



Universidad Autónoma de Chiapas

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

Dinámica de las estrellas en  
cúmulos compactos con un  
agujero negro central de masa  
intermedia

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias Físicas

PRESENTA

José de Jesús Velázquez Marín x170033

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Filiberto Hueyotl Zahuantitla.

CO-DIRECTOR DE TESIS

Dr. Omar López Cruz.



AUTÓNOMA

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; Marzo del 2025

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas  
25 de Marzo de 2025  
Oficio No. FCFM/0187/25

**Dr. Filiberto Hueyotl Zahuantitla**  
Director de tesis.  
Investigador por México SECIHTI.  
Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas Unach.  
**p r e s e n t e**

**Estimado Dr. Filiberto**

Por este medio me permito informarle que, una vez efectuada la revisión de la tesis de nominada:

***"Dinámica de las estrellas en cúmulos compactos con un agujero negro central de masa intermedia"***

Ha sido aceptada para sustentar el examen de grado de la Maestría en Ciencias Físicas del **Lic. José de Jesús Velázquez Marín** con matrícula escolar X170033.

Por lo tanto, se Autoriza la Impresión de la tesis, en virtud de haber cumplido con los requisitos correspondientes.

Sin más por el momento quedo de Usted, enviándole un cordial saludo.

**Atentamente**  
**"Por la conciencia de la neces**



**Dr. Orlando Díaz Hernández**  
Director

C. c. p. Dra. María del Rosario Soler Zapata, Secretaria Académica de la FCFM  
Mtro. René Solís López., Encargado del Control Escolar Posgrado de la FCFM  
Archivo.

Oficio FCFM/CIP/001/2025

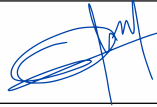





A quién corresponda

El que suscribe, Comité de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas de la universidad autónoma de Chiapas, hace constar que mediante minuta FCFM/MCF/002/2024 de los integrantes del NA de la Maestría en Ciencias Físicas, que el Dr. Omar López Cruz, Investigador Titular “B” de la Coordinación de Astrofísica del INAOE, miembro del SNII nivel 3 fue autorizado para ser Co-director del estudiante Lic. José de Jesús Velázquez Marín

Sin más por el momento, reciba un afectuoso saludo.

ATENTAMENTE

“Por la conciencia de la necesidad de servir”

| Grado académico y nombre completo | Cargo en el CIP  | Firma   |
|-----------------------------------|--|---|
| Dr. Orlando Díaz Hernández        | Presidente   |   |
| Dr. Ariel Flores Rosas            | Secretario   |  |
| Dr. Roberto Arceo Reyes           | Representante de los Cuerpos Académicos  |  |
| Dr. Víctor Iván Ruiz Pérez        | Vocal titular del Consejo Consultivo de Investigación y Posgrado   |  |
| Dr. Armando Mendoza Pérez         | Representante de los Núcleos Académicos de los Programas de Posgrado   |   |
| Dr. Javier Sánchez Martínez       | Representante de las profesoras y los profesores con reconocimiento vigente en el ámbito de la investigación científica, tecnológica, humanística y de innovación. |  |
| Lic. Jesús Erick Pérez Pérez      | Representación estudiantil de la Maestría en Ciencias Físicas  |  |



Código: FO-113-05-05

Revisión: 0

## CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

La alumna (s) o él alumno (s) José de Jesús Velázquez Marín, autora (s) o autor (es) de la tesis bajo el título de Dinámica de las estrellas en cúmulos compactos con un agujero negro central de masa intermedia presentada y aprobada en el año 2025 como requisito para obtener el título o grado de Maestro en Ciencias Físicas, autorizo licencia a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), para que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para su consulta, reproducción parcial y/o total, citando la fuente, que contribuya a la divulgación del conocimiento humanístico, científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.
- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 28 días del mes de Marzo del año 2025.

José de Jesús Velázquez Marín

Nombre y firma de la alumna (s) o él alumno (s)

# Declaratoria

Los resultados presentados en esta tesis se obtuvieron de cálculos originales y no se han tomado de otras fuentes, exceptuando algunos desarrollos en donde se ha indicado la fuente original.

# Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que han sido parte de este proceso académico y personal, quienes, de alguna manera, dejaron una huella en mi vida durante la realización de esta tesis. Este trabajo no solo es mío; yo no podría haber concluido este proyecto si no fuera por personas muy importantes en mi vida, como:

Mi madre, que siempre fue mi refugio y mi mayor apoyo. Gracias por creer en mí cuando yo dudaba, por las palabras de aliento que me impulsaron a seguir adelante y por respetar cada decisión que tomé. Su amor y confianza me han dado la fuerza necesaria para superar cada obstáculo. Este logro también es un logro de ella.

A mis hermanos, que de manera directa o indirecta han estado conmigo y me han apoyado durante todo este proceso. A pesar de la distancia física que nos separa, sé que nuestros corazones están cerca, y sé que, aunque no lo mencionen directamente, están orgullosos de mí.

Mis amigos, quienes con su compañía, palabras de ánimo y momentos de alegría me recordaron la importancia de mantener el equilibrio entre el esfuerzo académico y la vida personal. Aunque no todos están mencionados directamente, quiero que sepan que forman una pieza clave para mi vida. En particular, quiero mencionar a mi mejor amigo Rubén Torres, que más que un amigo, es un hermano. No solo ha fungido como apoyo moral, sino que también ha sido parte de varias discusiones académicas que tuvimos juntos. A Marisol Jiménez, a Javier Flores, a José Luis Pon, a Alejandra Zúñiga, a Luis Fernando Gómez, a Osmar Eliel y a mis compañeros de posgrado, les agradezco mantenerse a mi lado. Quizás no siempre fui el amigo que merecen, pero a mi manera, los aprecio y valoro profundamente. Para mí ustedes son mi



segunda familia.

Mi director de tesis, el Dr. Filiberto Hueyotl, quien compartió conmigo su conocimiento, su tiempo y su dedicación. Su guía fue fundamental para enfrentar los retos de este proyecto y me permitió crecer no solo como estudiante, sino también como persona. Gracias por su paciencia, sus consejos y por motivarme a superar mis propios límites. Por todo el apoyo y la confianza que mostró hacia mí y mis capacidades.

A mi codirector de tesis, el Dr. Omar López-Cruz, quien me apoyó durante mi estancia en el INAOE y fungió como una de las personalidades que más me inspiraron en mi trabajo. Fue clave durante todo el proceso de la tesis, compartiendo su experiencia y gran recorrido en el campo de la astrofísica. Además, me brindó consejos, ideas y un apoyo constante durante toda mi estancia académica.

A mi asesor, el Dr. Mario Aguirre, quien contribuyó significativamente en la tesis al revisar los códigos de análisis de datos y al supervisar tanto el seguimiento como la escritura del trabajo.

Quiero agradecer también a los estudiantes del INAOE, quienes enriquecieron esta experiencia con sus ideas, su apoyo y su compromiso. El aprendizaje compartido y el trabajo en equipo han sido una parte invaluable de este camino. En particular, quiero agradecer al Dr. Ivanio Puerari y al Dr. Divakara Mayya, por su apoyo y las charlas que compartieron conmigo durante mi estancia.

Finalmente, mi gratitud a todas las personas que, aunque no mencione directamente, marcaron mi camino de manera significativa, aquellas que con sus palabras de inspiración, su ayuda inesperada o simplemente su confianza en mí hicieron posible este logro.

A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento. Esta tesis es un reflejo no solo de mi esfuerzo, sino del apoyo incondicional de quienes me rodearon a lo largo de este trabajo. Gracias por ser parte de esta historia.

# Siglas

D F Función de Distribución. 16, 50

G A D G E T : Galaxies with Dark Matter and Gas intEracT. 66

G C Cúmulo Globular. 24, 40, 43, 46, 66, 73

I M B H Agujero Negro de Masa Intermedia. 7, 10, 41–44, 46, 75, 81, 82, 84

I M F Función inicial de masa. 10, 27, 29

S P H Smoothed-particle hydrodynamics. 66

# Introducción

Los cúmulos estelares compactos han sido objeto de estudio intensivo en la astrofísica debido a su importancia en la comprensión de la dinámica estelar y la evolución de sistemas ligados gravitacionalmente. Estos cúmulos, que contienen cientos de miles de estrellas en un volumen relativamente pequeño (alrededor de 10 pc), son laboratorios ideales para estudiar fenómenos como la evolución estelar, incluyendo la colisión estelar, así como la disipación de energía.

En particular, la presencia de agujeros negros de masa intermedia (IMBH, por sus siglas en inglés) en el centro de estos cúmulos ha sido propuesta como una posible explicación de ciertos fenómenos observados, como las altas velocidades estelares y las emisiones de rayos X ultra luminosos ([Miller and Hamilton, 2002](#)). Los IMBH, con masas entre  $100 - 10^6$  masas solares, representan una clase intermedia entre los agujeros negros estelares y los agujeros negros supermasivos, cuya existencia es aún objeto de debate, pero que podrían tener un rol clave en la evolución de los cúmulos y la formación de agujeros negros supermasivos en galaxias.

En este contexto, las simulaciones de N-cuerpos se han convertido en una herramienta fundamental para investigar la dinámica de estos cúmulos en presencia de un IMBH. Estas simulaciones permiten modelar las interacciones gravitacionales entre las estrellas y el agujero negro, así como predecir la evolución temporal del cúmulo. Al comparar los resultados de estas simulaciones con datos observacionales, es posible obtener información crucial sobre la presencia y las características de los IMBHs, y mejorar nuestra comprensión de la dinámica estelar en este tipo de entornos extremos.

## Objetivo

El objetivo de esta tesis es modelar la dinámica estelar de cúmulos globulares, enfocándose en la influencia de un agujero negro de masa intermedia situado en su centro. A través de simulaciones de N-cuerpos, se estudia la evolución dinámica de estos sistemas, los efectos gravitacionales que un IMBH puede ejercer sobre su entorno estelar, para determinar posibles rastros observacionales que permitan diferenciar cúmulos globulares con agujeros negros centrales de aquellos que no los poseen.

Para ello, se considera un modelo en el que los cúmulos estelares son caracterizados por perfiles de densidad esféricos, tomando en cuenta distribuciones de masa inicial basadas en las funciones más aceptadas, como la función de Salpeter y Kroupa. Las simulaciones permitirán explorar cómo las interacciones gravitacionales entre las estrellas y el agujero negro central afectan la dinámica global del cúmulo, incluyendo parámetros como la dispersión de velocidades estelares, la distribución de masa y la estabilidad del cúmulo.

Mediante este enfoque, se espera arrojar luz sobre los posibles efectos observables que un IMBH podría generar en un cúmulo globular, como alteraciones en su estructura cinemática o en su densidad estelar central. Además, se busca contribuir al desarrollo de herramientas para interpretar datos astronómicos, facilitando la identificación de cúmulos que alberguen agujeros negros en su núcleo.

## Estructura de la tesis

En el Capítulo 1, se introducirá la dinámica estelar en un cúmulo, presentando las ecuaciones fundamentales que rigen el movimiento de las estrellas. Este capítulo proporcionará los conceptos necesarios para comprender la investigación realizada. En el Capítulo 2, se estudiarán los cúmulos globulares, describiendo sus propiedades principales y explorando los diferentes modelos teóricos de densidad (Plummer, Schuster y King) que se utilizarán en este trabajo, así como sus diferencias clave. El Capítulo 3 examinará la posible existencia de agujeros negros de masa intermedia en cúmulos globulares, revisando la literatura que explora las implicaciones dinámicas de su presencia en dichos cúmulos. En el Capítulo 4, se modelan las

---

características de las estrellas de los cúmulos en base a los modelos teóricos presentados en el Capítulo 2, obteniendo así sus masa posiciones y velocidades. En el Capítulo 5, se describirá el código de simulación de N-cuerpos GADGET-4. Se describe cómo se modela y calcula la dinámica estelar, y se definen valores de parámetros clave. En el Capítulo 6, se presentarán los resultados de la tesis. En el Capítulo 7, se presentarán las conclusiones de la tesis, así como sus aportaciones y posibles futuras perspectivas.

En el Apéndice A, se presentan los pasos para instalar GADGET-4. En el Apéndice B, se muestra como ejecutar un ejemplo de GADGET-4. En el Apéndice C, se muestra un ejemplo del archivo de parámetros. En el Apéndice D, se indican comandos relevantes del archivo de configuraciones de GADGET-4, utilizados en esta investigación. En el Apéndice E, se muestran comandos relevantes del archivo de parámetros de GADGET-4, utilizados en esta investigación.

# Índice general

|   |    |
|---|----|
| 1. Conceptos Previos  | 13 |
| 1.1. Simulaciones de N-cuerpos . . . . .                                      | 13 |
| 1.2. La Función de Distribución (DF) . . . . .                                | 16 |
| 1.3. La Ecuación de Jeans . . . . .   | 18 |
| 1.4. DF para Sistemas Esféricos . . . . .                                     | 20 |
| 1.5. Diagrama de Hertzsprung-Russell (H-R) . . . . .                          | 21 |
| 2. Propiedades de Cúmulos Globulares  | 25 |
| 2.1. Cúmulos Globulares . . . . .   | 25 |
| 2.2. Función de Masa Inicial (IMF) . . . . .                                  | 27 |
| 2.3. Modelos Estáticos de GCs . . . . .                                       | 30 |
| 2.3.1. Modelo de Densidad de Plummer . . . . .                                | 31 |
| 2.3.2. Modelo de Densidad de King . . . . .                                   | 33 |
| 2.3.3. Modelos de Densidad de Schuster . . . . .                              | 36 |
| 3. Relación de Agujeros Negros de Masa Intermedia (IMBH) y Cúmulos Globulares | 40 |
| 3.1. Escenarios de Formación de IMBH . . . . .                                | 41 |
| 3.2. Panorama Observacional . . . . .   | 42 |
| 3.3. Panorama Teórico . . . . .   | 44 |
| 4. Modelado de las Distribuciones Estelares                                   | 47 |
| 4.1. El Modelado de la Densidad de Plummer . . . . .                          | 47 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.2. El Modelado de la Densidad de King . . . . .                            | 49  |
| 4.3. Modelado de la Densidad de Schuster. . . . .                            | 51  |
| 4.3.1. Caso $\beta = \frac{3}{2}$ . . . . .                                  | 52  |
| 4.3.2. Caso $\beta = 2$ . . . . .  | 57  |
| 4.4. Validación de Condiciones Iniciales . . . . .                           | 60  |
| 4.4.1. Distribución Espacial de las Partículas (estrellas) . . . . .         | 61  |
| 4.4.2. Perfiles Radiales de la Densidad de Partículas . . . . .              | 61  |
| 4.4.3. Distribuciones de Masa Inicial . . . . .                              | 61  |
| 4.4.4. Distribuciones de Velocidad y Velocidades de Escape . . . . .         | 62  |
| 5. G A D G E T . . . . .   | 66  |
| 5.1. Dinámica Sin Colisión . . . . .   | 67  |
| 5.2. El Archivo de Condiciones Iniciales (IC) . . . . .                      | 70  |
| 5.3. Configuración de Simulaciones . . . . .                                 | 72  |
| 5.3.1. El Archivo de Configuración (Config.sh) . . . . .                     | 72  |
| 5.3.2. El Archivo de Parámetros (Param.txt) . . . . .                        | 73  |
| 5.4. Justificación del Parámetro $\theta$ . . . . .                          | 74  |
| 5.5. Justificación del Parámetro $\epsilon$ . . . . .                        | 78  |
| 6. Resultados . . . . .  | 81  |
| 6.1. Visualización del Espacio Fase. . . . .                                 | 83  |
| 6.2. Análisis de la Distribución de Masa . . . . .                           | 84  |
| 6.3. Búsqueda de Observables . . . . .                                       | 87  |
| 6.4. Análisis de Velocidad RMS, Radial y Tangencial . . . . .                | 89  |
| 6.5. Análisis Comparativo de Diferentes Configuraciones de Densidad. . . . . | 91  |
| 7. Conclusiones . . . . .  | 107 |
| 7.1. Hallazgos principales . . . . .   | 107 |
| 7.2. Trabajos a Futuro . . . . .   | 109 |
| 7.3. Perspectivas . . . . .  | 110 |
| A. Instalación de G A D G E T - 4 . . . . .                                  | 112 |

|  |     |
|--|-----|
| B. Ejecución de una simulación de ejemplo  | 116 |
| C. Ejemplo de archivo de parámetros        | 118 |
| D. Comandos del archivo de configuraciones | 122 |
| E. Comandos del archivo de parámetros      | 126 |

# Capítulo 1

## Conceptos Previos

Este capítulo introduce los conceptos fundamentales en los que se basa este trabajo, que son las simulaciones de N-cuerpos de la dinámica de las estrellas que forman cúmulos de estrellas densos y esféricos, como los cúmulos globulares y cúmulos estelares nucleares. Se introduce la función de distribución, que es fundamental para el modelado de N-cuerpos y permite determinar las coordenadas y las velocidades de las partículas que representan a las estrellas del cúmulo. Se obtiene la fórmula general para calcular la función de distribución en sistemas esféricos.

### 1.1. Simulaciones de N-cuerpos

En este trabajo, se realizaron simulaciones para estudiar los efectos gravitacionales de un agujero negro de masa intermedia ( $10^2 < M/M_{\odot} < 10^6$ ) localizado en el centro de un cúmulo de estrellas masivo, de simetría esférica y con diversos perfiles de densidad estelar. Para llevar a cabo las simulaciones, se utilizó la técnica de N-cuerpos.

El problema de N-cuerpos implica la interacción gravitacional, eléctrica, magnética, entre otros, de N cuerpos discretos, generando un total de  $N(N-1)/2$  interacciones. La complejidad del problema aumenta drásticamente al pasar de miles a millones de cuerpos, lo que hace necesarias diversas aproximaciones para reducir el costo computacional. Un método común para simplificar el número de interacciones es el algoritmo de Barnes-Hut, que reduce las

interacciones a  $N \log N$  (Barnes and Hut, 1986).

Existen dos enfoques principales para los cálculos de N-cuerpos, cada uno con su propia metodología y problemas específicos. Los códigos colisionales simulan la evolución de sistemas estelares con  $N_*$  estrellas, utilizando un integrador numérico para resolver las ecuaciones de movimiento de  $N = N_*$  partículas. Por otro lado, los códigos no colisionales simulan la evolución de  $N_*$  estrellas siguiendo el movimiento de  $N \ll N_*$  partículas (Brandt, 2022).

Ambos enfoques (colisional y no colisional) presentan ventajas y desventajas en la simulación de sistemas estelares. En los códigos colisionales, es necesario seguir con precisión los encuentros cercanos entre estrellas y la formación y evolución de sistemas binarios. Esto se rige por las ecuaciones de Newton. Para una partícula  $\alpha$ , la fuerza neta que experimenta está dada por:

$$F_{\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} G m_{\beta} m_{\alpha} \frac{r_{\beta} - r_{\alpha}}{|r_{\beta} - r_{\alpha}|^3}. \quad (1.1)$$

Esto implica el cálculo de  $N - 1$  distancias  $|r_{\alpha} - r_{\beta}|$ . Cada una de estas distancias puede ser usada dos veces, una para la contribución de  $\beta$  a  $\alpha$  y viceversa. Si las fuerzas son calculadas por suma directa, se tendrán  $\frac{1}{2}N(N - 1)$  distancias a evaluar, lo cual aumenta el tiempo computacional por paso de tiempo como  $N^2$ .

En contraste, un código no colisional imita un sistema con un número “infinito” de partículas, lo que implica que el sistema tiene una densidad de distribución continua  $\rho(x, t)$ . Las posiciones reales de las partículas modeladas en estos sistemas deben considerarse como muestras de Monte Carlo de la distribución de densidad. A diferencia de los códigos colisionales, los no colisionales no necesitan calcular cada interacción individual, sino que el tiempo de cálculo se escala como  $N \log N$  en lugar de  $N^2$ , lo cual resulta más eficiente cuando el número de partículas es grande. Esto se logra notar con la gráfica de complejidad que se encuentra en la Figura 1.1. Usualmente, estos métodos aproximan las fuerzas que actúan y dividen el espacio en regiones, como los algoritmos de árbol (dividen el espacio en cubos, y estos a su vez en cubos más pequeños, hasta encontrar una partícula) y los algoritmos de malla (que dividen en pequeñas mallas realizando un promedio de la masa en cada región) (Binney and Tremaine, 2008).

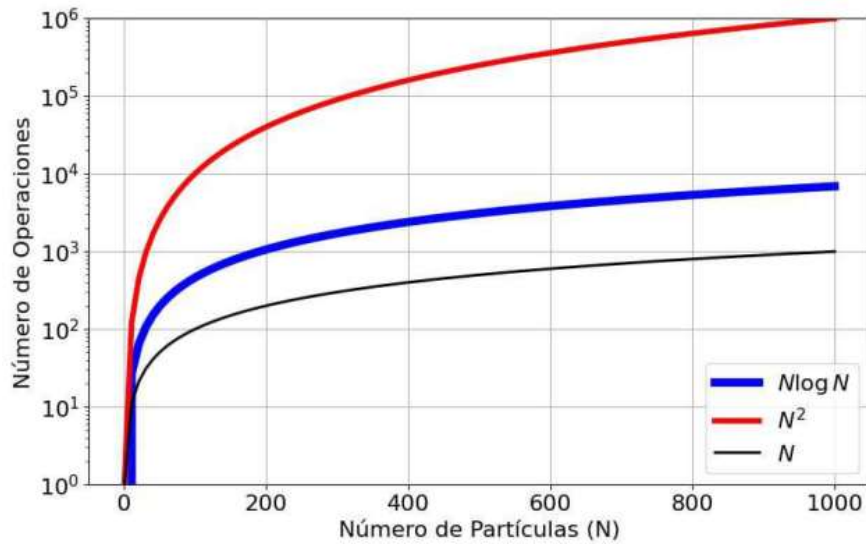


Figura 1.1: Número de operaciones en función del número de partículas en una simulación de N-cuerpos. La curva que requiere menos operaciones es la correspondiente a  $N$ , representada por la curva negra. Sin embargo, para el estudio de interacciones gravitacionales,  $N \log N$  requiere menos operaciones que  $N^2$ , como se muestra en las curvas azul y roja respectivamente.

En este estudio, se considera un sistema sin colisiones y en equilibrio dinámico. Esta aproximación describe de manera adecuada las órbitas de las estrellas simuladas, asumiendo que las masas están distribuidas suavemente en el espacio. Aunque en sistemas pequeños, con unos pocos miles de estrellas, las órbitas pueden desviarse significativamente, esto no es relevante para cúmulos globulares, donde el número de estrellas es mucho mayor ( $N \approx 10^5$ ). En estos sistemas, el tiempo de cruce ( $t_{\text{cruce}}$ , que es el tiempo que tarda una estrella típica en atravesar el sistema) es de aproximadamente  $10^5$  años, mientras que su vida total se extiende por unos 10 Gyr. Las desviaciones orbitales son insignificantes en escalas de tiempo menores al tiempo de relajación ( $t_{\text{relajación}}$ , que es el tiempo necesario para que el sistema alcance el equilibrio dinámico a través de interacciones gravitacionales). Esto de acuerdo a la relación:

$$t_{\text{relajación}} \approx \frac{0.1 N}{\ln N} t_{\text{cruce}}, \quad (1.2)$$

donde  $N$  es el número de estrellas. Si sustituimos  $N = 10^5$ , podemos ver que este cálculo es de al menos 3 órdenes de magnitud de diferencia, lo que nos permite asumir que el tiempo de relajación es mucho mayor al tiempo de cruce, la deducción de la ecuación anterior se

encuentra en [Binney and Tremaine \(2008\)](#).

## 1.2. La Función de Distribución (DF)

En la modelación de un sistema estelar sin colisiones, seguir la órbita individual de cada una de las miles o millones de estrellas es impráctico. En su lugar, las predicciones resultan de la probabilidad de encontrar una estrella en un espacio de seis dimensiones, representado por  $dRdV$ , donde  $dR = dx dy dz$  y  $dV = dv_x dv_y dv_z$  son los elementos volumétricos de espacio y velocidad en el espacio tridimensional. Introducimos entonces la función de distribución (DF, de sus siglas en inglés)  $f(R, V, t)$ , de manera que  $f(R, V, t)dRdV$  representa la probabilidad de que una estrella aleatoria tenga coordenadas espaciales y de velocidad en los intervalos  $[R, R+dR]$  y  $[V, V+dV]$  en el tiempo  $t$ . Suponemos que todas las estrellas tienen la misma probabilidad (son equiprobables) de ocupar un estado dado en el espacio fase, lo que implica que  $f$  está normalizada. Entonces

$$\int dRdV f(R, V, t) = 1, \quad (1.3)$$

donde la integral se extiende sobre todo el espacio fase.

El equivalente de la ecuación de continuidad en fluidos (que expresa la conservación de masa) para la conservación de probabilidad en el espacio fase es:

$$\frac{df}{dt} + \frac{\partial}{\partial w} (f \dot{w}) = 0, \quad (1.4)$$

donde  $w = (R, V)$  y, por lo tanto,  $\dot{w} = (\dot{R}, \dot{V})$ . El segundo término de la ecuación se puede descomponer en dos términos:

$$\frac{\partial}{\partial w} (f \dot{w}) = \frac{\partial}{\partial R} (f \dot{R}) + \frac{\partial}{\partial V} (f \dot{V}). \quad (1.5)$$

Además, recordando de mecánica clásica que:

$$\dot{R} = \frac{\partial H}{\partial V} \quad \text{y} \quad \dot{V} = -\frac{\partial H}{\partial X}, \quad (1.6)$$

donde  $H$  es el hamiltoniano del sistema, que se define como la suma de la energía cinética  $K$  y la energía potencial  $\Phi$ , es decir,  $H = K + \Phi$ , y dado que  $\frac{\partial^2 H}{\partial R \partial V} = \frac{\partial^2 H}{\partial V \partial R}$ , podemos simplificar el segundo término de la Ecuación (1.4) a:

$$\dot{R} \frac{\partial f}{\partial R} + \dot{V} \frac{\partial f}{\partial V}. \quad (1.7)$$

Sustituyendo los términos de (1.7) en la Ec. (1.4), obtenemos la ecuación de Boltzmann sin colisiones, también conocida como la ecuación de Vlasov:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{R} \frac{\partial f}{\partial R} + \dot{V} \frac{\partial f}{\partial V} = 0. \quad (1.8)$$

Esta ecuación puede reescribirse usando el corchete de Poisson  $[f, H] = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial H}{\partial V} - \frac{\partial f}{\partial V} \frac{\partial H}{\partial R}$  y la derivada lagrangiana como:

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad (1.9)$$

lo cual indica que el flujo a través del espacio fase de la probabilidad es incompresible; es decir, la densidad  $f$  en el espacio fase alrededor de una estrella permanece constante, aún si no lo es en todo el espacio fase.

Relacionando lo anterior con ciertas observables, para una posición arbitraria  $R$ , definimos la densidad de probabilidad  $\nu$  de encontrar una partícula en la posición  $R$  mediante:

$$\nu(R) \equiv \int dV f(R, V). \quad (1.10)$$

Si  $N$  es el número total de estrellas, la densidad numérica de estrellas en el espacio real es:

$$n(R) \equiv N v(R), \quad (1.11)$$

por lo que podemos relacionar  $v(R)$  con la densidad de luminosidad  $j(R) = Lv(R)$ , donde  $L$  es la luminosidad de la población estelar.

Luego, definimos la velocidad media en una posición  $R$  como:

$$\bar{v}(R) = \frac{1}{v(R)} \int dV V f(R, V), \quad (1.12)$$

y el tensor de dispersión de velocidades, el cual posee simetría, como:

$$\sigma_{ij}^2(R) \equiv \int dV (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f(R, V) = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j. \quad (1.13)$$

### 1.3. La Ecuación de Jeans

Definimos la integral de movimiento  $I(R, V)$  como cualquier función del espacio fase que sea constante a lo largo de una órbita. Una función del espacio fase es una integral de movimiento si y sólo si:

$$\frac{d}{dt} I[R(t), V(t)] = 0 \implies V \frac{\partial I}{\partial R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\partial I}{\partial V} = 0 \quad (1.14)$$

a lo largo de una órbita.

#### Teorema de Jeans

Cualquier solución en estado estacionario (es decir,  $f$  no depende del tiempo) de la ecuación de Boltzmann sin colisiones depende de las coordenadas del espacio fase solo a través de integrales de movimiento en el potencial dado, y cualquier función de las integrales produce una solución en estado estacionario de la ecuación de Boltzmann sin colisiones.

Este teorema garantiza que la DF de cualquier estado estacionario debe ser una función de integrales.

### Teorema fuerte de Jeans

Puede suponerse que la DF de un sistema estelar en estado estacionario, en el que casi todas las órbitas son regulares con frecuencias no resonantes, es una función solo de tres integrales de movimiento independientes, que pueden tomarse como las acciones.

En pocas palabras la DF depende de 3 integrales de movimiento  $f(I_1, I_2, I_3)$  independientes entre sí y conservadas (Binney and Tremaine, 2008).

Integrando la ecuación de Boltzmann (1.8) sobre todas las velocidades, y después multiplicando por  $v_j$ . Además recordando que  $\dot{V} = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV f v_j + \int V v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} v_j - \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \int d^3V \frac{\partial f}{\partial v_i} v_j = 0, \quad (1.15)$$

y utilizando el teorema de la divergencia podemos ver que la integral se reduce a

$$\int dV v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} = - \int dV f \frac{\partial v_j}{\partial v_i} = -\delta_{ij} v. \quad (1.16)$$

Luego, recordando la definición de velocidad media (1.12), podemos reescribirla como

$$\frac{\partial(v\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(v\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} + v \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0, \quad (1.17)$$

y usando la ecuación de continuidad con la velocidad media, que conserva la probabilidad como

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(v\bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (1.18)$$

restando  $v_j$  veces a la ecuación (1.17)

$$v \frac{\partial\bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j \frac{\partial(v\bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(v\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} = -v \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}, \quad (1.19)$$

y usando la definición de dispersión de velocidades (1.13), la Ecuación 1.19 se reescribe como

$$v \frac{\partial\bar{v}_j}{\partial t} + v\bar{v}_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -v \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \frac{(v\sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}, \quad (1.20)$$

la cual es conocida como la ecuación de Jeans (Binney and Tremaine, 2008).

## 1.4. D F para Sistemas Esféricos

En este estudio se consideran solo potenciales esféricos  $\Phi(r)$ ; a estos sistemas se les denomina como autoconsistentes, ya que la densidad es determinada por el potencial con la ecuación de Poisson y el potencial es determinado por las ecuaciones de Boltzmann sin colisión. Así presentamos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi G\rho, \quad (1.21)$$

donde  $\Psi \equiv -\Phi + \Phi_0$  es el potencial relativo con  $\Phi_0$  como alguna constante; a lo largo de este estudio, siempre tomaremos  $\Phi_0 = 0$  salvo que se indique lo contrario. Derivaremos una única D F ergódica (es decir, basta una trayectoria para obtener la información del sistema), recordando que la densidad es la integral de  $f$  sobre todas las velocidades. Así

$$v(r) = 4\pi \int_0^\Psi v^2 f(\Psi(r) - \frac{1}{2}v^2) d\varepsilon = 4\pi \int_0^\Psi d\varepsilon f(\varepsilon) \frac{v}{2(\Psi(r) - \varepsilon)}, \quad (1.22)$$

donde  $\varepsilon \equiv -E + \Phi_0 \equiv \Psi(r) - \frac{1}{2}v^2$  es la energía relativa, y  $v dv = -d\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  es elegido tal que  $f = 0$  con  $\varepsilon \leq 0$ . Suponemos que  $\Psi$  es una función monótona por lo que podemos escribir a  $v$  como función de  $\Psi$ , tal que

$$\frac{1}{8\pi} v(\Psi) = \int_0^\Psi d\varepsilon f(\varepsilon) \frac{v}{\Psi - \varepsilon}. \quad (1.23)$$

Derivando a ambos lados con respecto a  $\Psi$  tenemos

$$\frac{1}{8\pi} \frac{dv}{d\Psi} = \int_0^\Psi d\varepsilon v \frac{f(\varepsilon)}{\Psi - \varepsilon}. \quad (1.24)$$

Esta es una integral de Abel, por lo que recordamos la implicación

$$f(x) = \int_0^x \frac{dtg(t)}{(x-t)^\alpha} \implies g(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{dx f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}}. \quad (1.25)$$

Así, nuestra ecuación puede ser reescrita como

$$f(\epsilon) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{d}{d\epsilon} \int_0^R \frac{d\Psi}{\epsilon - \Psi} \frac{dv}{d\Psi} \quad (1.26)$$

La Ec. (1.26) es conocida como la fórmula de Eddington, la cual no garantiza una solución

que satisfaga el tomar un valor positivo, pero si conlleva el hecho de que una densidad esférica  $v(r)$  en un potencial  $\Phi(r)$  puede obtenerse una DF ergódica si y solo si  $\int_0^R \frac{d\Psi}{\epsilon - \Psi} \frac{dv}{d\Psi}$  es una función creciente de  $\epsilon$ .

## 1.5. Diagrama de Hertzsprung-Russell (H-R)

El diagrama Hertzsprung-Russell es un gráfico que relaciona el color de las estrellas con su magnitud o brillo, cantidades que pueden traducirse a temperatura efectiva versus luminosidad, entre otros parámetros físicos, como su tamaño, masa, etc. Este diagrama proporciona información de las poblaciones de estrellas que conforman un cúmulo, en el entendido de que no todas las estrellas nacen con la misma masa y que su evolución depende fuertemente de ésta. Para una buena comprensión, presentamos primero algunas relaciones, presentadas en [Choudhuri \(2010\)](#):

$$T \propto \frac{M}{R},$$

la cual describe cómo la temperatura de distintas estrellas es proporcional a su masa e inversamente proporcional a su radio. Análogamente, haciendo ciertas suposiciones, podemos deducir la relación masa-luminosidad, que viene dada por:

$$L \propto M^3, \quad (1.27)$$

lo que implica que las estrellas más masivas son las más luminosas.

Sea  $T_{\text{eff}}$  la temperatura efectiva en la superficie de una estrella. Si la estrella es mucho más

caliente internamente da lugar a que  $T_{\text{eff}}$  y la temperatura de la estrella se relacionen. Aunado a esto, si se considera que  $M \propto T^2$ <sup>1</sup>, y se asume que las temperaturas están relacionadas,  $M \propto T_{\text{eff}}^2$ , obtenemos que:

$$L \propto T_{\text{eff}}^6, \quad (1.28)$$

lo cual indica que la luminosidad y la temperatura de las estrellas están relacionadas entre sí. El diagrama de la luminosidad contra la temperatura superficial de una estrella se conoce como diagrama de Hertzsprung-Russell (o diagrama HR), debido a que ellos fueron los primeros en plasmar la relación entre variables por medio de dichas gráficas.

Una estrella se mantiene estable mientras tenga combustible nuclear que quemar. Como la cantidad de combustible nuclear es proporcional a la masa, y la velocidad a la que se quema el combustible es proporcional a la luminosidad, la vida  $\tau$  de una estrella es proporcional a:

$$\tau \propto \frac{M}{L}. \quad (1.29)$$

Haciendo uso de la relación masa-luminosidad, se obtiene que:

$$\tau \propto M^{-2}, \quad (1.30)$$

por lo que las estrellas más masivas tienen un tiempo de vida más corto. Esto a su vez, implica que a pesar de tener mucho más combustible nuclear, también lo consumen mucho más rápido que las estrellas de baja masa.

Cabe mencionar que, aunque son deducidas haciendo uso de varias suposiciones, estas ecuaciones son respaldadas por observaciones empíricas.

En el caso de las estrellas cercanas, podemos determinar las luminosidades y, a continuación, trazar el gráfico de las luminosidades frente a las temperaturas superficiales (obtenidas a partir de los espectros).

---

<sup>1</sup>De  $T \propto \frac{M}{R}$ , y de la generación de energía nuclear que viene dada por  $L \propto T^4 R^2$ , se deduce  $M \propto T^2$

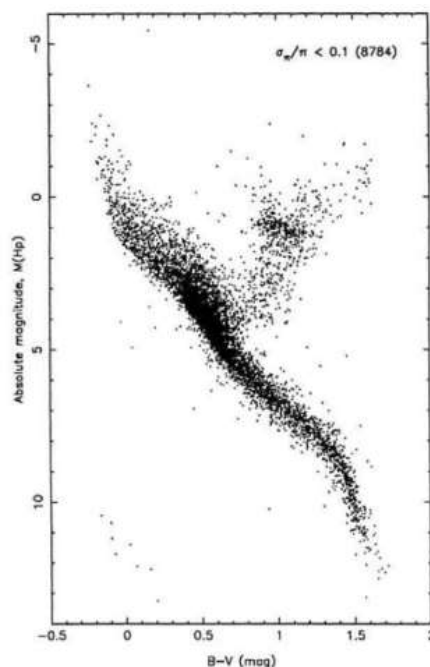


Figura 1.2: Diagrama HR de estrellas basado en las distancias del satélite astronómico Hiparcos. Tomado de (Perryman et al., 1995).

En el eje x de la Figura 1.2 observamos el índice de color  $B - V$  y la magnitud absoluta, que es la magnitud visual a 10 pc de distancia. A partir del color se obtiene la temperatura superficial de las estrellas y, de la magnitud, su luminosidad. Las estrellas que se encuentran a la derecha del diagrama son de color rojizo (más frías), mientras que las de la izquierda son de color azul (más calientes). Estos diagramas también son conocidos como diagramas de color-magnitud. Si notamos en la gráfica, la mayoría de las estrellas se encuentran en una línea diagonal, conocida como la secuencia principal. Las estrellas que se encuentran en la esquina superior derecha se denominan gigantes rojas y suelen ser mucho más luminosas que las estrellas rojas que se encuentran en la secuencia principal. Las de la esquina inferior izquierda, de color blanco azulado, tienen luminosidades más pequeñas que las azules de la secuencia principal y se les llama enanas blancas. Las estrellas pasan la mayor parte de su vida en la secuencia principal.

## Diagrama H-R de Cúmulos Globulares

Los cúmulos globulares (GCs) siguen una simetría esférica, están fuertemente ligados gravitacionalmente y contienen alrededor de  $10^5$  estrellas. Se encuentran alrededor de nuestra galaxia. La principal característica de estos sistemas es que todas sus estrellas nacieron al mismo tiempo y se encuentran prácticamente a la misma distancia de nosotros.

Como todas están a una distancia fija, podemos trazar los diagramas H-R con magnitud aparente (la magnitud del brillo que observamos) en lugar de magnitud absoluta, como en el diagrama anterior.

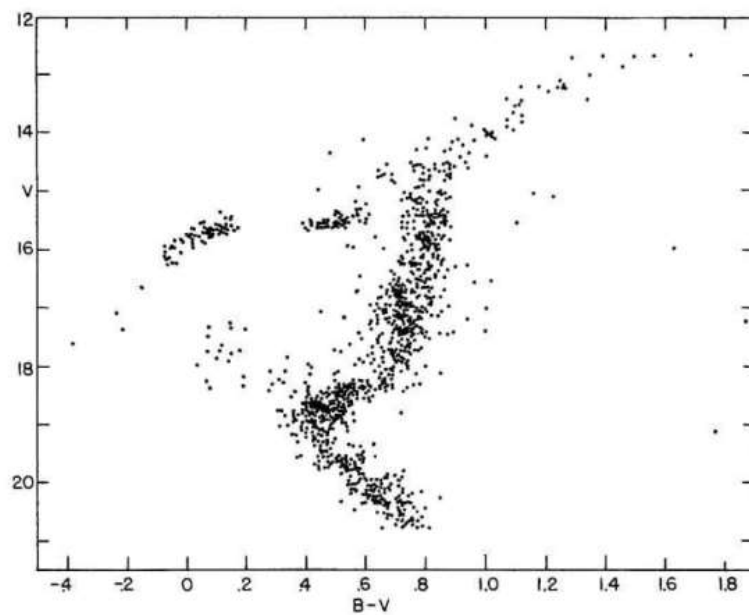


Figura 1.3: Diagrama HR del cúmulo globular M3, de [Johnson and Sandage \(1956\)](#).

La Figura 1.3 muestra el diagrama H-R de un GC. Notamos que la diagonal principal está truncada en  $B - V = 0.3$ , a diferencia de la anterior que continúa hasta  $B - V < 0$ . Sabemos que valores más bajos corresponden a estrellas más masivas, por lo que los cúmulos globulares carecen de estrellas masivas en la secuencia principal. Como sabemos, las estrellas masivas tienen vidas más cortas, por lo que en un GC, las estrellas masivas ya habrían muerto. Los cálculos teóricos sugieren que los cúmulos tienen alrededor de  $1.5 \times 10^{10}$  años.

# Capítulo 2

## Propiedades de Cúmulos Globulares

En este capítulo, se detallan las propiedades de los cúmulos que se utilizarán en las simulaciones: las poblaciones estelares del cúmulo definidas por la función de masa inicial así como los diferentes perfiles de densidad de estrellas dentro del cúmulo. Esto nos permitirá establecer un marco sólido para las simulaciones, garantizando que los resultados sean consistentes y representativos de los sistemas estelares modelados.

### 2.1. Cúmulos Globulares

Los Cúmulos Globulares son una colección esférica de estrellas que orbitan un núcleo galáctico como un satélite, ver Figura 2.1. Se conocen alrededor de 150-157 en la Vía Láctea. Están unidos gravitacionalmente, lo que les otorga forma esférica y alta densidad en el núcleo; en promedio, tienen una densidad de 0.4 estrellas por parsec cúbico, que aumenta a 100 – 1000 estrellas por parsec cúbico en el núcleo, con una distancia entre estrellas de 1 año luz, y son clasificados según el grado de concentración de su núcleo, donde los más concentrados son la clase I (por ejemplo, M 75, véase [Koch et al. \(2018\)](#) ) hasta la clase XII (por ejemplo, Palomar 12, véase [Rosenberg et al. \(1998\)](#)).

Generalmente, los GCs están libres de gas y polvo, además de no tener una activa formación estelar. Suelen estar compuestos por estrellas viejas con bajos contenidos de metales, formadas principalmente por hidrógeno y helio. Contienen algunas de las estrellas más viejas de la



galaxia, con edades de 10-13 mil millones de años, y abundancia de estrellas rojas de baja masa y amarillas de masa intermedia, además de la falta de estrellas tipo O y B, lo que indica su gran antigüedad. Muchas de sus estrellas se encuentran en una etapa similar de evolución estelar.

Los GCs contienen alrededor de  $10^5 - 10^6$  miembros, que se pueden simular mediante aproximaciones de N-cuerpos. En la práctica, las desviaciones de un verdadero equilibrio termodinámico a menudo no son significativas. Las simulaciones de N-cuerpos muestran un comportamiento suave de las aproximaciones de los parámetros termodinámicos a lo largo del tiempo, es decir, son sistemas prácticamente en equilibrio.

Los GCs son considerados estructuras viejas, con edades comparables a la edad del Universo mismo; los más viejos tienen una edad de  $13.5 \pm 2$  Gyr, con una edad mínima de 10.5 Gyr (Marr, 2020).



Figura 2.1: Imagen obtenida del telescopio Hubble del cúmulo globular Messier 80, Autor: NASA, ESA, A. Sarajedini (University of Florida) y G. Piotto (University of Padua)

## 2.2. Función de Masa Inicial (IMF)

Los modelos de evolución estelar nos dicen que las estrellas de baja masa viven más tiempo que las más masivas. La función inicial de masa o IMF denotada por  $\epsilon(m)$  especifica la distribución de masas de estrellas justo después de su formación por lo que, después de un estallido de formación estelar en alguna región, el número de estrellas ( $dn$ ) con masa en el intervalo  $(m, m + dm)$  es dado por

$$dn \propto \epsilon(m)dm, \quad (2.1)$$

donde la propuesta para la normalización de  $\epsilon(m)$  es arbitraria.

Hay dos maneras comunes para fijar el valor de normalización. La primera alternativa es

$$\int_0^Z \epsilon(m)dm = n_{\text{total}}, \quad (2.2)$$

donde  $n_{\text{total}}$  es el número total de estrellas recién formadas que hay en el brote. Si normalizamos la integral

$$\int_0^Z \epsilon(m)dm = 1, \quad (2.3)$$

por lo que la constante  $n_0$  vale  $n_0 = n_{\text{total}}$ . La segunda alternativa es considerar que

$$\int_0^Z m\epsilon(m)dm = 1M_{\odot}, \quad (2.4)$$

en este caso, la masa total del cúmulo es:

$$m_{\text{total}} = N_0 \int_0^Z m\epsilon(m)dm = 1M_{\odot} = N_0(1M_{\odot}), \quad (2.5)$$

de tal modo que  $N_0 = 1$  es el número de masas solares en el brote.

Por ejemplo, Edwin Salpeter propuso la IMF:

$$\varepsilon(m) = m^{-2.35}, \quad (2.6)$$

siendo una buena aproximación para  $m \geq 0.5M_{\odot}$  pero sobrestimando el número de estrellas a masas inferiores. Si se considera que la IMF sigue una ley de potencias de índice  $\alpha$ , esta expresión se puede escribir como:

$$m_{\text{total}} = N_0 \int_0^{\infty} m^{1-\alpha} dm \propto m^{2-\alpha} \Big|_0^{\infty} \quad (2.7)$$

esta ecuación diverge dependiendo del valor de  $\alpha$ , si  $\alpha > 2$  y  $m \rightarrow 0$  entonces  $m^{2-\alpha} \rightarrow \infty$ , si  $\alpha > 2$  y  $m \rightarrow \infty$  entonces  $m \rightarrow 0$ . Esto implica que las estrellas menos masivas son las que más contribuyen a la masa total.

En nuestras simulaciones usaremos la primera normalización, y fijaremos el número de partículas

$$\int_{m_{\min}}^{m_{\max}} m^{-\alpha} dm = n_0, \quad (2.8)$$

por lo que  $n_0 = \frac{1-\alpha}{m_{\max}^{1-\alpha} - m_{\min}^{1-\alpha}}$ . Posteriormente, determinamos la función de masa acumulativa usando  $\alpha = 2.35$ :

$$F(m) = \frac{1 - 2.35}{m_{\max}^{1-2.35} - m_{\min}^{1-2.35}} \int_{m_{\min}}^m m^{-2.35} dm = \frac{m^{1-2.35} - m_{\min}^{1-2.35}}{m_{\max}^{1-2.35} - m_{\min}^{1-2.35}}, \quad (2.9)$$

como  $F$  es una función de probabilidad, ésta tendrá un contradominio de  $[0, 1]$ . Así, tomemos un  $k$  en ese intervalo, despejando  $m$  se tiene que:

$$m = k(m_{\max}^{1-2.35} - m_{\min}^{1-2.35}) + m_{\min}^{1-2.35}. \quad (2.10)$$

Una aproximación más precisa fue propuesta por Pavel Kroupa, que considera diferentes

índices para la ley de potencia de acuerdo a la masa de las estrellas. Basándonos en [Binney and Tremaine \(2008\)](#) la IMF de Kroupa es:

$$\epsilon(m) = \begin{cases} m^{-0.3} & \text{si } 0.01 < m/M_{\odot} < 0.08 \\ m^{-1.3} & \text{si } 0.08 < m/M_{\odot} < 0.5 \\ m^{-2.3} & \text{si } 0.5 < m/M_{\odot} < 1 \\ m^{-2.7} & \text{si } 1 < m/M_{\odot}, \end{cases} \quad (2.11)$$

por lo que la resolución de las integrales es:

$$\int_{0.01}^{100} \epsilon(m) dm = \int_{0.01}^{0.08} m^{-0.3} dm + \int_{0.08}^{0.5} m^{-1.3} dm + \int_{0.5}^1 m^{-2.3} dm + \int_{1}^{100} m^{-2.7} dm = 1.87 + 3 + 1.12 + 0.588 = 6.577 \quad (2.12)$$

El resultado de la normalización dependerá de las cotas de la masa mínima y máxima. En este caso  $n_0$  tendrá un valor de 0.152, dando lugar a:

$$k = 0.152 \int_{m_{\min}}^m \epsilon(m) dm. \quad (2.13)$$

Notemos que  $k \in [0, 1]$ , y a diferencia de Salpeter,  $k$  podrá tener 4 valores, dependiendo del rango de la masa mínima, por lo que vamos a encontrar el valor de  $k$  para cada intervalo de probabilidad:

$$k = \begin{cases} 0.152 \frac{m^{0.7} - m_{\min}^{0.7}}{0.7}, & \text{si } 0 \leq k \leq 0.284, \\ 0.152 \frac{m^{-0.3} - m_{\min}^{-0.3}}{-0.3}, & \text{si } 0.284 < k \leq 0.74, \\ 0.152 \frac{m^{-1.3} - m_{\min}^{-1.3}}{-1.3}, & \text{si } 0.74 < k \leq 0.91, \\ 0.152 \frac{m^{-1.7} - 1}{-1.7}, & \text{si } 0.91 < k \leq 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

despejando  $m$ , tendremos una masa mínima de  $m_{\min} = 0.01$ . Utilizando  $k$ , podemos obtener la distribución de las masas con base en cada una de las funciones por lo que, de manera análoga, podemos generar las masas en base a esta distribución.

En la Figura 2.2 podemos observar la diferencia entre ambas funciones de masa inicial.

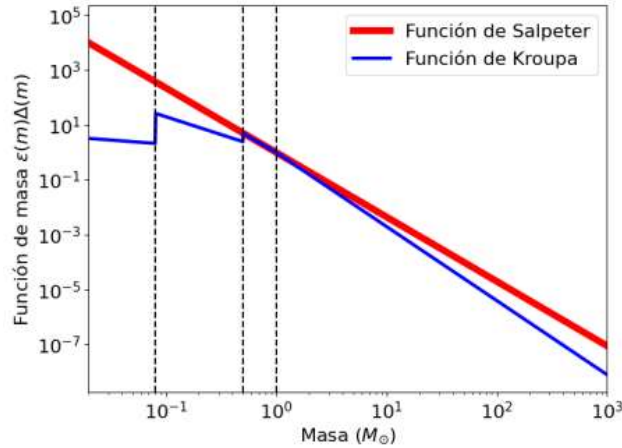


Figura 2.2: Comparación de las densidades de probabilidad. La curva de Salpeter sobrestima la cantidad de estrellas de baja masa en comparación con la curva de Kroupa.

### 2.3. Modelos Estáticos de GCs

Los modelos estáticos de cúmulos globulares consideran densidades de masa y potencial gravitacional independientes del tiempo. A pesar de que los cúmulos no son estrictamente estáticos, éstos presentan flujos de energía y evolución dinámica en escalas de tiempo muy largas, por lo que los consideraremos estáticos. Para hacer estos modelos, debemos asumir que la granularidad del cúmulo puede ser ignorada, de modo que la densidad de estrellas se considera continua. Esta densidad está relacionada con el potencial gravitacional mediante la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho(r), \quad (2.15)$$

donde la densidad de masa está dada por  $\rho(r) = \sum_i m_i n_i(r) = M n(r)$ , donde  $M$  es la masa total y  $n$  el número de estrellas.

Newton mostró dos teoremas que nos permiten calcular fácilmente el potencial gravitatorio de cualquier distribución esférica.

Primer teorema de Newton. Un cuerpo que está dentro de un cascarón esférico de materia no experimenta ninguna fuerza gravitatoria neta de ese cascarón.

Segundo teorema de Newton. La fuerza gravitatoria sobre un cuerpo situado fuera del cascarón esférico de materia es la misma que si toda la materia del cascarón se concentrara en un punto situado en su centro.

Estos teoremas encontrados en [Newton \(1687\)](#) nos permiten escribir potenciales gravitatorios esféricos y construir las densidades que se modelarán.

### 2.3.1. Modelo de Densidad de Plummer

Supongamos una distribución de velocidad isotrópica (es decir, que no depende de la dirección elegida) en el cúmulo, este tipo de potencial decae a cero en radios muy grandes y la densidad es constante cerca del centro. El potencial de este tipo sería proporcional a  $r^2 + \text{constante}$  a radios pequeños y a  $r^{-1}$  en radios grandes, se ve como

$$\Phi = -\frac{GM}{a} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{a^2}}. \quad (2.16)$$

La escala lineal de este sistema, que genera este potencial, se fija con el radio de Plummer  $a$ , con  $M$  como la masa total del sistema. De la Ecuación (2.15), despejando obtenemos que:

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi a^3} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{a^2}}^{2-5/2}. \quad (2.17)$$

Definiendo  $\rho_0$  como  $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi a^3}$  y  $\Phi_0 = -\frac{GM}{a}$ , si  $a \rightarrow \infty$ , obtenemos una densidad constante dada por  $\rho_0$  ([Binney and Tremaine, 2008](#)).

Generalmente, estos modelos son presentados mediante su DF, como lo hacen en [DaviesProf. \(2013\)](#), donde se presenta su DF como una función de energía:

$$f \propto (-E)^p \quad \text{con } E < 0. \quad (2.18)$$

La distancia radial de las partículas puede ser calculada introduciendo la distribución de

masa acumulada:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr, \quad (2.19)$$

la cual muestra la dependencia de la masa con respecto al radio. Es decir, supongamos que colocamos una partícula de prueba a una distancia  $r$ , la distribución de masa acumulada nos dirá cuánta masa hay en el cúmulo hasta ese radio. Así se obtiene que:

$$m(r) = \frac{3M}{a^3} \int_0^r r^2 \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-5/2} dr = \frac{Mr^3}{(r^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (2.20)$$

Notemos que si  $a = 0$ , la ecuación se reduce a una recta con pendiente  $M$ , y cuando  $a$  tiende a infinito  $m(r)$  tiende a 0.

La densidad superficial estará dada por

$$\Sigma(\tilde{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\sqrt{\tilde{r}^2 + z^2}) dz, \quad (2.21)$$

y para Plummer el resultado de la integral es

$$\Sigma(\tilde{r}) = \frac{M}{\pi a^2} \left(1 + \frac{\tilde{r}^2}{a^2}\right)^{-2}. \quad (2.22)$$

Su DF se calcula mediante la Ecuación (1.26),

$$f(E) = \frac{3.2^{7/2}}{7^3} \frac{a^2}{G^5 M^4 m} (-E)^{7/2}. \quad (2.23)$$

A este tipo de modelos, donde  $f \propto (-E)^p$ , se les denomina como politropos <sup>1</sup>, donde definimos el índice politrópico como  $n = p + \frac{3}{2}$ . Solo existen soluciones analíticas para  $n = 0, 1, 5$ , siendo una descripción razonable para distintos GCs, descritos por una densidad que en su centro es algo aplanada y disminuye a radios grandes, con  $n = 5$  al llamado modelo de Plummer. Usar el modelo de Plummer para un cúmulo es muy atractivo ya que, debido a su naturaleza analítica, muchas propiedades del cúmulo tienen expresiones sencillas (véase 2.1).

<sup>1</sup>Mediante esta ecuación es posible obtener una relación entre la densidad y el potencial gravitacional dada por  $\rho(r) \propto [-\Phi(r)]^{p + \frac{3}{2}}$ .

| Modelo de Plummer                    |                     |  |
|--------------------------------------|---------------------|--|
| Cantidad                             | Simbolo             | Expresión  |
| Función de distribución              | $f$                 | $\frac{372\pi}{3} \dots$   |
| Densidad                             | $\rho$              | $\frac{3M}{4\pi a^3} (1 - E)^2$  |
| Proyección de densidad               | $\Sigma(\tilde{r})$ | $\frac{4\pi a^3}{\pi a^2} \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{1 + \frac{a^2}{a^2}}$ |
| Masa acumulada                       | $M(r)$              | $M \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-3/2}$                                |
| Masa proyectada                      | $M(d)$              | $M \left(1 + \frac{a^2}{d^2}\right)^{-1}$                                  |
| Potencial                            | $\Phi$              | $-\frac{GM}{a} \left(1 + \frac{r^2}{2a^2}\right)^{-1/2}$                   |
| Dispersión de velocidades            | $\sigma_z^2$        | $\frac{3\pi GM}{64 a} \left(1 + \frac{d^2}{a^2}\right)^{-1/2}$             |
| Dispersión de velocidades proyectada | $W$                 | $-\frac{3\pi GM^2}{32 a}$  |
| Energía potencial                    | $T$                 | $-\frac{W}{2}$   |
| Energía cinética                     | $E$                 | $\frac{W}{4}$  |
| Energía total                        | $r_c$               | $a/2$  |
| Radio del núcleo                     | $R_v$               | $\sqrt{\frac{16}{3\pi} a}$   |
| Radio del Virial                     | $R_{hf}$            | $a \left(2^{2/3} - 1\right) \approx 1.305a$                                |
| Radio a media masa                   |                     |  |

Cuadro 2.1: Tabla de propiedades del modelo de Plummer. Obtenida de [Heggie \(2003\)](#).

### 2.3.2. Modelo de Densidad de King

El modelo de King está basado en una esfera isoterma, donde la densidad dinámica del modelo está dada por una función de distribución ([King, 1966](#)) que se describe como:

$$f(\epsilon) = \rho_0(2\pi\sigma^2)^{-3/2}(\exp(\epsilon/\sigma^2) - 1), \tag{2.24}$$

donde  $\epsilon$  es la energía relativa del sistema definida en términos del potencial gravitacional central, mientras que la energía total del sistema se define como  $\epsilon = -E + \Phi_0$ , o su equivalente  $\epsilon = \Psi - \frac{v^2}{2}$ , por unidad de masa;  $\rho_0$  es la densidad central, y está dada por  $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi r_0^3}$ . La dispersión de velocidad asociada a este modelo se describe como:

$$\sigma^2 = \frac{4\pi\rho_0 r_0}{9}, \tag{2.25}$$

donde  $r_0$  el factor de escala, también llamado el radio de King.

Partiendo de la definición de densidad y la Ecuación (1.10), se puede obtener:

$$\int_0^{\infty} f(\epsilon) d^3v = \frac{4\pi\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\infty} v^2 (\exp(\epsilon/\sigma^2) - 1) dv. \quad (2.26)$$

Resolviendo la integral en el espacio de todas las velocidades, se obtiene:

$$\int_0^{\infty} v^{2\psi} \exp\left[-\frac{v^2}{\sigma^2}\right] dv = \exp\left[\frac{\psi}{\sigma^2}\right] \int_0^{\infty} v^{2\psi} \exp\left[-\frac{v^2}{\sigma^2}\right] dv = \int_0^{\infty} v^{2\psi} dv. \quad (2.27)$$

La segunda integral es inmediata, ya que  $\int_0^{\infty} v^{2\psi} dv = \frac{(2\psi)^{3/2}}{3}$ . Notemos que  $-\sigma \partial_z \exp\left[-\frac{v^2}{\sigma^2}\right] = v^2 \exp\left[-\frac{v^2}{\sigma^2}\right]$ . Usando la función error  $\text{erf}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$ , tenemos que  $\text{erf}\left[\frac{v}{\sigma}\right] = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{v/\sigma} e^{-t^2} dt$  y al realizar el cambio de variable  $t = \frac{v}{\sigma}$ , podemos reescribir la integral como:

$$\int_0^{\infty} v^{2\psi} \exp\left[-\frac{v^2}{\sigma^2}\right] dv = -\sigma \partial_z \text{erf}\left[\frac{v}{\sigma}\right] \frac{\pi\sigma}{2}, \quad (2.28)$$

donde  $\partial_z \text{erf}(z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-z^2}$ , y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\int_0^{\infty} f(\epsilon) d^3v = \frac{4\pi\rho_0}{\pi\sigma^3} \left[ -\frac{\psi}{2\psi\sigma^3} + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{\psi}{\sigma^2}\right] \text{erf}\left[\frac{v}{\sigma}\right] \frac{\pi\sigma}{2} - \frac{(2\psi)^{3/2}}{3} \right]. \quad (2.29)$$

Definiendo  $W = \frac{\psi}{\sigma^2}$ , tenemos que:

$$\rho(W) = \int_0^{\infty} f(\epsilon) d^3v = \rho_1 \left[ \text{erf}\left(\frac{v}{\sigma}\right) \exp(W) - \frac{4W}{\pi} + \frac{2W}{3} \right], \quad (2.30)$$

lo cual muestra que ahora nuestra densidad depende de la variable  $W$  (relacionada con  $W = -2j\Phi$ , donde  $j$  es una constante). Ahora resolvemos la ecuación de Poisson para este

caso, partiendo de la Ecuación (2.25), que podemos reescribir como:

$$\nabla^2 W = \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dW}{dr} = -8\pi G\rho. \quad (2.31)$$

Si definimos  $R = \frac{r}{r_c}$ , la ecuación se reescribe como:

$$\frac{d^2 W}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{dW}{dR} = -8\pi G r_c^2 j^2 \rho. \quad (2.32)$$

Como se demuestra en King (1962), el valor central de  $\nabla^2 W$  debe ser  $-9$ , lo cual implica que  $8\pi G j^2 r_c^2 \rho_0 = 9$ , y la ecuación resulta en:

$$\frac{d^2 W}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{dW}{dR} = -9 \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (2.33)$$

Al realizar un cambio de variable con  $X = R^2$ , tenemos que:

$$-\frac{9}{4} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{dX^3}{dW} = \frac{1}{4} \frac{d^2 W}{dR^2} \frac{dX^3}{dW} + \frac{1}{2R} \frac{dW}{dR} \frac{dX^3}{dW} \rho_0. \quad (2.34)$$

Redefiniendo  $y = X$ ,  $y' = \frac{dX}{dW}$ , obtenemos:

$$y'' = \frac{1}{4y} (y')^2 - \frac{9}{\rho_0} (y) + 6. \quad (2.35)$$

Finalmente, implementamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4), \quad (2.36)$$

donde  $\kappa$  se define como:

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= f(x_i, y_i) = y'(x_i, y_i) \\
 \kappa_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}\kappa_1 h\right) = y'\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}\kappa_1 h\right) \\
 \kappa_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}\kappa_2 h\right) = y'\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}\kappa_2 h\right) \\
 \kappa_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \kappa_3 h\right) = y'\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \kappa_3 h\right)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

así obtenemos los perfiles de densidad mostrados en la Figura 2.3

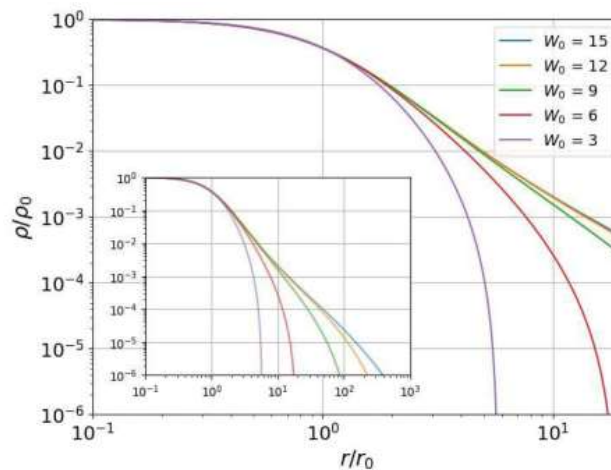


Figura 2.3: Gráfica de las densidades de King. Densidades calculadas para diferentes valores del parámetro de concentración  $W_0 = 15, 12, 9, 6, 3$ , resueltas numéricamente mediante el método RK4. El subgráfico muestra un rango ampliado, mientras que la gráfica principal destaca el rango típico de un cúmulo.

### 2.3.3. Modelos de Densidad de Schuster

Como se ha visto, los sistemas esféricos, aunque son los modelos más simples, logran describir varios sistemas estelares. Este tipo de modelos, son útiles para representar bulbos, halos de galaxias, galaxias elipsoidales enanas, coronas oscuras de galaxias espirales y cúmulos estelares, entre otros. Aquí presentamos un conjunto de modelos conocidos como modelos de Schuster, los cuales fueron propuestos en Ninkovic (1998) mediante la fórmula:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{[1 + (r/r_0)^2]^\beta}, \quad r_0 = \text{const}, \quad \beta \geq 0, \tag{2.38}$$

Esta ecuación es conocida como la ley de Schuster generalizada, donde  $r_0$  y  $\rho(0)$  son el radio y la densidad del núcleo del sistema, respectivamente. El caso  $\beta = \frac{5}{2}$ , corresponde a la ley de Schuster clásica (también llamada Schuster-Plummer), propuesta originalmente por Schuster para estudiar esferas de gas. Cuando  $\beta > \frac{3}{2}$ , esta expresión es válida hasta un radio infinito; sin embargo, si  $\beta \leq \frac{3}{2}$ , es necesario imponer un límite o borde a la densidad. A continuación, presentamos los casos que usaremos en este estudio, además de algunas propiedades de cada densidad.

Caso  $\beta = \frac{3}{2}$

En este caso la fórmula se convierte en:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho(0)}{[1+(r/r_0)^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{si } r \leq r_l, \\ 0 & \text{si } r > r_l. \end{cases} \quad (2.39)$$

Las siguientes son algunas propiedades:

1. Densidad Superficial  $\Sigma(R)$  para un radio proyectado  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ , donde retomando la Ecuación (2.21) se tiene que

$$\Sigma(\tilde{x}) = \frac{2\rho(0)r_0}{1 + \kappa^2} \frac{\sqrt{\kappa^2 - \tilde{x}^2}}{\tilde{x}^2}, \quad (2.40)$$

con  $\tilde{x} = \frac{R}{r_0}$ ,  $\kappa = \frac{r_l}{r_0}$ , y  $r_l$  como el radio de marea.

2. Masa acumulada, usando la Ecuación (2.19):

$$m(x) = 4\pi\rho(0)r_0 \ln \sqrt{x^2 + 1} + x - \frac{x}{x^2 + 1}, \quad (2.41)$$

donde  $x = \frac{r}{r_0}$ . Notemos que si la densidad volumétrica fuera distinta de 0 para  $r > r_l$  tendríamos una masa total infinita.

Esta forma de densidad es conocida como la fórmula de Hubble-Reynolds, y se ha usado para describir la distribución de masa de los bulbos de galaxias espirales. Es interesante notar que la distribución de masa propuesta por King, en el caso límite cuando  $\frac{r_l}{r} \rightarrow \infty$ , toma la forma

de esta ecuación de densidad; es decir, la fórmula de King aparece como un caso asintótico de la ley generalizada de Schuster para  $\beta = \frac{3}{2}$ .

Caso  $\beta = 1$

En este caso la fórmula se convierte en:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho(0)}{1+(r/r_0)^2} & \text{si } r \leq r_1, \\ 0 & \text{si } r > r_1, \end{cases} \quad (2.42)$$

lo que implica que el sistema está limitado espacialmente. Algunas propiedades de esta densidad se mencionan a continuación:

1. Densidad Superficial  $\Sigma(R)$  para un radio proyectado  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ , donde retomando la Ecuación (2.21) se tiene que

$$\Sigma(\tilde{x}) = \frac{2\rho(0)r_0}{1+\tilde{x}^2} \arctan \left( \frac{\tilde{x}}{1+\tilde{x}^2} \right), \quad (2.43)$$

con  $\tilde{x} = \frac{R}{r_0}$ ,  $\kappa = \frac{r_1}{r_0}$ , y  $r_1$  como el radio de marea.

2. Masa acumulada, usando la Ecuación (2.19):

$$m(x) = 4\pi\rho(0)r_0^3 (x - \arctan(x)), \quad (2.44)$$

donde  $x = \frac{r}{r_0}$ . Notemos que si la densidad volumétrica fuera distinta de 0 para  $r > r_1$ , tendríamos una masa total infinita.

Esta forma de densidad ha sido usada frecuentemente para modelar la distribución de masa en los halos oscuros de galaxias.

Caso  $\beta = 2$

En este caso la fórmula se convierte en:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{[1 + (r/r_0)^2]^2} \quad (2.45)$$

Con las siguientes propiedades:

1. Densidad Superficial  $\Sigma(R)$  para un radio proyectado  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ , donde retomando la Ecuación (2.21) se tiene que

$$\Sigma(x) = \frac{\rho(0)r_0}{2\sqrt{1+x^2}}, \tag{2.46}$$

con  $\tilde{x} = \frac{R}{r_0}$ ,  $\kappa = \frac{r_1}{r_0}$ , y  $r_1$  como el radio de marea.

2. Masa acumulada

$$m(x) = 4\pi\rho(0)r_0 \frac{\arctan(x)}{2} - \frac{x}{2x^2 + 2}, \tag{2.47}$$

donde  $x = \frac{r}{r_0}$ . Notemos que la densidad volumétrica puede integrarse hasta infinito sin divergencia, ya que  $\beta > \frac{3}{2}$ .

Esta forma de densidad describe cúmulos globulares, ya que, por lo propuesto por Jeans, estos deberían disminuir como un  $r^4$ . Sin embargo, es el modelo de King el más usual para modelarlos.

En la Figura 2.4 se presenta una comparación entre los modelos de Schuster y la densidad de Plummer. Los perfiles descritos en esta sección, son los que se utilizarán en las simulaciones.

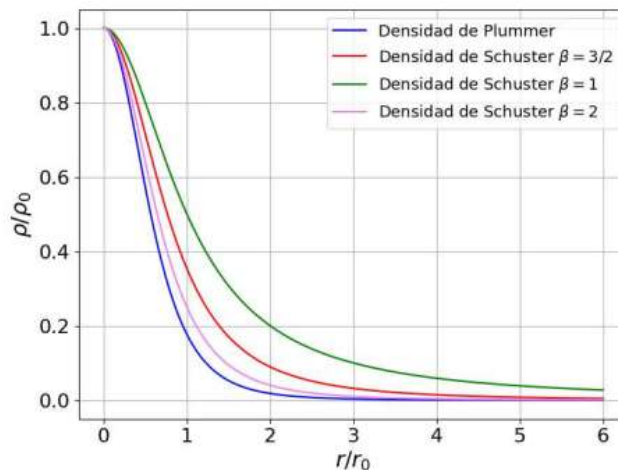


Figura 2.4: Gráfica comparativa de los modelos de Schuster y Plummer. Notemos que la curva con mayor densidad central es la curva de Plummer, y la de menor densidad central es la de Schuster  $\beta = 1$ .

## Capítulo 3

# Relación de Agujeros Negros de Masa Intermedia (IMBH) y Cúmulos Globulares

En este capítulo exploramos la posible relación entre los agujeros negros de masa intermedia y los cúmulos globulares (GCs). Hasta la fecha, no hay evidencia contundente de la existencia de IMBHs, sin embargo, se ha propuesto que éstos podrían existir en el centro de cúmulos globulares.

En el artículo [Latif and Ferrara \(2016\)](#) se presenta una revisión de la estructura de los BH y sus procesos de formación. Se han propuesto diversos mecanismos para la formación de agujeros negros BH, siendo el más comprendido el colapso de una estrella masiva, lo que da lugar a los agujeros negros de masa estelar ( $3 - 100 M_{\odot}$ ). Existen otros escenarios como los agujeros negros primordiales, que podrían haberse formado en las primeras etapas del Big Bang, aunque aún no tenemos evidencia observacional de su existencia. Por otro lado, los agujeros negros estelares pueden acumular masa de gas y estrellas cercanas a lo largo de su vida, lo que les permite crecer hasta alcanzar masas de  $10^6 - 10^{10} M_{\odot}$ , observadas en los agujeros negros supermasivos (por sus siglas en inglés SMBH), los cuales se encuentran en el centro de muchas galaxias. Estos últimos han sido observados por [Event Horizon Telescope](#)

[Collaboration et al. \(2022\)](#). En la Figura 3.1 podemos observar la foto de un SMBH, el cual se encuentra ubicado en el centro de nuestra galaxia.

Sin embargo, un “eslabón perdido” son los IMBHs con masas que oscilan entre  $100$  y  $10^6$  masas solares, los cuales podrían ser precursores en la formación de los SMBHs. [Latif and Ferrara \(2016\)](#) sugiere que los IMBHs podrían haber evolucionado en ambientes densos como cúmulos globulares o el centro de galaxias, acumulando masa a través de acreción y fusiones de estrellas, para eventualmente convertirse en SMBHs. Sin embargo, hasta ahora no se ha encontrado evidencia observacional contundente de estos objetos intermedios, lo que genera interrogantes sobre la transición entre los agujeros negros estelares y los supermasivos.

Los agujeros negros con masas en el rango de  $10^2 - 10^6 M_{\odot}$  deberían formarse y residir en sistemas estelares densos. Por ello, durante décadas, los esfuerzos observacionales se han centrado en buscar evidencias de su existencia en cúmulos globulares ([Kızıltan et al., 2017](#)).

### 3.1. Escenarios de Formación de IMBH

El trabajo de [Mezcua \(2017\)](#) explora los posibles mecanismos para la formación de IMBHs. Por ejemplo, considerando un BH con una masa  $100M_{\odot} < M_{\text{BH}} < 10^6M_{\odot}$  y con una tasa de acreción correspondiente a su Límite de Eddington (dado por  $L_{\text{Edd}} \approx 1.3 \times 10^{38} \frac{M_{\text{BH}}}{M_{\odot}} \text{ erg/s}$ ), se necesitarían aproximadamente 0.5 Gyr para alcanzar  $10^9M_{\odot}$  (asumiendo una eficiencia radiativa típica del 10%). Estas estimaciones están basadas en un modelo de acreción de Bondi.

La existencia de SMBHs con masas superiores a  $10^9M_{\odot}$  cuando el Universo tenía aproximadamente 1 Gyr de edad implica que los IMBHs se formaron en  $z \geq 10$  ( $z$  es conocido como el corrimiento al rojo cosmológico). En este universo temprano, los IMBHs pudieron formarse mediante los siguientes mecanismos:

- Estrellas de Población III: Si el enfriamiento del gas era dominado por  $\text{H}_2$ , este podría haberse enfriado hasta temperaturas de  $\sim 100 \text{ K}$  y colapsado en protoestrellas de cientos de  $M_{\odot}$ . Solo las estrellas con más de  $260 M_{\odot}$  colapsarían en BHs con masa  $M_{\text{BH}} \geq 100 M_{\odot}$ .

- Colapso directo: Los IMBHs también podrían haberse formado a partir del colapso de gas en las primeras protogalaxias pobres en metales. Este proceso podría dar lugar a estrellas supermasivas de  $\sim 10^5 M_{\odot}$ , que posteriormente colapsaron en BHs de  $\sim 10^4 - 10^5 M_{\odot}$ .
- Colisiones en cúmulos estelares densos: Las colisiones frecuentes de estrellas en cúmulos estelares densos podrían dar lugar a una estrella supermasiva que colapsaría en un BH con una masa de  $\sim 10^2 - 10^4 M_{\odot}$ .

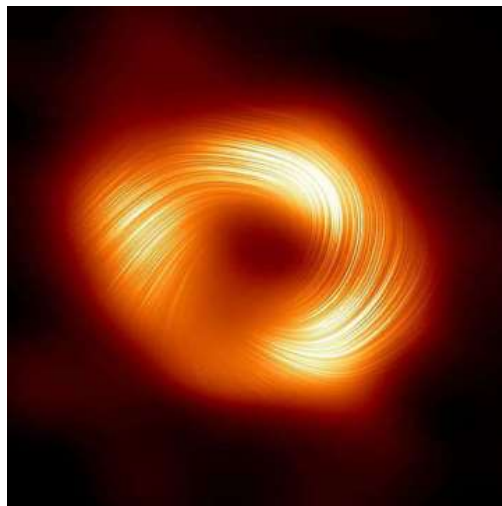


Figura 3.1: Imagen del agujero negro supermasivo Sagitario A\*. Mediante luz polarizada (polarización lineal), se reveló la dirección del campo magnético alrededor del agujero negro. Las líneas blancas representan esta dirección, mientras que el centro oscuro corresponde a la sombra del agujero negro. La luz emitida proviene del gas caliente en el disco de acreción que rodea al agujero negro. Créditos: EHT Collaboration.

## 3.2. Panorama Observacional

Uno de los casos más estudiados es el cúmulo globular 47 Tucanae, donde se ha sugerido la posible presencia de un IMBH en su núcleo. Los trabajos de [Grindlay et al. \(2001\)](#) y [de Rijcke et al. \(2006\)](#) colocan límites superiores a la masa de este objeto de  $2060 M_{\odot}$  y  $470 M_{\odot}$  a partir

de observaciones en radio y rayos X, respectivamente. Sin embargo, investigaciones recientes como las de [Kızıltan et al. \(2017\)](#) han propuesto una masa estimada de  $2300 M_{\odot}^{+1500}_{-850}$ . Estos trabajos sugieren que el agujero negro se encuentra en el centro del cúmulo y que carece de gas detectable, lo que refuerza la hipótesis de que podría ser una semilla para la formación de agujeros negros supermasivos en galaxias.

Otro ejemplo relevante es el de G1, discutido en el artículo de [Gebhardt et al. \(2005\)](#), donde se establece un límite superior a la masa de un agujero negro central. Utilizando observaciones del telescopio Keck y el Hubble, logran analizar las velocidades estelares, encontrando una masa para el agujero negro en el centro de  $1.8 \pm 0.5 \times 10^4 M_{\odot}$ . La comparación entre dinámicas con y sin agujero negro revela una diferencia estadística significativa ( $\Delta\chi^2 = 5$ ). Esto refuerza la idea de que G1 es uno de los mejores candidatos para estudiar agujeros negros de masa intermedia en cúmulos globulares. Además, se especula que G1 podría no ser un cúmulo globular típico, sino el núcleo desnudo de una galaxia enana desgarrada, dada su alta velocidad de rotación y dispersión de velocidades. Esto se vincula con observaciones de otros sistemas similares como NGC 4395 y POX 52, que también podrían albergar agujeros negros intermedios.

Finalmente, en [Gebhardt et al. \(2005\)](#) concluyen que es necesario ampliar el número de muestras de galaxias y cúmulos estudiados. Este tipo de estudios complementa de manera directa las simulaciones de N-partículas, ya que éstas permiten explorar dinámicas similares en sistemas con posible presencia de agujeros negros intermedios.

La presencia de un IMBH en un GC afectaría significativamente la distribución espacial de las estrellas. Las estrellas más masivas tienden a migrar hacia el centro del cúmulo debido a la relajación dinámica, un fenómeno conocido como segregación de masas. Sin embargo, cerca del IMBH, estas estrellas serían dispersadas, lo que provocaría un calentamiento del núcleo del cúmulo. Este proceso interrumpiría parcialmente la segregación de masas y dejaría una huella dinámica que puede ser detectada en las propiedades estructurales del cúmulo.

Un ejemplo que intenta probar esta hipótesis es el trabajo de [Kızıltan et al. \(2017\)](#), que mediante el uso de 25 púlsares de milisegundos en 47 Tucanae, determinaron las aceleraciones

causadas por el potencial gravitacional del cúmulo. Las mediciones de aceleración, combinadas con simulaciones de N-cuerpos, han permitido establecer restricciones más precisas sobre la posible presencia de un IMBH en el centro del cúmulo. La Figura 3.2 muestra los dos cúmulos globulares los cuales se discuten en esta sección.



Figura 3.2: Imágenes en el óptico (espectro de luz visible) de dos cúmulos globulares:  
a) En la izquierda tenemos al Cúmulo Globular Tucanae 47. Créditos: Cambridge Astronomical Survey Unit.  
b) En la derecha tenemos al Cúmulo Globular Mayall II o G1. Créditos: Columbia University, Carnegie Observatories and NASA.  
En ambos casos se aprecia una mayor concentración de estrellas en el centro.

### 3.3. Panorama Teórico

En el contexto teórico, varios estudios han explorado la posibilidad de tener agujeros negros de masa intermedia en los cúmulos globulares, buscando métodos alternativos para detectarlos y establecer límites en ciertos parámetros físicos. Por ejemplo, en [Abbate et al. \(2019\)](#) se utilizan pulsares de milisegundo como sondas para este propósito.

El estudio analiza cómo las derivadas de las aceleraciones, conocidas como jerks (primera derivada de la aceleración respecto al tiempo) y jounces (segunda derivada de la aceleración respecto al tiempo), pueden proporcionar evidencia indirecta de la presencia de un IMBH central en un cúmulo globular. Para ello, se simulan cúmulos estelares tanto con y sin un IMBH central, comparando las distribuciones de jerks y jounces en ambos escenarios. Posteriormente, se aplican estas simulaciones a los datos observacionales de pulsares de milisegundo

en 47 Tucanae. Aunque el análisis no cuenta con suficientes datos para una detección definitiva, establece un límite superior para la masa del IMBH en  $< 7000 M_{\odot}$ . El artículo también resalta que la detección de IMBHs de menor masa es considerablemente más difícil debido a su influencia gravitatoria limitada al núcleo del cúmulo.

En el estudio de [Di Cintio et al. \(2023\)](#) se analiza la relación entre los cúmulos globulares y los agujeros negros de masa intermedia mediante simulaciones híbridas, usando un método de partículas en celda combinado con un esquema de colisión multi-partícula (MPCDSS). Este enfoque permite estudiar sistemas con un número realista de partículas estelares, brindando una representación más precisa de los efectos dinámicos de los IMBH en los cúmulos. En el trabajo, se empleó una función de masa inicial de Salpeter y se ubicó el IMBH en el centro del cúmulo. A partir de ahí, se analizó la evolución de parámetros como los radios de Lagrange, que contienen un porcentaje específico de la masa del sistema, la densidad central y la dispersión de velocidades. Los resultados muestran que los cúmulos con un IMBH central experimentan un colapso del núcleo en tiempos más cortos que los cúmulos sin IMBH. Durante este proceso, la densidad central se mantiene casi constante, lo que implica que la presencia de un IMBH contribuye a un colapso menos profundo al redistribuir energía y expulsar estrellas del núcleo, es decir, el IMBH funciona como un regulador de energía. Adicionalmente, se observó que la dispersión de velocidades en el centro del cúmulo disminuye debido al IMBH, lo cual sugiere que la presencia del agujero negro reduce la agitación de las partículas en la región central. Además, se reporta que los IMBH tienden a desplazarse del centro con mayor frecuencia de lo que se había anticipado en estudios anteriores, lo que puede ser indicativo de una dinámica más compleja dentro del cúmulo.

Sin embargo, el enfoque del estudio se centró principalmente en el comportamiento del IMBH, dejando en segundo plano el análisis de las propiedades estructurales y dinámicas de las estrellas del cúmulo, como las densidades radiales, los histogramas de masa y velocidad, y la densidad superficial. Estos aspectos son fundamentales para entender de manera integral cómo las estrellas interactúan y evolucionan en presencia de un IMBH.

En este sentido, el presente trabajo contrasta con la literatura reportada ya que, aunque se realiza un estudio similar, presenta un enfoque complementario centrado en las propiedades

de las estrellas a lo largo del tiempo. Este análisis incluirá los elementos mencionados en el párrafo anterior, para obtener una visión más completa del impacto del IMBH sobre el cúmulo globular. De esta manera, se espera que este enfoque proporcione información sobre la interacción entre el IMBH y las estrellas circundantes.

Más aún, el estudio de los agujeros negros de masa intermedia es un campo de investigación joven y prometedor. Si los IMBHs existen, podrían explicar el rápido crecimiento de los agujeros negros supermasivos, ya que actuarían como las semillas en las etapas tempranas de la formación de galaxias. Además, es posible que muchos IMBHs estén presentes en el centro de los cúmulos globulares (GCs) actuales. Sin embargo, los resultados en este ámbito son controversiales, y la cuestión de su existencia sigue sin resolverse.

Trabajos como el de [Noyola and Baumgardt \(2011\)](#) han encontrado que los IMBHs muestran cúspides centrales débiles en sus perfiles de densidad, en contraste con los cúmulos en colapso central, que presentan perfiles muy pronunciados, y con los cúmulos en estados de precolapso, que no tienen cúspides. Sin embargo, este estudio no es concluyente respecto a la existencia de los IMBHs. Por su parte, [Lützgendorf et al. \(2014\)](#) estudió 10 GCs galácticos y concluyó que un tercio de estos presentan indicios de un IMBH en su centro.

A su vez, el estudio de los IMBHs enfrenta diversos inconvenientes. Por ejemplo, el bajo contenido de gas en los GCs dificulta la detección de signos de acreción, y las emisiones de rayos X o radio, asociadas a bajas tasas de acreción, aún no se comprenden completamente. Por otro lado, las firmas cinemáticas presentan desafíos significativos debido al ruido generado por el bajo número de estrellas brillantes y la contaminación de fondo. Por estas razones, es crucial desarrollar nuevos avances en IMBHs desde todas las perspectivas posibles. En este sentido, las simulaciones de GCs y las técnicas de observación representan herramientas complementarias para verificar las observaciones y comprender los procesos internos de estos sistemas.

# Capítulo 4

## Modelado de las Distribuciones Estelares

En este capítulo explicaremos cómo se generan las condiciones iniciales para las simulaciones de N-cuerpos. En particular, derivaremos las ecuaciones que describen las posiciones y velocidades de las estrellas de los modelos mencionados en el Capítulo 2. Nos basaremos en el trabajo de [Hut and Makino \(2007\)](#), donde se realiza una modelación detallada de la densidad de Plummer. Usaremos esta misma metodología para generar las posiciones y velocidades de las partículas, pero implementando un algoritmo para generar la distribución de las masas de las estrellas. Además, realizaremos un análisis detallado de estos modelos y revisaremos las condiciones iniciales para verificar que representen las densidades descritas.

### 4.1. El Modelado de la Densidad de Plummer

Con el fin de mantener el perfil de densidad de Plummer, Ecuación (2.17), es necesario obtener una función del radio en función de las masas. Para ello, retomaremos las ecuaciones de masa acumulada presentadas en el Capítulo 2. Partiendo de la Ecuación (2.20), al despejar

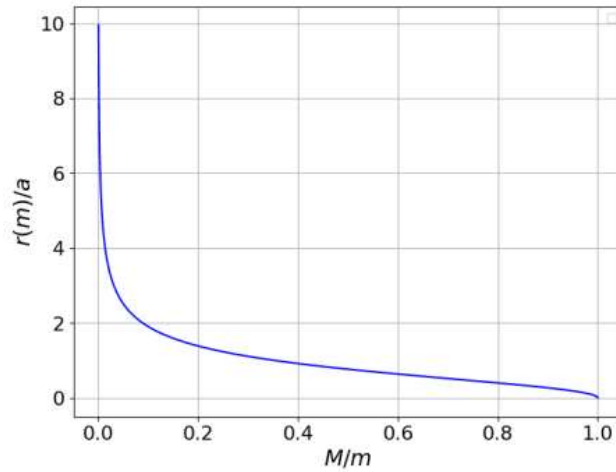


Figura 4.1: Gráfica de la función de generación de radios. Podemos ver que el radio es decreciente a medida que nos acercamos a la masa total del cúmulo, es importante recalcar que la mayor parte de la masa se encuentra en los radios cercanos al centro del cúmulo.

r, podemos obtener una relación entre la masa y el radio de las partículas:

$$r(m) = a \left( \frac{M}{m} \right)^{-2/3} - 1 \quad (4.1)$$

con a como el radio de Plummer. Así, si tenemos una estrella a un radio r, esa estrella verá una cantidad de masa m(r) con respecto al centro del cúmulo. Con esta función podemos caracterizar un código con  $\frac{M}{m}$ , un número aleatorio entre 0 y 1. Esta función genera partículas que obedecen la distribución de densidad de Plummer. En la Figura 4.1 se puede observar el comportamiento de esta función.

Para calcular la distribución de velocidades, usaremos la función de distribución (DF) de Plummer, Ecuación (2.23), la cual tiene la relación proporcional:

$$f(r, v) dr dv \propto (-E)^{7/2} r^2 v^2 dr dv. \quad (4.2)$$

Si tomamos una distancia r fija desde el centro, obtenemos:

$$g(v) dv \propto (-E)^{7/2} v^2 dv, \quad (4.3)$$

donde  $E = \Phi(r) + \frac{v^2}{2}$  y la velocidad de escape  $v_e = \sqrt{-2\Phi} = \sqrt{\frac{2GM}{r^2+a^2}}$ . Así, podemos reescribir la energía como  $E = -\frac{v_e^2}{2} + \frac{v^2}{2}$ , de manera que

$$g(v) dv \propto \frac{v^2}{2} \frac{v^{7/2}}{v_e} dv. \quad (4.4)$$

Sea  $q = \frac{v}{v_e}$ , entonces  $E(q) \propto 1 - q^2$ , y obtenemos:

$$g(v) dv = (1 - q^2)^{7/2} q^2 dv. \quad (4.5)$$

Este término será útil para generar las velocidades de las partículas, recordando que la función  $g(v)$  nos proporciona la probabilidad asociada a las velocidades. El código para generar las partículas se basa en el algoritmo presentado en [Hut and Makino \(2007\)](#), originalmente en Fortran, pero que en nuestro caso será implementado en Python.

En este contexto, la Figura 4.2 es una pieza clave en la factibilidad de nuestras simulaciones, ya que permite realizar un análisis de la distribución de velocidades, lo que a su vez nos conduce a obtener restricciones para nuestros parámetros de  $g(v)$ , y de esta manera, aminorar el tiempo computacional para generar las condiciones iniciales.

## 4.2. El Modelado de la Densidad de King

Retomando la Ecuación (2.19), donde  $\rho$  es la densidad del modelo de King, para poder realizar una comparación con respecto al modelo Plummer, se fija la densidad inicial como  $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi r_0^3}$ . Usando la librería de `scipy`, es posible realizar una interpolación para generar una función  $r(\rho)$  que nos permitirá determinar los radios correspondientes a la densidad de King; considerando una densidad numérica como ya se estableció y, por lo tanto, toda la modelación será numérica para este caso.

La función de distribución del modelo de King está dada por:

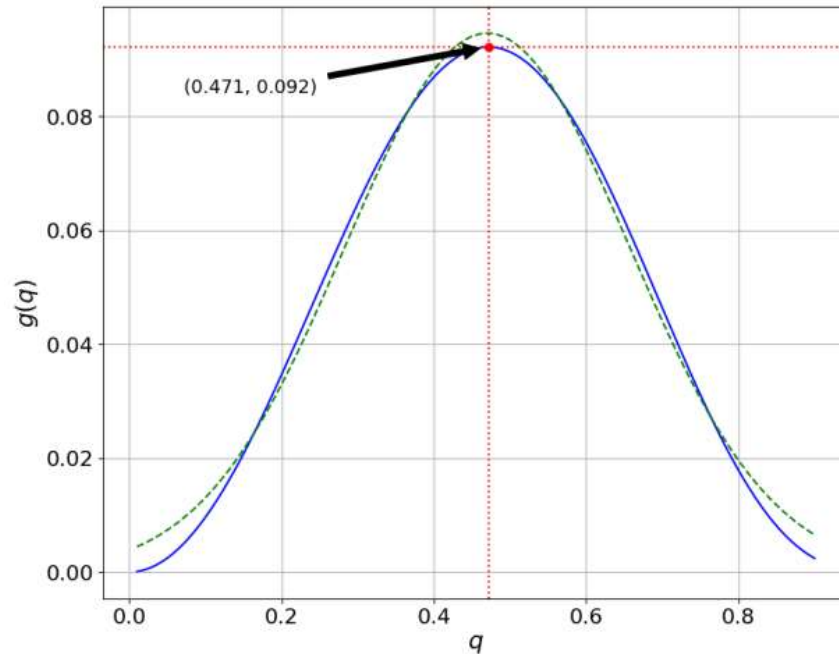


Figura 4.2: Gráfica de la función  $g(p)$  de Plummer. Esta gráfica es la función de generación de velocidades para el modelo de Plummer (cúrva azul). Esta alcanza un máximo de 0.092 lo que nos define una constrictión para nuestro modelo, para después usar el método de Monte Carlo, y aminorar el tiempo de cómputo de nuestras condiciones iniciales. Cabe mencionar que esta curva es muy similar a una curva gaussiana de velocidades (curva verde).

$$f(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon < 0, \\ k e^{\epsilon/\sigma^2} - 1 & \text{si } \epsilon \geq 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

donde  $\epsilon = \Psi - \frac{v^2}{2}$  es la energía total del sistema. Aquí,  $\Psi$  es el potencial relativo,  $v$  es la velocidad,  $\sigma_0$  es la dispersión de velocidades característica, y  $k$  es una constante de normalización de la DF, recordando que esta función toma valores entre 0 y 1, tal y como sucede en el caso anterior.

El modelo de King representa un potencial gravitacional truncado. Esto implica que las velocidades generadas a partir de la DF tendrán un límite superior, determinado por la velocidad de escape. Este límite se traduce en un radio de marea para las partículas simuladas.

Siguiendo una metodología análoga al caso de Plummer, se implementará un algoritmo de rechazo para la función de distribución, con el objetivo de generar la distribución de proba-

bilidad de las partículas:

$$f(\epsilon)v^2 \propto e^{(\Psi - \frac{1}{2}v^2/\sigma^2 - 1)v^2}, \quad (4.7)$$

donde el término  $v^2$  aparece debido al elemento de volumen en el espacio de velocidades. El algoritmo de rechazo genera velocidades aleatorias en el intervalo  $[0, V_{\text{esc}}]$ , siendo aceptadas o rechazadas según la probabilidad dada por la función de distribución normalizada. La velocidad de escape está dada por:

$$V_{\text{esc}} = \sqrt{2\overline{\Psi}}, \quad (4.8)$$

resultando en una distribución de velocidades que sigue la función de distribución de King.

### 4.3. Modelado de la Densidad de Schuster.

Evocando la ecuación de Poisson para un potencial esférico (2.15), podemos reescribir esta

ecuación como:

$$\Phi = 4\pi G \int_0^Z \frac{1}{r^2} r^2 \rho dr \quad (4.9)$$

renombrado a  $x$  como  $\frac{r}{r_0}$ . A su vez, esta ecuación puede reescribirse como

$$\Phi = 4\pi G \rho(0) r_0^2 \int_0^Z \frac{1}{x^2} x^2 \frac{1}{[1 + \alpha^2]^\beta} dx \quad (4.10)$$

Los modelos de Schuster y Plummer son modelos con sus ventajas y desventajas, por ejemplo, Plummer, es el modelo más estudiado y sencillo, pero describe cierto tipo de cúmulos observados (Tatekawa and Okamura, 2020), Schuster puede ser mucho más denso que Plummer, dependiendo del valor de  $\beta$ , lo que ayuda a tener sistemas con un gran número de estrellas en el centro, en este trabajo lo tomaremos como una alternativa para caracterizar cúmulos compactos. Fijaremos el radio y la densidad central similar a la de Plummer, es decir,  $r_0 = a$  y  $\rho(0) = \frac{M}{4\pi r_0^3}$ , por lo que la ecuación anterior se transforma en

$$\Phi = \frac{GM}{r_0} \int_0^Z \frac{1}{x^2} x^2 \frac{1}{[1 + \alpha^2]^\beta} dx \quad (4.11)$$

4.3.1. Caso  $\beta = \frac{3}{2}$ 

Para la primera integral, se tiene:

$$\int x^2 \rho dx = \sinh^{-1}(x)x - \frac{x}{x^2 + 1}. \quad (4.12)$$

Al realizar la segunda integral, obtenemos:

$$\int \frac{1}{x^2} \int x^2 \rho dx dx = -\frac{\sinh^{-1}(x)}{x}. \quad (4.13)$$

De esta forma, el potencial queda como:

$$\Phi = -\frac{GM}{r_0} \frac{\sinh^{-1}(x)}{x}. \quad (4.14)$$

Ahora utilizando la ecuación de Eddington (1.26) para calcular la función de distribución en función de la densidad y el potencial de Schuster, notamos que necesitamos una función de densidad dependiente del potencial,  $\rho(\Phi)$ . Sin embargo, debido a la presencia de  $\sinh^{-1}(x)$ , no es sencillo obtener una expresión analítica de  $\Phi(x)$  para sustituir en  $\rho$ . Por lo tanto, asumimos  $x \ll 1$ , es decir,  $r \ll r_c$  (no válida para  $r > r_c$ ), lo que nos permite aproximar  $\sinh^{-1}(x)$  mediante una serie de Taylor:

$$\sinh^{-1}(x) \approx x - \frac{x^3}{6}. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, el potencial se aproxima como:

$$\Phi \approx -\frac{GM}{r_0} \left( 1 - \frac{x^2}{6} \right), \quad (4.16)$$

donde definimos  $\Phi_0 = \frac{GM}{r_0}$ . Despejando  $x$ , obtenemos:

$$x \approx \sqrt{\frac{\Phi_0 - \Phi}{\Phi_0} + 1}. \quad (4.17)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de densidad (2.38), obtenemos:

$$\rho(\Phi) = h \frac{\rho(0)}{\left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + 2\right)^{3/2}}. \quad (4.18)$$

La derivada de la densidad con respecto al potencial es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} = - \frac{3\rho(0)}{2\Phi_0 \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + 2\right)^{5/2}}. \quad (4.19)$$

De acuerdo con la ecuación de Eddington (1.26):

$$f(E) \propto \frac{d}{d\varepsilon} \frac{Z \varepsilon}{\varepsilon \Phi} \frac{1}{\left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + 2\right)^{5/2}}. \quad (4.20)$$

La solución de esta integral es:

$$f(E) \propto \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\Phi_0 \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 6\Phi_0)}}{3 \cdot 2^{3/2} \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Phi_0\varepsilon + 4\Phi_0^2}}. \quad (4.21)$$

Derivando con respecto a la energía, obtenemos la función de distribución final:

$$f(E) \propto \frac{\Phi_0 (\varepsilon^2 + 12\Phi_0\varepsilon - 12\Phi_0^2)}{3 \cdot 2^{3/2} \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2\Phi_0)^3}}. \quad (4.22)$$

Ignorando las constantes, el término dominante es:

$$f(E) \propto \frac{1}{\varepsilon \varepsilon} \propto \varepsilon^{-3/2}. \quad (4.23)$$

Esta aproximación es válida cuando la energía total es  $\varepsilon \gg 0$ , lo cual predomina en las regiones centrales de los cúmulos.

De manera análoga al modelo de Plummer, y notando que  $\epsilon = -E$ , podemos escribir:

$$g(E) dv \propto (-E)^{-3/2} v^2 dv. \tag{4.24}$$

Dado que  $E = \Phi(r) + \frac{v^2}{2}$  y la velocidad de escape es  $V_e = \sqrt{-2\Phi} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0} \frac{\sinh^{-1}(x)}{x}}$ , podemos reescribir la energía como:

$$E = -\frac{V_e^2}{2} + \frac{v^2}{2}. \tag{4.25}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$g(v) dv \propto \frac{2}{2^{V_e}} \frac{v^{2-3/2}}{2} v^2 dv. \tag{4.26}$$

Sea  $q = \frac{v}{V_e}$ , la distribución se transforma en:

$$g(q) dq \propto (1 - q^2)^{-3/2} q^2 dq. \tag{4.27}$$

Notamos que esta función tiene un máximo en  $q = 0.655$ , ver Figura 4.3. Las curvas presentan diferencias significativas debido a la truncación de la serie de Taylor, lo que limita la precisión de la aproximación. Incluir más términos en la serie mejoraría la exactitud, pero también aumentaría la complejidad de la solución. Nuestras simulaciones de prueba muestran que este modelo sobreestima las velocidades de estrellas lejanas, lo que lleva al colapso del sistema. Por lo tanto, aquí suponemos un modelo politrópico donde  $\rho \propto |\Phi|^{p+2}$ , el cual alcanza el equilibrio en  $p = \frac{15}{2}$ . Esto nos permite diseñar un algoritmo de Monte Carlo que genere las velocidades con base en la distribución de probabilidad dada por la curva y la velocidad de escape.

Esto puede analizarse reescribiendo  $\frac{\log(\rho)}{\log(|\Phi|)} - \frac{3}{2} \propto p$ , lo cual permite comparar el índice politrópico con las posiciones  $x = \frac{r}{r_0}$  y estudiar su comportamiento con respecto al modelo de Schuster  $\beta = \frac{3}{2}$ , ver Figura 4.4. El valor  $p = 15/2$  resulta en un ajuste promedio adecuado para  $x < 1$ , lo cual podría explicar por qué se alcanzó el equilibrio con este valor.

En

consecuencia, nuestro algoritmo de velocidad toma la forma:

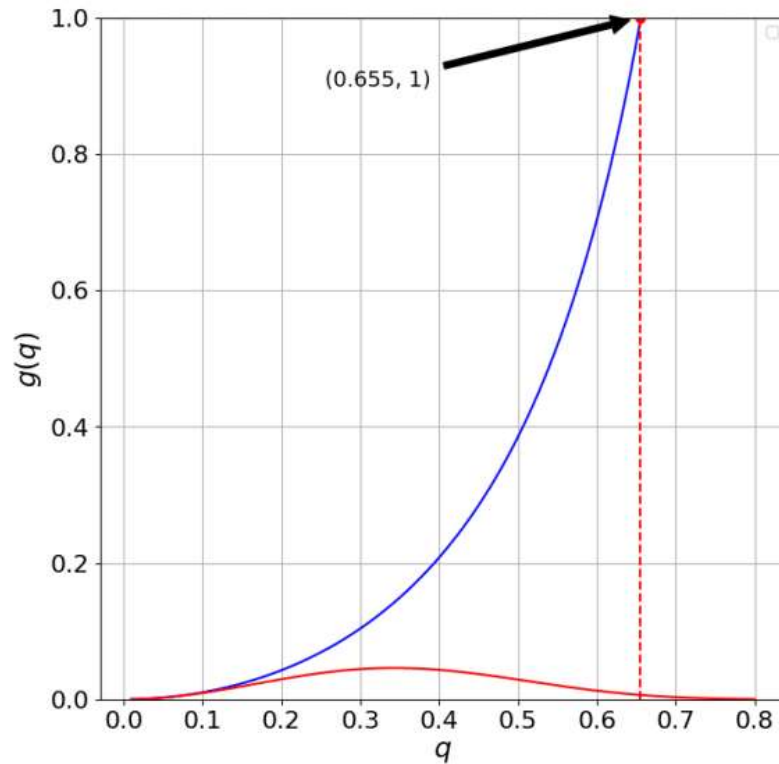


Figura 4.3: Gráfica de la función  $g(q)$ . En la cual se observa que  $g(q)$  presenta un máximo. Esto es útil para restringir el modelo. La curva azul corresponde a la aproximación por serie de Taylor, mientras que la curva roja muestra la distribución aproximada para un polítopo<sub>2</sub> con  $p = 15$ , que fue el utilizado para modelar la simulación.

$$g(q)dv = (1 - q^2)^{15/2}q^2dv, \quad (4.28)$$

A continuación, se muestra el algoritmo para la generación de radios. Retomando la integral (2.19) y resolviéndola, tenemos:

$$m(x) = M \ln \sqrt{x^2 + 1} + x - \frac{x}{x^2 + 1}. \quad (4.29)$$

Sea  $k = \frac{M}{m}$ , con este parámetro, podemos usar el método de Monte Carlo para modelar  $x$ :

$$k^{-1} = \ln \sqrt{x^2 + 1} + x - \frac{x}{x^2 + 1}, \quad (4.30)$$

seguido de implementar un método de rechazo para resolver  $x$  y así obtener el valor de  $r$ .

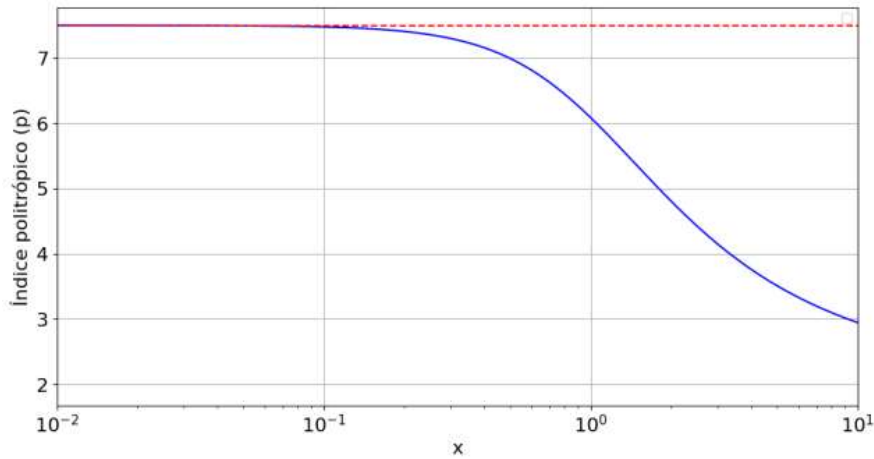


Figura 4.4: Comportamiento del índice politrópico.

Para caracterizar los cúmulos, tomamos ciertos parámetros como referencia. Por ejemplo, el radio de masa media, definido como el radio en el cual se concentra la mitad de la masa del cúmulo, este se calcula como:

$$\frac{m(x_{hr})}{M} = \ln \frac{x_{hr}^{\frac{3}{2}} + x_{hr} - p}{x_{hr}^{\frac{3}{2}} + 1} = \frac{1}{2}, \quad (4.31)$$

donde  $x_{hr} = \frac{r_{hr}}{r_0}$ , siendo  $r_{hr}$  el radio de masa media del modelo de Schuster con  $\beta = 3/2$ . Numéricamente, se obtiene:

$$x_{hr} \approx 1.84 \implies r_{hr} \approx 1.84r_0. \quad (4.32)$$

Del mismo modo, definimos el radio del núcleo (radio del core,  $r_c$ ), de acuerdo con [Dejonghe \(1987\)](#), como el radio donde la densidad superficial decae a la mitad de su valor central:

$$\Sigma(x) = \frac{2\rho(0)r_0}{1 + \mu} \frac{\mu^2 - x^2}{1 + \frac{\mu^2 - x^2}{2}}, \quad (4.33)$$

donde  $x = \frac{r}{r_0}$  y  $\mu = \frac{r_l}{r_0}$ , siendo  $r_l$  el radio de marea y  $\Sigma_0 = \frac{2\rho(0)r_0}{1 + \mu^2}$ . Usando  $x_c = \frac{r_c}{r_0}$ , definimos el radio del núcleo como:

$$\Sigma(x_c) = \Sigma_0 \implies \frac{\rho_0}{1 + \frac{x_c^2}{c}} = \frac{1}{2}. \quad (4.34)$$

Resolviendo, obtenemos:

$$r_c = r_0 \sqrt{\frac{2}{k^2 + 2} - 3}. \quad (4.35)$$

#### 4.3.2. Caso $\beta = 2$

Usando la Ecuación (4.11), tenemos que:

$$\Phi = -\frac{GM}{r^0} \frac{\arctan(x)}{2x}. \quad (4.36)$$

Utilizando la expansión en serie de Taylor para  $\arctan(x)$ ,  $\arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3}$ , obtenemos la siguiente aproximación del potencial para  $x \ll 1$ :

$$x \approx \frac{r}{\frac{6\Phi}{\Phi_0} + 3}. \quad (4.37)$$

Así, obtenemos que:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{\frac{6\Phi}{\Phi_0} + 4}. \quad (4.38)$$

Notemos que:

$$\frac{d\rho}{d\Phi} = -\frac{12\rho_0}{\Phi_0 \left(\frac{6\Phi}{\Phi_0} + 4\right)^3}. \quad (4.39)$$

Siguiendo el procedimiento del caso anterior, se llega a:

$$f(E) \propto \frac{v + \frac{v}{\epsilon} (\epsilon^2 - \epsilon)}{\epsilon^4 + \epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon} \propto (\epsilon^{3/2} + \epsilon^{1/2})^{-1} \propto \epsilon^{-3/2}. \quad (4.40)$$

La Figura 4.5 presenta la comparación de las diferentes aproximaciones.

De forma similar al modelo de Plummer, notando que  $\epsilon = -E$ , podemos escribir:

$$g(E)dv \propto (-E)^{-3/2} v^2 dv, \quad (4.41)$$

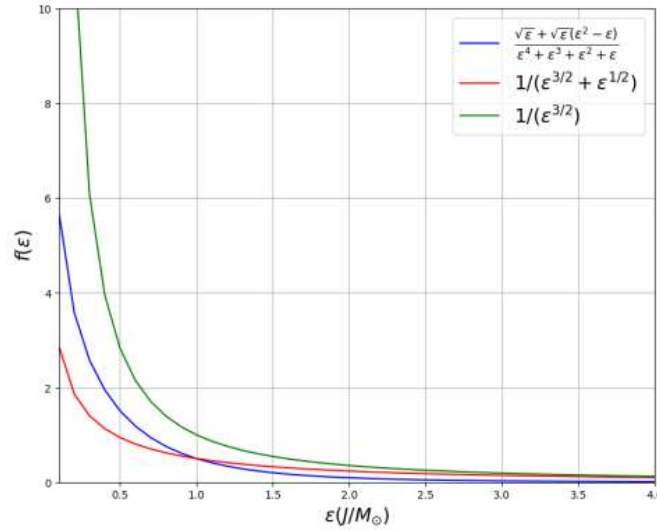


Figura 4.5: Comparación de las curvas de energía para la aproximación. Podemos notar que, para  $\epsilon > 2$ , las curvas se mantienen similares. La curva azul representa la aproximación  $\frac{\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\epsilon}(\epsilon^2 - \epsilon)}{\epsilon^4 + \epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon}$ , la roja  $(\epsilon^{3/2} + \epsilon^{1/2})^{-1}$ , y finalmente, la verde describe la función  $\epsilon^{-3/2}$ .

donde  $E = \Phi(r) + \frac{v^2}{2}$ . Como  $v_e = \sqrt{-2\Phi} = \frac{GM}{r_0} \frac{\arctan(x)}{x}$ , siendo  $v_e$  la velocidad de escape, reescribimos la energía como  $E = -\frac{v_e^2}{2} + \frac{v^2}{2}$ . Así, obtenemos:

$$g(v)dv \propto \frac{2}{2} \frac{v_e^2}{2} \frac{2^{-3/2}}{2} v^2 dv. \tag{4.42}$$

Definiendo  $q = \frac{v}{v_e}$ , encontramos que  $E(q) \propto q^2 - 1$ , y podemos escribir:

$$g(q)dv = (1 - q^2)^{-3/2} q^2 dv. \tag{4.43}$$

Por lo tanto, podemos realizar un análisis análogo al modelo de Plummer. Notemos que esta función tiene una cota superior en  $q = 0.655$ , ver Figura 4.6. La curva azul indica la aproximación dada por la serie de Taylor mencionada, mientras que la curva roja corresponde a un polítopo con  $p = \frac{7}{2}$  (ver Figura 4.7). Sin embargo, nuevamente nuestra simulación sobreestima los valores de velocidad de las partículas; por consiguiente, se utilizó un valor de  $p = \frac{7}{2}$ .

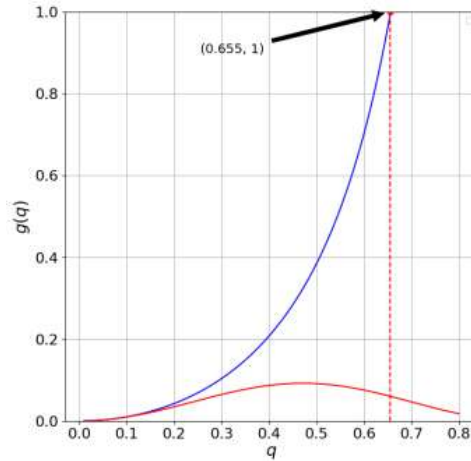


Figura 4.6: Gráfica de la función  $g(q)$ , donde observamos que  $g(q)$  tiene un máximo. Esto servirá para restringir el modelo y generar el algoritmo de Monte Carlo.

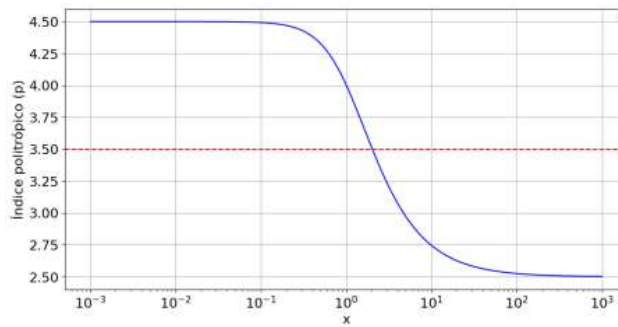


Figura 4.7: Comportamiento del índice politrópico. La línea punteada indica el valor de  $p = \frac{7}{2}$ , utilizado en este caso para modelar la distribución de estrellas de Schuster con  $\beta = 2$ .

Para calcular los radios, usamos la ecuación de masa acumulada (2.19):

$$m(x) = M \frac{\arctan(x)}{2} - \frac{x}{2x^2 + 2} \tag{4.44}$$

De forma análoga a los demás casos:

$$k = \frac{-1}{2x^2 + 2} \frac{\arctan(x)}{2} - \frac{x}{2x^2 + 2} \tag{4.45}$$

Calculando el radio de masa media, obtenemos:

$$\frac{m(x_{hr})}{k} = \frac{\arctan(x_{hr})}{2} - \frac{x_{hr}}{2x_{hr}^2 + 2} = \frac{1}{2} M \tag{4.46}$$

Resolviendo numéricamente:

$$x_{hr} \approx 3.3 \implies r_{hr} \approx 3.3r_0, \quad (4.47)$$

Finalmente, definimos el radio del núcleo:

$$\Sigma(x_c) = \frac{\Sigma_0}{2}, \quad (4.48)$$

donde  $x = \frac{r}{r_0}$  y  $\kappa = \frac{r_l}{r_0}$ , siendo  $r_l$  el radio de marea y  $\Sigma_0 = \frac{\pi}{2}\rho(0)r_0$ . Usando  $x_c = \frac{r_c}{r_0}$ , definimos el radio del núcleo como:

$$\frac{1}{[1 + x_c^2]^{3/2}} = \frac{1}{2} \implies x_c^2 = 2^{2/3} - 1. \quad (4.49)$$

Resolviendo:

$$r_c = r_0 \sqrt{2^{2/3} - 1}. \quad (4.50)$$

## 4.4. Validación de Condiciones Iniciales

Para la generación del código utilizamos diversas librerías de Python, tales como:

- Numpy: Para realizar cálculos numéricos, vectorizar operaciones y usar funciones estadísticas.
- Matplotlib: Para la generación de gráficas.
- Scipy: Para realizar integrales numéricas y otras herramientas científicas.
- h5py: Para manejar archivos en formato HDF5, utilizado por GADGET-4. Este formato es ideal para gestionar grandes volúmenes de datos y permite estructurarlos de manera eficiente. Hablaremos más sobre esto en el capítulo dedicado a GADGET-4.

Estas librerías son fundamentales para generar las partículas virtuales a partir de las ecuaciones descritas anteriormente.

Una vez caracterizadas las diferentes densidades, generamos posiciones y velocidades de acuerdo con los modelos, asegurándonos que éstas se encuentren en equilibrio. Aunque ya contamos

con un código que produce partículas virtuales siguiendo las distintas distribuciones, es necesario verificar las condiciones iniciales generadas. A continuación, se presentan las gráficas utilizadas en este análisis.

#### 4.4.1. Distribución Espacial de las Partículas (estrellas)

El primer análisis es cualitativo e inspecciona la forma tridimensional del cúmulo para verificar su simetría esférica. En la Figura 4.8 se presentan visualizaciones tridimensionales de los cúmulos para diferentes modelos de densidad, considerando un total de 1000 estrellas en cada gráfica. El modelo de King parece ser el menos denso, sin embargo, esto se debe a que el modelo de King depende del parámetro  $W_0$ , que regula la concentración. Podemos ver que el modelo más denso de los tres es el modelo de Schuster.

#### 4.4.2. Perfiles Radiales de la Densidad de Partículas

Para analizar los perfiles radiales, se calculó la densidad de estrellas en cascarones esféricos. Esto se obtuvo dividiendo el número de estrellas sobre el volumen del cascarón. En la Figura 4.9 se comparan las densidades obtenidas con los modelos teóricos.

Previamente se mencionó que el modelo de Plummer es más denso que el de Schuster para  $\beta = 2$ , esto se debe al comportamiento asintótico de la función de masa inicial del modelo de Schuster, que restringe la generación de estrellas a una región acotada. En contraste, el modelo de Plummer, al carecer de un corte en la densidad, genera estrellas más lejanas que las permitidas en el modelo de Schuster.

#### 4.4.3. Distribuciones de Masa Inicial

Se consideraron funciones de masa inicial de Salpeter (Ver Ecuación 2.6) o Kroupa (Ver Ecuación 2.11). Estas funciones son observacionales y describen la distribución de masas estelares en un cúmulo. En la Figura 4.10 se muestra un par de histogramas de las masas generadas. La diferencia principal entre ambos modelos es la estimación de estrellas de baja masa, Salpeter sobrestima la probabilidad de estrellas de baja masa ( $0.01 - 0.08 M_{\odot}$ ). Se observa que las estrellas de baja masa dominan la población y aportan la mayor parte de

la masa total del cúmulo, mientras que las estrellas de alta masa, aunque menos numerosas, contribuyen significativamente a la luminosidad del cúmulo (Binney and Tremaine, 2008).

#### 4.4.4. Distribuciones de Velocidad y Velocidades de Escape

En esta sección se compara la velocidad de escape a diferentes radios para cada modelo con las velocidades generadas numéricamente. En la Figura 4.11 se observa que el modelo de King es el que presenta menor dispersión de velocidades. Cabe mencionar que tanto la distribución de probabilidad de velocidades como la curva de velocidad de escape dependen del número de estrellas generadas.

Para evaluar la dispersión de velocidades, generamos un histograma de velocidades en los tres ejes cartesianos. La Figura 4.12 muestra la frecuencia de las velocidades.

Las gráficas presentadas validan que los modelos generados producen condiciones iniciales numéricas que representan adecuadamente el fenómeno físico en cuestión. Las posiciones, velocidades y masas están en concordancia con las distribuciones teóricas, lo que garantiza que las simulaciones sean confiables. Los datos generados se almacenan en un archivo HDF5 <sup>1</sup>, junto con un archivo de parámetros y configuraciones para ser utilizado en GADGET-4.

---

<sup>1</sup>HDF5 es un formato de archivo diseñado para almacenar y organizar grandes volúmenes de datos de forma eficiente. Utiliza una estructura jerárquica y admite diversos tipos de objetos, como tablas e imágenes (The HDF Group, 2025).

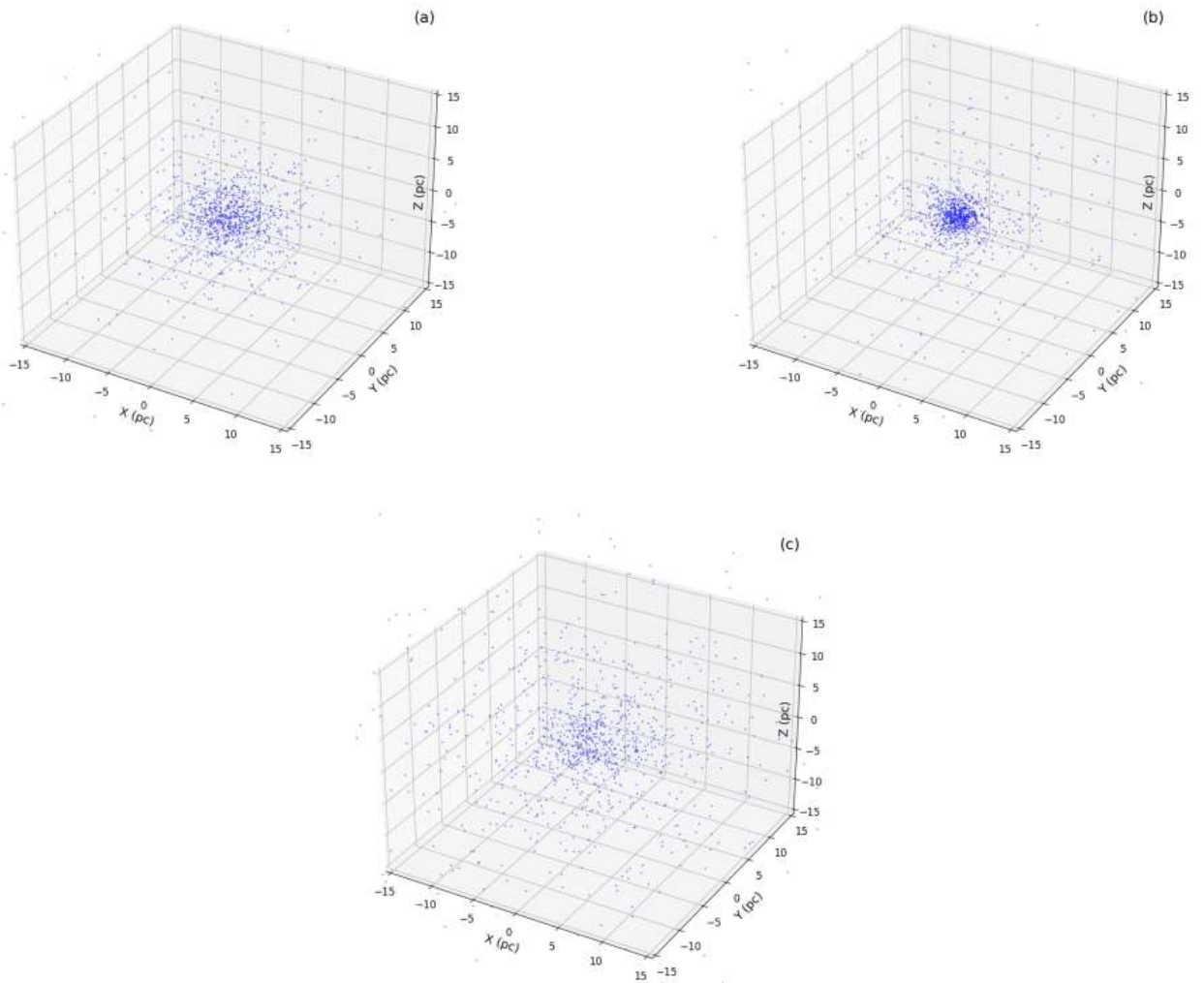


Figura 4.8: Distribución espacial de estrellas para tres modelos. Podemos observar en el inciso (a) la distribución del modelo de Plummer con un radio de masa media de 5 pc, en el inciso (b) el modelo de Schuster para el valor de  $\beta = 2$  con un radio de masa media de 5 pc, y en el inciso (c) el modelo de King con  $W_0 = 6$  y radio de masa media de 5 pc.

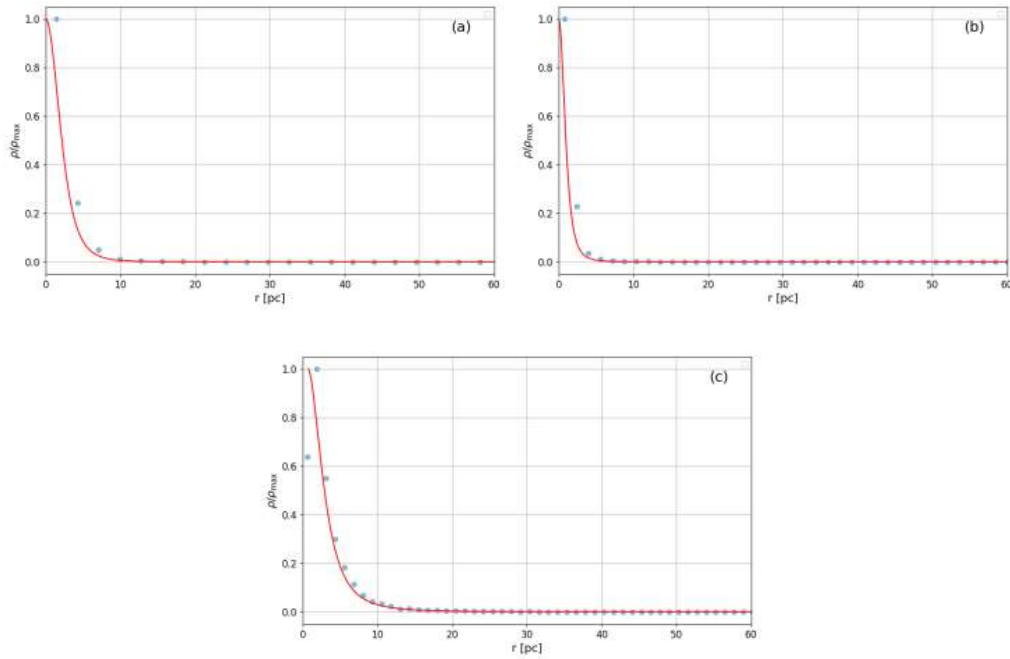


Figura 4.9: Densidades generadas y teóricas. (a) Plummer con radio de masa media 5 pc, (b) Schuster ( $\beta = 2$ ) con radio de masa media 5 pc, y (c) King ( $W_0 = 6$ ) con radio de masa media 5 pc. La curva roja representa el modelo teórico, mientras que los puntos corresponden a la densidad promedio de las estrellas generadas. Notamos que el modelo de Schuster es el más concentrado, seguido por Plummer y King. Estas gráficas confirman que las partículas generadas siguen la densidad esperada.

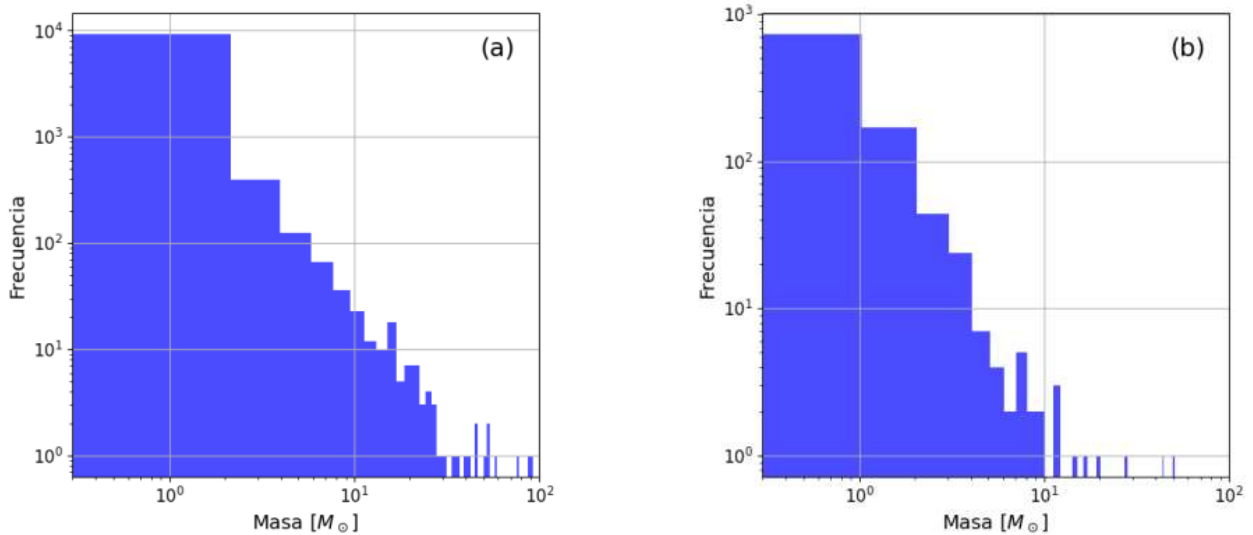


Figura 4.10: Distribución de masa de las estrellas usando las funciones de probabilidad. (a) El histograma de masa de la función de Salpeter, en (b) el histograma de la función de masa de Kroupa.

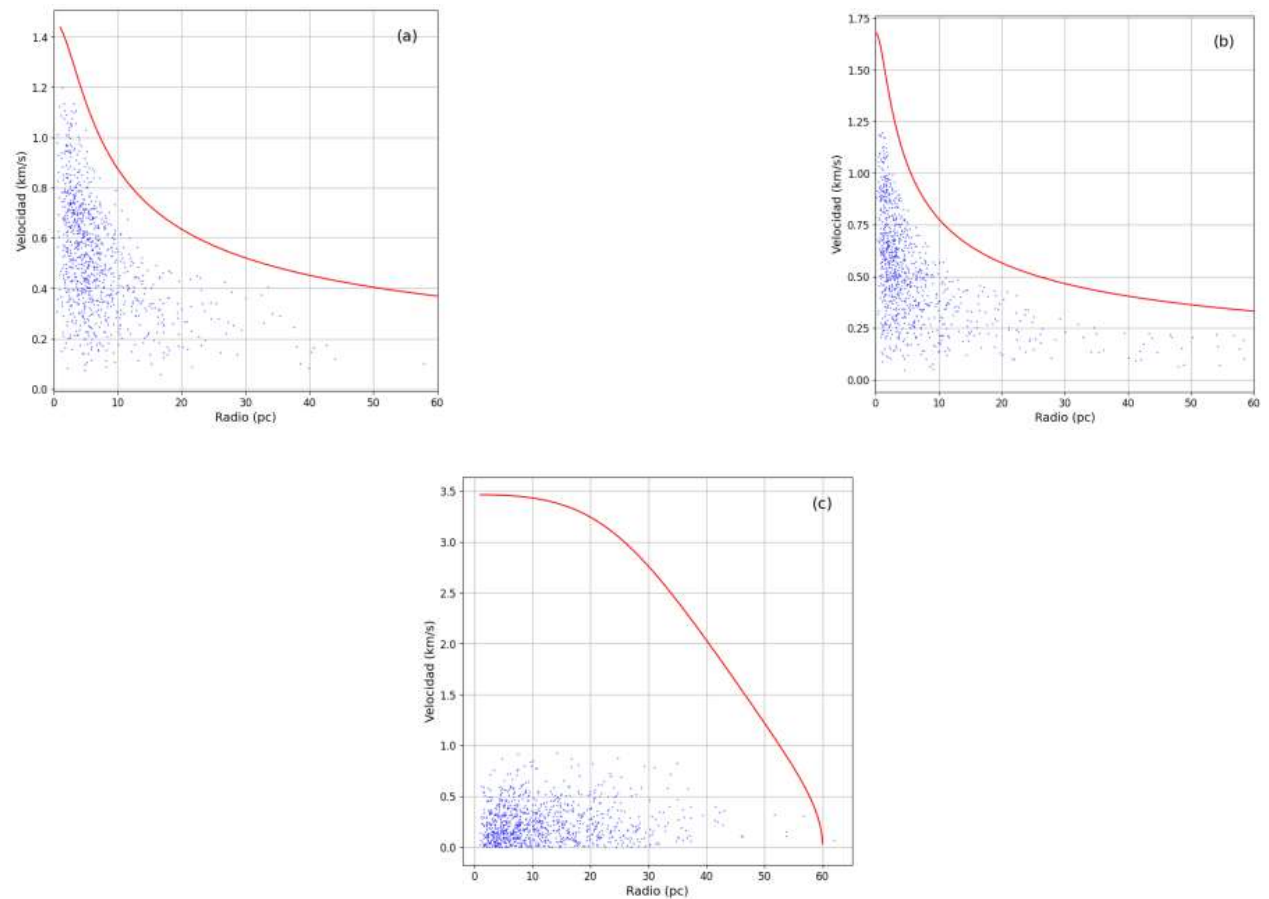


Figura 4.11: Velocidad de escape vs velocidades generadas numéricamente. En el inciso (a) se presentan las velocidades generadas con el modelo de Plummer y un radio de masa media de 5 pc, en el inciso (b) las velocidades generadas con el modelo de Schuster para  $\beta = 2$  y un radio de masa media de 5 pc, y en el inciso (c) las velocidades generadas con el modelo de King con  $W_0 = 6$  y un radio de masa media de 5 pc. La curva roja representa la velocidad de escape, dada por  $\sqrt{2\Phi}$ , mientras que los puntos corresponden a las velocidades generadas siguiendo las distribuciones de probabilidad de cada modelo.

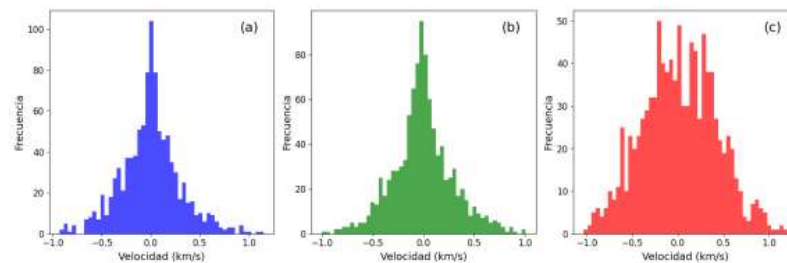


Figura 4.12: Histograma de velocidades. (a) Componente de la velocidad en la dirección x, (b) componente de la velocidad en la dirección y, y (c) componente de la velocidad en la dirección z. Se observa que las velocidades cercanas a 0 son las más frecuentes, indicando que la mayoría de las estrellas tienen bajas velocidades.

# Capítulo 5

## GADGET

En este capítulo hablaremos acerca del programa de código abierto llamado GADGET-4 <sup>1</sup>, proporcionando una breve explicación de su funcionamiento y detallando los parámetros utilizados en nuestra simulación para facilitar su replicación.

GADGET: (GALaxies with Dark matter and Gas intERact) es un código de simulación que resuelve numéricamente las ecuaciones de movimiento de Newton mediante el método de Runge-Kutta, lo que permite abordar eficientemente el problema de N-cuerpos. Además, emplea hidrodinámica de partículas suavizadas en combinación con el método de malla de partículas para modelar las interacciones entre partículas en entornos astrofísicos.

La estructura del código de GADGET se fundamenta en un TreeSPH (la gravedad se calcula con un código Tree-PM y la hidrodinámica con SPH).<sup>2</sup> En GADGET, las interacciones gravitacionales se calculan mediante una expansión jerárquica multipolar, mientras que el gas se modela con SPH (recordemos que en el capítulo 2 se mencionó que los GCs prácticamente no contienen gas, por lo que no usaremos SPH en este trabajo.) y la materia oscura se representa como partículas sin colisión (tampoco se utiliza en este trabajo).

---

<sup>1</sup>En el texto se utilizará indistintamente GADGET-4 o GADGET

<sup>2</sup>Un código Tree-PM combina el algoritmo de Barnes-Hut y el método de malla, fusionando las condiciones periódicas automáticas del Particle Mesh (PM por sus siglas en inglés) con la alta resolución de los algoritmos de árbol. Para más información, consulte [Bagla \(2002\)](#). Por otro lado, Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH por sus siglas en inglés) es un enfoque hidrodinámico utilizado frecuentemente para simular fluidos, incluyendo estructuras estelares y sistemas magnéticos (para una descripción detallada, vea [Gingold and Monaghan \(1977\)](#).)

En síntesis, GADGET se puede utilizar para simular la dinámica de componentes sin colisión, como materia oscura o estrellas en galaxias, ofreciendo una herramienta versátil y precisa para estudiar la formación y evolución de estructuras en el Universo.

## 5.1. Dinámica Sin Colisión

Para describir la dinámica sin colisión, GADGET emplea un enfoque basado en las ecuaciones de Boltzmann y Poisson. Estas se integran mediante un Hamiltoniano descrito por la siguiente ecuación:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i a(t)^2} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{m_i m_j \psi(x_i - x_j)}{a(t)}, \quad (5.1)$$

donde  $x_i$  son las coordenadas cómoviles y el momento canónico está dado por  $p_i = a^2 m_i \dot{x}_i$ ,  $a(t)$  es el factor de escala dado por el modelo de Friedmann-Lemaître. Sin embargo, como trabajaremos en un espacio Newtoniano,  $a(t) = 1$  (ya que no realizaremos simulaciones cosmológicas).

Si se asumen condiciones periódicas para un cubo de tamaño  $L^3$ , el potencial de interacción es:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G - \frac{1}{L^3} + \sum_n \delta(\tilde{x} - nL), \quad (5.2)$$

donde  $n = (n_1, n_2, n_3)$ ,  $\tilde{x}$  y  $\delta$  es la función delta de Dirac convolucionada con una normalización del suavizado gravitacional de la escala cósmica. Sin embargo, como trabajamos en un espacio Newtoniano, esto se reduce a la interacción usual de Newton modificada con un parámetro de suavizado:

$$\Phi = - \frac{Gm}{|x + \epsilon|}, \quad (5.3)$$

siendo  $\epsilon$  el parámetro de softening (suavizado).

Independientemente del tipo de condición en la frontera utilizada, el cálculo de fuerzas gravitacionales implica una suma doble. Esto da lugar a una complejidad computacional de orden

$N^2$ , lo que hace que las simulaciones sean costosas en términos de tiempo de cómputo.

La gravedad es una fuerza impulsora en la formación de estructuras, lo que la convierte en el núcleo de cualquier código cosmológico. Sin embargo, debido a su largo alcance, calcular con precisión las fuerzas gravitacionales en sistemas complejos presenta un desafío considerable. Para abordar este problema, se implementan algoritmos de adaptabilidad espacial, como el algoritmo de árbol (Tree). Este algoritmo agrupa las partículas distantes en celdas de tamaño progresivamente mayor, lo que permite reducir el número de interacciones a calcular a un orden de  $\log N$ .

Este algoritmo divide el espacio en pequeños nodos jerárquicos, hasta llegar a los nodos hoja, que contienen partículas individuales. La fuerza gravitacional se calcula recorriendo el árbol, comenzando desde el nodo raíz. En cada nivel del recorrido, se decide si la fuerza resultante es lo suficientemente precisa al aproximar un grupo de partículas mediante su centro de masa. Si la respuesta es afirmativa, se utiliza esta aproximación y se termina el recorrido; en caso contrario, el algoritmo desciende al siguiente nivel del árbol para calcular la interacción de forma más detallada. Este procedimiento proporciona una aproximación eficiente de la fuerza gravitacional real (Ver Figura 5.1).

GADGET incorpora técnicas adicionales para optimizar el rendimiento computacional. Por ejemplo, reduce el número de nodos internos generados, adaptando los cálculos a la densidad local de la simulación. Además, el algoritmo de árbol se combina con una curva de Peano-Hilbert, que permite un llenado eficiente del espacio y facilita la paralelización en simulaciones distribuidas mediante MPI (Message Passing Interface).

El método híbrido Tree-PM (Particle-Mesh) implementado en GADGET divide el potencial gravitacional en dos componentes: un término de corto alcance y otro de largo alcance (Ewald, 1921). Las fuerzas de corto alcance se calculan mediante el método de árbol, mientras que las interacciones de largo alcance se evalúan utilizando un método de Fourier basado en mallas. Este enfoque transforma los datos espaciales en el espacio de frecuencias, donde el cálculo es más eficiente. Posteriormente, las frecuencias se multiplican por una función de Green para obtener el potencial en condiciones periódicas. Este procedimiento permite dividir la malla de simulación en celdas pequeñas, optimizando los cálculos en simulaciones

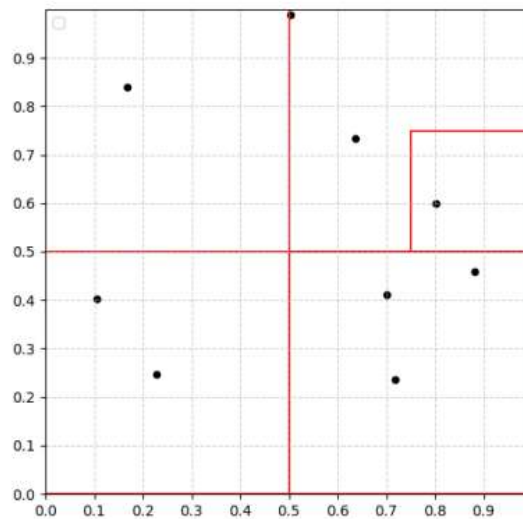


Figura 5.1: Las líneas punteadas representan el algoritmo PM, este divide el espacio en celdas para calcular la gravedad a largo alcance. Los recuadros rojos representan el algoritmo Barnes-Hut, que refina la gravedad a corto alcance dividiendo el espacio en nodos cada vez más pequeños.

de gran escala ([Springel et al., 2005](#)).

El algoritmo de Barnes-Hut, utilizado en GADGET, organiza el espacio en una estructura de árbol jerárquico tipo octree, dividiéndolo en 8 octantes en cada nivel. Las partículas se distribuyen a lo largo de una curva de Peano-Hilbert, una curva fractal que cubre el volumen completo de la simulación. Esto facilita la creación de cubos anidados y permite distribuir las ramas del árbol entre diferentes procesos MPI sin alterar la geometría ni las interacciones, mejorando la eficiencia y escalabilidad del código.

Además, GADGET incluye el método de Fast Multipole Method (FMM) introducido por [Greengard and Rokhlin \(1987\)](#), que mejora significativamente la precisión y eficiencia en la evaluación de interacciones gravitacionales de largo alcance. En los Apéndice [A](#) y [B](#), se encuentran las indicaciones de instalación y ejecución de GADGET-4.

## 5.2. El Archivo de Condiciones Iniciales (IC)

Cuando realizamos una simulación en GADGET, el programa genera un archivo llamado Snapshot (del inglés, “instantánea”). Este archivo contiene el estado del sistema en momentos determinados y puede ser procesado en paralelo, lo que permite reducir significativamente el tiempo de cómputo. En lugar de manejar un único archivo de varios gigabytes, es posible trabajar con varios archivos más pequeños. Estas salidas tienen un formato denominado `snapshot_xxx.y`, donde `xxx` representa el número del estado, y `y` indica el índice del archivo dentro de este estado. Por ejemplo, los archivos `snapshot_007.0` a `snapshot_007.15` corresponden a un estado con un total de 16 archivos.

El formato predeterminado de GADGET (cuando `SnapFormat=1`) corresponde al formato jerárquico HDF5<sup>3</sup>. Este formato organiza la información en bloques (Ver Tabla 5.1), aunque no todos los bloques están necesariamente presentes en una simulación. Por ejemplo, los bloques que describen propiedades del gas, como energía interna o densidad, solo son relevantes en simulaciones hidrodinámicas y, por lo tanto, no se utilizan en nuestro caso. Asimismo, la presencia del bloque de masa depende de si la masa de un tipo específico de partícula es constante o no: si todas las partículas de un tipo tienen la misma masa, este bloque puede omitirse.

---

<sup>3</sup>Los archivos HDF5 permiten organizar datos en secciones, lo que facilita almacenar grandes volúmenes de información de forma estructurada.

| Bloques disponibles en los archivos HDF5 |                |                   |  |
|--|----------------|-------------------|--|
| Nr                                       | ID del Formado | Identif. del HDF5 | Contenido del Bloque                           |
| 1  | HEAD           | Header            | Archivo de cabecera.                           |
| 2  | POS            | Coordinates       | Posición de las partículas.                    |
| 3  | VEL            | Velocities        | Velocidades de las partículas.                 |
| 4  | ID             | ParticlesIDs      | Identificadores de las partículas.             |
| 5  | MASS           | Masses            | Masas (para partículas con masas variables).   |
| 6  | U              | InternalEnergy    | Energía térmica por unidad de masa (SPH).      |
| 7  | RHO            | Density           | Densidad de las partículas (SPH).              |
| 8  | HSML           | SmoothingLength   | Longitud de suavizado (h) para SPH.            |
| 9  | POT            | Potential         | Potenciales gravitacionales de las partículas. |
| 10                                       | ACCE           | Acceleration      | Aceleraciones de las partículas.               |
| 11                                       | ENDT           | RateOfChangeOfEn  | Tasa de cambio de la entropía (SPH).           |
| 12                                       | TSTP           | TimeStep          | Paso de tiempo de las partículas.              |

Cuadro 5.1: Descripción de los bloques en los archivos HDF5 generados por GADGET-4.

Dentro de cada bloque, las partículas se ordenan por tipo. Por ejemplo, las partículas de gas (tipo 0) se ubican primero, seguidas de otros tipos. El bloque de identificadores (ID) juega un papel crucial para identificar cada partícula, ya que el paralelizado de los cálculos puede hacer que una partícula se “mueva” de un procesador a otro.

El bloque de cabecera (Header) (Ver Tabla 5.2) es especialmente importante, ya que contiene información global sobre el conjunto de partículas. Por ejemplo, incluye el número de partículas de cada tipo.

| Cabeceras disponibles en los archivos HDF5 |        |                     |   |
|--|--------|---------------------|---|
| Cabecera                                   | Tipo   | Nombre de HDF5      | Comentario                                    |
| Npart[6]                                   | uint   | NumPart_ThisFile    | Número de partículas por tipo de partículas.  |
| Nall[6]                                    | uint64 | NumPart_Total       | Número total de partículas.                   |
| Massasr[6]                                 | double | MassTable           | Masa de cada tipo de partículas.              |
| Time                                       | double | Time                | Tiempo de salida.                             |
| Redshift                                   | double | Redshift            | $z = 1/(a - 1)$ (integración cosmológica).    |
| BoxSize                                    | double | BoxSize             | Tamaño de la caja con condiciones periódicas. |
| NumFiles                                   | int    | NumFilesPerSnapshot | Número de archivos por cada snapshot.         |

Cuadro 5.2: Parámetros de cabecera en los archivos HDF5.

Es necesario incluir estas características en el archivo que genera las condiciones iniciales, ya que GADGET utiliza esta información para identificar y gestionar los distintos tipos de partículas durante la simulación. De este modo, se garantiza que cada componente del sistema, como el gas, las estrellas o la materia oscura, esté correctamente inicializado con sus respectivas propiedades físicas.

GADGET incluye un ejemplo funcional que puede servir como base para construir nuestras propias condiciones iniciales. Este ejemplo, denominado `gassesphere`, está disponible en los archivos del código. Dicho ejemplo proporciona una estructura básica para inicializar un sistema esférico de gas y puede ser modificado para adaptarse a sistemas más complejos, como aquellos que incluyen estrellas, discos galácticos, o incluso agujeros negros.

### 5.3. Configuración de Simulaciones

Como se mencionó previamente, para ejecutar una simulación en GADGET-4 se requieren tres archivos principales: `Config.sh`, `Param.txt` y el archivo de condiciones iniciales. Este último descrito en la sección anterior, por lo que aquí nos concentraremos en explicar los otros dos archivos.

#### 5.3.1. El Archivo de Configuración (`Config.sh`)

Este archivo define las configuraciones principales relacionadas con el tipo de ejecución y las aproximaciones físicas que utilizará GADGET-4 para resolver la simulación.

En nuestro caso, utilizamos un formato básico enfocado en calcular los efectos gravitatorios de las partículas. A continuación, se detallan las configuraciones empleadas:

- `SELFGRAVITY`: Activa la interacción gravitacional entre las partículas.
- `NTYPES=4`: Define el número de tipos de partículas en la simulación, donde el tipo 4 corresponde a estrellas.
- `HIERARCHICAL_GRAVITY`: Habilita el algoritmo Tree-PM, previamente descrito, para calcular la gravedad de forma eficiente.

- EVALPOTENTIAL: Calcula el potencial gravitacional en cada paso de la simulación.
- OUTPUT\_POTENTIAL: Guarda los valores del potencial gravitacional en los archivos de salida.
- DOUBLEPRECISION=1: Utiliza precisión doble para mejorar la exactitud de los cálculos.
- GADGET2\_HEADER: Especifica el uso del formato de salida compatible con versiones previas de GADGET.

Estas configuraciones permiten realizar simulaciones enfocadas exclusivamente en la dinámica gravitacional, lo cual es adecuado para modelar GCs sin gas. Para revisar más configuraciones del archivo de configuraciones, ver el Apéndice D.

### 5.3.2. El Archivo de Parámetros (Param.txt)

Muchas de las configuraciones de GADGET-4 se establecen en el archivo de parámetros. Estas configuraciones están organizadas en palabras clave seguidas de un valor numérico. Cada parámetro solo puede aparecer una vez en el archivo, y si no se proporciona un valor, se interpretará como un archivo arbitrario o un valor predeterminado. A continuación, se muestran los parámetros más importantes utilizados en nuestras simulaciones junto con una breve descripción:

%---- Características de la simulación

|           |    |  |
|-----------|----|--|
| TimeBegin | 0  | % Tiempo inicial de la simulación (en Gyr) |
| TimeMax   | 13 | % Tiempo máximo de simulación (en Gyr)     |

%---- Frecuencia y parámetros de salida

|                          |       |   |
|--------------------------|-------|---|
| OutputListOn             | 0     | % Activar lista personalizada de salidas      |
| TimeBetSnapshot          | 0.05  | % Intervalo entre instantáneas                |
| TimeOfFirstSnapshot      | 0     | % Tiempo de la primera instantánea            |
| TimeBetStatistics        | 0.005 | % Intervalo para cálculos estadísticos        |
| NumFilesPerSnapshot      | 1     | % Número de archivos por instantánea          |
| MaxFilesWithConcurrentIO | 0     | % Máximo de archivos abiertos simultáneamente |

%---- Algoritmo del árbol y precisión de fuerzas

|                                  |       |  |
|----------------------------------|-------|--|
| TypeOfOpeningCriterion           | 1     | % Criterio de apertura de celdas para el árbol |
| ErrTolTheta                      | 0.5   | % Ángulo de apertura del algoritmo del árbol   |
| CourantFac                       | 0.15  | % Factor de Courant                            |
| ErrTolThetaMax                   | 0.9   | % Ángulo de apertura máxima permitido          |
| ErrTolForceAcc                   | 0.005 | % Precisión relativa del cálculo de fuerzas    |
| TopNodeFactor                    | 2.5   | % Resolución de la descomposición de dominio   |
| ActivePartFracForNewDomainDecomp | 0.01  | % Frecuencia de reconstrucción del dominio     |

%---- Longitud de suavizado gravitacional

|                        |             |                           |
|------------------------|-------------|---------------------------|
| SofteningMaxPhysClass4 | 0.0001 ; pc | % Suavizado físico máximo |
|------------------------|-------------|---------------------------|

% Asignación por tipo de partícula

|                           |   |
|---------------------------|---|
| SofteningClassOfPartType4 | 4 |
|---------------------------|---|

El ejemplo completo del archivo de parámetros se encuentra en el Apéndice C. Esta configuración incluye parámetros clave para realizar simulaciones de cúmulos globulares sin gas, utilizando únicamente partículas estelares y evitando parámetros cosmológicos irrelevantes. Por esta razón, algunas configuraciones no son utilizadas en nuestras simulaciones, aunque GADGET-4 las requiere para completar su archivo de parámetros. Otras configuraciones son generadas automáticamente según el formato del archivo de condiciones iniciales definido previamente. Para revisar más configuraciones del archivo de parámetros, ver el Apéndice E

## 5.4. Justificación del Parámetro $\theta$

Las simulaciones de N-cuerpos son sensibles al parámetro de suavizado gravitacional  $\epsilon$  y al ángulo de apertura  $\theta$ . En esta sección justificamos el uso de los valores  $\epsilon = 0.0001 \text{ pc}$  y  $\theta = 0.5$ , suavizado gravitacional (SofteningMaxPhysClass4) y al ángulo de apertura (ErrTolTheta), respectivamente. Mostramos que estos parámetros son adecuados en términos de eficiencia y precisión para nuestras simulaciones.

Para ello, analizamos la densidad utilizando el método de cascarones esféricos mencionado en el capítulo anterior, usaremos 15 cascarones para la región de  $r < 15\text{pc}$ . Además, examinamos las velocidades radiales, tangenciales y la raíz cuadrática media (RMS, por sus siglas en inglés). En particular, calculamos la densidad promedio para diferentes valores de  $\theta$ , generando resultados a partir de 20 snapshots, correspondientes a un intervalo temporal de 1 Gyr. Por lo tanto, las densidades mostradas son promedios temporales a lo largo de este intervalo.

En la Figura 5.2, se puede ver que la densidad promedio en la zona central del cúmulo es sensible al parámetro  $\theta$ . Esto se debe a que el IMBH introduce fluctuaciones cerca de su zona de influencia; fuera de esta, la densidad se estabiliza independientemente del valor de  $\theta$ . En edades tempranas (a), no se observan diferencias significativas entre las simulaciones con distintos valores de  $\theta$ . Sin embargo, en (b), correspondiente a la mitad de la simulación, se observa una mayor variación en los valores promedios, aunque  $\theta = 0.5$  sigue siendo un ajuste razonablemente cercano a  $\theta = 0.1$ , que representa el algoritmo con mayor precisión. Finalmente, en (c), hacia el final de la simulación, las diferencias entre los valores de  $\theta$  se vuelven más significativas. Es importante destacar que, aunque un  $\theta$  menor aumenta la precisión, también incrementa considerablemente el tiempo de cómputo. Por esta razón, elegimos  $\theta = 0.5$  como un valor adecuado entre eficiencia y precisión para todas nuestras simulaciones.

Estas simulaciones se generaron con 10,000 estrellas y un IMBH de  $10,000M_{\odot}$ , utilizando el modelo de Plummer mencionado anteriormente y con una función inicial de masa de Salpeter. Se realizó un análisis similar para las velocidades radiales, tangenciales y RMS para diferentes valores de  $\theta$ .

Si vemos la Figura 5.3, en las gráficas (a), observamos que no hay diferencias significativas entre las curvas para los distintos valores de  $\theta$ , aunque las barras de error en la velocidad tangencial son notoriamente grandes, especialmente cerca del centro ( $r < 2\text{pc}$ ). Esto se debe a la influencia gravitacional del IMBH central, que introduce inestabilidades en la dinámica de las partículas. En las gráficas (b), correspondiente a 7 Gyr, comenzamos a notar que algunas curvas para  $\theta$  se desvían de la curva roja, que representa el valor más preciso ( $\theta = 0.1$ ). Sin embargo, este comportamiento nuevamente ocurre en las regiones cercanas al IMBH,

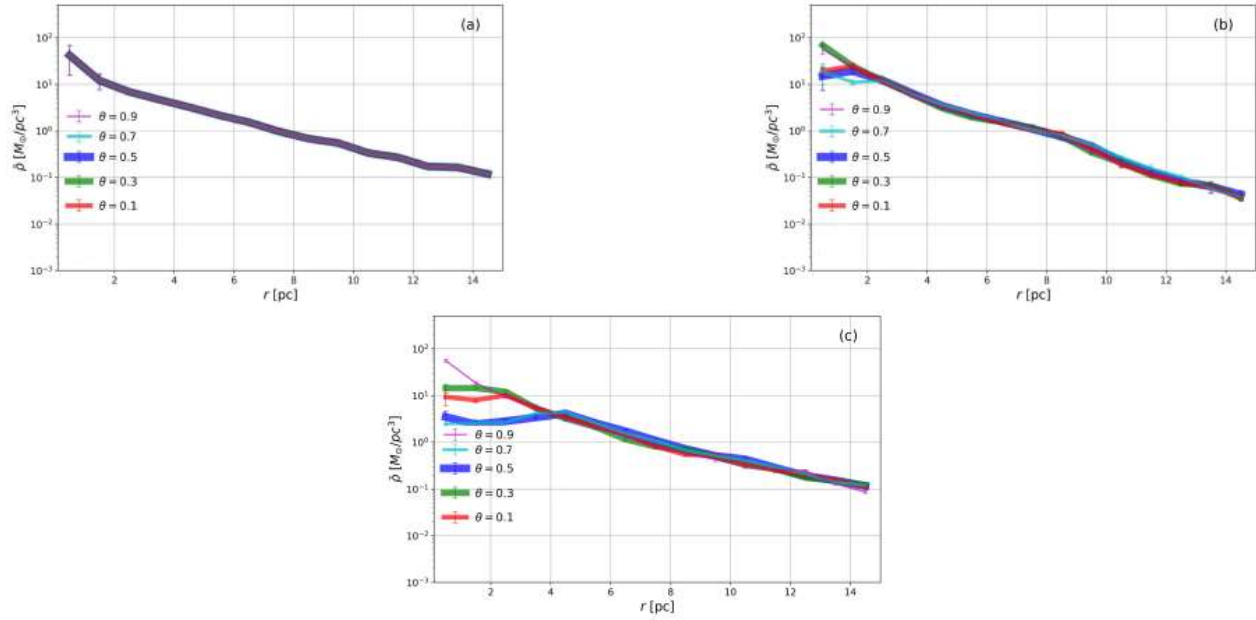


Figura 5.2: Gráficas de densidad promedio temporal para distintos valores de  $\theta$ . (a) densidad promedio a 1 Gyr, (b) a 7 Gyr y (c) a 13 Gyr. Las barras son los errores calculados mediante desviación estándar.

donde su potencial gravitacional domina. A pesar de estas variaciones,  $\theta = 0.5$  sigue siendo cercana a la curva más precisa. Finalmente, en las gráficas (c), hacia el final de la simulación (13 Gyr), las diferencias entre las curvas para distintos valores de  $\theta$  se vuelven más evidentes. En particular, todas las curvas muestran cierto desfase en las tres velocidades analizadas (RMS, radial y tangencial). No obstante, es importante destacar que la curva azul ( $\theta = 0.5$ ), aunque presenta un desfase respecto a la curva roja, mantiene la misma tendencia general, lo que reafirma su idoneidad.

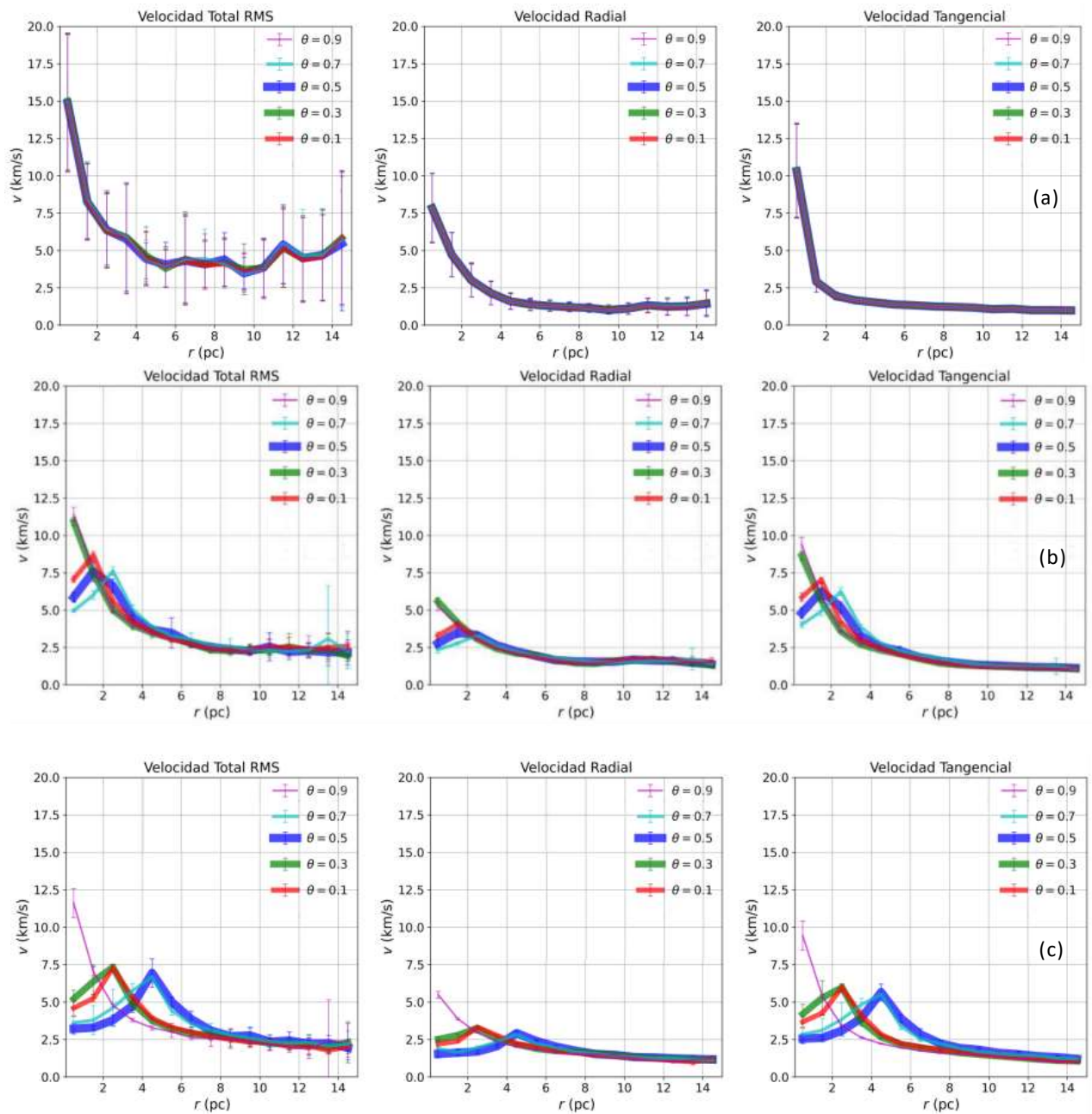


Figura 5.3: Perfiles de velocidad promedio temporal para distintos valores de  $\theta$ . Las gráficas muestran las velocidades RMS, radiales y tangenciales en tres momentos de la simulación: La fila (a) 1 Gyr, la fila (b) 7 Gyr y la fila (c) 13 Gyr. Las barras son los errores calculados mediante desviación estándar.

## 5.5. Justificación del Parámetro $\epsilon$

Notemos que, a diferencia de las gráficas de  $\theta$ , en la Figura 5.4, no hay una variación significativa al cambiar el valor máximo del suavizado  $\epsilon$ . Esto se debe a que GADGET-4 utiliza un suavizado gravitacional variable, y nosotros solo imponemos un valor máximo. En este trabajo utilizamos el valor más pequeño para evitar una sobreestimación del suavizado.

Las gráficas de velocidad (Ver Figura 5.5) no muestran cambios significativos al variar el valor de  $\epsilon$ , excepto en el caso de  $\epsilon = 0.01$ . Es importante reconocer que la elección de  $\epsilon$  depende considerablemente de las distancias entre las partículas que se simulan y de la resolución deseada en la simulación.

Diversos estudios, como el de Zhan (2006), que introduce el algoritmo MISE para calcular el suavizado óptimo, y Zhang et al. (2019), que sugiere que el uso de valores menores de  $\epsilon$  mejora la resolución espacial y permite obtener resultados convergentes tanto en perfiles de densidad como en velocidad circular, indican que el suavizado sigue siendo un tema de debate y optimización. La elección de  $\epsilon$  es crucial y debe ser cuidadosamente ajustada para obtener resultados precisos y confiables en las simulaciones de N-cuerpos.

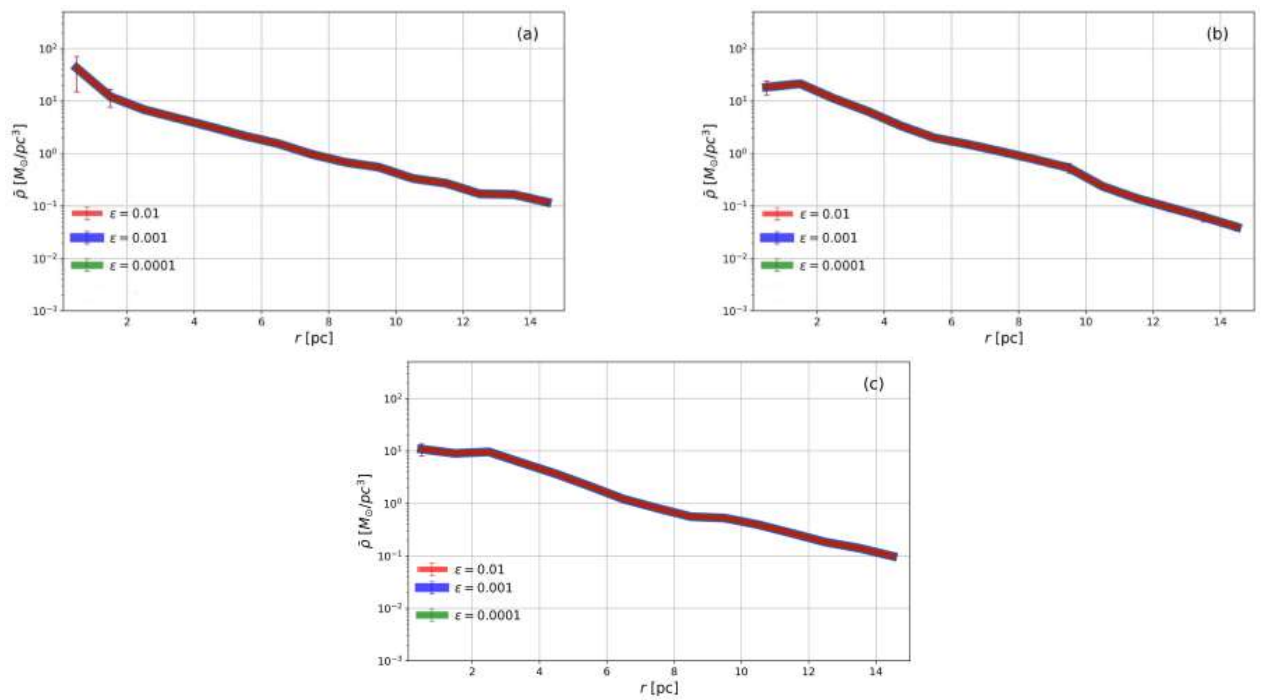


Figura 5.4: Gráficas de densidad promedio temporal para distintos valores de  $\epsilon$ . (a) Densidad promedio a 1 Gyr, (b) a 7 Gyr y (c) a 13 Gyr. Las barras representan los errores calculados mediante la desviación estándar.

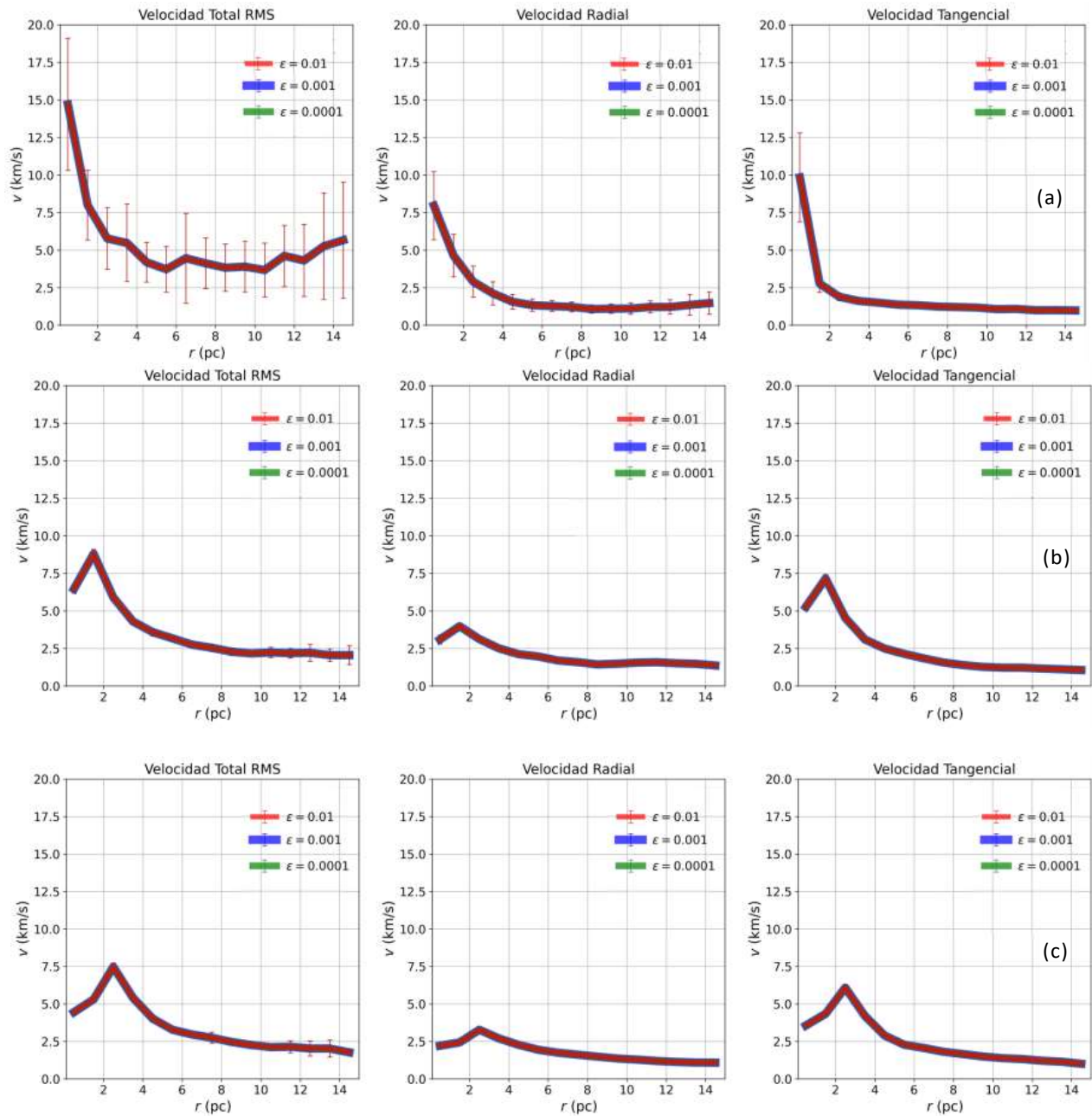


Figura 5.5: Perfiles de velocidad promedio temporal para distintos valores de  $\theta$ . Las gráficas muestran las velocidades RMS, radiales y tangenciales en tres momentos de la simulación: La fila (a) 1 Gyr, la fila (b) 7 Gyr y la fila (c) 13 Gyr. Las barras son los errores calculados mediante desviación estándar.

# Capítulo 6

## Resultados

En las simulaciones realizadas en esta tesis se emplearon parámetros físicos basados en las observaciones de [Baumgardt and Hilker \(2018\)](#), donde se estudiaron cúmulos globulares en la Vía Láctea. En la Tabla 6.1 se presentan los parámetros utilizados, incluyendo diferentes radios de masa media, masa total del cúmulo y la masa de agujeros negros centrales. Estos parámetros fueron seleccionados para explorar el comportamiento de diferentes configuraciones y su impacto en la dinámica del cúmulo. Algunos de los parámetros fundamentales son los siguientes:

1. Masa total del cúmulo ( $M_{GC}$ ): Controla el número total de estrellas en la simulación de acuerdo a la función de masa inicial.
2. Función de densidad de estrellas ( $\rho$ ): Describe cómo se distribuyen las estrellas en el volumen.
3. Radio de masa media ( $r_{hf}$ ): Representa el radio dentro del cual se encuentra la mitad de la masa total del cúmulo. Este parámetro está directamente relacionado con la función de densidad del cúmulo; valores pequeños de  $r_{hf}$  corresponden a cúmulos con mayor densidad central.
4. Masa del agujero negro central ( $M_{BH}$ ): Se incluye un agujero negro de masa intermedia en el centro del cúmulo para estudiar su influencia en la dinámica estelar y la estructura del cúmulo, y se compara con casos sin IMBH.

Para este estudio se utilizan los modelos de densidad de Plummer, ver Ecuación (2.17), de Schuster, ver Ecuación (2.38) con distintos valores de  $\beta$  y los modelos de King, ver Ecuación (2.30). Variamos  $M_{GC}$  para estudiar diversos tamaños de GC, variamos  $M_{BH}$  para incluir diversas masas de IMBH en los rangos observacionales, no variamos el  $M_{GC}$  al ser el caso; para mantener el enfoque y claridad, optamos por analizar en profundidad la densidad de Plummer. En la Figura 6.1 se puede observar el comportamiento de los perfiles de densidad promedio en el primer giga año sin un IMBH para distintos valores de  $r_{hf}$ . Estos perfiles no cambian con el tiempo, esto implica que tenemos un equilibrio dinámico. Se puede observar que la densidad de King (Figura 6.1 c) presenta barras de error más amplias debido a una correlación entre  $r_{hf}$  y el parámetro  $W_0$ , ya que, si  $r_{hf}$  es pequeño, las barras de error crecen; pudiendo controlar este efecto con el parámetro  $W_0$ , que es el parámetro de concentración.

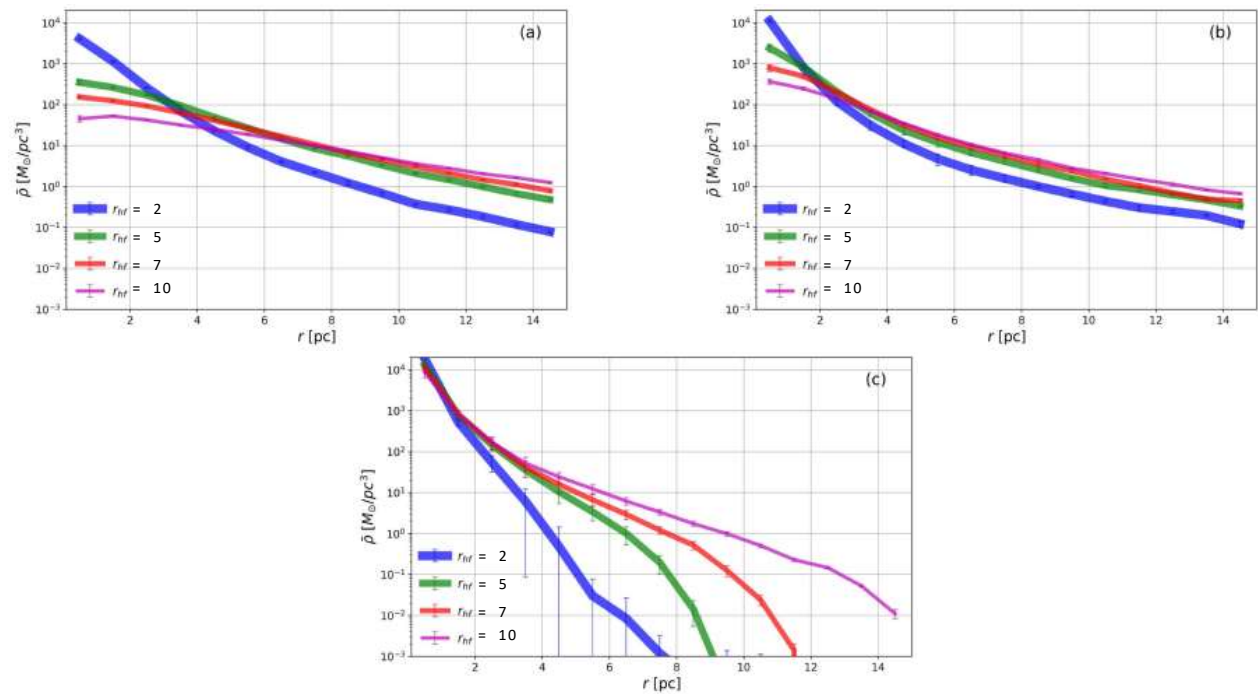


Figura 6.1: Comparación entre los modelos de densidad con una función inicial de masa de Salpeter: (a) Plummer, (b) Schuster y (c) King. Las barras de error representan la desviación estándar de las densidades promedio en intervalos de 1 Gyr. Las curvas corresponden a diferentes  $r_{hf}$ .

## 6.1. Visualización del Espacio Fase.

Para analizar la evolución dinámica de los cúmulos, se realizaron visualizaciones del espacio fase en momentos clave de la simulación. Para tener claridad en las visualizaciones, solo se representa el 50 % de las estrellas simuladas para  $10^5 M_{\odot}$  y el 0.5 % para  $10^6 M_{\odot}$ .

En los gráficos de la Figura 6.2, se presenta la estructura y dispersión de velocidades de un cúmulo con perfil de Plummer con un IMBH central (caso b en Tabla 6.1) a tres tiempos (0, 0.5 y 3.5 Gyr). Inicialmente el cúmulo está centrado en  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , a 0.05 Gyr, se observa la expulsión de estrellas del núcleo (las que tienen la mayor dispersión de velocidades) hacia las regiones externas, reduciendo la densidad central. Esta migración constante de entrada y salida calienta el núcleo del cúmulo, incrementando la dispersión de velocidades de las estrellas que entran, después de 3.5 Gyr presenta un desplazamiento en los tres ejes espaciales, debido a un desbalance inicial en el momento lineal. Este movimiento, combinado con la evolución dinámica interna del sistema, es impulsado principalmente por la interacción entre la diversidad de masas de las estrellas y el IMBH central. Las asimetrías dinámicas resultantes de esta interacción generan una redistribución de energía entre las estrellas, lo que influye en el comportamiento global del cúmulo. Aunque el IMBH ejerce una influencia gravitacional dominante en las regiones centrales, la diversidad de masas juega un papel fundamental en la generación de las asimetrías. En una simulación de prueba con perfil de Plummer, distribución uniforme de masa de las estrellas y un IMBH, no se observa este desplazamiento. Por lo tanto, aunque la función de masa inicial juega un papel relevante, pero su efecto es difícil de observar debido a la presencia de otros efectos, como el campo gravitacional de la Galaxia.

En la Figura 6.3 se muestra la solución a diferentes tiempos para un cúmulo con características similares al caso anterior, pero, con un IMBH 10 veces más masivo. Se observa que el aumentar la masa del IMBH aumenta la dispersión de velocidades de las estrellas y un gran número de estas se escapan, lo cual indicaría que debe haber un límite en la masa del IMBH para que pueda coexistir en el centro de un cúmulo sin que este pierda la estabilidad. Cuando esta relación excede el límite crítico, la mayor parte de las estrellas del cúmulo son expulsadas. Esto sugiere que el proceso de evolución y estabilidad del cúmulo está estrechamente relacionado

con dicha proporción. En este caso particular, la masa del IMBH está prácticamente en el límite de clasificarse como un agujero negro supermasivo. El cúmulo, no tiene la suficiente fuerza gravitatoria para contrarrestar la aceleración generada por el potencial gravitatorio del IMBH, pierde todas las estrellas que se encuentran dentro de su núcleo y en el radio de masa media desde 0.05 Gyr. Además, para 1 Gyr, parece perder todas las estrellas incluso dentro de su radio virial, quedando únicamente aquellas en el radio externo. Finalmente, observamos que para 3 Gyr, el cúmulo prácticamente se convierte en un cúmulo abierto, lo que indica una pérdida progresiva de su estructura gravitacional.

En el siguiente caso presentamos los resultados con un IMBH  $10^6 M_{\odot}$  (como en el caso anterior) pero con un cúmulo 10 veces más masivo (ver Figura 6.4), es decir, recuperamos la proporción del primer caso, y observamos que el cúmulo se mantiene estable. Con esto confirmamos la relevancia de la proporción entre la masa del cúmulo y la masa del IMBH. Si el IMBH es más de un orden de magnitud más masivo que el cúmulo, el sistema evoluciona hacia un estado no ligado, asemejándose a un cúmulo abierto. Lo que sugiere que los IMBH más masivos no pueden observarse en cúmulos estables y los de baja masa no tienen un efecto significativo en la estructura del cúmulo, y por lo tanto son difíciles de observar, al menos analizando su espacio fase.

## 6.2. Análisis de la Distribución de Masa

### Caso sin IMBH

En esta sección analizamos cómo se distribuyen las estrellas de diferente masa en el volumen del cúmulo. Para esto separamos las partículas en cuatro poblaciones: enanas rojas  $(0 - 0.8)M_{\odot}$ , estrellas tipo Sol  $(0.8 - 1.5)M_{\odot}$ , estrellas de neutrones  $(1.5 - 3)M_{\odot}$ , y agujeros negros estelares  $(1.5 - 3)M_{\odot}$ . Estas dos últimas poblaciones resultan de la evolución de las estrellas masivas ( $> 10 M_{\odot}$ ) después de 40 Myr. Dado el tiempo simulado (13 Gyr), podemos asumir que nuestros cúmulos inician con esta edad. En la Figura 6.5 podemos observar la distribución de masa para cúmulo sin IMBH central (con parámetros del Caso a). Se observa que la distribución de masa en los diferentes cascarones se mantiene, sin embargo, existe

un incremento en el número de agujeros negros estelares hacia las regiones centrales. Este fenómeno ocurre debido a la diferencia de masas originada por la función de masa inicial de Salpeter, y se conoce como segregación de masa, i.e., las partículas más masivas migran hacia el centro. Resulta interesante que la distribución de masa sigue una distribución Gamma:

$$f(x; k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, \quad \text{con } \Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt \quad (6.1)$$

donde

- $k$  (parámetro de forma): Controla la curva de la distribución.
- $\theta$  (parámetro de escala): Controla el “ancho” de la distribución.
- Factor de escala: Representa una normalización.

En la Figura 6.6 podemos observar la evolución de estos parámetros en el tiempo. Éstos son prácticamente constantes, lo cual indica que el cúmulo está en equilibrio. Aunque crece lentamente, se mantiene cerca de 1, lo que también sugiere una mínima variación en el tiempo. Finalmente, la curva roja representa el factor de escala, que tampoco muestra dependencia significativa del tiempo, manteniéndose alrededor de 30,000 salvo por pequeñas fluctuaciones iniciales.

### Caso con IMBH

En la Figura 6.7 se muestra el efecto de la presencia de un IMBH en la distribución de masas del cúmulo. Estas masas se calcularon en cascarones concéntricos alrededor del IMBH, en los primeros 0.05 Gyr se observa un aumento en la segregación de masa, donde los objetos más masivos tienden rápidamente hacia el centro del cúmulo. Sin embargo, tras 0.2 Gyr, los objetos próximos al IMBH incrementan su velocidad de dispersión, provocando que se muevan hacia afuera, y algunas logren escapar del cúmulo. Cabe mencionar que el IMBH no es el centro de masa pero, si se quisiera demostrar observacionalmente la presencia de un IMBH, las estrellas a su alrededor deberían seguir distribuciones similares a las mostradas en este trabajo, dependiendo del tiempo de evolución.

En la Figura 6.8 se muestran tiempos posteriores a los 0.6 Gyr se registra un descenso en el pico observado a los 0.2 Gyr. Posteriormente, la masa acumulada vuelve a aumentar hasta alcanzar un segundo pico, más pequeño, a los 0.95 Gyr. A partir de este punto, la tendencia es descendente, como se evidencia en 5 Gyr. Este comportamiento sugiere que el cúmulo experimenta un fenómeno que denominamos como “rebote”, el cual es caracterizado por una pérdida de masa en la región central, seguida de un ligero aumento en esta zona, para luego continuar con la disminución de masa. Esto puede deberse a una etapa transitoria en la solución numérica. Como consecuencia, los parámetros de la distribución Gamma se modifican en el tiempo; es importante notar que la distribución Gamma brinda un buen ajuste en cualquier tiempo.

En la Figura 6.9 se muestra el efecto de la presencia de un IMBH en la evolución de los parámetros de la distribución Gamma. Se observa que el parámetro de forma  $k$  y el parámetro de escala  $\theta$  se mantienen prácticamente constantes a lo largo del tiempo, indicando que la estructura de la distribución Gamma se mantiene igual. Finalmente, la evolución del factor de escala muestra una tendencia decreciente, lo que indica una pérdida gradual de masa en el cúmulo; sin embargo, vemos un pico, lo que indica que tenemos un “rebote” de la masa del cúmulo, para después continuar decreciendo. Finalmente, los parámetros tienden a aproximarse a una constante, lo que sugiere que el cúmulo alcanzará el equilibrio.

## 6.3. Búsqueda de Observables

Densidad volumétrica.

Como primer paso calculamos la densidad del cúmulo considerando cascarones esféricos, aunque este parámetro no es un observable, nos permite caracterizar la distribución de las diferentes poblaciones estelares, y analizar el efecto del IMBH en las distribuciones. Para facilitar el análisis, realizamos promedios temporales a diferentes tiempos de la simulación.

Densidad superficial y luminosidad.

Para determinar parámetros observables como la luminosidad y la densidad superficial, en el primer caso utilizamos la relación entre la masa y la luminosidad, ver Ecuación (1.27); en el segundo caso, se consideraron anillos concéntricos fijando uno de los ejes espaciales, es decir, analizamos la proyección del cúmulo en un plano, tal y como lo vería un observador.

En la Figura 6.10, adoptamos el IMBH como marco de referencia para analizar la densidad volumétrica, la densidad superficial y la luminosidad superficial en tres tiempos. La densidad volumétrica a  $T = 0.1$  Gyr se muestra en la primera columna. La densidad superficial se muestra en la segunda columna y la luminosidad superficial en la tercera columna. Se puede notar en la fila superior que, en etapas tempranas, los casos con IMBH muestran un pico a diferencia del caso sin IMBH en  $r < 1$  pc; también se puede observar que en el dominio graficado se observa mayor densidad en el caso con IMBH, pero estos perfiles decaen a radios mayores (no graficados) debido al modelo de Plummer. En las filas intermedia e inferior, la diferencia más notable es el aplanamiento de los perfiles ( $\rho$ ,  $\Sigma$  y  $L$ ) cuando se considera el IMBH más masivo ( $10^6 M_{\odot}$ ). En la sección anterior, identificamos que este caso resultó en un cúmulo inestable, asemejándose a la dinámica de un cúmulo abierto. También se puede observar que los perfiles para los casos con  $10^5 M_{\odot}$  y sin IMBH, convergen, a medida que avanzan con el tiempo. Este resultado es relevante porque indica que es difícil diferenciar un caso con IMBH de hasta  $10^5 M_{\odot}$  a uno sin IMBH.

Dadas las dificultades mencionadas anteriormente, se propone utilizar el centro de masa del cúmulo como marco de referencia. Este cambio de perspectiva proporciona un método

novedoso para diferenciar cúmulos con IMBH de cúmulos sin IMBH.

En la Figura 6.11, fila superior, se observa que desde edades tempranas se tiene un leve aplanamiento de la densidad central del cúmulo con IMBH de  $10^6 M_{\odot}$ . Sin embargo, las tres curvas son muy similares. En la fila intermedia, se observa que la curva del IMBH de  $10^6 M_{\odot}$  disminuye cada vez más lento respecto a la distancia radial provocando un aplanamiento. Esto indica que el aplanamiento depende de la masa del IMBH. Sin embargo, aunque la densidad sea baja, la luminosidad permanece constante, tal como se ve en la fila inferior. En el panel izquierdo de la última fila, la densidad central de la curva roja tiene un aplanamiento similar a la que tuvo la curva verde, lo cual indica que es un comportamiento general de cúmulos con IMBH. La curva verde no aparece graficada debido a que las estrellas están muy diluidas en el espacio, de tal forma que los cascarones apenas encuentran estrellas. Sin embargo, sigue observándose una tenue luminosidad.

## 6.4. Análisis de Velocidad RMS, Radial y Tangencial

Siguiendo el análisis de observables, se calculó la dispersión de velocidades (RMS), velocidades radiales y tangenciales.

Dispersión de velocidades

La velocidad RMS se determina con la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i |v_i|^2}, \quad (6.2)$$

donde  $i$  es la  $i$ -ésima estrella en el cascarón.

Velocidad Radial

La velocidad radial se calcula como

$$v_{\text{radial}} = \frac{v_i \cdot r_i}{|r_i|}, \quad (6.3)$$

Velocidad tangencial

La velocidad tangencial se determina como

$$v_{\text{tangencial}} = \frac{q}{\sqrt{|v_i|^2 - v_{\text{radial}}^2}}, \quad (6.4)$$

donde todas las velocidades fueron promediadas por cascarón.

En la Figura 6.12, tomamos como marco de referencia el IMBH para analizar la distribución de velocidades del sistema. En la fila superior, se observa que la velocidad radial y la velocidad RMS siguen una tendencia similar. En los casos con un IMBH (curvas roja y verde), ambas presentan un punto de inflexión alrededor de 2 pc, incrementándose tanto hacia el interior como hacia el exterior. Por otro lado, la velocidad tangencial exhibe un pico en las regiones cercanas al IMBH, en contraste con el caso sin IMBH (curva azul). En la fila intermedia, se aprecia que la velocidad RMS y la radial muestran un comportamiento análogo, con un

aplanamiento de la velocidad en la región central. Además, se observa un incremento en la velocidad tangencial en las proximidades del IMBH, en particular para el caso con un IMBH de  $10^6 M_{\odot}$ . Esto sugiere que la masa del IMBH tiene un impacto significativo en la velocidad tangencial del cúmulo. Específicamente, el IMBH provoca un aumento generalizado de las velocidades RMS y radial en todo el volumen del cúmulo, mientras que en la componente tangencial el efecto se restringe al radio de media masa. En general, el comportamiento de la distribución de velocidades de un cúmulo con IMBH de  $10^5 M_{\odot}$ , es más parecido a un IMBH de  $10^5 M_{\odot}$  que al cúmulo sin IMBH.

Cabe destacar que parece haber una tendencia en la evolución del cúmulo, ya que las curvas sugieren una transición progresiva hacia configuraciones con IMBH de mayor masa. Se observa que la curva verde presenta diferencias con respecto a las demás; sin embargo, esto podría deberse a una fase transitoria en la dinámica del sistema. Si fuera posible medir la velocidad tangencial en un cúmulo globular, podría inferirse la presencia de un IMBH mediante el análisis de las estrellas contenidas dentro del radio de media masa.

En la Figura 6.13, tomamos como referencia el centro de masa del cúmulo para evaluar la evolución de las velocidades en diferentes configuraciones. En la fila (a), se observa que la velocidad tangencial mantiene una forma similar en los casos con IMBH durante los primeros 0.1 Gyr, diferenciándose únicamente en una constante de normalización. En contraste, la velocidad radial presenta un aumento en radios externos, efecto atribuible a la presencia del IMBH, el cual acelera y expulsa estrellas del sistema. La velocidad RMS exhibe un comportamiento similar al de la velocidad radial. En la fila (b), se observa que el caso sin IMBH permanece estable, lo que sugiere que la presencia del IMBH introduce perturbaciones adicionales en la dinámica del cúmulo. Finalmente, en la fila (c), la velocidad tangencial presenta regiones donde la curva roja se anula, lo que indica la ausencia de estrellas en esas zonas. En general, la única forma de distinguir entre un cúmulo con IMBH y uno sin IMBH es a partir de las desviaciones respecto al perfil descrito por la curva azul. Sin embargo, debido a la naturaleza oscilatoria de las curvas, resulta complejo identificar una tendencia clara. En algunos casos, utilizar el centro de masa como marco de referencia es una alternativa viable para diferenciar entre configuraciones con y sin IMBH.

## 6.5. Análisis Comparativo de Diferentes Configuraciones de Densidad.

En esta sección revisaremos si el modificar el modelo de densidad tiene algún impacto en la dinámica de un cúmulo con un IMBH central. Presentaremos como marco de referencia al IMBH. Para esta sección usaremos la curva azul para el modelo de Plummer, ver Tabla 6.1 caso b, la curva roja para el modelo de Schuster  $\beta = 1.5$ , ver Tabla 6.1 caso w, la curva verde para el modelo de King, ver Tabla 6.1 caso aa.

En la Figura 6.14, observamos que los modelos de Schuster con  $\beta = 1.5$  y Plummer no presentan diferencias significativas a lo largo de la evolución del cúmulo, salvo por el hecho de que el modelo de Plummer exhibe una mayor densidad en las regiones externas del cúmulo. Sin embargo, esto no ocurre con el modelo de King, ya que este perfil presenta un radio de marea bien definido. Si observamos la fila superior de la figura, este comportamiento es evidente. No obstante, conforme el cúmulo evoluciona, el IMBH induce la expulsión de algunas estrellas hacia el exterior, lo que en la fila intermedia se manifiesta como una disminución en la densidad y la pérdida del radio de marea característico del modelo de King, sin embargo, vemos que no es una pérdida pronunciada de estrellas, lo que dificultaría su observación. Finalmente, se observa una tendencia en las densidades cuando se incluye un IMBH, destacándose un pico característico en cada una de ellas.

En la Figura 6.15, no se observa una diferencia clara entre las curvas. Sin embargo, en la fila superior, el modelo de King muestra un incremento en la velocidad de las estrellas cercanas al IMBH alrededor de 4 pc, lo que podría deberse al radio de marea de King. Con el transcurso del tiempo, la evolución de las velocidades sigue una tendencia similar en todos los casos, lo que sugiere que, independientemente del perfil de densidad inicial, no se espera una diferencia significativa en la evolución de las velocidades en un modelo con un IMBH. Consideramos que el desfase en la distribución de las velocidades se debe a las diferentes dispersiones de velocidad inicial de cada modelo.

| Parámetros de las simulaciones de cúmulos globulares |                          |                          |                          |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Modelos  | Radio de masa media (pc) | $M_{GC}(10^5 M_{\odot})$ | $M_{BH}(10^5 M_{\odot})$ |
| a) Plummer   | 2                        | 1                        | 0                        |
| b) Plummer   | 2                        | 1                        | 1                        |
| c) Plummer   | 2                        | 1                        | 10                       |
| d) Plummer   | 5                        | 1                        | 0                        |
| e) Plummer   | 5                        | 1                        | 1                        |
| f) Plummer   | 5                        | 1                        | 10                       |
| g) Plummer   | 5                        | 1                        | 0                        |
| h) Plummer   | 5                        | 10                       | 1                        |
| i) Plummer   | 5                        | 10                       | 10                       |
| j) Plummer   | 7                        | 10                       | 0                        |
| k) Plummer   | 7                        | 1                        | 1                        |
| l) Plummer   | 7                        | 1                        | 10                       |
| m) Plummer   | 7                        | 1                        | 10                       |
| n) Plummer   | 10                       | 10                       | 0                        |
| o) Plummer   | 10                       | 1                        | 1                        |
| p) Plummer   | 10                       | 1                        | 10                       |
| q) Plummer   | 10                       | 1                        | 10                       |
| r) Schuster $\beta = 1.5$                            | 2                        | 10                       | 0                        |
| s) Schuster $\beta = 1.5$                            | 2                        | 1                        | 1                        |
| t) Schuster $\beta = 1.5$                            | 5                        | 1                        | 0                        |
| u) Schuster $\beta = 1.5$                            | 5                        | 1                        | 1                        |
| v) Schuster $\beta = 1.5$                            | 7                        | 1                        | 0                        |
| w) Schuster $\beta = 1.5$                            | 7                        | 1                        | 1                        |
| x) Schuster $\beta = 1.5$                            | 10                       | 1                        | 0                        |
| y) Schuster $\beta = 1.5$                            | 10                       | 1                        | 1                        |
| z) King  | 2                        | 1                        | 0                        |
| aa) King   | 2                        | 1                        | 1                        |
| ab) King   | 5                        | 1                        | 0                        |
| ac) King   | 5                        | 1                        | 1                        |
| ad) King   | 7                        | 1                        | 0                        |
| ae) King   | 7                        | 1                        | 1                        |
| af) King   | 10                       | 1                        | 0                        |
| ag) King   | 10                       | 1                        | 1                        |

Cuadro 6.1: Configuraciones de parámetros considerados en las simulaciones.

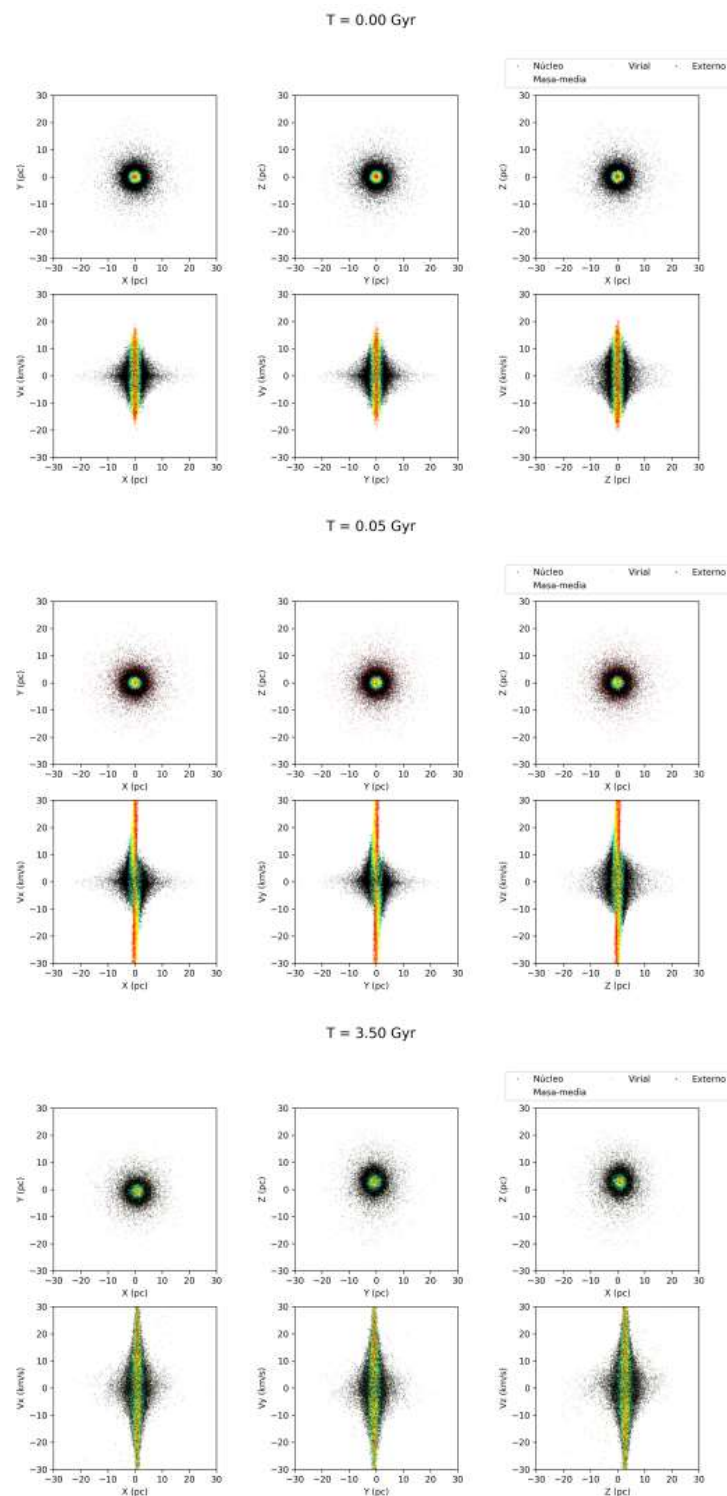


Figura 6.2: Evolución de un cúmulo (Usando caso b de la Tabla 6.1.) con estrellas distribuidas según una función inicial de Salpeter. Las estrellas dentro del radio del núcleo (ver Tabla 2.1) se muestran en color rojo, las que están dentro del radio de masa media en amarillo, dentro del radio virial en celeste y fuera de estos en negro.

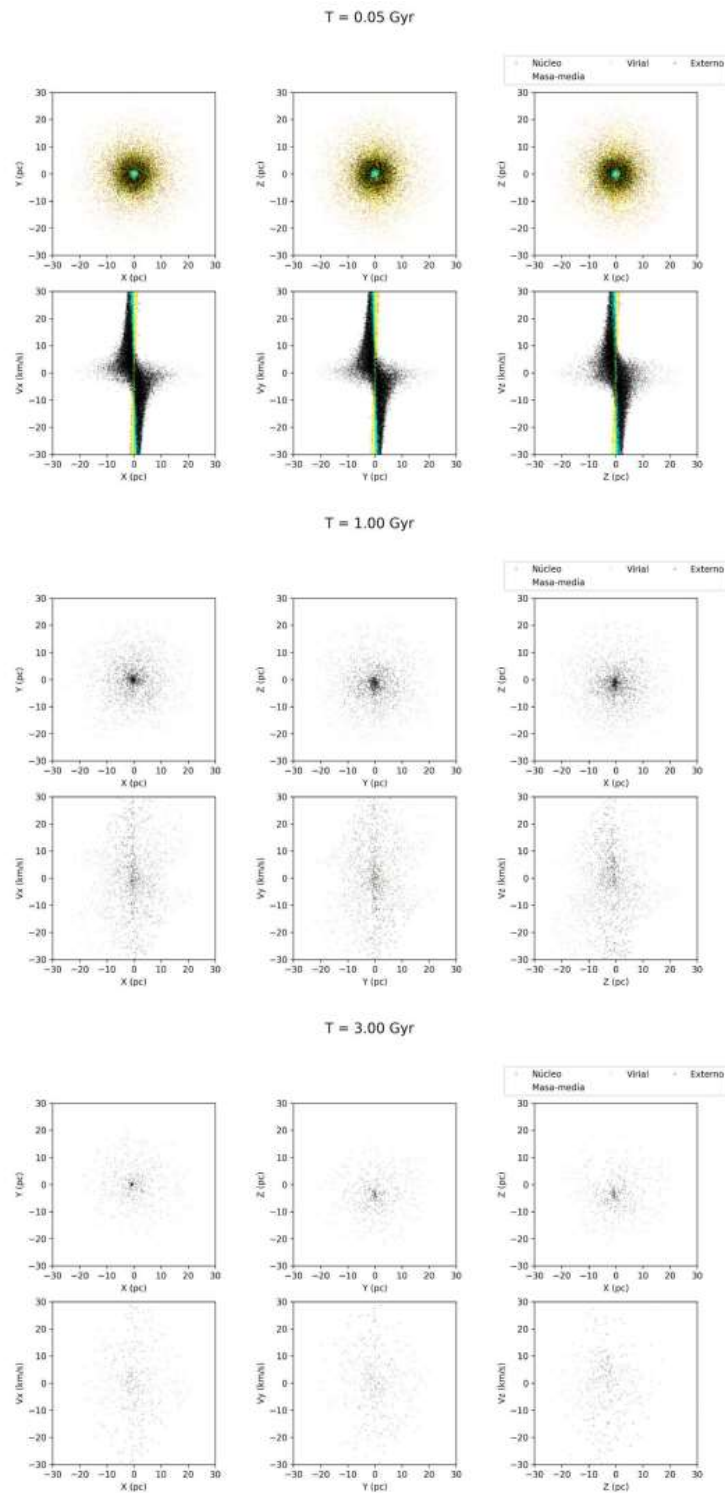


Figura 6.3: Evolución de un cúmulo (Utilizando el caso c de la Tabla 6.1.) con estrellas distribuidas según una función inicial de Salpeter. Las estrellas se clasifican en: núcleo (rojas), radio de masa media (amarillas), radio virial (celestes) y externas (negras).

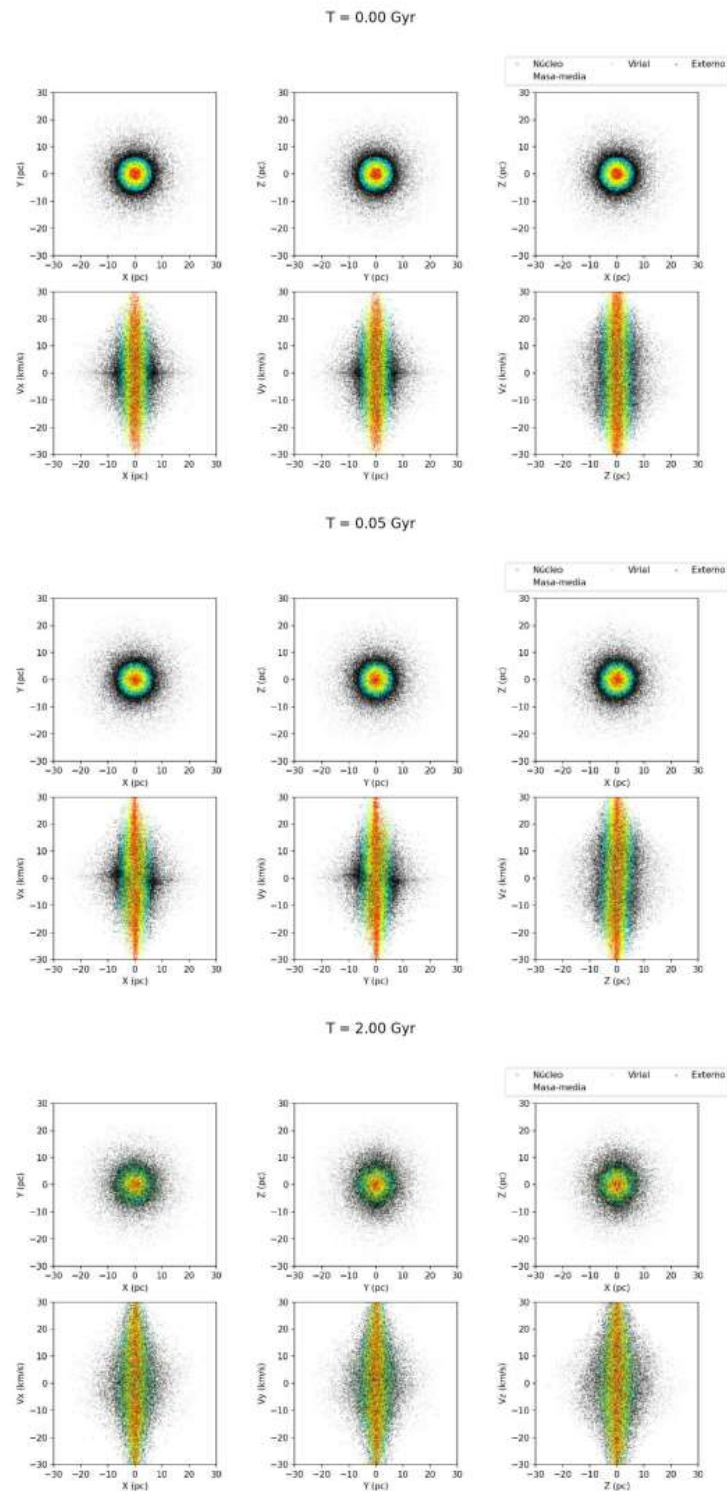


Figura 6.4: Evolución de un cúmulo (Ver caso i de la Tabla 6.1.) con estrellas distribuidas según una función inicial de Salpeter. Las estrellas se clasifican en: núcleo (rojas), radio de masa media (amarillas), radio virial (celestes) y externas (negras).

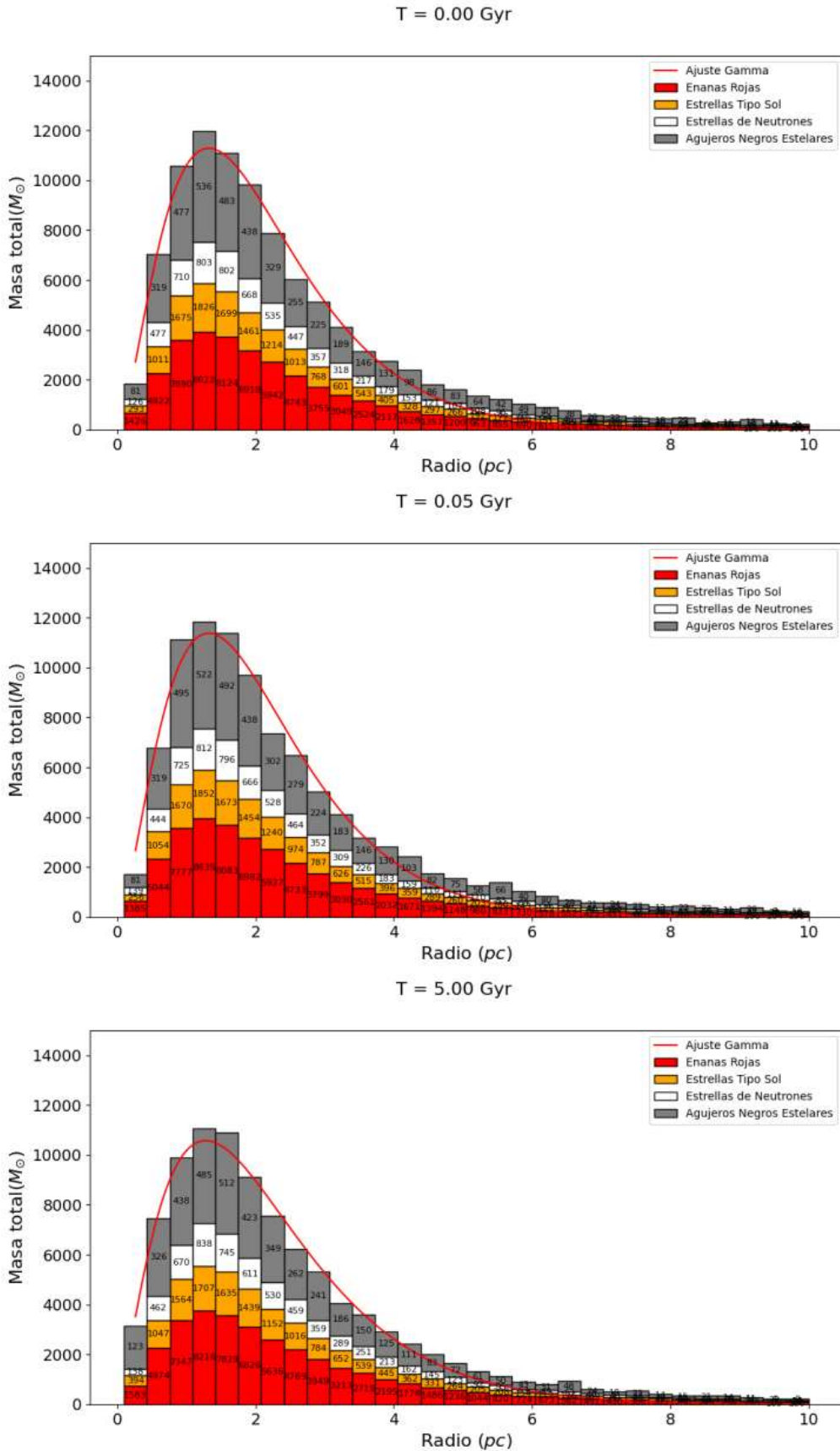


Figura 6.5: Histograma de distribución de masas de diferentes poblaciones, usando caso a de la Tabla 6.1. Enanas rojas ( $0 - 0.8M_{\odot}$ ), estrellas tipo sol ( $0.8 - 1.5M_{\odot}$ ), estrellas de neutrones ( $1.5 - 3M_{\odot}$ ) y agujeros negros estelares ( $> 3M_{\odot}$ ).

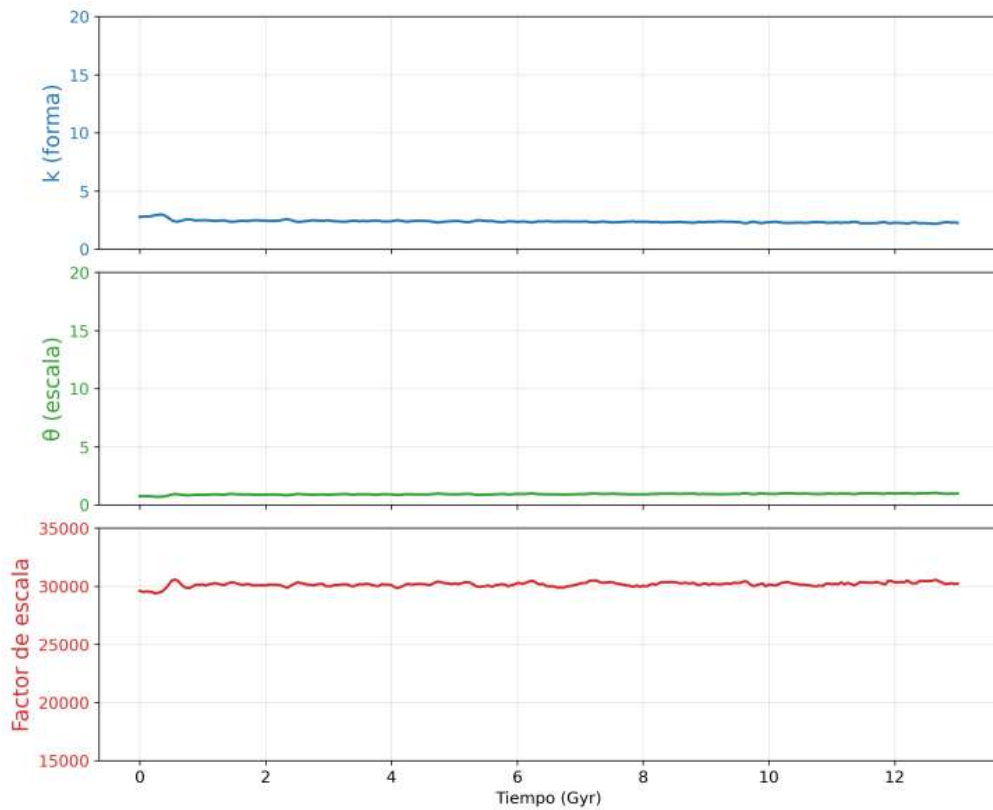


Figura 6.6: Parámetros Gamma contra el tiempo, utilizando caso a de la Tabla 6.1. Notemos que la curva azul corresponde al parámetro  $k$  de forma. Este parámetro permanece alrededor de 2.4, mostrando una ligera tendencia decreciente, lo que sugiere una dependencia temporal nula o muy baja. La curva verde corresponde al parámetro  $\theta$  de escala.

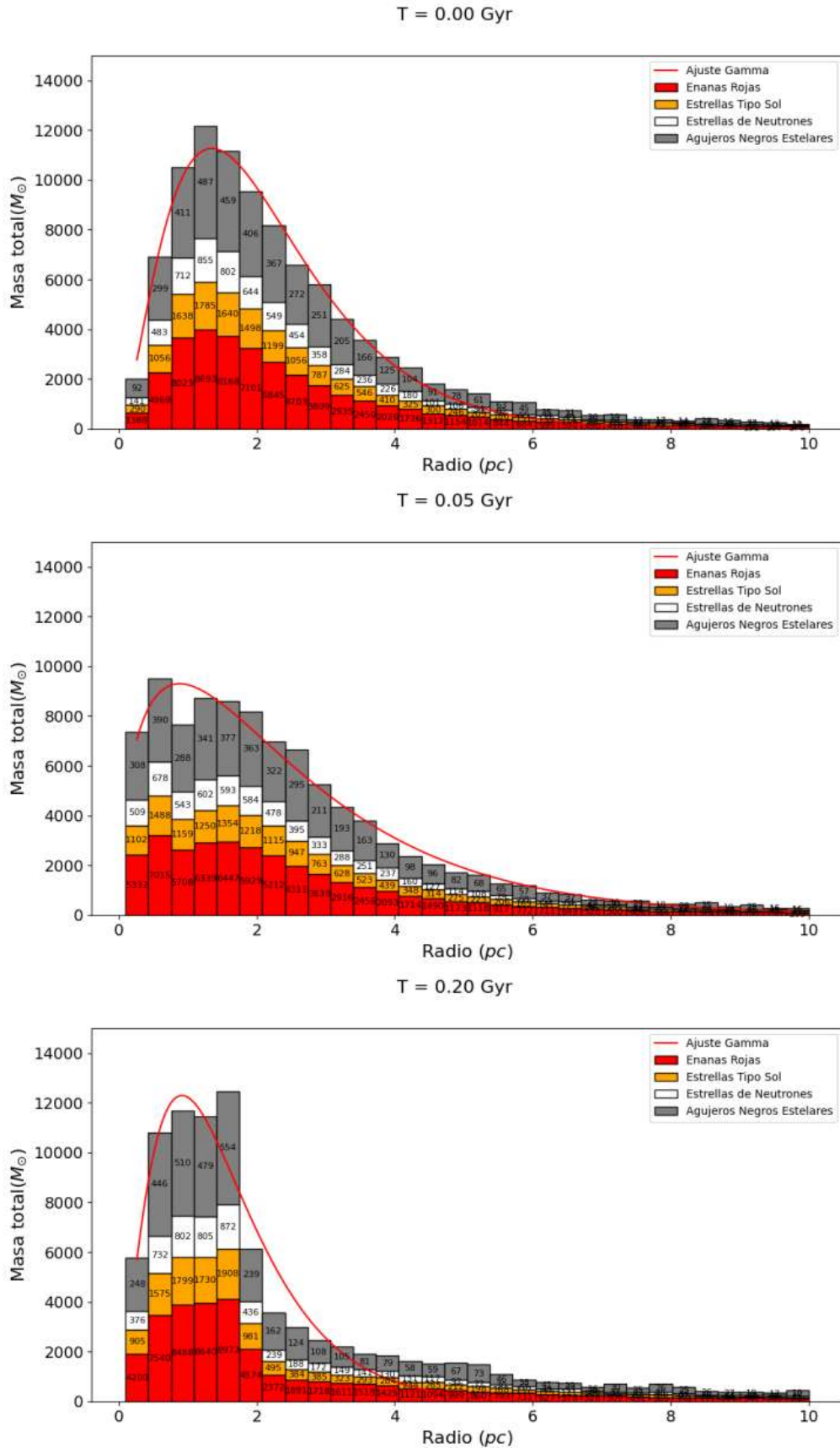


Figura 6.7: Histograma de distribución de masas, haciendo uso del caso b de la Tabla 6.1. Las imágenes muestran la evolución de un cúmulo con estrellas distribuidas según una función inicial de Salpeter. Las estrellas se clasifican en: enanas rojas ( $0 - 0.8$ ) $M_{\odot}$ , estrellas tipo Sol ( $0.8 - 1.5$ ) $M_{\odot}$ , estrellas de neutrones ( $1.5 - 3$ ) $M_{\odot}$  y agujeros negros estelares ( $> 3$ ) $M_{\odot}$ .

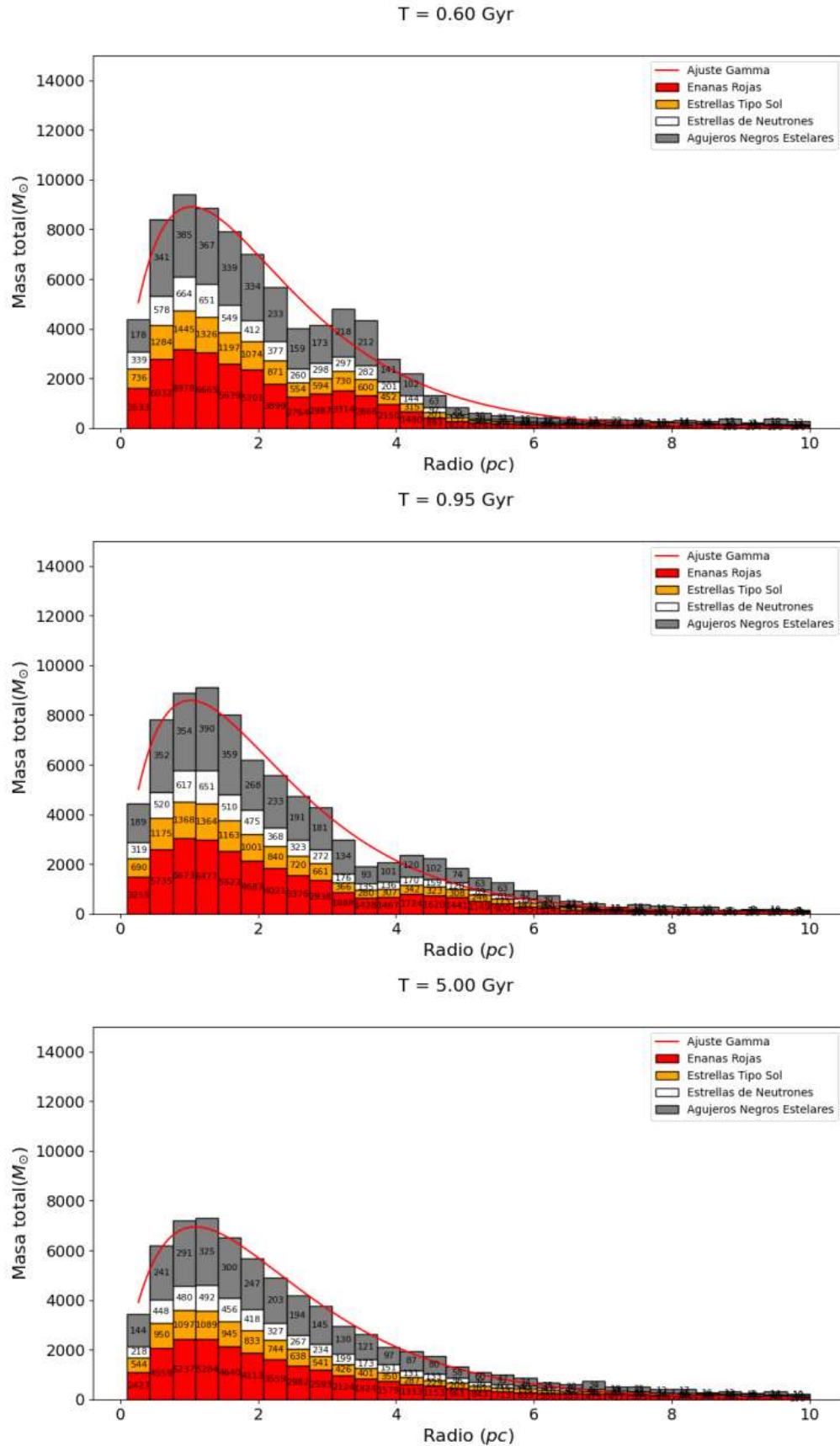


Figura 6.8: Histograma de distribución de masas, utilizando caso b de la Tabla 6.1. Las imágenes muestran la evolución de un cúmulo con estrellas distribuidas según una función inicial de Salpeter. Las estrellas se clasifican en: enanas rojas ( $0 - 0.8M_{\odot}$ ), estrellas tipo Sol ( $0.8 - 1.5M_{\odot}$ ), estrellas de neutrones ( $1.5 - 3M_{\odot}$ ) y agujeros negros estelares ( $> 3M_{\odot}$ ).

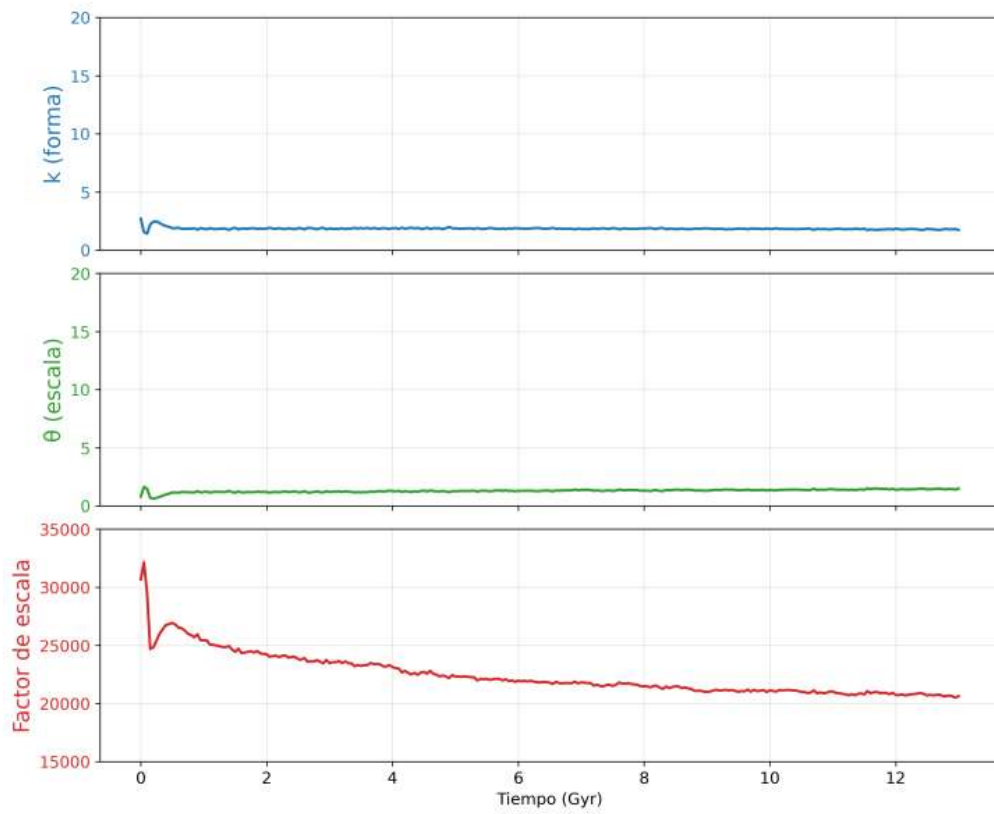


Figura 6.9: Parámetros Gamma contra el tiempo, simulando caso b de la Tabla 6.1. La curva azul representa el parámetro de forma  $k$ . Por otro lado, la curva verde muestra la evolución del parámetro de escala  $\theta$ . Finalmente, la curva roja representa el factor de escala.

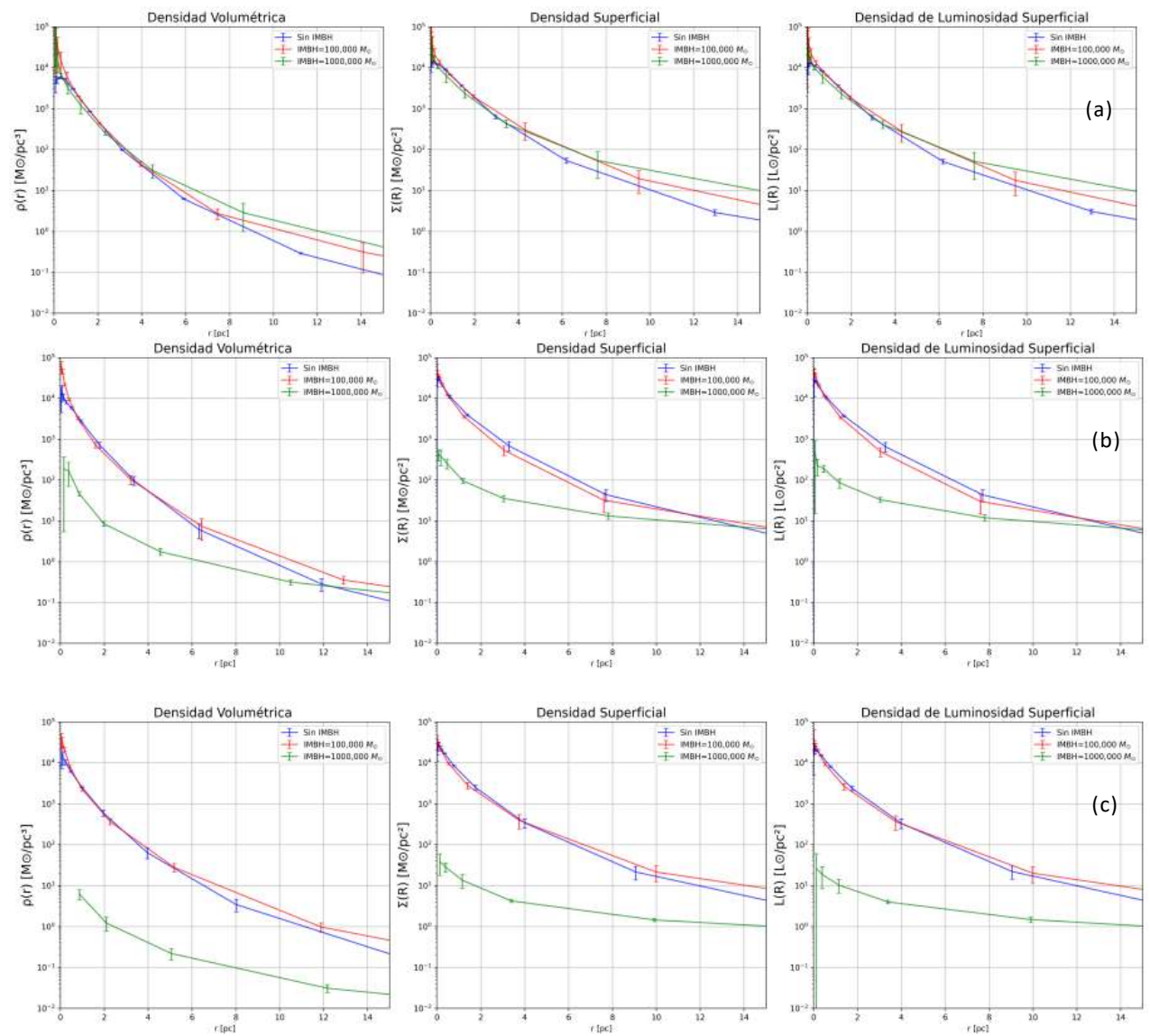


Figura 6.10: Distribución de densidad y luminosidad. Columna izquierda - densidad volumétrica, columna intermedia - densidad superficial, columna derecha - luminosidad superficial. Cada fila representa una época en la evolución del cúmulo (Usando los casos a, b y c de la Tabla 6.1.). En la fila (a) se muestra el promedio temporal de 0 a 0.1 Gyr, en la fila (b) de 0.5 a 0.75 Gyr y en la fila (c) de 2.5 a 3 Gyr. La curva azul representa un cúmulo sin IMBH, la curva roja representa un cúmulo con un IMBH de  $10^5 M_{\odot}$ , la curva verde, corresponde a un IMBH de  $10^6 M_{\odot}$ .

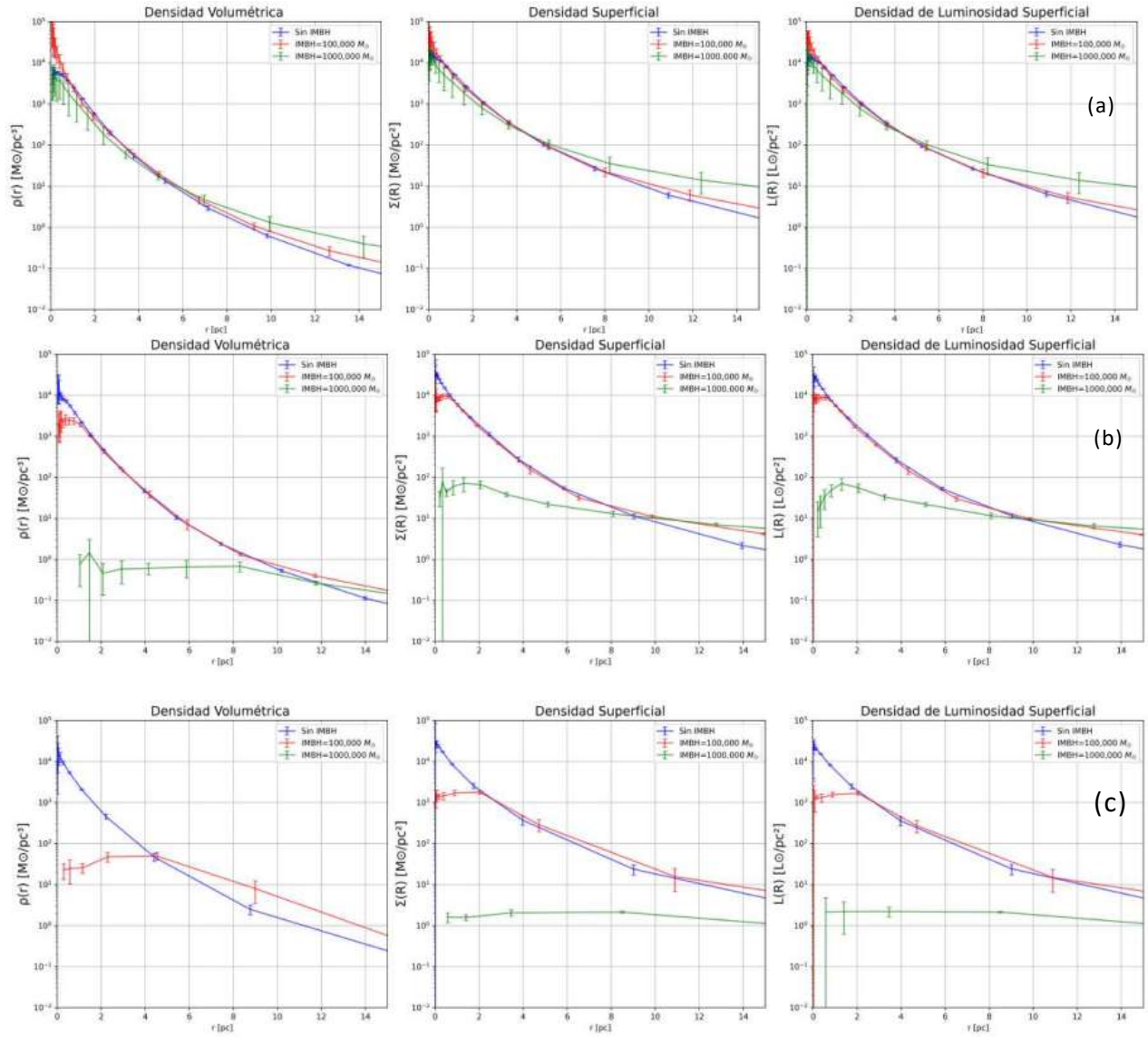


Figura 6.11: Gráfica de densidad-luminosidad. Cada gráfica representa una época en la evo-lución del cúmulo (Utilizando los casos a, b y c de la Tabla 6.1). En el inciso (a) se muestra el promedio temporal de 0 a 0.1 Gyr, en el inciso (b) de 0.5 a 0.75 Gyr y en el inciso (c) de 2.5 a 3 Gyr.

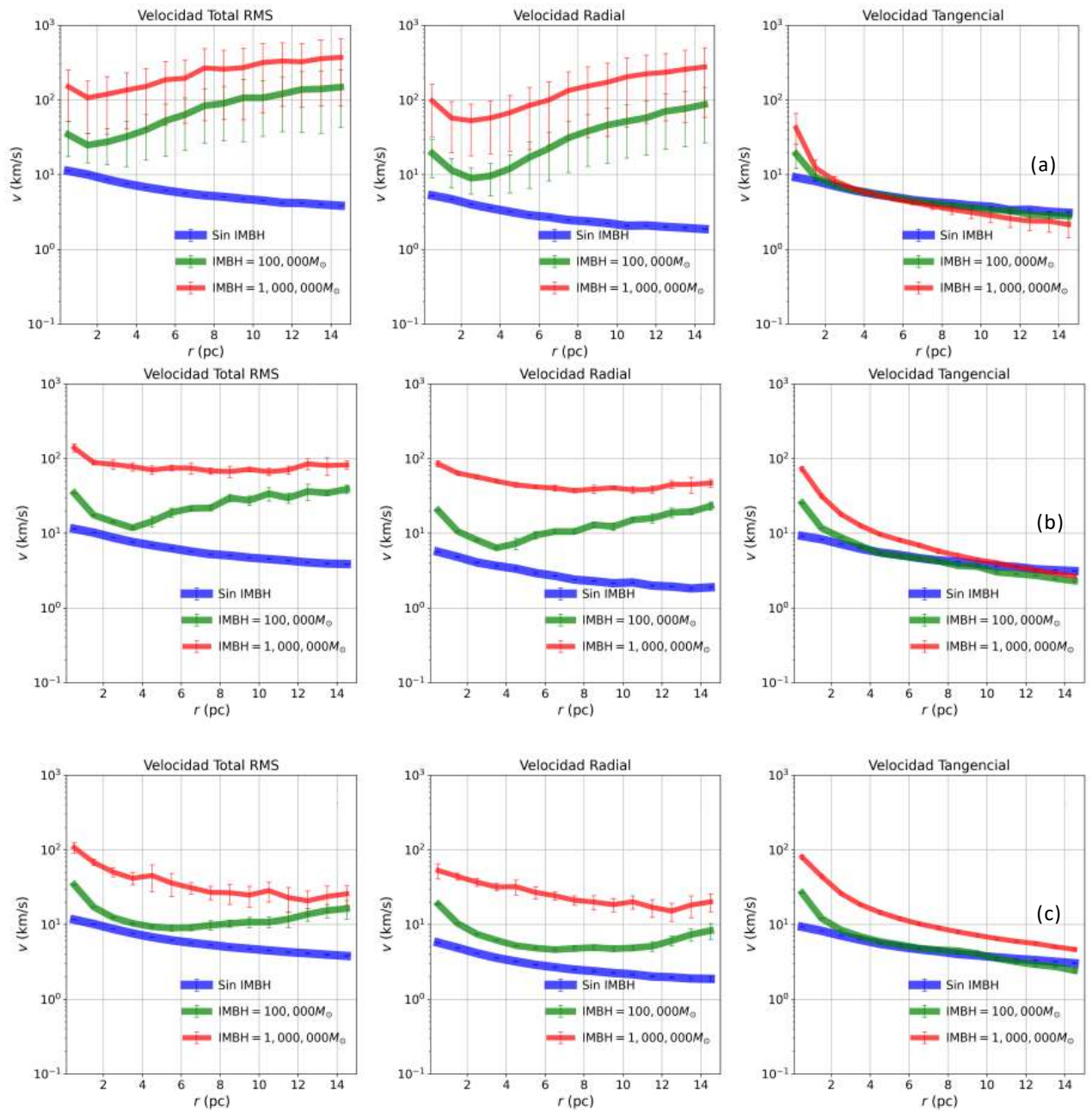


Figura 6.12: Representación gráfica de velocidades en diferentes épocas de la evolución del cúmulo, ver los casos a, b y c de la Tabla 6.1. En el fila (a) se muestra el promedio temporal de 0 a 0.1 Gyr, en la fila (b) de 0.5 a 0.75 Gyr y en la fila (c) de 2.5 a 3 Gyr. La curva azul representa un cúmulo sin IMBH. La curva roja representa un cúmulo con un IMBH de  $10^5 M_{\odot}$ . La curva verde, corresponde a un IMBH de  $10^6 M_{\odot}$ .

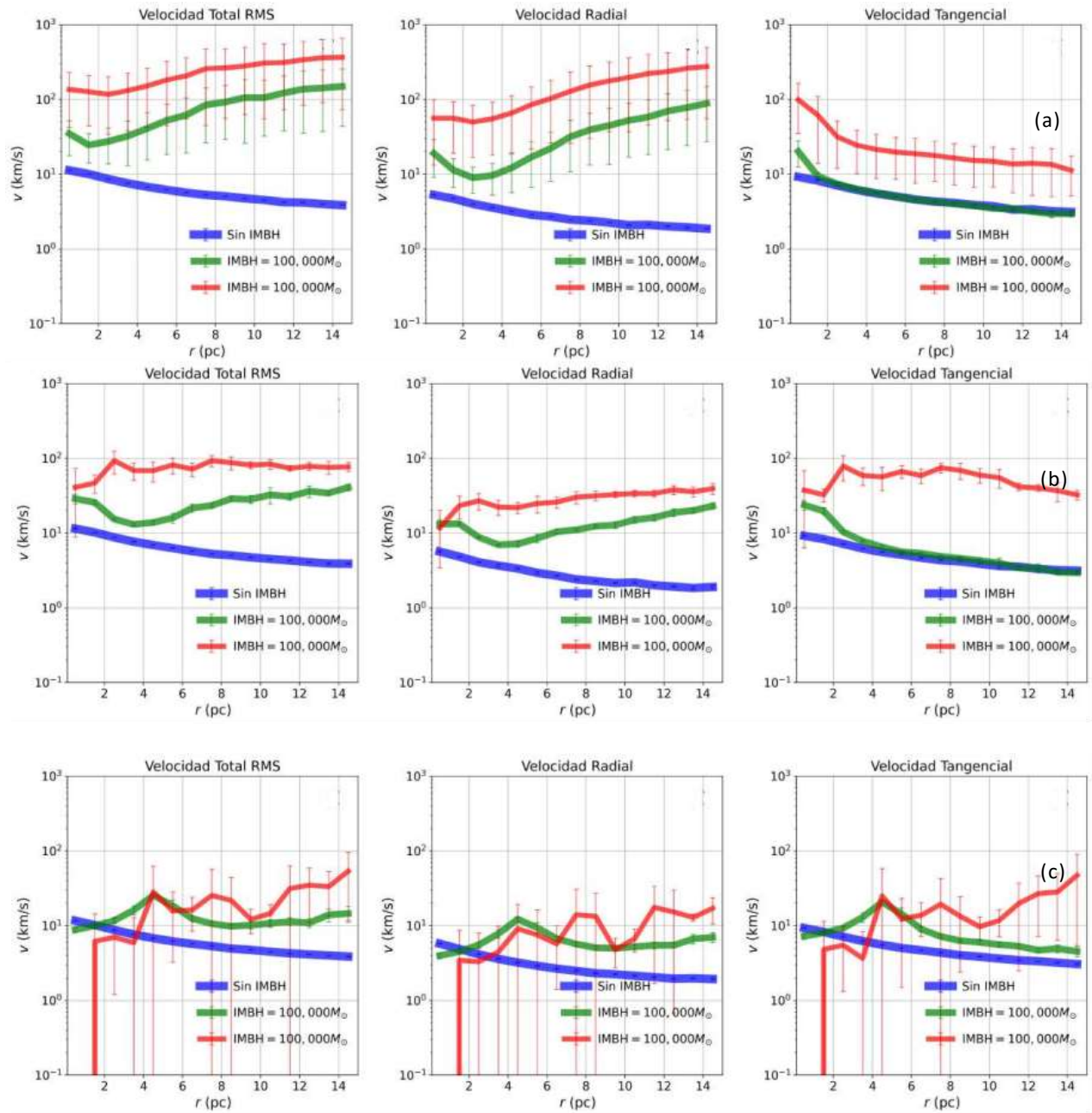


Figura 6.13: Distribución de las velocidades tomando como sistema de referencia el centro de masa del cúmulo, usando los casos a, b y c de la Tabla 6.1. En el fila (a) se muestra el promedio temporal de 0 a 0.1 Gyr, en la fila (b) de 0.5 a 0.75 Gyr y en la fila (c) de 2.5 a 3 Gyr. La curva azul representa un cúmulo sin IMBH. La curva roja representa un cúmulo con un IMBH de  $10^5 M_{\odot}$ . La curva verde, corresponde a un IMBH de  $10^6 M_{\odot}$ .

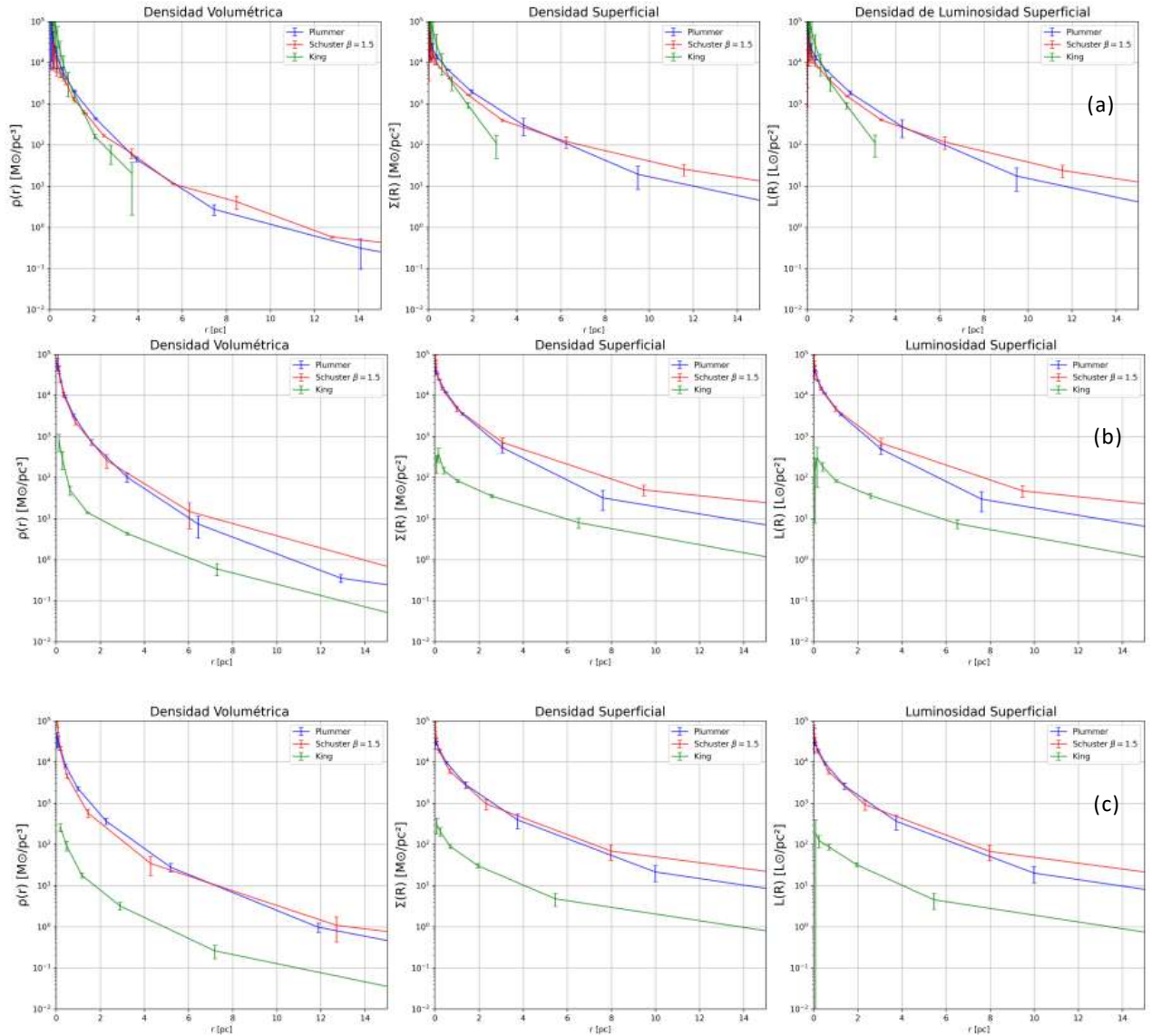


Figura 6.14: Cada gráfica representa una época en la evolución del cúmulo (Utilizando los casos b, w y aa de la Tabla 6.1.). En el inciso (a) se muestra el promedio temporal de 0 a 0.1 Gyr, en el inciso (b) de 0.5 a 0.75 Gyr y en el inciso (c) de 2.5 a 3 Gyr.

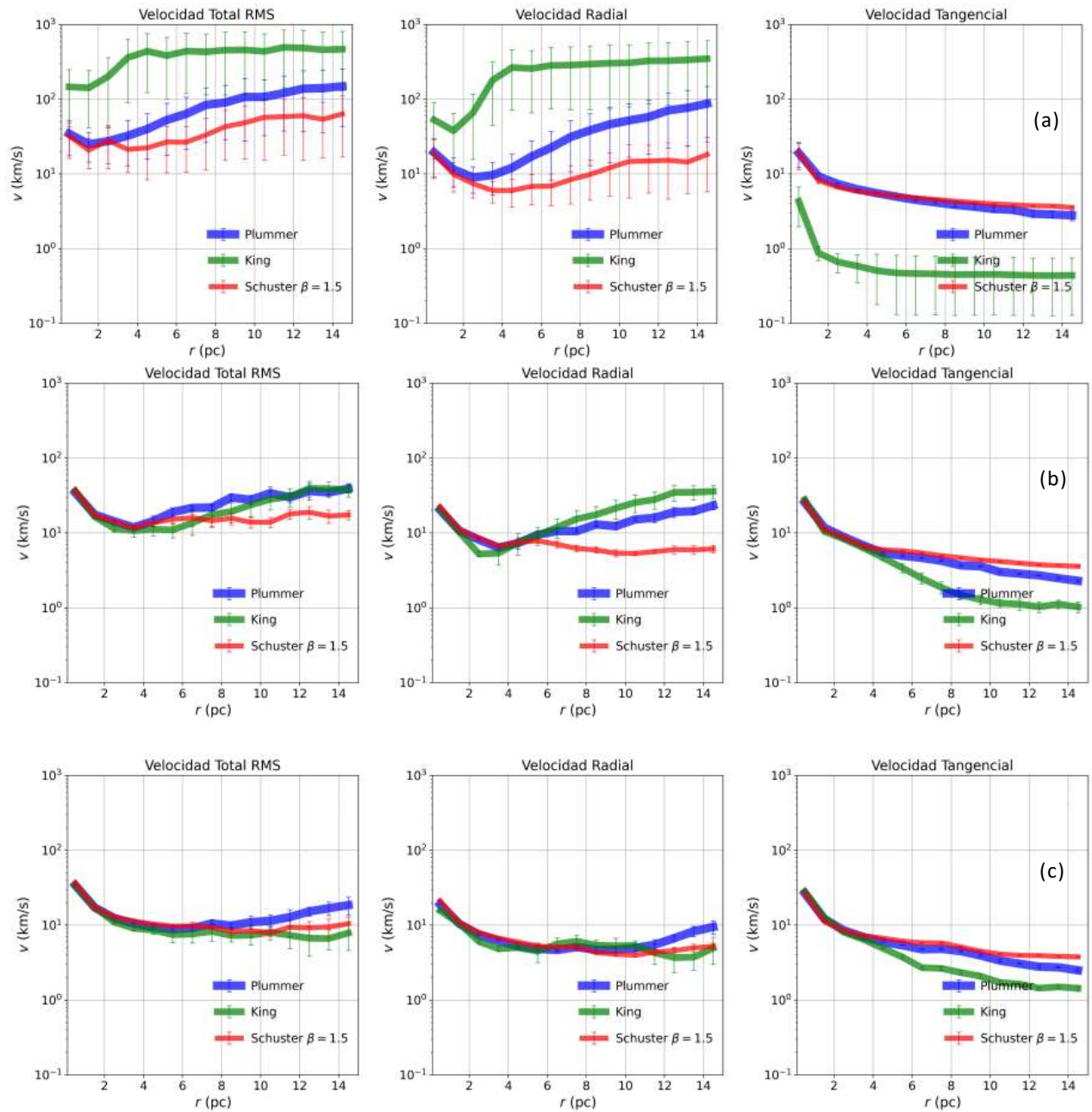


Figura 6.15: Cada gráfica representa una época en la evolución del cúmulo (Ver los casos b, w y aa de la Tabla 6.1.). En el fila (a) se muestra el promedio temporal de 0 a 0.1 Gyr, en la fila (b) de 0.5 a 0.75 Gyr y en la fila (c) de 2.5 a 3 Gyr. La curva azul representa un cúmulo sin IMBH. La curva roja representa un cúmulo con un IMBH de  $10^5 M_{\odot}$ . La curva verde, corresponde a un IMBH de  $10^6 M_{\odot}$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones

Esta tesis estudia la posibilidad de detectar las anomalías que un IMBH podría generar en la dinámica de las estrellas en cúmulos estelares compactos, asemejándose a los cúmulos globulares. Específicamente, se analiza la dispersión de velocidades estelares, el perfil de densidad estelar, la densidad superficial y la luminosidad superficial, siendo esta última una variable observable.

Para tal propósito, se realizaron simulaciones de N-cuerpos con el código GADGET-4, utilizando los perfiles de densidad más comunes para describir estos sistemas estelares: Plummer, King y Schuster. Se consideraron cúmulos con N partículas y una masa total entre  $10^5$  y  $10^6 M_{\odot}$ , con y sin un agujero negro central de  $10^5$  y  $10^6 M_{\odot}$ . Para comparar entre los modelos, se fija la masa y el parámetro de radio de masa media, en un rango de 2 a 10 pc. También se consideró una función de masa inicial de Salpeter, lo que implica que las partículas (estrellas) no tienen la misma masa. En total, se analizaron tres modelos (Plummer, King y Schuster con  $\beta = 1.5$ ). Las simulaciones abarcan un intervalo de 13 Gyr, que corresponde a la edad estimada de los cúmulos globulares.

### 7.1. Hallazgos principales

Las contribuciones originales de esta tesis se enuncian a continuación:

- Se observa que los cúmulos con un IMBH en su centro experimentan un desplazamiento del origen del sistema de coordenadas en las tres direcciones, alcanzando valores de hasta 10 pc. Si bien este desplazamiento es significativo, resulta imposible de observar debido a las escalas de tiempo en las que ocurre y a la atracción gravitatoria de la galaxia anfitriona. Los casos sin IMBH permanecen centrados en el origen.
- Mediante histogramas de las distintas poblaciones estelares, separadas por intervalos de masa, se observa la segregación de masa, es decir, las estrellas más masivas tienden hacia el núcleo del cúmulo. Sin embargo, la presencia del IMBH hace que este efecto sea transitorio, ya que su potencial gravitatorio aumenta significativamente la dispersión de velocidades de las estrellas cercanas (dentro del radio de masa media), lo que eventualmente provoca su escape. Esto podría dar lugar a la formación de agujeros negros desnudos o errantes, dificultando su detección.
- Se encuentra una relación en la que, a medida que la masa del IMBH aumenta, la pérdida de estrellas (masa) se incrementa y el cúmulo se vuelve inestable. En particular, un IMBH de  $10^6 M_{\odot}$  hace que un cúmulo de  $10^5 M_{\odot}$  se vuelva inestable. Este resultado sugiere que es poco probable que un cúmulo globular de determinada masa pueda albergar en su centro un IMBH con una masa superior en un orden de magnitud.
- Se concluye que los cúmulos con un IMBH central son inestables si la masa del agujero negro es mayor que la del cúmulo. En este contexto, tomando como referencia la posición del IMBH, se encontró que la distribución de densidad, la densidad superficial y la luminosidad superficial presentan diferencias marginales con respecto a sus contrapartes sin IMBH. Esto sugiere que la presencia de un IMBH es difícil de detectar; en nuestro caso, no es posible distinguir IMBHs de hasta  $10^5 M_{\odot}$ .
- El análisis de las velocidades (RMS, radial y tangencial) indica que es posible diferenciar los cúmulos sin IMBH de aquellos con IMBH, incluso distinguiendo casos con diferentes masas del IMBH. Se observa un incremento en la velocidad a medida que la masa del IMBH aumenta, alcanzando valores superiores en aproximadamente un orden de magnitud en la zona central y hasta dos órdenes de magnitud en la periferia del cúmulo, lo que indica que las estrellas se están escapando. Sin embargo, para la veloci-

dad tangencial, las estrellas en la periferia presentan valores similares entre los distintos casos.

- Se propuso analizar la distribución de densidad, la densidad superficial y la luminosidad superficial tomando como referencia el centro de masa del sistema. En este caso, sí se observan diferencias entre un cúmulo sin IMBH y uno con IMBH de hasta  $10^5 M_{\odot}$ . No obstante, para confirmar este efecto observacionalmente, sería necesario conocer a priori la posición y la masa del IMBH. Los perfiles de velocidad (RMS, radial y tangencial) muestran un comportamiento similar al descrito anteriormente, pero solo en etapas tempranas ( $< 0.1$  Gyr). A tiempos mayores, los perfiles con IMBH se aplanan, lo que sugiere que el campo de velocidades se vuelve isotrópico, comportamiento que no difiere significativamente del caso sin IMBH.
- Se encontró que la interacción entre el IMBH y el cúmulo es independiente del modelo de densidad del cúmulo, ya que todas las densidades estudiadas exhiben tendencias similares. Este resultado sugiere que los cúmulos con un IMBH evolucionan hacia un perfil de densidad característico, lo que implica que explorar otros perfiles de densidad sería redundante.

## 7.2. Trabajos a Futuro

- Estudiar el crecimiento del agujero negro de masa intermedia y el entorno circundante sobre las estrellas de su vecindad ofrece una oportunidad para comprender mejor la dinámica de los cúmulos con un IMBH central. Para realizar este análisis, se pueden emplear códigos como Ketju ([Mannerkoski et al., 2023](#)), que permiten simular de manera precisa los procesos de acreción en la proximidad de un IMBH.
- Como un trabajo a futuro, sería crucial incorporar códigos colisionales que capturen de manera más precisa las interacciones estelares, especialmente en regiones cercanas al centro de un cúmulo, donde las colisiones juegan un papel fundamental en la dinámica del agujero negro de masa intermedia. No obstante, la implementación de estos códigos colisionales implica un alto costo computacional, lo que hace más complejo el estudio

de la interacción estelar en tales zonas.

- El estudio de cúmulos con presencia de gas permitiría modelar cúmulos nucleares con alta densidad central, y proporcionaría una comparación más directa con observaciones como la de Sagitario A\*.
- Estudiar la hipótesis de que el IMBH se trate de una estrella masiva o un ensamble de agujeros negros con menor masa.
- El perfil de densidad obtenido en nuestras simulaciones muestra una notable concordancia con estudios observacionales previos, como el de [Lanzoni et al. \(2007\)](#), donde se analiza la densidad superficial de NGC 6388 con un modelo con IMBH. Sorprendentemente, nuestros resultados reflejan una estructura similar a la reportada para este cúmulo globular denso, lo que sugiere que los modelos numéricos capturan de manera realista su configuración dinámica. Sin embargo, como trabajo a futuro es necesario hacer una comparación detallada con casos particulares.
- Si bien, en este trabajo no se realizó una comparación directa entre la dinámica de un cúmulo con una IMF de Kroupa y una de Salpeter, ambos casos se implementaron. Esto representa una oportunidad para trabajo a futuro. Que permitirían explorar el papel de las IMF en la dinámica estelar y la estabilidad de los cúmulos.

### 7.3. Perspectivas

Este trabajo representa un avance significativo en la comprensión de la dinámica de cúmulos globulares con IMBH, estableciendo bases para estudios futuros, en particular su aplicación a casos específicos. El estudio mostrado es de carácter exploratorio, y si bien, el número de posibilidades es amplio, aquí se sientan las bases para abordar cualquier distribución estelar; por ejemplo, se podría explorar el efecto del parámetro de concentración de la distribución de Schuster, el efecto de los diferentes parámetros como: el radio del núcleo, el radio de marea, etc. Además, este estudio puede ser un punto de partida para explorar casos que permitan la colisión de estrellas y agujeros negros, lo cual es más probable que ocurra en la zona central del cúmulo.

---

Con el objetivo de fomentar la reproducibilidad y el análisis comparativo en futuras investigaciones, los datos y códigos generados en este trabajo están disponibles a petición. Los interesados en acceder a ellos pueden contactar al correo electrónico [pmarin950@gmail.com](mailto:pmarin950@gmail.com).

# Apéndice A

## Instalación de GADGET-4

Para instalar GADGET-4, es necesario descargar el código fuente desde el repositorio oficial en <https://gitlab.mpcdf.mpg.de/vrs/GADGET4>.

Antes de compilar y ejecutar GADGET-4, es necesario instalar ciertas librerías adicionales. Estas instrucciones están enfocadas en sistemas operativos Unix. Los pasos generales de instalación para cualquier librería de forma manual desde una terminal son los siguientes:

```
tar -xzf nombre_paquete.tar.gz
cd nombre_directorio
./configure --prefix=/ruta/de/instalacion
make
make install
```

Las librerías necesarias son las siguientes:

1. MPI. Biblioteca para la ejecución en paralelo.

```
sudo apt-get install mpich
```

Página oficial: <https://www.mpich.org>.

2. GSL. Biblioteca para cálculos numéricos y análisis de datos.

```
sudo apt-get install libgsl-dev
```

Página oficial: <http://www.gnu.org/software/gsl>.

3. FFTW. Biblioteca para transformadas rápidas de Fourier.

```
sudo apt-get install libfftw3-dev
```

Página oficial: <http://www.fftw.org>.

4. HDF5. Biblioteca para leer y escribir archivos en formato HDF5.

```
sudo apt-get install libhdf5-dev
```

Página oficial: <http://hdf.ncsa.uiuc.edu/HDF5>.

5. HWLOC. Herramienta para asignar procesos a núcleos específicos del procesador.

```
sudo apt-get install libhwloc-dev
```

Página oficial: <https://www.open-mpi.org/projects/hwloc>.

6. VECTORCLASS. Biblioteca que optimiza los cálculos SPH mediante vectorización. Esta normalmente viene incluida en los compiladores modernos de C++.

Ahora es necesario configurar las rutas de las librerías en el código de GADGET-4. Para ello, se modifica el archivo `Makefile.systype`, donde se especifica el tipo de dispositivo y las rutas de las dependencias necesarias. Este archivo se encuentra en la carpeta:

GADGET4/buildsystem

A continuación, se siguen los siguientes pasos para realizar la configuración:

1. Seleccionar el sistema base: En el archivo `Makefile.systype`, buscar la línea que define el sistema y descomenta `SYSTYPE="Generic-gcc"`.

2. Identificar las rutas de las librerías: GADGET-4 requiere las ubicaciones de las librerías instaladas, que típicamente incluyen dos carpetas principales:

- Include. Contiene los archivos de cabecera necesarios para la compilación (.h).
- Libs. Contiene los archivos binarios (.so o .a) que se vinculan durante la ejecución.

Si las dependencias se instalaron usando los comandos de Unix descritos anteriormente, puedes usar las siguientes rutas predeterminadas.

3. Configura las variables en el archivo: Modifica las siguientes líneas en el archivo de rutas correspondientes. Si utilizaste los comandos de instalación predeterminados, simplemente copia y pega el siguiente código:

```
GSL_INCL    = -I$(LIB_DIR)/usr/include/gsl/  
GSL_LIBS    = -L$(LIB_DIR)/usr/lib/x86_64-linux-gnu/  
FFTW_INCL   = -I$(LIB_DIR)/usr/include/  
FFTW_LIBS   = -L$(LIB_DIR)/usr/lib/x86_64-linux-gnu/  
HDF5_INCL   = -I$(LIB_DIR)/usr/include/hdf5/serial/  
HDF5_LIBS   = -L$(LIB_DIR)/usr/lib/x86_64-linux-gnu/hdf5/serial/  
HWLOC_INCL  = -I$(LIB_DIR)/usr/include/  
HWLOC_LIBS  = -L$(LIB_DIR)/usr/lib/x86_64-linux-gnu/
```

4. Verificar las rutas personalizadas (opcional): Reemplazar \$(LIB\_DIR) con la ubicación de cada dependencia. Por ejemplo, si instalaste GSL en /home/usuario/librerias, la configuración sería:

```
GSL_INCL    = -I/home/usuario/librerias/include/  
GSL_LIBS    = -L/home/usuario/librerias/lib/
```

Nota. Antes de realizar cualquier modificación, se recomienda hacer una copia de seguridad del archivo original para evitar problemas si algo no funciona como se espera. Además, se puede comprobar si las rutas configuradas son correctas con los comandos:

```
ls /usr/include/gsl/
```

```
ls /usr/lib/x86_64-linux-gnu/
```

# Apéndice B

## Ejecución de una simulación de ejemplo

Este software incluye varios ejemplos de simulaciones, descargar los archivos de ejemplo desde el siguiente enlace: [https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/GADGET4/10\\_examples/](https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/GADGET4/10_examples/). Una vez descargados los ejemplos, identificar los siguientes archivos clave a editar (estos se encuentran en la carpeta base):

- Param.txt: Archivo que contiene los parámetros de configuración para la simulación.
- Config.sh: Archivo de configuración para la ejecución del ejemplo.

Cambios requeridos:

1. Editar InitCondFile en Param.txt. Localizar la línea que comienza con InitCondFile y modificar la ruta para que apunte al archivo de condiciones iniciales de la simulación.

Por ejemplo:

```
InitCondFile = /ruta/a/archivo/condiciones_iniciales
```

Se recomienda crear una carpeta separada para cada ejemplo de simulación. Por ejemplo, crear una carpeta llamada examples dentro del directorio principal de GADGET-4, y dentro

de ella crear subcarpetas para cada simulación. Esto facilitará mantener todo organizado y reproducible. Copia y pega Param.txt y Config.sh; cada carpeta debe tener ambos archivos.

A continuación, se muestran los comandos necesarios para compilar y ejecutar un ejemplo, suponiendo que se tiene una carpeta llamada examples y se ejecuta desde el directorio principal de GADGET-4:

```
make -j 8 DIR=examples/Tu-ejemplo
cd examples/Tu-ejemplo
mpirun -np 32 ./GADGET4 param.txt
#./GADGET4 param.txt si no necesitas paralelizar
```

# Apéndice C

## Ejemplo de archivo de parámetros

```
%---- Archivos relevantes
InitCondFile      /Dirección/de/tus/condiciones/iniciales/
OutputDir         ./output      % Dirección de los archivos de salida
SnapshotFileBase  snapshot      % Nombre base de los archivos de salida
OutputListFilename empty.txt    % Archivo para lista personalizada de salidas

%---- Formato de archivos
ICFormat          3   % Formato de los archivos de entrada (HDF5)
SnapFormat        3   % Formato de los archivos de salida (HDF5)

%---- Limite de tiempo del CPU
TimeLimitCPU      100000000    % Tiempo límite de simulación en segundos
CpuTimeBetRestartFile 1000    % Intervalo para archivos de reinicio

%---- Tamaño de memoria
MaxMemSize        3000   % Tamaño máximo de memoria asignada (en MB)

%---- Características de la simulación
TimeBegin         0        % Tiempo inicial de la simulación (en Gyr)
```

---

TimeMax                    13        % Tiempo máximo de simulación (en Gyr)

%---- Opciones básicas del código

ComovingIntegrationOn    0        % Integración cómovil

%---- Parámetros cosmológicos (no utilizados en estas simulaciones)

Omega0                    0        % Parámetro de densidad de materia oscura

OmegaLambda              0        % Parámetro de densidad de energía

OmegaBaryon              oscura 0    % Parámetro de densidad bariónica

HubbleParam              1        % Normalización del parámetro de Hubble

Hubble                    0        % Constante de Hubble

BoxSize                   0        % Tamaño de la caja

%---- Frecuencia y parámetros de salida

OutputListOn             0        % Activar lista personalizada de salidas

TimeBetSnapshot         0.05    % Intervalo entre instantáneas

TimeOfFirstSnapshot    0        % Tiempo de la primera instantánea

TimeBetStatistics        0.005   % Intervalo para cálculos estadísticos

NumFilesPerSnapshot    1        % Número de archivos por instantánea

MaxFilesWithConcurrentIO 0        % Máximo de archivos abiertos  
simultáneamente

%---- Precisión de integración temporal

ErrTolIntAccuracy       0.012   % Precisión de los pasos de tiempo

MaxSizeTimestep        0.01    % Tamaño máximo de paso de tiempo

MinSizeTimestep        0.0     % Tamaño mínimo de paso de tiempo

%---- Algoritmo del árbol y precisión de fuerzas

TypeOfOpeningCriterion   1        % Criterio de apertura de celdas para el árbol

ErrTolTheta             0.5     % Angulo de apertura del algoritmo del árbol

CourantFac               0.15    % Factor de Courant para partículas SPH

ErrTolThetaMax                    0.9    % Ángulo de apertura máximo permitido  
 ErrTolForceAcc                    0.0005% Precisión relativa del cálculo de fuerzas  
 TopNodeFactor                    2.5    % Resolución de la descomposición de dominio  
 ActivePartFracForNewDomainDecomp 0.01 % Frecuencia de reconstrucción del dominio

%---- Estimación inicial de densidad

DesNumNgb                    64    % Número de vecinos para suavizado SPH  
 MaxNumNgbDeviation    2    % Desviación máxima permitida

%---- Sistema de unidades

UnitLength\_in\_cm                3.085678e18            ; 1.0 pc  
 UnitMass\_in\_g                    1.989e33                ; 1.0e10 masas solares  
 UnitVelocity\_in\_cm\_per\_s        1e5                      ; 1 km/s  
 GravityConstantInternal        0                         ; Calculada automáticamente

%---- Longitud de suavizado gravitacional

SofteningComovingClass0        0.0  
 SofteningComovingClass1        0.0  
 SofteningComovingClass2        0.0  
 SofteningComovingClass3        0.0  
 SofteningComovingClass4        0.0001 ; pc % No usado para integración cómovil

SofteningMaxPhysClass0        0.0  
 SofteningMaxPhysClass1        0.0  
 SofteningMaxPhysClass2        0.0  
 SofteningMaxPhysClass3        0.0  
 SofteningMaxPhysClass4        0.0001 ; pc % Suavizado físico máximo

% Asignación por tipo de partícula

SofteningClassOfPartType0        0

---

|                           |   |
|---------------------------|---|
| SofteningClassOfPartType1 | 1 |
| SofteningClassOfPartType2 | 2 |
| SofteningClassOfPartType3 | 3 |
| SofteningClassOfPartType4 | 4 |

%---- Parámetros SPH

|                  |   |   |
|------------------|---|---|
| ArtBulkViscConst | 1 | % Constante de viscosidad artificial    |
| MinEgySpec       | 0 | % Temperatura mínima del gas (no usada) |
| InitGasTemp      | 0 | % Temperatura inicial del gas           |

## Apéndice D

# Comandos del archivo de configuraciones

| Palabra clave | Descripción   |
|---------------|---|
| SELFGRAVITY   | Debe ser activado si la autogravedad será calculada por el código. Si está desactivado, aún se puede tener hidrodinámica y, opcionalmente, un campo gravitacional externo.  |
| PERIODIC      | Esta opción es necesaria si se buscan condiciones periódicas en las fronteras; en este caso, el BoxSize en el archivo param.txt se vuelve relevante.  |
| NTYPES        | Número de partículas que usará el código. Si no se configura, se usará un valor de 6 por defecto. Esto sirve para organizar las partículas en la simulación; por ejemplo, 0 son partículas de gas y el SPH es aplicado. Cada uno de los otros tipos de partículas es tratado sin colisión. Para cada tipo de partícula es necesario especificar la clase de ablandamiento gravitacional.  |
| NSOFTCLASSES  | Número de diferentes valores de ablandamiento. Tradicionalmente, este número es igual al de tipos de partículas, pero también puede elegirse de manera diferente. El mapeo de un tipo de partícula a una clase de ablandamiento normalmente se realiza a través del parámetro SofteningClassOfPartTypeX especificado en el archivo param.txt. Se pueden mapear varios tipos de partículas a la misma clase de ablandamiento, y no todas las clases tienen que ser usadas. Con el comando INDIVIDUAL_GRAVITY_SOFTENING, el mapeo se puede basar en la masa de la partícula; es decir, partículas del mismo tipo con diferentes masas pueden estar asociadas a distintas clases de ablandamiento. |

Cuadro D.1: Descripción de palabras clave utilizadas en el código de Gadget-4.

| Palabra clave                | Descripción  |
|------------------------------|--|
| PM_ZOOM_OPTIMIZED            | Usa esta opción si la distribución de partículas es extremadamente inhomogénea, como en una simulación de zoom. En este caso, el algoritmo FFT usa diferentes estrategias de comunicación para mejorar el manejo de estas inhomogeneidades y mantener un trabajo balanceado.   |
| PMGRID                       | Habilita el método TreePM; es decir, la fuerza de largo alcance se calcula con el algoritmo PM y la fuerza de corto alcance con el árbol (tree) o con el FMM. El parámetro debe establecerse al tamaño de la malla utilizada, por ejemplo, 64, 96, 128, etc. La dimensión de la malla no necesita ser una potencia de dos, pero el FFT es más rápido en ese caso.  |
| ASMTH                        | Permite invalidar el valor por defecto de la escala que define la división de fuerza de corto y largo alcance en el algoritmo TreePM. El valor predeterminado es 1.25 (en unidades de celdas de malla). Un valor mayor mejora la transición resuelta por la malla, aumentando la precisión y reduciendo el residuo de dispersión en la región de coincidencia de fuerzas. Sin embargo, una mayor escala también incrementa la región cubierta por el árbol/FMM, lo que aumenta el costo computacional. |
| RCUT                         | Permite modificar el radio máximo hasta el cual se evalúa la fuerza del árbol de corto alcance en el algoritmo TreePM/FMM-PM. El valor predeterminado es 7.0 (en celdas de malla). Aumentar este valor no mejora el manejo de la región de coincidencia de fuerzas. Reducirlo a 4.5 puede aumentar el rendimiento.   |
| INDIVIDUAL-GRAVITY_SOFTENING | Si esta opción está activada, los tipos de partículas seleccionados calcularán un ablandamiento basado en un escalado cúbico con la masa de cada partícula. Como referencia, el código toma la clase de ablandamiento asignada al tipo de partícula 1 y el promedio de las masas de esas partículas.   |

Cuadro D.2: Descripción de palabras clave para la configuración del código.

| Palabra clave        | Descripción   |
|----------------------|---|
| EVALPOTENTIAL        | Si está activado, el código calcula el potencial gravitacional. Sin embargo, esto aumenta el uso de memoria y tiempo de CPU.  |
| DOUBLEPRECISION_FFTW | Si está configurado, el código utilizará la versión de doble precisión de FFTW y almacenará el correspondiente campo de valores (reales o complejos) en formato de doble precisión. De lo contrario, se usará solo precisión simple.  |
| GADGET2_HEADER       | Este parámetro se configura si el archivo de snapshot tiene un formato de encabezado de Gadget-2/3. Aplica solo para archivos con formato 1 y 2. Puede ser útil para archivos de condiciones iniciales con un formato antiguo; sin embargo, solo permite simular hasta $2^{31}$ partículas. |
| PRESSURE_ENTROPY_SPH | Permite usar la formulación SPH de presión-entropía (Hopkins, 2013). Si no se activa, se utiliza la formulación por defecto de densidad-entropía (Springel y Hernquist, 2002).  |
| EXTERNALGRAVITY      | Si está activado, se puede añadir un campo gravitacional externo a la dinámica. Es necesario definir interruptores y parámetros específicos para el campo externo.  |

Cuadro D.3: Descripción de palabras clave adicionales para la configuración del código.

## Apéndice E

### Comandos del archivo de parámetros

| Palabra clave         | Descripción  |
|-----------------------|--|
| OutputDir             | Directorio donde se guardan los archivos de salida generados por la simulación.  |
| SnapshotFileBase      | Nombre base de los snapshots. Se deriva agregando un guion bajo y el número del snapshot correspondiente, con el formato HDF5, por ejemplo, snapshot_000.hdf5.   |
| SnapFormat            | Especifica el formato utilizado para escribir los archivos de snapshot. Un valor de 1 selecciona un archivo binario de GADGET 1/2/3, 2 selecciona una variante de este tipo de binarios y 3 selecciona el uso de HDF5.                 |
| ICFormat              | Especifica el formato utilizado para leer el archivo de condiciones iniciales (IC). Es posible utilizar el mismo formato que los snapshots o uno distinto (preferiblemente HDF5).  |
| InitCondFile          | Especifica el nombre y la ruta del(los) archivo(s) de condiciones iniciales. En caso de usar varios, se debe indicar solo el nombre base, omitiendo el número y el sufijo (por ejemplo, .hdf5).  |
| NumFilePerSnapshot    | Permite distribuir cada snapshot en varios archivos, lo que facilita el manejo de simulaciones grandes. El número de procesadores puede ser igual a este valor.  |
| TimeLimitCPU          | Tiempo límite de ejecución del código en segundos para un solo procesador. El tiempo total de CPU se calcula multiplicando este valor por el número de núcleos utilizados.   |
| CpuTimeBetRestartFile | Tiempo máximo (en segundos) antes de que el código genere un nuevo conjunto de archivos de reinicio (checkpoints). Esto protege contra posibles fallas de hardware o software.   |
| MaxMemSize            | Valor máximo de memoria (en MB) que el código permite usar por proceso de MPI. Lo ideal es configurarlo cercano al máximo de memoria física disponible para cada rango de MPI en los nodos de cálculo.                                 |
| TimeBegin             | Tiempo inicial de la simulación. En caso de integrar en coordenadas comóviles, este valor corresponde al factor de escala inicial ( $T_{\text{begin}} = a = 1/(1 + z_{\text{inicio}})$ ). De lo contrario, se trata del tiempo físico. |

Cuadro E.1: Descripción de palabras clave relacionadas con los parámetros.

| Palabra clave                                  | Descripción  |
|--|--|
| TimeMax  | Tiempo final de la simulación. Al llegar a este punto, el código generará un archivo de reinicio y el snapshot correspondiente.  |
| BoxSize  | Tamaño de la caja periódica que delimita la simulación.  |
| ComovingIntegrationOn                          | Habilita o desactiva la integración cómovil para un Universo en expansión. Si es 0, se usa física newtoniana simple con condiciones de vacío o de frontera periódicas. Si es 1, se emplea un Universo en expansión basado en el modelo cosmológico estándar.   |
| Omega0   | Valor del parámetro de densidad de materia en unidades de la densidad crítica a $z = 0$ .  |
| OmegaLambda                                    | Valor del parámetro de densidad de energía oscura en unidades de la densidad crítica a $z = 0$ . Para simulaciones newtonianas, todos los parámetros de densidad deben ser 0.  |
| OmegaBaryon                                    | Valor del parámetro de densidad de radiación en unidades de la densidad crítica a $z = 0$ .  |
| HubbleParam                                    | Parámetro adimensional que elimina la dependencia explícita del valor de la constante de Hubble ( $h$ ), tradicionalmente utilizada en cosmología.   |
| Hubble   | Valor de la constante de Hubble en unidades internas. Este parámetro puede definirse explícitamente o calcularse con base en el valor de HubbleParam.  |
| UnitLength_in_cm ( $3.085678 \times 10^{21}$ ) | Define la unidad de longitud interna en cm/h. Es útil en cosmología, ya que establece la unidad de longitud como 1 kpc/h.  |
| UnitMass_in_g ( $1.989 \times 10^{43}$ )       | Establece la unidad de masa interna en g/h, definiendo la unidad de masa como $10^{10} M_{\odot}/h$ .  |
| UnitVelocity_in_cm_per_s ( $1.0 \times 10^5$ ) | Define la unidad de velocidad interna en cm/s. Este valor establece la unidad de velocidad como km/s. Las definiciones anteriores dependen del parámetro HubbleParam, tomando comúnmente un valor de 0.1 en unidades internas para ejemplos numéricos.   |
| GravityConstantInternal (0)                    | Valor numérico de la constante gravitacional $G$ en unidades internas. Si es 0, el código calcula automáticamente el valor interno correspondiente al valor físico de $G$ .  |
| TypeOfOpeningCriterion (0)                     | Selecciona el tipo de criterio de apertura para el cálculo de la fuerza gravitacional. Un valor de 0 aplica un criterio geométrico basado en el ángulo de apertura ( $\theta$ ). Un valor de 1 trunca el error de la expansión multipolar para cada interacción partícula-celda (consume más tiempo de cómputo). |
| ErrTolTheta (0.7)                              | Parámetro que define la precisión del criterio geométrico de apertura en el algoritmo de árbol.  |

Cuadro E.2: Descripción de palabras clave relacionadas con los parámetros.

| Palabra clave                     | Descripción  |
|-----------------------------------|--|
| ErrTolForceAcc (0.005)            | Controla la precisión del criterio de apertura relativa de las celdas. Esto protege contra posibles errores grandes en las fuerzas calculadas para cada partícula.   |
| ErrTolThetaMax (1.0)              | Cuando se usa el criterio de apertura relativa, la apertura efectiva del ángulo permite un pequeño nodo cuya masa puede crecer significativamente. Establece el paso de tiempo máximo que puede tomar una partícula. Este valor es útil para proteger partículas con largos tiempos de evolución pero baja aceleración. En simulaciones cosmológicas, suele usarse en términos de $\ln(a)$ , ya que el logaritmo natural discretiza bien el tiempo en este caso. |
| MaxSizeTimestep (0.1)             | Si una partícula requiere un paso de tiempo menor a este valor, la simulación terminará, evitando cálculos con valores no razonables.  |
| MinSizeTimestep (0)               | Este parámetro adimensional controla la precisión del criterio cinemático utilizado para determinar los pasos de tiempo en simulaciones cosmológicas. La ecuación asociada es $dt = \frac{\epsilon}{2\eta\epsilon/ a }$ , donde $\eta = \text{ErrTolIntAccuracy}$ , $\epsilon$ es la longitud de suavizado gravitacional y $a$ la aceleración de la partícula.   |
| ErrTolIntAccuracy (0.025)         | Este parámetro es necesario cuando el esquema está combinado con TREEPM_NOTIMESPLIT. En este caso, el tiempo de integración no distingue entre fuerzas de largo o corto alcance; la fuerza total se integra como una única variable. El método TreePM se utiliza para acelerar el cálculo de la fuerza gravitacional total.  |
| ActivePartFracForPMinsteadOfEwald | No requiere necesariamente una nueva descomposición del dominio en cada paso de tiempo. Por ejemplo, si este parámetro tiene un valor de 0.01, significa que cada 0.01 N partículas se activan durante la sincronización, donde N es el número total de partículas.  |
| ActivePartFracForNewDomainDecomp  | Si el valor es 1, los tiempos de salida se especifican mediante un archivo definido por el siguiente comando. Si es 0, los snapshots se generan automáticamente hasta completar el ciclo de pasos de tiempo.   |
| OutputListOn                      |  |

Cuadro E.3: Descripción de palabras clave relacionadas con los parámetros.

| Palabra clave                         | Descripción  |
|---------------------------------------|--|
| OutputListFilename (output_times.txt) | Nombre del archivo que contiene una lista de tiempos de salida. Este parámetro se utiliza solo si OutputListOn es 1, y puede contener como máximo 1100 valores.  |
| TimeOfFirstSnapshot (0.047619048)     | Define el tiempo del primer snapshot en la integración cómovil. En este caso, el valor corresponde a $z = 20$ .  |
| TimeBetSnapshot (1.0627825)           | Si OutputListOn = 1, este parámetro será ignorado. De lo contrario, después de escribir un snapshot, el siguiente tiempo se calcula multiplicando o sumando TimeBetSnapshot a TimeOfFirstSnapshot. En la integración cómovil, esto genera salidas espaciadas como $\ln(a)$ .   |
| TimeBetStatistics (0.7)               | Determina el intervalo de tiempo entre cada cálculo del potencial de energía del sistema. Estos valores se escriben en el archivo energy.txt, que contiene la energía para cada tipo de partícula.   |
| SofteningClassOfPartType0 (0)         | Especifica la clase de suavizado asignada a las partículas de tipo 0. Dependiendo de la configuración de NTYPES, se requieren parámetros adicionales para cada tipo de partícula. En este caso, el valor numérico 0 se asigna de tal manera que $x = \text{NTYPES} - 1$ , asegurando que esté en el intervalo $[0, \text{NSOFTCLASSES} - 1]$ . |
| SofteningComovingClass0 (0.5)         | Define la longitud de suavizado cómovil para las partículas, dependiendo de NSOFTCLASSES. Por ejemplo, SofteningComovingTypeX, donde $x = \text{NSOFTCLASSES} - 1$ . El suavizado, $\epsilon$ , representa la longitud equivalente de Plummer; la fuerza será newtoniana si $r = 2.8\epsilon$ .  |
| SofteningMaxPhysClass0                | En simulaciones cosmológicas, a veces se requiere fijar un valor máximo para el suavizado físico, $\epsilon_{\text{fis}}$ , donde $\epsilon_{\text{fis}} = a\epsilon_{\text{com}}$ . Este parámetro define dicho valor, siempre que la integración cómovil esté habilitada.  |
| DesNumNgb                             | Es el número deseado de vecinos para el suavizado SPH. Si en algún momento el número de vecinos cae fuera del rango esperado, el código ajustará automáticamente la longitud de suavizado para corregirlo.   |
| ArtBulkViscConst (1)                  | Define el valor del parámetro de viscosidad artificial, $\alpha_{\text{visc}}$ , utilizado por GADGET-4.   |

Cuadro E.4: Descripción de palabras clave relacionadas con los parámetros.

| Palabra clave                    | Descripción   |
|----------------------------------|---|
| InitGasTemp                      | Define la temperatura inicial del gas en Kelvin al leer las condiciones iniciales, siempre que la temperatura del gas en el archivo sea 0. Si este valor es menor a $10^4$ K, se asume un peso molecular fijo para el gas.  |
| NSample (128)                    | Es el valor máximo del número de onda $k$ usado en el código, lo que determina la frecuencia como $k = 2\pi/\text{BoxSize} \cdot \text{NSample}/2$ . Normalmente se elige tal que $N_{\text{tot}} = \text{NSample}^3$ .   |
| GridSize (128)                   | Define el tamaño de la rejilla cartesiana inicial en términos del número de partículas. El número total de partículas está dado por $N_{\text{totpart}} = \text{GridSize}^3$ . Normalmente se toma $\text{NSample} = \text{GridSize}$ . Si <code>CREATE-GRID</code> no está activo, este parámetro no debe estar presente, y las partículas serán leídas del archivo de condiciones iniciales (IC). |
| PowerSpectrumType (2)            | Especifica el método de parametrización para el espectro de potencia. Un valor de 1 selecciona la función de Eisenstein y $H_u$ , un valor de 2 permite usar una tabla externa para el espectro de potencia (indicada por <code>PowerSpectrumFile</code> ), y un valor de 3 utiliza la parametrización de Efstathiou.   |
| PowerSpectrumFile (spectrum.txt) | Archivo que contiene un espectro de potencia tabulado, generalmente calculado con códigos como Boltzmann o CAMB. Este archivo en formato ASCII incluye dos columnas: $\log(k)$ y $\log(\Delta^2)$ .   |
| InputSpectrum_UnitLength+in+em   | Define la unidad de longitud utilizada en el espectro de entrada tabulado, especificada en cm/h. Esto permite usar tablas de espectros basadas en unidades de Mpc/h mientras la simulación trabaja en kpc/h.  |
| ShapeGamma (0.21)                | Este parámetro es relevante cuando <code>PowerSpectrumType=3</code> , y debe ajustarse a un valor cercano a $\Omega_0 h$ .  |
| PrimordialIndex (1.0)            | Permite especificar una inclinación en el índice pri-mordial, si no se ha considerado ya en el espectro tabulado. Multiplica el espectro por un factor adicional $k^{(\text{PrimordialIndex}-1.0)}$ . Si no se desea usar esta opción, puede fijarse a 1.   |
| Sigma8 (0.86)                    | Normalización del espectro de potencia lineal, extrapolado a $z = 0$ .  |
| SphereMode (0)                   | Si el valor es 1, el código usa únicamente una esfera en el espacio $k$ definido por <code>NSample</code> . Si es 0, se utiliza un cubo en este espacio.  |
| Seed (123456)                    | Número entero utilizado como semilla para el generador de números aleatorios que emplea el código IC.   |

Cuadro E.5: Descripción de palabras clave relacionadas con los parámetros.

# Bibliografía

- Abbate, F., Spera, M., and Colpi, M. (2019). Intermediate mass black holes in globular clusters: effects on jerks and jounces of millisecond pulsars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(1):769–781.
- Bagla, J. S. (2002). Treepm: A code for cosmological n-body simulations. *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 23(3–4):185–196.
- Barnes, J. and Hut, P. (1986). A hierarchical  $o(n \log n)$  force-calculation algorithm. *Nature*, 324(6096):446–449.
- Baumgardt, H. and Hilker, M. (2018). A catalogue of masses, structural parameters, and velocity dispersion profiles of 112 milky way globular clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 478(2):1520–1557.
- Binney, J. and Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics: Second Edition*.
- Brandt, A. (2022). On distributed gravitational n-body simulations.
- Choudhuri, A. R. (2010). *Astrophysics for Physicists*. Cambridge University Press.
- DaviesProf., M. B. (2013). *Globular Cluster Dynamical Evolution*, pages 879–922. Springer Netherlands, Dordrecht.
- de Rijcke, S., Buyle, P., and Dejonghe, H. (2006). Upper limits on the central black hole masses of 47Tuc and NGC 6397 from radio continuum emission. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 368(1):L43–L46.

- Dejonghe, H. (1987). A completely analytical family of anisotropic Plummer models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 224:13–39.
- Di Cintio, P., Pasquato, and et al. (2023). Dynamics of intermediate mass black holes in globular clusters: Wander radius and anisotropy profiles. *Astronomy & Astrophysics*, 673:A8.
- Event Horizon Telescope Collaboration, Akiyama, K., Alberdi, and et al. (2022). First Sagittarius A\* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. , 930(2):L12.
- Ewald, P. P. (1921). Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale. *Annalen der Physik*, 369(3):253–287.
- Gebhardt, K., Rich, and et al. (2005). An intermediate-mass black hole in the globular cluster g1: Improved significance from new keck andhubble space telescopeobservations. *The Astrophysical Journal*, 634(2):1093–1102.
- Gingold, R. A. and Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389.
- Greengard, L. and Rokhlin, V. (1987). A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 73:325–348.
- Grindlay, J. E., Heinke, C., and et al. (2001). High-resolution x-ray imaging of a globular cluster core: Compact binaries in 47tuc. *Science*, 292(5525):2290–2295.
- Heggie, D. C. (2003). The gravitational million-body problem. *IAU Symp.*, 208:81.
- Hut, P. and Makino, J. (2007). *The Art of Computational Science: The Kali Code*, volume 11.
- Johnson, H. L. and Sandage, A. R. (1956). Three-Color Photometry in the Globular Cluster M3. *Astrophysical Journal*, 124:379.
- King, I. (1962). The structure of star clusters. I. an empirical density law. *Astronomical Journal*, 67:471.

- King, I. R. (1966). The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models. *Astronomical Journal*, 71:64.
- Koch, A., Hanke, M., and Kacharov, N. (2018). Kinematics of outer halo globular clusters: M 75 and ngc 6426. *Astronomy and Astrophysics*, 616:A74.
- Kızıltan, B., Baumgardt, H., and Loeb, A. (2017). An intermediate-mass black hole in the centre of the globular cluster 47 tucanae. *Nature*, 542(7640):203–205.
- Lanzoni, B., Dalessandro, E., and et al. (2007). The surface density profile of ngc 6388: A good candidate for harboring an intermediate-mass black hole. *The Astrophysical Journal*, 668(2):L139–L142.
- Latif, M. A. and Ferrara, A. (2016). Formation of supermassive black hole seeds. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 33:e051.
- Lützgendorf, N., Kissler-Patig, and et al. (2014). Intermediate-mass black holes in globular clusters: observations and simulations. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 10(S312):181–188.
- Mannerkoski, M., Rawlings, A., and et al. (2023). *ispĉketjuj/scp̂*– resolving small-scale supermassive black hole dynamics in *ispĉgadget-4i/scp̂*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 524(3):4062–4082.
- Marr, J. H. (2020). The dynamics of globular clusters and elliptical galaxies.
- Mezcua, M. (2017). Observational evidence for intermediate-mass black holes. *International Journal of Modern Physics D*, 26(11):1730021.
- Miller, M. C. and Hamilton, D. P. (2002). Production of intermediate-mass black holes in globular clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 330(1):232–240.
- Newton, I. (1687). *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley, CA. First published in 1687.
- Ninkovic, S. (1998). On the Generalised Schuster Density Law. *Serbian Astronomical Journal*, 158:15.

- Noyola, E. and Baumgardt, H. (2011). Testing Photometric Diagnostics for the Dynamical State and Possible Intermediate-mass Black Hole Presence in Globular Clusters. *Astrophysical Journal*, 743(1):52.
- Perryman, M. A. C., Lindegren, L., Kovalevsky, J., Turon, C., Hoeg, E., Grenon, M., Schrijver, H., Bernacca, P. L., Creze, M., Donati, F., Evans, D. W., Falin, J. L., Froeschle, M., Gomez, A., Grewing, M., van Leeuwen, F., van der Marel, H., Mignard, F., Murray, C. A., Penston, M. J., Petersen, C., Le Poole, R. S., and Walter, H. G. (1995). Parallaxes and the Hertzsprung-Russell diagram for the preliminary HIPPARCOS solution H30. *Astronomy & Astrophysics*, 304:69.
- Rosenberg, A., Saviane, I., Piotto, G., and Held, E. V. (1998). Young galactic globular clusters ii. the case of palomar 12.
- Springel, V., White, S. D. M., and et al. (2005). Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, 435(7042):629–636.
- Tatekawa, T. and Okamura, Y. (2020). Detection of intermediate-mass black holes in globular clusters using gravitational lensing.
- The HDF Group (2025). Introducción a HDF5.
- Zhan, H. (2006). Optimal Softening for N-Body Halo Simulations. *Astrophys. J.*, 639:617–620.
- Zhang, T., Liao, S., Li, M., and Gao, L. (2019). The optimal gravitational softening length for cosmological n-body simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(1):1227–1232.