2.2.3. Períodos y sumandos de automorfía

El teorema 2.2.24 y sus consecuencias nos dan herramientas para encontrar primitivas de formas diferenciables cerradas, en esta sección se presentan unas integrales especiales, que reciben el nombre de períodos, además del concepto de sumandos de automorfía, estas dos nociones nos permitirán dar una condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de una primitiva para formas cerradas.

Teorema 2.2.29. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferencial cerrada.*

a) *Si $a, b \in X$ son dos puntos y $u, v : [0, 1] \rightarrow X$ son dos curvas homotópicas (definición 1.3.8) de un punto a hacia otro punto b , se tiene*

$$\int_u \omega = \int_v \omega.$$

b) *Si $u, v : [0, 1] \rightarrow X$ son dos curvas cerradas que son homotópicas libres (definición 1.3.9) entonces*

$$\int_u \omega = \int_v \omega.$$

Demostración.

a) Por el teorema 1.3.11 los respectivos levantamientos de las curvas tienen los mismos puntos finales, el resultado se sigue del teorema 2.2.27.

b) Supongamos que las curvas u y v tienen como punto inicial y final a x_0 y x_1 , respectivamente, consideremos una curva w que une x_0 con x_1 tal que u es homotópica a $w \cdot v \cdot w^{-1}$, luego por el inciso anterior se tiene

$$\int_u \omega = \int_{w \cdot v \cdot w^{-1}} \omega = \int_w \omega + \int_v \omega - \int_w \omega = \int_v \omega.$$

■

El resultado anterior justifica que la siguiente definición tenga sentido.

Definición 2.2.30. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}(X)$ una forma diferencial cerrada, definimos los **períodos de ω** como sigue*

$$a_\sigma := \int_\sigma \omega, \quad \sigma \in \pi_1(X),$$

eligiendo una curva representante de la clase de homotopía de σ e integrando a lo largo de esa curva.

Observe que si $\sigma, \tau \in \pi_1(X)$ entonces $a_{\sigma\tau} = a_\sigma + a_\tau$, con lo cual tenemos un morfismo de grupos, el cual recibe un nombre.

Definición 2.2.31. *Bajo la notación de arriba el homomorfismo de grupos $\pi_1(X) \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ es llamado **morfismo de períodos asociado a la forma diferencial cerrada ω** .*

Ejemplo 2.2.32. Sea $X = \mathbb{C}^\times$, por el ejemplo 1.4.8, sabemos que $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}$, notemos que un generador de $\pi_1(\mathbb{C}^\times)$ está representado por la curva $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ dada por $u(t) = e^{2\pi ti}$. Sea $\omega := \frac{dz}{z}$ con z la coordenada canónica, tenemos entonces que

$$\int_u \omega = \int_u \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

por lo tanto el morfismo de períodos de ω es

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [u^n] \simeq n &\longmapsto 2\pi ni \end{aligned}.$$

Por otro lado, dada una superficie de Riemann X , $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal y sea $G := \text{Deck}(\tilde{X}/X)$. Si $\sigma \in G$ y $f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entonces definamos $\sigma f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\sigma f := f \circ \sigma^{-1}$.

Con propiedades de operaciones con funciones se puede verificar fácilmente las siguientes propiedades:

1. $\sigma(f + g) = \sigma f + \sigma g$,
2. $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$,
3. $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$.

En lo siguiente G denotará $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ a menos que se indique otra cosa.

Definición 2.2.33. Una función $f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada **aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constante**, si existen constantes $a_\sigma \in \mathbb{C}$, $\sigma \in G$, tales que

$$f - \sigma f = a_\sigma, \quad \text{para cada } \sigma \in G.$$

Las constantes a_σ , que están únicamente determinadas por f , son llamadas los **sumandos de automorfía de f** .

Observación 2.2.34. Se tiene un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \text{Deck}(\tilde{X}/X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \sigma &\longmapsto a_\sigma \end{aligned}.$$

En efecto, para cualesquiera $\sigma, \tau \in G$, como $f - \tau f = a_\tau$ entonces

$$a_{\sigma\tau} = f - \sigma\tau f = (f - \sigma f) + (\sigma f - \sigma\tau f) = a_\sigma + a_\tau.$$

El siguiente resultado relaciona los períodos con los sumandos de automorfía y nos encamina al resultado sobre primitivas que queremos. La demostración se puede consultar en la página 74 de [3].

Teorema 2.2.35. Sea X una superficie de Riemann y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal.

- a) Si $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ es una forma diferenciable cerrada y $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ es una primitiva de $p^*\omega$, entonces F es aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constante. Más aún, estos sumandos son, con respecto al isomorfismo $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \simeq \pi_1(X)$, exactamente los períodos de ω .
- b) Recíprocamente, supongamos que $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ es una función aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constante, existe precisamente una forma diferenciable cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tal que $dF = p^*\omega$.

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos los siguientes resultados.

Proposición 2.2.36. Sean Γ un retículo en $\mathbb{C}$ y $X := T_\Gamma$ el toro asociado. Dado un morfismo de grupos

$$a : \pi_1(X) \longrightarrow (\mathbb{C}, +),$$

existe una única 1-forma cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ cuyo morfismo de períodos es igual al morfismo a .

Demostración.

Sean $\Gamma = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2$ y $p : \mathbb{C} \longrightarrow X$ la proyección natural, la cual es además el cubriente universal del toro. Sea $G = \text{Deck}(X)$ el grupo de transformaciones Deck, por el inciso 2 del ejemplo 1.4.8, sabemos que G actúa por traslaciones.

La idea de la prueba será la siguiente: buscar una función $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que sea aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constantes, luego por b) del teorema 2.2.35, se tendría que existe exactamente una forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tal que $dF = p^*\omega$. Por otro lado, dado $\beta_i = p \circ \gamma_i$, $i = 1, 2$, donde $\gamma_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ está dada por $t \mapsto t\alpha_i$, como se vio en el ejemplo 1.4.8, se sabe que $\pi(X) = \langle \beta_1, \beta_2 : \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1 \rangle$, por lo tanto, basta probar que la función F que buscaremos satisface que $F(\alpha_i) - F(0) = a(\beta_i)$, y en consecuencia,

$$\int_{\beta_i} \omega = \int_{p \circ \gamma_i} \omega = \int_{\gamma} p^*\omega = \int_{\gamma} dF = F(\gamma_i(1)) - F(\gamma_i(0)) = F(\alpha_i) - F(0) = a(\beta_i).$$

Demos entonces una función F que cumpla lo anterior.

Primero, sean $\alpha_1 = (a_1, b_1)$, $\alpha_2 = (a_2, b_2)$, $\beta_1 = (c_1, d_1)$ y $\beta_2 = (c_2, d_2)$. Observemos que como α_1 y α_2 son $\mathbb{R}$ linealmente independientes entonces $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Consideremos ahora $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{D} ((b_2c_1 - b_1c_2)x + (a_1c_2 - a_2c_1)y, (b_2d_1 - b_1d_2)x + (a_1d_2 - a_2d_1)y).$$

Afirmamos que la función anterior es $\mathbb{R}$ -lineal.

En efecto, sean $(x, y), (z, w) \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$, haciendo $A := b_2c_1 - b_1c_2$, $B := a_1c_2 - a_2c_1$, $C := b_2d_1 - b_1d_2$, $E := a_1d_2 - a_2d_1$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
F((x, y), r(z, w)) &= F((x + rz, y + rw)) \\
&= \frac{1}{D}(A(x + rz) + B(y + rw), C(x + rz) + E(y + rw)) \\
&= \frac{1}{D}(\underline{Ax} + rAz + \underline{By} + rBw, \underline{Cx} + rCz + \underline{Ey} + rEw) \\
&= \frac{1}{D}[(Ax + By, Cx + Ey) + r(Az + Bw, Cz + Ew)] \\
&= \frac{1}{D}(Ax + By, Cx + Ey) + r\frac{1}{D}(Az + Bw, Cz + Ew) \\
&= F((x, y)) + rF((z, w)).
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que $F(0) = 0$. Ahora veamos que $F(\alpha_1) = \beta_1$.

$$\begin{aligned}
F(\alpha_1) &= F((a_1, b_1)) \\
&= \frac{1}{D}(a_1(b_2c_1 - b_1c_2) + b_1(a_1c_2 - a_2c_1), a_1(b_2d_1 - b_1d_2) + b_1(a_1d_2 - a_2d_1)) \\
&= \frac{1}{D}(a_1b_2c_1 - \underline{a_1b_1c_2} + \underline{a_1b_1c_2} - a_2b_1c_1, a_1b_2d_1 - \underline{a_1b_1d_2} + \underline{a_1b_1d_2} - a_2b_1d_1) \\
&= \frac{1}{D}((a_1b_2 - a_2b_1)c_1, (a_1b_2 - a_2b_1)d_1) = (c_1, d_1) = \beta_1.
\end{aligned}$$

De igual manera se tiene que $F(\alpha_2) = \beta_2$.

$$\begin{aligned}
F(\alpha_2) &= F((a_1, b_1)) \\
&= \frac{1}{D}(a_2(b_2c_1 - b_1c_2) + b_2(a_1c_2 - a_2c_1), a_2(b_2d_1 - b_1d_2) + b_2(a_1d_2 - a_2d_1)) \\
&= \frac{1}{D}(\underline{a_2b_2c_1} - a_2b_1c_2 + a_1b_2c_2 - \underline{a_2b_2c_1}, \underline{a_2b_2d_1} - a_2b_1d_2 + a_1b_2d_2 - \underline{a_2b_2d_1}) \\
&= \frac{1}{D}((a_1b_2 - a_2b_1)c_2, (a_1b_2 - a_2b_1)d_2) = (c_2, d_2) = \beta_2.
\end{aligned}$$

Finalmente, afirmamos que F es aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constante, en efecto, sea $\sigma \in G$, tenemos entonces que σ es una traslación $(x, y) \mapsto (x + \zeta_1, y + \zeta_2)$ donde $(\zeta_1, \zeta_2) \in \Gamma$. Luego $F - \sigma F = F - F \circ \sigma^{-1} = -(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}$.

Con todo lo anterior, tenemos que F satisface lo deseado,

$$\int_{\beta_i} \omega = F(\alpha_i) - F(0) = a(\beta_i).$$

■

Teorema 2.2.37. *Sea X una superficie de Riemann. Una 1-forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tiene primitiva $f \in \mathcal{E}(X)$ si y solo si todos los períodos de ω son cero.*

Demostración.

Supongamos que $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ es una 1-forma cerrada que tiene una primitiva $f \in \mathcal{E}(X)$, es decir, $df = \omega$. Además, recordemos que una superficie de Riemann es, en particular, simplemente conexa, lo cual implica que su primer grupo fundamental es cero. Luego, por definición de los períodos de ω , se tiene lo siguiente

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma} df = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = 0, \quad \sigma \in \pi_1(X),$$

lo anterior es para toda $\sigma \in \pi_1(X)$.

Recíprocamente, supongamos que todos los períodos de ω son cero. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal, por el corolario 2.2.25 existe una primitiva $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ de $p^*\omega$. Luego, por el inciso a) del teorema 2.2.35, los sumandos de automorfía de F son los períodos de ω , es decir, son cero. Lo anterior implica que existe una función $f \in \mathcal{E}(X)$ tal que $F = p^*f$.

Tenemos así que f es una primitiva de ω , en efecto,

$$p^*\omega = dF = d(p^*f) = p^*(df),$$

como p^* es inyectiva, se sigue que $\omega = df$. ■

Corolario 2.2.38. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$ dos formas holomorfas que definen el mismo morfismo de períodos $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$, se tiene entonces que $\omega_1 = \omega_2$.*

Demostración.

Consideremos la forma $\omega := \omega_1 - \omega_2$, dado que ω_1 y ω_2 definen el mismo morfismo de períodos por el teorema 2.2.35 ω tiene una primitiva $f \in \mathcal{O}(X)$. Como X es compacta, por el corolario 1.2.6, f es constante y por lo tanto $\omega = df = 0$. ■

2.2.4. Integración de 2-formas

En esta sección damos por entendido que el lector conoce la teoría de integración de 2-formas en el plano complejo o en variedades diferenciables, así como también el concepto de particiones de la unidad, en caso contrario, puede consultar [3], [10] o [19]. No hay que olvidar que una superficie de Riemann es, en particular, una variedad diferenciable así que las definiciones y resultados aquí presentados pueden resultar conocidos.

Definición 2.2.39. *Sea X una superficie de Riemann. El **sporte de una forma** ω en X es el conjunto cerrado*

$$\text{supp}(\omega) := \overline{\{a \in X : \omega(a) \neq 0\}},$$

*análogamente, se define el **sporte de una función** $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.*

Definición 2.2.40. *Sean X una superficie de Riemann, $\varphi : U \rightarrow V$ una carta de X y $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ una forma cuyo soporte es compacto y contenido en U , como φ es biholomorfa, $(\varphi^{-1})^*\omega$ es una forma con soporte compacto en $V \subset \mathbb{C}$, se define entonces*

$$\iint_X \omega := \iint_U \omega := \iint_V (\varphi^{-1})^*\omega.$$

Proposición 2.2.41. *La definición anterior es independiente de la elección de cartas.*

Demostración.

Sea $\varphi : U_1 \longrightarrow V_1$ otra carta con $\text{supp}(\omega) \subset U_1$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $U = U_1$, en caso contrario consideramos la intersección (ya que esta contiene al soporte de ω).

Consideremos $\psi := \varphi_1 \circ \varphi^{-1} : V \longrightarrow V_1$, la cual es una función biholomorfa. Notemos que

$$\psi^*((\varphi_1^{-1})^*\omega) = (\varphi_1^{-1} \circ \psi)^*\omega = (\varphi^{-1})^*\omega,$$

con lo cual

$$\iint_V \psi^*((\varphi_1^{-1})^*\omega) = \iint_V (\varphi^{-1})^*\omega. \quad (1)$$

Por otro lado, de la definición anterior se tiene que

$$\iint_V \psi^*((\varphi_1^{-1})^*\omega) = \iint_{V_1} (\varphi_1^{-1})^*\omega, \quad (2)$$

luego, de (1) y (2) tenemos lo siguiente

$$\iint_V (\varphi^{-1})^*\omega = \iint_{V_1} (\varphi_1^{-1})^*\omega.$$

Por lo tanto $\iint_X \omega$ está definida independientemente de la carta elegida. ■

La definición anterior es bajo la hipótesis de que el soporte de la 2-forma está contenido en una carta, para poder eliminar dicha condición debemos usar particiones de la unidad.

Definición 2.2.42. *Sea X una variedad diferenciable y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X . Una **partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$** es una familia de funciones diferenciables $(g_i)_{i \in I}$, $g_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

- I) $0 \leq g_i \leq 1$, para todo $i \in I$.
- II) $\text{supp}(g_i) \subset U_i$, para todo $i \in I$.
- III) La familia de soportes $\text{supp}(g_i)$, $i \in I$, es localmente finita, es decir, cada punto $a \in X$ tiene una vecindad V tal que $V \cap \text{supp}(g_i) \neq \emptyset$, para un número finito $i \in I$.
- IV) $\sum_{i \in I} g_i = 1$.

Notación 2.2.43. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, si A es un subconjunto compacto relativo a B , escribimos $A \Subset B$, recordemos que esto significa que la cerradura de A (denotada por $\overline{A}$) es compacta y está

contenida en B .

Definición 2.2.44. Sean X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ arbitraria con soporte compacto, consideremos una cantidad finita de cartas $\varphi_k : U_k \rightarrow V_k$, con $k = 1, \dots, n$ tal que $\text{supp}(\omega) \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$. Tomemos una partición de la unidad subordinada a la cubierta formada por las cartas U_k y denotémosla por $(f_k)_k$ con $f_k \in \mathcal{E}(X)$. Tenemos así que $f_k \omega$ es una forma diferencial con $\text{supp}(f_k) \Subset U$ y $\omega = \sum_{k=1}^n f_k \omega$. Se define entonces

$$\iint_X \omega := \sum_{k=1}^n \iint_X f_k \omega.$$

Cuando se habla de integración de formas, dos resultados imprescindibles son el teorema de Stokes y el teorema del residuo, los cuales enunciamos a continuación; sus demostraciones se pueden consultar en la bibliografía mencionada al inicio de la sección.

Teorema 2.2.45. Sea U un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y $A \subset U$ un conjunto compacto con frontera suave ∂A , para cada forma diferenciable $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ se tiene lo siguiente

$$\iint_A d\omega = \int_{\partial A} \omega,$$

donde la frontera está orientada de tal manera que el vector normal de A que apunta hacia afuera y el vector tangente a ∂A en este orden, determina una base orientada del plano.

Definición 2.2.46. Sean Y un abierto de una superficie de Riemann X , un punto a en Y y ω una 1-forma holomorfa en $Y \setminus \{a\}$. Sea (U, z) una carta coordenada de a tal que $U \subset Y$ y $z(a) = 0$. Con lo anterior, en $U \setminus \{a\}$, podemos escribir $\omega = f dz$, donde $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$. Sea

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

la expansión en serie de Laurent de f al rededor de a . Se define al coeficiente c_{-1} como el **residuo de ω en a** y es denotado por $c_{-1} = \text{Res}_a(\omega)$.

Observe que la definición anterior se hace eligiendo una carta de a , sin embargo, es posible probar que la definición es independiente de esta elección, dicha prueba se puede consultar en la página 63 de [3].

Teorema 2.2.47. Sea X una superficie de Riemann compacta y $a_1, \dots, a_n$ puntos distintos en X . Sea $X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, para cada 1-forma holomorfa $\omega \in \Omega(X')$ se tiene

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k}(\omega) = 0.$$

Ahora veremos algunos resultados sobre integración de 2-formas en superficies de Riemann, los cuales nos serán de utilidad.

Teorema 2.2.48. *Sea X una superficie de Riemann, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferenciable con soporte compacto, se tiene entonces*

$$\iint_X d\omega = 0.$$

Demostración.

Mediante la multiplicación por una partición de la unidad, podemos escribir $\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k$ donde cada ω_k tiene soporte compacto, el cual está completamente contenida en una carta (por la definición 2.2.42). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $X = \mathbb{C}$, con esto basta probar el caso en que $\omega_k = \omega$ para algún k . Eligiendo $R > 0$ tan grande que $\text{supp}(\omega) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, se obtiene que

$$\iint_{\mathbb{C}} d\omega = \iint_{|z| \leq R} d\omega = \iint_{|z|=R} \omega = \iint_{|z|=R} 0 = 0.$$

■

2.3. Grupo de DeRham

El objetivo de esta sección es presentar el grupo de DeRham, el cual será primordial para la demostración del teorema del mapeo de Riemann. Presentaremos además una forma de calcular este grupo a través de la cohomología de Čech.

2.3.1. Grupo de cohomología de Čech

En esta sección X representará un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre X , a menos que se indique lo contrario.

Definición 2.3.1. *Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X , para $q \geq 0$ se define el **grupo de q -cocadenas de $\mathcal{F}$ respecto a $\mathcal{U}$** mediante*

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(j_0, \dots, j_q) \in J^{q+1}} \mathcal{F}(U_{j_0 \dots j_q}).$$

Observemos que al ser $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ un producto directo de grupos abelianos, es también un grupo abeliano.

Definición 2.3.2. *Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ cubierta abierta de X se define el **operador cofrontera***

$$\delta_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

del siguiente modo, para $f := (f_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in J^{q+1}}$ se tiene

$$\delta_q(f)_{i_0, \dots, i_{q+1}} := \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}}|_{U_{i_0, \dots, i_q}}.$$

Ejemplo 2.3.3. Para entender un poco la notación del operador cofrontera veamos los siguientes ejemplos.

1. Cuando $q = 0$,

$$\begin{aligned} \delta_0 : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (f_j)_{j \in J} &\longmapsto (f_j|_{U_{ij}} - f_i|_{U_{ij}})_{i, j \in J^2} \end{aligned}$$

2. Cuando $q = 1$,

$$\begin{aligned} \delta_1 : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (g_{ij})_{i, j \in J^2} &\longmapsto (g_{jk}|_{U_{ijk}} - g_{ik}|_{U_{ijk}} + g_{ij}|_{U_{ijk}})_{i, j, k \in J^3} \end{aligned}$$

3. Cuando $q = 2$,

$$\begin{aligned} \delta_2 : C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^3(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (h_{ijk})_{i, j, k \in J^3} &\longmapsto (h_{jkl}|_{U_{ijkl}} - h_{ikl}|_{U_{ijkl}} + h_{ijl}|_{U_{ijkl}} - h_{ijk}|_{U_{ijkl}})_{i, j, k, l \in J^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.4. Sea $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ el círculo unitario, tomemos la cubierta $\mathcal{U} = \{U, V\}$ tal como se ve en la figura 2.2, observemos que $U \cap V = W_1 \cup W_2$.

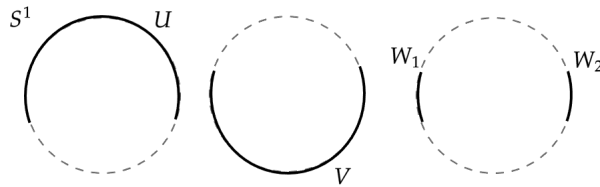


Figura 2.2: Cubierta abierta para S^1 .

Consideremos $\mathcal{F} := \mathbb{Z}_X$ tenemos que los grupos de cocadenas son los siguientes:

- $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z}_X(U) \times \mathbb{Z}_X(V) = \mathbb{Z}^2$.
- $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z}_X(U \cap V) = \mathbb{Z}_X(W_1 \cup W_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$.
- $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q \geq 2$.

Por otro lado se tienen los siguientes operadores cofronteras,

- Para $q = 0$,

$$\begin{aligned} \delta_0 : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (m, n) &\longmapsto (n - m, n - m) \end{aligned}.$$

■ Para $q = 1$,

$$\begin{aligned} \delta_1 : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow 0 \\ (m, n) &\longmapsto 0 \end{aligned}.$$

Observemos que como $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q \geq 2$ entonces $\delta_q = 0$ para $q \geq 1$.

Proposición 2.3.5. *El operador δ_q de la definición anterior es un morfismo de grupos.*

Demostración.

Sean $f = (f_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in J}$ y $g = (g_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in J} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, usando el hecho de que la suma de las familias es coordenada a coordenada y que la función restricción es un morfismo, en $U_{i_0, \dots, i_q}$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta_q(f + g)_{i_0, \dots, i_{q+1}} &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \left[(f + g)_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1} \in J} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \left(f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}} + g_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}} + \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j g_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}} \\ &= \delta_q(f)_{i_0, \dots, i_{q+1}} + \delta_q(g)_{i_0, \dots, i_{q+1}}, \end{aligned}$$

con lo anterior podemos concluir que $\delta_q(f + g) = \delta_q(f) + \delta_q(g)$. ■

Definición 2.3.6. Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X , para $q \geq 0$ se define el **grupo de q -cociclos** como

$$Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \ker(\delta_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})),$$

y para $q \geq 1$ se define el **grupo de q -cofronteras** mediante

$$B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{im}(\delta_{q-1} : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})).$$

Observación 2.3.7. Por definición una 1-cocadena $(f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es un 1-cociclo si y solo si

$$f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0, \quad (1)$$

para todo $i, j, k \in I$, considerando la igualdad en U_{ijk} .

De lo anterior se tienen las siguientes consecuencias:

- a) Haciendo $i = j = k$ en la ecuación (1), se tiene $f_{ii} = 0$, para todo $i \in I$.
- b) Haciendo $i = k$ en (1) usando a), tenemos $f_{ij} = -f_{ji}$, para todo $i, j \in I$.

Proposición 2.3.8. *La siguiente sucesión*

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_1} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_2} \dots$$

es un complejo de cadena, es decir $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$, para todo q .

Demostración.

Sea $f := (f_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in I} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$,

$$\begin{aligned} \delta_{q+1}(\delta_q f)_{i_0, \dots, i_{q+2}} &= \sum_{r=1}^{q+2} (-1)^r \delta_q(f)_{i_0, \dots, \hat{i}_r, \dots, i_{q+2}} \\ &= \sum_{k < r} (-1)^r (-1)^k f_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, \hat{i}_r, \dots, i_{q+2}} + \sum_{r < k} (-1)^r (-1)^{k-1} f_{i_0, \dots, \hat{i}_r, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{q+2}} = 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que, generalizando el inciso b) de la observación 2.3.7, se tiene lo siguiente

$$f_{i_0, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots, i_q} = -f_{i_0, \dots, i_{n+1}, i_n, \dots, i_q}.$$

■

La proposición anterior nos dice que

$$\text{im}(\delta_{q-1}) \subset \ker(\delta_q), \quad \text{para cada } q \geq 1.$$

Definición 2.3.9. *Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X , se define el q -ésimo grupo de cohomología de Čech mediante el cociente*

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Ejemplo 2.3.10. *Calculemos los grupos de cohomología de Čech para la gavilla $\mathbb{Z}_{S^1}$ sobre el círculo unitario S^1 , es decir, $\mathcal{F} := \mathbb{Z}_{S^1}$ y $\mathcal{U} = \{U, V\}$ la cubierta usada en el ejemplo 2.3.4.*

■ $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

En este caso tenemos que $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$, por lo tanto, $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Para calcular este último grupo, analicemos el morfismo δ_0 , el cual está dado como sigue

$$\begin{aligned} \delta_0 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ (m, n) &\longrightarrow (n - m, n - m) \end{aligned},$$

por lo tanto $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(\delta_0) = \{(n, n) \in \mathbb{Z}^2 : n \in \mathbb{Z}\}$ entonces $\ker(\delta_0) = \mathbb{Z}$.

Concluimos así que $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z}$.

■ $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Tenemos que $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{im}(\delta_0) = \{(n, n) \in \mathbb{Z}^2 : n \in \mathbb{Z}\} =: \Delta$, y $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(\delta_1) = C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Luego, $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \Delta$ para calcular más explícitamente este último cociente, usaremos el 1er teorema de isomorfismo, observe que mediante el diagrama de la figura 2.3 vemos que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \Delta \simeq \mathbb{Z}$, es decir, $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}$.

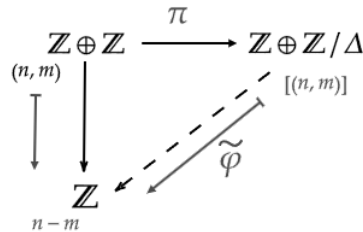


Figura 2.3: Isomorfismo entre $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \Delta$ y $\mathbb{Z}$.

Finalmente, para $q \geq 2$ observemos que $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ y como $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es subgrupo de $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y este a su vez es subgrupo de $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se sigue que $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Concluimos lo siguiente,

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \geq 2 \end{cases}.$$

Proposición 2.3.11. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in I}$ una cubierta abierta de X y $\mathcal{F}$ una gavilla, tenemos lo siguiente:

- a) Si $(f_j)_{j \in J} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ entonces existe $f \in \mathcal{F}(X)$ tal que $f|_{U_j} = f_j$ para toda $j \in J$.
- b) $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Demostración.

- a) Sea $f = (f_j)_{j \in J} \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ representando un elemento de $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, así en U_{ij} tenemos lo siguiente,

$$0 = \delta_0(f)_{i,j} = f_j - f_i,$$

por lo que $f_j = f_i$. Por los axiomas de gavillas se sigue que existe $f \in \mathcal{F}(X)$ tal que $f|_{U_j} = f_i$.

- b) Como no hay 0-cofronteras, H^0 es igual al grupo de 0-cociclos $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, para obtener el resultado veamos que $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es isomorfo a $\mathcal{F}(X)$. Definamos la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}(X) &\longrightarrow Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ f &\longmapsto (f_i)_{i \in J} \end{aligned},$$

donde $f_i = f|_{U_i}$, note que la función está bien definida ya que $\delta_0((f_i)_{i \in J})_{i,j} = f_j - f_i = f - f = 0$ por lo tanto $(f_i)_{i \in J} \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Por otro lado, como la suma de familias se realiza coordenada a coordenada es fácil ver que esta función es morfismo de grupos, en efecto, si $f, g \in \mathcal{F}(X)$, $\varphi(f + g) = (h_i)_{i \in J}$ donde $h_i = (f + g)|_{U_i}$, como $(f + g)|_{U_i} = f|_{U_i} + g|_{U_i}$ se tiene que $\varphi(f + g) = f|_{U_i} + g|_{U_i} = \varphi(f) + \varphi(g)$ por lo tanto φ es un morfismo de grupos.

Más aún, el inciso a) nos dice que este morfismo es sobreyectivo. Veamos ahora que también es inyectivo y con ello un isomorfismo. Sean $f, g \in \mathcal{F}(X)$ tales que $\varphi(f) = \varphi(g)$, esto es $(f_i)_{i \in J} = (g_i)_{i \in J}$ donde $f_i = f|_{U_i}$ y $g_i = g|_{U_i}$ se sigue entonces que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para todo i , esto implica que $f = g$.

Con todo lo anterior se concluye que $\mathcal{F}(X)$ es isomorfo a $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. ■

Para lo siguiente necesitaremos los conceptos de *conjunto dirigido*, *familias dirigidas de morfismos* y *límite directo*, en caso de que el lector no este familiarizado con estos, puede consultarlo en [15] al igual que algunas definiciones y propiedades básicas.

Definición 2.3.12. Sean $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ y $\mathcal{V} = \{V_k\}_{k \in K}$ cubiertas abiertas del espacio X , $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X . Se dice que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento de $\mathcal{U}$** si existe $\lambda : K \rightarrow J$ tal que $V_k \subset U_{\lambda(k)}$ para todo $k \in K$.

Si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ lo denotamos por $\mathcal{V} < \mathcal{U}$.

Observación 2.3.13. Es claro que $\mathcal{U} < \mathcal{U}$ y que si $\mathcal{W} < \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ entonces $\mathcal{W} < \mathcal{U}$.

Definición 2.3.14. Sean $\mathcal{V} = \{V_k\}_{k \in K}$, $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ cartas abiertas tales que $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ respecto a $\lambda : K \rightarrow J$. Se define

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\ f = (f_{j_0, \dots, j_q})_{j_0, \dots, j_q \in J} &\longmapsto g = (g_{k_0, \dots, k_q})_{k_0, \dots, k_q \in K} \end{aligned},$$

donde

$$g_{k_0, \dots, k_q} := f_{\lambda(k_0), \dots, \lambda(k_q)}|_{V_{k_0, \dots, k_q}}.$$

Proposición 2.3.15. La función de la definición anterior es un morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama, es decir, $\delta_q \circ \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \circ \delta_q$.

Demostración.

La prueba de que $\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ es un morfismo de grupos es similar a como se hizo en la proposición 2.3.5 y solo veremos que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}} & C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\
 \delta_q \downarrow & & \downarrow \delta_q \\
 C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}} & C^{q+1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})
 \end{array}$$

Figura 2.4: Morfismo entre grupos de cocadenas.

Sea $f := (f_{j_0, \dots, j_q})_{j_0, \dots, j_q \in J} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(\delta(f)_q)_{k_0, \dots, k_{q+1}} &= \delta_q(f)_{\lambda(k_0), \dots, \lambda(k_{q+1})} |_{k_0, \dots, k_{q+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{\lambda(k_0), \dots, \widehat{\lambda(k_j)}, \dots, \lambda(k_{q+1})} |_{k_0, \dots, k_{q+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \left(f_{\lambda(k_0), \dots, \widehat{\lambda(k_j)}, \dots, \lambda(k_{q+1})} \right) |_{k_0, \dots, k_{q+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f)_{k_0, \dots, \widehat{k_j}, \dots, k_{q+1}} = (\delta_q(\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f)))_{k_0, \dots, k_{q+1}}.
 \end{aligned}$$

■

Proposición 2.3.16. La función $\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ de la definición 2.3.14 induce un morfismo de grupos,

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

el cual será denotado de igual manera como $\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$.

Demostración.

Para simplificar la notación, hagamos $\lambda := \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$; dado que el diagrama de la figura 2.4 es conmutativo se tiene que

$$\lambda(Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \text{ y } \lambda(B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}). \quad (1)$$

Consideremos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc}
 Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{U}}} & H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\
 \lambda \downarrow & & \swarrow \exists! \lambda \\
 Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & & \\
 \pi_{\mathcal{V}} \downarrow & \nearrow & \\
 H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & &
 \end{array}$$

Por la propiedad universal del cociente y (1) tenemos que existe un único morfismo

$$\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

tal que $\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}([f]) = [\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f)]$. ■

Observación 2.3.17. *Con todo lo anterior tenemos que el conjunto*

$$\{\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) : \mathcal{V} < \mathcal{U}\}$$

es un sistema dirigido de grupos abelianos.

Definición 2.3.18. *Para un espacio topológico X , una gavilla $\mathcal{F}$ sobre X y para $q \geq 0$ se define su q -ésimo grupo de cohomología de Čech como sigue*

$$H_X^1(\mathcal{F}) := H^q(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

donde este último símbolo representa el límite directo.

2.3.2. Sucesiones exactas

En esta sección veremos como las sucesiones de gavillas nos permiten calcular la cohomología de Čech, así como también el grupo de DeRham.

Definición 2.3.19. *Sea X una superficie de Riemann, definimos el **grupo de DeRham** como*

$$H_{DR}^1(X) := \mathcal{L}(X) / \text{im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X)).$$

El siguiente resultado será presentado sin demostración, ya que usa argumentos de sucesiones y convergencia de funciones complejas, lo cual no es relevante para el resto del trabajo, nos interesa el enunciado para poder aplicarlo más adelante, su demostración se puede consultar en la sección 13 de [3] o en el capítulo 4 de [13].

Teorema 2.3.20. *(Lema de Dolbeault). Sea $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, con $0 < R \leq \infty$, para cada $g \in \mathcal{E}(X)$ existe $f \in \mathcal{E}(X)$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Definición 2.3.21. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas sobre un espacio topológico X y sea*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

*una sucesión de morfismos de gavillas. Se dice que dicha sucesión es **exacta** si para cada $x \in X$ se tiene que la siguiente sucesión*

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x,$$

es exacta, es decir, $\ker(\psi_x) = \text{im}(\phi_x)$.

Sea X un espacio topológico, $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre X , por la proposición 2.3.11 recordemos que $H_X^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ y $H_X^0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$, entonces α induce un morfismo $\alpha^0 : H_X^0(\mathcal{F}) \rightarrow H_X^0(\mathcal{G})$, donde $\alpha^0 = \alpha_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$.

Intuitivamente, ahora nos gustaría exhibir un morfismo $\alpha^1 : H_X^1(\mathcal{F}) \rightarrow H_X^1(\mathcal{G})$, los resultados siguientes están dedicados a dar la existencia de este morfismo, y más aún, veremos que existe un *morfismo conexión* que toma elementos de $H_X^0(\mathcal{F})$ y devuelve elementos de $H_X^1(\mathcal{F})$.

Comencemos considerando los morfismos

$$\varphi_{U_j} : \mathcal{F}(U_j) \rightarrow \mathcal{G}(U_j), \quad \varphi_{U_{ij}} : \mathcal{F}(U_{ij}) \rightarrow \mathcal{G}(U_{ij}),$$

es posible definir lo siguiente

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{U}} : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \\ (f_{ij})_{i,j \in J} &\mapsto (\varphi_{U_{ij}}(f_{ij}))_{i,j \in J} \end{aligned}.$$

Proposición 2.3.22. Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X entonces se tiene lo siguiente

$$a) \quad \varphi_{\mathcal{U}}(Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

$$b) \quad \varphi_{\mathcal{U}}(B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

Demostración.

a) Sea $(f_{ij})_{i,j \in J} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, sobre U_{ijk} se tiene que $0 = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}$ para todo $i, j, k \in J$.

Luego, en $\mathcal{G}(U_{ijk})$ se tiene

$$0 = \varphi_{U_{jk}}(f_{jk}) - \varphi_{U_{ik}}(f_{ik}) + \varphi_{U_{ij}}(f_{ij}),$$

lo cual implica que $(\varphi_{U_{ij}}(f_{ij}))_{i,j \in J} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

b) Recordemos que el operador cofrontera δ_q está asociado a alguna gavilla, para evitar complicar la notación, en esta demostración denotaremos como δ_q al operador cofrontera asociado a ambas gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$.

Sea $f = (f_{ij})_{i,j \in J} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que $f = \delta_0(g)$ para algún $g \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, con $g = (g_i)_{i \in J}$ con $g_i \in \mathcal{F}(U_j)$, tenemos entonces que $f_{ij} = g_j - g_i$, donde la igualdad es en $\mathcal{F}(U_{ij})$. Luego, en $\mathcal{G}(U_{ij})$, se tiene que $\varphi_{U_{ij}}(f_{ij}) = \varphi_{U_j}(g_j) - \varphi_{U_i}(g_i)$, esto último implica que $\varphi_{\mathcal{U}}(f) = \delta_0(\tilde{g})$ donde $\tilde{g} = (\varphi_{U_j}(g_j))_{j \in J} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

Con todo lo anterior se concluye que $\varphi_{\mathcal{U}}(B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. ■

La proposición anterior nos dice que la función $\varphi_{\mathcal{U}}$ envía cociclos en cociclos y cofronteras en cofronteras y por lo tanto induce un morfismo que, al igual que la función entre cocadenas definida arriba, denotaremos por $\varphi_{\mathcal{U}}$,

$$\varphi_{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

La colección de morfismos $\varphi_{\mathcal{U}}$, donde $\mathcal{U}$ varía sobre toda la colección de cubiertas abiertas de X , de esta manera, utilizando la propiedad universal del límite directo para la familia de morfismos entre los grupos de cohomología, se induce el morfismo que buscamos, $\alpha^1 : H_X^1(\mathcal{F}) \longrightarrow H_X^1(\mathcal{G})$, tal como se muestra en el diagrama de la figura 2.5.

$$\begin{array}{ccc}
 H_X^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad \exists! \alpha^1 \quad} & H_X^1(\mathcal{G}) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad \varphi_{\mathcal{U}} \quad} & H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \\
 \downarrow \rho_{\mathcal{U},V} & \searrow & \downarrow r_{\mathcal{U},V} \\
 H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad \phi_{\mathcal{V}} \quad} & H^1(\mathcal{V}, \mathcal{G})
 \end{array}$$

Figura 2.5: Morfismo entre $H_X^1(\mathcal{F})$ y $H_X^1(\mathcal{G})$.

Pasemos ahora a presentar el *morfismo conexión* del que se hablo anteriormente, para ello, consideremos $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ gavillas sobre un espacio topológico X , las cuales, supondremos que forman la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

Por lo hecho anteriormente sabemos que se induce la siguiente sucesión de morfismos

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_X^0(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha^0} & H_X^0(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta^0} & H_X^0(\mathcal{H}) \\
 & & H_X^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha^1} & H_X^1(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta^1} & H_X^1(\mathcal{H})
 \end{array}$$

Siguiendo la notación de lo hecho anteriormente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.3.23. *Existe un morfismo (llamado **morfismo conexión**)*

$$\delta^* : H_X^0(\mathcal{H}) \longrightarrow H_X^1(\mathcal{F}).$$

Demostración.

Sea $h \in H_X^0(\mathcal{H}) = \mathcal{H}(X)$ (proposición 2.3.11), como $\mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es exacta, se sigue que $\mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$ es también exacta, lo cual implica que β_x es un epimorfismo, por lo tanto $h_x = \beta_x(g_x)$ para algún $g_x \in \mathcal{G}_x$ entonces existe un abierto $U_x \subset X$, con $x \in U_x$ tal que $g^{(x)} \in \mathcal{G}(U_x)$ y $h|_{U_x} = \beta_{U_x}(g^{(x)})$.

Con lo anterior, consideremos la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ de X y definamos

$$g := (g^{(x)})_{x \in X} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

Por otro lado, tenemos las siguientes igualdades en $\mathcal{H}(U_x \cap U_y)$,

$$\begin{aligned} \beta_{U_{xy}}(g^{(x)} - g^{(y)}) &= \beta_{U_{xy}}(g^{(x)}) - \beta_{U_{xy}}(g^{(y)}) \\ &= \beta_{U_x}(g^{(x)}) - \beta_{U_y}(g^{(y)}) = (h|_{U_x})|_{U_{xy}} - (h|_{U_y})|_{U_{xy}} \\ &= h|_{U_{xy}} - h|_{U_{xy}} = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica,

$$g^{(x)} - g^{(y)}|_{U_{xy}} \in \ker \beta_{U_{xy}} = \text{im}(\alpha_{U_{xy}} : \mathcal{F}(U_{xy}) \longrightarrow \mathcal{G}(U_{xy})).$$

Por lo que existe $f_{xy} \in \mathcal{F}(U_{xy})$ con $g^{(x)} - g^{(y)} = \alpha_{U_{xy}}(f_{xy})$, con lo cual definimos

$$f := (f_{xy})_{x,y \in X} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Lo siguiente que haremos es probar que $f \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, para ello, recordemos que $\delta(f)_{x,y,z} = f_{yz} - f_{xz} + f_{xy}$, como $\alpha_{U_{x,y,z}}$ es monomorfismo, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_{U_{xyz}}(\delta(f)_{xyz}) &= \alpha_{U_{yz}}(f_{yz}) - \alpha_{U_{xz}}(f_{xz}) + \alpha_{U_{xy}}(f_{xy}) \\ &= g^{(y)} - g^{(z)} - (g^{(x)} - g^{(z)}) + (g^{(x)} - g^{(y)}) = 0, \end{aligned}$$

entonces $\delta(f)_{xyz} = 0$ para todo x, y, z . Por lo tanto $\delta(f) = 0$, lo cual prueba que $f \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Tenemos así que f define un elemento en $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, cuya imagen bajo $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H_X^1(\mathcal{F})$ denotaremos por $[f]$. Con todo lo anterior, tenemos el morfismo conexión como sigue

$$\begin{aligned} \delta^* : H_X^0(\mathcal{H}) &\longrightarrow H_X^1(\mathcal{F}) \\ h &\longmapsto [f] \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Conociendo el morfismo conexión es posible obtener más resultados sobre secuencias de gavillas y los grupos de cohomología, uno que en particular nos interesa es el siguiente, la demostración es algo rutinaria, sin embargo larga, para el lector interesado en ella, puede consultar [3] o [13].

Teorema 2.3.24. *Sea X un espacio topológico y*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

una sucesión exacta de gavillas. Tenemos entonces que la siguiente sucesión de grupos es exacta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_X^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H_X^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H_X^0(\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} \\ &\xrightarrow{\delta^*} H_X^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H_X^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H_X^1(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Corolario 2.3.25. Sea $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de gavillas sobre X . Si $H_X^1(\mathcal{G}) = 0$ entonces

$$H_X^1(\mathcal{F}) = \mathcal{H}(X) / \beta^0(\mathcal{G}(X)).$$

Demostración.

Dado que $H_X^1(\mathcal{G}) = 0$, por el teorema anterior podemos considerar la siguiente sucesión exacta

$$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta^0} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta^*} H_X^1(\mathcal{F}) \longrightarrow 0,$$

por la sobreyectividad de δ^* tenemos que

$$H_X^1(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}(X) / \ker(\delta^*) = \mathcal{H}(X) / \beta(\mathcal{G}(X)). \quad \blacksquare$$

Nuestro objetivo ahora es usar las sucesiones de gavillas para dar una forma de calcular el grupo de DeRham a través de la cohomología de Čech, esto lo obtendremos a través del siguiente teorema.

Notación 2.3.26. Sea U un abierto de una superficie de Riemann, en lo que resta $\mathcal{E}^{1,0}(U)$ y $\mathcal{E}^{0,1}(U)$ representarán a las gavillas de formas $\omega = fdz$ y $\eta = gd\bar{z}$, respectivamente, donde f y g son funciones diferenciables en U .

Teorema 2.3.27. (de DeRham) Si X es una superficie de Riemann entonces

$$H_X^1(\mathbb{C}_X) \simeq H_{DR}^1(X).$$

Demostración.

Consideremos $Z := \ker(d : \mathcal{E}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}^{(2)})$, observe que esta es la gavilla de 1-formas cerradas.

Tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} Z \xrightarrow{d} 0,$$

es exacta, en efecto, en la sección 2.2.2 se mencionó que, localmente, toda forma cerrada es exacta, esto implica que la función $d : \mathcal{E} \longrightarrow Z$ es un epimorfismo de gavillas.

Por lo tanto, aplicando el corolario 2.3.25 tenemos que

$$H_X^1(\mathbb{C}_X) = Z(X) / \text{im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} Z(X)) = \mathcal{L}(X) / \text{im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X)) = H_{DR}^1(X). \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

Problema de Dirichlet y teoría Runge

Sean X una superficie de Riemann, Y un abierto de X y $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde ∂Y representa la frontera de Y . Encontrar una función continua que se extienda a la cerradura de Y y siga siendo real-valuada es lo que se conoce como el problema de Dirichlet, en esta sección veremos como se puede dar solución a dicho problema en superficies de Riemann.

3.1. Formas armónicas

En la sección 2.2 se recordó el concepto de formas en superficies de Riemann, retomaremos esto para presentar las formas armónicas. Comenzaremos por repasar como se dota un producto interno al espacio $\mathcal{E}^{(1)}(X)$, donde X es una superficie de Riemann; para ello sea

$$\begin{aligned} * : \mathcal{E}^{(1)}(X) &\longrightarrow \mathcal{E}^{(1)}(X) \\ \omega &\longmapsto i(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{aligned},$$

donde ω se escribe como $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$.

Proposición 3.1.1. *La función anterior es un $\mathbb{R}$ -isomorfismo lineal. Además, si $c \in \mathbb{C}$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ entonces $*(c\omega) = \bar{c}(*\omega)$.*

Demostración.

La demostración de que la función dada es morfismo sobreyectivo es rutinaria y se obtiene mediante cálculos directos. Para ver que $*$ es inyectiva basta usar el hecho de que el espacio $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ se descompone como suma

directa de $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$.

Para lo segundo, expresando ω como $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ se tiene lo siguiente

$$*(c\omega) = i(\overline{c\omega_1} - \overline{c\omega_2}) = \bar{c}i(\overline{\omega_1} - \overline{\omega_2}) = \bar{c}(*\omega).$$

Por otro lado, considere

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{E}^{(1)}(X) \times \mathcal{E}^{(1)}(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \iint_X \omega_1 \wedge *\omega_2. \end{aligned}$$

Proposición 3.1.2. *La función anterior tiene las siguientes propiedades:*

- 1.- *Es lineal en la primer coordenada y semi lineal en la segunda, esto es, si $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces*

$$\langle \omega_1, c(\omega_2 + \omega_3) \rangle = \bar{c}(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle + \langle \omega_1, \omega_3 \rangle).$$

2.- $\langle \omega_2, \omega_1 \rangle = \overline{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle}.$

3.- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es positivo definido.*

Demostración.

- 1.- Para ver que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal en la primer coordenada basta usar el hecho de que la operación $\wedge$ es lineal.

Para la segunda coordenada, observe que si $c \in \mathbb{C}$ entonces $*(c\omega) = \bar{c}(*\omega)$, con esto se obtiene que

$$\langle \omega_1, c(\omega_2 + \omega_3) \rangle = \bar{c}(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle + \langle \omega_1, \omega_3 \rangle).$$

- 2.- Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$, suponga que $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$ y $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$ son sus representaciones en la carta (U, z) . Por un lado tenemos que

$$\langle \omega_2, \omega_1 \rangle = \iint_X i f_2 dz \wedge \bar{f}_1 d\bar{z} - \iint_X i g_2 d\bar{z} \wedge \bar{g}_1 dz,$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \overline{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle} &= \overline{\iint_X \omega_1 \wedge (i(\bar{f}_2 d\bar{z} - \bar{g}_2 dz))} = -i \iint_X \bar{f}_1 d\bar{z} \wedge f_2 dz + i \iint_X \bar{g}_1 dz \wedge g_2 d\bar{z} \\ &= i \iint_X f_2 dz \wedge \bar{f}_1 d\bar{z} - i \iint_X g_2 d\bar{z} \wedge \bar{g}_1 dz = \langle \omega_2, \omega_1 \rangle. \end{aligned}$$

- 3.- Sea $\omega = fdz + gd\bar{z}$ respecto a una carta (U, z) donde $z = x + iy$. Primero observemos que $*\omega = i(\bar{f}d\bar{z} - \bar{g}dz)$, usando la linealidad de la operación $\wedge$ y el hecho de que $dz \wedge d\bar{z} = 2idz \wedge dy$, se obtiene lo siguiente

$$\omega \wedge *\omega = i(|f|^2 + |g|^2)dz \wedge d\bar{z} = i(|f|^2 + |g|^2) \left(\frac{2}{i} dx \wedge dy \right) = 2(|f|^2 + |g|^2)dx \wedge dy.$$

Finalmente observemos $\langle \omega, \omega \rangle \geq 0$ y $\langle \omega, \omega \rangle = 0$ si y solo si $f = 0 = g$, es decir, si y solo si $\omega = 0$. ■

Con lo anterior se ha dado a $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ la estructura de espacio vectorial con producto interno.

A continuación, presentaremos algunas propiedades que relacionan el morfismo $*$ y las funciones d , d' y d'' , dadas en 2.2.12.

Proposición 3.1.3. Sean X una superficie de Riemann compacta, $f \in \mathcal{E}(X)$, $\omega \in \Omega(X)$ y $\eta \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, tenemos lo siguiente:

- 1.- $*d'f = id''\bar{f}$, $*d''f = -id'\bar{f}$.
- 2.- $d(*df) = 2id'd''\bar{f}$.
- 3.- $\omega \wedge *d'f = -id(\bar{f}\omega)$, $\bar{\omega} \wedge d''f = -id(\bar{f}\bar{\omega})$.
- 4.- $*(\eta) = -\eta$, además, si $\eta \in \mathcal{L}(X)$ (notación 2.2.14) entonces $df \wedge *(\eta) = -d(f\eta)$.

Demostración.

- 1.- Para la primera igualdad,

$$*d'f = * \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = i \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = id''\bar{f}.$$

De manera similar se puede probar que $*d''f = -id'\bar{f}$.

- 2.- Recordando que $df = d'f + d''f$ y que las funciones d y $*$ son lineales tenemos lo siguiente

$$d(*df) = d(*d'f + *d''f) = d(*d'f) + d(*d''f).$$

Usando el inciso 1 de esta proposición y los incisos 1, 2 y 4 de la proposición 2.2.15 se sigue que

$$\begin{aligned} d(*df) &= d(id''\bar{f}) + d(-id'\bar{f}) = id(d''\bar{f}) - id(d'\bar{f}) \\ &= i(d'd''\bar{f} + d''d''\bar{f}) - i(d'd'\bar{f} + d''d'\bar{f}) \\ &= i(d'd''\bar{f} - d''d'\bar{f}) = 2id'd''\bar{f}. \end{aligned}$$

- 3.- Dado que $\omega \in \Omega(X)$, por la definición 2.2.6 tenemos que $\omega = gdz$ con g una función holomorfa, recordando

que $dz \wedge dz = 0$ se tiene

$$i\omega \wedge d''\bar{f} = i \left(g dz \wedge \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz + \omega \wedge d''\bar{f} \right) = i(\omega \wedge d'\bar{f} + \omega \wedge d''\bar{f}) = i(\omega \wedge (d'\bar{f} + d''\bar{f})) = i\omega \wedge d\bar{f}. \quad (1)$$

Por otro lado

$$d\omega = d'\omega + d''\omega = d'g \wedge dz + d''g \wedge dz = 0, \quad (2)$$

luego, usando la propiedad 1 de esta proposición y posteriormente (1) y (2), podemos concluir lo siguiente,

$$\omega \wedge *d'f = \omega \wedge id''\bar{f} = i\omega \wedge d\bar{f} = i\omega \wedge d\bar{f} - i\bar{f}d\omega = -i(d\bar{f} \wedge \omega + \bar{f}d\omega) = -id(\bar{f}\omega).$$

De manera similar se puede probar la otra propiedad.

- 4.- La primera parte se obtiene expresando la 1-forma η en una carta local, tal como se hizo en la proposición 3.1.2 y haciendo directamente los cálculos. Para lo segundo, como $\eta \in \mathcal{L}(X)$ se tiene que $d\eta = 0$, utilizando esto, junto con la primera parte de este inciso se tiene lo siguiente

$$df \wedge *(*\eta) = df \wedge (-\eta) = -df \wedge \eta - f d\eta = -(df \wedge \eta + f d\eta) = -d(f\eta).$$

■

Por otro lado, recordemos que una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, localmente, se expresa como $\omega = \sum_j f_j dg_j$, con f_j y g_j funciones diferenciables, se puede considerar entonces $\bar{\omega} = \sum_j \bar{f}_j d\bar{g}_j$, de esta manera, si ω es una 1-forma holomorfa, se dice que $\bar{\omega}$ es una 1-forma **antiholomorfa** en X .

Notación 3.1.4. Al espacio vectorial real de 1-formas antiholomorfas en X se le denotará por $\bar{\Omega}(X)$.

Presentamos ahora lo que son las formas armónicas en una superficie de Riemann, más adelante veremos que el espacio vectorial formado por estas tiene relación con muchos de los elementos que hemos visto previamente, tales como los operadores de la definición 2.2.12, el operador $*$ y, más importante aún, el grupo de DeRham. En lo que sigue X representa una superficie de Riemann, a menos que se indique lo contrario.

Definición 3.1.5. Una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ es llamada **armónica** si

$$d\omega = 0 = d(*\omega).$$

Una función diferenciable f , definida en un abierto de X , es llamada **armónica** si $d'd''f = 0$.

Observe que si λ es un número real, ω_1 y ω_2 son 1-formas armónicas entonces, por la linealidad de las funciones d y $*$ se sigue que la 1-forma $\lambda\omega_1 + \omega_2$ es armónica, esto nos dice que el conjunto de 1-formas armónicas forman

un espacio vectorial real.

Notación 3.1.6. Al espacio vectorial de todas las 1-formas armónicas en X se le denotará por $Harm^1(X)$.

Directamente de la definición se puede obtener lo siguiente.

Teorema 3.1.7. Sea X una superficie de Riemann, si ω es una 1-forma armónica y f es una función armónica entonces se tiene lo siguiente:

- I) ω es cerrada.
- II) $d'\omega = d''\omega = 0$.
- III) $\bar{f}$ es armónica.
- IV) df es armónica.
- V) ω es armónica si y solo si $\omega = \omega_1 + \omega_2$, donde $\omega_1 \in \Omega(X)$ y $\omega_2 \in \bar{\Omega}(X)$.

Demostración.

- I) Esto es directo de la definición de 1-forma armónica, recuerde que una 1-forma es cerrada si $d\omega = 0$.
- II) Dado que ω es armónica se tiene que $0 = d\omega = d'\omega + d''\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ con lo cual se sigue que $d'\omega = 0 = d''\omega$.
- III) Como f es armónica, se tiene que $d'd''f = 0$, luego

$$d'd''\bar{f} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{z} \partial z} dz \wedge d\bar{z} = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}} dz \wedge d\bar{z} = \overline{d'd''f} = 0,$$

por lo tanto $\bar{f}$ es armónica.

- IV) Por el inciso 1 de la proposición 2.2.15, tenemos que $d(df) = 0$.

Por otro lado, del inciso 2 de la proposición 3.1.3 se tiene que $d(*df) = 2id'd''\bar{f} = 0$, donde la última igualdad se sigue del inciso III de este teorema.

- V) Supongamos que ω es armónica, por el teorema 3.1.7, sabemos que $d'\omega = 0 = d''\omega$, más aún, tenemos que $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, es decir, $\omega_1 = f dz$ y $\omega_2 = g d\bar{z}$, con f y g funciones diferenciables. Primero, para probar que $\omega_2 \in \bar{\Omega}(X)$ debemos verificar que $\bar{g} dz \in \Omega(X)$, con este objetivo, observemos que $d'\omega_1 = 0 = d''\omega_2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= d'\omega = d'\omega_1 + d'\omega_2 = d''\omega_2 \\ 0 &= d''\omega = d''\omega_1 + d''\omega_2 = d''\omega_1. \end{aligned}$$

Como $d'\omega_2 = 0$, se sigue que $d'g = 0$, es decir $\bar{g}$ es una función holomorfa, de esta manera obtenemos que $\omega_2 \in \bar{\Omega}(X)$. De manera similar, podemos probar que $d''f = 0$, con lo cual f es holomorfa y así $\omega_1 \in \Omega(X)$.

Recíprocamente, supongamos que $\omega = \omega_1 + \omega_2$ tal como en el enunciado entonces $\omega_1 = pdz$ y $\omega_2 = qd\bar{z}$ con p y q funciones holomorfas. Luego, observe que $d''\bar{\omega}_1 = 0 = d'\bar{\omega}_2$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d(*\omega) &= d*(\omega_1 + \omega_2) = d(i(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)) = i(d\bar{\omega}_1 - d\bar{\omega}_2) \\ &= i(d'\bar{\omega}_1 + d''\bar{\omega}_1 - d'\bar{\omega}_2 - d''\bar{\omega}_2) = i(d'\bar{\omega}_1 - d''\bar{\omega}_2), \end{aligned}$$

usando lo anterior y la representación local obtenemos,

$$d(*\omega) = id'(\bar{p}d\bar{z}) - id''(qd\bar{z}) = i\left(\frac{\partial p}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0,$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que p es holomorfa.

Finalmente dado que p y $\bar{q}$ son holomorfas, por el inciso 5 del teorema 2.2.15 se tiene que $d\omega = d(pdz + \bar{q}d\bar{z}) = 0$.

Con lo anterior se concluye que, en efecto, $\omega \in Harm^1(X)$. ■

Este último teorema garantiza que $Harm^1(X) = \Omega(X) + \bar{\Omega}(X)$, sin embargo, como $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ es suma directa de $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ y además $\Omega(X) \subset \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$, $\bar{\Omega}(X) \subset \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, se puede establecer el siguiente resultado.

Corolario 3.1.8.

$$Harm^1(X) = \Omega(X) \oplus \bar{\Omega}(X).$$

A primera vista, las definiciones de función y 1-forma armónica parecieran no guardar relación, sin embargo, el siguiente teorema nos muestra lo contrario.

Teorema 3.1.9. *Sea X una superficie de Riemann, ω es armónica si y solo si dado cualquier punto $a \in X$ existe una vecindad abierta U del punto a y una función armónica f en U tal que $\omega = df$.*

Demostración.

Supongamos que ω es una 1-forma armónica, por el teorema 3.1.7, sabemos que ω es cerrada entonces, localmente, $\omega = df$ con f una función diferenciable. Por el inciso 2 de la proposición 3.1.3, se obtiene que $0 = d*\omega = 2id'd''\bar{f}$ con lo cual $\bar{f}$ es armónica y en consecuencia f también lo es.

Recíprocamente, supongamos que $\omega = df$ con f armónica, tenemos así que $d\omega = d^2f = 0$ y $d*\omega = 2id'd''f = 0$.

■

Definición 3.1.10. Si ω es una 1-forma diferenciable, diremos que es **real**, si $\omega = \bar{\omega}$, la **parte real de** ω , está definida como $Re(\omega) = \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega})$.

Teorema 3.1.11. Sea X una superficie de Riemann, toda 1-forma real armónica $\omega \in Harm^1(X)$ es la parte real de exactamente una 1-forma holomorfa $\sigma \in \Omega(X)$.

Demostración.

Para la existencia, sea $\omega = \sigma_1 + \bar{\sigma}_2 \in \Omega(X) \oplus \bar{\Omega}(X)$, dado que ω es una 1-forma real entonces $\sigma_1 + \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_1 + \sigma_2$, luego $\sigma_1 - \sigma_2 = \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2$ y como $\sigma_1 - \sigma_2 \in \Omega(X)$, $\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 \in \bar{\Omega}(X)$ y $\Omega(X) \cap \bar{\Omega}(X) = 0$, se sigue que $\sigma_1 = \sigma_2$. Por lo tanto $\omega = \sigma_1 + \bar{\sigma}_1 = Re(2\sigma_1)$.

Para la unicidad, supongamos que $\omega = Re(\sigma)$ y $\omega = Re(\sigma')$ con σ y σ' 1-formas holomorfas, tenemos así que $0 = Re(\sigma - \sigma')$. Observemos que $\sigma - \sigma'$ es una 1-forma armónica y por el teorema 3.1.9, localmente se tiene $\sigma - \sigma' = df$ con f una función armónica (en particular holomorfa), se sigue que $Re(df) = 0$ y esto implica que f tiene parte real constante. Así, de las ecuaciones de Cauchy Riemann, f es constante, con lo cual $\sigma - \sigma' = 0$, se concluye entonces que $\sigma = \sigma'$. ■

Corolario 3.1.12. Sea X una superficie de Riemann y $G \subset X$ un dominio simplemente conexo. Toda función armónica $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ es la parte real de una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(G)$.

La demostración del corolario 3.1.12 es consecuencia directa del teorema 3.1.11.

Seguiremos usando la proposición 3.1.3 para los siguientes resultados, los cuales dan descomposiciones en sumas directas de algunos espacios.

Teorema 3.1.13. Para X una superficie de Riemann compacta, se tienen lo siguiente:

- a) Los espacios $d'\mathcal{E}(X)$, $d''\mathcal{E}(X)$, $\Omega(X)$ y $\bar{\Omega}(X)$ son subespacios ortogonales a pares de $(\mathcal{E}^{(1)}(X), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
- b) $d\mathcal{E}(X)$ y $*d\mathcal{E}(X)$ son subespacios ortogonales de $\mathcal{E}^{(1)}(X)$.
- c) $d\mathcal{E}(X) \oplus *d\mathcal{E}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X)$.
- d) $\mathcal{E}^{(0,1)}(X) = d''\mathcal{E}(X) \oplus \bar{\Omega}(X)$.

Demostración.

- a) Sean $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, observe que $*\omega_2 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ entonces $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \iint_X \omega_1 \wedge *\omega_2 = 0$.
Por lo tanto los espacios $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ son ortogonales, y en consecuencia sus subespacios $\Omega(X)$ y $\bar{\Omega}(X)$ también lo son.

Con lo anterior, resta probar que $d'\mathcal{E}(X)$ es ortogonal a $\Omega(X)$ y que $d''\mathcal{E}(X)$ es ortogonal a $\omega \in \Omega(X)$. Para ello, tomemos $f \in \mathcal{E}(X)$ y $\omega \in \Omega(X)$, por el inciso 3 de la proposición 3.1.3 y el teorema 2.2.48, se tiene que $\langle \omega, d'f \rangle = -i \iint_X d(\bar{f}\omega) = 0$. De manera similar, se obtiene que $\langle \bar{\omega}, d''f \rangle = 0$.

- b) Sean $f, g \in \mathcal{E}(X)$ nuevamente por el inciso 3 de la proposición 3.1.3 y el teorema 2.2.48, tenemos que $\langle df, *dg \rangle = - \iint_X d(fdg) = 0$.
- c) Sean $f, g \in \mathcal{E}(X)$, usando el inciso 1 de la proposición 3.1.3,

$$df + *dg = d'f + d''f + id''\bar{g} - id'\bar{g} = d'(f - i\bar{g}) + d''(f + i\bar{g}) \in d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X).$$

Recíprocamente, tomemos $\omega_1 + \omega_2 \in d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X)$, con lo cual $\omega_1 = d'f$ y $\omega_2 = d''g$ con $f, g \in \mathcal{E}(X)$, del inciso 1 de la proposición 3.1.3, $\omega_2 = -i * d'\bar{g}$. otemos además que $d'\mathcal{E}(X) \subset d\mathcal{E}(X)$ y $*d'\mathcal{E}(X) \subset *d\mathcal{E}(X)$, se sigue que $\omega_1 + \omega_2 = d'f - i * d'\bar{g} \in d\mathcal{E}(X) + *d\mathcal{E}(X)$. Con lo anterior, y dado que ya se demostró que los espacios involucrados son ortogonales, el resultado se sigue.

- d) Esta demostración será omitida, ya que requiere utilizar teoremas como los de Dolbeault y dualidad de Serre, además del *género* de una superficie de Riemann (véase la definición A.0.12 en el apéndice A), la demostración se puede consultar en [3]. ■

Continuando con la descomposición de algunos espacios, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.14. *Sea X una superficie de Riemann,*

$$a) \mathcal{E}^{(1)}(X) = *d\mathcal{E}(X) \oplus d\mathcal{E}(X) \oplus Harm^1(X).$$

$$b) \mathcal{L}(X) = d\mathcal{E}(X) \oplus Harm^1(X).$$

Demostración.

- a) Recordemos que tenemos la siguiente descomposición $\mathcal{E}^{(1)}(X) = \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, a su vez, por el inciso d) del teorema 3.1.13, $\mathcal{E}^{(0,1)}(X) = d''\mathcal{E}(X) \oplus \bar{\Omega}(X)$ y $\mathcal{E}^{(1,0)}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X)$, por lo tanto

$$\mathcal{E}^{(1)}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X) \oplus \bar{\Omega}(X).$$

Por el inciso c) del teorema 3.1.13 y el corolario 3.1.8 se concluye que

$$\mathcal{E}^{(1)}(X) = *d\mathcal{E}(X) \oplus d\mathcal{E}(X) \oplus Harm^1(X).$$

- b) Consideremos $df + \omega \in d\mathcal{E}(X) \oplus Harm^1(X)$, recordando que una 1-forma armónica es cerrada, podemos concluir que $d(df + \omega) = 0$, esto nos dice que $d\mathcal{E}(X) \oplus Harm^1(X) \subset \mathcal{L}(X)$.

Por otro lado, sean $g \in \mathcal{E}(X)$ y $\eta \in \mathcal{L}(X)$, por el inciso 1 de la proposición 3.1.3, se obtiene que $\langle \eta, *dg \rangle = \iint_X d(g\eta) = 0$, es decir, $\mathcal{L}(X)$ es ortogonal a $*d\mathcal{E}(X)$. Por el inciso a) de este resultado, podemos concluir que $\mathcal{L}(X) = d\mathcal{E}(X) \oplus \text{Harm}^1(X)$. ■

En la sección pasada presentamos el grupo de DeRham, ahora veremos que relación tiene con las 1-formas armónicas.

Teorema 3.1.15. *(de DeRham-Hodge) Si X es una superficie de Riemann compacta entonces*

$$H_X^1(\mathbb{C}) \simeq H_{DR}^1(X) \simeq \text{Harm}^1(X).$$

Demostración.

Por el teorema de DeRham (teorema 2.3.27), sabemos que $H_X^1(\mathbb{C}) \simeq H_{DR}^1(X)$ y por el inciso b) del teorema 3.1.14, podemos concluir lo siguiente

$$H_{DR}^1(X) = \mathcal{L}(X) / \text{im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X)) = d\mathcal{E}(X) \oplus \text{Harm}^1(X) / d\mathcal{E}(X) = \text{Harm}^1(X). \quad \blacksquare$$

3.2. Problema de Dirichlet en superficies de Riemann

Uno de los problemas más importantes en la teoría de funciones armónicas es el problema de Dirichlet, en su versión del plano complejo establece que si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{C}$ cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple, y $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua entonces existe una única función armónica $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual satisface que $u = f$ en $\partial\Omega$.

A continuación presentamos los resultados que se tienen de este problema con discos en $\mathbb{C}$ y otros sobre funciones armónicas, las demostraciones se pueden consultar en la sección 22 de [3] o en el capítulo 2 de [12].

Recordemos que $D_0(R)$ representa un disco centrado en el origen con radio $R > 0$, en este conjunto el problema de Dirichlet se resuelve a través de la integral de Poisson en su versión compleja.

Teorema 3.2.1. *Sea $f : \partial D_0(R) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y*

$$u(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} f(Re^{i\theta}) d\theta & , \quad |z| < R \\ f(z) & , \quad |z| = R \end{cases},$$

entonces u es continua en $\overline{D_0(R)}$ y armónica en $D_0(R)$.

Corolario 3.2.2. *Si $U_n : D_0(R) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de funciones armónicas que convergen uniformemente en cada subconjunto compacto a una función $u : D_0(R) \rightarrow \mathbb{R}$ entonces u es también armónica.*

Teorema 3.2.3. *(de Harnack) Sea $M \in \mathbb{R}$ y $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq M$ una sucesión monótona creciente y acotada por M de funciones armónicas, $u_n : D_0(R) \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que la sucesión converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $D_0(R)$ a una función armónica $u : D_0(R) \rightarrow \mathbb{R}$.*

En el teorema 1.2.3 vimos el principio del módulo máximo para funciones holomorfas en superficies de Riemann, el siguiente resultado es la versión para funciones armónicas.

Teorema 3.2.4. *(Principio del módulo máximo para funciones armónicas) Si Y es un dominio de una superficie de Riemann X y $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica tal que alcanza su máximo en un punto $y_0 \in Y$ entonces u es constante.*

Demostración.

Dado que u es armónica, por el teorema 3.1.11, $u = \operatorname{Re}(f)$ con f una función holomorfa en una vecindad, la cual, restringiendo de ser necesario, podemos suponer que es simplemente conexa. Por hipótesis, como $|e^f| = e^u$, la función e^f alcanza su módulo máximo en y_0 . Luego, por el principio del máximo de funciones holomorfas (teorema 1.2.3) se sigue que u es constante en una vecindad de y_0 , finalmente, por la conexidad, de Y , se sigue que u debe ser constante en todo Y . ■

Para estudiar el problema de Dirichlet en una superficie de Riemann, se consideran dominios relativamente compactos contenidos en una carta (U, z) , que además satisface que $z(D) \subset \mathbb{C}$ es biholomorfo a un disco.

Notación 3.2.5. *Sea X una superficie de Riemann y $Y \subset X$ un conjunto abierto*

1. *Denotamos por $\operatorname{Reg}(Y)$ al conjunto de todos los subdominios $D \Subset Y$ (notación 2.2.43) tales que el problema de Dirichlet se puede resolver en D para valores en la frontera dados por $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$.*
2. *Para cualquier función continua $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ y $D \in \operatorname{Reg}(Y)$, sea $P_D(u)$ la función continua en Y que coincide con u en $Y \setminus D$ y resuelve el problema de Dirichlet en $\bar{D}$ para valores en la frontera dados por $u|_{\partial D}$.*
3. *Denotaremos por $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ al espacio vectorial de todas las funciones continuas real-valuadas en Y .*

Proposición 3.2.6. *Sean $u, v \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$a) P_D(u + v) = P_D(u) + P_D(v).$$

b) $P_D(\lambda u) = \lambda P_D(u)$.

c) Si $u \leq v$ entonces $P_D(u) \leq P_D(v)$.

d) u es armónica si y solo si $P_D(u) = u$ para todo $D \in \text{Reg}(Y)$.

Demostración.

- a) Para demostrar este inciso recuerde que la solución al problema de Dirichlet es única. Sabemos que $P_D(u+v)$ es armónica en D y resuelve el problema de Dirichlet en $\bar{D}$ para los valores en la frontera dados por $(u+v)|_{\partial D}$. Por otro lado, tenemos que la suma $P_D(u) + P_D(v)$ es armónica en D y además $P_D(u)|_{\partial D} + P_D(v)|_{\partial D} = u|_{\partial D} + v|_{\partial D} = (u+v)|_{\partial D}$, esto implica que $P_D(u) + P_D(v)$ también es una solución al problema de Dirichlet, con lo cual se tiene que $P_D(u+v) = P_D(u) + P_D(v)$.
- b) Similar a como se hizo en el inciso a), por la unicidad de la solución al problema de Dirichlet, se puede concluir la igualdad $P_D(\lambda u) = \lambda P_D(u)$.
- c) Sean $\varphi_v := P_D(v)$ y $\varphi_u := P_D(u)$. Si tomamos un punto z en $Y \setminus D$ se tiene que $\varphi_v(z) = v(z)$ y $\varphi_u(z) = u(z)$, por lo tanto $\varphi_u(z) < \varphi_v(z)$.

Tomemos ahora un punto z en D y supongamos que $\varphi_v(z) < \varphi_u(z)$. Como φ_v y φ_u son armónicas en D , por el principio del módulo máximo de funciones armónicas (teorema 3.2.4) existen $z_0, w_0 \in \partial D$ tales que $\varphi_u(z_0) > \varphi_u(w_0)$ y $\varphi_v(w_0) > \varphi_v(z)$ para todo $w \in D$, en particular para el punto z . Más aún, como $z_0, w_0 \in \partial D$ tenemos que $\varphi_u(z_0) = u(z_0)$ y $\varphi_v(w_0) = v(w_0)$. Luego, $u(z_0) > \varphi_u(z)$ y $v(w_0) > \varphi_v(z)$, se sigue que

$$u(z_0) - v(w_0) > \varphi_u(z) - \varphi_v(z) > 0.$$

Observe que por ser w_0 máximo de v se tiene que $v(w_0) > v(z_0)$, esto junto con la desigualdad de arriba implican que $u(z_0) > v(z_0)$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $\varphi_v(z) > \varphi_u(z)$.

- d) Supongamos que u es armónica y sea $D \in \text{Reg}(Y)$, en particular tenemos que u es armónica en D y $u|_{\partial D} = u$, es decir, u resuelve el problema de Dirichlet en $\bar{D}$ para los valores en la frontera dados por $u|_{\partial D}$, esto implica que $P_D(u) = u$.

Recíprocamente, sea $D \in \text{Reg}(Y)$, tenemos entonces que $P_D(u)$ es armónica en D y dado que $P_D(u) = u$ se sigue que u es armónica en D . Tomando ahora $D_1 \in \text{Reg}(Y \setminus D)$, de igual manera tenemos que u es armónica en D_1 , siguiendo esto recursivamente, se tiene que u es armónica en todo Y . ■

Definición 3.2.7. Una función continua $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **subarmónica** si $P_D(u) \geq u$ para todo $D \in \text{Reg}(Y)$.

Ejemplo 3.2.8. Sean Y un abierto de $\mathbb{C}$, a un punto en ∂Y , $D_m(r)$ un disco centrado en un punto $m \in \mathbb{C}$ de radio $r > 0$ con $a \in \partial D_m(r)$ y $\overline{D} \cap Y = \emptyset$. Tomemos $c := \frac{a+m}{2}$ y definamos la función $\beta(z) = \log \frac{r}{2} - \log|z - c|$, notemos que esta función es armónica (esto se obtiene a través de las ecuaciones de Cauchy-Riemann) y por el inciso d) de la proposición 3.2.6 tenemos que $P_D(\beta) = \beta$, con $D \in \text{Reg}(Y)$, en particular, por la definición anterior tenemos que β es subarmónica.

Proposición 3.2.9. Si $u, v : Y \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones subarmónicas y $\lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces $u+v$, λu y $\sup(u, v)$ son subarmónicas en Y .

Demostración.

Por la proposición 3.2.6, tenemos que $P_D(u+v) = P_D(U) + P_D(V) \geq u+v$, por lo tanto $u+v$ es subarmónica. De igual manera tenemos que $P_D(\lambda u) \geq \lambda u$. Finalmente, observemos que $u \leq \sup(u, v)$ y $v \leq \sup(u, v)$, luego,

$$\begin{aligned} u &\leq P_D(u) \leq P_D(\sup(u, v)), \\ v &\leq P_D(v) \leq P_D(\sup(u, v)), \end{aligned}$$

donde las primeras desigualdades se tienen por el hecho de que u y v son subarmónicas, y las segundas por el inciso c) de la proposición 3.2.6. Por lo que $P_D(\sup(u, v))$ es una cota superior para u y v , lo cual implica que $\sup(u, v) \leq P_D(\sup(u, v))$, es decir, $\sup(u, v)$ es subarmónica. ■

Definición 3.2.10. Una función $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **localmente subarmónica** si u es subarmónica en una vecindad de cada punto de Y .

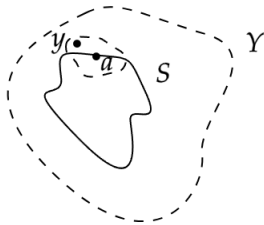
Teorema 3.2.11. (Principio del módulo máximo para funciones localmente subarmónicas) Sean Y un dominio de una superficie de Riemann X y $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente subarmónica. Si u alcanza su máximo en un punto $y_0 \in Y$ entonces es constante.

Demostración.

Sea $c := u(y_0)$ y $S := \{y \in Y : u(y) = c\}$, el objetivo será probar que $S = Y$, con esto tendríamos que u es constante en Y .

Procediendo por contradicción, supongamos que $S \neq Y$, entonces $S \not\subset Y$ o $Y \not\subset S$, sin embargo, por como se definió al conjunto S vemos que la primera opción da lugar a una contradicción, por lo tanto, supongamos que $Y \not\subset S$.

Observemos que el conjunto $S = u^{-1}(\{c\})$ es cerrado, ya que u es continua, con lo cual tenemos que $\overline{S} = S$, en particular $\overline{S} \subset Y$, esto implica que existe $a \in \partial S \cap Y$ y por la continuidad de u tenemos que $u(a) = c$.


 Figura 3.1: Conjunto S contenido en Y .

Por otro lado, como a es un punto en la frontera de S , en una vecindad del punto a existe un punto $y \in Y \setminus S$, véase la figura 3.1, esto implica que $u(y) < c$, o bien, $u(y) > c$, dado que c es el máximo, lo segundo no puede ocurrir, esto nos dice que en cada vecindad de a existe un punto y tal que $u(y) < c$. Luego, consideremos una vecindad D homeomorfa a un disco, en el cual sabemos se resuelve el problema de Dirichlet, que además contenga en su frontera al punto y , con esto tenemos que $D \in \text{Reg}(Y)$ y $u|_{\partial D}$ no es igual a c .

Por hipótesis podemos suponer que u es subarmónica en una vecindad de $\overline{D}$ y por la definición 3.2.10 tenemos que

$$v := P_D(u) \geq u. \quad (1)$$

Notemos que v es armónica en D , ya que resuelve el problema de Dirichlet, y $v|_{\partial D} = u|_{\partial D} \leq c$, luego, el principio del módulo máximo de funciones armónicas (teorema 3.2.4) v alcanza su máximo y este está en la frontera y como los valores de la frontera están acotados por c , se sigue que $v \leq c$ en $\overline{D}$.

Por (1) tenemos que $u(a) = c \leq v(a)$ y así v alcanza su máximo en a siendo este igual a la constante c , sin embargo, esto contradice la elección del conjunto D , por lo tanto $S = Y$. ■

Corolario 3.2.12. Si $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente subarmónica entonces u es subarmónica.

Demostración.

Consideremos $D \in \text{Reg}(Y)$, tenemos así que $P_D(u)$ es armónica en D , definamos $v := u - P_D(u)$ y veamos que es localmente subarmónica en D . En efecto, por hipótesis, la función u es localmente subarmónica en Y , en particular en D , por lo tanto basta probar que $P_D(u)$ también lo es. Para ver lo anterior, tomemos un punto y en D y V una vecindad de y contenida en D , observemos que $P_D(u)$ es armónica en V y así $P_D(P_D(u)) = P_D(u)$ en V , es decir, $P_D(u)$ es subarmónica en V y como $y \in D$ fue arbitrario, se sigue que $P_D(u)$ es localmente subarmónica.

Por otro lado, como $P_D(u)$ resuelve el problema de Dirichlet para los valores en la frontera dados por $u|_{\partial D}$, se sigue que $v|_{\partial D} = u|_{\partial D} - P_D(u)|_{\partial D} = 0$ y entonces el principio del módulo máximo para funciones subarmónicas

implica que $v \leq 0$ en D , por lo tanto $P_D(u) \geq u$. ■

Teorema 3.2.13. *Si $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es subarmónica y $D \in \text{Reg}(Y)$ entonces $P_D(u)$ también es subarmónica.*

Demostración.

Sea $v := P_B(u)$ y consideremos $D \in \text{Reg}(Y)$. Por la definición de las funciones $P_D(\cdot)$ y $P_B(\cdot)$, tenemos que $P_D(v) = v$ en $Y \setminus D$ y $v = P_B(u) = u$ en $Y \setminus B$, dado que u es subarmónica, sabemos que $v \geq u$ lo cual implica que $P_D(v) \geq P_D(u) \geq u = v$, luego, $v - P_D(v) \leq 0$ en $Y|_{B \cap D}$. Como v y $P_D(v)$ son subarmónicas en B y D , respectivamente, tenemos que $v - P_D(v)$ es subarmónica en $B \cap D$ entonces $v - P_D(v) \leq 0$ en $B \cap D$, por lo tanto $P_D(v) \leq v$, es decir, $P_B(u)$ es subarmónica. ■

Conociendo todo lo anterior, continuaremos el camino para resolver el problema de Dirichlet en superficies de Riemann, para ello usaremos el método del matemático alemán Oskar Perron, el cual consiste en encontrar la función subarmónica más grande con valores en la frontera menores que los valores buscados, probaremos que esta función coincide con la solución del problema de Dirichlet.

Usando el teorema de Harnack (teorema 3.2.3) y el principio del máximo para funciones armónicas (teorema 3.2.4) se puede probar el siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en [3].

Lema 3.2.14. (Perron) *Sea $M \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ un subconjunto no vacío de funciones subarmónicas en Y con las siguientes propiedades:*

1. *Si $u, v \in M$ entonces $\sup(u, v) \in M$.*
2. *Si $u \in M$ y $D \in \text{Reg}(Y)$ entonces $P_D(u) \in M$.*
3. *Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $u \leq K$ para todo $u \in M$.*

Se tiene entonces que, la función $u^ : Y \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u^*(x) := \sup\{u(x) : u \in M\}$ es armónica en Y .*

Definición 3.2.15. *Sea $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada y $K := \sup\{f(x) : x \in \partial Y\}$.*

Denotemos por $\mathcal{B}_f$ al conjunto de todas las funciones $u \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\bar{Y})$ con las siguientes propiedades

1. *$u|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es subarmónica.*
2. *$u|_{\partial Y} \leq f$, $u \leq K$.*

$\mathcal{B}_f$ es llamado **la clase de Perron de f** .

Teorema 3.2.16. *La función $u^* := \sup\{u : u \in \mathcal{B}_f\}$ satisface las condiciones del lema de Perron y por lo tanto es armónica en Y .*

Demostración.

Veamos que se satisfacen las 3 condiciones del lema 3.2.14:

1. Sean $u, v \in \mathcal{B}_f$, como $u \leq K$ y $v \leq K$ se sigue que $\sup(u, v) \leq K$, de igual manera, se tiene que $u|_{\partial Y} \leq f$ y $v|_{\partial Y} \leq f$ por lo tanto $\sup(u, v)|_{\partial Y} \leq f$. Finalmente, por la proposición 3.2.9 sabemos que $\sup(u, v)$ es una función subarmónica, por lo que $\sup(u, v) \in \mathcal{B}_f$.

2. Sea $u \in \mathcal{B}_f$ y $D \in \text{Reg}(Y)$, por la proposición 3.2.13 sabemos que $P_D(u)|_Y$ es subarmónica.

Por otro lado, dado que $u \in \mathcal{B}_f$ se tiene que $u|_{\partial Y} \leq f$ y $u \leq K$, además $u = P_D(u)$ en $Y \setminus D$. Notemos que $\partial Y \subset Y \setminus D$, tenemos entonces que $u|_{\partial Y} = P_D(u)|_{\partial Y} \leq f$ y también $P_D(u) \leq K$, por lo tanto $P_D(u) \in \mathcal{B}_f$.

3. Por la definición del conjunto $\mathcal{B}_f$ tenemos que para todo $u \in \mathcal{B}_f$ se tiene que $u \leq K$. ■

El teorema anterior nos brinda un candidato para resolver el problema de Dirichlet, resta garantizar que esta función cumpla la condición de frontera, es decir, que para $x \in \partial Y, y \in Y$, $\lim_{y \rightarrow x} u^*(y) = f(x)$. Como es de esperarse, en general, esto no se satisface, pero se cumplirá cuando la frontera este formada por puntos que cumplen una característica que presentamos a continuación.

Definición 3.2.17. Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , un punto $x \in \partial Y$ es llamado **regular** si existe una vecindad abierta U de x y una función $\beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\overline{Y} \cap U)$ con las siguientes propiedades:

1. $\beta|_{Y \cap U}$ es subarmónica.
2. $\beta(x) = 0$ y $\beta(y) < 0$ para cada $y \in \overline{Y} \cap U \setminus \{x\}$.

La función β será llamada **una barrera en x** . Además, si todos los puntos frontera de un conjunto son regulares entonces decimos que tiene **frontera regular** (véase figura 3.2).

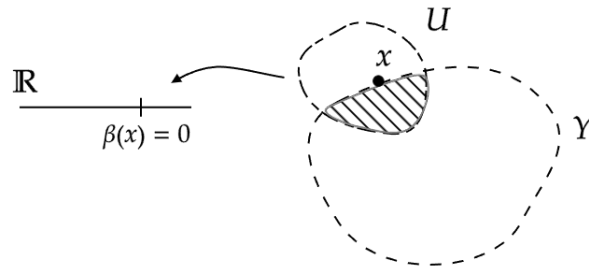


Figura 3.2: Punto regular.

Proposición 3.2.18. *Conservando la notación de la definición anterior:*

- a) Si $x \in \partial Y$ es un punto regular de Y y Y_1 un conjunto abierto de Y con $x \in \partial Y_1$ entonces x es un punto regular de Y_1 .
- b) Si Y tiene frontera regular entonces cada componente conexa de Y también tiene frontera regular.

Demostración.

1. Observemos que la función $\beta|_{\overline{Y} \cap U}$ es una barrera en x , en efecto, notemos que $Y_1 \cap U \subset Y \cap U$ y como β es subarmónica en $Y \cap U$ claramente también lo es en $Y_1 \cap U$. De igual manera podemos observar que $\overline{Y}_1 \cap U \setminus \{x\} \subset Y \cap U \setminus \{x\}$, con lo cual se satisface la propiedad 2 de la definición 3.2.17.
2. Basta recordar que las componentes conexas forman una partición del conjunto y por el inciso a) se sigue el resultado. ■

Es posible determinar, de manera geométrica, si un punto frontera es regular, puesto que esta es una condición local e invariante bajo biholomorfismos, por lo cual basta probarlo para un abierto de $\mathbb{C}$.

Teorema 3.2.19. *Sea Y un abierto de $\mathbb{C}$ y un punto $a \in \partial Y$, supongamos que existe un disco, centrado en $m \in \mathbb{C}$ y de radio $r > 0$, denotado por $D_m(r)$, tal que $a \in \partial D_m(r)$ y $\overline{D_m(r)} \cap Y = \emptyset$ entonces a es un punto regular.*

Demostración.

Consideremos $c := \frac{a+m}{2}$ y $\beta(z) := \log(\frac{r}{2}) - \log|z - c|$, afirmamos que esta función es una barrera en a . En efecto, verifiquemos las condiciones de la definición:

1. Por el ejemplo 3.2.8 sabemos que es subarmónica.
2. Haciendo los cálculos directamente se obtiene que $\beta(a) = \log \frac{r}{2} - \log \frac{|a-m|}{2} = \log \frac{r}{2} - \log \frac{r}{2} = 0$. Además si $y \in \overline{Y} \cap D \setminus \{a\}$ tenemos que $\beta(y) = \log \frac{1}{2} < 0$. ■

Una vez presentada la condición de cuándo un punto frontera es regular pasaremos a dar algunos resultados que nos serán de ayuda para poder concluir la solución al problema de Dirichlet.

Lema 3.2.20. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , consideremos $x \in \partial Y$ un punto regular, V una vecindad de x y dos constantes reales m y c con $m \leq c$. Existe entonces una función $v \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(\overline{Y})$ con las siguientes propiedades:*

a) $v|_Y$ es subarmónica.

b) $v(x) = c$, $v|_{\bar{Y} \cap V} \leq c$.

c) $v|_{\bar{Y} \setminus V} = m$.

Demostración.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c = 0$. Sea U una vecindad abierta del punto x y $\beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\bar{Y} \cap U)$ una barrera en x .

Podemos suponer que $V \subseteq U$, para conseguir esto podemos reducir V de ser necesario. Recordemos que la frontera de cualquier conjunto es cerrado, con esto tenemos que $\partial V \cap \bar{Y}$ es cerrado y además está contenido en el compacto $\bar{V}$, por lo tanto $\partial D \cap \bar{Y}$ es compacto y en consecuencia contiene a su supremo. Como todas las imágenes bajo la función β de puntos en $\partial V \cap \bar{Y}$ son negativas, se tiene que $\sup\{\beta(y) : y \in \partial V \cap \bar{Y}\} < 0 = c$, véase figura 3.3. Notemos que podemos considerar una constante $k > 0$ tal que $k\beta|_{\partial V \cap \bar{Y}} < m$.

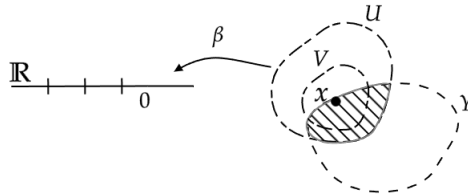


Figura 3.3: La imagen de los puntos en la región sombreada bajo la función β son menor que 0.

Definamos $v : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$v := \begin{cases} \sup(m, k\beta), & \bar{Y} \cap V \\ m, & \bar{Y} \setminus V \end{cases},$$

esta función satisface lo siguiente:

- Es continua: tenemos que para $y \in \partial V \cap Y$, $\sup(m, k\beta(y)) = m$ esto ya que $k\beta(y) < m$.
- Es localmente subarmónica en Y : sabemos que β es subarmónica en $Y \cap U$, en particular, también lo es en $Y \cap V$. Por la proposición 3.2.9 tenemos que $k\beta$ es subarmónica en $Y \cap V$. Además la función constante m también es subarmónica en Y , por lo tanto, $\sup(m, k\beta)$ es subarmónica en $Y \cap V$ y en consecuencia v es subarmónica en V , esto se puede hacer en cualquier punto x y vecindad de x lo cual implica que v es localmente subarmónica. Luego, por el corolario 3.2.12, se sigue que la función v es subarmónica en Y . Esto verifica el inciso a) de este lema.

- Como el punto x dado en la hipótesis, se encuentra en $\bar{Y} \cap V$, tenemos que

$$v(x) = \sup(m, k\beta(x)) = \sup(m, 0) = 0 = c.$$

Para $y \in \bar{Y} \cap V$, como β es una barrera en x satisface que $k\beta|_{\bar{Y} \cap V} < 0$ y además tenemos que $m \leq 0$, por lo tanto $v(y) = \sup(m, k\beta) \leq 0$. Esto verifica el inciso b) del lema.

- Por construcción, $v|_{\bar{Y} \setminus V} = m$, lo cual verifica el inciso c). ■

Definición 3.2.21. Con la notación del lema anterior, sean $x \in \partial Y$ y un abierto V de X con $x \in V$. Considerando los siguientes conjuntos

$$A_V := \inf\{u^*(y) : y \in Y \cap (V \setminus \{x\})\},$$

$$B_V := \sup\{u^*(y) : y \in Y \cap (V \setminus \{x\})\},$$

se define lo siguiente:

$$\liminf_{y \rightarrow x} u^*(y) := \sup_{V \subset X} \{A_V\},$$

$$\limsup_{y \rightarrow x} u^*(y) := \inf_{V \subset X} \{B_V\}.$$

Observemos que por la monotonía de los supremos e ínfimos, si tenemos funciones f, g tales que $f < g$ entonces $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) < \liminf_{y \rightarrow x} g(y)$.

Lema 3.2.22. Bajo la notación del lema 3.2.20 tenemos los siguientes resultados

- a) Dado un real $\beta \in \mathbb{R}$, defina $L_x := \liminf_{y \rightarrow x} u^*(y) \geq \beta$; se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto $V \subset X$ con $x \in V$ y $(V \setminus \{x\}) \cap Y \neq \emptyset$ tales que

$$u^*(y) + \varepsilon > \beta, \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}).$$

- b) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $L_x := \limsup_{y \rightarrow x} u^*(y) \leq \alpha$; se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto $V \subset X$ con $x \in V$, $(V \setminus \{x\}) \cap Y \neq \emptyset$ tales que

$$u^*(y) \leq \alpha + \varepsilon, \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}).$$

Demostración.

Demostraremos solo el inciso a) ya que la prueba del inciso b) es similar.

Definamos $A_V := \inf\{u^*(y) : y \in Y \cap (V \setminus \{x\})\}$ y sea $\varepsilon > 0$. Como L_x es un supremo, existe A_V para algún abierto V tal que

$$L_x - \varepsilon < A_V \leq u^*(y), \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}),$$

se sigue entonces que

$$u^*(y) + \varepsilon > L_x, \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}),$$

por lo tanto $u^*(y) + \varepsilon > \beta$. ■

Lema 3.2.23. *Si $v : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $x \in \partial Y$ entonces*

$$a) \liminf_{y \rightarrow x} v(y) \geq v(x).$$

$$b) \limsup_{y \rightarrow x} v(y) \leq v(x).$$

Demostración.

Nuevamente probaremos solo el inciso a).

Sea $n \in \mathbb{N}$, por continuidad de la función v , para $\frac{1}{n} > 0$ existe un abierto $V \subset X$ tal que

$$|v(y) - v(x)| < \frac{1}{n}, \quad \text{para cada } y \in \bar{Y} \cap (V \setminus \{x\}),$$

de lo anterior tenemos que

$$-\frac{1}{n} + v(x) < v(y), \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}),$$

luego

$$-\frac{1}{n} + v(x) \leq A_v \leq \liminf_{y \rightarrow x} v(y),$$

se sigue que $\frac{1}{n} + v(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} v(y)$ y en consecuencia

$$v(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} v(y). \quad \text{■}$$

Ahora ya estamos en posición de completar la solución al problema de Dirichlet en una superficie de Riemann.

Teorema 3.2.24. *Sean Y un abierto de una superficie de Riemann X , $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada y*

$$u^* = \sup\{u : u \in \mathcal{B}_f\},$$

donde $\mathcal{B}_f$ es la clase de Perron de f . Se tiene entonces que para cada punto regular $x \in \partial Y$ vale

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x).$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f , podemos considerar una vecindad abierta y relativamente compacta V de x tal que

$$f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon \quad \text{para cada } y \in \partial Y \cap V.$$

Por otro lado, dado que f es acotada, consideremos constantes $k, K \in \mathbb{R}$ que satisfacen lo siguiente

$$k \leq f(y) \leq K, \quad \text{para cada } y \in \partial Y. \quad (1)$$

Ahora bien, considerando $c = f(x) - \varepsilon$ y $m = k - \varepsilon$, observemos que de (1) se tiene que $m \leq c$, por lo tanto del lema 3.2.20 existe una función continua $v : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ que es subarmónica en Y y satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} v(x) &= f(x) - \varepsilon, \\ v|_{\bar{Y} \cap V} &\leq f(x) - \varepsilon, \\ v|_{\bar{Y} \setminus V} &= k - \varepsilon. \end{aligned}$$

De la primera igualdad, como $x \in \partial Y$, obtenemos que $v(x)|_{\partial Y} = f(x)|_{\partial Y} - \varepsilon < f(x)|_{\partial Y} = f(x)$, dado que x fue arbitrario, tenemos que $v|_{\partial Y} \leq f$. Con todo lo anterior, observe que $v \in \mathcal{B}_f$ y por lo tanto $v \leq u^*$, luego por el inciso a) del lema 3.2.23 tenemos lo siguiente

$$\liminf_{y \rightarrow x} u^*(y) \geq \liminf_{y \rightarrow x} v(y) \geq v(x) = f(x) - \varepsilon. \quad (2)$$

Por otro lado, tomando ahora $c = -f(x)$ y $m = -K$, de (1) tenemos que $f(x) \leq K$ y así $m \leq c$. Aplicando nuevamente el lema 3.2.20 tenemos la existencia de una función continua $w : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ que es subarmónica en Y y además satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} w(x) &= -f(x), \\ w|_{\bar{Y} \cap V} &\leq -f(x), \\ w|_{\bar{Y} \setminus V} &= -K. \end{aligned}$$

Dado que $u \in \mathcal{B}_f$, tenemos que $u|_{\partial Y} \leq f$, así que para todo $y \in \partial Y \cap V$ se tiene que $u(y) \leq f(x) + \varepsilon$. Usando la primera igualdad de arriba obtenemos que

$$u(y) + w(y) \leq \varepsilon, \quad \text{para cada } y \in \partial Y \cap V.$$

Similarmente, por la definición de la clase de Perron sabemos que $u \leq K$ y por la tercera igualdad de arriba podemos concluir que

$$u(z) + w(z) \leq 0, \quad \text{para cada } z \in \bar{Y} \cap \partial V.$$

Aplicando el principio del máximo para la función subarmónica $u + v$ tenemos que

$$u + w \leq \varepsilon, \quad \text{en } \bar{Y} \cap V,$$

equivalentemente

$$u|_{\bar{Y} \cap V} \leq \varepsilon - w|_{\bar{Y} \cap V}, \quad \text{para cada } u \in \mathcal{B}_f.$$

Por lo tanto, usando lo anterior y el inciso b) del lema 3.2.23 obtenemos que

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) \leq \limsup_{y \rightarrow x} (\varepsilon - w(x)) \leq \varepsilon - w(x) = f(x) + \varepsilon. \quad (3)$$

Finalmente, de (2) y (3) tenemos que

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) \leq f(x) \leq \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y),$$

y así concluimos que

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x).$$

■

Concluimos la sección con el siguiente resultado que es consecuencia del teorema anterior.

Teorema 3.2.25. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X tal que todo los puntos frontera de Y son regulares entonces para cada función continua y acotada $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$ el problema de Dirichlet en Y se puede resolver.*

3.3. Conjuntos Runge

En esta sección presentamos los *conjuntos Runge* que serán de utilidad en la demostración del teorema del mapeo de Riemann. El objetivo de esta sección es probar que en una superficie de Riemann podemos construir una *exhaustividad* de conjuntos Runge, cosa que se precisará en breve.

Definición 3.3.1. *Sea X una superficie de Riemann, para cualquier subconjunto $Y \subset X$ sea $\mathfrak{h}(Y)$ la unión de Y con todas las componentes conexas relativamente compactas de $X \setminus Y$. Un abierto $Y \subset X$ es llamado **Runge***

si $Y = \mathfrak{h}(Y)$, es decir, si ninguna componente conexa de $X \setminus Y$ es compacta. Véase la figura 3.4.

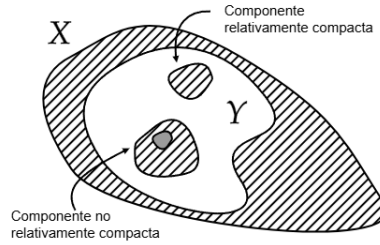


Figura 3.4: El conjunto $Y \subset X$ es la porción de blanco, la pequeña porción sombreada de gris no forma parte de X .

Proposición 3.3.2. *Bajo la notación de la definición anterior, se tienen las siguientes propiedades:*

- a) $\mathfrak{h}(\mathfrak{h}(Y)) = \mathfrak{h}(Y)$ para todo $Y \subset X$.
- b) Si $Y_1 \subset Y_2$ entonces $\mathfrak{h}(Y_1) \subset \mathfrak{h}(Y_2)$.
- c) Si Y es cerrado entonces $\mathfrak{h}(Y)$ es cerrado.
- d) Si Y es compacto entonces $\mathfrak{h}(Y)$ es compacto.

Demostración.

- a) Para demostrar la igualdad, primero observemos que $\mathfrak{h}(Y) \subset \mathfrak{h}(\mathfrak{h}(Y))$. Para demostrar la otra contención, sean $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ los conjuntos cuyos elementos son las componentes conexas relativamente compactas de $X \setminus Y$ y $X \setminus \mathfrak{h}(Y)$, respectivamente. Como $Y \subset \mathfrak{h}(Y)$ entonces $X \setminus \mathfrak{h}(Y) \subset X \setminus Y$, más aún, se tiene que las componentes conexas de $X \setminus \mathfrak{h}(Y)$ están contenidas en las componentes de $X \setminus Y$, con lo anterior, se tiene lo siguiente

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{h}(Y)) = \mathfrak{h}(Y) \cup \bigcup_{C \in \mathcal{K}_2} C \subset \mathfrak{h}(Y) \cup \bigcup_{D \in \mathcal{K}_1} D \subset \mathfrak{h}(Y) \cup \mathfrak{h}(Y) \subset \mathfrak{h}(Y).$$

Con esto, obtenemos la igualdad deseada.

- b) Procediendo por contradicción, supongamos que $\mathfrak{h}(Y_2) \subsetneq \mathfrak{h}(Y_1)$. Observemos que la igualdad no se puede dar, ya que por hipótesis Y_1 está contenido en Y_2 . Supongamos entonces que la contención planteada al inicio es propia y sean $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ los conjuntos cuyos elementos son las componentes conexas relativamente compactas de $X \setminus Y_1$ y $X \setminus Y_2$, respectivamente. Con lo anterior se tiene lo siguiente:

$$\mathfrak{h}(Y_2) = Y_2 \cup \bigcup_{D \in \mathcal{K}_2} D \subset Y_1 \cup \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C = \mathfrak{h}(Y_1),$$

donde $Y_2 \cap \bigcup_{D \in \mathcal{K}_2} D = \emptyset = Y_1 \cap \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C$. Se sigue entonces que Y_2 está contenido en Y_1 , o bien, Y_2 está contenido en $\bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C$, notemos que, por hipótesis, lo primero no es posible, por lo tanto $Y_2 \subset \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C$, sin embargo esto tampoco es posible ya que $Y_1 \subset Y_2$ y $Y_1 \cap \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C = \emptyset$. Concluimos así que $\mathfrak{h}(Y_1) \subset \mathfrak{h}(Y_2)$.

Antes de pasar a las otras demostraciones conviene recordar que un espacio es localmente conexo si y solo si para todo abierto $U \subset X$ cada componente de U es abierta, dicho resultado se puede consultar en libros de topología básica, por ejemplo [14].

- c) Sean C_j con $j \in J$ las componentes conexas de $X \setminus Y$, como $X \setminus Y$ es abierto y X es una superficie de Riemann, en particular es localmente conexa, se tiene que los C_j son abiertos.

Consideremos el conjunto J_0 formado por aquellos índices $j \in J$ tales que $\overline{C_j}$ es compacto, notemos que se tiene lo siguiente

$$X \setminus \mathfrak{h}(Y) = \bigcup_{j \in J \setminus J_0} C_j,$$

observemos que, por ser unión de abiertos, es también abierto y así $\mathfrak{h}(Y)$ es cerrado.

- d) Supongamos que $Y \neq \emptyset$, sea U una vecindad abierta relativamente compacta de Y . Afirmamos que todos los C_j intersecan a $\overline{U}$, en caso contrario, si $C_j \subset X \setminus \overline{U}$ entonces $\overline{C_j} \subset X \setminus U \subset X \setminus Y$ lo cual implica que $C_j = \overline{C_j}$. Lo anterior significa que C_j es abierto y cerrado, lo cual contradice la conexidad de X .

Por otro lado, como ∂U es compacto ($\partial U = \overline{U} \cap \overline{U^c}$) y es cubierto por los abiertos disjuntos C_j , solo una cantidad finita de estos interseca a ∂U . Consideremos la colección de los C_j relativamente compactos y sean $C_{j_1}, \dots, C_{j_m}$ aquellos que intersecan a ∂U (por la afirmación hecha al inicio de la demostración de este inciso, todos los demás están contenidos en U). Tenemos que $\mathfrak{h}(Y) \subset U \cup C_{j_1} \cup \dots \cup C_{j_m}$ es relativamente compacto y por el inciso c) de este resultado se tiene que es compacto. ■

Proposición 3.3.3. (*Exhaustividad compacta*) Para X una superficie de Riemann no compacta existe una sucesión $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de X con las siguientes propiedades:

- a) $K_j = \mathfrak{h}(K_j)$ para todo j ,
- b) $K_{j-1} \subset \text{Int}(K_j)$ para todo $j \geq 1$,
- c) $\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j = X$.

Demostración.

Dado que X es una superficie de Riemann, en particular es segundo numerable, así que existe una sucesión de compactos de X , $K'_0 \subset K'_1 \subset \dots$ los cuales cubren a X (para construirla podemos tomar, por ejemplo, conjuntos básicos que tengan cerradura compacta y biholomorfos a discos anidados).

Sea $K_0 := \mathfrak{h}(K'_0)$, observe que K_0 cumple a). Procediendo por inducción, supongamos que $K_1, \dots, K_m$ satisfacen las propiedades a) y b), como K'_m y K_m son compactos, la unión de ellos también lo es y así existe un compacto M tal que $K'_m \cup K_m \subset \text{Int}(M)$, tomemos ahora $K_{m+1} := \mathfrak{h}(M)$. La sucesión de conjuntos K_j , $j \in \mathbb{N}$ satisface las condiciones deseadas:

- a) Por construcción, $K_{m+1} = \mathfrak{h}(M)$ entonces $\mathfrak{h}(\mathfrak{h}(M)) = \mathfrak{h}(M) = K_{m+1}$.
- b) $\text{Int}(K_{m+1}) = \text{Int}(\mathfrak{h}(M)) \supset \text{Int}(M) \supset K_m$, es decir, $K_m \subset \text{Int}(K_{m+1})$.
- c) Por construcción de los K_j se tiene que $K'_j \subset K_{j+1}$ entonces $X = \bigcup K'_j \subset \bigcup K_{j+1}$.

■

Teorema 3.3.4. *Sea X una superficie de Riemann, K_1 y K_2 subconjuntos compactos de X con $K_1 \subset \text{Int}(K_2)$ y $\mathfrak{h}(K_2) = K_2$ entonces existe un abierto $Y \subset X$ que es Runge y satisface $K_1 \subset Y \subset K_2$. Más aún, podemos elegir Y de tal manera que su frontera sea regular.*

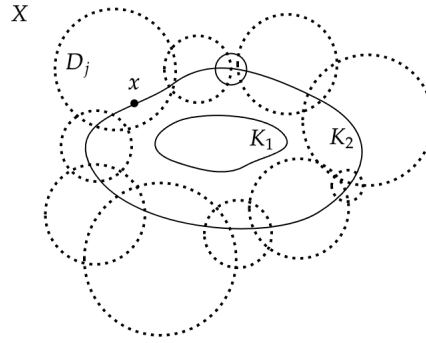
Demostración.

Sea $x \in \partial K_2$, consideremos una carta U que no interseca a K_1 , en esta carta tomemos D , un conjunto compacto que tiene a x en su interior y es biholomorfo a un disco en $\mathbb{C}$. Esto podemos hacerlo con cualquier punto de la frontera de K_2 para cubrirla. Como ∂K_2 es cerrado (su complemento es abierto) y $\partial K_2 \subset \overline{K_2}$ se sigue que ∂K_2 es compacto, así podemos cubrir ∂K_2 con una cantidad finita de conjuntos $D_1, \dots, D_m$, todos biholomorfos a discos, véase figura 3.5.

Tomemos $Y := K_2 \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{D_j}$ y observemos que Y es abierto con $K_1 \subset Y \subset K_2$. Sean C_j , $j \in J$ las componentes conexas de $X \setminus K_2$, por hipótesis sabemos que no hay componentes compactos (K_2 es Runge).

Por otro lado, observemos que por la elección de los D_j estos son conexos e intersecan al menos un C_j . Afirmamos ahora que no hay componentes conexas de $X \setminus Y$ que sean relativamente compactas. Para ver esto consideremos los siguientes casos:

1. Sea A una componente de $X \setminus Y$ tal que $A \cap D_j = \emptyset$ para todo j . Notemos que A también es componente


 Figura 3.5: Cubierta para la frontera de K_2 .

de $X \setminus K_2$, en efecto,

$$X \setminus Y = (X \setminus K_2) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k D_j \right) = \bigsqcup_{\alpha} A_{\alpha},$$

donde, la última unión es disjunta y representa la descomposición en componentes conexas de $X \setminus Y$. Luego, como la intersección de A con los D_j es vacía, tenemos que $(X \setminus K_2) \cap A = A$, así $A \subset X \setminus K_2 = \bigsqcup_{j \in J} C_j$ por lo tanto $A \subset C_j$ para algún $j \in J$.

Por otro lado, tenemos que

$$C_j \subset X \setminus K_2 \subset X \setminus Y = \bigsqcup_{\alpha} A_{\alpha},$$

como $A \cap C_j \neq \emptyset$ entonces $C_j \subset A$.

Con lo anterior tenemos que $A = C_j$ entonces $\bar{A}$ no es compacta, ya que $\bar{C}_j$ no lo es (por hipótesis).

2. A es componente de $X \setminus Y$ tal que $A \cap D_j \neq \emptyset$ para algún $j \in J$. Como A es componente conexa, se sigue que $D_j \subset A$.

Por otro lado, $D_j \cap C_i \neq \emptyset$ para algún i entonces $C_i \cap A \neq \emptyset$ (ambos contienen a D_j), con lo anterior se tiene que $C_i \subset A$. Si $\bar{A}$ fuese compacto entonces C_i también lo sería, ya que $\bar{C}_i \subset \bar{A}$, lo cual es una contradicción a la hipótesis de que $\mathfrak{h}(K_2) = K_2$.

De ambos casos, tenemos que $Y = \mathfrak{h}(Y)$.

Para finalizar, por el teorema 3.2.19, tenemos que todos los puntos frontera son regulares. ■

Teorema 3.3.5. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , si Y es Runge entonces cada componente conexa de Y también es Runge.*

Demostración.

Sean Y_i , $i \in I$ las componentes conexas de Y . Notemos que todas las componentes son abiertas ya que Y es abierto y K es localmente conexo. Sea $\{A_k, k \in K\}$ el conjunto de componentes conexas de $X \setminus Y$, dado que Y es Runge tenemos que A_k es cerrada pero no compacta.

Tenemos que $\overline{Y}_i \cap A \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, en caso contrario, $\overline{Y}_i \subset Y$ por lo que $\overline{Y}_i = Y_i$, lo cual contradice el hecho de que X es conexa (por ser superficie de Riemann).

Sea C una componente conexa de $S \setminus Y_i$ entonces $C \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, en efecto, en caso contrario tendríamos que $C \cap Y_j \neq \emptyset$ para algún $j \neq i$, por lo tanto $\overline{Y}_j \subset C$, ya que C es cerrado y Y_j es conexo, pero por el párrafo anterior tendríamos que $C \cap A \neq \emptyset$.

Luego, C interseca al menos a un A_k y por tanto $A_k \subset C$, se sigue que C no puede ser compacto, como C fue arbitrario se sigue que Y_i es Runge. ■

Con todos los resultados anteriores ya podemos probar el objetivo de esta sección.

Teorema 3.3.6. (*Exhaustividad por dominios Runge*) Sea X una superficie de Riemann no compacta, existe una sucesión $Y_0 \Subset Y_1 \Subset \dots$ de dominios relativamente compactos Runge con $\bigcup_j Y_j = X$ y tal que cada Y_j tiene frontera regular.

Demostración.

Primero veremos que para cada compacto $K \subset X$ existe un dominio Runge $Y \Subset X$ que tiene frontera regular y $K \subset Y$.

Dado K , podemos encontrar un conjunto compacto y conexo K_1 y un compacto K_2 tales que $K \subset K_1 \subset \text{Int}(K_2)$.

Observemos que por la proposición 3.3.2 $\mathfrak{h}(K_2)$ es compacto y Runge, además $K_1 \subset \text{Int}(K_2) \subset \text{Int}(\mathfrak{h}(K_2))$, por lo tanto podemos aplicar el teorema 3.3.4, con lo cual existe un abierto Runge Y_1 que tiene frontera regular tal que

$$K_1 \subset Y_1 \subset \mathfrak{h}(K_2).$$

Sea Y la componente conexa de Y_1 , que contiene a K_1 , por el teorema 3.3.5, Y es Runge y por el teorema 3.2.19 tiene frontera regular.

Por otro lado, por el teorema 3.3.3 existe una cubierta de X formada por compactos $\{\hat{K}_j\}_{j \in J}$, con $J = \{1, 2, \dots\}$, tales que $\hat{K}_j \subset \hat{K}_{j+1}$.

Tomemos al conjunto $\hat{K}_0$, por lo demostrado al inicio, tenemos que existe un dominio Runge $Y_0 \Subset X$ con frontera

regular tal que $\hat{K}_0 \subset Y_0$. Tomemos ahora $K_1 \in \{\hat{K}_j\}_{j \in I}$ como aquel de índice más pequeño tal que $Y_0 \subset K_1$, nuevamente tenemos que existe un dominio $Y_1 \Subset X$ tal que $Y_0 \subset K_1 \subset Y_1$. Notemos además que $Y_0 \Subset Y_1$, ya que por las contenciones previas $\bar{Y}_0 \subset \bar{Y}_1$. Siguiendo de esta manera podemos construir una sucesión de dominios Runge relativamente compactos y con fronteras regulares tales que $\hat{K}_0 \subset Y_0$ y $K_j \subset Y_j$ para todo $j \in J^*$, donde J^* representa los índices usados para la construcción de los conjuntos Y_j . Se tiene entonces que $X = K_0 \cup \bigcup_{j \in J^*} \hat{K} \subset Y_0 \cup \bigcup_{j \in J^*} Y_j$. Con todo lo anterior, tenemos la cubierta buscada. ■

Los resultados de esta sección, junto con los del apéndice A, concluyen con los preliminares necesarios para comenzar a estudiar el teorema principal de este trabajo, el teorema del mapeo de Riemann.

Tal como el nombre de esta tesis lo menciona, nos basaremos en la teoría de conjuntos Runge para la demostración del teorema, sin embargo existen otras demostraciones usando técnicas distintas, por ejemplo mediante el uso de unas funciones llamadas *funciones de Green*, el lector interesado en esto puede consultar a partir de la página 166 de [7].

Capítulo 4

El teorema del mapeo de Riemann

4.1. Preliminares

Comenzamos la sección con el siguiente resultado, que es consecuencia del corolario 2.2.26 y de la definición del grupo de DeRham (definición 2.3.19).

Proposición 4.1.1. *Si X es una superficie de Riemann simplemente conexa entonces $H_{DR}^1(X) = 0$.*

Esta propiedad, que una superficie de Riemann tenga grupo de DeRham trivial, es una hipótesis importante en los próximos resultados.

Lema 4.1.2. *Si X es una superficie de Riemann con $H_{DR}^1(X) = 0$ entonces se tienen los siguientes resultados:*

1. *Para cada función holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}^\times$ existe un **logaritmo** y una **raíz cuadrada**, es decir, existen funciones $g, h \in \mathcal{O}(X)$ tales que*

$$e^g = f \quad y \quad h^2 = f.$$

2. *Toda función armónica $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ es la parte real de una función holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.*

Demostración.

1. Comencemos notando que $f^{-1}df$ es una 1-forma holomorfa en X , dado que $0 = H_{DR}^1(X) = \Omega(X)/d\mathcal{O}(X)$ tenemos que existe una función $g \in \mathcal{O}(X)$ con $dg = f^{-1}df$.

Luego, agregando una constante a g , de ser necesario, podemos suponer que en un punto $a \in X$ tenemos $e^{g(a)} = f(a)$, dicho de otra forma, $1 = f(a)e^{-g(a)}$.

Por otro lado,

$$d(fe^{-g}) = (df)e^{-g} - fe^{-g}dg = (df)e^{-g} - fe^{-g}f^{-1}df = (df)e^{-g} - e^{-g}df = 0.$$

Dado esto y como X es conexa, se sigue que fe^{-g} es idénticamente 1, así $e^g = f$.

Para lo segundo, observemos que basta con tomar $h := e^{\frac{g}{2}}$ y así conseguimos lo deseado.

2. Sea u una función armónica, por la observación 3.1.7, du es 1-forma armónica, notemos que como u es una función real valuada, $du = \overline{du}$, es decir, es una 1-forma real. Por el teorema 3.1.11, tenemos que du es la parte real de una función holomorfa, es decir, existe $\omega \in \Omega(X)$ tal que $du = \operatorname{Re}(\omega)$.

Dado que $H_{DR}^1(X) = 0$ tenemos que $du = \operatorname{Re}(dp) = d(\operatorname{Re} p)$ con $p \in \mathcal{O}(X)$, luego $u = \operatorname{Re}(p) + c$ con $c = \text{cte}$. ■

El siguiente resultado es un primer acercamiento a los biholomorfismos que buscamos, pero solo es válido para ciertos dominios dentro de una superficie de Riemann, recuerde que estos conjuntos son en particular superficies de Riemann (ejemplo 1.0.8) así que tiene sentido hablar del grupo de DeRham de estos.

Teorema 4.1.3. *Sea X una superficie de Riemann no compacta, $Y \subseteq X$ un dominio con $H_{DR}^1(Y) = 0$. Supongamos que la frontera de Y es regular. Existe entonces una función biholomorfa de Y sobre el disco unitario $\mathbb{E}$.*

Demostración.

Sea $a \in Y$, por el corolario A.0.6, existe una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(X)$ que tiene un cero de orden 1 en el punto a y no se anula en $X \setminus \{a\}$.

Notemos que estamos bajo las hipótesis del teorema 3.2.25, aplicado a la función $\log(|g|)$, es decir, existe una función $u : \overline{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $\overline{Y}$ y armónica en Y con

$$u(y) = \log |g(y)|, \quad \text{para cada } y \in \partial Y. \quad (1)$$

Como u es una función armónica, el inciso 2 del lema 4.1.2 garantiza que $u = \operatorname{Re}(h)$ con $h \in \mathcal{O}(Y)$. Teniendo lo anterior, basta tomar $f := e^{-h}g \in \mathcal{O}(Y)$.

Lo que probaremos ahora es que esta función f es el biholomorfismo que buscamos. Para ello veremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1 . $f(Y) \subset \mathbb{E}$.

Sea $y \in Y \setminus \{a\}$, de (1) tenemos que

$$|e^{-h(y)}| = |e^{-\operatorname{Re}(h(y))}| = |e^{-u(y)}| = |e^{-\log(g(y))}|,$$

y con esto se sigue:

$$e^{|\log(g(y))|-u(y)} = e^{|\log(g(y))|}e^{-u(y)} = |e^{-h(y)}||g(y)| = |f(y)|.$$

Vemos así, que la función $|f|$ está definida en Y y que además puede ser extendida a una función $\varphi : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual por (1) es idénticamente 1 en la frontera de Y .

Este último párrafo nos dice que la función f , en la frontera de Y , está acotado por 1, por el principio del máximo esto implica que $|f(y)| < 1$ para todo $y \in Y$, y así $f(Y) \subset \mathbb{E}$.

Afirmación 2. $f : Y \rightarrow D$ es propia.

Basta probar que para cada $r < 1$ la preimagen del disco $D_0(r)$ es compacta en Y . Sea $Y_r := f^{-1}(D_r(0))$, para ello veamos que se tiene la siguiente igualdad

$$Y_r = \{y \in Y : |f(y)| \leq r\} = \{y \in \bar{Y} : \varphi(y) \leq r\},$$

donde φ es la extensión de f a la frontera de Y dada en la afirmación 1.

Notemos que $Y_r = \{y \in Y : |f(y)| \leq r\} \subset \{y \in \bar{Y} : \varphi(y) \leq r\}$ es clara, pasemos a demostrar la otra contención, para ello sea $y_0 \in \{y \in \bar{Y} : \varphi(y) \leq r\}$ consideremos los siguientes casos:

- Si $y_0 \in Y$, en este caso $|f(y_0)| = \varphi(y_0) \leq r$, por lo tanto $y_0 \in Y_r$.
- Si $y_0 \in \partial Y$, en este caso $|f(y_0)| = \varphi(y_0) \leq 1$. Como 1 es el máximo de f (en particular supremo) de la función f en $\bar{Y}$ y además, por hipótesis se tiene que $\varphi(y_0) \leq r$ se sigue que $|f(y_0)| = \varphi(y_0) < r < 1$, así $y_0 \in Y_r$.

Con lo anterior se tiene que $Y_r \subset \bar{Y}$, como Y_r es cerrado y por hipótesis $\bar{Y}$ es compacto se concluye que Y_r es compacto.

Ahora bien, como f es propia, el teorema A.0.7 nos dice que cada valor en $\mathbb{E}$ es alcanzado el mismo número de veces, pero el valor cero es tomado exactamente una vez, por lo tanto $f : Y \rightarrow D$ es biyectiva. Recordemos que si una función holomorfa es biyectiva, su inversa también es holomorfa, este resultado se puede consultar en libros de análisis complejo tal como en la página 206 de [16].

Concluimos que f es un biholomorfismo. ■

Antes de pasar a la demostración del teorema principal veremos lo últimos dos lemas que necesitamos.

Lema 4.1.4. Sean $R \in (0, \infty]$, Y un subdominio propio de $D_0(R)$ con $0 \in Y$ y $H_{DR}^1(Y) = 0$ existe entonces $r < R$ y una función holomorfa $f : Y \rightarrow D_0(r)$ con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Demostración.

Consideremos el caso en que $R < \infty$, el caso $R = \infty$ se maneja de manera similar.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $R = 1$ (esto es posible a través de una homotecia entre los discos con centro en 0 y razón $\frac{1}{R}$), con esto se tiene que $Y \subset \mathbb{E}$.

Dado que Y es, en particular, un subconjunto propio de $\mathbb{E}$ tenemos que existe un punto $a \in \mathbb{E} \setminus Y$, con el cual definimos la siguiente función $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ dada por

$$\varphi(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

observemos que esta función tiene la forma de un automorfismo del disco unitario (véase página 219 de [16]), por lo tanto está bien definido y además es un biholomorfismo. Esta función satisface $\varphi(0) = -a$ y $0 \notin \varphi(V)$ de lo contrario, para algún $w \in Y$ se tendría que

$$\frac{w - a}{1 - \bar{a}w} = 0,$$

lo cual implica que $w = a$ y así a sería un punto de Y , contradiciendo su elección. Finalmente, observemos que

$$\varphi'(0) = 1 - |a|^2 \neq 0, \quad (1)$$

luego, por el inciso 1 del lema 4.1.2, se tiene la existencia de una función $g \in \mathcal{O}(Y)$ tal que $g^2 = \varphi|_Y$. Por lo que $g(Y) \subset \mathbb{E}$ y al derivar se tiene $2gg' = \varphi'$ con lo cual $g(0) \neq 0$ y además

$$g'(0) = \frac{\varphi'(0)}{2g(0)}. \quad (2)$$

Definamos ahora la función

$$\psi(z) := \frac{z - b}{1 - \bar{b}z},$$

donde $b := g(0)$ y así $b^2 = -a$. Observemos que ψ es también un automorfismo del disco unitario con $\psi(b) = 0$ y

$$\psi'(b) = \frac{1}{1 - |b|^2}. \quad (3)$$

Consideremos ahora $h := \psi \circ g : Y \rightarrow \mathbb{E}$, notemos que $h(0) = \psi(g(0)) = 0$, y por (1), (2) y (3) se tiene

$$\gamma := h'(0) = \psi'(b)g'(0) = \frac{1}{1 - |b|^2} \frac{1 - |a|^2}{2b} = \frac{1 + |b|^2}{2b}.$$

Como $b \in \mathbb{E}$ tenemos entonces lo siguiente

$$0 < (1 - |b|)^2 = 1 - 2|b| + |b|^2,$$

luego se sigue que $1 + |b|^2 > 2|b| > 0$ y así $|1 + |b|^2| > 2|b| > 0$, de esta última desigualdad se sigue que $\frac{|1 + |b|^2|}{2|b|} > 1$, es decir, $|\gamma| > 1$. Tomando

$$r := \frac{1}{|\gamma|} \quad \text{y} \quad f := \frac{h}{\gamma},$$

la función $f : Y \rightarrow D_r(0)$ tiene las propiedades que buscamos, en efecto, f es holomorfa, ya que h lo es, además $f(0) = \frac{h(0)}{h'(0)} = 0$ y $f'(0) = \frac{1}{\gamma}h'(0) = 1$. ■

Lema 4.1.5. *Sea X una superficie de Riemann no compacta con $H_{DR}^1(X) = 0$ y $Y \subset X$ un dominio Runge, se tiene que $H_{DR}^1(Y) = 0$.*

Demostración.

Sea $\omega \in \Omega(X)$ arbitraria, para ver que $H_{DR}^1(Y) = 0$ probaremos que ω tiene una primitiva.

Por el corolario A.0.5 tenemos que existe una 1-forma $\omega_0 \in \Omega(X)$ que no se anula. Luego, $\omega = f\omega_0$ para alguna función $f \in \mathcal{O}(Y)$. Por el teorema de aproximación de Runge (teorema A.0.2) existe una sucesión $f_n \in \mathcal{O}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y hacia f . Así por cada curva cerrada α en Y se tiene

$$\int_{\alpha} f_n \omega_0 \rightarrow \int_{\alpha} \omega = \int_{\alpha} f \omega_0.$$

Como $H_{DR}^1(X) = 0$, $f_n \omega_0$ tiene una primitiva, y como α es una curva cerrada tenemos que $\int_{\alpha} f_n \omega_0 = 0$, entonces $\int_{\alpha} \omega = 0$, es decir, los períodos de ω son cero y como $\Omega^{(1)}(Y) \subset \mathcal{E}^{(1)}(Y)$, el teorema 2.2.37 garantiza que ω tiene una primitiva. ■

4.2. Teorema principal

Teorema 4.2.1. *(del mapeo de Riemann) Si X es una superficie de Riemann con $H_{DR}^1(X) = 0$ entonces X es biholomorfa a alguna de los siguientes: la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$, el plano complejo $\mathbb{C}$ o el disco unitario $\mathbb{E}$.*

Demostración.

- Si X es compacta, la definición A.0.12 de género tiene sentido, además, por el corolario 1.2.6, todas las funciones holomorfas en X son constantes, con lo cual se sigue que $d\mathcal{O}(X)$ es trivial, y como $H_{DR}^1(X) = 0$, esto implica que $\Omega(X) = 0$. Usando el inciso b) del teorema A.0.13 podemos concluir que $g = \dim H_X^0(\Omega) = \dim \Omega(X) = 0$ y por el inciso a) del teorema A.0.13, se sigue que X es biholomorfa a $\mathbb{P}^1$.

- Si X no es compacta, por el teorema 3.3.6 existe una sucesión $Y_0 \Subset Y_1 \Subset \dots$ de dominios relativamente compactos Runge con $\bigcup_j Y_j = X$ tal que cada Y_j tiene frontera regular.

Dado que $H_{DR}^1(X) = 0$, el teorema 4.1.5 implica que $H_{DR}^1(Y_n) = 0$ para todo n , más aún, cada Y_n es biholomorfo al disco unitario (teorema 4.1.3), a dichos biholomorfismos los denotaremos por $b_n : Y_n \rightarrow \mathbb{E}$.

Por otro lado, consideremos $a \in Y_0$ y una vecindad coordinada (U, z) del punto a y supongamos que $b_n(a) = 0$ para todo n . A continuación veremos que existe un real $r_n > 0$ y una función biholomorfa

$$f_n : Y_n \rightarrow D_0(r_n)$$

que satisface lo siguiente

$$f_n(a) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{df_n}{dz}(a) = 1,$$

en efecto, notemos que $\mathbb{E}$ es un subconjunto propio de $D_0(\infty)$ y satisface las hipótesis del lema 4.1.4, por lo que existen $r'_n < \infty$ y una función holomorfa $g_n : \mathbb{E} \rightarrow D_0(r'_n)$ tal que $g_n(0) = 0$ y $g'_n(0) = 1$.

Como b_n es, en particular, holomorfa e inyectiva tenemos que $b'_n(a) \neq 0$; tomando $\gamma := b'_n(a)$, podemos definir $f_n := \frac{1}{\gamma} g_n \circ b_n : Y_n \rightarrow D_0(r_n)$ con $r_n := \frac{1}{|\gamma|} r'_n$ (con esto garantizamos que $|f_n| < r_n$ y, en caso de ser necesario, podemos hacer una traslación para garantizar que el disco de radio r_n esté centrado en el origen), véase la figura 4.1, la cual satisface las condiciones deseadas, en efecto,

$$f_n(a) = \frac{1}{b'_n(a)} g_n(b_n(a)) = \frac{1}{b'_n(a)} g_n(0) = \frac{1}{b'_n(a)}(0) = 0.$$

$$\frac{df_n}{dz}(a) = \frac{1}{b'_n(a)} g'_n(b_n(a)) b'_n(a) = \frac{1}{b'_n(a)} g'_n(0) b'_n(a) = g'_n(0) = 1.$$

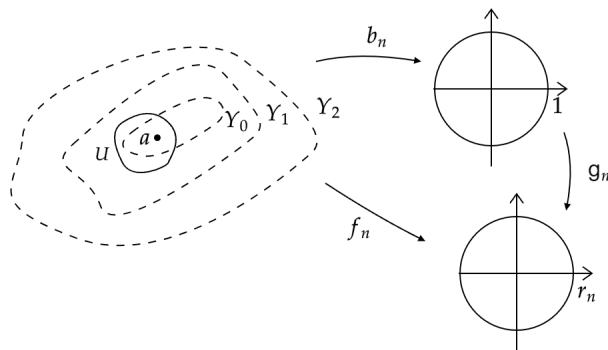


Figura 4.1: Construcción de las funciones f_n .

Consideremos la función $h_n := f_{n+1} \circ f_n^{-1} : D_0(r_n) \longrightarrow D_0(r_{n+1})$ para todo n , nótese que se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} h_n(0) &= f_{n+1}(a) = 0, \\ h'_n(0) &= f'_{n+1}(a) \frac{1}{f'_n(a)} = 1, \end{aligned} \quad (1)$$

del corolario A.0.9 se sigue que

$$|h'_n(0)| \leq \frac{r_{n+1}}{r_n}, \quad (2)$$

de (1) y (2) se concluye que $r_n \leq r_{n+1}$. Definamos $R := \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \in (0, \infty]$.

Afirmación: X es biholomorfo a $D_0(R)$.

Consideremos las siguientes composiciones

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &\longrightarrow D_0(r_0) \xrightarrow{f_0^{-1}} Y_0 \\ z &\longmapsto r_0 z \longmapsto f_0^{-1}(r_0 z) \end{aligned} ,$$

tenemos que la función $z \longmapsto f_0^{-1}(r_0 z)$ es un biholomorfismo entre Y_0 y $\mathbb{E}$.

Tomemos ahora la función

$$\begin{aligned} q_n : \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ q_n(z) &:= \frac{1}{r_0} f_n(f_0^{-1}(r_0 z)), \quad n \geq 0 \end{aligned} ,$$

la cual satisface

$$\begin{aligned} q_n(0) &= \frac{1}{r_0} (f_n(a)) = 0, \\ q'_n(0) &= \frac{df_n}{dz}(a) \frac{df_0^{-1}}{dz}(r_0 z) = 1, \end{aligned}$$

es decir, q_n es una función holomorfa y schlicht (esto es, una función holomorfa $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$ que es inyectiva y satisface que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, para más detalles sobre estas funciones, véase el apéndice A) existe entonces, por el teorema A.0.11, una subsucesión $\{f_{n_{0k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y_0 . Con el mismo análisis podemos encontrar una subsucesión $\{f_{n_{1k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de esta subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y_1 . Repitiendo este proceso obtenemos para cada m una subsucesión $\{f_{n_{mk}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la subsucesión previa que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y_m .

Haciendo $f_{n_k} := f_{n_{k_k}}$ tenemos que esta es una subsucesión de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para cada m la sucesión $\{f_{n_k}|_{Y_m}\}_{k \geq m}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y_m .

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ la función holomorfa que es el límite de la sucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, tenemos así que f coincide en cada Y_m con el límite de la sucesión $\{f_{n_k}|_{Y_m}\}_{k \geq m}$.

Notemos que la función f es inyectiva y satisface que $f(a) = 0$ y $\frac{df}{dz}(a) = 1$, veremos a continuación que además es un biholomorfismo entre X y $D_0(R)$.

En efecto, observemos que $f(X) \subseteq D_0(R)$, por lo tanto será suficiente probar que f es sobreyectiva. Procediendo por contradicción, supongamos que $f(X)$ es un subconjunto propio de $D_0(R)$, del lema 4.1.4 existe $r < R$ y una función holomorfa $g : f(X) \rightarrow D_0(r)$ tal que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$.

Como r es finito, tomemos n , suficientemente grande, tal que $r_n > r$ y consideremos la siguiente función

$$h := g \circ f \circ f_n^{-1} : D_0(r_n) \rightarrow D_0(r),$$

la cual satisface

$$\begin{aligned} h(0) &= g(f(f_n^{-1}(0))) = 0, \\ h'(0) &= g'(0)f'(a)\frac{1}{f'_n(a)} = 1, \end{aligned}$$

además por el corolario A.0.9 se tiene también que $|h'(0)| < \frac{r}{r_n}$ y en consecuencia $r_n < r$, lo cual es una contradicción, por lo tanto f es sobreyectiva, lo cual concluye la prueba. ■

Como consecuencia de este teorema, si X es una superficie de Riemann y $\tilde{X}$ su cubriente universal, en particular, $\tilde{X}$ es simplemente conexa y se puede aplicar el teorema del mapeo de Riemann, dependiendo de a que superficie sea biholomorfa, podemos clasificarlas como sigue.

Definición 4.2.2. Sea X una superficie de Riemann y $\tilde{X}$ su cubriente universal

1. Si $\tilde{X} \simeq \mathbb{P}^1$ entonces decimos que X es **elíptica**.
2. Si $\tilde{X} \simeq \mathbb{C}$ entonces decimos que X es **parabólica**.
3. Si $\tilde{X} \simeq \mathbb{E}$ decimos que X es **hiperbólica**.

Daremos ahora unos ejemplos usando la cubriente universal y el teorema del mapeo de Riemann. Analizaremos el plano complejo agujerado, para ello haremos uso del disco de Poincaré, la inversión respecto a un círculo y otros resultados, los cuales se pueden consultar en el apéndice B de este trabajo, cabe mencionar que parte de dicho apéndice corresponde a mi trabajo de licenciatura en donde estudie el disco de Poincaré y el semiplano superior a través de transformaciones de Möbius.

Ejemplo 4.2.3. En el ejemplo 1.3.16 de cubrientes, se mencionó que usando la función exponencial tenemos que la cubriente universal de $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C}^\times$ es una superficie de tipo parabólica.

Ejemplo 4.2.4. Si z_1, z_2 y z_3 son puntos distintos en $\mathbb{C}$ entonces la cubriente universal de $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ es el disco $\mathbb{E}$, y por lo tanto es una superficie de tipo hiperbólica.

Consideremos el disco de Poincaré (véase la definición B.0.2 del apéndice B) y supongamos que $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ y $z_3 = -1$. Sea P un polígono cuyos vértices se encuentran en la frontera de $\mathbb{E}$ y está contenido en este, haciendo la inversión con respecto a cada uno de sus lados obtenemos polígonos con vértices en la frontera del disco $\mathbb{E}$ como se muestra en la figura 4.2.

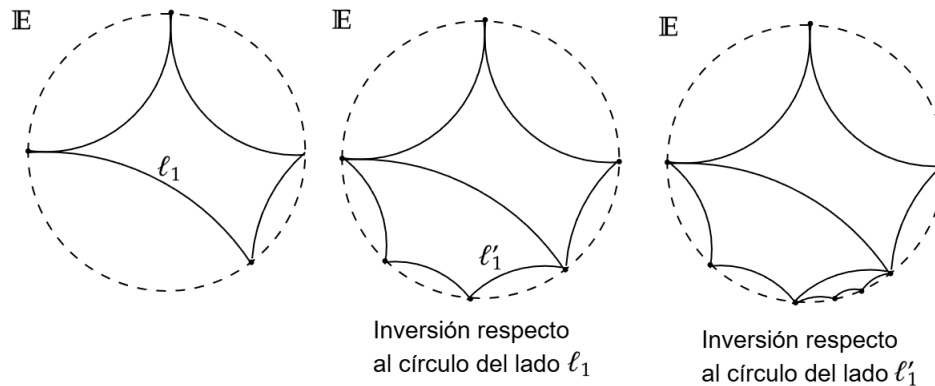


Figura 4.2: Inversión del polígono P .

Como resultado de las inversiones tenemos que el disco $\mathbb{E}$ queda cubierto con polígonos.

Para obtener la función cubriente buscada, por el teorema del mapeo de Riemann en el plano complejo (teorema B.0.6) y la transformación de Cayley (ejemplo 1.1.3) tenemos un biholomorfismo $f : P \rightarrow \mathbb{H}^2$, donde $\mathbb{H}^2$ es el semiplano superior (véase B.0.1), además podemos conseguir que los vértices de P sean enviados a los puntos $-1, 0, 1, \infty$, más aún, por el teorema B.0.8 el biholomorfismo se extiende a las fronteras. Por lo tanto tenemos que los arcos que forman a P son enviados a los intervalos $[-\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ y $[1, \infty]$. Luego, por el principio de reflexión de Schwarz (teorema B.0.5) la función f se extiende de manera holomorfa a la región obtenida por la reflexión en cada uno de sus lados (como se mencionó al inicio). Tenemos entonces una función biholomorfa sobre $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ definida en todo $\mathbb{E}$ y por construcción es un isomorfismo local y una función cubriente.

Apéndice A

Otros resultados necesarios para enunciar el mapeo de Riemann

Dedicamos este apéndice a los últimos resultados necesarios para la demostración que buscamos del mapeo de Riemann, las demostraciones de dichos resultados serán omitidas, ya que estas requieren de teoría que nos desviaría del objetivo del trabajo. Para el lector interesado en las demostraciones, o en conocer más del tema, puede consultar [3] o [13].

Comenzamos enunciando una propiedad de retículos, los cuales fueron estudiados en el capítulo 1.

Proposición A.0.1. *Sean Γ y Γ' dos retículos generados por las $\mathbb{R}$ -bases ordenadas $\{w_1, w_2\}$ y $\{w'_1, w'_2\}$ de $\mathbb{C}$ respectivamente, entonces $\Gamma = \Gamma'$ si y solo si existe una matriz $A \in \mathcal{B}$, donde*

$$\mathcal{B} := \{A \in GL(2, \mathbb{Z}) : \det A = \pm 1\},$$

tal que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Demostración.

Supongamos que existe una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{B},$$

tal que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

con ello, $w'_1 = aw_1 + bw_2$ y $w'_2 = cw_1 + dw_2$, lo cual implica que $w'_1, w'_2 \in \Gamma$, por lo tanto $\Gamma' \subset \Gamma$.

Por otro lado, como $\mathcal{B}$ es un grupo existe una matriz $A' \in \mathcal{B}$ tal que $A \cdot A' = Id_{2 \times 2}$, entonces

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix},$$

luego $w_1, w_2 \in \Gamma'$ y así $\Gamma \subset \Gamma'$, por lo tanto $\Gamma = \Gamma'$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\Gamma = \Gamma'$.

Tenemos así que $w_1, w_2 \in \Gamma'$ entonces, por definición, existen a', b', n', m' enteros tales que $w_1 = a'w'_1 + b'w'_2$ y $w_2 = n'w'_1 + m'w'_2$, esto equivale a

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

de igual manera se tiene que $w'_1, w'_2 \in \Gamma'$ y con ello existen enteros a, b, n y m tales que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dado que w'_1, w'_2 son $\mathbb{R}$ - linealmente independientes se sigue que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo anterior tenemos que

$$\det \left[\begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} \right] = 1,$$

por lo tanto

$$\det \left[\begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \right] = \det \left[\begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} \right] = \pm 1,$$

es decir, las matrices se encuentran en $\mathcal{B}$ tal como queríamos. ■

El siguiente teorema involucra la convergencia uniforme en compactos, lo cual requiere de dotar de una topología al espacio vectorial $\mathcal{E}(Y)$, con Y un abierto de una superficie de Riemann X . Esto es posible a través de conjuntos compactos, lo cual además nos proporciona tener semi-normas, a través de las cuales se define la convergencia, dicho procedimiento se puede consultar en la página 196 y 197 de [3].

Teorema A.0.2. (*Aproximación de Runge*) Sea Y un abierto de una superficie de Riemann no compacta X , supongamos que $X \setminus Y$ no tiene componentes conexas no compactas. Se tiene que toda función holomorfa en Y puede ser aproximada, de manera uniforme, en cada subconjunto compacto de Y por funciones holomorfas en X .

Corolario A.0.3. Si X es una superficie de Riemann no compacta entonces

1. Dada un 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ existe una función $f \in \mathcal{E}(X)$ con $d''f = \omega$. Dicho de otra forma $\mathcal{E}^{(0,1)}(X) = d''\mathcal{E}(X)$.
2. $H_X^1(\mathcal{O}) = 0$.

Para los siguientes resultados el lector debe tener presente los conceptos de divisor de una función y de un grupo abeliano.

Teorema A.0.4. En una superficie de Riemann no compacta X todo divisor $D \in \text{Div}(X)$ es el divisor de una función meromorfa $f \in \mathcal{M}^*(X)$.

Corolario A.0.5. En toda superficie de Riemann no compacta X existe una 1-forma $\omega \in \Omega(X)$ que nunca se anula.

Corolario A.0.6. Sea Y un subconjunto de X con frontera regular y a un punto en Y , existe una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(X)$ que tiene un cero de orden 1 en el punto a y no se anula en $X \setminus \{a\}$.

Teorema A.0.7. Sean X y Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa propia y no

constante, existe entonces un número natural n tal que f toma cada valor $c \in Y$, contando multiplicidades, n veces.

Un resultado muy conocido en variable compleja es la fórmula integral de Cauchy, a continuación lo enunciamos, junto con una consecuencia que será de utilidad en la sección 4.2.

Teorema A.0.8. (Fórmula integral de Cauchy) Sean f una función holomorfa en una región A , γ una curva cerrada simple en A y z_0 un punto dentro de γ entonces se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Corolario A.0.9. Sea $f : D_r(0) \longrightarrow D_{r'}(0)$ holomorfa se tiene que

$$|f'(0)| \leq \frac{r'}{r}.$$

Lema A.0.10. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que $\mathbb{C} \setminus G$ tiene puntos interiores y suponga que $w_0 \in G$, se tiene que el conjunto

$$\{f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) : f(\mathbb{E}) \subset G \text{ y } f(0) = w_0\}$$

es un subconjunto compacto de $\mathcal{O}(\mathbb{E})$ con respecto a la topología de convergencia uniforme en subconjuntos compactos.

Este lema, a su vez, permite probar el siguiente resultado, para el cual se requiere el concepto de función **schlicht**: una función holomorfa $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$ es llamada **schlicht** si es inyectiva, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Teorema A.0.11. El conjunto $\mathcal{S}$ de todas las funciones holomorfas schlicht es compacto en $\mathcal{O}(\mathbb{E})$.

Para terminar, en la demostración del teorema 3.1.13 se hablo del género de una superficie de Riemann, a continuación presentamos algunas propiedades de este que nos servirán.

Definición A.0.12. Sea X una superficie de Riemann compacta, se define el género de X de la siguiente manera $g := \dim_{\mathbb{C}} H_X^1(\mathcal{O})$.

Teorema A.0.13. Para una superficie de Riemann X se tienen los siguientes resultados:

- a) Si X es de género cero entonces es biholomorfa a la esfera de Riemann.
- b) Si g es el género de X entonces $g = \dim H_X^1(\mathcal{O}) = \dim H_X^0(\Omega)$.

Apéndice B

Inversión respecto a un círculo y principio de reflexión de Schwarz.

Este apéndice está dedicado a los resultados necesarios para analizar el ejemplo posterior al teorema del mapeo de Riemann. Las demostraciones serán omitidas pero se pueden consultar en el capítulo 2 de [9], o bien en el segundo capítulo de mi tesis de licenciatura: isometrías del plano hiperbólico mediante la clasificación de haces de geodésicas, en el cual se hicieron las demostraciones a detalle de resultados importantes sobre el disco de Poincaré y el semiplano superior así como también de la *inversión respecto a un círculo*.

El semiplano superior y el disco de Poincaré son algunos de los modelos de la geometría hiperbólica. Dicha geometría tiene mucho en común con la euclidiana, sin embargo, las nociones de líneas y círculos a las que estamos acostumbrados tienen algunas modificaciones (véase más adelante la figura B.1), al igual que la métrica que usamos. Las definiciones formales de estos conjuntos se presentan a continuación.

Definición B.0.1. *El conjunto*

$$\mathbb{H}^2 := \{z : \text{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

es llamado el **semiplano superior**, este es un modelo para el plano hiperbólico, en el cual usamos la siguiente métrica ρ : sean $z, w \in \mathbb{H}^2$, se define

$$\rho(z, w) := \inf \{ \|\gamma\| \mid \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}^2 \text{ es una curva diferenciable por partes tal que, } \gamma(a) = z \text{ y } \gamma(b) = w \},$$

$$\text{donde } \|\gamma\| = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}[\gamma(t)]} dt.$$

Definición B.0.2. El *disco de Poincaré* se define como sigue:

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

A través de la transformación de Cayley (véase ejemplo 1.1.3) es posible llevar las propiedades conocidas de $\mathbb{H}^2$ al disco de Poincaré, en particular es posible dotarlo de una métrica y probar el siguiente teorema.

Teorema B.0.3. Las geodésicas (curvas de longitud mínima) del disco de Poincaré son:

- 1.- Arcos de circunferencia que son ortogonales a la frontera de $\mathbb{E}$.
- 2.- Diámetros de $\mathbb{E}$.

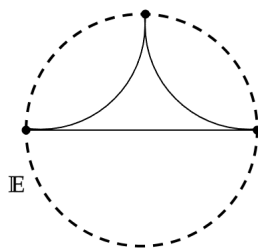


Figura B.1: Triángulo en el disco de Poincaré con vértices en la frontera.

Definición B.0.4. Decimos que dos puntos colineales, z y z' , son *inversos respecto a un círculo con centro en el punto o y radio $r > 0$* , si se satisface la siguiente igualdad

$$\overline{oz} = \frac{r^2}{\overline{oz'}},$$

donde $\overline{oz}$ y $\overline{oz'}$ representan la distancia que hay de o a z y de o a z' , respectivamente, (véase figura B.2).

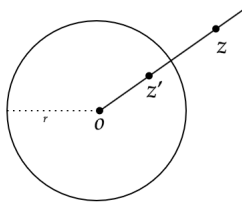


Figura B.2: Puntos inversos respecto a un círculo.

La inversión respecto a un círculo satisface las siguientes propiedades:

- 1) Cada punto distinto del centro de inversión (el punto o) tiene un solo inverso.
- 2) Si z y z' son puntos inversos distintos, entonces uno se encuentra dentro del círculo de inversión y el otro fuera de este.

- 3) Cada punto en el círculo de inversión es su propio inverso.
- 4) Si dos curvas γ_1 y γ_2 se intersecan en un punto z_0 distinto del centro de inversión, su ángulo de intersección es el mismo en magnitud, pero con signo opuesto, que el ángulo de las curvas inversas γ'_1 y γ'_2 en el punto z'_0 .

Para finalizar presentamos dos resultados cuya demostración se pueden encontrar en las páginas 57 y 224 de [16]. Para el primero de ellos necesitamos las siguientes nociones.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ que es *simétrico* con respecto a la recta real, es decir, un punto z está en Ω si y solo si $\bar{z}$ está en Ω .

Denotemos por Ω^+ a la parte de Ω contenida en $\mathbb{H}^2$ y Ω^- la parte contenida en el semiplano inferior, y sea $I = \Omega \cap \mathbb{R}$. Tenemos entonces que

$$\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-.$$

Teorema B.0.5. (*Principio de reflexión de Schwarz*) Si f es una función holomorfa en Ω^+ que se extiende continuamente a I tal que f toma valores reales en I entonces existe una función F holomorfa en todo Ω tal que $F = f$ en Ω^+ .

Teorema B.0.6. (*del mapeo de Riemann en el plano complejo*) Si Ω es un abierto propio de $\mathbb{C}$ y simplemente conexo entonces existe una única función biholomorfa entre Ω y $\mathbb{E}$.

Definición B.0.7. Un punto $z_0 \in \partial\Omega$ es **regular** si existe $r_0(z_0) > 0$ tal que para todo $0 < r < r_0(z_0)$ se tiene

$$\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} = \{z_0 + re^{i\theta} \mid \theta_1(r) < \theta < \theta_2(r)\},$$

para algún $\theta_1(r) < \theta_2(r)$. En otras palabras, $\Omega \cap \partial D_r(z_0)$ es un arco para todo $r > 0$ pequeño. Se dice que Ω es regular si todo punto en $\partial\Omega$ es regular. (No confundir esta definición con la dada en la definición 3.2.17).

Teorema B.0.8. Si Ω es un abierto acotado, simplemente conexo y regular entonces el biholomorfismo del teorema B.0.6 se extiende a un biholomorfismo en la cerradura de los conjuntos $\bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}$.

Conclusión

A lo largo de este trabajo se han utilizado de conceptos y resultados provenientes de distintas áreas, pero se ha procurado dar un énfasis particular al análisis complejo y la topología.

Una vez obtenido el teorema del mapeo de Riemann se puede aplicar en distintas áreas de las matemáticas y la física teórica. Algunas de ellas incluyen:

- Teoría Teichmüller: Esta área estudia las estructuras complejas conformes en superficies de Riemann, así como los espacios de clases de equivalencia que se obtienen al considerar deformaciones conformes.
- Funciones elípticas: Al igual que las funciones racionales pueden entenderse como funciones en la esfera de Riemann, las funciones elípticas son funciones meromorfas definidas sobre un toro, el cual es una superficie de Riemann.
- Teoría de cuerdas: En física teórica, la teoría de cuerdas modela partículas fundamentales como objetos unidimensionales en lugar de puntos (cuerdas). Las trayectorias de estas cuerdas en el espacio-tiempo se representan mediante superficies bidimensionales, las cuales se modelan como superficies de Riemann.

Finalmente, queda abierta la pregunta de si existe un resultado análogo al teorema del mapeo de Riemann en dimensiones superiores.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L.V. (2016) *Riemann Surfaces*. Princeton University Press.
- [2] Fisher S. (1999). *Complex Variables*. 2nd Edition. Dover publications.
- [3] Forster, O. (1981). *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer-Verlag.
- [4] Gauthier, P. (2010). *Lectures on Several Complex Variables*. Springer.
- [5] Godinho L., Natário J. (2014). *An Introduction to Riemannian Geometry. With Applications to Mechanics and Relativity*. Springer.
- [6] Hatcher A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
- [7] Hershel M., Farkas I., L.V. (1980). *Riemann Surfaces*. Springer-Verlag New York.
- [8] Huybrechts D. (2007). *Complex Geometry, an Introduction*. Springer-Verlag.
- [9] Lascurain A. (2005). *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. UNAM.
- [10] Lee J. M. (2000). *Introduction to Smooth Manifolds*. Second Edition. Springer GTM.
- [11] Lee J. M. (2000). *Introduction to Topological Manifolds*. Springer GTM.
- [12] Marsden, J.E., Hoffman, M.J. (2003). *Basic Complex Analysis*. New York: W.H. Freeman.
- [13] Miranda, R. (1995). *Algebraic curves and Riemann Surfaces*. American Mathematical Society.
- [14] Munkres, J.R. (2018). *Topology*. New York, NY: Pearson.
- [15] Rotman J. (2003). *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall.
- [16] Stein E., Shakarchi R. (2003). *Complex Analysis*. Princeton University Press.

-
- [17] Schlag, W. (2014). *A course in complex analysis and Riemann Surfaces*. American mathematical Society.
 - [18] Ward J., Churchill V. (2003). *Complex Variables and Applications*. McGraw Hill. 7th Edition.
 - [19] Warner F. W. (1971). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag.

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
26 de Junio de 2025
Oficio No. FCFM/0387/25

Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella
Director de tesis.
Profesor de tiempo completo
De la facultad de ciencias en física y matemáticas Unach.
p r e s e n t e

Estimado Dr. Russell

Por este medio me permito informarle que, una vez efectuada la revisión de la tesis de nominada:

"Una prueba del teorema del mapeo de Riemann mediante la teoría de Runge"

Ha sido aceptada para sustentar el examen de grado de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la
Lic. Fabiola Alegría Hernández con matrícula escolar X150002.

Por lo tanto, se Autoriza la Impresión de la tesis en virtud de haber cumplido con los requisitos correspondientes.

Sin más por el momento quedo de Usted, enviándole un cordial saludo.

Atentamente
"Por la conciencia de la necesidad de servir"



DIRECCIÓN
FCFM

Dr. Orlando Díaz Hernández
Director

C. c. p. Dra. María del Rosario Soler Zapata, Secretaria Académica de la FCFM
Dr. Javier Sánchez Martínez.- Coordinador del Posgrado en Ciencias Matemáticas.
Mtro. René Solís López.-, Encargado del Control Escolar Posgrado de la FCFM
Archivo.

Oficio FCFM/CIP/005/2025

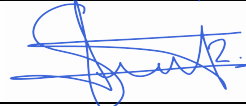
A quién corresponda

El que suscribe, Comité de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas de la universidad autónoma de Chiapas, hace constar que mediante minuta de fecha 30 de julio del 2025 de los integrantes del NAB de la Maestría en Ciencias Matemáticas, que el **Dr. Eli Vanney Roblero Méndez** de la Universidad de Guadalajara, fue autorizado para ser Co-director de la estudiante **Lic. Fabiola Alegría Hernández**.

Sin más por el momento, reciba un afectuoso saludo.

ATENTAMENTE

“Por la conciencia de la necesidad de servir”

Grado académico y nombre completo	Cargo en el CIP	Firma
Dr. Orlando Díaz Hernández	Presidente	
Dr. Ariel Flores Rosas	Secretario	
Dr. Roberto Arceo Reyes	Representante de los Cuerpos Académicos	
Dr. Víctor Iván Ruiz Pérez	Vocal titular del Consejo Consultivo de Investigación y Posgrado	
Dr. Armando Mendoza Pérez	Representante de los Núcleos Académicos de los Programas de Posgrado	
Dr. Javier Sánchez Martínez	Representante de las profesoras y los profesores con reconocimiento vigente en el ámbito de la investigación científica, tecnológica, humanística y de innovación.	
Lic. Jesús Erick Pérez Pérez	Representación estudiantil de la Maestría en Ciencias Físicas	



Código: FO-113-05-05

Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

La alumna (s) o él alumno (s) Fabiola Alegría Hernández, autora (s) o autor (es) de la tesis bajo el título de Una prueba del teorema del mapeo de Riemann mediante teoría de Runge presentada y aprobada en el año 2025 como requisito para obtener el título o grado de Maestra en Ciencias Matemáticas, autorizo licencia a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), para que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para su consulta, reproducción parcial y/o total, citando la fuente, que contribuya a la divulgación del conocimiento humanístico, científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.
- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 08 días del mes de agosto del año 2025.



Fabiola Alegría Hernández

Nombre y firma de la alumna (s) o él alumno (s)



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
CAMPUS I

UNA PRUEBA DEL TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN
MEDIANTE TEORÍA DE RUNGE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

FABIOLA ALEGRÍA HERNÁNDEZ. X150002

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RUSSELL AARÓN QUIÑONES ESTRELLA

Co-DIRECTOR DE TESIS:

DR. ELI VANNEY ROBLERO MÉNDEZ



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; Agosto de 2025

Agradecimientos

Le doy gracias, como siempre, a mi madre y hermano quienes siempre me han apoyado y brindado ánimos, a mi difunto padre, que a pesar de que no logró ver este trabajo concluido, sé que estaría feliz de verme completar un logro académico más.

Agradezco al Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella, quien amablemente acepto ser director de esta tesis, le agradezco mucho todos los conocimientos, la paciencia y consejos que me brindó para concluir este trabajo, sus explicaciones y clases fueron clave para presentar un trabajo de calidad.

Al Dr. Eli Vanney Roblero Méndez, quien fue mi asesor de tesis en licenciatura, trabajo que me motivo a realizar el presente, le agradezco por continuar como co-director de esta tesis.

Agradezco a los profesores: Dr. Florencio Corona Vázquez, Dr. José Antonio Martínez Cortéz y Dr. Javier Sánchez Martínez, por tomarse el tiempo de leer este trabajo así como también por los comentarios realizados para que el resultado final fuese mucho mejor.

Agradezco a los profesores con quienes tuve el gusto de tomar clases durante la maestría y, en general, a todos los profesores de la facultad que siempre estuvieron con total disposición para brindarme apoyo así como también consejos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico que me brindaron para realizar esta maestría.

Finalmente, pero no menos importante, agradezco a Irving Harim Hernández Méndez por estar presente con su apoyo incondicional, su ánimo constante y su calidez en cada etapa de este proceso.

Espero que este trabajo refleje un poco de todo el agradecimiento que tengo a las personas mencionadas y aquellas, que por falta de espacio, no es posible mencionar en estas líneas.

Introducción

En este trabajo se asume que el lector está familiarizado con análisis complejo, topología, variedades diferenciables y álgebra, ya que se utilizan herramientas como espacios segundo numerables, formas diferenciales, entre otras propias de dichas áreas y que no se definen aquí.

Las superficies de Riemann fueron definidas en 1851 por el matemático alemán Bernhard Riemann en su tesis de doctorado. Tuvieron que pasar años para que la idea de Riemann fuese desarrollada y modernizada, actualmente las superficies de Riemann tienen presencia en distintas áreas como geometría algebraica, geometría compleja y teoría de potencial.

El teorema del mapeo de Riemann establece que toda superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfa al disco unitario, al plano complejo o a la esfera de Riemann. A pesar de que el enunciado es fácil de recordar, sus pruebas pueden requerir de conocimiento en distintas áreas. La primera demostración fue realizada de manera independiente por Koebe y Poincaré en 1907, seguido de esto se han dado muchas otras pruebas que utilizan distintas herramientas, por ejemplo, funciones armónicas e integrales de Dirichlet y triangulación de superficies de Riemann.

La prueba que aquí se presenta está basada en análisis complejo, teoría de cubrientes y algo de topología. El primer capítulo está dedicado a introducir las superficies de Riemann, las funciones holomorfas, biholomorfas, meromorfas, entre otras, así como también ejemplos de estas superficies; pasamos después a dar conceptos topológicos necesarios para la teoría y se finaliza con el cubriente universal.

En el capítulo dos nos adentramos en la teoría de gavillas para presentar el grupo de cohomología de Čech y su relación con el grupo de DeRham, se presentan también las k -formas para $k = 1, 2$ en superficies de Riemann así como también el concepto de integración.

En el tercer capítulo se trabaja el problema de Dirichlet en superficies de Riemann y se da la solución mediante el método de Oskar Perron, posteriormente, se introducen los conjuntos Runge cuyas fronteras tienen propiedades específicas.

Finalmente, en el capítulo cuatro se da la demostración basada en conjuntos Runge.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	II
1 Superficies de Riemann	1
1.1 Funciones entre superficies de Riemann	6
1.2 Propiedades de funciones holomorfas entre superficies de Riemann	8
1.3 Sobre cubrientes.	14
1.4 El cubriente universal	21
2 Cohomología de Čech y grupo de DeRham	25
2.1 Pregavillas y gavillas	25
2.2 Formas complejas	32
2.2.1 Derivación exterior de formas	35
2.2.2 Integración de 1-formas	39
2.2.3 Períodos y sumandos de automorfía	43
2.2.4 Integración de 2-formas	47
2.3 Grupo de DeRham	50
2.3.1 Grupo de cohomología de Čech	50
2.3.2 Sucesiones exactas	57
3 Problema de Dirichlet y teoría Runge	62
3.1 Formas armónicas	62
3.2 Problema de Dirichlet en superficies de Riemann	70
3.3 Conjuntos Runge	82

4 El teorema del mapeo de Riemann	89
4.1 Preliminares	89
4.2 Teorema principal	93
A Otros resultados necesarios para enunciar el mapeo de Riemann	98
B Inversión respecto a un círculo y principio de reflexión de Schwarz.	102
Conclusión	105
Bibliografía	106

Capítulo 1

Superficies de Riemann

En este capítulo se dan los preliminares para poder presentar la definición de una superficie de Riemann y algunos ejemplos de estas. Para más información sobre el tema se pueden consultar [1], [3], y [17].

Definición 1.0.1. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y segundo numerable.

1) Una **carta compleja** en X es un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V$ de un abierto $U \subset X$ sobre un abierto $V \subset \mathbb{C}$. Dos cartas complejas $\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i$, $i = 1, 2$ se dice que son **holomórficamente compatibles** si la función

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

es biholomorfa en el sentido usual.

2) Un **atlas complejo** en X (también llamado **atlas holomorfo** en X) es una colección $\mathcal{U} = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i\}_{i \in I}$ de cartas complejas en X que son holomórficamente compatibles y que además cubren a X , es decir, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Dos atlas holomorfos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ en X son llamados **analíticamente equivalentes** si cada carta de $\mathcal{U}$ es compatible con cada carta de $\mathcal{U}'$.

La demostración de la siguiente proposición es rutinaria por lo tanto será omitida.

Proposición 1.0.2. La relación anterior para atlas holomorfos es una relación de equivalencia.

A una clase de equivalencia se le llama una **estructura compleja** para la variedad bidimensional X , y se denota como Σ .

Definición 1.0.3. Una **superficie de Riemann** es un par (X, Σ) , donde X es una variedad bidimensional conexa y Σ es una estructura compleja en X .

En adelante solo escribiremos X en lugar de (X, Σ) para denotar a una superficie de Riemann, quedando implícito que X tiene una estructura compleja.

A continuación presentaremos algunos ejemplos de superficies de Riemann, en lo que sigue $\mathbb{C}^\times$ denotará al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 1.0.4. El plano complejo $\mathbb{C}$.

Su estructura compleja está definida por el atlas cuya única carta es la función identidad.

Ejemplo 1.0.5. El espacio proyectivo complejo de dimensión 1, denotado por $\mathbb{CP}^1$.

Este espacio está dado por

$$\mathbb{CP}^1 := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \sim,$$

donde la relación de equivalencia es $(z_1, w_1) \sim (z_2, w_2)$ si y solo si $z_2 = \lambda z_1$, $w_2 = \lambda w_1$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, las clases de equivalencia son denotadas por $[z : w]$. Para las cartas (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) se define lo siguiente:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{[z : w] \in \mathbb{CP}^1 : w \neq 0\}, & \phi_1([z : w]) &= \frac{z}{w}, \\ U_2 &:= \{[z : w] \in \mathbb{CP}^1 : z \neq 0\}, & \phi_2([z : w]) &= \frac{w}{z}, \end{aligned}$$

aquí, la función de transición $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ está dada por $z \mapsto \frac{1}{z}$, la cual es biholomorfa.

Ejemplo 1.0.6. El conjunto $X := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = \operatorname{sen}(z)\}$ es una superficie de Riemann.

Comencemos considerando para cada $n \in \mathbb{Z}$ al conjunto B_n de $\mathbb{C}$ que es la banda infinita descrita por $\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi < \operatorname{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2} + n\pi$, se sabe que la imagen de esta banda infinita bajo la función seno es el plano complejo, tal como se muestra en la figura 1.1, para una demostración de esto se pueden consultar las páginas 48 a 52 de [2], o bien, en el ejemplo 1 de la sección 89 de [18]. Observe además que si consideramos las bandas infinitas A_n de $\mathbb{C}$ descritas por $\frac{n\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \pi + \frac{n\pi}{2}$ la imagen de estos abiertos bajo la función seno es el plano complejo.

Ahora bien, para ver que X es una superficie de Riemann, primero observemos que X es un subconjunto de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y como $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable, X también lo es.

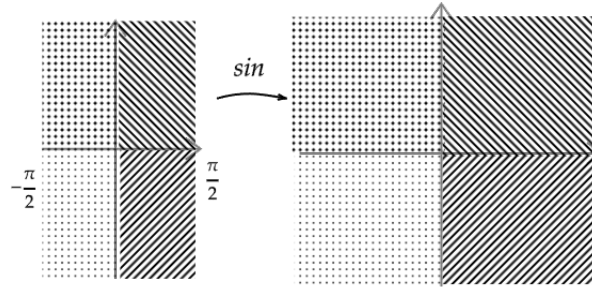


Figura 1.1: Conjunto B_0 y su imagen bajo la función seno.

Por otro lado, consideremos la función continua $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dada por $z \mapsto (z, \sin z)$. Notemos que $g(\mathbb{C}) = X$ y por ser $\mathbb{C}$ conexo se sigue que X es conexo.

Ahora bien, solo resta dar un atlas holomorfo para X , con este objetivo consideremos la función proyección en X sobre la primera coordenada restringida a A_n , denotémosla como $\pi_1|_{A_n}$, y consideremos $\varphi_{A_n} = \sin \circ (\pi_1|_{A_n})$. Note que $\varphi_{A_n} : A_n \longrightarrow U_n \subset \mathbb{C}$, donde $U_n = \sin(A_n)$, tenemos entonces una colección $\mathcal{U} = \{\varphi_{A_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, la cual es un atlas holomorfo para X , ya que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \times U_n = X$, además cada φ_{A_n} es continua, y su inversa también ya que la función seno envía de manera biyectiva la imagen de las bandas A_n al plano complejo. Todo lo anterior nos dice que φ_{U_n} es un biholomorfismo para toda n .

Finalmente resta verificar que las cartas son holomórficamente compatibles, para ello observe que las intersecciones de los A_n son bandas infinitas de longitud $\frac{\pi}{2}$ en las cuales la función seno sigue siendo holomorfa.

Concluimos que el conjunto X es, en efecto, una superficie de Riemann.

Ejemplo 1.0.7. La esfera de Riemann $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

La topología está formada por conjuntos abiertos usuales $U \subset \mathbb{C}$ y aquellos de la forma $V \cup \{\infty\}$, donde $V \subset \mathbb{C}$ es el complemento de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Con lo anterior, es rutinario verificar que $\mathbb{P}^1$ es un espacio Hausdorff y compacto que además es homeomorfo a S^2 . Consideremos

$$U_1 := \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C},$$

$$U_2 := \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}.$$

Definamos $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, pongamos que φ_1 es la función identidad y

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{C}^\times \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}.$$

Notemos que ambas funciones son homeomorfismos. Además, la inversa de φ_2 es la siguiente:

$$\varphi_2^{-1}(z) = \begin{cases} \infty & \text{si } z = 0 \\ \frac{1}{z} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}.$$

Notemos que $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^\times$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ con $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$, la cual es holomorfa. Con lo anterior, tenemos un atlas holomorfo para $\mathbb{P}^1$, y en consecuencia es una variedad bidimensional, además como U_1 y U_2 son conexos con intersección no vacía se sigue que $\mathbb{P}^1$ es también conexa.

Consideremos el atlas $\mathcal{U} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ y observemos que las cartas de dicho atlas son holomórficamente compatibles ya que $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^\times$ y la función $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ dada por $z \mapsto \frac{1}{z}$ es biholomorfa. Lo anterior nos da una estructura compleja para $\mathbb{P}^1$ con lo cual concluimos que es una superficie de Riemann.

Ejemplo 1.0.8. Cualquier dominio D (esto es, un subconjunto abierto, conexo y no vacío) de una superficie de Riemann X es también una superficie de Riemann. Para obtener una estructura compleja sobre D se procede como sigue: para cada $\varphi : V \longrightarrow V'$ carta de X , se consideran las funciones $\phi_V : U \longrightarrow U'$, donde $U = V \cap D$ y $U' = \varphi(U)$, la colección de estas cartas da como resultado una estructura compleja para D .

De lo anterior se obtiene que los dominios $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ también son superficies de Riemann.

Ejemplo 1.0.9. El toro complejo.

Sean ω_1 y ω_2 dos números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Defina

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\},$$

Γ es llamada un **retículo** generado por ω_1 y ω_2 , véase la figura 1.2.

Dos complejos $z, z' \in \mathbb{C}$ son equivalentes módulo Γ si $z - z' \in \Gamma$, el conjunto de clases es el toro complejo y se denotará como $T_\Gamma := \mathbb{C}/\Gamma$, con la topología cociente este espacio es:

- Hausdorff: Para demostrar esto usaremos el siguiente resultado sobre el toro complejo, omitiremos

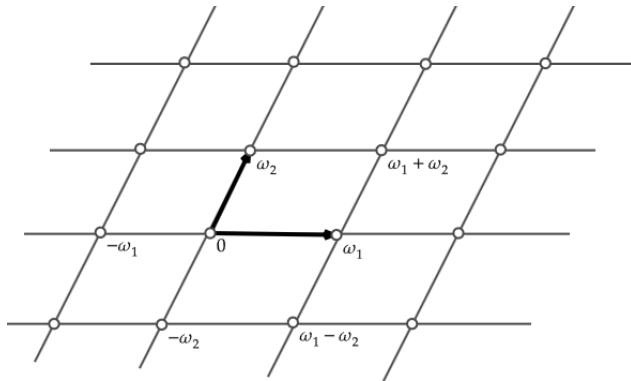


Figura 1.2: Los puntos blancos son elementos del retículo generado por ω_1 y ω_2 .

su demostración pero se puede consultar en la página 70 de [4]. Si ζ y z son dos puntos en $\mathbb{C}$ que no son equivalentes módulo $\sim_\Gamma$ entonces ζ está a una distancia positiva de $[z]_\Gamma$.

Por otro lado, sean z y w dos puntos en $\mathbb{C}$ tales que $[z]_\Gamma \neq [w]_\Gamma$, afirmamos que estos conjuntos están a una distancia positiva. Procediendo por contradicción, supongamos que existen $z'_j \sim_\Gamma z$ y $w'_j \sim_\Gamma w$ tales que $|w'_j - z'_j| \rightarrow 0$. Tenemos así que $z'_j = z + \gamma_j$ para algún $\gamma_j \in \Gamma$. Se tiene entonces que $w_j - \gamma_j$ es una sucesión de puntos en $[w]_\Gamma$ que converge al punto z , sin embargo, esto contradice que $[w]_\Gamma$ esté a una distancia positiva de z .

Con lo anterior, notemos que podemos considerar vecindades disjuntas de $[z]_\Gamma$ y $[w]_\Gamma$, con lo cual se sigue que el toro es Hausdorff.

- Segundo numerable: tenemos que la proyección canónica $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ es abierta, en efecto, si $V \subset \mathbb{C}$ es abierto entonces $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in \Gamma} (\omega + V)$ y como cada conjunto $\omega + V$ es abierto, la unión anterior también lo es. Como π es abierta y $\mathbb{C}$ es segundo numerable, el cociente $\mathbb{C}/\Gamma$ también lo es. En efecto, si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una base numerable para la topología de $\mathbb{C}$ entonces $\{\pi(U_i)\}_{i \in I}$ es una colección numerable de conjuntos abiertos para la topología de $\mathbb{C}/\Gamma$.
- Conexo: como $\mathbb{C}$ es conexo, $\mathbb{C}/\Gamma = \pi(\mathbb{C})$ también lo es.

Para las cartas, consideremos $V \subset \mathbb{C}$ abierto tal que no hay dos elementos de V equivalentes bajo Γ . Tenemos $U := \pi(V)$ es abierto y la proyección canónica $\pi| : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Observemos que su inversa $\varphi_V : U \rightarrow V$ es una carta compleja en $\mathbb{C}/\Gamma$.

Considerando la colección $\mathcal{U}$ de cartas φ_V tales que V es un abierto de $\mathbb{C}$ tal como los que se describieron en el párrafo anterior, se tiene entonces que el toro complejo es una superficie de Riemann.

1.1. Funciones entre superficies de Riemann

Una vez dada la definición de una superficie de Riemann, así como también algunos ejemplos, se pueden dar las definiciones de funciones entre ellas y resultados importantes sobre estas funciones.

Definición 1.1.1. Sean X y Y superficies de Riemann. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es llamada **holomorfa**, si para cada par de cartas $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X y $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en Y con $f(U_1) \subset U_2$, la función

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2,$$

es holomorfa en el sentido usual. Una función es llamada **biholomorfa** si es biyectiva y tanto ella como su inversa son holomorfas.

Al conjunto de funciones holomorfas en Y se le denota por $\mathcal{O}(Y)$.

Notación 1.1.2. Para $r \in (0, \infty]$ usaremos las siguientes notaciones,

1. Para $r \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, denotaremos $D_0(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$.
2. Para $r = 1$, se tiene el disco unitario centrado en el origen, el cuál será denotado por $\mathbb{E}$.
3. Para $r = \infty$, se define $D_0(\infty)$ como el plano complejo $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.1.3. La función de **Cayley** $c : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{E}$ dada por

$$c(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

es un biholomorfismo entre $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{E}$. En ocasiones también se le llama **transformación de Cayley** y es útil dentro de la geometría hiperbólica (véase apéndice B).

Tenemos que $|c(z)| = \frac{|z - i|}{|z + i|}$, geométricamente se puede observar que como z está en el semiplano superior se cumple que $|z - i| < |z - (-i)|$, de donde $|c(z)| < 1$, por lo tanto $c(z) \in \mathbb{E}$, esto nos dice que la función de Cayley está bien definida, más aún, el único punto donde no está definida es $z = -i$ y como este no se encuentra en el semiplano superior, c es holomorfa en todo $\mathbb{H}^2$.

Por otro lado, su inversa está dada por $b(z) = i \frac{1+z}{1-z}$, mediante un cálculo directo se puede verificar que si z se encuentra en el disco unitario entonces $\text{Im}(b(z)) > 0$ y además $c \circ b = \text{Id} = b \circ c$. Finalmente, podemos observar que la función b es holomorfa en $\mathbb{E}$ ya que el único punto donde no está bien definida es $z = 1$, el cual no se encuentra en $\mathbb{E}$.

A continuación retomamos algunas de las propiedades que tiene el toro complejo.

Proposición 1.1.4. Sean Γ y Γ' dos retículos en $\mathbb{C}$, si existe $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$ entonces la función $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $z \longmapsto \alpha z$, induce una función holomorfa entre los toros T_Γ y $T_{\Gamma'}$.

Demostración.

Sea $\psi : T_\Gamma \longrightarrow T_{\Gamma'}$ dada por $[z]_\Gamma \longmapsto [\alpha z]_{\Gamma'}$. Veamos que esta función está bien definida.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $[z_1]_\Gamma = [z_2]_\Gamma$ esto implica que $[z_1 - z_2]_\Gamma = [0]_\Gamma$ entonces $z_1 - z_2 \in \Gamma$, así $\alpha(z_1 - z_2) \in \alpha\Gamma$ y dado que $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$ se sigue que $[\alpha(z_1 - z_2)]_{\Gamma'} = [0]_{\Gamma'}$, luego $[\alpha z_1]_{\Gamma'} - [\alpha z_2]_{\Gamma'} = [0]_{\Gamma'}$ y finalmente se obtiene que $[\alpha z_1]_{\Gamma'} = [\alpha z_2]_{\Gamma'}$.

Recordemos que $\mathbb{C}/\Gamma$ y $\mathbb{C}/\Gamma'$ tienen estructura de grupo (ya que Γ, Γ' son subgrupos normales de $\mathbb{C}$), entonces debemos verificar que ψ es un morfismo de grupos, lo cual se obtiene fácilmente. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\psi([z_1 + z_2]_\Gamma) = [\alpha(z_1 + z_2)]_{\Gamma'} = [\alpha z_1]_{\Gamma'} + [\alpha z_2]_{\Gamma'} = \psi([z_1]_\Gamma) + \psi([z_2]_\Gamma).$$

Por otro lado, sean (φ_V, V) $(\varphi_{V'}, V')$ cartas de $\mathbb{C}/\Gamma$ y $\mathbb{C}/\Gamma'$ respectivamente (recuerde que en el ejemplo 1.0.9 se construyeron las cartas como la inversa de la proyección canónica sobre el toro) entonces el diagrama de la figura 1.3 conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \\ \varphi_V \uparrow & \searrow & \uparrow \varphi_{V'} \\ \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}/\Gamma' \end{array}$$

Figura 1.3: Morfismo entre toros complejos.

Por lo tanto, $\varphi_{V'} \circ \psi \circ \varphi_V^{-1} = \varphi$ y así $\psi = \varphi_{V'}^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_V$, de donde se observa que ψ es holomorfa. ■

En la siguiente sección se presentarán más propiedades sobre el toro complejo.

Definición 1.1.5. Sea X una superficie de Riemann y Y un subconjunto abierto de X . Se dice que una función holomorfa $f : Y' \rightarrow \mathbb{C}$ es **meromorfa en Y** , donde $Y' \subset Y$ es un conjunto abierto, si se satisface lo siguiente:

1) $Y \setminus Y'$ solo contiene puntos aislados.

2) Para cada $p \in Y \setminus Y'$ se satisface $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$.

A los puntos de $Y \setminus Y'$ se les llama **polos de f** . El conjunto de todas las funciones meromorfas en Y lo denotaremos por $\mathcal{M}(Y)$.

Ejemplo 1.1.6. Sea $n \geq 1$ y sea $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$, con $c_k \in \mathbb{C}$. Se tiene que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa. Si pensamos a $\mathbb{C}$ como subconjunto de $\mathbb{P}^1$ tenemos que $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, se concluye que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$.

Algunos resultados conocidos de variable compleja en se conservan en superficies de Riemann, las demostraciones se basan en llevar el problema al plano complejo mediante cartas y ahí usar los resultados conocidos. A continuación enunciamos algunos, las demostraciones se pueden consultar en el capítulo 1 de [3] o en el capítulo 2 de [13].

Teorema 1.1.7 (de la singularidad removible de Riemann). Sea U un conjunto abierto en una superficie de Riemann y un punto a en U . Supongamos que la función $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ es acotada en una vecindad de a . Con lo anterior, f se puede extender de manera única a una función $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$.

Teorema 1.1.8 (de la identidad). Sean X y Y superficies de Riemann y $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ dos funciones holomorfas que coinciden en un conjunto $A \subset X$ teniendo un punto límite $a \in X$, se concluye entonces que f_1 y f_2 son iguales.

1.2. Propiedades de funciones holomorfas entre superficies de Riemann

A continuación se presentan algunas de las características que poseen las funciones holomorfas entre superficies de Riemann. En los resultados que siguen las funciones serán consideradas como no-constantes

a menos que se indique lo contrario.

Teorema 1.2.1 (Comportamiento local de funciones holomorfas). *Sean X y Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa. Sea $a \in X$ y $b := f(a)$. Tenemos que existe un entero $k \geq 1$ y cartas $\varphi : U \rightarrow V$ en X y $\psi : U' \rightarrow V'$ en Y con las siguientes propiedades:*

$$1) \ a \in U, \ \varphi(a) = 0; \ b \in U', \ \psi(b) = 0.$$

$$2) \ f(U) \subset U'.$$

$$3) \ \text{La función } F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V' \text{ está dada por } F(z) = z^k, \quad \text{para cada } z \in V.$$

Demostración.

Como Y es una superficie de Riemann, existe una carta (ψ, U') alrededor de b . Dado que f es continua, existe un abierto W con $a \in W$ y $f(W) \subset U'$.

Consideremos una carta (φ_1, U_1) alrededor de a y definamos $U := W \cap U_1$ y $\varphi := \varphi_1|_U$. Observe que además, si $\varphi_1(a)$ es distinto de cero, mediante una traslación de $\mathbb{C}$ podemos obtener que $\varphi_1(a) = 0$, reemplazando (φ_1, U_1) por (φ, U) tenemos cartas (U, φ) y (U', ψ) que satisfacen las propiedades 1) y 2).

Por otro lado, como f es no constante, por el teorema de la identidad (teorema 1.1.8), f es no constante en un abierto contenido en U , como φ es sobreyectiva desde U a V , la función $f \circ \varphi^{-1}$ es no constante en un abierto contenido en V y como $f \circ \varphi^{-1}(V_1) \subset U'$ y ψ es inyectiva en U' se sigue que la función

$$f_1 := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V_1 \rightarrow V' \subset \mathbb{C},$$

es no constante en V_1 . Notemos que $f(0) = 0$, es decir, un cero para la función holomorfa f_1 , con lo cual existe $k \geq 1$ tal que $f_1(z) = z^k g(z)$, donde g es una función holomorfa en V_1 con $g(0) \neq 0$. Se sigue que g no se anula en un disco que contiene al cero, y por lo tanto, la función logaritmo compleja está bien definida, se define entonces la función $h(z) = e^{\log(g(z))/k}$, con z en un disco que contiene al cero. Con lo anterior se tiene que $h^k = g$.

Por lo tanto, existe una vecindad de cero y una función holomorfa h en esta misma vecindad tal que $h^k = g$.

Notemos que la función $\alpha : V_2 \rightarrow V$ dada por $z \mapsto \alpha(z) = zh(z)$ es biholomorfa de $V_2 \subset V_1$ sobre V , donde V_2 es una vecindad de cero. Tomemos $U := \varphi_1^{-1}(V_2)$, reemplazando la carta $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ por la

carta $\varphi : U \longrightarrow V$ donde $\varphi = \alpha \circ \varphi_1$.

Por construcción, la función $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ satisface que $F(z) = z^k$. ■

Al número k del teorema 1.2.1 se le llama **multiplicidad** con la que la función f toma el valor de b en el punto a o simplemente se dice que f tiene **multiplicidad** k en el punto a , esto lo denotamos por $\text{mult}_a(f) = k$.

El siguiente corolario se obtiene aplicando el teorema 1.2.1.

Corolario 1.2.2. *Si X y Y son superficies de Riemann y $f : X \longrightarrow Y$ es una función holomorfa entonces se satisfacen lo siguientes resultados:*

- 1) f es abierta.
- 2) Si f es inyectiva entonces f es biholomorfa de X sobre $f(X)$.

Demostración.

- 1) Si tomamos una vecindad U de $a \in X$, del teorema 1.2.1 se sigue que la imagen de U bajo f es también una vecindad de $f(a)$, lo cual implica que f es abierta.
- 2) Dado que f es inyectiva, el valor de k en el teorema 1.2.1 es igual a 1 para todo $a \in X$, se tiene así que $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ es holomorfa, ya que está dada por la identidad. ■

El siguiente resultado es conocido en el plano complejo, y a continuación veremos que también es válido en superficies de Riemann.

Teorema 1.2.3 (Principio del módulo máximo). *Si X es una superficie de Riemann y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante entonces el valor absoluto de f no alcanza su máximo.*

Demostración.

Supongamos que existe un punto $a \in X$ tal que $R := |f(a)| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ entonces $f(x) \in K := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Como $f(X)$ es abierto $f(a)$ se encuentra en el interior de K , esto contradice la hipótesis de que $f(a) \in \partial K$, donde ∂K denota la frontera del conjunto K . ■

Como aplicación del teorema del módulo máximo tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2.4. *Sean X una superficie de Riemann y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante, se tiene que $\operatorname{Re}(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sin máximo.*

Demostración.

Por contradicción, supongamos que $\operatorname{Re}(f)$ tiene un máximo en un punto z_0 .

Definamos $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) := e^{f(z)}$, la cual es una función holomorfa. Observe que si $f = u + iv$, entonces

$$|e^f| = |e^{u+iv}| = |e^u| = e^{\operatorname{Re}(f)},$$

por lo tanto $|g(z)| = e^{\operatorname{Re}(f)}$.

Por la hipótesis hecha tenemos que para todo $z \in X$, $\operatorname{Re}(f(z)) \leq \operatorname{Re}(f(z_0))$ y así $|g(z)| = e^{\operatorname{Re}(f(z))} \leq e^{\operatorname{Re}(f(z_0))} = |g(z_0)|$, por lo tanto $|g(z)|$ alcanza su máximo en z_0 . Luego, por el principio del módulo máximo se tiene que g es una función constante, por lo tanto f también debe ser constante, lo cual es una contradicción. ■

Teorema 1.2.5. *Sean X y Y superficies de Riemann con X compacto y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante. Se tiene que Y es compacto y además f es sobreyectiva.*

Demostración.

Observe que el conjunto $f(X) \subset Y$ es compacto, en particular cerrado, y por 1) del corolario 1.2.2, es también abierto. Como Y es conexo (por ser una superficie de Riemann), se sigue que $f(X) = Y$, con lo cual se tiene lo deseado. ■

Como consecuencia del teorema 1.2.5 y recordando que $\mathbb{C}$ no es compacto, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.6. *Toda función holomorfa en una superficie de Riemann compacta es constante.*

Otro teorema importante es el teorema de Liouville cuya prueba se obtiene usando el teorema de la singularidad removible de Riemann (teorema 1.1.7) y el corolario anterior.

Teorema 1.2.7 (de Liouville). *Toda función holomorfa y acotada $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es constante.*

Para finalizar esta sección, utilizaremos el teorema 1.2.5 para demostrar otras propiedades del toro complejo.

Proposición 1.2.8. *Para $\tau \in \mathbb{H}^2$ denotemos por $X(\tau)$ al toro correspondiente al retículo generado por la $\mathbb{R}$ -base $\{1, \tau\}$, entonces todo toro T_Γ es biholomorfo a uno de la forma $X(\tau)$.*

Demostración.

Sea $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$, con $w_1 = a + ib$ y $w_2 = u + iv$, tenemos así que

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{(a + ib)(u - iv)}{u^2 + v^2},$$

entonces

$$\operatorname{Im} \left(\frac{w_1}{w_2} \right) = \frac{bu - av}{u^2 + v^2},$$

por la tricotomía de los números reales debe ocurrir un solo caso de los siguientes:

$$1) \quad bu - av > 0,$$

$$2) \quad av - bu > 0,$$

$$3) \quad av - bu = 0.$$

Observemos que 3) no puede ocurrir, ya que si $av - bu = 0$ entonces $\frac{w_1}{w_2}$ no tiene parte imaginaria, es decir, es algún número real $x = \frac{w_1}{w_2}$ lo cual implica que $w_1 = xw_2$, sin embargo esto es una contradicción a la independencia lineal de w_1 y w_2 . Por lo tanto solo puede ocurrir 1) o 2), supongamos, sin pérdida de generalidad, que $bu - av > 0$, en caso contrario solo cambiamos el cociente por $\frac{w_2}{w_1}$.

Tenemos que $\tau := \frac{w_1}{w_2}$ se encuentra en el semiplano superior, además se cumple la igualdad

$$\mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = w_2(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}),$$

en efecto,

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 &\Leftrightarrow x = nw_1 + mw_2, \quad n, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = w_2 \left(n \frac{w_1}{w_2} + m \right) \\ &\Leftrightarrow x = w_2(n\tau + m) \Leftrightarrow x \in w_2(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Denotemos por $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ y $\Gamma' = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, de lo anterior, en particular, tenemos que $w_2\Gamma' \subset \Gamma$, entonces por la proposición 1.1.4 la multiplicación por $w_2 \in \mathbb{C}^\times$ induce una función holomorfa (que además es morfismo de grupos) $\psi : X(\tau') \rightarrow X(\tau)$, observe que esta función es no constante y además $X(\tau')$ es compacto, así que por el teorema 1.2.5 se sigue que ψ es sobreyectiva.

Por otro lado, sea $[z]_{\Gamma'} \in \ker \psi$, se tiene lo siguiente,

$$[z]_{\Gamma'} \in \ker \psi \Leftrightarrow \psi([z]_{\Gamma'}) = [0]_{\Gamma} \Leftrightarrow w_2 z \in \Gamma \Leftrightarrow z \in w_2^{-1} \Gamma \Leftrightarrow z \in \Gamma',$$

de esta forma $\ker \psi = \Gamma'$ y así ψ es inyectiva.

Con lo anterior concluimos que ψ es un biholomorfismo. ■

Proposición 1.2.9. Si $\tau \in \mathbb{H}^2$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ y se considera $\tau' := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ entonces $\tau' \in \mathbb{H}^2$ y $X(\tau)$ es biholomorfo a $X(\tau')$.

Demostración.

Sea $\tau = u + iv$ con $v > 0$, tenemos que

$$\tau' = \frac{a(u + iv) + b}{c(u + iv) + d} = \frac{(au + b) + aiv}{(cu + d) + cvi} \cdot \frac{(cu + d) - cvi}{(cu + d) - cvi},$$

luego

$$Im(\tau') = \frac{acuv + adv - acuv - bcv}{(cu + d)^2 + (cv)^2} = \frac{(ad - bc)v}{(cu + d)^2 + (cv)^2},$$

dado que $ad - bc = 1$ y $v > 0$, concluimos que $Im(\tau') > 0$, es decir, $\tau' \in \mathbb{H}^2$.

Por otro lado, sean $\Gamma = \{1, \tau\}$, $\Gamma' = \{1, \tau'\}$ dos retículos y $\alpha = c\tau + d$. Observe que α es distinto de cero, ya que si $c\tau + d = 0$ entonces $\tau = -\frac{d}{c}$, es decir, τ es un número real, lo cual no es posible dado que τ está en el semiplano superior.

Tenemos además que,

$$\begin{pmatrix} \alpha\tau' \\ \alpha \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, luego por la proposición A.0.1 del apéndice A se sigue que $\alpha\Gamma' = \Gamma$, en particular $\alpha\Gamma' \subset \Gamma$ y por la proposición 1.1.4, la función $z \mapsto \alpha z$ induce una función holomorfa (que de hecho es morfismo de grupos)

$$\psi : X(\tau') \mapsto X(\tau).$$

Este morfismo de grupos es nuestro candidato a ser biholomorfismo.

Nuevamente, por el teorema 1.2.5 tenemos que ψ es sobreyectiva, ya que es una función holomorfa, no constante, con $X(\tau')$ compacto.

Por otro lado, sea $[z]_{\Gamma'} \in \ker \psi$, se tiene que

$$[z]_{\Gamma'} \in \ker \psi \iff \psi([z]_{\Gamma'}) = [0]_{\Gamma} \iff \alpha z \in \Gamma \iff z \in \alpha^{-1}\Gamma \iff z \in \Gamma',$$

donde en la última bicondicional hemos usado el hecho de que $\Gamma' = \alpha^{-1}\Gamma$.

Lo anterior nos dice que $\ker \psi = \Gamma'$.

Por lo tanto ψ es un biholomorfismo entre $X(\tau)$ y $X(\tau')$. ■

1.3. Sobre cubrientes.

En esta sección se presentarán algunos resultados de la teoría de espacios cubrientes y funciones con puntos de ramificación.

Definición 1.3.1. Sean X y Y espacios topológicos y $p : Y \longrightarrow X$ una función continua. Para $x \in X$, el conjunto $p^{-1}(x)$ es llamado la **fibra de p sobre x** . Si $y \in p^{-1}(x)$ entonces se dice que y **se encuentra sobre x** .

Definición 1.3.2. Sean, X , Y y Z espacios topológicos, si $p : Y \longrightarrow X$ y $q : Z \longrightarrow X$ son funciones continuas entonces una función $f : Y \longrightarrow Z$ se dice que **preserva fibras** si $p = q \circ f$. Esto significa que cualquier punto $y \in Y$, que se encuentra sobre $x \in X$, es enviado bajo f a un punto que también se encuentra sobre x .

Recuerde que un subconjunto A de un espacio topológico es llamado **discreto** si cada punto $a \in A$ tiene una vecindad V tal que $V \cap \{a\} = \{a\}$. Si tenemos dos espacios topológicos X y Y y una función $p : Y \longrightarrow X$, se dice que p es **discreta** si la fibra $p^{-1}(x)$ de todo punto $x \in X$ es un subconjunto discreto de Y .

En lo que sigue se consideran funciones no constantes a menos que se indique lo contrario.

Teorema 1.3.3. Sean X y Y superficies de Riemann. Si $p : Y \longrightarrow X$ es holomorfa entonces p es abierta y discreta.

Demostración.

Por 1) del corolario 1.2.2 se sabe que las funciones entre superficies de Riemann son abiertas. Para ver

que p es discreta, sean $b \in Y$ y $a = p(b) \in X$, por el teorema 1.2.1 se sabe que existe un entero $k \geq 1$ y cartas (ϕ, U) , (ψ, U') en X y Y , respectivamente, tales que $F := \psi \circ \phi^{-1}$ y $F(z) = z^k$, más aún, se tiene que $F(0) = 0$. Luego, como los ceros de las funciones holomorfas son aislados (véase pág. 73 de [16]) se deduce que, en alguna vecindad de b , este punto es la única preimagen de a , es decir, $p^{-1}(\{a\})$ es discreto, y en consecuencia, p es una función discreta. ■

Definición 1.3.4. Sean X y Y superficies de Riemann y $p : Y \rightarrow X$ holomorfa. Un punto $y \in Y$ es llamado **punto de ramificación de p** si no existe vecindad V de y tal que $p|_V$ sea inyectiva. La función p es llamada **función holomorfa no ramificada** si no tiene puntos de ramificación.

Observación 1.3.5. Observe que un punto y es de ramificación para p si $\text{mult}_y(p) \geq 2$.

Ejemplo 1.3.6. La función exponencial $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ es una función holomorfa no ramificada ya que es inyectiva en todo subconjunto $V \subset \mathbb{C}$ que no contenga dos puntos que difieran de un múltiplo entero de $2\pi i$.

Ejemplo 1.3.7. Los puntos de ramificación de la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ dada por $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ son -1 y 1 .

Para ver lo anterior, notemos que por el teorema de la función inversa en $\mathbb{C}$, aquellos puntos donde la derivada de la función se anule son posibles puntos de ramificación.

Tenemos que $f'(z) = 0$ si y solo si $1 - \frac{1}{z^2} = 0$, es decir, si y solo si $z = \pm 1$.

Para $z = 1$, como $f(z) = 1$ si y solo si $(z - 1)^2 = 0$ esto nos dice que $z = 1$ tiene multiplicidad 2 y por lo tanto sí es un punto de ramificación.

De manera similar se tiene que el punto $z = -1$ tiene multiplicidad 2 y por lo tanto es de ramificación.

De aquí en adelante I denotará al intervalo $[0, 1]$, a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.3.8. Sea X un espacio topológico, con a y b puntos en X . Dos curvas $u, v : I \rightarrow X$ que unen a con b son llamadas **homotópicas** si existe una función continua $A : I \times I \rightarrow X$ con las siguientes propiedades:

$$\text{I)} \quad A(t, 0) = u(t) \text{ para todo } t \in I,$$

$$\text{II)} \quad A(t, 1) = v(t) \text{ para todo } t \in I,$$

III) $A(0, s) = a$ y $A(1, s) = b$ para todo $s \in I$.

Si u y v son homotópicas se denota por $u \sim v$.

Definición 1.3.9. Sean X un espacio topológico y $u, v : I \rightarrow X$ dos curvas cerradas en X , que no necesariamente tienen el mismo punto inicial. Decimos que las curvas u y v son **homotópicas libres** si existe una función continua $A : I \times I \rightarrow X$ con las siguientes propiedades:

I) $A(t, 0) = u(t)$ para todo $t \in I$,

II) $A(t, 1) = v(t)$ para todo $t \in I$,

III) $A(0, s) = A(1, s)$ para todo $s \in I$.

Definición 1.3.10. Sean X , Y y Z espacios topológicos, $p : Y \rightarrow X$ y $f : Z \rightarrow X$ funciones continuas. Un **levantamiento de f con respecto a p** es una función continua $g : Z \rightarrow Y$ tal que $f = p \circ g$, es decir, el diagrama que se muestra en la figura 1.4 conmuta.

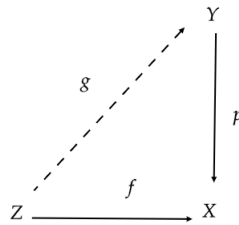


Figura 1.4: Levantamiento de f con respecto a p .

Los siguientes teoremas son resultados topológicos conocidos, por lo cual omitimos sus demostraciones, estas pueden consultarse en la sección 5 de [3] o en la sección 54 de [14].

Teorema 1.3.11 (Unicidad del levantamiento y levantamiento de curvas homotópicas). Sean X y Y espacios Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local, se tiene lo siguiente:

a) Suponga que Z es un espacio topológico conexo y $f : Z \rightarrow X$ una función continua.

Si $g_1, g_2 : Z \rightarrow Y$ son dos levantamientos de f y $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ para algún punto $z_0 \in Z$ entonces $g_1 = g_2$.

b) Sean $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local, a y b dos puntos distintos en X y un punto $\hat{a}$ en Y tal que $p(\hat{a}) = a$. Más aún, supongamos que tenemos una función continua $A : I \times I \rightarrow X$ tal que $A(0, s) = a$ y $A(1, s) = b$ para todo $s \in I$ y definamos $u_s(t) := A(t, s)$. Si toda curva u_s puede ser

levantada a una curva $\hat{u}_s$ con punto inicial $\hat{a}$ entonces $\hat{u}_0$ y $\hat{u}_1$ tienen los mismos puntos finales y son homotópicas.

Teorema 1.3.12. Si X , Y y Z son superficies de Riemann, $p : Y \rightarrow X$ una función holomorfa no ramificada y $f : Z \rightarrow X$ una función holomorfa entonces todo levantamiento de f , $g : Z \rightarrow Y$, es holomorfo.

Demostración.

Tomemos un punto $c \in Z$ y definamos $b := g(c)$ y $a := p \circ g(c)$, como g es un levantamiento de f tenemos que $a = f(c)$. Como p es no ramificada existe una vecindad V de b y U de a tal que $p|_V : V \rightarrow U$ es biholomorfa. Consideremos $\varphi : U \rightarrow V$ la inversa de $p|_V$, dado que g es continua, podemos encontrar una vecindad abierta W de c tal que $g(W) \subset V$ (véase figura 1.5); como $f = p \circ g$, se tiene que $g|_W = \varphi \circ f|_W$ y así g es composición de funciones holomorfas en c y por lo tanto g misma es holomorfa en el punto c . ■

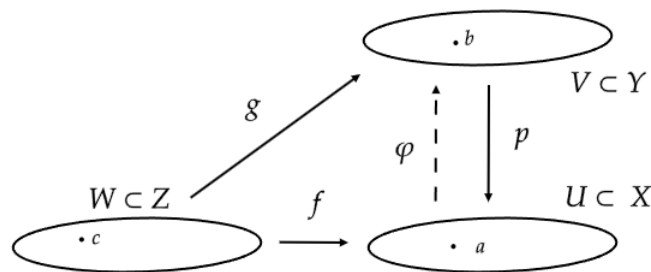


Figura 1.5: Levantamiento de f

Definición 1.3.13. Sean X un espacio topológico, a, b y c puntos en X y $u : I \rightarrow X$, $v : I \rightarrow X$ curvas que unen a con b y b con c , respectivamente. Se definen las siguientes operaciones.

a) La **curva producto**, denotada por $u * v : I \rightarrow X$, que une a con c está dada por

$$(u * v)(t) := \begin{cases} u(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

b) La **curva inversa**, denotada por u^- o también u^{-1} , que une b con a , está definida como sigue

$$u^-(t) := u(1 - t), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Consideraremos la definición de grupo fundamental en términos de clases de homotopía junto con la operación producto dada en 1.3.13, para más detalles sobre este grupo se puede consultar [3] o bien [14].

A continuación presentamos un ejemplo particular en el cual, a través de la teoría de levantamientos, podemos probar que el primer grupo fundamental, $\pi_1(X)$, de una superficie de Riemann X no es abeliano.

Ejemplo 1.3.14. Sean X y Y las siguientes superficies de Riemann:

$$X := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \text{ y } Y = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Considere los caminos $u : I \rightarrow X$, $u(t) = 1 - e^{2\pi it}$ y $v : I \rightarrow X$, $v(t) = -1 + e^{2\pi it}$. Si para $j = 1, 2$, las curvas $w_j : I \rightarrow Y$ son los levantamientos de $u * v$ y $v * u$ respecto a la función $\text{sen} : Y \rightarrow X$, con $w_j(0) = 0$ entonces se tiene que $w_1(1) = 2\pi$ y $w_2(1) = -2\pi$ y por lo tanto $\pi_1(X)$ no es abeliano.

Para justificar lo anterior, observemos que las curvas u y v son círculos unitarios centrados en 1 y -1 , respectivamente, recorridos con dirección contraria a las manecillas del reloj, tal como se comentó en el ejemplo 1.0.6, la función $\text{sen}(z)$ envía la banda infinita $\{x + iy : -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$ al semiplano superior.

Ahora bien, es posible expresar la curva u como un producto de curvas de tal manera que una de ellas esté contenida en $\mathbb{H}^2$ y la otra en $\mathbb{H}_-^2$ (el semiplano inferior), llamemos a estas curvas b y a respectivamente, así $u = a * b$.

De igual manera tenemos curvas c y d con las propiedades anteriores tales que $v = c * d$.

Con lo anterior tenemos que $u * v = (a * b) * (c * d)$ y así para estudiar el levantamiento de $u * v$ podemos estudiar las cuatro curvas anteriores.

Como u y v son continuas, cada una de las curvas en las que se descomponen también son continuas y entonces podemos considerar sus levantamientos.

Sean $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$ los levantamientos de a, b, c y d respecto a la función seno.

En la figura 1.6 podemos observar como la curva a inicia en el origen, permanece en el área no-sombreada y termina en el punto $A := 2$, su levantamiento $\hat{a}$ también debe comenzar en el origen, permanecer en el área no-sombreada y terminar en $\hat{A} := \text{sen}^{-1}(A)$. Luego, razonando de manera similar para la curva b , se tiene que $\hat{b}$ inicia en $\hat{A}$, permanece en el área sombreada y termina en un punto $\hat{B} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ que

satisface $\sin(\hat{B}) = 0$, podemos deducir que $\hat{B} = \pi$.

De igual manera, la curva $\hat{c}$ inicia en $\hat{B}$, permanece en el área sombreada, termina en $\hat{C} = \sin^{-1}(-2)$ y finalmente, la curva $\hat{d}$ inicia en $\hat{C}$, permanece en el área no-sombreada y termina en un punto $\hat{D} \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ tal que $\sin(\hat{D}) = 0$, y así $\hat{D} = 2\pi$.

Tenemos entonces que $w_1(1) = (\hat{a} * \hat{b} * \hat{c} * \hat{d})(1) = \hat{d}(1) = \hat{D} = 2\pi$.

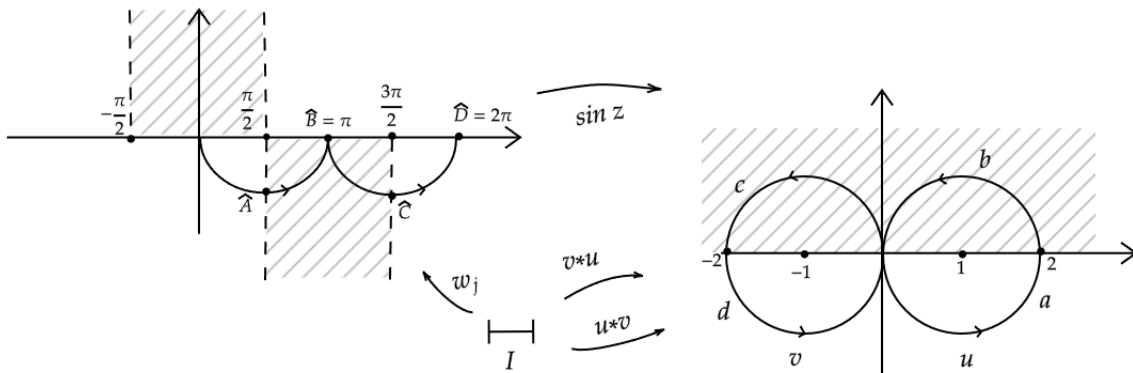


Figura 1.6: Levantamiento de $u * v$.

De igual manera podemos proceder con la curva $v * u$ ya que se tiene $v * u = c * d * a * b$. En la figura 1.7 se muestran los levantamientos correspondientes a las curvas, se tiene así que B' es el punto final de la curva $\hat{b}$, por lo tanto $\sin(B') = 0$ y como B' está entre $-\frac{5\pi}{2}$ y $-\frac{3\pi}{2}$ se sigue que $B' = -2\pi$.

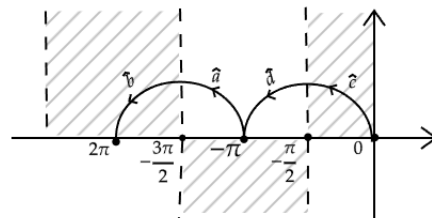


Figura 1.7: Descomposición de la curva $v * u$.

Por lo tanto $w_2(1) = (\hat{c} * \hat{d} * \hat{a} * \hat{b})(1) = \hat{b}(1) = -2\pi$.

Concluimos que $w_1(1) = 2\pi$ y $w_2(1) = -2\pi$, más aún si las curvas $u * v$ y $v * u$ fuesen homotópicas entonces, por el teorema 1.3.11, sus levantamientos tendrían los mismos puntos finales, así $u * v \neq v * u$ en $\pi_1(X)$, por lo tanto $\pi_1(X)$ no es abeliano.

A continuación pasamos a presentar algunos resultados sobre la teoría de funciones cubrientes.

Definición 1.3.15. Sean X y Y espacios topológicos. Una función sobreyectiva $p : Y \longrightarrow X$ es llamada **función cubriente** si se satisface lo siguiente: todo punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que las preimágenes $p^{-1}(U)$ pueden ser representadas como

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

donde los conjuntos V_j , $j \in J$ son abiertos disjuntos a pares de Y , y todas las funciones $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ son homeomorfismos (véase la figura 1.8). En particular observemos que p es un homeomorfismo local.

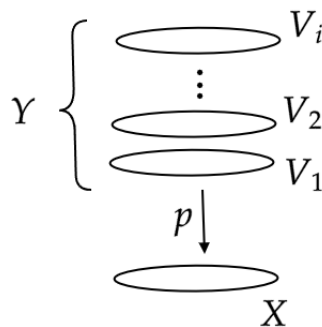


Figura 1.8: Función cubriente.

Ejemplo 1.3.16.

1. Sea X un espacio topológico, la función identidad $i : X \longrightarrow X$ es una función cubriente.
2. La función $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ es una función cubriente.
3. La función $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ es una función cubriente.

Los siguientes resultados nos permiten aplicar la teoría de levantamiento de curvas a las funciones cubrientes, y viceversa. Su demostración se puede consultar en la sección 4 de [3].

Teorema 1.3.17. Sean X y Y espacios topológicos se tiene que toda función cubriente $p : Y \longrightarrow X$ tiene la propiedad del levantamiento de curvas.

En lo que sigue, un espacio topológico **simplemente conexo** es aquel cuyo primer grupo fundamental es trivial. Análogamente se define una variedad simplemente conexa.

Teorema 1.3.18. Sean X y Y espacios Hausdorff y $p : Y \longrightarrow X$ una función cubriente. Suponga que Z es un espacio topológico simplemente conexo, arco conexo y localmente arco conexo y $f : Z \longrightarrow X$

es una función continua. Tenemos que para cada elección de puntos $z_0 \in Z$ y $y_0 \in Y$ con $f(z_0) = p(y_0)$ existe un único levantamiento $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ tal que $\hat{f}(z_0) = y_0$.

Teorema 1.3.19. Sea X una variedad, Y un espacio Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local con la propiedad del levantamiento de curvas, se tiene que p es una función cubriente.

1.4. El cubriente universal

Para la demostración del teorema del mapeo de Riemann es necesario hacer uso de el cubriente universal, en esta sección presentaremos su definición y algunos resultados que serán relevantes. También haremos uso del primer grupo fundamental y propiedades del morfismo inducido entre estos grupos, estos resultados se pueden consultar en libros de álgebra abstracta o topología algebraica, por ejemplo en la sección 1.3 de [6].

Definición 1.4.1. Sean X y Y espacios topológicos conexos y $p : Y \rightarrow X$ una función cubriente, $p : Y \rightarrow X$ es llamada el **cubriente universal de X** si satisface la siguiente propiedad universal: para cada función cubriente $q : Z \rightarrow X$ con Z conexo y cada elección de puntos $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ con $p(y_0) = q(z_0)$ existe exactamente una función continua que preserva fibras $f : Y \rightarrow Z$ tal que $f(y_0) = z_0$, (véase la figura 1.9).

El cubriente universal es único salvo isomorfismos, una prueba de esto se puede consultar en la página 261 de [11].

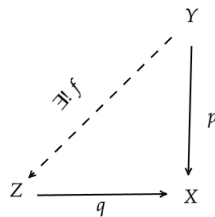


Figura 1.9: El cubriente universal.

Las superficies de Riemann que más adelante estaremos usando son aquellas que son simplemente conexas, en ese caso particular existe un resultado importante respecto al cubriente universal, el cual presentamos a continuación y cuya demostración se obtiene directamente del teorema 1.3.18.

Teorema 1.4.2. *Si X y Y son variedades conexas, Y es simplemente conexa y $p : Y \rightarrow X$ es una función cubriente entonces p es el cubriente universal de X .*

A continuación presentamos dos tipos de cubrientes que se estarán usando.

Definición 1.4.3. *Sean X y Y espacios topológicos y $p : Y \rightarrow X$ una función cubriente.*

1. Una **transformación deck para p** es un homeomorfismo $f : Y \rightarrow Y$ tal que $p \circ f = p$. Al conjunto de todas las transformaciones deck de $p : Y \rightarrow X$, tal como en la definición anterior, lo denotamos por $\text{Deck}(Y/X)$. Observe que con la composición usual de funciones este conjunto resulta ser un grupo.
2. Si X y Y son Hausdorff y conexos, decimos que p **es de Galois** si el grupo de transformaciones deck actúa transitivamente en las fibras, esto es, para cada par de puntos $y_0, y_1 \in Y$ con $p(y_0) = p(y_1)$ existe una transformación deck $f : Y \rightarrow Y$ tal que $f(y_0) = y_1$.

Proposición 1.4.4. *Sean X y Y dos superficies de Riemann tales que $p : Y \rightarrow X$ es un cubriente (no ramificado) entonces cada elemento de $\text{Deck}(Y/X)$ es función holomorfa (y así un automorfismo de Y).*

Demostración.

Sea $f \in \text{Deck}(Y/X)$ una transformación deck, es decir un homeomorfismo $f : Y \rightarrow Y$ tal que $p \circ f = p$. Observe que esta igualdad nos dice que f es un levantamiento de p respecto a p , y como p es una función holomorfa no ramificada, por el teorema 1.3.12 tenemos que el levantamiento f es holomorfa. ■

Proposición 1.4.5. *Sean X, Y espacios Hausdorff y sea $p : Y \rightarrow X$ una cubriente con $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ tal que $p(y_0) = x_0$, si los espacios son arco conexos entonces el morfismo asociado a los grupos fundamentales $p_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ con $p_*(y_0) = x_0$ es inyectivo.*

Demostración.

Para ver que el morfismo es inyectivo veremos que su kernel es trivial.

Sea $[u] \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $[u] \in \ker p_*$, esto es $p_*([u]) = [C_{x_0}]$, donde C_{x_0} es la curva constante x_0 , tenemos así que $p \circ u$ es homotópica a C_{x_0} en X .

Por el teorema 1.3.18, cualquier levantamiento de $p \circ u$ y de C_{x_0} que inicien en el mismo punto deben

ser homotópicas en Y .

Note que u es un levantamiento de $p \circ u$ que inicia en y_0 y la curva constante C_{y_0} es un levantamiento de C_{x_0} que también inicia en y_0 . Por el teorema mencionado, u es homotópica a C_{y_0} en Y , así $[u] = [C_{y_0}]$, por lo tanto el kernel de p_* es trivial. ■

Proposición 1.4.6. *Sean X, Y espacios Hausdorff, $p : Y \rightarrow X$ una cubriente con $y_0 \in Y$ y $x_0 \in X$ tal que $p(y_0) = x_0$, si los espacios son conexos y p es de dos hojas entonces es de Galois.*

Demostración.

Para ver que p es de Galois, debemos probar que si $a, b \in Y$ con $p(a) = p(b)$ entonces existe $f \in \text{Deck}(Y/X)$ con $f(a) = b$.

Sea $y \in Y$, como p es cubriente de dos hojas entonces $p^{-1}(p(y)) = \{y, w\}$. Definamos la función $f : Y \rightarrow Y$ tal que $f(y) := w$, es decir, la función que envía el punto y al otro elemento de la fibra de $p(y)$.

Es claro que f satisface la condición planteada al inicio, y además para todo $y \in Y$, $(p \circ f)(y) = p(f(y)) = p(w) = p(y)$, es decir, $p \circ f = p$.

Finalmente, como p es un homeomorfismo local (por ser cubriente) se sigue que f es también un homeomorfismo local (de hecho es su propia inversa), con todo lo anterior se concluye que f , en efecto, se encuentra en $\text{Deck}(Y/X)$. ■

Terminamos esta sección con el siguiente teorema, el cual nos brinda dos propiedades importantes sobre el cubriente universal, no solo para superficies de Riemann sino en general para cualquier variedad, su demostración se puede consultar en la página 34 de [3].

Teorema 1.4.7. *Sea X una variedad conexa y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal, se tiene entonces que p es Galois y $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(X)$.*

Este teorema nos brinda una forma de calcular el grupo fundamental de algunas variedades, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.8. $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}$.

1. Como $\mathbb{C}$ es conexo y simplemente conexo, observemos que $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ es el cubriente universal.

Consideremos $\tau_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z + 2\pi ni$ con $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\exp \circ \tau_n = \exp$, en efecto, $\exp(\tau_n(z)) = \exp(z + 2\pi ni) = \exp(z)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos así que $\tau_n \in \text{Deck}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times)$. Por otro lado, si $f \in \text{Deck}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times)$ entonces $\exp(f(0)) = \exp(0) = 1$ lo cual implica que $f(0) = 2\pi ni$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Como $\tau_n \in \text{Deck}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times)$ tal que $\tau_n(0) = 2\pi ni$ se sigue que $\tau_n = f$. Con lo anterior concluimos que $\text{Deck}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times) = \{\tau_n : n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el teorema anterior implica que $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}$.

2. Sea $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ un retículo en $\mathbb{C}$ y consideremos el toro $T_\Gamma := \mathbb{C}/\Gamma$. Observemos que, como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, la proyección canónica al cociente $\mathbb{C} \rightarrow T_\Gamma$ es la cubriente universal del toro T_Γ . Para $\gamma \in \Gamma$ denotemos por $\tau_\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a la traslación por γ , análogo a como se hizo en el ejemplo 1, se puede verificar que $\text{Deck}(\mathbb{C} \rightarrow T_\Gamma) \simeq \{\tau_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, es decir, el grupo de transformaciones deck del toro actúa por traslaciones, lo cual implica que $\pi_1(T_\Gamma) \simeq \Gamma \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Proporcionamos otra forma de expresar el grupo fundamental del toro mediante la notación del teorema de Seifert - Van Kampen (véase página 43 de [6] y la figura 1.10), sea $\beta_i = p \circ \gamma_i$, $i = 1, 2$, donde $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por $t \mapsto t\alpha_i$, así $\pi(X) = \langle \beta_1, \beta_2 : \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1 \rangle$.

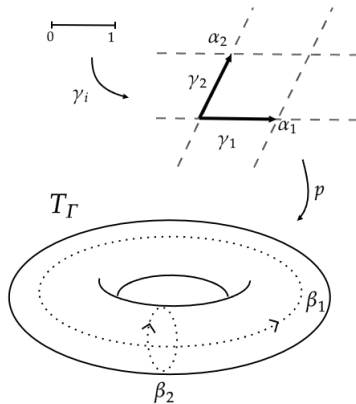


Figura 1.10: Generadores del grupo fundamental del toro complejo.

Capítulo 2

Cohomología de Čech y grupo de DeRham

Calcular grupos de cohomología, en general, puede resultar difícil, en nuestro caso nos enfocaremos en la cohomología de Čech con la cual es posible calcular el grupo de DeRham, con este objetivo, usaremos cubiertas abiertas de espacios topológicos; también se dará un repaso a las bases de la teoría de gavillas. Conociendo la teoría de gavillas aprovecharemos a hablar un poco de las formas diferenciables.

2.1. Pregavillas y gavillas

Gran parte del estudio de superficies de Riemann requiere recuperar información o propiedades globales a partir de conocimientos locales, para este objetivo, aplicar la teoría de gavillas resulta muy conveniente.

Una ventaja que ofrecen las pregavillas y gavillas es que permiten usarse con distintas categorías (anillos, módulos, álgebras, grupos, etc.), para nuestro estudio estaremos trabajando en la categoría de grupos abelianos, a menos que se indique lo contrario.

Definición 2.1.1. Sea X un espacio topológico con topología τ . Una **pregavilla** $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre X , $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \tau}$ es:

1. Una colección de grupos abelianos $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \tau}$,
2. Una familia de morfismos $\{\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)\}_{V \subset U}$,

de tal manera que:

I) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, $\rho_{U,U} = 1_{\mathcal{F}(U)}$ para todo $U \in \tau$.

II) Si $W \subset V \subset U$ entonces $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V} = \rho_{U,W}$.

De manera intuitiva, siguiendo la notación de la definición de arriba, una pregavilla en un espacio topológico X consiste en una asignación: a cada abierto U de X le asignamos un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ y a cada par $V \subset U$ un morfismo $\rho_{U,V}$, dichos morfismos se pueden pensar como *funciones restricción*, esto se debe a que si $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}(V)$ están formados por funciones, lo cual ocurrirá en muchas ocasiones, y consideramos $f \in \mathcal{F}(U)$ entonces $\rho_{U,V}(f) = f|_V$.

Para familiarizarnos con la noción de pregavillas, a continuación veremos algunos ejemplos más detallados.

Ejemplo 2.1.2.

Recordemos que si R es un campo, una R -álgebra es un espacio vectorial dotado de un producto bilineal.

1. Sea $X = \mathbb{R}^n$ con τ la topología usual, se definirá la pregavilla de $\mathbb{R}$ -álgebras de funciones continuas real valuadas, denotada por $\mathcal{F} := \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, se define el siguiente conjunto

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\};$$

se sabe que estos conjuntos de funciones forman una $\mathbb{R}$ -álgebra con las operaciones usuales de suma y multiplicación de funciones. Para las funciones ρ consideremos la restricción usual de funciones.

Pasemos ahora a verificar las condiciones I) y II) de la definición 2.1.1.

Para I) notemos que $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\emptyset) = \emptyset$ y que $\rho_{U,U} = 1_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(U)}$, es decir, la función identidad.

Para II), si $V \subset U$, como $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(U) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(V)$ es la restricción usual de funciones, tenemos que se satisface lo deseado de manera inmediata.

Con todo lo anterior vemos que, en efecto, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ es una pregavilla.

2. Sea X una variedad diferenciable, para $U \subset X$ abierto, se define la pregavilla de $\mathbb{R}$ -álgebras de funciones diferenciables, denotada por $\mathcal{E}_X$, como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{E}_X(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\},$$

junto con la restricción usual de funciones. Note que el conjunto es una $\mathbb{R}$ -álgebra con las operaciones usuales y además se verifican de manera inmediata las propiedades I) y II) de la definición 2.1.1.

3. De igual manera, si X es un espacio topológico, se pueden obtener las pregavillas de funciones holomorfas y meromorfas, denotadas por $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{M}_X$, respectivamente.

4. Sea X un espacio topológico localmente conexo. Sea G un grupo abeliano fijo, se define la **pregavilla constante** G_X como sigue: Sea U un abierto de X y $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ su descomposición en componentes conexas, dado que X es localmente conexo, cada U_α es un subconjunto abierto de X .

Sean $G_X(\emptyset) = 0$ y $G_X(U) = \prod_{\alpha \in A} G$, esto es, el producto de G tantas veces como componentes conexas tenga U . Por ejemplo, si U tiene solo dos componentes conexas entonces $G_X(U) = G \times G$.

Para la funciones restricción, estas se definen como sigue, sea V un abierto de X tal que $V \subset U \subset X$. Si $V = \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$ y $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ son las descomposiciones en componentes conexas, para cada $\beta \in B$ existe un único $\alpha_\beta \in A$, que depende de β , con $V_\beta \subset U_{\alpha_\beta}$, definamos entonces

$$\begin{aligned} \rho_{U,V} : \prod_{\alpha \in A} G &\longrightarrow \prod_{\beta \in B} G \\ (g_\alpha)_{\alpha \in A} &\longmapsto (g_{\alpha_\beta})_{\beta \in B} \end{aligned} .$$

Veamos que, en efecto, se tiene una pregavilla.

Para I) debemos considerar el caso cuando $U = V$, aquí se tiene que $\alpha_\beta = \beta$, por lo tanto $(g_{\alpha_\beta})_{\beta \in B} = (g_\beta)_{\beta \in B} = (g_\alpha)_{\alpha \in A}$, lo cual implica que $\rho_{U,V} = 1_{G(U)}$.

Para II) consideremos abiertos $W \subset V \subset U$ y sus descomposiciones conexas, para U y V usaremos la misma notación presentada arriba y para W consideremos $W = \bigcup_{\gamma \in C} W_\gamma$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} G_X(U) &\xrightarrow{\rho_{U,V}} G_X(V) \xrightarrow{\rho_{V,W}} G_X(W) \\ (g_\alpha)_{\alpha \in A} &\longmapsto (g_{\alpha_\beta})_{\beta \in B} \longmapsto (g_{\alpha_{\beta_\gamma}})_{\gamma \in C} \end{aligned} ,$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} G_X(U) &\xrightarrow{\rho_{U,W}} G_X(W) \\ (g_\alpha)_{\alpha \in A} &\longmapsto (g_{\alpha_{\gamma'}})_{\gamma' \in C}, \end{aligned}$$

por la unicidad en la elección de los índices en C , tenemos que $\alpha_{\beta_\gamma} = \alpha_{\gamma'}$, lo cual implica que $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V} = \rho_{U,W}$.

Definición 2.1.3. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre X . Se dice que $\mathcal{F}$ es **gavilla** si para cada abierto $U \subset X$ y para cada familia de abiertos $U_j \subset X$ tales que $U = \bigcup_{j \in I} U_j$, se satisface lo siguiente:

- a) Axioma de identidad: si $s, t \in \mathcal{F}(U)$ son elementos tales que $\rho_{U,U_j}(t) = \rho_{U,U_j}(s)$ para todo $j \in I$ entonces $t = s$.
- b) Axioma de pegado: si tenemos una colección $\{s_j \in \mathcal{F}(U_j)\}_{j \in I}$ tal que

$$s_j|_{U_i \cap U_j} = s_i|_{U_i \cap U_j},$$

para todo $i, j \in I$ entonces existe $t \in \mathcal{F}(U)$ con $t|_{U_j} = s_j$, para todo $j \in I$.

Notación 2.1.4. A partir de ahora usaremos la siguiente notación $U_{ij} := U_i \cap U_j$.

Observación 2.1.5. Respecto a la definición 2.1.3 tenemos lo siguiente:

- A) El primer inciso de dicha definición se puede replantear de la siguiente manera: si tenemos $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U,U_j}(t) = 0$ para todo $j \in I$ entonces $t = 0$.
- B) Por el inciso a), la t que existe en el inciso b) es única.
- C) $\mathcal{F}(\emptyset)$ contiene solo un elemento. En efecto, para el abierto $\emptyset \subset X$ se considera la cubierta con $I = \emptyset$, $\{U_i\}_{i \in \emptyset}$ se sigue entonces que para dos elementos $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(\emptyset)$ la condición $s_1|_{U_i} = s_2|_{U_i}$ se cumple por vacuidad y así se concluye que $s_1 = s_2$.

Ejemplo 2.1.6.

1. La pregavilla $\mathcal{O}_X$ del ejemplo 2.1.2 es una gavilla con la restricción usual de funciones. Como los elementos que forman dichas gavillas son funciones holomorfas, el inciso a) de la definición 2.1.3 se obtiene gracias al teorema de la identidad (teorema 1.1.8) y el inciso b) del lema del pegado de espacios topológicos (véase la página 108 de [14]).

2. Veremos ahora un ejemplo de una pregavilla que no es gavilla.

Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano, supongamos que X tiene dos abiertos disjuntos no vacíos U_1, U_2 y que G contiene al menos dos elementos distintos s_1 y s_2 .

Definamos una pregavilla $\mathcal{G}$ en X como sigue: para todo abierto $U \subset X \setminus \{\emptyset\}$ sea $\mathcal{G}(U) := G$ y $\mathcal{G}(\emptyset) = 0$. Para las funciones restricción, sea $V \subset U$ abierto no vacío, definamos $\rho_{U,V} := \text{id}_G$ y $\rho_{U,\emptyset} := 0$.

Primero veamos que es una pregavilla. Por construcción, tenemos que se satisface el inciso 1) de la definición 2.1.1. Para el inciso 2), sean $U, V, W \subset X$ abiertos tales que $W \subset V \subset U$ y $s \in \mathcal{G}(U)$, analicemos algunos de los posibles casos, los otros casos se pueden analizar de manera similar:

- Supongamos que $U \neq \emptyset$,
 - Si $V = \emptyset$, observemos que entonces $W = \emptyset$ y entonces $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}(s) = \rho_{V,W}(0) = 0$, y por otro lado $\rho_{U,W}(s) = 0$.
 - Si $W = \emptyset$ entonces $V \neq \emptyset$, o bien, $V = \emptyset$, en cualquiera de los dos casos se verifica que $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}(s) = 0 = \rho_{U,W}(s)$.
- Supongamos que $U = \emptyset$, esto implica que $W = \emptyset = V$ por lo cual $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}(s) = 0 = \rho_{U,W}(s)$.

Por lo tanto $\mathcal{G}$ es una pregavilla.

Ahora bien, por otro lado, dados $s_1, s_2 \in G$, como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, se tiene que $s_1|_{U_{12}} = 0 = s_2|_{U_{12}}$ pero observemos que no existe $t \in \mathcal{G}(U_1 \cup U_2) = G$ tal que $t|_{U_1} = s_1$ y $t|_{U_2} = s_2$, por lo tanto no se satisface el inciso b) de la definición 2.1.3.

Una vez establecidas las pregavillas y gavillas, como muchos objetos en matemáticas, podemos definir funciones entre estas, pasaremos ahora a ver estas definiciones.

Definición 2.1.7. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ pregavillas, con ρ y r sus respectivas funciones restricción. Un **morfismo de pregavillas** $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es una familia de morfismos de grupos abelianos $\{\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)\}$ tales que, si $V \subset U$ es un abierto, el diagrama de la figura 2.1 conmuta.

Un **morfismo de gavillas** $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de las pregavillas en cuestión.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{U,V} \downarrow & & \downarrow r_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Figura 2.1: Morfismo de pregavillas.

Observación 2.1.8. Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}'$ pregavillas sobre un espacio topológico X , con sus respectivos morfismos $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ y $\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}'$ se tienen las siguientes propiedades.

- a) El **morfismo identidad de pregavillas** $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ está dado por $1_{\mathcal{F}(U)} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ la identidad.
- b) El **morfismo composición de pregavillas** $\psi \circ \phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$ está dado por $(\psi \circ \phi)_U = \psi_U \circ \phi_U$.
- c) Se satisface que $1_{\mathcal{G}} \circ \phi = \phi = \phi \circ 1_{\mathcal{F}}$ y $\eta \circ (\psi \circ \phi) = (\eta \circ \psi) \circ \phi$.

Notación 2.1.9. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ pregavillas sobre X se denota por $\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ a la colección de todos los morfismos $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de pregavillas.

Definición 2.1.10. Se dice que un morfismo de pregavillas $\phi \in \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es **isomorfismo de pregavillas** si existe $\psi \in \text{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ tal que $\psi \circ \phi = 1_{\mathcal{F}}$ y $\phi \circ \psi = 1_{\mathcal{G}}$.

A continuación veremos una alternativa para saber cuando tenemos un isomorfismo.

Proposición 2.1.11. Sea $\phi \in \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, ϕ es isomorfismo de pregavillas si y solo si $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es isomorfismo para todo abierto $U \subset X$.

Demostración.

Supongamos que existe $\psi \in \text{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ tal que $1_{\mathcal{F}} = \psi \circ \phi$ y $1_{\mathcal{G}} = \phi \circ \psi$ tenemos que dado un abierto U en X , $1_{\mathcal{F}(U)} = \psi_U \circ \phi_U$ y $1_{\mathcal{G}(U)} = \phi_U \circ \psi_U$. Por lo tanto $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es isomorfismo.

Recíprocamente supongamos ahora que para todo abierto $U \subset X$, el morfismo $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es isomorfismo, con esto tenemos que existe su inversa $\phi_U^{-1} : \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$.

Sea $\psi \in \text{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ con $\psi_U := \phi_U^{-1}$ para todo abierto $U \subset X$, a continuación veremos que ψ es morfismo.

Sean $V \subset U$ un abierto, y $\rho_{U,V}$, $r_{U,V}$ las funciones restricción asociadas a las pregavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente. Consideremos $y \in \mathcal{G}(U)$ y definamos $x := \phi_U^{-1}(y)$, por la definición 2.1.7, tenemos que

$$r_{U,V}(\phi_U(x)) = \phi_V(\rho_{U,V}(x)),$$

luego, por como se definió x , tenemos que $r_{U,V}(y) = \phi_V(\rho_{U,V}(x))$ y por lo tanto $\rho_{U,V}(x) = \phi_V^{-1}(r_{U,V}(y))$, se sigue entonces que

$$\rho_{U,V}(\phi_U^{-1}(y)) = \rho_{U,V}(x) = \phi_V^{-1}(r_{U,V}(y)),$$

por lo tanto, ψ es un morfismo de pregavillas, y con ello satisface que $\psi \circ \phi = 1_{\mathcal{F}}$ y $\phi \circ \psi = 1_{\mathcal{G}}$. ■

Notación 2.1.12. Si $\phi \in \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es isomorfismo, se denota por ϕ^{-1} al morfismo $\psi \in \text{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ dado por $\psi_U = \phi_U^{-1}$.

Definición 2.1.13. Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio topológico X y un punto a en X . Se define una relación de equivalencia sobre $\bigsqcup_{a \in U} \mathcal{F}(U)$ como sigue: para $f \in \mathcal{F}(U)$, $g \in \mathcal{F}(V)$, $f \sim_a g$ si y solo si existe un abierto $W \subset X$ con $a \in W \subset U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$.

El **tallo de $\mathcal{F}$ en a** se define como $\mathcal{F}_a := \bigsqcup_{a \in U} \mathcal{F}(U) / \sim_a$.

Por otro lado, si $\phi \in \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ entonces para cada $a \in X$ se tiene una función inducida en los tallos $\phi_a : \mathcal{F}_a \longrightarrow \mathcal{G}_a$ tal como sigue: sea $[f] \in \mathcal{F}_a$ para algún $f \in \mathcal{F}(U)$, definimos

$$\phi_a([f]) := [\phi_U(f)],$$

donde $\phi_U(f) \in \mathcal{G}(U)$.

Sea $W := U \cap V$ y consideremos $a \in W$; para $[f], [g] \in \mathcal{F}_a$, $f \in \mathcal{F}(U)$, $g \in \mathcal{F}(V)$ tenemos que $f|_W, g|_W \in \mathcal{F}(W)$, definamos

$$[f] + [g] := [f|_W + g|_W].$$

Veamos que esta operación suma está bien definida. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(U)$ y $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(V)$ tales que $[f_1] = [f_2]$ y $[g_1] = [g_2]$, tenemos que existen abiertos W' y W'' de X tales que $f_1|_{W'} = f_2|_{W'}$ y $g_1|_{W''} = g_2|_{W''}$. Hagamos $\tilde{W} := W' \cap W''$, con esto se tiene que $(f_1 + g_1)|_{\tilde{W}} = (f_2 + g_2)|_{\tilde{W}}$ y en consecuencia, se sigue que $[(f_1 + g_1)|_{\tilde{W}}] = [(f_2 + g_2)|_{\tilde{W}}]$.

Proposición 2.1.14. La función ϕ_a está bien definida y es un morfismo de grupos.

Demostración.

Denotemos por ρ y r a las funciones restricción asociadas a las gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente.

Sea $f \in \mathcal{F}(U)$, si $[f] = [g]$ entonces $g \in \mathcal{F}(V)$ y existe $W \subset U \cap V$ tal que $\rho_{U,W}(f) = \rho_{V,W}(g) \in \mathcal{F}(W)$, con lo cual tenemos lo siguiente

$$r_{U,W}(\phi_U(f)) = \phi_W(\rho_{U,W}(f)) = \phi_W(\rho_{V,W}(g)) = r_{V,W}(\phi_V(g)),$$

luego $[\phi_U(f)|_W] = [\phi_V(g)|_W]$ y entonces $\phi_a(f) = \phi_a(g)$; con esto vemos que la función sí está bien definida.

Por otro lado, sean $[f], [g] \in \mathcal{F}_a$, se tiene

$$\begin{aligned} \phi_a([f] + [g]) &= \phi_a(f|_W + g|_W) = [\phi_W(f|_W + g|_W)] = [\phi_W(f|_W)] + [\phi_W(g|_W)] \\ &= [\phi_U(f)|_W] + [\phi_V(g)|_W] = [\phi_U(f)] + [\phi_V(g)] = \phi_a([f]) + \phi_a([g]). \end{aligned}$$

por lo tanto la función es un morfismo de grupos. ■

2.2. Formas complejas

Una superficie de Riemann es en particular una variedad diferenciable real (de dimensión 2), por lo tanto es posible utilizar la teoría de formas diferenciables, más aún, podemos hablar de integración. En esta sección serán presentadas las definiciones y los resultados necesarios correspondientes a formas para superficies de Riemann. Para un estudio más profundo de formas diferenciables en variedades complejas puede consultar [8].

Comencemos recordando algunas nociones de análisis complejo para fijar algunas notaciones.

Notación 2.2.1. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, e identifiquemos a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ escribiendo $z = x + iy$. Denotaremos por $\mathcal{E}(U)$ a la $\mathbb{C}$ -álgebra de funciones $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ que son infinitamente diferenciables con respecto a x, y .

Mediante las derivadas parciales usuales $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ es posible definir los siguientes operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

En ocasiones, para simplificar la notación, denotaremos los operadores anteriores como ∂ y $\bar{\partial}$, respectivamente.

Una vez dados los operadores anteriores tenemos los siguientes resultados conocidos.

Proposición 2.2.2. *Para U un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{E}(U)$ con $f = u + iv$, tenemos que las siguientes son equivalentes:*

- I) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$,
- II) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann),
- III) f es holomorfa.

Demostración.

La equivalencia II) $\Leftrightarrow$ III) se cumple ya que es clásica y puede consultarse en cualquier libro de variable compleja, por ejemplo [8] y [12]. Por otro lado para probar que II es equivalente a I, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0.$$

■

Considerando el morfismo $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ y de la proposición anterior tenemos que $\ker \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \mathcal{O}(U)$.

Observemos que todo lo anterior es respecto al plano complejo, si queremos definir una noción de función diferenciable en una superficie de Riemann, podemos hacerlo mediante cartas complejas.

Notación 2.2.3. *Sean X una superficie de Riemann y un abierto $Y \subset X$, denotemos por $\mathcal{E}(Y)$ al conjunto de todas las funciones $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para cada carta $z : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ en X con $U \subset Y$ existe una función $\tilde{f} \in \mathcal{E}(V)$ con $f|_U = \tilde{f} \circ z$.*

Observemos que $\tilde{f} = f \circ z^{-1}$, por lo tanto $\tilde{f}$ está determinada únicamente por f .

Daremos a continuación una función derivación en superficies de Riemann.

Definición 2.2.4. *Consideremos una superficie de Riemann X , $a \in X$ y (U, z) una carta alrededor de a , donde $z = x + iy$, tomemos además una función f que es diferenciable en una vecindad de a , con estos elementos se define*

$$d_a f := d'_a f + d''_a f,$$

donde

$$d'_a f = \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z, \quad d''_a f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z}.$$

Observación 2.2.5. *Bajo la notación de la definición anterior, una función f es holomorfa si y solo si $d''f = 0$.*

Definición 2.2.6. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , una **1-forma** ω en Y es llamada:*

- a) **Diferenciable**, si con respecto a cada carta (U, z) , ω se puede escribir como $w = f dz + g d\bar{z}$ en $U \cap Y$ donde $f, g \in \mathcal{E}(U \cap Y)$.
- b) **Holomorfa**, si con respecto a cada carta (U, z) , ω se puede escribir como $w = f dz$ en $U \cap Y$ donde $f \in \mathcal{O}(U \cap Y)$.

Definición 2.2.7. *Una 1-forma ω en un abierto Y de una superficie de Riemann X se dice que es una forma **meromorfa** en Y si existe un abierto $Y' \subset Y$ tal que se cumple lo siguiente:*

- I) ω es una 1-forma holomorfa en Y' ,
- II) $Y \setminus Y'$ contiene solo puntos aislados,
- III) ω tiene un polo en cada punto $a \in Y \setminus Y'$.

Notación 2.2.8. *Sean X una superficie de Riemann, U un abierto de X y Y un abierto tal como en la definición 2.2.7. Se denota por $\mathcal{E}^{(1)}(U)$, $\Omega(U)$ y $\mathcal{M}^{(1)}(Y)$ a los espacios vectoriales de 1-formas diferenciables, holomorfas y meromorfas, respectivamente. Observemos que junto con la restricción usual de funciones tienen estructuras de gavillas de espacios vectoriales sobre X .*

Ejemplo 2.2.9. *Analicemos las 1-formas holomorfas en $\mathbb{P}^1$, es decir, la gavilla $\Omega(\mathbb{P}^1)$.*

Sean $U_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$, y $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, con coordenadas z y w respectivamente, las cuales, por el ejemplo 1.0.7, satisfacen que $w = \frac{1}{z}$ en $U_1 \cap U_2$.

Sea $\eta \in \Omega(\mathbb{P}^1)$, en cada carta tenemos lo siguiente

$$\eta = f_1 dz, \quad \eta = f_2 dw,$$

donde $f_1 \in \Omega(U_1)$ y $f_2 \in \Omega(U_2)$ y además en $U_{1,2}$ se tiene

$$f_2(w)dw = \eta = f_1(z)dz = f_1\left(\frac{1}{w}\right)d\left(\frac{1}{w}\right) = -f_1\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}dw,$$

por lo tanto $f_2(w) + f_1\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2} = 0$, de donde se sigue que $f_2(w) = -f_1\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}$, y por el hecho de que tanto f_1 y f_2 son holomorfas se sigue que la igualdad se obtiene solo cuando $f_1 = f_2 = 0$, por lo tanto, $\omega = 0$.

De todo lo anterior podemos concluir que $\Omega(\mathbb{P}^1) = 0$, es decir, toda 1-forma holomorfa en $\mathbb{P}^1$ es trivial.

Definición 2.2.10. Sea X una superficie de Riemann y $Y \subset X$ un abierto. Una **2-forma diferenciable en Y** es aquella que, respecto a cualquier carta compleja (U, z) en X , puede ser escrita como $\omega = f dz \wedge d\bar{z}$ con $f \in \mathcal{E}(U \cap Y)$.

Notación 2.2.11. Denotamos por $\mathcal{E}^{(2)}(Y)$ al espacio vectorial de todas las 2-formas diferenciables en Y .

2.2.1. Derivación exterior de formas

Para un abierto U de una superficie de Riemann, ya que conocemos los espacios $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ y $\mathcal{E}^{(2)}(U)$, estamos interesados en definir funciones entre ellos, es decir, funciones que tomen 1-formas y su imagen sea una 2-forma. Comencemos recordando que si ω es una 1-forma esta puede ser escrita como la siguiente suma finita

$$\omega = \sum_k f_k dg_k, \quad (*)$$

donde f_k y g_k son funciones infinitamente diferenciables, puede consultar [5], [8] o [19].

Definición 2.2.12. Si U es un abierto de una superficie de Riemann y ω es una 1-forma como en (*), se definen las siguientes funciones:

$$1) \quad d\omega := \sum_k df_k \wedge dg_k,$$

$$2) \quad d'\omega := \sum_k d'f_k \wedge dg_k,$$

$$3) \quad d''\omega := \sum_k d''f_k \wedge dg_k.$$

Para que la definición anterior tenga sentido, debemos probar que las expresiones dadas no dependen de la representación como suma finita de la 1-forma. Haremos la prueba para el operador d , los otros casos son similares.

Proposición 2.2.13. Si ω es una 1-forma tal que puede ser escrita como

$$\omega = \sum_k f_k dg_k \quad y \quad \omega = \sum_j \tilde{f}_j d\tilde{g}_j,$$

tenemos entonces que

$$\sum_k df_k \wedge dg_k = \sum_j d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j.$$

Demostración.

Primero tenemos que

$$dg_k = \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy, \quad d\tilde{g}_j = \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} dy,$$

usando lo anterior obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \sum_k f_k dg_k &= \sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} dy, \\ \sum_j \tilde{f}_j d\tilde{g}_j &= \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} dx + \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

luego por hipótesis, ambas expresiones de la derecha son iguales y por lo tanto

$$\left(\sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} - \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} \right) dx + \left(\sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} - \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \right) dy = 0,$$

con lo cual se tiene que

$$\sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x}, \quad \sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y},$$

si ahora derivamos respecto a x y y y restamos las expresiones se tiene

$$\sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \right). \quad (1)$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_k df_k \wedge dg_k &= \sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} dx + \frac{\partial f_k}{\partial y} dy \right) \wedge \left(\frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy \right) \\ &= \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} \right) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Análogamente, podemos obtener la siguiente expresión

$$\sum_j d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j = \sum_j \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} \right) dx \wedge dy. \quad (3)$$

Mediante (1) vemos que las expresiones (2) y (3) son iguales, con lo cual se obtiene lo deseado. ■

Notación 2.2.14. Para una superficie de Riemann compacta X , tenemos la siguiente notación

$$\mathcal{L}(X) := \ker(\mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X)).$$

Teniendo los operadores definidos, se satisfacen las siguientes propiedades.

Proposición 2.2.15. *Sea U un abierto no vacío de una superficie de Riemann, $f \in \mathcal{E}(U)$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$, se cumple lo siguiente.*

1. $ddf = d'd'f = d''d''f = 0$.
2. $d\omega = d'\omega + d''\omega$.
3. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$, con reglas similares para d' y d'' .
4. $d'd''f = -d''d'f$.
5. Sean f y g funciones holomorfas, si $\omega = f dz + \bar{g} d\bar{z}$ entonces $d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0$.

Demostración.

Estas propiedades se obtienen directamente de las definiciones.

1. $ddf = d(1 \cdot df) = d1 \wedge df = 0$, donde la última igualdad se tiene ya que $d1 = 0$.

$d'(d'f) = d'\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) = d'\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge dz = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz \wedge dz = 0$, de manera similar se obtiene el resultado para el operador d'' .

2. Suponga $\omega = \sum_k f_k dg_k$, se tiene

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_k df_k \wedge dg_k = \sum_k (d'f_k + d''f_k) \wedge dg_k \\ &= \sum_k d'f_k \wedge dg_k + \sum_k d''f_k \wedge dg_k = d'\omega + d''\omega. \end{aligned}$$

3. Sea $\omega = \sum_k g_k dh_k$ con g_k, h_k funciones diferenciables, se tiene

$$\begin{aligned} d(f\omega) &= d\left(f \sum_k g_k dh_k\right) = d\left(\sum_k (fg_k) dh_k\right) = \sum_k d(fg_k) \wedge dh_k \\ &= \sum_k (f dg_k + g_k df) \wedge dh_k = \sum_k f dg_k \wedge dh_k + \sum_k g_k df \wedge dh_k \\ &= f \sum_k dg_k \wedge dh_k + df \wedge \left(\sum_k g_k dh_k\right) = f d\omega + df \wedge \omega. \end{aligned}$$

4. De 1 y 2 tenemos lo siguiente:

$$d'd''f + d''d'f = (d' + d'')(d' + d'')f = 0,$$

con lo cual se concluye el resultado.

5. Tenemos que $\omega = f dz + \bar{g} d\bar{z}$, usando los incisos 1, 2 y 3 de esta proposición y el inciso I de la proposición 2.2.2 se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} d\omega &= d'(f dz + \bar{g} d\bar{z}) + d''(f dz + \bar{g} d\bar{z}) = d''(f dz) + d'(\bar{g} d\bar{z}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} = \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \right) dz \wedge d\bar{z} = 0. \end{aligned}$$

■

Pasamos ahora a la definición de algunos tipos de formas importantes.

Definición 2.2.16. Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X . Una 1-forma diferenciable $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ es llamada **cerrada** si $d\omega = 0$ y **exacta** si existe una función $f \in \mathcal{E}(Y)$ tal que $\omega = df$.

Directamente de la definición anterior se pueden obtener las siguientes observaciones.

Observación 2.2.17.

a) Como $ddf = 0$, toda forma exacta es cerrada.

b) Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , toda 1-forma holomorfa $\omega \in \Omega(Y)$ es cerrada.

La última función para formas que definiremos es el pull-back.

Definición 2.2.18. Sean X y Y superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa. Para cada abierto U de Y la función F induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{E}(U) &\longrightarrow \mathcal{E}(F^{-1}(U)) \\ f &\longmapsto f \circ F \end{aligned}$$

Ya sabemos que localmente una 1-forma se expresa como $\omega = \sum_j f_j dg_j$, análogamente para una 2-forma, esta se puede expresar $\omega = \sum_j f_j dg_j \wedge dh_j$ con f_j, g_j y h_j funciones diferenciables, con esto se puede definir el **pull-back de k -formas diferenciables** $F^* : \mathcal{E}^{(k)}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(k)}(F^{-1}(U))$, con $k = 1, 2$, como sigue

$$\begin{aligned} F^* \left(\sum_j f_j dg_j \right) &:= \sum_j (F^* f_j) d(F^* g_j). \\ F^* \left(\sum_j f_j dg_j \wedge dh_j \right) &:= \sum_j (F^* f_j) d(F^* g_j) \wedge d(F^* h_j). \end{aligned}$$

De manera similar a como se hizo con los operadores d, d', d'' se puede probar que esta definición no depende de la representación de la forma.

Proposición 2.2.19. *Sea U un abierto de una superficie de Riemann X , para $f \in \mathcal{E}(U)$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ se tiene lo siguiente*

$$\text{I)} \quad F^*(df) = d(F^*f), \quad F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

$$\text{II)} \quad F^*(d'f) = d'(F^*f), \quad F^*(d'\omega) = d'(F^*\omega).$$

Demostración.

Estos resultados se obtienen usando las definiciones 2.2.12, 2.2.18 y el inciso 4 de la proposición 2.2.15, demostraremos solo la propiedad I ya que la II es similar.

i) Sabemos que $df = d'f + d''f = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$, luego

$$\begin{aligned} F^*(df) &= \left(F^* \frac{\partial f}{\partial z} \right) d(F^*z) + \left(F^* \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) d(F^*\bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ F \right) d(z \circ F) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ F \right) d(\bar{z} \circ F) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ F \right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ F \right) d\bar{z}, \end{aligned}$$

y por otro lado tenemos que

$$d(F^*f) = d'F^*f + d''F^*f = \frac{\partial F^*f}{\partial z}dz + \frac{\partial F^*f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

de las expresiones anteriores vemos que, en efecto, $F^*(df) = d(F^*f)$.

Por otro lado sea $\omega = \sum_k f_k dg_k$, donde f_k y g_k son funciones diferenciables, se tiene lo siguiente

$$F^*(d\omega) = F^* \left(\sum_k df_k \wedge dg_k \right) = \sum_k d(F^*f_k) \wedge d(F^*g_k).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d \left(F^* \left(\sum_k f_k dg_k \right) \right) = d \left(\sum_k (F^*f_k) d(F^*g_k) \right) \\ &= \sum_k d(F^*f_k) \wedge d(F^*g_k) + (F^*f_k) d(d(F^*g_k)) \\ &= \sum_k d(F^*f_k) \wedge d(F^*g_k), \end{aligned}$$

concluimos así que $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$. ■

2.2.2. Integración de 1-formas

Con los conceptos de formas diferenciables establecidos, podemos pasar a describir la integración de contorno para superficies de Riemann.

Definición 2.2.20. Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una 1-forma diferenciable, decimos que una curva $c : [0, 1] \rightarrow X$ es **continuamente diferenciable por partes en X** si existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ y cartas (U_k, z_k) , con $z_k = x_k + iy_k$ para $k = 1, \dots, n$ tal que $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ y las funciones

$$x_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R},$$

tienen derivadas continuas de primer orden.

Observemos que con respecto a cada carta de (U_k, z_k) podemos escribir la 1-forma ω como $\omega = f_k dx_k + g_k dy_k$, donde las funciones f_k y g_k son diferenciables.

Definición 2.2.21. Bajo la notación de arriba, se define **la integral de ω a lo largo de la curva c** como sigue

$$\int_c \omega = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(c(t)) \frac{dx_k}{dt}(c(t)) + g_k(c(t)) \frac{dy_k}{dt}(c(t)) \right) dt.$$

A continuación presentamos un resultado que se obtiene directamente de la definición anterior.

Teorema 2.2.22. Sea X una superficie de Riemann, $c : [0, 1] \rightarrow X$ una curva continuamente diferenciable por partes y $F \in \mathcal{E}(X)$, se tiene entonces lo siguiente

$$\int_c dF = F(c(1)) - F(c(0)).$$

Demostración.

Por la definición 2.2.20, existen $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ y cartas (U_k, z_k) que satisfacen las condiciones de dicha definición, tenemos así que en U_k ,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_c dF &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(c(t)) \frac{dx_k}{dt}(c(t)) + \frac{\partial F}{\partial y_k}(c(t)) \frac{dy_k}{dt}(c(t)) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{d}{dt} F(c(t)) \right) dt = \sum_{k=1}^n (F(c(t_k)) - F(c(t_{k-1}))) \\ &= F(c(t_n)) - F(c(t_0)) = F(c(1)) - F(c(0)), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se debe a que se tiene una suma telescópica. ■

Definición 2.2.23. Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, decimos que una función $F \in \mathcal{E}(X)$ es una **primitiva de ω** si $dF = \omega$.

De manera local, por ejemplo en discos de radio finito centrados en el origen, es posible garantizar la existencia de primitivas para 1-formas cerradas, sin embargo, de manera global sus primitivas existen como funciones multivaluadas, esto es lo que establecemos en el siguiente teorema, cuya demostración se puede consultar en la página 71 de [3]. Nosotros estamos interesados en las consecuencias de este teorema.

Teorema 2.2.24. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una 1-forma diferencial cerrada, existe una función cubriente $p : \hat{X} \rightarrow X$ con $\hat{X}$ conexa, y una primitiva $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ de la 1-forma diferencial $p^*\omega$.*

Corolario 2.2.25. *Si X es una superficie de Riemann, $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferencial cerrada entonces existe una primitiva $f \in \mathcal{E}^{(1)}(\tilde{X})$ de $\pi^*\omega$.*

Demostración.

Sea $p : \hat{X} \rightarrow X$ la función cubriente dada por el teorema anterior y $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ una primitiva de $p^*\omega$, es decir, $dF = p^*\omega$. Como π es el cubriente universal existe una función que preserva fibras $\tau : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$. Definamos $f := \tau^*F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ y observemos que $\tau^*p^* = (p \circ \tau)^* = \pi^*$, luego tenemos lo siguiente

$$df = d(\tau^*F) = \tau^*(dF) = \tau^*(p^*\omega) = \pi^*\omega,$$

concluimos con lo anterior que f es una primitiva de $\pi^*\omega$. ■

Corolario 2.2.26. *En una superficie de Riemann simplemente conexa X toda 1-forma diferenciable cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tienen una primitiva $F \in \mathcal{E}(X)$.*

Demostración.

Como por hipótesis X es simplemente conexa, la función identidad $id : X \rightarrow X$ es su cubriente universal, así se tiene el resultado por el corolario anterior. ■

Con las herramientas anteriores ya estamos en posición de integrar 1-formas diferenciables cerradas, el siguiente teorema nos indica como hacerlo.

Teorema 2.2.27. *Sea X una superficie de Riemann y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal. Supongamos que $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ es una 1-forma diferencial cerrada y $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ es una primitiva de $p^*\omega$. Si $c : [0, 1] \rightarrow X$ es una curva continuamente diferenciable por partes y $\hat{c} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ es un levantamiento de c , tenemos entonces que*

$$\int_c \omega = F(\hat{c}(1)) - F(\hat{c}(0)).$$

Demostración.

Sea $v : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ una curva continuamente diferenciable por partes y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$.

Tomemos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ una partición de $[0, 1]$ y cartas (U_k, z_k) con $z_k = x_k + iy_k$ y tal que v es diferenciable en U_k . Sabemos que en cada U_k tenemos $\omega = f_k dx_k + g_k dy_k$, y además

$$p^* \omega = p^*(f_k dx_k + g_k dy_k) = p^* f_k d(p^* x_k) + p^* g_k d(p^* y_k),$$

luego

$$\begin{aligned} \int_v p^* \omega &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(p^* f_k(v(t)) \frac{d(p^* x_k)}{dt}(v(t)) + p^* g_k(v(t)) \frac{d(p^* y_k)}{dt}(v(t)) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(p \circ v(t)) \frac{dx_k(p \circ v(t))}{dt} + g_k(p \circ v(t)) \frac{dy_k(p \circ v(t))}{dt} \right) dt = \int_{p \circ v} \omega. \end{aligned}$$

En nuestro caso tenemos $c = p \circ \hat{c}$ y entonces

$$\int_{\hat{c}} p^* \omega = \int_{p \circ \hat{c}} \omega = \int_c \omega.$$

Por otro lado, como F es primitiva de $p^* \omega$, $dF = p^* \omega$, con lo cual se sigue

$$\int_{\hat{c}} p^* \omega = \int_{\hat{c}} dF = F(\hat{c}(1)) - F(\hat{c}(0)). \quad \blacksquare$$

Corolario 2.2.28. *Bajo las condiciones del teorema anterior, las siguientes afirmaciones son válidas.*

1. *La integral es independiente de la elección de la primitiva de $p^* \omega$.*
2. *La integral es independiente del levantamiento de la curva c .*

Demostración.

1. Sea G otra primitiva de $p^* \omega$, como tanto F y G son primitivas existe una constante a tal que $G = F + a$, con lo cual

$$\int_{\hat{c}} p^* \omega = \int_{\hat{c}} dG = G(\hat{c}(1)) - G(\hat{c}(0)) = F(\hat{c}(1)) - F(\hat{c}(0)) = \int_{\hat{c}} dF.$$

2. Sean u y v dos levantamientos de la curva c , como la cubriente universal $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es de Galois (teorema 1.4.7) existe una transformación deck $\sigma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \sigma = p$ y $v = \sigma \circ u$, tenemos así que $p^* \omega = (p \circ \sigma)^* \omega = \sigma^*(p^* \omega) = \sigma^*(dF) = d(\sigma^* F)$, por lo tanto $\sigma^* F$ es también primitiva de $p^* \omega$ y entonces $\sigma^* F - F = cte$. Luego

$$\begin{aligned} F(v(1)) - F(v(0)) &= F(\sigma \circ u(1)) - F(\sigma \circ u(0)) = F \circ \sigma(u(1)) - F \circ \sigma(u(0)) = \\ &= \sigma^* F(u(1)) - \sigma^* F(u(0)) = F(u(1)) - F(u(0)). \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor de la integral es el mismo para ambos levantamientos. ■

2.2.3. Períodos y sumandos de automorfía

El teorema 2.2.24 y sus consecuencias nos dan herramientas para encontrar primitivas de formas diferenciables cerradas, en esta sección se presentan unas integrales especiales, que reciben el nombre de períodos, además del concepto de sumandos de automorfía, estas dos nociones nos permitirán dar una condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de una primitiva para formas cerradas.

Teorema 2.2.29. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferencial cerrada.*

a) *Si $a, b \in X$ son dos puntos y $u, v : [0, 1] \rightarrow X$ son dos curvas homotópicas (definición 1.3.8) de un punto a hacia otro punto b , se tiene*

$$\int_u \omega = \int_v \omega.$$

b) *Si $u, v : [0, 1] \rightarrow X$ son dos curvas cerradas que son homotópicas libres (definición 1.3.9) entonces*

$$\int_u \omega = \int_v \omega.$$

Demostración.

a) Por el teorema 1.3.11 los respectivos levantamientos de las curvas tienen los mismos puntos finales, el resultado se sigue del teorema 2.2.27.

b) Supongamos que las curvas u y v tienen como punto inicial y final a x_0 y x_1 , respectivamente, consideremos una curva w que une x_0 con x_1 tal que u es homotópica a $w \cdot v \cdot w^{-1}$, luego por el inciso anterior se tiene

$$\int_u \omega = \int_{w \cdot v \cdot w^{-1}} \omega = \int_w \omega + \int_v \omega - \int_w \omega = \int_v \omega.$$

■

El resultado anterior justifica que la siguiente definición tenga sentido.

Definición 2.2.30. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}(X)$ una forma diferencial cerrada, definimos los **períodos de ω** como sigue*

$$a_\sigma := \int_\sigma \omega, \quad \sigma \in \pi_1(X),$$

eligiendo una curva representante de la clase de homotopía de σ e integrando a lo largo de esa curva.

Observe que si $\sigma, \tau \in \pi_1(X)$ entonces $a_{\sigma\tau} = a_\sigma + a_\tau$, con lo cual tenemos un morfismo de grupos, el cual recibe un nombre.

Definición 2.2.31. *Bajo la notación de arriba el homomorfismo de grupos $\pi_1(X) \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ es llamado **morfismo de períodos asociado a la forma diferencial cerrada ω** .*

Ejemplo 2.2.32. Sea $X = \mathbb{C}^\times$, por el ejemplo 1.4.8, sabemos que $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}$, notemos que un generador de $\pi_1(\mathbb{C}^\times)$ está representado por la curva $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ dada por $u(t) = e^{2\pi ti}$. Sea $\omega := \frac{dz}{z}$ con z la coordenada canónica, tenemos entonces que

$$\int_u \omega = \int_u \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

por lo tanto el morfismo de períodos de ω es

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [u^n] \simeq n &\longmapsto 2\pi ni \end{aligned}.$$

Por otro lado, dada una superficie de Riemann X , $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal y sea $G := \text{Deck}(\tilde{X}/X)$. Si $\sigma \in G$ y $f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entonces definamos $\sigma f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\sigma f := f \circ \sigma^{-1}$.

Con propiedades de operaciones con funciones se puede verificar fácilmente las siguientes propiedades:

1. $\sigma(f + g) = \sigma f + \sigma g$,
2. $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$,
3. $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$.

En lo siguiente G denotará $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ a menos que se indique otra cosa.

Definición 2.2.33. Una función $f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada **aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constante**, si existen constantes $a_\sigma \in \mathbb{C}$, $\sigma \in G$, tales que

$$f - \sigma f = a_\sigma, \quad \text{para cada } \sigma \in G.$$

Las constantes a_σ , que están únicamente determinadas por f , son llamadas los **sumandos de automorfía de f** .

Observación 2.2.34. Se tiene un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \text{Deck}(\tilde{X}/X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \sigma &\longmapsto a_\sigma \end{aligned}.$$

En efecto, para cualesquiera $\sigma, \tau \in G$, como $f - \tau f = a_\tau$ entonces

$$a_{\sigma\tau} = f - \sigma\tau f = (f - \sigma f) + (\sigma f - \sigma\tau f) = a_\sigma + a_\tau.$$

El siguiente resultado relaciona los períodos con los sumandos de automorfía y nos encamina al resultado sobre primitivas que queremos. La demostración se puede consultar en la página 74 de [3].

Teorema 2.2.35. Sea X una superficie de Riemann y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal.

- a) Si $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ es una forma diferenciable cerrada y $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ es una primitiva de $p^*\omega$, entonces F es aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constante. Más aún, estos sumandos son, con respecto al isomorfismo $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \simeq \pi_1(X)$, exactamente los períodos de ω .
- b) Recíprocamente, supongamos que $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ es una función aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constante, existe precisamente una forma diferenciable cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tal que $dF = p^*\omega$.

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos los siguientes resultados.

Proposición 2.2.36. Sean Γ un retículo en $\mathbb{C}$ y $X := T_\Gamma$ el toro asociado. Dado un morfismo de grupos

$$a : \pi_1(X) \longrightarrow (\mathbb{C}, +),$$

existe una única 1-forma cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ cuyo morfismo de períodos es igual al morfismo a .

Demostración.

Sean $\Gamma = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2$ y $p : \mathbb{C} \longrightarrow X$ la proyección natural, la cual es además el cubriente universal del toro. Sea $G = \text{Deck}(X)$ el grupo de transformaciones Deck, por el inciso 2 del ejemplo 1.4.8, sabemos que G actúa por traslaciones.

La idea de la prueba será la siguiente: buscar una función $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que sea aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constantes, luego por b) del teorema 2.2.35, se tendría que existe exactamente una forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tal que $dF = p^*\omega$. Por otro lado, dado $\beta_i = p \circ \gamma_i$, $i = 1, 2$, donde $\gamma_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ está dada por $t \mapsto t\alpha_i$, como se vio en el ejemplo 1.4.8, se sabe que $\pi(X) = \langle \beta_1, \beta_2 : \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1 \rangle$, por lo tanto, basta probar que la función F que buscaremos satisface que $F(\alpha_i) - F(0) = a(\beta_i)$, y en consecuencia,

$$\int_{\beta_i} \omega = \int_{p \circ \gamma_i} \omega = \int_{\gamma} p^*\omega = \int_{\gamma} dF = F(\gamma_i(1)) - F(\gamma_i(0)) = F(\alpha_i) - F(0) = a(\beta_i).$$

Demos entonces una función F que cumpla lo anterior.

Primero, sean $\alpha_1 = (a_1, b_1)$, $\alpha_2 = (a_2, b_2)$, $\beta_1 = (c_1, d_1)$ y $\beta_2 = (c_2, d_2)$. Observemos que como α_1 y α_2 son $\mathbb{R}$ linealmente independientes entonces $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Consideremos ahora $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{D} ((b_2c_1 - b_1c_2)x + (a_1c_2 - a_2c_1)y, (b_2d_1 - b_1d_2)x + (a_1d_2 - a_2d_1)y).$$

Afirmamos que la función anterior es $\mathbb{R}$ -lineal.

En efecto, sean $(x, y), (z, w) \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$, haciendo $A := b_2c_1 - b_1c_2$, $B := a_1c_2 - a_2c_1$, $C := b_2d_1 - b_1d_2$, $E := a_1d_2 - a_2d_1$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
F((x, y), r(z, w)) &= F((x + rz, y + rw)) \\
&= \frac{1}{D}(A(x + rz) + B(y + rw), C(x + rz) + E(y + rw)) \\
&= \frac{1}{D}(\underline{Ax} + rAz + \underline{By} + rBw, \underline{Cx} + rCz + \underline{Ey} + rEw) \\
&= \frac{1}{D}[(Ax + By, Cx + Ey) + r(Az + Bw, Cz + Ew)] \\
&= \frac{1}{D}(Ax + By, Cx + Ey) + r\frac{1}{D}(Az + Bw, Cz + Ew) \\
&= F((x, y)) + rF((z, w)).
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que $F(0) = 0$. Ahora veamos que $F(\alpha_1) = \beta_1$.

$$\begin{aligned}
F(\alpha_1) &= F((a_1, b_1)) \\
&= \frac{1}{D}(a_1(b_2c_1 - b_1c_2) + b_1(a_1c_2 - a_2c_1), a_1(b_2d_1 - b_1d_2) + b_1(a_1d_2 - a_2d_1)) \\
&= \frac{1}{D}(a_1b_2c_1 - \underline{a_1b_1c_2} + \underline{a_1b_1c_2} - a_2b_1c_1, a_1b_2d_1 - \underline{a_1b_1d_2} + \underline{a_1b_1d_2} - a_2b_1d_1) \\
&= \frac{1}{D}((a_1b_2 - a_2b_1)c_1, (a_1b_2 - a_2b_1)d_1) = (c_1, d_1) = \beta_1.
\end{aligned}$$

De igual manera se tiene que $F(\alpha_2) = \beta_2$.

$$\begin{aligned}
F(\alpha_2) &= F((a_1, b_1)) \\
&= \frac{1}{D}(a_2(b_2c_1 - b_1c_2) + b_2(a_1c_2 - a_2c_1), a_2(b_2d_1 - b_1d_2) + b_2(a_1d_2 - a_2d_1)) \\
&= \frac{1}{D}(\underline{a_2b_2c_1} - a_2b_1c_2 + a_1b_2c_2 - \underline{a_2b_2c_1}, \underline{a_2b_2d_1} - a_2b_1d_2 + a_1b_2d_2 - \underline{a_2b_2d_1}) \\
&= \frac{1}{D}((a_1b_2 - a_2b_1)c_2, (a_1b_2 - a_2b_1)d_2) = (c_2, d_2) = \beta_2.
\end{aligned}$$

Finalmente, afirmamos que F es aditivamente automorfa con sumandos de automorfía constante, en efecto, sea $\sigma \in G$, tenemos entonces que σ es una traslación $(x, y) \mapsto (x + \zeta_1, y + \zeta_2)$ donde $(\zeta_1, \zeta_2) \in \Gamma$. Luego $F - \sigma F = F - F \circ \sigma^{-1} = -(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}$.

Con todo lo anterior, tenemos que F satisface lo deseado,

$$\int_{\beta_i} \omega = F(\alpha_i) - F(0) = a(\beta_i).$$

■

Teorema 2.2.37. *Sea X una superficie de Riemann. Una 1-forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tiene primitiva $f \in \mathcal{E}(X)$ si y solo si todos los períodos de ω son cero.*

Demostración.

Supongamos que $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ es una 1-forma cerrada que tiene una primitiva $f \in \mathcal{E}(X)$, es decir, $df = \omega$. Además, recordemos que una superficie de Riemann es, en particular, simplemente conexa, lo cual implica que su primer grupo fundamental es cero. Luego, por definición de los períodos de ω , se tiene lo siguiente

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma} df = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = 0, \quad \sigma \in \pi_1(X),$$

lo anterior es para toda $\sigma \in \pi_1(X)$.

Recíprocamente, supongamos que todos los períodos de ω son cero. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal, por el corolario 2.2.25 existe una primitiva $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ de $p^*\omega$. Luego, por el inciso a) del teorema 2.2.35, los sumandos de automorfía de F son los períodos de ω , es decir, son cero. Lo anterior implica que existe una función $f \in \mathcal{E}(X)$ tal que $F = p^*f$.

Tenemos así que f es una primitiva de ω , en efecto,

$$p^*\omega = dF = d(p^*f) = p^*(df),$$

como p^* es inyectiva, se sigue que $\omega = df$. ■

Corolario 2.2.38. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$ dos formas holomorfas que definen el mismo morfismo de períodos $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$, se tiene entonces que $\omega_1 = \omega_2$.*

Demostración.

Consideremos la forma $\omega := \omega_1 - \omega_2$, dado que ω_1 y ω_2 definen el mismo morfismo de períodos por el teorema 2.2.35 ω tiene una primitiva $f \in \mathcal{O}(X)$. Como X es compacta, por el corolario 1.2.6, f es constante y por lo tanto $\omega = df = 0$. ■

2.2.4. Integración de 2-formas

En esta sección damos por entendido que el lector conoce la teoría de integración de 2-formas en el plano complejo o en variedades diferenciables, así como también el concepto de particiones de la unidad, en caso contrario, puede consultar [3], [10] o [19]. No hay que olvidar que una superficie de Riemann es, en particular, una variedad diferenciable así que las definiciones y resultados aquí presentados pueden resultar conocidos.

Definición 2.2.39. *Sea X una superficie de Riemann. El **sporte de una forma** ω en X es el conjunto cerrado*

$$\text{supp}(\omega) := \overline{\{a \in X : \omega(a) \neq 0\}},$$

*análogamente, se define el **sporte de una función** $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.*

Definición 2.2.40. *Sean X una superficie de Riemann, $\varphi : U \rightarrow V$ una carta de X y $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ una forma cuyo soporte es compacto y contenido en U , como φ es biholomorfa, $(\varphi^{-1})^*\omega$ es una forma con soporte compacto en $V \subset \mathbb{C}$, se define entonces*

$$\iint_X \omega := \iint_U \omega := \iint_V (\varphi^{-1})^*\omega.$$

Proposición 2.2.41. *La definición anterior es independiente de la elección de cartas.*

Demostración.

Sea $\varphi : U_1 \longrightarrow V_1$ otra carta con $\text{supp}(\omega) \subset U_1$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $U = U_1$, en caso contrario consideramos la intersección (ya que esta contiene al soporte de ω).

Consideremos $\psi := \varphi_1 \circ \varphi^{-1} : V \longrightarrow V_1$, la cual es una función biholomorfa. Notemos que

$$\psi^*((\varphi_1^{-1})^*\omega) = (\varphi_1^{-1} \circ \psi)^*\omega = (\varphi^{-1})^*\omega,$$

con lo cual

$$\iint_V \psi^*((\varphi_1^{-1})^*\omega) = \iint_V (\varphi^{-1})^*\omega. \quad (1)$$

Por otro lado, de la definición anterior se tiene que

$$\iint_V \psi^*((\varphi_1^{-1})^*\omega) = \iint_{V_1} (\varphi_1^{-1})^*\omega, \quad (2)$$

luego, de (1) y (2) tenemos lo siguiente

$$\iint_V (\varphi^{-1})^*\omega = \iint_{V_1} (\varphi_1^{-1})^*\omega.$$

Por lo tanto $\iint_X \omega$ está definida independientemente de la carta elegida. ■

La definición anterior es bajo la hipótesis de que el soporte de la 2-forma está contenido en una carta, para poder eliminar dicha condición debemos usar particiones de la unidad.

Definición 2.2.42. *Sea X una variedad diferenciable y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X . Una **partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$** es una familia de funciones diferenciables $(g_i)_{i \in I}$, $g_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

- I) $0 \leq g_i \leq 1$, para todo $i \in I$.
- II) $\text{supp}(g_i) \subset U_i$, para todo $i \in I$.
- III) La familia de soportes $\text{supp}(g_i)$, $i \in I$, es localmente finita, es decir, cada punto $a \in X$ tiene una vecindad V tal que $V \cap \text{supp}(g_i) \neq \emptyset$, para un número finito $i \in I$.
- IV) $\sum_{i \in I} g_i = 1$.

Notación 2.2.43. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, si A es un subconjunto compacto relativo a B , escribimos $A \Subset B$, recordemos que esto significa que la cerradura de A (denotada por $\overline{A}$) es compacta y está

contenida en B .

Definición 2.2.44. Sean X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ arbitraria con soporte compacto, consideremos una cantidad finita de cartas $\varphi_k : U_k \rightarrow V_k$, con $k = 1, \dots, n$ tal que $\text{supp}(\omega) \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$. Tomemos una partición de la unidad subordinada a la cubierta formada por las cartas U_k y denotémosla por $(f_k)_k$ con $f_k \in \mathcal{E}(X)$. Tenemos así que $f_k \omega$ es una forma diferencial con $\text{supp}(f_k) \Subset U$ y $\omega = \sum_{k=1}^n f_k \omega$. Se define entonces

$$\iint_X \omega := \sum_{k=1}^n \iint_X f_k \omega.$$

Cuando se habla de integración de formas, dos resultados imprescindibles son el teorema de Stokes y el teorema del residuo, los cuales enunciamos a continuación; sus demostraciones se pueden consultar en la bibliografía mencionada al inicio de la sección.

Teorema 2.2.45. Sea U un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y $A \subset U$ un conjunto compacto con frontera suave ∂A , para cada forma diferenciable $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ se tiene lo siguiente

$$\iint_A d\omega = \int_{\partial A} \omega,$$

donde la frontera está orientada de tal manera que el vector normal de A que apunta hacia afuera y el vector tangente a ∂A en este orden, determina una base orientada del plano.

Definición 2.2.46. Sean Y un abierto de una superficie de Riemann X , un punto a en Y y ω una 1-forma holomorfa en $Y \setminus \{a\}$. Sea (U, z) una carta coordenada de a tal que $U \subset Y$ y $z(a) = 0$. Con lo anterior, en $U \setminus \{a\}$, podemos escribir $\omega = f dz$, donde $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$. Sea

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

la expansión en serie de Laurent de f al rededor de a . Se define al coeficiente c_{-1} como el **residuo de ω en a** y es denotado por $c_{-1} = \text{Res}_a(\omega)$.

Observe que la definición anterior se hace eligiendo una carta de a , sin embargo, es posible probar que la definición es independiente de esta elección, dicha prueba se puede consultar en la página 63 de [3].

Teorema 2.2.47. Sea X una superficie de Riemann compacta y $a_1, \dots, a_n$ puntos distintos en X . Sea $X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, para cada 1-forma holomorfa $\omega \in \Omega(X')$ se tiene

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k}(\omega) = 0.$$

Ahora veremos algunos resultados sobre integración de 2-formas en superficies de Riemann, los cuales nos serán de utilidad.

Teorema 2.2.48. *Sea X una superficie de Riemann, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferenciable con soporte compacto, se tiene entonces*

$$\iint_X d\omega = 0.$$

Demostración.

Mediante la multiplicación por una partición de la unidad, podemos escribir $\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k$ donde cada ω_k tiene soporte compacto, el cual está completamente contenida en una carta (por la definición 2.2.42). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $X = \mathbb{C}$, con esto basta probar el caso en que $\omega_k = \omega$ para algún k . Eligiendo $R > 0$ tan grande que $\text{supp}(\omega) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, se obtiene que

$$\iint_{\mathbb{C}} d\omega = \iint_{|z| \leq R} d\omega = \iint_{|z|=R} \omega = \iint_{|z|=R} 0 = 0.$$

■

2.3. Grupo de DeRham

El objetivo de esta sección es presentar el grupo de DeRham, el cual será primordial para la demostración del teorema del mapeo de Riemann. Presentaremos además una forma de calcular este grupo a través de la cohomología de Čech.

2.3.1. Grupo de cohomología de Čech

En esta sección X representará un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre X , a menos que se indique lo contrario.

Definición 2.3.1. *Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X , para $q \geq 0$ se define el **grupo de q -cocadenas de $\mathcal{F}$ respecto a $\mathcal{U}$** mediante*

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(j_0, \dots, j_q) \in J^{q+1}} \mathcal{F}(U_{j_0 \dots j_q}).$$

Observemos que al ser $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ un producto directo de grupos abelianos, es también un grupo abeliano.

Definición 2.3.2. *Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ cubierta abierta de X se define el **operador cofrontera***

$$\delta_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

del siguiente modo, para $f := (f_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in J^{q+1}}$ se tiene

$$\delta_q(f)_{i_0, \dots, i_{q+1}} := \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}}|_{U_{i_0, \dots, i_q}}.$$

Ejemplo 2.3.3. Para entender un poco la notación del operador cofrontera veamos los siguientes ejemplos.

1. Cuando $q = 0$,

$$\begin{aligned} \delta_0 : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (f_j)_{j \in J} &\longmapsto (f_j|_{U_{ij}} - f_i|_{U_{ij}})_{i, j \in J^2} \end{aligned}$$

2. Cuando $q = 1$,

$$\begin{aligned} \delta_1 : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (g_{ij})_{i, j \in J^2} &\longmapsto (g_{jk}|_{U_{ijk}} - g_{ik}|_{U_{ijk}} + g_{ij}|_{U_{ijk}})_{i, j, k \in J^3} \end{aligned}$$

3. Cuando $q = 2$,

$$\begin{aligned} \delta_2 : C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^3(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (h_{ijk})_{i, j, k \in J^3} &\longmapsto (h_{jkl}|_{U_{ijkl}} - h_{ikl}|_{U_{ijkl}} + h_{ijl}|_{U_{ijkl}} - h_{ijk}|_{U_{ijkl}})_{i, j, k, l \in J^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.4. Sea $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ el círculo unitario, tomemos la cubierta $\mathcal{U} = \{U, V\}$ tal como se ve en la figura 2.2, observemos que $U \cap V = W_1 \cup W_2$.

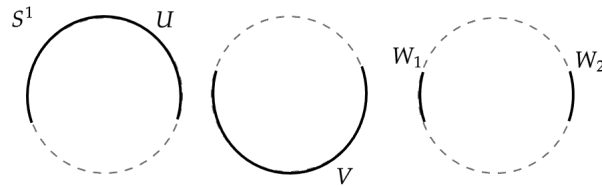


Figura 2.2: Cubierta abierta para S^1 .

Consideremos $\mathcal{F} := \mathbb{Z}_X$ tenemos que los grupos de cocadenas son los siguientes:

- $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z}_X(U) \times \mathbb{Z}_X(V) = \mathbb{Z}^2$.
- $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z}_X(U \cap V) = \mathbb{Z}_X(W_1 \cup W_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$.
- $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q \geq 2$.

Por otro lado se tienen los siguientes operadores cofronteras,

- Para $q = 0$,

$$\begin{aligned} \delta_0 : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (m, n) &\longmapsto (n - m, n - m) \end{aligned}.$$

■ Para $q = 1$,

$$\begin{aligned} \delta_1 : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow 0 \\ (m, n) &\longmapsto 0 \end{aligned}.$$

Observemos que como $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q \geq 2$ entonces $\delta_q = 0$ para $q \geq 1$.

Proposición 2.3.5. *El operador δ_q de la definición anterior es un morfismo de grupos.*

Demostración.

Sean $f = (f_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in J}$ y $g = (g_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in J} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, usando el hecho de que la suma de las familias es coordenada a coordenada y que la función restricción es un morfismo, en $U_{i_0, \dots, i_q}$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta_q(f + g)_{i_0, \dots, i_{q+1}} &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \left[(f + g)_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1} \in J} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \left(f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}} + g_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}} + \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j g_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}} \\ &= \delta_q(f)_{i_0, \dots, i_{q+1}} + \delta_q(g)_{i_0, \dots, i_{q+1}}, \end{aligned}$$

con lo anterior podemos concluir que $\delta_q(f + g) = \delta_q(f) + \delta_q(g)$. ■

Definición 2.3.6. Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X , para $q \geq 0$ se define el **grupo de q -cociclos** como

$$Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \ker(\delta_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})),$$

y para $q \geq 1$ se define el **grupo de q -cofronteras** mediante

$$B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{im}(\delta_{q-1} : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})).$$

Observación 2.3.7. Por definición una 1-cocadena $(f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es un 1-cociclo si y solo si

$$f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0, \quad (1)$$

para todo $i, j, k \in I$, considerando la igualdad en U_{ijk} .

De lo anterior se tienen las siguientes consecuencias:

- a) Haciendo $i = j = k$ en la ecuación (1), se tiene $f_{ii} = 0$, para todo $i \in I$.
- b) Haciendo $i = k$ en (1) usando a), tenemos $f_{ij} = -f_{ji}$, para todo $i, j \in I$.

Proposición 2.3.8. *La siguiente sucesión*

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_1} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_2} \dots$$

es un complejo de cadena, es decir $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$, para todo q .

Demostración.

Sea $f := (f_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in I} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$,

$$\begin{aligned} \delta_{q+1}(\delta_q f)_{i_0, \dots, i_{q+2}} &= \sum_{r=1}^{q+2} (-1)^r \delta_q(f)_{i_0, \dots, \hat{i}_r, \dots, i_{q+2}} \\ &= \sum_{k < r} (-1)^r (-1)^k f_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, \hat{i}_r, \dots, i_{q+2}} + \sum_{r < k} (-1)^r (-1)^{k-1} f_{i_0, \dots, \hat{i}_r, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{q+2}} = 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que, generalizando el inciso b) de la observación 2.3.7, se tiene lo siguiente

$$f_{i_0, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots, i_q} = -f_{i_0, \dots, i_{n+1}, i_n, \dots, i_q}.$$

■

La proposición anterior nos dice que

$$\text{im}(\delta_{q-1}) \subset \ker(\delta_q), \quad \text{para cada } q \geq 1.$$

Definición 2.3.9. Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X , se define el q -ésimo grupo de cohomología de Čech mediante el cociente

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Ejemplo 2.3.10. Calculemos los grupos de cohomología de Čech para la gavilla $\mathbb{Z}_{S^1}$ sobre el círculo unitario S^1 , es decir, $\mathcal{F} := \mathbb{Z}_{S^1}$ y $\mathcal{U} = \{U, V\}$ la cubierta usada en el ejemplo 2.3.4.

■ $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

En este caso tenemos que $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$, por lo tanto, $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Para calcular este último grupo, analicemos el morfismo δ_0 , el cual está dado como sigue

$$\begin{aligned} \delta_0 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ (m, n) &\longrightarrow (n - m, n - m) \end{aligned},$$

por lo tanto $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(\delta_0) = \{(n, n) \in \mathbb{Z}^2 : n \in \mathbb{Z}\}$ entonces $\ker(\delta_0) = \mathbb{Z}$.

Concluimos así que $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z}$.

■ $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Tenemos que $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{im}(\delta_0) = \{(n, n) \in \mathbb{Z}^2 : n \in \mathbb{Z}\} =: \Delta$, y $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(\delta_1) = C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Luego, $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \Delta$ para calcular más explícitamente este último cociente, usaremos el 1er teorema de isomorfismo, observe que mediante el diagrama de la figura 2.3 vemos que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \Delta \simeq \mathbb{Z}$, es decir, $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}$.

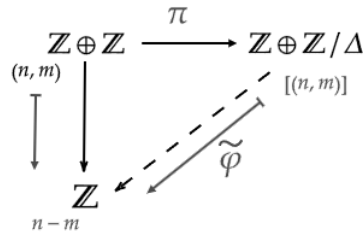


Figura 2.3: Isomorfismo entre $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \Delta$ y $\mathbb{Z}$.

Finalmente, para $q \geq 2$ observemos que $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ y como $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es subgrupo de $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y este a su vez es subgrupo de $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se sigue que $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Concluimos lo siguiente,

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \geq 2 \end{cases}.$$

Proposición 2.3.11. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in I}$ una cubierta abierta de X y $\mathcal{F}$ una gavilla, tenemos lo siguiente:

- a) Si $(f_j)_{j \in J} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ entonces existe $f \in \mathcal{F}(X)$ tal que $f|_{U_j} = f_j$ para toda $j \in J$.
- b) $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Demostración.

- a) Sea $f = (f_j)_{j \in J} \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ representando un elemento de $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, así en U_{ij} tenemos lo siguiente,

$$0 = \delta_0(f)_{i,j} = f_j - f_i,$$

por lo que $f_j = f_i$. Por los axiomas de gavillas se sigue que existe $f \in \mathcal{F}(X)$ tal que $f|_{U_j} = f_i$.

- b) Como no hay 0-cofronteras, H^0 es igual al grupo de 0-cociclos $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, para obtener el resultado veamos que $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es isomorfo a $\mathcal{F}(X)$. Definamos la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}(X) &\longrightarrow Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ f &\longmapsto (f_i)_{i \in J} \end{aligned},$$

donde $f_i = f|_{U_i}$, note que la función está bien definida ya que $\delta_0((f_i)_{i \in J})_{i,j} = f_j - f_i = f - f = 0$ por lo tanto $(f_i)_{i \in J} \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Por otro lado, como la suma de familias se realiza coordenada a coordenada es fácil ver que esta función es morfismo de grupos, en efecto, si $f, g \in \mathcal{F}(X)$, $\varphi(f + g) = (h_i)_{i \in J}$ donde $h_i = (f + g)|_{U_i}$, como $(f + g)|_{U_i} = f|_{U_i} + g|_{U_i}$ se tiene que $\varphi(f + g) = f|_{U_i} + g|_{U_i} = \varphi(f) + \varphi(g)$ por lo tanto φ es un morfismo de grupos.

Más aún, el inciso a) nos dice que este morfismo es sobreyectivo. Veamos ahora que también es inyectivo y con ello un isomorfismo. Sean $f, g \in \mathcal{F}(X)$ tales que $\varphi(f) = \varphi(g)$, esto es $(f_i)_{i \in J} = (g_i)_{i \in J}$ donde $f_i = f|_{U_i}$ y $g_i = g|_{U_i}$ se sigue entonces que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para todo i , esto implica que $f = g$.

Con todo lo anterior se concluye que $\mathcal{F}(X)$ es isomorfo a $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. ■

Para lo siguiente necesitaremos los conceptos de *conjunto dirigido*, *familias dirigidas de morfismos* y *límite directo*, en caso de que el lector no este familiarizado con estos, puede consultarlo en [15] al igual que algunas definiciones y propiedades básicas.

Definición 2.3.12. Sean $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ y $\mathcal{V} = \{V_k\}_{k \in K}$ cubiertas abiertas del espacio X , $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X . Se dice que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento de $\mathcal{U}$** si existe $\lambda : K \rightarrow J$ tal que $V_k \subset U_{\lambda(k)}$ para todo $k \in K$.

Si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ lo denotamos por $\mathcal{V} < \mathcal{U}$.

Observación 2.3.13. Es claro que $\mathcal{U} < \mathcal{U}$ y que si $\mathcal{W} < \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ entonces $\mathcal{W} < \mathcal{U}$.

Definición 2.3.14. Sean $\mathcal{V} = \{V_k\}_{k \in K}$, $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ cartas abiertas tales que $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ respecto a $\lambda : K \rightarrow J$. Se define

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\ f = (f_{j_0, \dots, j_q})_{j_0, \dots, j_q \in J} &\longmapsto g = (g_{k_0, \dots, k_q})_{k_0, \dots, k_q \in K} \end{aligned},$$

donde

$$g_{k_0, \dots, k_q} := f_{\lambda(k_0), \dots, \lambda(k_q)}|_{V_{k_0, \dots, k_q}}.$$

Proposición 2.3.15. La función de la definición anterior es un morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama, es decir, $\delta_q \circ \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \circ \delta_q$.

Demostración.

La prueba de que $\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ es un morfismo de grupos es similar a como se hizo en la proposición 2.3.5 y solo veremos que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}} & C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\
 \delta_q \downarrow & & \downarrow \delta_q \\
 C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}} & C^{q+1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})
 \end{array}$$

Figura 2.4: Morfismo entre grupos de cocadenas.

Sea $f := (f_{j_0, \dots, j_q})_{j_0, \dots, j_q \in J} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(\delta(f)_q)_{k_0, \dots, k_{q+1}} &= \delta_q(f)_{\lambda(k_0), \dots, \lambda(k_{q+1})} |_{k_0, \dots, k_{q+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{\lambda(k_0), \dots, \widehat{\lambda(k_j)}, \dots, \lambda(k_{q+1})} |_{k_0, \dots, k_{q+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \left(f_{\lambda(k_0), \dots, \widehat{\lambda(k_j)}, \dots, \lambda(k_{q+1})} \right) |_{k_0, \dots, k_{q+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f)_{k_0, \dots, \widehat{k_j}, \dots, k_{q+1}} = (\delta_q(\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f)))_{k_0, \dots, k_{q+1}}.
 \end{aligned}$$

Proposición 2.3.16. La función $\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ de la definición 2.3.14 induce un morfismo de grupos,

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

el cual será denotado de igual manera como $\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$.

Demostración.

Para simplificar la notación, hagamos $\lambda := \lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$; dado que el diagrama de la figura 2.4 es conmutativo se tiene que

$$\lambda(Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \text{ y } \lambda(B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}). \quad (1)$$

Consideremos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc}
 Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{U}}} & H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\
 \lambda \downarrow & & \swarrow \exists! \lambda \\
 Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & & \\
 \pi_{\mathcal{V}} \downarrow & \nearrow & \\
 H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & &
 \end{array}$$

Por la propiedad universal del cociente y (1) tenemos que existe un único morfismo

$$\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

tal que $\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}([f]) = [\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f)]$. ■

Observación 2.3.17. *Con todo lo anterior tenemos que el conjunto*

$$\{\lambda_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) : \mathcal{V} < \mathcal{U}\}$$

es un sistema dirigido de grupos abelianos.

Definición 2.3.18. *Para un espacio topológico X , una gavilla $\mathcal{F}$ sobre X y para $q \geq 0$ se define su q -ésimo grupo de cohomología de Čech como sigue*

$$H_X^1(\mathcal{F}) := H^q(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

donde este último símbolo representa el límite directo.

2.3.2. Sucesiones exactas

En esta sección veremos como las sucesiones de gavillas nos permiten calcular la cohomología de Čech, así como también el grupo de DeRham.

Definición 2.3.19. *Sea X una superficie de Riemann, definimos el **grupo de DeRham** como*

$$H_{DR}^1(X) := \mathcal{L}(X) / \text{im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X)).$$

El siguiente resultado será presentado sin demostración, ya que usa argumentos de sucesiones y convergencia de funciones complejas, lo cual no es relevante para el resto del trabajo, nos interesa el enunciado para poder aplicarlo más adelante, su demostración se puede consultar en la sección 13 de [3] o en el capítulo 4 de [13].

Teorema 2.3.20. *(Lema de Dolbeault). Sea $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, con $0 < R \leq \infty$, para cada $g \in \mathcal{E}(X)$ existe $f \in \mathcal{E}(X)$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Definición 2.3.21. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas sobre un espacio topológico X y sea*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

*una sucesión de morfismos de gavillas. Se dice que dicha sucesión es **exacta** si para cada $x \in X$ se tiene que la siguiente sucesión*

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x,$$

es exacta, es decir, $\ker(\psi_x) = \text{im}(\phi_x)$.

Sea X un espacio topológico, $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre X , por la proposición 2.3.11 recordemos que $H_X^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ y $H_X^0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$, entonces α induce un morfismo $\alpha^0 : H_X^0(\mathcal{F}) \longrightarrow H_X^0(\mathcal{G})$, donde $\alpha^0 = \alpha_X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$.

Intuitivamente, ahora nos gustaría exhibir un morfismo $\alpha^1 : H_X^1(\mathcal{F}) \longrightarrow H_X^1(\mathcal{G})$, los resultados siguientes están dedicados a dar la existencia de este morfismo, y más aún, veremos que existe un *morfismo conexión* que toma elementos de $H_X^0(\mathcal{F})$ y devuelve elementos de $H_X^1(\mathcal{F})$.

Comencemos considerando los morfismos

$$\varphi_{U_j} : \mathcal{F}(U_j) \longrightarrow \mathcal{G}(U_j), \quad \varphi_{U_{ij}} : \mathcal{F}(U_{ij}) \longrightarrow \mathcal{G}(U_{ij}),$$

es posible definir lo siguiente

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{U}} : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \\ (f_{ij})_{i,j \in J} &\longmapsto (\varphi_{U_{ij}}(f_{ij}))_{i,j \in J} \end{aligned}.$$

Proposición 2.3.22. Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X entonces se tiene lo siguiente

$$a) \quad \varphi_{\mathcal{U}}(Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

$$b) \quad \varphi_{\mathcal{U}}(B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

Demostración.

a) Sea $(f_{ij})_{i,j \in J} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, sobre U_{ijk} se tiene que $0 = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}$ para todo $i, j, k \in J$.

Luego, en $\mathcal{G}(U_{ijk})$ se tiene

$$0 = \varphi_{U_{jk}}(f_{jk}) - \varphi_{U_{ik}}(f_{ik}) + \varphi_{U_{ij}}(f_{ij}),$$

lo cual implica que $(\varphi_{U_{ij}}(f_{ij}))_{i,j \in J} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

b) Recordemos que el operador cofrontera δ_q está asociado a alguna gavilla, para evitar complicar la notación, en esta demostración denotaremos como δ_q al operador cofrontera asociado a ambas gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$.

Sea $f = (f_{ij})_{i,j \in J} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que $f = \delta_0(g)$ para algún $g \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, con $g = (g_i)_{i \in J}$ con $g_i \in \mathcal{F}(U_j)$, tenemos entonces que $f_{ij} = g_j - g_i$, donde la igualdad es en $\mathcal{F}(U_{ij})$. Luego, en $\mathcal{G}(U_{ij})$, se tiene que $\varphi_{U_{ij}}(f_{ij}) = \varphi_{U_j}(g_j) - \varphi_{U_i}(g_i)$, esto último implica que $\varphi_{\mathcal{U}}(f) = \delta_0(\tilde{g})$ donde $\tilde{g} = (\varphi_{U_j}(g_j))_{j \in J} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

Con todo lo anterior se concluye que $\varphi_{\mathcal{U}}(B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. ■

La proposición anterior nos dice que la función $\varphi_{\mathcal{U}}$ envía cociclos en cociclos y cofronteras en cofronteras y por lo tanto induce un morfismo que, al igual que la función entre cocadenas definida arriba, denotaremos por $\varphi_{\mathcal{U}}$,

$$\varphi_{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

La colección de morfismos $\varphi_{\mathcal{U}}$, donde $\mathcal{U}$ varía sobre toda la colección de cubiertas abiertas de X , de esta manera, utilizando la propiedad universal del límite directo para la familia de morfismos entre los grupos de cohomología, se induce el morfismo que buscamos, $\alpha^1 : H_X^1(\mathcal{F}) \longrightarrow H_X^1(\mathcal{G})$, tal como se muestra en el diagrama de la figura 2.5.

$$\begin{array}{ccc}
 H_X^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad \exists! \alpha^1 \quad} & H_X^1(\mathcal{G}) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad \varphi_{\mathcal{U}} \quad} & H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \\
 \downarrow \rho_{\mathcal{U},V} & \searrow & \downarrow r_{\mathcal{U},V} \\
 H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad \phi_{\mathcal{V}} \quad} & H^1(\mathcal{V}, \mathcal{G})
 \end{array}$$

Figura 2.5: Morfismo entre $H_X^1(\mathcal{F})$ y $H_X^1(\mathcal{G})$.

Pasemos ahora a presentar el *morfismo conexión* del que se hablo anteriormente, para ello, consideremos $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ gavillas sobre un espacio topológico X , las cuales, supondremos que forman la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

Por lo hecho anteriormente sabemos que se induce la siguiente sucesión de morfismos

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_X^0(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha^0} & H_X^0(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta^0} & H_X^0(\mathcal{H}) \\
 & & H_X^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha^1} & H_X^1(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta^1} & H_X^1(\mathcal{H})
 \end{array}$$

Siguiendo la notación de lo hecho anteriormente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.3.23. *Existe un morfismo (llamado **morfismo conexión**)*

$$\delta^* : H_X^0(\mathcal{H}) \longrightarrow H_X^1(\mathcal{F}).$$

Demostración.

Sea $h \in H_X^0(\mathcal{H}) = \mathcal{H}(X)$ (proposición 2.3.11), como $\mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es exacta, se sigue que $\mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$ es también exacta, lo cual implica que β_x es un epimorfismo, por lo tanto $h_x = \beta_x(g_x)$ para algún $g_x \in \mathcal{G}_x$ entonces existe un abierto $U_x \subset X$, con $x \in U_x$ tal que $g^{(x)} \in \mathcal{G}(U_x)$ y $h|_{U_x} = \beta_{U_x}(g^{(x)})$.

Con lo anterior, consideremos la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ de X y definamos

$$g := (g^{(x)})_{x \in X} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

Por otro lado, tenemos las siguientes igualdades en $\mathcal{H}(U_x \cap U_y)$,

$$\begin{aligned} \beta_{U_{xy}}(g^{(x)} - g^{(y)}) &= \beta_{U_{xy}}(g^{(x)}) - \beta_{U_{xy}}(g^{(y)}) \\ &= \beta_{U_x}(g^{(x)}) - \beta_{U_y}(g^{(y)}) = (h|_{U_x})|_{U_{xy}} - (h|_{U_y})|_{U_{xy}} \\ &= h|_{U_{xy}} - h|_{U_{xy}} = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica,

$$g^{(x)} - g^{(y)}|_{U_{xy}} \in \ker \beta_{U_{xy}} = \text{im}(\alpha_{U_{xy}} : \mathcal{F}(U_{xy}) \longrightarrow \mathcal{G}(U_{xy})).$$

Por lo que existe $f_{xy} \in \mathcal{F}(U_{xy})$ con $g^{(x)} - g^{(y)} = \alpha_{U_{xy}}(f_{xy})$, con lo cual definimos

$$f := (f_{xy})_{x,y \in X} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Lo siguiente que haremos es probar que $f \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, para ello, recordemos que $\delta(f)_{x,y,z} = f_{yz} - f_{xz} + f_{xy}$, como $\alpha_{U_{x,y,z}}$ es monomorfismo, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_{U_{xyz}}(\delta(f)_{xyz}) &= \alpha_{U_{yz}}(f_{yz}) - \alpha_{U_{xz}}(f_{xz}) + \alpha_{U_{xy}}(f_{xy}) \\ &= g^{(y)} - g^{(z)} - (g^{(x)} - g^{(z)}) + (g^{(x)} - g^{(y)}) = 0, \end{aligned}$$

entonces $\delta(f)_{xyz} = 0$ para todo x, y, z . Por lo tanto $\delta(f) = 0$, lo cual prueba que $f \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Tenemos así que f define un elemento en $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, cuya imagen bajo $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H_X^1(\mathcal{F})$ denotaremos por $[f]$. Con todo lo anterior, tenemos el morfismo conexión como sigue

$$\begin{aligned} \delta^* : H_X^0(\mathcal{H}) &\longrightarrow H_X^1(\mathcal{F}) \\ h &\longmapsto [f] \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Conociendo el morfismo conexión es posible obtener más resultados sobre secuencias de gavillas y los grupos de cohomología, uno que en particular nos interesa es el siguiente, la demostración es algo rutinaria, sin embargo larga, para el lector interesado en ella, puede consultar [3] o [13].

Teorema 2.3.24. *Sea X un espacio topológico y*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

una sucesión exacta de gavillas. Tenemos entonces que la siguiente sucesión de grupos es exacta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_X^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H_X^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H_X^0(\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} \\ &\xrightarrow{\delta^*} H_X^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H_X^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H_X^1(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Corolario 2.3.25. Sea $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de gavillas sobre X . Si $H_X^1(\mathcal{G}) = 0$ entonces

$$H_X^1(\mathcal{F}) = \mathcal{H}(X) / \beta^0(\mathcal{G}(X)).$$

Demostración.

Dado que $H_X^1(\mathcal{G}) = 0$, por el teorema anterior podemos considerar la siguiente sucesión exacta

$$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta^0} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta^*} H_X^1(\mathcal{F}) \longrightarrow 0,$$

por la sobreyectividad de δ^* tenemos que

$$H_X^1(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}(X) / \ker(\delta^*) = \mathcal{H}(X) / \beta(\mathcal{G}(X)). \quad \blacksquare$$

Nuestro objetivo ahora es usar las sucesiones de gavillas para dar una forma de calcular el grupo de DeRham a través de la cohomología de Čech, esto lo obtendremos a través del siguiente teorema.

Notación 2.3.26. Sea U un abierto de una superficie de Riemann, en lo que resta $\mathcal{E}^{1,0}(U)$ y $\mathcal{E}^{0,1}(U)$ representarán a las gavillas de formas $\omega = fdz$ y $\eta = gd\bar{z}$, respectivamente, donde f y g son funciones diferenciables en U .

Teorema 2.3.27. (de DeRham) Si X es una superficie de Riemann entonces

$$H_X^1(\mathbb{C}_X) \simeq H_{DR}^1(X).$$

Demostración.

Consideremos $Z := \ker(d : \mathcal{E}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}^{(2)})$, observe que esta es la gavilla de 1-formas cerradas.

Tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} Z \xrightarrow{d} 0,$$

es exacta, en efecto, en la sección 2.2.2 se mencionó que, localmente, toda forma cerrada es exacta, esto implica que la función $d : \mathcal{E} \longrightarrow Z$ es un epimorfismo de gavillas.

Por lo tanto, aplicando el corolario 2.3.25 tenemos que

$$H_X^1(\mathbb{C}_X) = Z(X) / \text{im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} Z(X)) = \mathcal{L}(X) / \text{im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X)) = H_{DR}^1(X). \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

Problema de Dirichlet y teoría Runge

Sean X una superficie de Riemann, Y un abierto de X y $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde ∂Y representa la frontera de Y . Encontrar una función continua que se extienda a la cerradura de Y y siga siendo real-valuada es lo que se conoce como el problema de Dirichlet, en esta sección veremos como se puede dar solución a dicho problema en superficies de Riemann.

3.1. Formas armónicas

En la sección 2.2 se recordó el concepto de formas en superficies de Riemann, retomaremos esto para presentar las formas armónicas. Comenzaremos por repasar como se dota un producto interno al espacio $\mathcal{E}^{(1)}(X)$, donde X es una superficie de Riemann; para ello sea

$$\begin{aligned} * : \mathcal{E}^{(1)}(X) &\longrightarrow \mathcal{E}^{(1)}(X) \\ \omega &\longmapsto i(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{aligned},$$

donde ω se escribe como $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$.

Proposición 3.1.1. *La función anterior es un $\mathbb{R}$ -isomorfismo lineal. Además, si $c \in \mathbb{C}$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ entonces $*(c\omega) = \bar{c}(*\omega)$.*

Demostración.

La demostración de que la función dada es morfismo sobreyectivo es rutinaria y se obtiene mediante cálculos directos. Para ver que $*$ es inyectiva basta usar el hecho de que el espacio $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ se descompone como suma

directa de $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$.

Para lo segundo, expresando ω como $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ se tiene lo siguiente

$$*(c\omega) = i(\overline{c\omega_1} - \overline{c\omega_2}) = \bar{c}i(\overline{\omega_1} - \overline{\omega_2}) = \bar{c}(*\omega).$$

Por otro lado, considere

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{E}^{(1)}(X) \times \mathcal{E}^{(1)}(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \iint_X \omega_1 \wedge *\omega_2. \end{aligned}$$

Proposición 3.1.2. *La función anterior tiene las siguientes propiedades:*

- 1.- *Es lineal en la primer coordenada y semi lineal en la segunda, esto es, si $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces*

$$\langle \omega_1, c(\omega_2 + \omega_3) \rangle = \bar{c}(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle + \langle \omega_1, \omega_3 \rangle).$$

- 2.- *$\langle \omega_2, \omega_1 \rangle = \overline{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle}$.*

- 3.- *$\langle \cdot, \cdot \rangle$ es positivo definido.*

Demostración.

- 1.- Para ver que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal en la primer coordenada basta usar el hecho de que la operación $\wedge$ es lineal.

Para la segunda coordenada, observe que si $c \in \mathbb{C}$ entonces $*(c\omega) = \bar{c}(*\omega)$, con esto se obtiene que

$$\langle \omega_1, c(\omega_2 + \omega_3) \rangle = \bar{c}(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle + \langle \omega_1, \omega_3 \rangle).$$

- 2.- Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$, suponga que $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$ y $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$ son sus representaciones en la carta (U, z) . Por un lado tenemos que

$$\langle \omega_2, \omega_1 \rangle = \iint_X i f_2 dz \wedge \bar{f}_1 d\bar{z} - \iint_X i g_2 d\bar{z} \wedge \bar{g}_1 dz,$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \overline{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle} &= \overline{\iint_X \omega_1 \wedge (i(\bar{f}_2 d\bar{z} - \bar{g}_2 dz))} = -i \iint_X \bar{f}_1 d\bar{z} \wedge f_2 dz + i \iint_X \bar{g}_1 dz \wedge g_2 d\bar{z} \\ &= i \iint_X f_2 dz \wedge \bar{f}_1 d\bar{z} - i \iint_X g_2 d\bar{z} \wedge \bar{g}_1 dz = \langle \omega_2, \omega_1 \rangle. \end{aligned}$$

- 3.- Sea $\omega = fdz + gd\bar{z}$ respecto a una carta (U, z) donde $z = x + iy$. Primero observemos que $*\omega = i(\bar{f}d\bar{z} - \bar{g}dz)$, usando la linealidad de la operación $\wedge$ y el hecho de que $dz \wedge d\bar{z} = 2idz \wedge dy$, se obtiene lo siguiente

$$\omega \wedge *\omega = i(|f|^2 + |g|^2)dz \wedge d\bar{z} = i(|f|^2 + |g|^2) \left(\frac{2}{i} dx \wedge dy \right) = 2(|f|^2 + |g|^2)dx \wedge dy.$$

Finalmente observemos $\langle \omega, \omega \rangle \geq 0$ y $\langle \omega, \omega \rangle = 0$ si y solo si $f = 0 = g$, es decir, si y solo si $\omega = 0$. ■

Con lo anterior se ha dado a $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ la estructura de espacio vectorial con producto interno.

A continuación, presentaremos algunas propiedades que relacionan el morfismo $*$ y las funciones d , d' y d'' , dadas en 2.2.12.

Proposición 3.1.3. *Sean X una superficie de Riemann compacta, $f \in \mathcal{E}(X)$, $\omega \in \Omega(X)$ y $\eta \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, tenemos lo siguiente:*

- 1.- $*d'f = id''\bar{f}$, $*d''f = -id'\bar{f}$.
- 2.- $d(*df) = 2id'd''\bar{f}$.
- 3.- $\omega \wedge *d'f = -id(\bar{f}\omega)$, $\bar{\omega} \wedge d''f = -id(\bar{f}\bar{\omega})$.
- 4.- $*(\eta) = -\eta$, además, si $\eta \in \mathcal{L}(X)$ (notación 2.2.14) entonces $df \wedge *(\eta) = -d(f\eta)$.

Demostración.

- 1.- Para la primera igualdad,

$$*d'f = * \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = i \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = id''\bar{f}.$$

De manera similar se puede probar que $*d''f = -id'\bar{f}$.

- 2.- Recordando que $df = d'f + d''f$ y que las funciones d y $*$ son lineales tenemos lo siguiente

$$d(*df) = d(*d'f + *d''f) = d(*d'f) + d(*d''f).$$

Usando el inciso 1 de esta proposición y los incisos 1, 2 y 4 de la proposición 2.2.15 se sigue que

$$\begin{aligned} d(*df) &= d(id''\bar{f}) + d(-id'\bar{f}) = id(d''\bar{f}) - id(d'\bar{f}) \\ &= i(d'd''\bar{f} + d''d''\bar{f}) - i(d'd'\bar{f} + d''d'\bar{f}) \\ &= i(d'd''\bar{f} - d''d'\bar{f}) = 2id'd''\bar{f}. \end{aligned}$$

- 3.- Dado que $\omega \in \Omega(X)$, por la definición 2.2.6 tenemos que $\omega = gdz$ con g una función holomorfa, recordando

que $dz \wedge dz = 0$ se tiene

$$i\omega \wedge d''\bar{f} = i \left(g dz \wedge \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz + \omega \wedge d''\bar{f} \right) = i(\omega \wedge d'\bar{f} + \omega \wedge d''\bar{f}) = i(\omega \wedge (d'\bar{f} + d''\bar{f})) = i\omega \wedge d\bar{f}. \quad (1)$$

Por otro lado

$$d\omega = d'\omega + d''\omega = d'g \wedge dz + d''g \wedge dz = 0, \quad (2)$$

luego, usando la propiedad 1 de esta proposición y posteriormente (1) y (2), podemos concluir lo siguiente,

$$\omega \wedge *d'f = \omega \wedge id''\bar{f} = i\omega \wedge d\bar{f} = i\omega \wedge d\bar{f} - i\bar{f}d\omega = -i(d\bar{f} \wedge \omega + \bar{f}d\omega) = -id(\bar{f}\omega).$$

De manera similar se puede probar la otra propiedad.

- 4.- La primera parte se obtiene expresando la 1-forma η en una carta local, tal como se hizo en la proposición 3.1.2 y haciendo directamente los cálculos. Para lo segundo, como $\eta \in \mathcal{L}(X)$ se tiene que $d\eta = 0$, utilizando esto, junto con la primera parte de este inciso se tiene lo siguiente

$$df \wedge *(*\eta) = df \wedge (-\eta) = -df \wedge \eta - f d\eta = -(df \wedge \eta + f d\eta) = -d(f\eta).$$

■

Por otro lado, recordemos que una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, localmente, se expresa como $\omega = \sum_j f_j dg_j$, con f_j y g_j funciones diferenciables, se puede considerar entonces $\bar{\omega} = \sum_j \bar{f}_j d\bar{g}_j$, de esta manera, si ω es una 1-forma holomorfa, se dice que $\bar{\omega}$ es una 1-forma **antiholomorfa** en X .

Notación 3.1.4. Al espacio vectorial real de 1-formas antiholomorfas en X se le denotará por $\bar{\Omega}(X)$.

Presentamos ahora lo que son las formas armónicas en una superficie de Riemann, más adelante veremos que el espacio vectorial formado por estas tiene relación con muchos de los elementos que hemos visto previamente, tales como los operadores de la definición 2.2.12, el operador $*$ y, más importante aún, el grupo de DeRham. En lo que sigue X representa una superficie de Riemann, a menos que se indique lo contrario.

Definición 3.1.5. Una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ es llamada **armónica** si

$$d\omega = 0 = d(*\omega).$$

Una función diferenciable f , definida en un abierto de X , es llamada **armónica** si $d'd''f = 0$.

Observe que si λ es un número real, ω_1 y ω_2 son 1-formas armónicas entonces, por la linealidad de las funciones d y $*$ se sigue que la 1-forma $\lambda\omega_1 + \omega_2$ es armónica, esto nos dice que el conjunto de 1-formas armónicas forman

un espacio vectorial real.

Notación 3.1.6. *Al espacio vectorial de todas las 1-formas armónicas en X se le denotará por $Harm^1(X)$.*

Directamente de la definición se puede obtener lo siguiente.

Teorema 3.1.7. *Sea X una superficie de Riemann, si ω es una 1-forma armónica y f es una función armónica entonces se tiene lo siguiente:*

- I) ω es cerrada.
- II) $d'\omega = d''\omega = 0$.
- III) $\bar{f}$ es armónica.
- IV) df es armónica.
- V) ω es armónica si y solo si $\omega = \omega_1 + \omega_2$, donde $\omega_1 \in \Omega(X)$ y $\omega_2 \in \bar{\Omega}(X)$.

Demostración.

- I) Esto es directo de la definición de 1-forma armónica, recuerde que una 1-forma es cerrada si $d\omega = 0$.
- II) Dado que ω es armónica se tiene que $0 = d\omega = d'\omega + d''\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ con lo cual se sigue que $d'\omega = 0 = d''\omega$.
- III) Como f es armónica, se tiene que $d'd''f = 0$, luego

$$d'd''\bar{f} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{z} \partial z} dz \wedge d\bar{z} = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}} dz \wedge d\bar{z} = \overline{d'd''f} = 0,$$

por lo tanto $\bar{f}$ es armónica.

- IV) Por el inciso 1 de la proposición 2.2.15, tenemos que $d(df) = 0$.

Por otro lado, del inciso 2 de la proposición 3.1.3 se tiene que $d(*df) = 2id'd''\bar{f} = 0$, donde la última igualdad se sigue del inciso III de este teorema.

- V) Supongamos que ω es armónica, por el teorema 3.1.7, sabemos que $d'\omega = 0 = d''\omega$, más aún, tenemos que $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, es decir, $\omega_1 = f dz$ y $\omega_2 = g d\bar{z}$, con f y g funciones diferenciables. Primero, para probar que $\omega_2 \in \bar{\Omega}(X)$ debemos verificar que $\bar{g} dz \in \Omega(X)$, con este objetivo, observemos que $d'\omega_1 = 0 = d''\omega_2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= d'\omega = d'\omega_1 + d'\omega_2 = d''\omega_2 \\ 0 &= d''\omega = d''\omega_1 + d''\omega_2 = d''\omega_1. \end{aligned}$$

Como $d'\omega_2 = 0$, se sigue que $d'g = 0$, es decir $\bar{g}$ es una función holomorfa, de esta manera obtenemos que $\omega_2 \in \bar{\Omega}(X)$. De manera similar, podemos probar que $d''f = 0$, con lo cual f es holomorfa y así $\omega_1 \in \Omega(X)$.

Recíprocamente, supongamos que $\omega = \omega_1 + \omega_2$ tal como en el enunciado entonces $\omega_1 = pdz$ y $\omega_2 = qd\bar{z}$ con p y q funciones holomorfas. Luego, observe que $d''\bar{\omega}_1 = 0 = d'\bar{\omega}_2$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d(*\omega) &= d*(\omega_1 + \omega_2) = d(i(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)) = i(d\bar{\omega}_1 - d\bar{\omega}_2) \\ &= i(d'\bar{\omega}_1 + d''\bar{\omega}_1 - d'\bar{\omega}_2 - d''\bar{\omega}_2) = i(d'\bar{\omega}_1 - d''\bar{\omega}_2), \end{aligned}$$

usando lo anterior y la representación local obtenemos,

$$d(*\omega) = id'(\bar{p}d\bar{z}) - id''(qd\bar{z}) = i\left(\frac{\partial p}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0,$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que p es holomorfa.

Finalmente dado que p y $\bar{q}$ son holomorfas, por el inciso 5 del teorema 2.2.15 se tiene que $d\omega = d(pdz + \bar{q}d\bar{z}) = 0$.

Con lo anterior se concluye que, en efecto, $\omega \in Harm^1(X)$. ■

Este último teorema garantiza que $Harm^1(X) = \Omega(X) + \bar{\Omega}(X)$, sin embargo, como $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ es suma directa de $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ y además $\Omega(X) \subset \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$, $\bar{\Omega}(X) \subset \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, se puede establecer el siguiente resultado.

Corolario 3.1.8.

$$Harm^1(X) = \Omega(X) \oplus \bar{\Omega}(X).$$

A primera vista, las definiciones de función y 1-forma armónica parecieran no guardar relación, sin embargo, el siguiente teorema nos muestra lo contrario.

Teorema 3.1.9. *Sea X una superficie de Riemann, ω es armónica si y solo si dado cualquier punto $a \in X$ existe una vecindad abierta U del punto a y una función armónica f en U tal que $\omega = df$.*

Demostración.

Supongamos que ω es una 1-forma armónica, por el teorema 3.1.7, sabemos que ω es cerrada entonces, localmente, $\omega = df$ con f una función diferenciable. Por el inciso 2 de la proposición 3.1.3, se obtiene que $0 = d*\omega = 2id'd''\bar{f}$ con lo cual $\bar{f}$ es armónica y en consecuencia f también lo es.

Recíprocamente, supongamos que $\omega = df$ con f armónica, tenemos así que $d\omega = d^2f = 0$ y $d*\omega = 2id'd''f = 0$.

■

Definición 3.1.10. Si ω es una 1-forma diferenciable, diremos que es **real**, si $\omega = \bar{\omega}$, la **parte real de** ω , está definida como $Re(\omega) = \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega})$.

Teorema 3.1.11. Sea X una superficie de Riemann, toda 1-forma real armónica $\omega \in Harm^1(X)$ es la parte real de exactamente una 1-forma holomorfa $\sigma \in \Omega(X)$.

Demostración.

Para la existencia, sea $\omega = \sigma_1 + \bar{\sigma}_2 \in \Omega(X) \oplus \bar{\Omega}(X)$, dado que ω es una 1-forma real entonces $\sigma_1 + \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_1 + \sigma_2$, luego $\sigma_1 - \sigma_2 = \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2$ y como $\sigma_1 - \sigma_2 \in \Omega(X)$, $\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 \in \bar{\Omega}(X)$ y $\Omega(X) \cap \bar{\Omega}(X) = 0$, se sigue que $\sigma_1 = \sigma_2$. Por lo tanto $\omega = \sigma_1 + \bar{\sigma}_1 = Re(2\sigma_1)$.

Para la unicidad, supongamos que $\omega = Re(\sigma)$ y $\omega = Re(\sigma')$ con σ y σ' 1-formas holomorfas, tenemos así que $0 = Re(\sigma - \sigma')$. Observemos que $\sigma - \sigma'$ es una 1-forma armónica y por el teorema 3.1.9, localmente se tiene $\sigma - \sigma' = df$ con f una función armónica (en particular holomorfa), se sigue que $Re(df) = 0$ y esto implica que f tiene parte real constante. Así, de las ecuaciones de Cauchy Riemann, f es constante, con lo cual $\sigma - \sigma' = 0$, se concluye entonces que $\sigma = \sigma'$. ■

Corolario 3.1.12. Sea X una superficie de Riemann y $G \subset X$ un dominio simplemente conexo. Toda función armónica $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ es la parte real de una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(G)$.

La demostración del corolario 3.1.12 es consecuencia directa del teorema 3.1.11.

Seguiremos usando la proposición 3.1.3 para los siguientes resultados, los cuales dan descomposiciones en sumas directas de algunos espacios.

Teorema 3.1.13. Para X una superficie de Riemann compacta, se tienen lo siguiente:

- a) Los espacios $d'\mathcal{E}(X)$, $d''\mathcal{E}(X)$, $\Omega(X)$ y $\bar{\Omega}(X)$ son subespacios ortogonales a pares de $(\mathcal{E}^{(1)}(X), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
- b) $d\mathcal{E}(X)$ y $*d\mathcal{E}(X)$ son subespacios ortogonales de $\mathcal{E}^{(1)}(X)$.
- c) $d\mathcal{E}(X) \oplus *d\mathcal{E}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X)$.
- d) $\mathcal{E}^{(0,1)}(X) = d''\mathcal{E}(X) \oplus \bar{\Omega}(X)$.

Demostración.

- a) Sean $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, observe que $*\omega_2 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ entonces $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \iint_X \omega_1 \wedge *\omega_2 = 0$.
Por lo tanto los espacios $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ son ortogonales, y en consecuencia sus subespacios $\Omega(X)$ y $\bar{\Omega}(X)$ también lo son.

Con lo anterior, resta probar que $d'\mathcal{E}(X)$ es ortogonal a $\Omega(X)$ y que $d''\mathcal{E}(X)$ es ortogonal a $\omega \in \Omega(X)$. Para ello, tomemos $f \in \mathcal{E}(X)$ y $\omega \in \Omega(X)$, por el inciso 3 de la proposición 3.1.3 y el teorema 2.2.48, se tiene que $\langle \omega, d'f \rangle = -i \iint_X d(\bar{f}\omega) = 0$. De manera similar, se obtiene que $\langle \bar{\omega}, d''f \rangle = 0$.

- b) Sean $f, g \in \mathcal{E}(X)$ nuevamente por el inciso 3 de la proposición 3.1.3 y el teorema 2.2.48, tenemos que $\langle df, *dg \rangle = - \iint_X d(fdg) = 0$.
- c) Sean $f, g \in \mathcal{E}(X)$, usando el inciso 1 de la proposición 3.1.3,

$$df + *dg = d'f + d''f + id''\bar{g} - id'\bar{g} = d'(f - i\bar{g}) + d''(f + i\bar{g}) \in d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X).$$

Recíprocamente, tomemos $\omega_1 + \omega_2 \in d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X)$, con lo cual $\omega_1 = d'f$ y $\omega_2 = d''g$ con $f, g \in \mathcal{E}(X)$, del inciso 1 de la proposición 3.1.3, $\omega_2 = -i * d'\bar{g}$. otemos además que $d'\mathcal{E}(X) \subset d\mathcal{E}(X)$ y $*d'\mathcal{E}(X) \subset *d\mathcal{E}(X)$, se sigue que $\omega_1 + \omega_2 = d'f - i * d'\bar{g} \in d\mathcal{E}(X) + *d\mathcal{E}(X)$. Con lo anterior, y dado que ya se demostró que los espacios involucrados son ortogonales, el resultado se sigue.

- d) Esta demostración será omitida, ya que requiere utilizar teoremas como los de Dolbeault y dualidad de Serre, además del *género* de una superficie de Riemann (véase la definición A.0.12 en el apéndice A), la demostración se puede consultar en [3]. ■

Continuando con la descomposición de algunos espacios, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.14. *Sea X una superficie de Riemann,*

- a) $\mathcal{E}^{(1)}(X) = *d\mathcal{E}(X) \oplus d\mathcal{E}(X) \oplus \text{Harm}^1(X)$.
- b) $\mathcal{L}(X) = d\mathcal{E}(X) \oplus \text{Harm}^1(X)$.

Demostración.

- a) Recordemos que tenemos la siguiente descomposición $\mathcal{E}^{(1)}(X) = \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, a su vez, por el inciso d) del teorema 3.1.13, $\mathcal{E}^{(0,1)}(X) = d''\mathcal{E}(X) \oplus \bar{\Omega}(X)$ y $\mathcal{E}^{(1,0)}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X)$, por lo tanto

$$\mathcal{E}^{(1)}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X) \oplus \bar{\Omega}(X).$$

Por el inciso c) del teorema 3.1.13 y el corolario 3.1.8 se concluye que

$$\mathcal{E}^{(1)}(X) = *d\mathcal{E}(X) \oplus d\mathcal{E}(X) \oplus \text{Harm}^1(X).$$

- b) Consideremos $df + \omega \in d\mathcal{E}(X) \oplus \text{Harm}^1(X)$, recordando que una 1-forma armónica es cerrada, podemos concluir que $d(df + \omega) = 0$, esto nos dice que $d\mathcal{E}(X) \oplus \text{Harm}^1(X) \subset \mathcal{L}(X)$.

Por otro lado, sean $g \in \mathcal{E}(X)$ y $\eta \in \mathcal{L}(X)$, por el inciso 1 de la proposición 3.1.3, se obtiene que $\langle \eta, *dg \rangle = \iint_X d(g\eta) = 0$, es decir, $\mathcal{L}(X)$ es ortogonal a $*d\mathcal{E}(X)$. Por el inciso a) de este resultado, podemos concluir que $\mathcal{L}(X) = d\mathcal{E}(X) \oplus \text{Harm}^1(X)$. ■

En la sección pasada presentamos el grupo de DeRham, ahora veremos que relación tiene con las 1-formas armónicas.

Teorema 3.1.15. *(de DeRham-Hodge) Si X es una superficie de Riemann compacta entonces*

$$H_X^1(\mathbb{C}) \simeq H_{DR}^1(X) \simeq \text{Harm}^1(X).$$

Demostración.

Por el teorema de DeRham (teorema 2.3.27), sabemos que $H_X^1(\mathbb{C}) \simeq H_{DR}^1(X)$ y por el inciso b) del teorema 3.1.14, podemos concluir lo siguiente

$$H_{DR}^1(X) = \mathcal{L}(X) / \text{im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X)) = d\mathcal{E}(X) \oplus \text{Harm}^1(X) / d\mathcal{E}(X) = \text{Harm}^1(X). \quad \blacksquare$$

3.2. Problema de Dirichlet en superficies de Riemann

Uno de los problemas más importantes en la teoría de funciones armónicas es el problema de Dirichlet, en su versión del plano complejo establece que si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{C}$ cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple, y $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua entonces existe una única función armónica $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual satisface que $u = f$ en $\partial\Omega$.

A continuación presentamos los resultados que se tienen de este problema con discos en $\mathbb{C}$ y otros sobre funciones armónicas, las demostraciones se pueden consultar en la sección 22 de [3] o en el capítulo 2 de [12].

Recordemos que $D_0(R)$ representa un disco centrado en el origen con radio $R > 0$, en este conjunto el problema de Dirichlet se resuelve a través de la integral de Poisson en su versión compleja.

Teorema 3.2.1. *Sea $f : \partial D_0(R) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y*

$$u(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} f(Re^{i\theta}) d\theta & , \quad |z| < R \\ f(z) & , \quad |z| = R \end{cases},$$

entonces u es continua en $\overline{D_0(R)}$ y armónica en $D_0(R)$.

Corolario 3.2.2. Si $U_n : D_0(R) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de funciones armónicas que convergen uniformemente en cada subconjunto compacto a una función $u : D_0(R) \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces u es también armónica.

Teorema 3.2.3. (de Harnack) Sea $M \in \mathbb{R}$ y $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq M$ una sucesión monótona creciente y acotada por M de funciones armónicas, $u_n : D_0(R) \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene que la sucesión converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $D_0(R)$ a una función armónica $u : D_0(R) \longrightarrow \mathbb{R}$.

En el teorema 1.2.3 vimos el principio del módulo máximo para funciones holomorfas en superficies de Riemann, el siguiente resultado es la versión para funciones armónicas.

Teorema 3.2.4. (Principio del módulo máximo para funciones armónicas) Si Y es un dominio de una superficie de Riemann X y $u : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica tal que alcanza su máximo en un punto $y_0 \in Y$ entonces u es constante.

Demostración.

Dado que u es armónica, por el teorema 3.1.11, $u = \operatorname{Re}(f)$ con f una función holomorfa en una vecindad, la cual, restringiendo de ser necesario, podemos suponer que es simplemente conexa. Por hipótesis, como $|e^f| = e^u$, la función e^f alcanza su módulo máximo en y_0 . Luego, por el principio del máximo de funciones holomorfas (teorema 1.2.3) se sigue que u es constante en una vecindad de y_0 , finalmente, por la conexidad, de Y , se sigue que u debe ser constante en todo Y . ■

Para estudiar el problema de Dirichlet en una superficie de Riemann, se consideran dominios relativamente compactos contenidos en una carta (U, z) , que además satisface que $z(D) \subset \mathbb{C}$ es biholomorfo a un disco.

Notación 3.2.5. Sea X una superficie de Riemann y $Y \subset X$ un conjunto abierto

1. Denotamos por $\mathbf{Reg}(Y)$ al conjunto de todos los subdominios $D \Subset Y$ (notación 2.2.43) tales que el problema de Dirichlet se puede resolver en D para valores en la frontera dados por $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. Para cualquier función continua $u : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ y $D \in \mathbf{Reg}(Y)$, sea $\mathbf{P}_D(\mathbf{u})$ la función continua en Y que coincide con u en $Y \setminus D$ y resuelve el problema de Dirichlet en $\bar{D}$ para valores en la frontera dados por $u|_{\partial D}$.
3. Denotaremos por $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ al espacio vectorial de todas las funciones continuas real-valuadas en Y .

Proposición 3.2.6. Sean $u, v \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$a) \ P_D(u + v) = P_D(u) + P_D(v).$$

b) $P_D(\lambda u) = \lambda P_D(u)$.

c) Si $u \leq v$ entonces $P_D(u) \leq P_D(v)$.

d) u es armónica si y solo si $P_D(u) = u$ para todo $D \in \text{Reg}(Y)$.

Demostración.

- a) Para demostrar este inciso recuerde que la solución al problema de Dirichlet es única. Sabemos que $P_D(u+v)$ es armónica en D y resuelve el problema de Dirichlet en $\bar{D}$ para los valores en la frontera dados por $(u+v)|_{\partial D}$. Por otro lado, tenemos que la suma $P_D(u) + P_D(v)$ es armónica en D y además $P_D(u)|_{\partial D} + P_D(v)|_{\partial D} = u|_{\partial D} + v|_{\partial D} = (u+v)|_{\partial D}$, esto implica que $P_D(u) + P_D(v)$ también es una solución al problema de Dirichlet, con lo cual se tiene que $P_D(u+v) = P_D(u) + P_D(v)$.
- b) Similar a como se hizo en el inciso a), por la unicidad de la solución al problema de Dirichlet, se puede concluir la igualdad $P_D(\lambda u) = \lambda P_D(u)$.
- c) Sean $\varphi_v := P_D(v)$ y $\varphi_u := P_D(u)$. Si tomamos un punto z en $Y \setminus D$ se tiene que $\varphi_v(z) = v(z)$ y $\varphi_u(z) = u(z)$, por lo tanto $\varphi_u(z) < \varphi_v(z)$.

Tomemos ahora un punto z en D y supongamos que $\varphi_v(z) < \varphi_u(z)$. Como φ_v y φ_u son armónicas en D , por el principio del módulo máximo de funciones armónicas (teorema 3.2.4) existen $z_0, w_0 \in \partial D$ tales que $\varphi_u(z_0) > \varphi_u(w_0)$ y $\varphi_v(w_0) > \varphi_v(z)$ para todo $w \in D$, en particular para el punto z . Más aún, como $z_0, w_0 \in \partial D$ tenemos que $\varphi_u(z_0) = u(z_0)$ y $\varphi_v(w_0) = v(w_0)$. Luego, $u(z_0) > \varphi_u(z)$ y $v(w_0) > \varphi_v(z)$, se sigue que

$$u(z_0) - v(w_0) > \varphi_u(z) - \varphi_v(z) > 0.$$

Observe que por ser w_0 máximo de v se tiene que $v(w_0) > v(z_0)$, esto junto con la desigualdad de arriba implican que $u(z_0) > v(z_0)$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $\varphi_v(z) > \varphi_u(z)$.

- d) Supongamos que u es armónica y sea $D \in \text{Reg}(Y)$, en particular tenemos que u es armónica en D y $u|_{\partial D} = u$, es decir, u resuelve el problema de Dirichlet en $\bar{D}$ para los valores en la frontera dados por $u|_{\partial D}$, esto implica que $P_D(u) = u$.

Recíprocamente, sea $D \in \text{Reg}(Y)$, tenemos entonces que $P_D(u)$ es armónica en D y dado que $P_D(u) = u$ se sigue que u es armónica en D . Tomando ahora $D_1 \in \text{Reg}(Y \setminus D)$, de igual manera tenemos que u es armónica en D_1 , siguiendo esto recursivamente, se tiene que u es armónica en todo Y . ■

Definición 3.2.7. Una función continua $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **subarmónica** si $P_D(u) \geq u$ para todo $D \in \text{Reg}(Y)$.

Ejemplo 3.2.8. Sean Y un abierto de $\mathbb{C}$, a un punto en ∂Y , $D_m(r)$ un disco centrado en un punto $m \in \mathbb{C}$ de radio $r > 0$ con $a \in \partial D_m(r)$ y $\overline{D} \cap Y = \emptyset$. Tomemos $c := \frac{a+m}{2}$ y definamos la función $\beta(z) = \log \frac{r}{2} - \log|z - c|$, notemos que esta función es armónica (esto se obtiene a través de las ecuaciones de Cauchy-Riemann) y por el inciso d) de la proposición 3.2.6 tenemos que $P_D(\beta) = \beta$, con $D \in \text{Reg}(Y)$, en particular, por la definición anterior tenemos que β es subarmónica.

Proposición 3.2.9. Si $u, v : Y \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones subarmónicas y $\lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces $u+v$, λu y $\sup(u, v)$ son subarmónicas en Y .

Demostración.

Por la proposición 3.2.6, tenemos que $P_D(u+v) = P_D(U) + P_D(V) \geq u+v$, por lo tanto $u+v$ es subarmónica. De igual manera tenemos que $P_D(\lambda u) \geq \lambda u$. Finalmente, observemos que $u \leq \sup(u, v)$ y $v \leq \sup(u, v)$, luego,

$$\begin{aligned} u &\leq P_D(u) \leq P_D(\sup(u, v)), \\ v &\leq P_D(v) \leq P_D(\sup(u, v)), \end{aligned}$$

donde las primeras desigualdades se tienen por el hecho de que u y v son subarmónicas, y las segundas por el inciso c) de la proposición 3.2.6. Por lo que $P_D(\sup(u, v))$ es una cota superior para u y v , lo cual implica que $\sup(u, v) \leq P_D(\sup(u, v))$, es decir, $\sup(u, v)$ es subarmónica. ■

Definición 3.2.10. Una función $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **localmente subarmónica** si u es subarmónica en una vecindad de cada punto de Y .

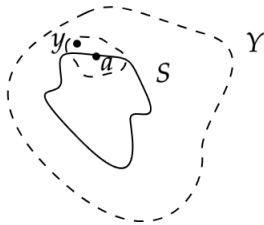
Teorema 3.2.11. (Principio del módulo máximo para funciones localmente subarmónicas) Sean Y un dominio de una superficie de Riemann X y $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente subarmónica. Si u alcanza su máximo en un punto $y_0 \in Y$ entonces es constante.

Demostración.

Sea $c := u(y_0)$ y $S := \{y \in Y : u(y) = c\}$, el objetivo será probar que $S = Y$, con esto tendríamos que u es constante en Y .

Procediendo por contradicción, supongamos que $S \neq Y$, entonces $S \not\subset Y$ o $Y \not\subset S$, sin embargo, por como se definió al conjunto S vemos que la primera opción da lugar a una contradicción, por lo tanto, supongamos que $Y \not\subset S$.

Observemos que el conjunto $S = u^{-1}(\{c\})$ es cerrado, ya que u es continua, con lo cual tenemos que $\overline{S} = S$, en particular $\overline{S} \subset Y$, esto implica que existe $a \in \partial S \cap Y$ y por la continuidad de u tenemos que $u(a) = c$.


 Figura 3.1: Conjunto S contenido en Y .

Por otro lado, como a es un punto en la frontera de S , en una vecindad del punto a existe un punto $y \in Y \setminus S$, véase la figura 3.1, esto implica que $u(y) < c$, o bien, $u(y) > c$, dado que c es el máximo, lo segundo no puede ocurrir, esto nos dice que en cada vecindad de a existe un punto y tal que $u(y) < c$. Luego, consideremos una vecindad D homeomorfa a un disco, en el cual sabemos se resuelve el problema de Dirichlet, que además contenga en su frontera al punto y , con esto tenemos que $D \in \text{Reg}(Y)$ y $u|_{\partial D}$ no es igual a c .

Por hipótesis podemos suponer que u es subarmónica en una vecindad de $\overline{D}$ y por la definición 3.2.10 tenemos que

$$v := P_D(u) \geq u. \quad (1)$$

Notemos que v es armónica en D , ya que resuelve el problema de Dirichlet, y $v|_{\partial D} = u|_{\partial D} \leq c$, luego, el principio del módulo máximo de funciones armónicas (teorema 3.2.4) v alcanza su máximo y este está en la frontera y como los valores de la frontera están acotados por c , se sigue que $v \leq c$ en $\overline{D}$.

Por (1) tenemos que $u(a) = c \leq v(a)$ y así v alcanza su máximo en a siendo este igual a la constante c , sin embargo, esto contradice la elección del conjunto D , por lo tanto $S = Y$. ■

Corolario 3.2.12. Si $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente subarmónica entonces u es subarmónica.

Demostración.

Consideremos $D \in \text{Reg}(Y)$, tenemos así que $P_D(u)$ es armónica en D , definamos $v := u - P_D(u)$ y veamos que es localmente subarmónica en D . En efecto, por hipótesis, la función u es localmente subarmónica en Y , en particular en D , por lo tanto basta probar que $P_D(u)$ también lo es. Para ver lo anterior, tomemos un punto y en D y V una vecindad de y contenida en D , observemos que $P_D(u)$ es armónica en V y así $P_D(P_D(u)) = P_D(u)$ en V , es decir, $P_D(u)$ es subarmónica en V y como $y \in D$ fue arbitrario, se sigue que $P_D(u)$ es localmente subarmónica.

Por otro lado, como $P_D(u)$ resuelve el problema de Dirichlet para los valores en la frontera dados por $u|_{\partial D}$, se sigue que $v|_{\partial D} = u|_{\partial D} - P_D(u)|_{\partial D} = 0$ y entonces el principio del módulo máximo para funciones subarmónicas

implica que $v \leq 0$ en D , por lo tanto $P_D(u) \geq u$. ■

Teorema 3.2.13. *Si $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es subarmónica y $D \in \text{Reg}(Y)$ entonces $P_D(u)$ también es subarmónica.*

Demostración.

Sea $v := P_B(u)$ y consideremos $D \in \text{Reg}(Y)$. Por la definición de las funciones $P_D(\cdot)$ y $P_B(\cdot)$, tenemos que $P_D(v) = v$ en $Y \setminus D$ y $v = P_B(u) = u$ en $Y \setminus B$, dado que u es subarmónica, sabemos que $v \geq u$ lo cual implica que $P_D(v) \geq P_D(u) \geq u = v$, luego, $v - P_D(v) \leq 0$ en $Y|_{B \cap D}$. Como v y $P_D(v)$ son subarmónicas en B y D , respectivamente, tenemos que $v - P_D(v)$ es subarmónica en $B \cap D$ entonces $v - P_D(v) \leq 0$ en $B \cap D$, por lo tanto $P_D(v) \leq v$, es decir, $P_D(u)$ es subarmónica. ■

Conociendo todo lo anterior, continuaremos el camino para resolver el problema de Dirichlet en superficies de Riemann, para ello usaremos el método del matemático alemán Oskar Perron, el cual consiste en encontrar la función subarmónica más grande con valores en la frontera menores que los valores buscados, probaremos que esta función coincide con la solución del problema de Dirichlet.

Usando el teorema de Harnack (teorema 3.2.3) y el principio del máximo para funciones armónicas (teorema 3.2.4) se puede probar el siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en [3].

Lema 3.2.14. (Perron) *Sea $M \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ un subconjunto no vacío de funciones subarmónicas en Y con las siguientes propiedades:*

1. *Si $u, v \in M$ entonces $\sup(u, v) \in M$.*
2. *Si $u \in M$ y $D \in \text{Reg}(Y)$ entonces $P_D(u) \in M$.*
3. *Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $u \leq K$ para todo $u \in M$.*

Se tiene entonces que, la función $u^ : Y \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u^*(x) := \sup\{u(x) : u \in M\}$ es armónica en Y .*

Definición 3.2.15. *Sea $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada y $K := \sup\{f(x) : x \in \partial Y\}$.*

Denotemos por $\mathcal{B}_f$ al conjunto de todas las funciones $u \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\bar{Y})$ con las siguientes propiedades

1. *$u|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es subarmónica.*
2. *$u|_{\partial Y} \leq f$, $u \leq K$.*

$\mathcal{B}_f$ es llamado **la clase de Perron de f** .

Teorema 3.2.16. *La función $u^* := \sup\{u : u \in \mathcal{B}_f\}$ satisface las condiciones del lema de Perron y por lo tanto es armónica en Y .*

Demostración.

Veamos que se satisfacen las 3 condiciones del lema 3.2.14:

1. Sean $u, v \in \mathcal{B}_f$, como $u \leq K$ y $v \leq K$ se sigue que $\sup(u, v) \leq K$, de igual manera, se tiene que $u|_{\partial Y} \leq f$ y $v|_{\partial Y} \leq f$ por lo tanto $\sup(u, v)|_{\partial Y} \leq f$. Finalmente, por la proposición 3.2.9 sabemos que $\sup(u, v)$ es una función subarmónica, por lo que $\sup(u, v) \in \mathcal{B}_f$.

2. Sea $u \in \mathcal{B}_f$ y $D \in \text{Reg}(Y)$, por la proposición 3.2.13 sabemos que $P_D(u)|_Y$ es subarmónica.

Por otro lado, dado que $u \in \mathcal{B}_f$ se tiene que $u|_{\partial Y} \leq f$ y $u \leq K$, además $u = P_D(u)$ en $Y \setminus D$. Notemos que $\partial Y \subset Y \setminus D$, tenemos entonces que $u|_{\partial Y} = P_D(u)|_{\partial Y} \leq f$ y también $P_D(u) \leq K$, por lo tanto $P_D(u) \in \mathcal{B}_f$.

3. Por la definición del conjunto $\mathcal{B}_f$ tenemos que para todo $u \in \mathcal{B}_f$ se tiene que $u \leq K$. ■

El teorema anterior nos brinda un candidato para resolver el problema de Dirichlet, resta garantizar que esta función cumpla la condición de frontera, es decir, que para $x \in \partial Y, y \in Y$, $\lim_{y \rightarrow x} u^*(y) = f(x)$. Como es de esperarse, en general, esto no se satisface, pero se cumplirá cuando la frontera este formada por puntos que cumplen una característica que presentamos a continuación.

Definición 3.2.17. Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , un punto $x \in \partial Y$ es llamado **regular** si existe una vecindad abierta U de x y una función $\beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\overline{Y} \cap U)$ con las siguientes propiedades:

1. $\beta|_{Y \cap U}$ es subarmónica.
2. $\beta(x) = 0$ y $\beta(y) < 0$ para cada $y \in \overline{Y} \cap U \setminus \{x\}$.

La función β será llamada **una barrera en x** . Además, si todos los puntos frontera de un conjunto son regulares entonces decimos que tiene **frontera regular** (véase figura 3.2).

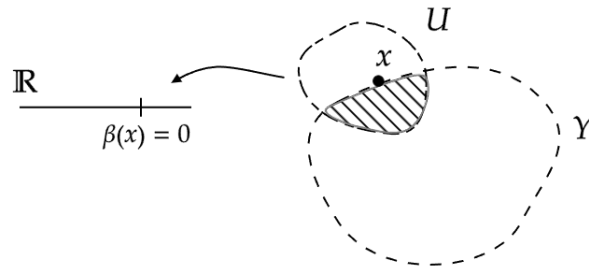


Figura 3.2: Punto regular.

Proposición 3.2.18. *Conservando la notación de la definición anterior:*

- a) Si $x \in \partial Y$ es un punto regular de Y y Y_1 un conjunto abierto de Y con $x \in \partial Y_1$ entonces x es un punto regular de Y_1 .
- b) Si Y tiene frontera regular entonces cada componente conexa de Y también tiene frontera regular.

Demostración.

1. Observemos que la función $\beta|_{\overline{Y} \cap U}$ es una barrera en x , en efecto, notemos que $Y_1 \cap U \subset Y \cap U$ y como β es subarmónica en $Y \cap U$ claramente también lo es en $Y_1 \cap U$. De igual manera podemos observar que $\overline{Y}_1 \cap U \setminus \{x\} \subset Y \cap U \setminus \{x\}$, con lo cual se satisface la propiedad 2 de la definición 3.2.17.
2. Basta recordar que las componentes conexas forman una partición del conjunto y por el inciso a) se sigue el resultado. ■

Es posible determinar, de manera geométrica, si un punto frontera es regular, puesto que esta es una condición local e invariante bajo biholomorfismos, por lo cual basta probarlo para un abierto de $\mathbb{C}$.

Teorema 3.2.19. *Sea Y un abierto de $\mathbb{C}$ y un punto $a \in \partial Y$, supongamos que existe un disco, centrado en $m \in \mathbb{C}$ y de radio $r > 0$, denotado por $D_m(r)$, tal que $a \in \partial D_m(r)$ y $\overline{D_m(r)} \cap Y = \emptyset$ entonces a es un punto regular.*

Demostración.

Consideremos $c := \frac{a+m}{2}$ y $\beta(z) := \log(\frac{r}{2}) - \log|z - c|$, afirmamos que esta función es una barrera en a . En efecto, verifiquemos las condiciones de la definición:

1. Por el ejemplo 3.2.8 sabemos que es subarmónica.
2. Haciendo los cálculos directamente se obtiene que $\beta(a) = \log \frac{r}{2} - \log \frac{|a-m|}{2} = \log \frac{r}{2} - \log \frac{r}{2} = 0$. Además si $y \in \overline{Y} \cap D \setminus \{a\}$ tenemos que $\beta(y) = \log \frac{1}{2} < 0$. ■

Una vez presentada la condición de cuándo un punto frontera es regular pasaremos a dar algunos resultados que nos serán de ayuda para poder concluir la solución al problema de Dirichlet.

Lema 3.2.20. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , consideremos $x \in \partial Y$ un punto regular, V una vecindad de x y dos constantes reales m y c con $m \leq c$. Existe entonces una función $v \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(\overline{Y})$ con las siguientes propiedades:*

a) $v|_Y$ es subarmónica.

b) $v(x) = c$, $v|_{\bar{Y} \cap V} \leq c$.

c) $v|_{\bar{Y} \setminus V} = m$.

Demostración.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c = 0$. Sea U una vecindad abierta del punto x y $\beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\bar{Y} \cap U)$ una barrera en x .

Podemos suponer que $V \subseteq U$, para conseguir esto podemos reducir V de ser necesario. Recordemos que la frontera de cualquier conjunto es cerrado, con esto tenemos que $\partial V \cap \bar{Y}$ es cerrado y además está contenido en el compacto $\bar{V}$, por lo tanto $\partial D \cap \bar{Y}$ es compacto y en consecuencia contiene a su supremo. Como todas las imágenes bajo la función β de puntos en $\partial V \cap \bar{Y}$ son negativas, se tiene que $\sup\{\beta(y) : y \in \partial V \cap \bar{Y}\} < 0 = c$, véase figura 3.3. Notemos que podemos considerar una constante $k > 0$ tal que $k\beta|_{\partial V \cap \bar{Y}} < m$.

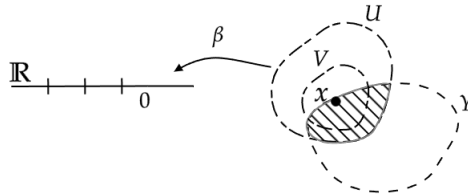


Figura 3.3: La imagen de los puntos en la región sombreada bajo la función β son menor que 0.

Definamos $v : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$v := \begin{cases} \sup(m, k\beta), & \bar{Y} \cap V \\ m, & \bar{Y} \setminus V \end{cases},$$

esta función satisface lo siguiente:

- Es continua: tenemos que para $y \in \partial V \cap Y$, $\sup(m, k\beta(y)) = m$ esto ya que $k\beta(y) < m$.
- Es localmente subarmónica en Y : sabemos que β es subarmónica en $Y \cap U$, en particular, también lo es en $Y \cap V$. Por la proposición 3.2.9 tenemos que $k\beta$ es subarmónica en $Y \cap V$. Además la función constante m también es subarmónica en Y , por lo tanto, $\sup(m, k\beta)$ es subarmónica en $Y \cap V$ y en consecuencia v es subarmónica en V , esto se puede hacer en cualquier punto x y vecindad de x lo cual implica que v es localmente subarmónica. Luego, por el corolario 3.2.12, se sigue que la función v es subarmónica en Y . Esto verifica el inciso a) de este lema.

- Como el punto x dado en la hipótesis, se encuentra en $\bar{Y} \cap V$, tenemos que

$$v(x) = \sup(m, k\beta(x)) = \sup(m, 0) = 0 = c.$$

Para $y \in \bar{Y} \cap V$, como β es una barrera en x satisface que $k\beta|_{\bar{Y} \cap V} < 0$ y además tenemos que $m \leq 0$, por lo tanto $v(y) = \sup(m, k\beta) \leq 0$. Esto verifica el inciso b) del lema.

- Por construcción, $v|_{\bar{Y} \setminus V} = m$, lo cual verifica el inciso c). ■

Definición 3.2.21. Con la notación del lema anterior, sean $x \in \partial Y$ y un abierto V de X con $x \in V$. Considerando los siguientes conjuntos

$$A_V := \inf\{u^*(y) : y \in Y \cap (V \setminus \{x\})\},$$

$$B_V := \sup\{u^*(y) : y \in Y \cap (V \setminus \{x\})\},$$

se define lo siguiente:

$$\liminf_{y \rightarrow x} u^*(y) := \sup_{V \subset X} \{A_V\},$$

$$\limsup_{y \rightarrow x} u^*(y) := \inf_{V \subset X} \{B_V\}.$$

Observemos que por la monotonía de los supremos e ínfimos, si tenemos funciones f, g tales que $f < g$ entonces $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) < \liminf_{y \rightarrow x} g(y)$.

Lema 3.2.22. Bajo la notación del lema 3.2.20 tenemos los siguientes resultados

- a) Dado un real $\beta \in \mathbb{R}$, defina $L_x := \liminf_{y \rightarrow x} u^*(y) \geq \beta$; se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto $V \subset X$ con $x \in V$ y $(V \setminus \{x\}) \cap Y \neq \emptyset$ tales que

$$u^*(y) + \varepsilon > \beta, \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}).$$

- b) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $L_x := \limsup_{y \rightarrow x} u^*(y) \leq \alpha$; se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto $V \subset X$ con $x \in V$, $(V \setminus \{x\}) \cap Y \neq \emptyset$ tales que

$$u^*(y) \leq \alpha + \varepsilon, \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}).$$

Demostración.

Demostraremos solo el inciso a) ya que la prueba del inciso b) es similar.

Definamos $A_V := \inf\{u^*(y) : y \in Y \cap (V \setminus \{x\})\}$ y sea $\varepsilon > 0$. Como L_x es un supremo, existe A_V para algún abierto V tal que

$$L_x - \varepsilon < A_V \leq u^*(y), \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}),$$

se sigue entonces que

$$u^*(y) + \varepsilon > L_x, \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}),$$

por lo tanto $u^*(y) + \varepsilon > \beta$. ■

Lema 3.2.23. *Si $v : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $x \in \partial Y$ entonces*

$$a) \liminf_{y \rightarrow x} v(y) \geq v(x).$$

$$b) \limsup_{y \rightarrow x} v(y) \leq v(x).$$

Demostración.

Nuevamente probaremos solo el inciso a).

Sea $n \in \mathbb{N}$, por continuidad de la función v , para $\frac{1}{n} > 0$ existe un abierto $V \subset X$ tal que

$$|v(y) - v(x)| < \frac{1}{n}, \quad \text{para cada } y \in \bar{Y} \cap (V \setminus \{x\}),$$

de lo anterior tenemos que

$$-\frac{1}{n} + v(x) < v(y), \quad \text{para cada } y \in Y \cap (V \setminus \{x\}),$$

luego

$$-\frac{1}{n} + v(x) \leq A_v \leq \liminf_{y \rightarrow x} v(y),$$

se sigue que $\frac{1}{n} + v(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} v(y)$ y en consecuencia

$$v(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} v(y). \quad \text{■}$$

Ahora ya estamos en posición de completar la solución al problema de Dirichlet en una superficie de Riemann.

Teorema 3.2.24. *Sean Y un abierto de una superficie de Riemann X , $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada y*

$$u^* = \sup\{u : u \in \mathcal{B}_f\},$$

donde $\mathcal{B}_f$ es la clase de Perron de f . Se tiene entonces que para cada punto regular $x \in \partial Y$ vale

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x).$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f , podemos considerar una vecindad abierta y relativamente compacta V de x tal que

$$f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon \quad \text{para cada } y \in \partial Y \cap V.$$

Por otro lado, dado que f es acotada, consideremos constantes $k, K \in \mathbb{R}$ que satisfacen lo siguiente

$$k \leq f(y) \leq K, \quad \text{para cada } y \in \partial Y. \quad (1)$$

Ahora bien, considerando $c = f(x) - \varepsilon$ y $m = k - \varepsilon$, observemos que de (1) se tiene que $m \leq c$, por lo tanto del lema 3.2.20 existe una función continua $v : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ que es subarmónica en Y y satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} v(x) &= f(x) - \varepsilon, \\ v|_{\bar{Y} \cap V} &\leq f(x) - \varepsilon, \\ v|_{\bar{Y} \setminus V} &= k - \varepsilon. \end{aligned}$$

De la primera igualdad, como $x \in \partial Y$, obtenemos que $v(x)|_{\partial Y} = f(x)|_{\partial Y} - \varepsilon < f(x)|_{\partial Y} = f(x)$, dado que x fue arbitrario, tenemos que $v|_{\partial Y} \leq f$. Con todo lo anterior, observe que $v \in \mathcal{B}_f$ y por lo tanto $v \leq u^*$, luego por el inciso a) del lema 3.2.23 tenemos lo siguiente

$$\liminf_{y \rightarrow x} u^*(y) \geq \liminf_{y \rightarrow x} v(y) \geq v(x) = f(x) - \varepsilon. \quad (2)$$

Por otro lado, tomando ahora $c = -f(x)$ y $m = -K$, de (1) tenemos que $f(x) \leq K$ y así $m \leq c$. Aplicando nuevamente el lema 3.2.20 tenemos la existencia de una función continua $w : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ que es subarmónica en Y y además satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} w(x) &= -f(x), \\ w|_{\bar{Y} \cap V} &\leq -f(x), \\ w|_{\bar{Y} \setminus V} &= -K. \end{aligned}$$

Dado que $u \in \mathcal{B}_f$, tenemos que $u|_{\partial Y} \leq f$, así que para todo $y \in \partial Y \cap V$ se tiene que $u(y) \leq f(x) + \varepsilon$. Usando la primera igualdad de arriba obtenemos que

$$u(y) + w(y) \leq \varepsilon, \quad \text{para cada } y \in \partial Y \cap V.$$

Similarmente, por la definición de la clase de Perron sabemos que $u \leq K$ y por la tercera igualdad de arriba podemos concluir que

$$u(z) + w(z) \leq 0, \quad \text{para cada } z \in \bar{Y} \cap \partial V.$$

Aplicando el principio del máximo para la función subarmónica $u + v$ tenemos que

$$u + w \leq \varepsilon, \quad \text{en } \bar{Y} \cap V,$$

equivalentemente

$$u|_{\bar{Y} \cap V} \leq \varepsilon - w|_{\bar{Y} \cap V}, \quad \text{para cada } u \in \mathcal{B}_f.$$

Por lo tanto, usando lo anterior y el inciso b) del lema 3.2.23 obtenemos que

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) \leq \limsup_{y \rightarrow x} (\varepsilon - w(x)) \leq \varepsilon - w(x) = f(x) + \varepsilon. \quad (3)$$

Finalmente, de (2) y (3) tenemos que

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) \leq f(x) \leq \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y),$$

y así concluimos que

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x).$$

■

Concluimos la sección con el siguiente resultado que es consecuencia del teorema anterior.

Teorema 3.2.25. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X tal que todo los puntos frontera de Y son regulares entonces para cada función continua y acotada $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$ el problema de Dirichlet en Y se puede resolver.*

3.3. Conjuntos Runge

En esta sección presentamos los *conjuntos Runge* que serán de utilidad en la demostración del teorema del mapeo de Riemann. El objetivo de esta sección es probar que en una superficie de Riemann podemos construir una *exhaustividad* de conjuntos Runge, cosa que se precisará en breve.

Definición 3.3.1. *Sea X una superficie de Riemann, para cualquier subconjunto $Y \subset X$ sea $\mathfrak{h}(Y)$ la unión de Y con todas las componentes conexas relativamente compactas de $X \setminus Y$. Un abierto $Y \subset X$ es llamado **Runge***

si $Y = \mathfrak{h}(Y)$, es decir, si ninguna componente conexa de $X \setminus Y$ es compacta. Véase la figura 3.4.

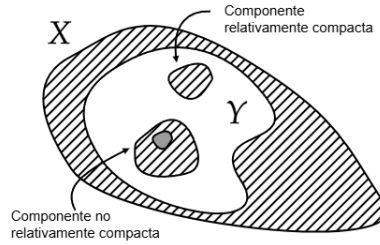


Figura 3.4: El conjunto $Y \subset X$ es la porción de blanco, la pequeña porción sombreada de gris no forma parte de X .

Proposición 3.3.2. *Bajo la notación de la definición anterior, se tienen las siguientes propiedades:*

- a) $\mathfrak{h}(\mathfrak{h}(Y)) = \mathfrak{h}(Y)$ para todo $Y \subset X$.
- b) Si $Y_1 \subset Y_2$ entonces $\mathfrak{h}(Y_1) \subset \mathfrak{h}(Y_2)$.
- c) Si Y es cerrado entonces $\mathfrak{h}(Y)$ es cerrado.
- d) Si Y es compacto entonces $\mathfrak{h}(Y)$ es compacto.

Demostración.

- a) Para demostrar la igualdad, primero observemos que $\mathfrak{h}(Y) \subset \mathfrak{h}(\mathfrak{h}(Y))$. Para demostrar la otra contención, sean $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ los conjuntos cuyos elementos son las componentes conexas relativamente compactas de $X \setminus Y$ y $X \setminus \mathfrak{h}(Y)$, respectivamente. Como $Y \subset \mathfrak{h}(Y)$ entonces $X \setminus \mathfrak{h}(Y) \subset X \setminus Y$, más aún, se tiene que las componentes conexas de $X \setminus \mathfrak{h}(Y)$ están contenidas en las componentes de $X \setminus Y$, con lo anterior, se tiene lo siguiente

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{h}(Y)) = \mathfrak{h}(Y) \cup \bigcup_{C \in \mathcal{K}_2} C \subset \mathfrak{h}(Y) \cup \bigcup_{D \in \mathcal{K}_1} D \subset \mathfrak{h}(Y) \cup \mathfrak{h}(Y) \subset \mathfrak{h}(Y).$$

Con esto, obtenemos la igualdad deseada.

- b) Procediendo por contradicción, supongamos que $\mathfrak{h}(Y_2) \subsetneq \mathfrak{h}(Y_1)$. Observemos que la igualdad no se puede dar, ya que por hipótesis Y_1 está contenido en Y_2 . Supongamos entonces que la contención planteada al inicio es propia y sean $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ los conjuntos cuyos elementos son las componentes conexas relativamente compactas de $X \setminus Y_1$ y $X \setminus Y_2$, respectivamente. Con lo anterior se tiene lo siguiente:

$$\mathfrak{h}(Y_2) = Y_2 \cup \bigcup_{D \in \mathcal{K}_2} D \subset Y_1 \cup \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C = \mathfrak{h}(Y_1),$$

donde $Y_2 \cap \bigcup_{D \in \mathcal{K}_2} D = \emptyset = Y_1 \cap \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C$. Se sigue entonces que Y_2 está contenido en Y_1 , o bien, Y_2 está contenido en $\bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C$, notemos que, por hipótesis, lo primero no es posible, por lo tanto $Y_2 \subset \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C$, sin embargo esto tampoco es posible ya que $Y_1 \subset Y_2$ y $Y_1 \cap \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1} C = \emptyset$. Concluimos así que $\mathfrak{h}(Y_1) \subset \mathfrak{h}(Y_2)$.

Antes de pasar a las otras demostraciones conviene recordar que un espacio es localmente conexo si y solo si para todo abierto $U \subset X$ cada componente de U es abierta, dicho resultado se puede consultar en libros de topología básica, por ejemplo [14].

- c) Sean C_j con $j \in J$ las componentes conexas de $X \setminus Y$, como $X \setminus Y$ es abierto y X es una superficie de Riemann, en particular es localmente conexa, se tiene que los C_j son abiertos.

Consideremos el conjunto J_0 formado por aquellos índices $j \in J$ tales que $\overline{C_j}$ es compacto, notemos que se tiene lo siguiente

$$X \setminus \mathfrak{h}(Y) = \bigcup_{j \in J \setminus J_0} C_j,$$

observemos que, por ser unión de abiertos, es también abierto y así $\mathfrak{h}(Y)$ es cerrado.

- d) Supongamos que $Y \neq \emptyset$, sea U una vecindad abierta relativamente compacta de Y . Afirmamos que todos los C_j intersecan a $\overline{U}$, en caso contrario, si $C_j \subset X \setminus \overline{U}$ entonces $\overline{C_j} \subset X \setminus U \subset X \setminus Y$ lo cual implica que $C_j = \overline{C_j}$. Lo anterior significa que C_j es abierto y cerrado, lo cual contradice la conexidad de X .

Por otro lado, como ∂U es compacto ($\partial U = \overline{U} \cap \overline{U^c}$) y es cubierto por los abiertos disjuntos C_j , solo una cantidad finita de estos interseca a ∂U . Consideremos la colección de los C_j relativamente compactos y sean $C_{j_1}, \dots, C_{j_m}$ aquellos que intersecan a ∂U (por la afirmación hecha al inicio de la demostración de este inciso, todos los demás están contenidos en U). Tenemos que $\mathfrak{h}(Y) \subset U \cup C_{j_1} \cup \dots \cup C_{j_m}$ es relativamente compacto y por el inciso c) de este resultado se tiene que es compacto. ■

Proposición 3.3.3. (*Exhaustividad compacta*) Para X una superficie de Riemann no compacta existe una sucesión $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de X con las siguientes propiedades:

- a) $K_j = \mathfrak{h}(K_j)$ para todo j ,
- b) $K_{j-1} \subset \text{Int}(K_j)$ para todo $j \geq 1$,
- c) $\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j = X$.

Demostración.

Dado que X es una superficie de Riemann, en particular es segundo numerable, así que existe una sucesión de compactos de X , $K'_0 \subset K'_1 \subset \dots$ los cuales cubren a X (para construirla podemos tomar, por ejemplo, conjuntos básicos que tengan cerradura compacta y biholomorfos a discos anidados).

Sea $K_0 := \mathfrak{h}(K'_0)$, observe que K_0 cumple a). Procediendo por inducción, supongamos que $K_1, \dots, K_m$ satisfacen las propiedades a) y b), como K'_m y K_m son compactos, la unión de ellos también lo es y así existe un compacto M tal que $K'_m \cup K_m \subset \text{Int}(M)$, tomemos ahora $K_{m+1} := \mathfrak{h}(M)$. La sucesión de conjuntos K_j , $j \in \mathbb{N}$ satisface las condiciones deseadas:

- a) Por construcción, $K_{m+1} = \mathfrak{h}(M)$ entonces $\mathfrak{h}(\mathfrak{h}(M)) = \mathfrak{h}(M) = K_{m+1}$.
- b) $\text{Int}(K_{m+1}) = \text{Int}(\mathfrak{h}(M)) \supset \text{Int}(M) \supset K_m$, es decir, $K_m \subset \text{Int}(K_{m+1})$.
- c) Por construcción de los K_j se tiene que $K'_j \subset K_{j+1}$ entonces $X = \bigcup K'_j \subset \bigcup K_{j+1}$.

■

Teorema 3.3.4. *Sea X una superficie de Riemann, K_1 y K_2 subconjuntos compactos de X con $K_1 \subset \text{Int}(K_2)$ y $\mathfrak{h}(K_2) = K_2$ entonces existe un abierto $Y \subset X$ que es Runge y satisface $K_1 \subset Y \subset K_2$. Más aún, podemos elegir Y de tal manera que su frontera sea regular.*

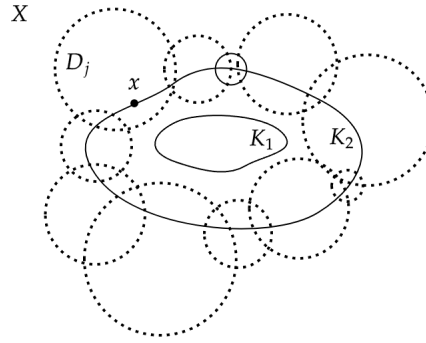
Demostración.

Sea $x \in \partial K_2$, consideremos una carta U que no interseca a K_1 , en esta carta tomemos D , un conjunto compacto que tiene a x en su interior y es biholomorfo a un disco en $\mathbb{C}$. Esto podemos hacerlo con cualquier punto de la frontera de K_2 para cubrirla. Como ∂K_2 es cerrado (su complemento es abierto) y $\partial K_2 \subset \overline{K_2}$ se sigue que ∂K_2 es compacto, así podemos cubrir ∂K_2 con una cantidad finita de conjuntos $D_1, \dots, D_m$, todos biholomorfos a discos, véase figura 3.5.

Tomemos $Y := K_2 \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{D_j}$ y observemos que Y es abierto con $K_1 \subset Y \subset K_2$. Sean C_j , $j \in J$ las componentes conexas de $X \setminus K_2$, por hipótesis sabemos que no hay componentes compactos (K_2 es Runge).

Por otro lado, observemos que por la elección de los D_j estos son conexos e intersecan al menos un C_j . Afirmamos ahora que no hay componentes conexas de $X \setminus Y$ que sean relativamente compactas. Para ver esto consideremos los siguientes casos:

1. Sea A una componente de $X \setminus Y$ tal que $A \cap D_j = \emptyset$ para todo j . Notemos que A también es componente


 Figura 3.5: Cubierta para la frontera de K_2 .

de $X \setminus K_2$, en efecto,

$$X \setminus Y = (X \setminus K_2) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k D_j \right) = \bigsqcup_{\alpha} A_{\alpha},$$

donde, la última unión es disjunta y representa la descomposición en componentes conexas de $X \setminus Y$. Luego, como la intersección de A con los D_j es vacía, tenemos que $(X \setminus K_2) \cap A = A$, así $A \subset X \setminus K_2 = \bigsqcup_{j \in J} C_j$ por lo tanto $A \subset C_j$ para algún $j \in J$.

Por otro lado, tenemos que

$$C_j \subset X \setminus K_2 \subset X \setminus Y = \bigsqcup_{\alpha} A_{\alpha},$$

como $A \cap C_j \neq \emptyset$ entonces $C_j \subset A$.

Con lo anterior tenemos que $A = C_j$ entonces $\bar{A}$ no es compacta, ya que $\bar{C}_j$ no lo es (por hipótesis).

2. A es componente de $X \setminus Y$ tal que $A \cap D_j \neq \emptyset$ para algún $j \in J$. Como A es componente conexa, se sigue que $D_j \subset A$.

Por otro lado, $D_j \cap C_i \neq \emptyset$ para algún i entonces $C_i \cap A \neq \emptyset$ (ambos contienen a D_j), con lo anterior se tiene que $C_i \subset A$. Si $\bar{A}$ fuese compacto entonces C_i también lo sería, ya que $\bar{C}_i \subset \bar{A}$, lo cual es una contradicción a la hipótesis de que $\mathfrak{h}(K_2) = K_2$.

De ambos casos, tenemos que $Y = \mathfrak{h}(Y)$.

Para finalizar, por el teorema 3.2.19, tenemos que todos los puntos frontera son regulares. ■

Teorema 3.3.5. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X , si Y es Runge entonces cada componente conexa de Y también es Runge.*

Demostración.

Sean Y_i , $i \in I$ las componentes conexas de Y . Notemos que todas las componentes son abiertas ya que Y es abierto y K es localmente conexo. Sea $\{A_k, k \in K\}$ el conjunto de componentes conexas de $X \setminus Y$, dado que Y es Runge tenemos que A_k es cerrada pero no compacta.

Tenemos que $\overline{Y_i} \cap A \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, en caso contrario, $\overline{Y_i} \subset Y$ por lo que $\overline{Y_i} = Y_i$, lo cual contradice el hecho de que X es conexa (por ser superficie de Riemann).

Sea C una componente conexa de $S \setminus Y_i$ entonces $C \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, en efecto, en caso contrario tendríamos que $C \cap Y_j \neq \emptyset$ para algún $j \neq i$, por lo tanto $\overline{Y_j} \subset C$, ya que C es cerrado y Y_j es conexo, pero por el párrafo anterior tendríamos que $C \cap A \neq \emptyset$.

Luego, C interseca al menos a un A_k y por tanto $A_k \subset C$, se sigue que C no puede ser compacto, como C fue arbitrario se sigue que Y_i es Runge. ■

Con todos los resultados anteriores ya podemos probar el objetivo de esta sección.

Teorema 3.3.6. (*Exhaustividad por dominios Runge*) Sea X una superficie de Riemann no compacta, existe una sucesión $Y_0 \Subset Y_1 \Subset \dots$ de dominios relativamente compactos Runge con $\bigcup_j Y_j = X$ y tal que cada Y_j tiene frontera regular.

Demostración.

Primero veremos que para cada compacto $K \subset X$ existe un dominio Runge $Y \Subset X$ que tiene frontera regular y $K \subset Y$.

Dado K , podemos encontrar un conjunto compacto y conexo K_1 y un compacto K_2 tales que $K \subset K_1 \subset \text{Int}(K_2)$.

Observemos que por la proposición 3.3.2 $\mathfrak{h}(K_2)$ es compacto y Runge, además $K_1 \subset \text{Int}(K_2) \subset \text{Int}(\mathfrak{h}(K_2))$, por lo tanto podemos aplicar el teorema 3.3.4, con lo cual existe un abierto Runge Y_1 que tiene frontera regular tal que

$$K_1 \subset Y_1 \subset \mathfrak{h}(K_2).$$

Sea Y la componente conexa de Y_1 , que contiene a K_1 , por el teorema 3.3.5, Y es Runge y por el teorema 3.2.19 tiene frontera regular.

Por otro lado, por el teorema 3.3.3 existe una cubierta de X formada por compactos $\{\hat{K}_j\}_{j \in J}$, con $J = \{1, 2, \dots\}$, tales que $\hat{K}_j \subset \hat{K}_{j+1}$.

Tomemos al conjunto $\hat{K}_0$, por lo demostrado al inicio, tenemos que existe un dominio Runge $Y_0 \Subset X$ con frontera

regular tal que $\hat{K}_0 \subset Y_0$. Tomemos ahora $K_1 \in \{\hat{K}_j\}_{j \in I}$ como aquel de índice más pequeño tal que $Y_0 \subset K_1$, nuevamente tenemos que existe un dominio $Y_1 \Subset X$ tal que $Y_0 \subset K_1 \subset Y_1$. Notemos además que $Y_0 \Subset Y_1$, ya que por las contenciones previas $\bar{Y}_0 \subset \bar{Y}_1$. Siguiendo de esta manera podemos construir una sucesión de dominios Runge relativamente compactos y con fronteras regulares tales que $\hat{K}_0 \subset Y_0$ y $K_j \subset Y_j$ para todo $j \in J^*$, donde J^* representa los índices usados para la construcción de los conjuntos Y_j . Se tiene entonces que $X = K_0 \cup \bigcup_{j \in J^*} \hat{K} \subset Y_0 \cup \bigcup_{j \in J^*} Y_j$. Con todo lo anterior, tenemos la cubierta buscada. ■

Los resultados de esta sección, junto con los del apéndice A, concluyen con los preliminares necesarios para comenzar a estudiar el teorema principal de este trabajo, el teorema del mapeo de Riemann.

Tal como el nombre de esta tesis lo menciona, nos basaremos en la teoría de conjuntos Runge para la demostración del teorema, sin embargo existen otras demostraciones usando técnicas distintas, por ejemplo mediante el uso de unas funciones llamadas *funciones de Green*, el lector interesado en esto puede consultar a partir de la página 166 de [7].

Capítulo 4

El teorema del mapeo de Riemann

4.1. Preliminares

Comenzamos la sección con el siguiente resultado, que es consecuencia del corolario 2.2.26 y de la definición del grupo de DeRham (definición 2.3.19).

Proposición 4.1.1. *Si X es una superficie de Riemann simplemente conexa entonces $H_{DR}^1(X) = 0$.*

Esta propiedad, que una superficie de Riemann tenga grupo de DeRham trivial, es una hipótesis importante en los próximos resultados.

Lema 4.1.2. *Si X es una superficie de Riemann con $H_{DR}^1(X) = 0$ entonces se tienen los siguientes resultados:*

1. *Para cada función holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}^\times$ existe un **logaritmo** y una **raíz cuadrada**, es decir, existen funciones $g, h \in \mathcal{O}(X)$ tales que*

$$e^g = f \quad y \quad h^2 = f.$$

2. *Toda función armónica $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ es la parte real de una función holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.*

Demostración.

1. Comencemos notando que $f^{-1}df$ es una 1-forma holomorfa en X , dado que $0 = H_{DR}^1(X) = \Omega(X)/d\mathcal{O}(X)$ tenemos que existe una función $g \in \mathcal{O}(X)$ con $dg = f^{-1}df$.

Luego, agregando una constante a g , de ser necesario, podemos suponer que en un punto $a \in X$ tenemos $e^{g(a)} = f(a)$, dicho de otra forma, $1 = f(a)e^{-g(a)}$.

Por otro lado,

$$d(fe^{-g}) = (df)e^{-g} - fe^{-g}dg = (df)e^{-g} - fe^{-g}f^{-1}df = (df)e^{-g} - e^{-g}df = 0.$$

Dado esto y como X es conexa, se sigue que fe^{-g} es idénticamente 1, así $e^g = f$.

Para lo segundo, observemos que basta con tomar $h := e^{\frac{g}{2}}$ y así conseguimos lo deseado.

2. Sea u una función armónica, por la observación 3.1.7, du es 1-forma armónica, notemos que como u es una función real valuada, $du = \overline{du}$, es decir, es una 1-forma real. Por el teorema 3.1.11, tenemos que du es la parte real de una función holomorfa, es decir, existe $\omega \in \Omega(X)$ tal que $du = \operatorname{Re}(\omega)$.

Dado que $H_{DR}^1(X) = 0$ tenemos que $du = \operatorname{Re}(dp) = d(\operatorname{Re} p)$ con $p \in \mathcal{O}(X)$, luego $u = \operatorname{Re}(p) + c$ con $c = \text{cte}$. ■

El siguiente resultado es un primer acercamiento a los biholomorfismos que buscamos, pero solo es válido para ciertos dominios dentro de una superficie de Riemann, recuerde que estos conjuntos son en particular superficies de Riemann (ejemplo 1.0.8) así que tiene sentido hablar del grupo de DeRham de estos.

Teorema 4.1.3. *Sea X una superficie de Riemann no compacta, $Y \subseteq X$ un dominio con $H_{DR}^1(Y) = 0$. Supongamos que la frontera de Y es regular. Existe entonces una función biholomorfa de Y sobre el disco unitario $\mathbb{E}$.*

Demostración.

Sea $a \in Y$, por el corolario A.0.6, existe una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(X)$ que tiene un cero de orden 1 en el punto a y no se anula en $X \setminus \{a\}$.

Notemos que estamos bajo las hipótesis del teorema 3.2.25, aplicado a la función $\log(|g|)$, es decir, existe una función $u : \overline{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $\overline{Y}$ y armónica en Y con

$$u(y) = \log |g(y)|, \quad \text{para cada } y \in \partial Y. \quad (1)$$

Como u es una función armónica, el inciso 2 del lema 4.1.2 garantiza que $u = \operatorname{Re}(h)$ con $h \in \mathcal{O}(Y)$. Teniendo lo anterior, basta tomar $f := e^{-h}g \in \mathcal{O}(Y)$.

Lo que probaremos ahora es que esta función f es el biholomorfismo que buscamos. Para ello veremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1 . $f(Y) \subset \mathbb{E}$.

Sea $y \in Y \setminus \{a\}$, de (1) tenemos que

$$|e^{-h(y)}| = |e^{-\operatorname{Re}(h(y))}| = |e^{-u(y)}| = |e^{-\log(g(y))}|,$$

y con esto se sigue:

$$e^{|\log(g(y))|-u(y)} = e^{|\log(g(y))|}e^{-u(y)} = |e^{-h(y)}||g(y)| = |f(y)|.$$

Vemos así, que la función $|f|$ está definida en Y y que además puede ser extendida a una función $\varphi : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual por (1) es idénticamente 1 en la frontera de Y .

Este último párrafo nos dice que la función f , en la frontera de Y , está acotado por 1, por el principio del máximo esto implica que $|f(y)| < 1$ para todo $y \in Y$, y así $f(Y) \subset \mathbb{E}$.

Afirmación 2. $f : Y \rightarrow D$ es propia.

Basta probar que para cada $r < 1$ la preimagen del disco $D_0(r)$ es compacta en Y . Sea $Y_r := f^{-1}(D_r(0))$, para ello veamos que se tiene la siguiente igualdad

$$Y_r = \{y \in Y : |f(y)| \leq r\} = \{y \in \bar{Y} : \varphi(y) \leq r\},$$

donde φ es la extensión de f a la frontera de Y dada en la afirmación 1.

Notemos que $Y_r = \{y \in Y : |f(y)| \leq r\} \subset \{y \in \bar{Y} : \varphi(y) \leq r\}$ es clara, pasemos a demostrar la otra contención, para ello sea $y_0 \in \{y \in \bar{Y} : \varphi(y) \leq r\}$ consideremos los siguientes casos:

- Si $y_0 \in Y$, en este caso $|f(y_0)| = \varphi(y_0) \leq r$, por lo tanto $y_0 \in Y_r$.
- Si $y_0 \in \partial Y$, en este caso $|f(y_0)| = \varphi(y_0) \leq 1$. Como 1 es el máximo de f (en particular supremo) de la función f en $\bar{Y}$ y además, por hipótesis se tiene que $\varphi(y_0) \leq r$ se sigue que $|f(y_0)| = \varphi(y_0) < r < 1$, así $y_0 \in Y_r$.

Con lo anterior se tiene que $Y_r \subset \bar{Y}$, como Y_r es cerrado y por hipótesis $\bar{Y}$ es compacto se concluye que Y_r es compacto.

Ahora bien, como f es propia, el teorema A.0.7 nos dice que cada valor en $\mathbb{E}$ es alcanzado el mismo número de veces, pero el valor cero es tomado exactamente una vez, por lo tanto $f : Y \rightarrow D$ es biyectiva. Recordemos que si una función holomorfa es biyectiva, su inversa también es holomorfa, este resultado se puede consultar en libros de análisis complejo tal como en la página 206 de [16].

Concluimos que f es un biholomorfismo. ■

Antes de pasar a la demostración del teorema principal veremos lo últimos dos lemas que necesitamos.

Lema 4.1.4. Sean $R \in (0, \infty]$, Y un subdominio propio de $D_0(R)$ con $0 \in Y$ y $H_{DR}^1(Y) = 0$ existe entonces $r < R$ y una función holomorfa $f : Y \rightarrow D_0(r)$ con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Demostración.

Consideremos el caso en que $R < \infty$, el caso $R = \infty$ se maneja de manera similar.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $R = 1$ (esto es posible a través de una homotecia entre los discos con centro en 0 y razón $\frac{1}{R}$), con esto se tiene que $Y \subset \mathbb{E}$.

Dado que Y es, en particular, un subconjunto propio de $\mathbb{E}$ tenemos que existe un punto $a \in \mathbb{E} \setminus Y$, con el cual definimos la siguiente función $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ dada por

$$\varphi(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

observemos que esta función tiene la forma de un automorfismo del disco unitario (véase página 219 de [16]), por lo tanto está bien definido y además es un biholomorfismo. Esta función satisface $\varphi(0) = -a$ y $0 \notin \varphi(V)$ de lo contrario, para algún $w \in Y$ se tendría que

$$\frac{w - a}{1 - \bar{a}w} = 0,$$

lo cual implica que $w = a$ y así a sería un punto de Y , contradiciendo su elección. Finalmente, observemos que

$$\varphi'(0) = 1 - |a|^2 \neq 0, \quad (1)$$

luego, por el inciso 1 del lema 4.1.2, se tiene la existencia de una función $g \in \mathcal{O}(Y)$ tal que $g^2 = \varphi|_Y$. Por lo que $g(Y) \subset \mathbb{E}$ y al derivar se tiene $2gg' = \varphi'$ con lo cual $g(0) \neq 0$ y además

$$g'(0) = \frac{\varphi'(0)}{2g(0)}. \quad (2)$$

Definamos ahora la función

$$\psi(z) := \frac{z - b}{1 - \bar{b}z},$$

donde $b := g(0)$ y así $b^2 = -a$. Observemos que ψ es también un automorfismo del disco unitario con $\psi(b) = 0$ y

$$\psi'(b) = \frac{1}{1 - |b|^2}. \quad (3)$$

Consideremos ahora $h := \psi \circ g : Y \rightarrow \mathbb{E}$, notemos que $h(0) = \psi(g(0)) = 0$, y por (1), (2) y (3) se tiene

$$\gamma := h'(0) = \psi'(b)g'(0) = \frac{1}{1 - |b|^2} \frac{1 - |a|^2}{2b} = \frac{1 + |b|^2}{2b}.$$

Como $b \in \mathbb{E}$ tenemos entonces lo siguiente

$$0 < (1 - |b|)^2 = 1 - 2|b| + |b|^2,$$

luego se sigue que $1 + |b|^2 > 2|b| > 0$ y así $|1 + |b|^2| > 2|b| > 0$, de esta última desigualdad se sigue que $\frac{|1 + |b|^2|}{2|b|} > 1$, es decir, $|\gamma| > 1$. Tomando

$$r := \frac{1}{|\gamma|} \quad \text{y} \quad f := \frac{h}{\gamma},$$

la función $f : Y \rightarrow D_r(0)$ tiene las propiedades que buscamos, en efecto, f es holomorfa, ya que h lo es, además $f(0) = \frac{h(0)}{h'(0)} = 0$ y $f'(0) = \frac{1}{\gamma}h'(0) = 1$. ■

Lema 4.1.5. *Sea X una superficie de Riemann no compacta con $H_{DR}^1(X) = 0$ y $Y \subset X$ un dominio Runge, se tiene que $H_{DR}^1(Y) = 0$.*

Demostración.

Sea $\omega \in \Omega(X)$ arbitraria, para ver que $H_{DR}^1(Y) = 0$ probaremos que ω tiene una primitiva.

Por el corolario A.0.5 tenemos que existe una 1-forma $\omega_0 \in \Omega(X)$ que no se anula. Luego, $\omega = f\omega_0$ para alguna función $f \in \mathcal{O}(Y)$. Por el teorema de aproximación de Runge (teorema A.0.2) existe una sucesión $f_n \in \mathcal{O}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y hacia f . Así por cada curva cerrada α en Y se tiene

$$\int_{\alpha} f_n \omega_0 \rightarrow \int_{\alpha} \omega = \int_{\alpha} f \omega_0.$$

Como $H_{DR}^1(X) = 0$, $f_n \omega_0$ tiene una primitiva, y como α es una curva cerrada tenemos que $\int_{\alpha} f_n \omega_0 = 0$, entonces $\int_{\alpha} \omega = 0$, es decir, los períodos de ω son cero y como $\Omega^{(1)}(Y) \subset \mathcal{E}^{(1)}(Y)$, el teorema 2.2.37 garantiza que ω tiene una primitiva. ■

4.2. Teorema principal

Teorema 4.2.1. *(del mapeo de Riemann) Si X es una superficie de Riemann con $H_{DR}^1(X) = 0$ entonces X es biholomorfa a alguna de los siguientes: la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$, el plano complejo $\mathbb{C}$ o el disco unitario $\mathbb{E}$.*

Demostración.

- Si X es compacta, la definición A.0.12 de género tiene sentido, además, por el corolario 1.2.6, todas las funciones holomorfas en X son constantes, con lo cual se sigue que $d\mathcal{O}(X)$ es trivial, y como $H_{DR}^1(X) = 0$, esto implica que $\Omega(X) = 0$. Usando el inciso b) del teorema A.0.13 podemos concluir que $g = \dim H_X^0(\Omega) = \dim \Omega(X) = 0$ y por el inciso a) del teorema A.0.13, se sigue que X es biholomorfa a $\mathbb{P}^1$.

- Si X no es compacta, por el teorema 3.3.6 existe una sucesión $Y_0 \Subset Y_1 \Subset \dots$ de dominios relativamente compactos Runge con $\bigcup_j Y_j = X$ tal que cada Y_j tiene frontera regular.

Dado que $H_{DR}^1(X) = 0$, el teorema 4.1.5 implica que $H_{DR}^1(Y_n) = 0$ para todo n , más aún, cada Y_n es biholomorfo al disco unitario (teorema 4.1.3), a dichos biholomorfismos los denotaremos por $b_n : Y_n \rightarrow \mathbb{E}$.

Por otro lado, consideremos $a \in Y_0$ y una vecindad coordinada (U, z) del punto a y supongamos que $b_n(a) = 0$ para todo n . A continuación veremos que existe un real $r_n > 0$ y una función biholomorfa

$$f_n : Y_n \rightarrow D_0(r_n)$$

que satisface lo siguiente

$$f_n(a) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{df_n}{dz}(a) = 1,$$

en efecto, notemos que $\mathbb{E}$ es un subconjunto propio de $D_0(\infty)$ y satisface las hipótesis del lema 4.1.4, por lo que existen $r'_n < \infty$ y una función holomorfa $g_n : \mathbb{E} \rightarrow D_0(r'_n)$ tal que $g_n(0) = 0$ y $g'_n(0) = 1$.

Como b_n es, en particular, holomorfa e inyectiva tenemos que $b'_n(a) \neq 0$; tomando $\gamma := b'_n(a)$, podemos definir $f_n := \frac{1}{\gamma} g_n \circ b_n : Y_n \rightarrow D_0(r_n)$ con $r_n := \frac{1}{|\gamma|} r'_n$ (con esto garantizamos que $|f_n| < r_n$ y, en caso de ser necesario, podemos hacer una traslación para garantizar que el disco de radio r_n esté centrado en el origen), véase la figura 4.1, la cual satisface las condiciones deseadas, en efecto,

$$f_n(a) = \frac{1}{b'_n(a)} g_n(b_n(a)) = \frac{1}{b'_n(a)} g_n(0) = \frac{1}{b'_n(a)}(0) = 0.$$

$$\frac{df_n}{dz}(a) = \frac{1}{b'_n(a)} g'_n(b_n(a)) b'_n(a) = \frac{1}{b'_n(a)} g'_n(0) b'_n(a) = g'_n(0) = 1.$$

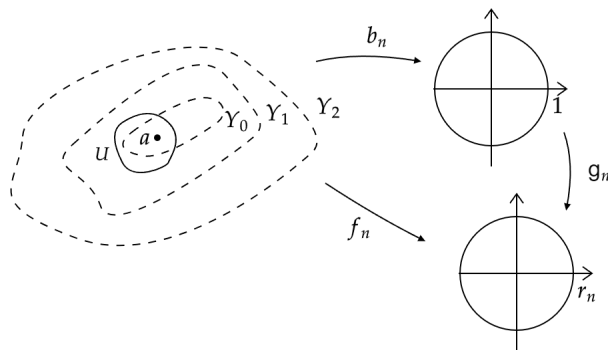


Figura 4.1: Construcción de las funciones f_n .

Consideremos la función $h_n := f_{n+1} \circ f_n^{-1} : D_0(r_n) \longrightarrow D_0(r_{n+1})$ para todo n , nótese que se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} h_n(0) &= f_{n+1}(a) = 0, \\ h'_n(0) &= f'_{n+1}(a) \frac{1}{f'_n(a)} = 1, \end{aligned} \quad (1)$$

del corolario A.0.9 se sigue que

$$|h'_n(0)| \leq \frac{r_{n+1}}{r_n}, \quad (2)$$

de (1) y (2) se concluye que $r_n \leq r_{n+1}$. Definamos $R := \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \in (0, \infty]$.

Afirmación: X es biholomorfo a $D_0(R)$.

Consideremos las siguientes composiciones

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &\longrightarrow D_0(r_0) \xrightarrow{f_0^{-1}} Y_0 \\ z &\longmapsto r_0 z \longmapsto f_0^{-1}(r_0 z) \end{aligned} ,$$

tenemos que la función $z \longmapsto f_0^{-1}(r_0 z)$ es un biholomorfismo entre Y_0 y $\mathbb{E}$.

Tomemos ahora la función

$$\begin{aligned} q_n : \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ q_n(z) &:= \frac{1}{r_0} f_n(f_0^{-1}(r_0 z)), \quad n \geq 0 \end{aligned} ,$$

la cual satisface

$$\begin{aligned} q_n(0) &= \frac{1}{r_0} (f_n(a)) = 0, \\ q'_n(0) &= \frac{df_n}{dz}(a) \frac{df_0^{-1}}{dz}(r_0 z) = 1, \end{aligned}$$

es decir, q_n es una función holomorfa y schlicht (esto es, una función holomorfa $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$ que es inyectiva y satisface que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, para más detalles sobre estas funciones, véase el apéndice A) existe entonces, por el teorema A.0.11, una subsucesión $\{f_{n_{0k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y_0 . Con el mismo análisis podemos encontrar una subsucesión $\{f_{n_{1k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de esta subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y_1 . Repitiendo este proceso obtenemos para cada m una subsucesión $\{f_{n_{mk}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la subsucesión previa que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y_m .

Haciendo $f_{n_k} := f_{n_{k_k}}$ tenemos que esta es una subsucesión de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para cada m la sucesión $\{f_{n_k}|_{Y_m}\}_{k \geq m}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Y_m .

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ la función holomorfa que es el límite de la sucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, tenemos así que f coincide en cada Y_m con el límite de la sucesión $\{f_{n_k}|_{Y_m}\}_{k \geq m}$.

Notemos que la función f es inyectiva y satisface que $f(a) = 0$ y $\frac{df}{dz}(a) = 1$, veremos a continuación que además es un biholomorfismo entre X y $D_0(R)$.

En efecto, observemos que $f(X) \subseteq D_0(R)$, por lo tanto será suficiente probar que f es sobreyectiva. Procediendo por contradicción, supongamos que $f(X)$ es un subconjunto propio de $D_0(R)$, del lema 4.1.4 existe $r < R$ y una función holomorfa $g : f(X) \rightarrow D_0(r)$ tal que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$.

Como r es finito, tomemos n , suficientemente grande, tal que $r_n > r$ y consideremos la siguiente función

$$h := g \circ f \circ f_n^{-1} : D_0(r_n) \rightarrow D_0(r),$$

la cual satisface

$$\begin{aligned} h(0) &= g(f(f_n^{-1}(0))) = 0, \\ h'(0) &= g'(0)f'(a)\frac{1}{f'_n(a)} = 1, \end{aligned}$$

además por el corolario A.0.9 se tiene también que $|h'(0)| < \frac{r}{r_n}$ y en consecuencia $r_n < r$, lo cual es una contradicción, por lo tanto f es sobreyectiva, lo cual concluye la prueba. ■

Como consecuencia de este teorema, si X es una superficie de Riemann y $\tilde{X}$ su cubriente universal, en particular, $\tilde{X}$ es simplemente conexa y se puede aplicar el teorema del mapeo de Riemann, dependiendo de a que superficie sea biholomorfa, podemos clasificarlas como sigue.

Definición 4.2.2. Sea X una superficie de Riemann y $\tilde{X}$ su cubriente universal

1. Si $\tilde{X} \simeq \mathbb{P}^1$ entonces decimos que X es **elíptica**.
2. Si $\tilde{X} \simeq \mathbb{C}$ entonces decimos que X es **parabólica**.
3. Si $\tilde{X} \simeq \mathbb{E}$ decimos que X es **hiperbólica**.

Daremos ahora unos ejemplos usando la cubriente universal y el teorema del mapeo de Riemann. Analizaremos el plano complejo agujerado, para ello haremos uso del disco de Poincaré, la inversión respecto a un círculo y otros resultados, los cuales se pueden consultar en el apéndice B de este trabajo, cabe mencionar que parte de dicho apéndice corresponde a mi trabajo de licenciatura en donde estudie el disco de Poincaré y el semiplano superior a través de transformaciones de Möbius.

Ejemplo 4.2.3. En el ejemplo 1.3.16 de cubrientes, se mencionó que usando la función exponencial tenemos que la cubriente universal de $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C}^\times$ es una superficie de tipo parabólica.

Ejemplo 4.2.4. Si z_1, z_2 y z_3 son puntos distintos en $\mathbb{C}$ entonces la cubriente universal de $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ es el disco $\mathbb{E}$, y por lo tanto es una superficie de tipo hiperbólica.

Consideremos el disco de Poincaré (véase la definición B.0.2 del apéndice B) y supongamos que $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ y $z_3 = -1$. Sea P un polígono cuyos vértices se encuentran en la frontera de $\mathbb{E}$ y está contenido en este, haciendo la inversión con respecto a cada uno de sus lados obtenemos polígonos con vértices en la frontera del disco $\mathbb{E}$ como se muestra en la figura 4.2.

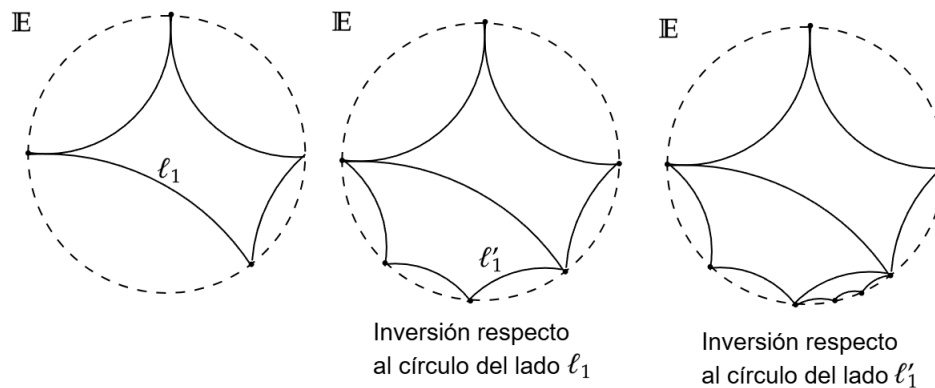


Figura 4.2: Inversión del polígono P .

Como resultado de las inversiones tenemos que el disco $\mathbb{E}$ queda cubierto con polígonos.

Para obtener la función cubriente buscada, por el teorema del mapeo de Riemann en el plano complejo (teorema B.0.6) y la transformación de Cayley (ejemplo 1.1.3) tenemos un biholomorfismo $f : P \rightarrow \mathbb{H}^2$, donde $\mathbb{H}^2$ es el semiplano superior (véase B.0.1), además podemos conseguir que los vértices de P sean enviados a los puntos $-1, 0, 1, \infty$, más aún, por el teorema B.0.8 el biholomorfismo se extiende a las fronteras. Por lo tanto tenemos que los arcos que forman a P son enviados a los intervalos $[-\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ y $[1, \infty]$. Luego, por el principio de reflexión de Schwarz (teorema B.0.5) la función f se extiende de manera holomorfa a la región obtenida por la reflexión en cada uno de sus lados (como se mencionó al inicio). Tenemos entonces una función biholomorfa sobre $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ definida en todo $\mathbb{E}$ y por construcción es un isomorfismo local y una función cubriente.

Apéndice A

Otros resultados necesarios para enunciar el mapeo de Riemann

Dedicamos este apéndice a los últimos resultados necesarios para la demostración que buscamos del mapeo de Riemann, las demostraciones de dichos resultados serán omitidas, ya que estas requieren de teoría que nos desviaría del objetivo del trabajo. Para el lector interesado en las demostraciones, o en conocer más del tema, puede consultar [3] o [13].

Comenzamos enunciando una propiedad de retículos, los cuales fueron estudiados en el capítulo 1.

Proposición A.0.1. *Sean Γ y Γ' dos retículos generados por las $\mathbb{R}$ -bases ordenadas $\{w_1, w_2\}$ y $\{w'_1, w'_2\}$ de $\mathbb{C}$ respectivamente, entonces $\Gamma = \Gamma'$ si y solo si existe una matriz $A \in \mathcal{B}$, donde*

$$\mathcal{B} := \{A \in GL(2, \mathbb{Z}) : \det A = \pm 1\},$$

tal que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Demostración.

Supongamos que existe una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{B},$$

tal que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

con ello, $w'_1 = aw_1 + bw_2$ y $w'_2 = cw_1 + dw_2$, lo cual implica que $w'_1, w'_2 \in \Gamma$, por lo tanto $\Gamma' \subset \Gamma$.

Por otro lado, como $\mathcal{B}$ es un grupo existe una matriz $A' \in \mathcal{B}$ tal que $A \cdot A' = Id_{2 \times 2}$, entonces

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix},$$

luego $w_1, w_2 \in \Gamma'$ y así $\Gamma \subset \Gamma'$, por lo tanto $\Gamma = \Gamma'$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\Gamma = \Gamma'$.

Tenemos así que $w_1, w_2 \in \Gamma'$ entonces, por definición, existen a', b', n', m' enteros tales que $w_1 = a'w'_1 + b'w'_2$ y $w_2 = n'w'_1 + m'w'_2$, esto equivale a

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

de igual manera se tiene que $w'_1, w'_2 \in \Gamma$ y con ello existen enteros a, b, n y m tales que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dado que w'_1, w'_2 son $\mathbb{R}$ - linealmente independientes se sigue que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo anterior tenemos que

$$\det \left[\begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} \right] = 1,$$

por lo tanto

$$\det \left[\begin{pmatrix} a & b \\ n & m \end{pmatrix} \right] = \det \left[\begin{pmatrix} a' & b' \\ n' & m' \end{pmatrix} \right] = \pm 1,$$

es decir, las matrices se encuentran en $\mathcal{B}$ tal como queríamos. ■

El siguiente teorema involucra la convergencia uniforme en compactos, lo cual requiere de dotar de una topología al espacio vectorial $\mathcal{E}(Y)$, con Y un abierto de una superficie de Riemann X . Esto es posible a través de conjuntos compactos, lo cual además nos proporciona tener semi-normas, a través de las cuales se define la convergencia, dicho procedimiento se puede consultar en la página 196 y 197 de [3].

Teorema A.0.2. (*Aproximación de Runge*) Sea Y un abierto de una superficie de Riemann no compacta X , supongamos que $X \setminus Y$ no tiene componentes conexas no compactas. Se tiene que toda función holomorfa en Y puede ser aproximada, de manera uniforme, en cada subconjunto compacto de Y por funciones holomorfas en X .

Corolario A.0.3. Si X es una superficie de Riemann no compacta entonces

1. Dada un 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ existe una función $f \in \mathcal{E}(X)$ con $d''f = \omega$. Dicho de otra forma $\mathcal{E}^{(0,1)}(X) = d''\mathcal{E}(X)$.
2. $H_X^1(\mathcal{O}) = 0$.

Para los siguientes resultados el lector debe tener presente los conceptos de divisor de una función y de un grupo abeliano.

Teorema A.0.4. En una superficie de Riemann no compacta X todo divisor $D \in \text{Div}(X)$ es el divisor de una función meromorfa $f \in \mathcal{M}^*(X)$.

Corolario A.0.5. En toda superficie de Riemann no compacta X existe una 1-forma $\omega \in \Omega(X)$ que nunca se anula.

Corolario A.0.6. Sea Y un subconjunto de X con frontera regular y a un punto en Y , existe una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(X)$ que tiene un cero de orden 1 en el punto a y no se anula en $X \setminus \{a\}$.

Teorema A.0.7. Sean X y Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa propia y no

constante, existe entonces un número natural n tal que f toma cada valor $c \in Y$, contando multiplicidades, n veces.

Un resultado muy conocido en variable compleja es la fórmula integral de Cauchy, a continuación lo enunciamos, junto con una consecuencia que será de utilidad en la sección 4.2.

Teorema A.0.8. (Fórmula integral de Cauchy) Sean f una función holomorfa en una región A , γ una curva cerrada simple en A y z_0 un punto dentro de γ entonces se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Corolario A.0.9. Sea $f : D_r(0) \longrightarrow D_{r'}(0)$ holomorfa se tiene que

$$|f'(0)| \leq \frac{r'}{r}.$$

Lema A.0.10. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que $\mathbb{C} \setminus G$ tiene puntos interiores y suponga que $w_0 \in G$, se tiene que el conjunto

$$\{f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) : f(\mathbb{E}) \subset G \text{ y } f(0) = w_0\}$$

es un subconjunto compacto de $\mathcal{O}(\mathbb{E})$ con respecto a la topología de convergencia uniforme en subconjuntos compactos.

Este lema, a su vez, permite probar el siguiente resultado, para el cual se requiere el concepto de función **schlicht**: una función holomorfa $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$ es llamada **schlicht** si es inyectiva, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Teorema A.0.11. El conjunto $\mathcal{S}$ de todas las funciones holomorfas schlicht es compacto en $\mathcal{O}(\mathbb{E})$.

Para terminar, en la demostración del teorema 3.1.13 se hablo del género de una superficie de Riemann, a continuación presentamos algunas propiedades de este que nos servirán.

Definición A.0.12. Sea X una superficie de Riemann compacta, se define el género de X de la siguiente manera $g := \dim_{\mathbb{C}} H_X^1(\mathcal{O})$.

Teorema A.0.13. Para una superficie de Riemann X se tienen los siguientes resultados:

- a) Si X es de género cero entonces es biholomorfa a la esfera de Riemann.
- b) Si g es el género de X entonces $g = \dim H_X^1(\mathcal{O}) = \dim H_X^0(\Omega)$.

Apéndice B

Inversión respecto a un círculo y principio de reflexión de Schwarz.

Este apéndice está dedicado a los resultados necesarios para analizar el ejemplo posterior al teorema del mapeo de Riemann. Las demostraciones serán omitidas pero se pueden consultar en el capítulo 2 de [9], o bien en el segundo capítulo de mi tesis de licenciatura: isometrías del plano hiperbólico mediante la clasificación de haces de geodésicas, en el cual se hicieron las demostraciones a detalle de resultados importantes sobre el disco de Poincaré y el semiplano superior así como también de la *inversión respecto a un círculo*.

El semiplano superior y el disco de Poincaré son algunos de los modelos de la geometría hiperbólica. Dicha geometría tiene mucho en común con la euclidiana, sin embargo, las nociones de líneas y círculos a las que estamos acostumbrados tienen algunas modificaciones (véase más adelante la figura B.1), al igual que la métrica que usamos. Las definiciones formales de estos conjuntos se presentan a continuación.

Definición B.0.1. *El conjunto*

$$\mathbb{H}^2 := \{z : \text{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

es llamado el **semiplano superior**, este es un modelo para el plano hiperbólico, en el cual usamos la siguiente métrica ρ : sean $z, w \in \mathbb{H}^2$, se define

$$\rho(z, w) := \inf \{ \|\gamma\| \mid \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}^2 \text{ es una curva diferenciable por partes tal que, } \gamma(a) = z \text{ y } \gamma(b) = w \},$$

$$\text{donde } \|\gamma\| = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}[\gamma(t)]} dt.$$

Definición B.0.2. El *disco de Poincaré* se define como sigue:

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

A través de la transformación de Cayley (véase ejemplo 1.1.3) es posible llevar las propiedades conocidas de $\mathbb{H}^2$ al disco de Poincaré, en particular es posible dotarlo de una métrica y probar el siguiente teorema.

Teorema B.0.3. Las geodésicas (curvas de longitud mínima) del disco de Poincaré son:

- 1.- Arcos de circunferencia que son ortogonales a la frontera de $\mathbb{E}$.
- 2.- Diámetros de $\mathbb{E}$.

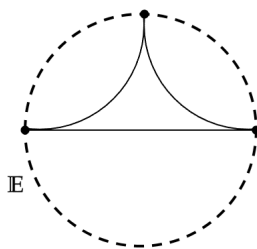


Figura B.1: Triángulo en el disco de Poincaré con vértices en la frontera.

Definición B.0.4. Decimos que dos puntos colineales, z y z' , son *inversos respecto a un círculo con centro en el punto o y radio $r > 0$* , si se satisface la siguiente igualdad

$$\overline{oz} = \frac{r^2}{\overline{oz'}},$$

donde $\overline{oz}$ y $\overline{oz'}$ representan la distancia que hay de o a z y de o a z' , respectivamente, (véase figura B.2).

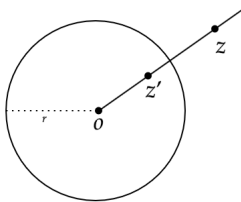


Figura B.2: Puntos inversos respecto a un círculo.

La inversión respecto a un círculo satisface las siguientes propiedades:

- 1) Cada punto distinto del centro de inversión (el punto o) tiene un solo inverso.
- 2) Si z y z' son puntos inversos distintos, entonces uno se encuentra dentro del círculo de inversión y el otro fuera de este.

- 3) Cada punto en el círculo de inversión es su propio inverso.
- 4) Si dos curvas γ_1 y γ_2 se intersecan en un punto z_0 distinto del centro de inversión, su ángulo de intersección es el mismo en magnitud, pero con signo opuesto, que el ángulo de las curvas inversas γ'_1 y γ'_2 en el punto z'_0 .

Para finalizar presentamos dos resultados cuya demostración se pueden encontrar en las páginas 57 y 224 de [16]. Para el primero de ellos necesitamos las siguientes nociones.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ que es *simétrico* con respecto a la recta real, es decir, un punto z está en Ω si y solo si $\bar{z}$ está en Ω .

Denotemos por Ω^+ a la parte de Ω contenida en $\mathbb{H}^2$ y Ω^- la parte contenida en el semiplano inferior, y sea $I = \Omega \cap \mathbb{R}$. Tenemos entonces que

$$\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-.$$

Teorema B.0.5. (*Principio de reflexión de Schwarz*) Si f es una función holomorfa en Ω^+ que se extiende continuamente a I tal que f toma valores reales en I entonces existe una función F holomorfa en todo Ω tal que $F = f$ en Ω^+ .

Teorema B.0.6. (*del mapeo de Riemann en el plano complejo*) Si Ω es un abierto propio de $\mathbb{C}$ y simplemente conexo entonces existe una única función biholomorfa entre Ω y $\mathbb{E}$.

Definición B.0.7. Un punto $z_0 \in \partial\Omega$ es **regular** si existe $r_0(z_0) > 0$ tal que para todo $0 < r < r_0(z_0)$ se tiene

$$\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} = \{z_0 + re^{i\theta} \mid \theta_1(r) < \theta < \theta_2(r)\},$$

para algún $\theta_1(r) < \theta_2(r)$. En otras palabras, $\Omega \cap \partial D_r(z_0)$ es un arco para todo $r > 0$ pequeño. Se dice que Ω es regular si todo punto en $\partial\Omega$ es regular. (No confundir esta definición con la dada en la definición 3.2.17).

Teorema B.0.8. Si Ω es un abierto acotado, simplemente conexo y regular entonces el biholomorfismo del teorema B.0.6 se extiende a un biholomorfismo en la cerradura de los conjuntos $\bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}$.

Conclusión

A lo largo de este trabajo se han utilizado de conceptos y resultados provenientes de distintas áreas, pero se ha procurado dar un énfasis particular al análisis complejo y la topología.

Una vez obtenido el teorema del mapeo de Riemann se puede aplicar en distintas áreas de las matemáticas y la física teórica. Algunas de ellas incluyen:

- Teoría Teichmüller: Esta área estudia las estructuras complejas conformes en superficies de Riemann, así como los espacios de clases de equivalencia que se obtienen al considerar deformaciones conformes.
- Funciones elípticas: Al igual que las funciones racionales pueden entenderse como funciones en la esfera de Riemann, las funciones elípticas son funciones meromorfas definidas sobre un toro, el cual es una superficie de Riemann.
- Teoría de cuerdas: En física teórica, la teoría de cuerdas modela partículas fundamentales como objetos unidimensionales en lugar de puntos (cuerdas). Las trayectorias de estas cuerdas en el espacio-tiempo se representan mediante superficies bidimensionales, las cuales se modelan como superficies de Riemann.

Finalmente, queda abierta la pregunta de si existe un resultado análogo al teorema del mapeo de Riemann en dimensiones superiores.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L.V. (2016) *Riemann Surfaces*. Princeton University Press.
- [2] Fisher S. (1999). *Complex Variables*. 2nd Edition. Dover publications.
- [3] Forster, O. (1981). *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer-Verlag.
- [4] Gauthier, P. (2010). *Lectures on Several Complex Variables*. Springer.
- [5] Godinho L., Natário J. (2014). *An Introduction to Riemannian Geometry. With Applications to Mechanics and Relativity*. Springer.
- [6] Hatcher A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
- [7] Hershel M., Farkas I., L.V. (1980). *Riemann Surfaces*. Springer-Verlag New York.
- [8] Huybrechts D. (2007). *Complex Geometry, an Introduction*. Springer-Verlag.
- [9] Lascurain A. (2005). *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. UNAM.
- [10] Lee J. M. (2000). *Introduction to Smooth Manifolds*. Second Edition. Springer GTM.
- [11] Lee J. M. (2000). *Introduction to Topological Manifolds*. Springer GTM.
- [12] Marsden, J.E., Hoffman, M.J. (2003). *Basic Complex Analysis*. New York: W.H. Freeman.
- [13] Miranda, R. (1995). *Algebraic curves and Riemann Surfaces*. American Mathematical Society.
- [14] Munkres, J.R. (2018). *Topology*. New York, NY: Pearson.
- [15] Rotman J. (2003). *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall.
- [16] Stein E., Shakarchi R. (2003). *Complex Analysis*. Princeton University Press.

-
- [17] Schlag, W. (2014). *A course in complex analysis and Riemann Surfaces*. American mathematical Society.
 - [18] Ward J., Churchill V. (2003). *Complex Variables and Applications*. McGraw Hill. 7th Edition.
 - [19] Warner F. W. (1971). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag.