UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

Irreducibilidad de los niveles de Whitney de un continuo

Tesis

Que para obtener el grado de

Maestra en Ciencias Matemáticas

Presenta:
Guadalupe Monserrat Caballero Hernández X120041

Director de tesis:
Dr. Javier Sánchez Martínez

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; Febrero de 2025

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
10 de Febrero de 2025
Oficio No. FCFM/0087/25

Dr. Javier Sánchez Martínez
Director de tesis.
Profesor de tiempo completo
De la facultad de ciencias en física y matemáticas Unach.
p r e s e n t e

Estimado Dr. Sánchez

Por este medio me permito informarle que, una vez efectuada la revisión de la tesis de nominada:

"*Irreducibilidad de los niveles de Whitney de un continuo*"

Ha sido aceptada para sustentar el examen de grado de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la **Lic. Guadalupe Monserrat Caballero Hernández** con matrícula escolar X120041.

Por lo tanto, se Autoriza la Impresión de la tesis, en virtud de haber cumplido con los requisitos correspondientes.

Sin más por el momento quedo de Usted, enviándole un cordial saludo.

Atentamente
"Por la conciencia de la necesidad de servir"

DIRECCIÓN
FCFM

Dr. Orlando Díaz Hernández
Director

C. c. p. Dra. María del Rosario Soler Zapata, Secretaria Académica de la FCFM
Mtro. René Solís López.-, Encargado del Control Escolar Posgrado de la FCFM
Archivo.

Código: FO-113-05-05
Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

La alumna (s) o él alumno (s) Guadalupe Monserrat Caballero Hernández autora (s) o autor (es) de la tesis bajo el título de Irreducibilidad de los niveles de Whitney de un continuo presentada y aprobada en el año 2025 como requisito para obtener el título o grado de Maestra en Ciencias Matemáticas, autorizo licencia a la Dirección de Desarrollo Bibliotecario de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), para que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para su consulta, reproducción parcial y/o total, citando la fuente, que contribuya a la divulgación del conocimiento humanístico, científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 14 días del mes de Febrero del año 2025.

Guadalupe Monserrat Caballero Hernández.
Nombre y firma de la alumna (s) o él alumno (s)

Agradecimientos

Con aprecio, agradezco al Dr. Javier Sánchesz Martínez por su asesoría en la realización de este trabajo, pero sobre todo agradezco, su tiempo, paciencia y apoyo.
Agradezco al Dr. Florencio Corona Vázquez, al Dr. Rossell Aarón Quiñones Estrella, al Dr. José António Martínez Cortez y al Dr. Roberto Carlos Mondragón Álvarez, por tomarse el tiempo de corregir el trabajo, agradezco sus valiosos comentarios y sugerencias en el mismo,
Agradezco a mi familia, con cariño, paciencia y por demostrar tener fé en mi, en particular a mis padres por el apoyo incondicional en cada decisión tomada.

Introducción

El presente trabajo se encuentra dentro del área de la topología, concretamente en la rama de la teoría de continuos y sus hiperespacios. Específicamente en este trabajo desarrollamos el material necesario para mostrar las propiedades sobre un continuo para garantizar la propiedad de irrreducibilidad de sus niveles de Whitney.

Una función de Whitney, es una función continua μ entre el hiperespacio $H(X)$ y el intervalo $[0,1]$, la cual es cero al ser evaluada en los elementos de $F_1(X)$, además si $A, B \in H(X)$ son tales que $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$ y si $A \subsetneq B$ se cumple que $\mu(A) < \mu(B)$. Se llama nivel de Whitney a $\mu^{-1}(t)$, para algún $t \in (0,1)$. Para cualquier continuo X, se sabe que existen funciones de Whitney para 2^X, sin embargo este tipo de funciones tienen propiedades interesantes cuando se restringen a $C(X)$. Considerando lo anterior, es natural preguntarse, ¿si X es un continuo irreducible y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney entonces cada nivel de Whitney es irredubile? y viceversa, si $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función Whitney y cada nivel de Whitney es irreducible, entonces X es un continuo irreducible?

Para responder las anteriores preguntas, el presente trabajo se compone de cinco capítulos.

En el capítulo 1, se repasarán los conceptos básicos sobre la métrica de Hausdorff y topología de Vietoris, los cuales son útiles para comprender las propiedades de los hiperespacios de un continuo. También abordamos la convergencia en hiperespacios con distintos enfoques, y los teoremas de golpes en la frontera, que serán de utilidad en el resto del trabajo.

En el capítulo 2, se abordará el concepto de funciones de Whitney, se demostrará la existencia de las mismas y se estudiaran algunas propiedades de los arcos ordenados en los hiperespacios 2^X y $C(X)$, concluimos el capítulo con el concepto de niveles de Whitney.

En el capítulo 3, damos un repaso de las propiedades de los continuos irreducibles, con el fin que el capítulo siguiente sea más fácil de comprender. Mostramos la ralación que existe entre el concepto de irreducibilidad y de descomponibilidad de un continuo, concluimos este apartado con la construcción de un continuo indescomponible usando el concepto de irreducibilidad.

En el capítulo 4, se aborda el concepto de propiedad cubriente relativa a una función de Whitney, la cual es importante para poder hablar de la propiedad de irreducibilidad de los niveles de Whitney, ya que se muestra que X tiene la propiedad cubriente para una función de Whitney si y solo si cada nivel de Whitney es irreducible.

En el capítulo 5, se dan dos ejemplos de continuos irreducibles, pero en donde algunos o todos sus niveles de Whitney no son irreducibles. Uno de los ejemplos se basa en el artículo [1], mientras que el segundo es una aportación de este trabajo.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo presentamos algunos resultados de la teoría básica de hiperespacios de continuos, los cuales nos serán de utilidad en el resto del trabajo. La mayoría de los resultados son presentados con su respectiva demostración, y aquellos que no la tienen, son referidos a una cita para su consulta, de cualquier manera para reforsar el capitulo se puede consultar las siguientes referencias [2, Capitulo I].

1.1. Métrica de Hausdorff

Dado un continuo X (espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto), **los hiperespacios de** X son ciertas familias de subconjuntos cerrados de X, con alguna característica particular. Consideraremos en este trabajo los siguientes hiperespacios de X:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Definición 1.1.1. *Sean X un continuo con métrica d y $A, B, C \subset X$ tres conjuntos no vacíos, denotemos por $d(A, B)$* ***la distancia de** A **a** B*, es decir $d(A, B) = inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$ y* ***la distancia de un punto** $p \in X$ **a un conjunto no vacío** C*, como $d(p, C) = d(\{p\}, C)$.*
Para cada $a \in X$ y $\epsilon > 0$, denotaremos por $B_\epsilon(a)$ a ***la bola de radio** ϵ **con centro en** a*, esto es*

$$B_\epsilon(a) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}.$$

Si $A \in 2^X$ se define ***la nube en** X **con centro en** A **y de radio** $\epsilon > 0$*, como*

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \epsilon\}.$$

A continuación, enunciaremos algunos resultados originados de la definición anterior.

Teorema 1.1.2. *Si X es un continuo, $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, entonces:*

a) $A \subset N(\epsilon, A)$,

b) $N(\epsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a)$, *y así* $N(\epsilon, A)$ *es un abierto en* X,

c) $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$ *para cada* $0 < \delta < \epsilon$, *y*

d) $N(\epsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < \epsilon\}$.

Demostración. $a)$ Se sigue directamente de la definición.

$b)$ Sea $x \in N(\epsilon, A)$. Por definición, existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$, esto es $x \in B_\epsilon(a)$. Por lo tanto $N(\epsilon, A) \subset \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a)$.
Sea $x \in \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a)$. Consideremos $a \in A$ tal que $x \in B_\epsilon(a)$, esto es $d(a, x) < \epsilon$ y así $x \in N(\epsilon, A)$.
Por lo anterior, tenemos que $N(\epsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a)$.

$c)$ Supongamos que $0 < \delta < \epsilon$ y que $x \in N(\delta, A)$, en este caso existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta < \epsilon$, es decir, $x \in N(\epsilon, A)$, y por tanto, $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$.

$d)$ Sean $x \in N(\epsilon, A)$ y $a \in A$ tales que $d(a, x) < \epsilon$, tomando $\delta > 0$ tal que $d(a, x) < \delta < \epsilon$, se tiene que $d(a, x) < \delta$, concluyendo que $x \in N(\delta, A)$, es decir $x \in \cup\{N(\delta, A) : \delta > 0, \delta < \epsilon\}$.
Para la otra contención, por el inciso c), tenemos que $\bigcup_{\delta < \epsilon} N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$.

□

Los siguientes cuatro teoremas presentan propiedades que cumplen las nubes para un continuo X y que utilizaremos más adelante.

Teorema 1.1.3. *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y U es un abierto en X tal que $A \subset U$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Como $A \subset U$, $A \cap (X - U) = \emptyset$. Notemos que A y $X - U$ son dos cerrados no vacíos en X y por tanto compactos en X. De manera que $d(A, X - U) > 0$. Sea $\epsilon = \frac{d(A, X-U)}{2} > 0$, Veamos que $N(\epsilon, A) \subset U$, en efecto, si $x \in N(\epsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$, es decir, $x \in B_\epsilon(a)$. Observemos que $x \in U$, pues en caso contrario, $x \in X - U$ y como $a \in A$, se cumple que $2\epsilon = d(A, X - U) \leq d(a, x) < \epsilon$, generando una contradicción. Por tanto, $x \in U$. □

Teorema 1.1.4. *Sean $A, B \in 2^X$. Si $0 < \delta \leq \epsilon$ y $A \subset B$, entonces $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, B)$.*

Demostración. Si $x \in N(\delta, A)$, existe $a \in A$ tales que $d(a, x) < \delta$. Como $\delta \leq \epsilon$, se sigue que $d(a, x) < \epsilon$, y puesto que $A \subset B$, se tiene que $a \in B$, de donde $x \in N(\epsilon, B)$. □

Teorema 1.1.5. *Si $\epsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$, entonces*

$$N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B).$$

Demostración. Por el teorema 1.1.4, inferimos que

$$N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, A \cup B)$$

y

$$N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B),$$

concluyendo que

$$N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B).$$

Ahora, sea $z \in N(\epsilon, A \cup B)$. Por definición existe $b \in A \cup B$ tal que $d(b, z) < \epsilon$. Tenemos dos casos $b \in A$ o $b \in B$.

1. Si $b \in A$, entonces $z \in N(\epsilon, A)$.
2. Si $b \in B$, entonces $z \in N(\epsilon, B)$.

En ambos casos, $z \in N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$. □

Teorema 1.1.6. *Si $A, B \in 2^X$ son tales que $A \cap B = \emptyset$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) = \emptyset$$

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, para cada $\epsilon > 0$ se cumple que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset$. Puesto que $A \cap B = \emptyset$ y A, B son compactos en X, tenemos que $d(A, B) > 0$. Sea $\epsilon = \frac{d(A,B)}{2} > 0$. Como $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset$ existe $z \in N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B)$. Así, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, z) < \epsilon$ y $d(b, z) < \epsilon$. Aplicando la desigualdad del triángulo, $d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < 2\epsilon = d(A, B)$, de manera que $d(a, b) < d(A, B)$, lo cual es una contradicción. □

Los siguientes conceptos nos serán de utilidad para definir una métrica en 2^X.

Definición 1.1.7. *Sea A un subconjunto no vacío de un continuo X. El **diámetro** de A, denotado por $diam(A)$ se define como*

$$diam(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}.$$

Notación: Para cada $A, B \in 2^X$ sean

$$E(A, B) = \{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)$$

y

$$E(A, B) \uplus E(B, C) = \{\epsilon + \delta > 0 : \epsilon \in E(A, B) \text{ y } \delta \in E(B, C)\}.$$

Teorema 1.1.8. *Sea X un continuo. La función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada $A, B \in 2^X$, por*

$$H(A,B) = \text{ínf}\, E(A,B),$$

es una métrica para 2^X.

Demostración. Sean $A, B, C \in 2^X$.

a) Veamos que H está bien definida. Para esto, tenemos que probar que el conjunto $E(A,B)$ es no vacío y está acotado inferiormente. Observemos que $d(x,y) < diam(X) + 1$, para cada $x, y \in X$. Así que, $A \subset N(diam(X)+1, B)$ y $B \subset N(diam(X)+1, A)$. De manera que $diam(X)+1 \in E(A,B)$. Por tanto, $E(A,B) \neq \emptyset$, además es claro que $E(A,B)$ está acotado inferiormente por el cero.

b) Para cada $A, B \in 2^X$, notemos que $H(A,B) \geq 0$, pues cero es cota inferior de $E(A,B)$.

c) Por definición de $E(A,B)$, deducimos que $E(A,B) = E(B,A)$, de esto, para cada $A, B \in 2^X$, se cumple que $H(A,B) = H(B,A)$.

d) Sean $A, B \in 2^X$, veamos que $H(A,B) = 0$ si y solo si $A = B$. Supongamos que $H(A,B) = 0$, mostraremos que $A = B$. Para esto, sean $\epsilon > 0$ y $x \in A$. Como $H(A,B) = 0$, existe $\delta \in E(A,B)$ tal que $\delta < \epsilon$ y $A \subset N(\delta, B)$. Luego, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \delta < \epsilon$, así que $y \in B_\epsilon(x) \cap B$, de donde $B_\epsilon(x) \cap B \neq \emptyset$ y como ϵ fue arbitrario, tenemos que $x \in \overline{B}$ (cerradura de B en X), puesto que B es cerrado en X, se sigue que $x \in B$. Por lo tanto, $A \subset B$. Análogamente, se prueba que $B \subset A$, concluyendo que $A = B$.
Ahora supongamos que $A = B$, en tal caso, para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $\epsilon \in E(A,B)$ y así $H(A,B) = 0$.

e) Finalmente veamos que para cada $A, B, C \in 2^X$, se cumple que $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$.
Para esto, demostraremos que $E(A,B) \uplus E(B,C) \subset E(A,C)$. Sea $\beta \in E(A,B) \uplus E(B,C)$, así, exiten $\epsilon \in E(A,B)$ y $\delta \in E(B,C)$ tales que $\beta = \epsilon + \delta$. Luego, $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\delta, C)$. Veamos que $A \in N(\beta, C)$. Si $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \epsilon$. Luego, existe $z \in C$ tal que $d(y,z) < \delta$. Así, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \epsilon + \delta = \beta$. Por lo tanto, $A \subset N(\beta, C)$. Análogamente, se puede probar que $C \subset N(\beta, A)$. De esto, deducimos que $\beta \in E(A,C)$. Es decir, $E(A,B) \uplus E(B,C) \subset E(A,C)$. Calculando ínfimos en la última contención, se tiene que $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$.

$\square$

De acuerdo al teorema 1.1.8, para cada continuo X, tenemos que $(2^X, H)$ es un espacio métrico, a la métrica H se le conoce como la **métrica de Hausdorff para 2^X inducida por** d. Como $C(X)$ está contenido en 2^X, observamos que H también es una métrica para $C(X)$. La idea intuitiva de esta métrica es que dos conjuntos están cercanos si ellos casi se empalman uno en el otro. Esta idea geométrica es buena pero tenemos que notar, por ejemplo, que si A es un disco en el plano, se pueden dar conjuntos finitos tan cercanos a A como se quiera, simplemente si se tomara una cuadrícula muy fina dentro del disco y se toma como conjunto finito al conjunto de los cruces de la cuadrícula.

Teorema 1.1.9. *Si X es un continuo, $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, entonces $H(A,B) < \epsilon$ si y solo si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.*

Demostración. Supongamos primero que $H(A,B) < \epsilon$.
Con lo cual existe $\delta' \in E(A,B)$ tal que $\delta' < \epsilon$, es decir $A \subset N(\delta', B)$ y $B \subset N(\delta', A)$. Además, por el teorema 1.1.2 tenemos que $N(\delta', B) \subset N(\epsilon, B)$ y $N(\delta', A) \subset N(\epsilon, A)$. Por tanto,

$$A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A).$$

Recíprocamente, si suponemos que

$$A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A),$$

por el teorema 1.1.2, tenemos que $A \subset \bigcup\{N(\delta, B) : 0 < \delta < \epsilon\}$. Dado que A es compacto, existen números positivos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, tales que $\delta_i < \epsilon$ y $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\alpha = \max\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$, con lo cual $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$ y así $A \subset N(\alpha, B)$. De manera análoga, como $B \subset N(\epsilon, A)$, existe $0 < \gamma < \epsilon$ tal que $B \subset N(\gamma, A)$, consideremos $\beta = \max\{\alpha, \gamma\}$. Se tiene que $\beta < \epsilon$, $A \subset N(\beta, B)$ y $B \subset N(\beta, A)$, así, $\beta \in E(A,B)$. En consecuencia $H(A,B) \leq \beta < \epsilon$. □

Teorema 1.1.10. *Sea X un continuo. La función $diam : 2^X \to [0, \infty)$, que asigna a cada elemento de 2^X su diámetro, es una función continua.*

Demostración. Mostraremos que *diam* es uniformemente continua, para esto, sean $\epsilon > 0$ y $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $H(A,B) < \delta$, por el teorema 1.1.9, tenemos que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Puesto que A es compacto, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $diam(A) = d(a_1, a_2)$. Usando que $A \subset N(\delta, B)$ existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $d(a_1, b_1) < \delta$ y $d(a_2, b_2) < \delta$. Notemos que

$$diam(A) = d(a_1, a_2) \leq d(a_1, b_1) + d(a_2, b_2) + d(b_1, b_2)$$

$$< 2\delta + d(b_1, b_2) = \epsilon + d(b_1, b_2) \leq \epsilon + diam(B).$$

Por lo tanto,

$$diam(A) - diam(B) < \epsilon.$$

De manera análoga para B, se tiene que

$$diam(B) - diam(A) < \epsilon.$$

Así,

$$-\epsilon < diam(A) - diam(B).$$

Por lo anterior, concluimos que

$$|diam(A) - diam(B)| < \epsilon.$$

Por lo que la función *diam* es uniformemente continua y en consecuencia continua. $\square$

Sea X un continuo, definamos $D : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como la función que para cada $A, B \in 2^X$,

$$D(A,B) = \text{máx}\{\sup\{d(a,B) : a \in A\}, \sup\{d(A,b) : b \in B\}\}.$$

Teorema 1.1.11. *Sea X un continuo. Si $A, B \in 2^X$, entonces $D(A,B) = H(A,B)$.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $r = H(A,B) + \epsilon > H(A,B)$, por el teorema 1.1.9, tenemos que $A \subset N(r,B)$ y $B \subset N(r,A)$, con lo cual, para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < r$. De esta forma, para cada $a \in A$, deducimos que $d(a,B) < r$. De modo que $\sup\{d(a,B) : a \in A\} < r$. De manera análoga, como $B \subset N(\epsilon, A)$, se sigue que $\sup\{d(b,A) : b \in B\} < r$. Por lo tanto, $D(A,B) \leq r$, es decir, $D(A,B) \leq H(A,B) + \epsilon$. Dado que ϵ fue arbitrario, inferimos que $D(A,B) \leq H(A,B)$.

Veamos que $H(A,B) \leq D(A,B)$. Sea $\epsilon > 0$ y $r = D(A,B) + \epsilon$. Mostraremos que $A \subset N(r,B)$. Tomemos $a_1 \in A$, así $d(a_1,B) \leq sup\{d(a,B) : a \in A\}$. Como $sup\{d(a,B) : a \in A\} \leq D(A,B)$, se sigue que $d(a_1,B) \leq D(A,B)$, con lo cual $d(a_1,B) < r$. De manera que $a_1 \in N(r,B)$, por lo tanto, $A \subset N(r,B)$. Análogamente, se prueba que $B \subset H(A,B)$, es decir, $H(A,B) < D(A,B) + \epsilon$. Dado que $\epsilon > 0$ fue arbitrario, inferimos que $H(A,B) \leq D(A,B)$. Por lo tanto, $H(A,B) = D(A,B)$. $\square$

Por el teorema 1.1.8, concluimos que D es una métrica para el hiperespacio 2^X, que coincide con la métrica de Hausdorff. De manera que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ pueden ser considerados con cualquiera de estas dos métricas, según convenga.

Definición 1.1.12. *Dado un subconjunto no vacío A dentro de un continuo X, consideremos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X:*

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\},$$
$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\},$$
$$\Phi(A) = \{B \in 2^X : A \subset B\}.$$

Los anteriores conjuntos permiten construir abiertos en 2^X como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 1.1.13. *Sean X un continuo y $\emptyset \neq A \subset X$. Se tiene lo siguiente:*

1. *Si A es un abierto en X, entonces $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son abiertos en $(2^X, H)$.*

2. *Si A es cerrado en X, entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ son cerrados en $(2^X, H)$.*

Demostración. 1. Sea A un abierto en X. Mostramos que $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X. Para esto, sea $B \in \Gamma(A)$.
Como A es abierto en X, por el teorema 1.1.3, tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, B) \subset A$. Verifiquemos que $B_\epsilon(B) \subset \Gamma(A)$ (donde $B_\epsilon(B)$ denota la bola abierta con centro en B y radio ϵ en 2^X). Sea $C \in B_\epsilon(B)$, se sigue que $H(B, C) < \epsilon$. Por el teorema 1.1.9, tenemos que $C \subset N(\epsilon, B)$ y como $N(\epsilon, B) \subset A$, se sigue que $C \subset A$, y por tanto $C \in \Gamma(A)$. Con lo anterior, para cada $B \in \Gamma(A)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(B) \subset \Gamma(A)$, es decir, $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X.
Ahora, demostremos que $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X. Sean $B \in \Lambda(A)$ y $x \in B \cap A$. Como A es abierto en X, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset A$. Probaremos que $B_\epsilon(B) \subset \Lambda(A)$. Sea $C \in B_\epsilon(B)$, con lo cual $H(B, C) < \epsilon$, y por el teorema 1.1.9, concluimos que $B \subset N(\epsilon, C)$. Como $x \in B$, existe $y \in C$ tal que $d(x, y) < \epsilon$, es decir, $y \in B_\epsilon(x)$. Así que $y \in A$ y por tanto $y \in C \cap A$, de manera que $C \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C \in \Lambda(A)$.

2. Sea A un cerrado en X. Notemos que $\Gamma(A) = 2^X - \Lambda(X - A)$ como $X - A$ es abierto en X, por el inciso anterior concluimos que $\Lambda(X - A)$ es un abierto en 2^X por el inciso anterior, concluyendo que $\Gamma(A)$ es cerrado en 2^X.
Por otro lado, si A es cerrado en X, entonces $X - A$ es abierto en X. Por el inciso anterior, se sigue que $\Gamma(X - A)$ es abierto en 2^X, con lo cual, $2^X - \Gamma(X - A)$ es cerrado en 2^X. Notemos que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X - A)$ y $\Lambda(A) \cap \Gamma(X - A) = \emptyset$. Por lo tanto, $\Lambda(A)$ es cerrado en 2^X.
Finalmente, veamos que $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. Sea $B \in \overline{\Phi(A)}$ y supongamos que $B \notin \Phi(A)$, con lo cual $A \nsubseteq B$. Consideremos a $a \in A - B$, y notemos que $d(B, a) > 0$. Sea $\epsilon = d(B, a)$. Como $B \in \overline{\Phi(A)}$, tenemos que $H(B, A) < \epsilon$. Por el teorema 1.1.9, se sigue que $A \subset N(\epsilon, B)$. Como $a \in A$ y $A \in \Phi(A)$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Como $d(a, B) \leq d(a, b)$, tenemos que $\epsilon < \epsilon$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, $B \in \Phi(A)$, mostrando que $\overline{\Phi(A)} \subset \Phi(A)$.

□

1.2. Topología de Vietoris

En esta sección definimos otra topología para 2^X que no involucra de manera directa la métrica de X y se define usando familias de abiertos en X (conocida como la topología de Vietoris), así que esta topología puede definirse aún cuando X no sea un continuo, sin embargo, como mostraremos en esta sección, la topología que se define a continuación coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff.

Definición 1.2.1. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X.* ***El vietórico de*** *$U_1, U_2 \ldots, U_n$, denotado por $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ es el conjunto*

$$\left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

A continuación enunciaremos algunas propiedades de los vietóricos que nos serán de utilidad posteriormente.

Teorema 1.2.2. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X. Las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(1) $\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle = \Gamma \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i) \right]$,

(2) para cada $\emptyset \neq A \subset X$, tenemos que $\Gamma(A) = \langle A \rangle$.

(3) para cada $\emptyset \neq A \subset X$, tenemos que $\Lambda(A) = \langle X, A \rangle$.

Demostración. Para ver que se cumple (1), notemos que

$$\begin{aligned}\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle &= \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\} \cap \{ A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, ..., n\}\} \\ &= \Gamma \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i) \right].\end{aligned}$$

Por tanto, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i) \right]$.
Para los incisos (2) y (3) se sigue directamente de la definición. □

Teorema 1.2.3. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ y $V_1, V_2, \ldots, V_m$ subconjuntos no vacíos de un continuo X. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ entonces*

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle = \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle.$$

Demostración. Sea $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$, ya que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle = \Gamma(U) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i) \right] \cap \Gamma(V) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{m} \Lambda(V_i) \right],$$

se sigue que $A \subset U \cap V$.
Observemos que

$$U \cap V = (U \cap V) \cup (V \cap U) = \left[U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} V_i\right)\right] \cup \left[V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)\right]$$
$$= \left[\bigcup_{i=1}^{m}(U \cap V_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n}(V \cap U_i)\right].$$

Por otro lado, como $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $A \subset V$, tenemos que $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. También para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ se puede probar de manera análoga a lo anterior que $A \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$. De manera que

$$A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle.$$

Por lo tanto,

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle \subset \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle.$$

Para probar la otra contención, sea

$$A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle,$$

entonces, $A \subset U \cap V$, es decir, $A \subset U$ y $A \subset V$, así $A \in \Gamma(U)$ y $A \in \Gamma(V)$. Por otra parte, como $A \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$, se tiene también que $A \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Con esto $A \in \Lambda(V_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. De manera similar se puede ver que $A \in \Lambda(U_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$. □

Teorema 1.2.4. *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos en X. Si $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$, entonces existen abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que*

$$A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración. Si $a \in A$, entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $a \in U_i$, ya que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Luego, como X es regular, existe un abierto V_a en X tal que $a \in V_a \subset \overline{V_a} \subset U_i$. Así, $A \subset \bigcup\{V_x : x \in A\}$. Como A es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sean $b_i \in A \cap U_i$ y W_i un abierto en X tal que $b_i \in W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$.
Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sean

$$J_i = \{k \in \{1, 2, \ldots, m\} : \overline{V_{a_k}} \subset U_i\} \text{ y } V_i = W_i \cup \left(\bigcup_{k \in J_i} V_{x_k}\right).$$

Tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, V_i es abierto en X, con $\overline{V_i} \subset U_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$, además, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Así $A \in \langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle$ y $\langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$. □

El siguiente resultado dota de una topología al hiperespacio 2^X de un continuo X dado.

Teorema 1.2.5. *Si X es un continuo y $\mathcal{B}$ es la familia*

$$\{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle : U_1, U_2, \ldots, U_n \text{ son abiertos en } X \text{ y } n \in \mathbb{N}\},$$

entonces $\mathcal{B}$ es base para una topología del hiperespacio 2^X.

Demostración. Primero veamos que $2^X = \bigcup \mathcal{B}$. Notemos que $\langle X\rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$. Así, $2^X \in \mathcal{B}$. De manera que $2^X \subset \bigcup \mathcal{B}$, concluyendo que $2^X = \bigcup \mathcal{B}$.
La demostración de la segunda condición que requiere una familia para ser base, es que, para cada $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{B}$ con $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, esto se sigue directamente del teorema 1.2.3, por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base para una topología de 2^X. □

La topología generada por $\mathcal{B}$, denotada por τ_V es conocida como la *Topología de Vietoris* para 2^X, el siguiente resultado muestra la construcción de una subbase para τ_V.

Teorema 1.2.6. *Sea X un continuo. El conjunto $\mathcal{S} = \{\Gamma(U) : U$ es abierto en $X\} \cup \{\Lambda(U) : U$ es abierto en $X\}$ es una subbase para τ_V.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{S}' = \{\bigcap \mathcal{W} : \mathcal{W} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{S}\}.$$

Para ver que $\mathcal{S}$ es subbase para la topología de Vietoris, basta probar que $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$.
Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, por lo que existen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ conjuntos abiertos en X tales que $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$ y sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Notemos que por el teorema 1.2.2, $\mathcal{U} = \Gamma(U) \cap \Lambda(U_1) \cap ... \cap \Lambda(U_n)$. Es decir, $\mathcal{U}$ es una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$. Así que, $\mathcal{U} \in \mathcal{S}'$, de manera que $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}'$.
Por otra parte, veamos que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. Para esto, sea $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$. En este caso $\mathcal{V} = \Gamma(U)$ o bien $\mathcal{V} = \Lambda(U)$, para algún abierto U en X, es decir, $\mathcal{V} = \langle U\rangle$ o $\mathcal{V} = \langle X, U\rangle$, en cualquier caso $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$. Esto prueba que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. Además, por el teorema 1.2.3, sabemos que $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, de manera que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{B}$.
Por lo tanto, $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$, lo que demuestra que $\mathcal{S}$ es subbase para la topología de Vietoris. □

Mostraremos que la topología de Vietoris que hemos definido para 2^X es la misma que la inducida por la métrica de Hausdorff de la sección anterior.

Teorema 1.2.7. *Sea X un continuo. La topología de Vietoris, τ_V y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, τ_H en 2^X son iguales.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} \in \tau_V$ y $A \in \mathcal{U}$. Por el teorema 1.2.5 tenemos que $\mathcal{B}$ es una base de τ_V. Así, existen $n \in \mathbb{N}$ y abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ en X tales que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Luego, $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ es abierto en X, por el teorema 1.1.13, se sigue que $\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \in \tau_H$ y $\Lambda(U_i) \in \tau_H$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por tanto, $\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right] \in \tau_H$. Por el teorema 1.2.2, inferimos que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].$$

Esto concluye que $\mathcal{U} \in \tau_H$. De manera que $\tau_V \subset \tau_H$.
Ahora, sean $\mathcal{V} \in \tau_H$ y $A \in \mathcal{V}$. Probaremos que existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Recordemos que una base para τ_H está dada por $\gamma_H = \{B_\delta(C) : C \in 2^X \text{ y } \delta > 0\}$. De manera que existe $F \in 2^X$ y $\epsilon > 0$ tales que $A \in B_\epsilon(F) \subset \mathcal{V}$.
Por otro lado, observemos que la colección $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(b) : b \in F\}$ es una cubierta abierta para F. Como F es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{b_1, b_2, ..., b_n\} \subset F$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\epsilon}{2}}(b_i)$. Sea $U_i = B_{\frac{\epsilon}{2}}(b_i)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos

$$\mathcal{W} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].$$

Por el teorema 1.2.2, se tiene que $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$.
Ahora, probaremos que $\mathcal{W} \subset B_\epsilon(F)$ (la bola en la métrica de Hausdorff). Sea $D \in \mathcal{W}$, luego, $D \in \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right]$. Así, $D \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $D \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Afirmamos que $D \subset N(\epsilon, F)$ y $F \subset N(\epsilon, B)$. En efecto, si $e \in D$, entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $e \in U_j = B_{\frac{\epsilon}{2}}(b_j)$, así, $d(e, b_j) < \frac{\epsilon}{2}$ y, como $b_j \in F$, se sigue que $D \subset N(\epsilon, F)$.
Veamos que $F \subset N(\epsilon, D)$. Si $b \in F$, existe entonces $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $b \in U_k = B_{\frac{\epsilon}{2}}(b_k)$, con esto $d(b, b_k) < \frac{\epsilon}{2}$. Dado que $D \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, inferimos que $D \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(b_k) \neq \emptyset$, se sigue que existe $z \in D \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(b_k)$. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que $d(b, z) \leq d(b.b_k) + d(b_k, z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, es decir, $d(b, z) < \epsilon$. Por lo tanto, para cada $b \in F$, existe $z \in D$ tal que $d(b, z) < \epsilon$, en consecuencia $F \subset N(\epsilon, B)$.
Por lo anterior y el teorema 1.1.9, obtenemos que $H(F, D) < \epsilon$.
Así, $D \in B_\epsilon(F)$. Por lo tanto, $\mathcal{W} \subset B_\epsilon(F)$. Dado que $B_\epsilon(F) \subset \mathcal{V}$, deducimos que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.

En resumen, para cada $\mathcal{V} \in \tau_H$ y $A \in \mathcal{V}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Esto demustra que $\tau_H \subset \tau_V$. □

1.3. Convergencia en Hiperespacios

Ahora que contamos con una métrica en 2^X (a saber, la métrica de Hausdorff), es posible hablar de sucesiones en 2^X. Más aún, una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $A \in 2^X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n, A) < \epsilon$ para cada $n \geq N$. Sin embargo, la definición que daremos a continuación resultará más útil, posteriormente, veremos que ambas definiciones son equivalentes.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio métrico y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Se definen* ***el límite inferior y el límite superior*** *de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, como*

$\liminf A_n = \{x \in X :$ *si U es un abierto en X tal que $x \in U$, entonces $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ salvo para un número finito de n's*$\}$

$\limsup A_n = \{x \in X :$ *si U es un abierto en X tal que $x \in U$, entonces $U \cap A_n \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de n's*$\}$

Si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$, se dice que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ L-converge a A y este hecho se denotará por $\lim A_n = A$.

Observación 1.3.2. *Si X es un espacio métrico, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una secesión en 2^X y $x \in X$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. *Como consecuencia, la sucesión L-converge a A si y solo si $A \subseteq \liminf A_n$ y $\limsup A_n \subseteq A$.*

(2) $x \in \liminf A_n$ *si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$.*

(3) $x \in \limsup A_n$ *si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J$.*

(4) $\limsup A_n$ *puede escribirse como*

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}.$$

Esta última igualdad puede ser consultada en [2, Ejercicio 4.11, p. 26]. Como consecuencia, $\limsup A_n$ es cerredo en X, ya que es intersección de conjuntos cerrados.

(5) Si para cada $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $B_n \subseteq A_n$*, entonces* $\liminf B_n \subseteq \liminf A_n$ *y* $\limsup B_n \subseteq \limsup A_n$*. En consecuencia,* $\lim B_n \subseteq \lim A_n$ *cuando* $\lim A_n$ *y* $\lim B_n$ *existen.*

Lema 1.3.3. *Si* X *es un espacio métrico compacto y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* 2^X*, entonces* $\limsup A_n \neq \emptyset$*.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n$ (ya que $A_n \neq \emptyset$) y consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como X es compacto, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a algún $z \in X$. Veamos que $z \in \limsup A_n$. Sea U un abierto en X que contiene a z. Como $\{x_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in U$ para cada $k \geq N$. Dado que $x_{n_k} \in A_{n_k}$, se tiene que $A_{n_k} \cap U \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$. Esto implica que $z \in \limsup A_n$. Por lo tanto, $\limsup A_n \neq \emptyset$. □

Finalizaremos esta sección con el siguiente resultado que muestra la relación entre la L-convergencia y la convergencia con la topología en 2^X inducida por la métrica de Hausdorff.

Proposición 1.3.4. *Sean* X *un continuo y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* 2^X*. Entonces* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *L-converge a* A *si y solo si* $A \in 2^X$ *y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* A *respecto a la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que $\lim A_n = A$. Por la observación 1.3.2 y el lema 1.3.3, se tiene que $A = \limsup A_n \in 2^X$. Veamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en 2^X respecto a la métrica de Hausdorff. Sea $\epsilon > 0$. Como $A \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A) = \bigcup_{a\in A} B_{\frac{\epsilon}{2}}(a)$ y $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A en X existen $a_1, \ldots, a_k \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_i)$. Como $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A = \liminf A_n$, por la observación 1.3.2 inciso (2), existen $M_1, M_2, \ldots, M_k \in \mathbb{N}$ tales que

$$A_n \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_i) \neq \emptyset \text{ siempre que } n \geq M_i \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Sea $N_1 = \max\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ y consideremos $n \geq N_1$. Veamos que $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$. Sea $a \in A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_i)$, entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $a \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_j)$. Como $A_n \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_j) \neq \emptyset$, sea $b \in A_n \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_j)$.
Observemos que $d(a, b) \leq d(a, a_j) + d(a_j, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, con lo cual $d(a, A_n) < \epsilon$, es decir, $a \in N(\epsilon, A_n)$. Esto prueba que

$$A \subseteq N(\epsilon, A_n) \text{ para todo } n \geq N_1$$

Afirmación: Existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces $A_n \subseteq N(\epsilon, A)$.
En efecto, supongamos lo contrario, en tal caso existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que para cada $n \in J$, $A_n \nsubseteq N(\epsilon, A)$. Para cada $n \in J$, sea $x_n \in A_n \cap (X - N(\epsilon, A))$. Entonces $\{x_n\}_{n\in J}$

es una sucesión en $X - N(\epsilon, A)$ y como $X - N(\epsilon, A)$ es un cerrado dentro del compacto X, entonces también $X - N(\epsilon, A)$ es compacto, así que existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in J}$ convergente a algún punto $z \in X - N(\epsilon, A)$. Veamos que $z \in \limsup A_n$. Sea U un abierto de z. Como $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in U$ para cada $k \geq M$. Dado que $x_{n_k} \in A_{n_k}$, se tiene que $A_{n_k} \cap U \neq \emptyset$ para cada $k \geq M$. Esto implica que $z \in \limsup A_n$. Pero $\limsup A_n = A \subseteq N(\epsilon, A)$, con lo cual $z \in N(\epsilon, A)$, lo que es una contradicción. Esto prueba la afirmación.

Finalmente, sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, puesto que $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ para todo $n \geq N_1 \leq N$ y $A_n \subseteq N(\epsilon, A)$ para todo $n \geq N_2 \leq N$, esto nos permite concluir que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en 2^X respecto a la métrica de Hausdorff.

Supongamos ahora que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A respecto a la métrica de Hausdorff. Probaremos primero que $\limsup A_n \subseteq A$. Sea $x \in \limsup A_n$ y sea $\epsilon > 0$. Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A respecto a la métrica de Hausdorff, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq N$. Esto implica que $A_n \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A)$ para todo $n \geq N$. Como $x \in \limsup A_n$, existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap A_m \neq \emptyset$ para cada $m \in J$. Sea $m \in J$ tal que $m \geq N$. Luego $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap A_m \neq \emptyset$. Sea $y \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap A_m$. Como $A_m \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A)$, se sigue que $d(y, A) < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo cual se tiene que

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, se concluye que $d(x, A) = 0$, es decir, $x \in A$.

Ahora probaremos que $A \subseteq \liminf A_n$. Sean $x \in A$ y $\epsilon > 0$. Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A respecto a la métrica de Hausdorff, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Esto implica que $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ para todo $n \geq N$. Sea $n \geq N$, como $x \in A \subseteq N(\epsilon, A_n)$, se tiene que $d(x, A_n) < \epsilon$. Existe entonces $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \epsilon$, con lo cual $a_n \in B_\epsilon(x) \cap A_n$. Hemos probado que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$, esto implica que $x \in \liminf A_n$.
De lo anterior, se sigue que $A \subseteq \limsup A_n \subseteq A$, y por la observación 1.3.2 se concluye que $\lim A_n = A$. □

1.4. Teoremas de golpes de la frontera

Los teoremas de golpes en la frontera buscan condiciones para que un conjunto intersecte a la frontera de un abierto U y a su complemento. Daremos tres versiones de estos teoremas, los cuales se basan principalmente en el siguiente resultado.

Teorema 1.4.1 (Del cable cortado). *Sean (X, d) un espacio métrico y compacto, y A, B son dos cerrados no vacíos en X tales que ningún subespacio conexo de X intersecta tanto a A como a B, entonces $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son dos cerrados tales que $A \subseteq X_1$, $B \subseteq X_2$ y $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.*

La demostración del teorema anterior puede ser consultada en [5, 5.2, p. 72].

Como es habitual, dado un subconjunto $A \subseteq X$, denotaremos por $Fr(A)$ a la frontera de A en X, es decir $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$.

Teorema 1.4.2 (Golpes en la frontera I)**.** *Sean X un continuo y U un abierto no vacío de X tal que $U \subsetneq X$. Se tiene que para cada componente K de $\overline{U}$, se cumple que $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$. (equivalentemente, como $K \subseteq \overline{U}$ y U es abierto, $K \cap (X - U) \neq \emptyset$).*

Demostración. (Por contradicción) Supongamos que existe K componete de $\overline{U}$ tal que $K \cap Fr(U) = \emptyset$.
Notemos que K y $Fr(U)$ son dos cerrados en $\overline{U}$ y si L es un conjunto conexo contenido en $\overline{U}$ tal que $L \cap K \neq \emptyset$, entonces $L \subseteq K$ y así $L \cap Fr(U) = \emptyset$. Por el teorema del cable cortado $\overline{U} = M_1 \cup M_2$ donde M_1 y M_2 son dos cerrados ajenos en $\overline{U}$ tales que $K \subseteq M_1$ y $Fr(U) \subseteq M_2$.
Sea $M_3 = M_2 \cup (X - U)$. Como U es abierto, M_3 es cerrado en X, $M_3 \neq \emptyset$ pues $U \subsetneq X$, y como $K \neq \emptyset$, $M_1 \neq \emptyset$ y M_1 es cerrado en X.
Además $M_1 \cup M_3 = (M_1 \cup M_2) \cup (X - U) = \overline{U} \cup (X - U) = X$ y

$$M_1 \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cup (X - U)) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cup (X - U)) = M_1 \cap (X - U).$$

Para generar una contradicción basta con mostrar que $M_1 \cap (X - U) = \emptyset$. Para esto, $M_1 \subseteq \overline{U}$ y $\emptyset = M_1 \cap Fr(U) = M_1 \cap (\overline{U} \cap \overline{(X - U)}) = M_1 \cap (X - U) = \emptyset$. $\square$

Corolario 1.4.3. *Si X es un continuo no degenerado, entonces X contiene un subcontinuo propio Y no degenerado. Más aún, si $A \in C(X) - \{X\}$ entonces existe $B \in C(X)$ tal que $A \subsetneq B \subsetneq X$.*

Demostración. Mostraremos primero el ”más aún".
Sea $A \in C(X) - \{X\}$. Como $A \subseteq X$ y X es abierto, existe un conjunto abierto V de X tal que $A \subseteq V \subsetneq X$ (por la normalidad de X) $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subsetneq X$.
Sea B la componente de $\overline{V}$ tal que $A \subseteq B$. En este caso $B \in C(X) - \{X\}$. Por el teorema de golpes en la frontera I, $B \cap (X - V) \neq \emptyset$ y así $A \subsetneq B \subsetneq X$. $\square$

Teorema 1.4.4 (Golpes en la frontera II)**.** *Si X es un continuo y E es un subconjunto propio y no vacío de X, entonces para cada componente K de E se cumple que $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$ (equivalentemente, como $\overline{K} \subseteq \overline{E}$, $K \cap \overline{(X - E)} \neq \emptyset$).*

Demostración. (Por contradicción)
Supongamos que existe K unacomponte de E tal que $\overline{K} \cap \overline{(X - E)} = \emptyset$.
Como $K \neq \emptyset$, $\overline{K} \in C(X) - \{X\}$. Sea $U = X - \overline{(X - E)}$, el cual es un abierto propio y $\overline{K} \subseteq U \subseteq E$. Por el corolario 1.4.3 existe un subcontinuo propio B de X tal que $\overline{K} \subsetneq B \subsetneq U \subsetneq \overline{E}$. $\square$

Teorema 1.4.5. *[golpes en la frontera III] Sea X un continuo y E un subconjunto propio y no vacio de X. Sea K una componente de E. Si E es abierto en X entonces $\overline{K} \cap \overline{(X - E)} \neq \emptyset$, es decir $\overline{K} - E \neq \emptyset$. Si E es cerrado entonces $K \cap \overline{(X - E)} \neq \emptyset$.*

Teorema 1.4.6. *Sean X es un continuo y $A \subseteq B$ dos subcontinuos propios de X. Si K es componente de $X - B$ tal que $\overline{K} - K \subseteq A$, entonces $K \cup A$ es un continuo.*

Demostración. Por el teorema 1.4.5 $\overline{K} \cap B \neq \emptyset$, así dado que $K \cap B = \emptyset$ y $\overline{K} - K \subseteq A$, $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto $K \cup A$ es un continuo. □

Corolario 1.4.7. *Si X es un continuo y $A, B \in C(X) - \{X\}$ cumplen que $A \subseteq B$, entonces para cada componente K de $X - B$ que cumple que $\overline{K} - K \subseteq A$, se tiene que $K \cup A \in C(X)$.*

Demostración. Como K es componente del abierto $X - B$, entonces $\overline{K} \cap B \neq \emptyset$.
Tambien $\overline{K} - K \subseteq A \subseteq B$.
Sea $p \in \overline{K} \cap B$. En este caso $p \notin K$, y así $p \in \overline{K} - K$ y por tanto $p \in \overline{K} \cap A$. De esta forma $\overline{K} \cup A$ es un continuo.
Por otra parte,

$$\overline{K} \cup A = (\overline{K} - K) \cup (K \cup A) \subseteq A \cup K \cup A = K \cup A,$$

es decir $A \cup \overline{K} = A \cup K$, concluyendo que $A \cup K$ es un continuo. □

Finalizamos con un resultado que será usado de forma recurrente en el resto del escrito.

Corolario 1.4.8 (De las orejas)**.** *Si X es un continuo y $A \in C(X) - \{X\}$, entonces para cada componente K de $X - A$, $K \cup A \in C(X)$.*

Demostración. Se tiene por un lado que K es cerrado en $X - A$, y además $\overline{K} - K \subseteq A$. Lo último pues $K = \overline{K} \cap (X - A)$ y así, si $x \notin K$ se tiene que $x \notin \overline{K}$ o bien $x \notin X - A$, es decir, si $x \in \overline{K} - K$, $x \notin X - A$, que es lo mismo que $x \in A$. Tomando $B = A$ del corolario 1.4.7 se sigue que $A \cup K \in C(X)$. □

Capítulo 2

Funciones de Whitney

En este capítulo estudiaremos los hiperespacios de un continuo y este estudio se realiza de manera similar al de las superficies usando conjuntos de nivel en cursos de cálculo. Para esto requerimos de un tipo especial de funciones que midan de alguna manera el "tamaño" de un elemento en 2^X, estas funciones son conocidas como funciones de Whitney.

Definición 2.0.1. *Si (X, d) es un continuo y $H(X)$ es un hiperespacio de X, llamaremos* ***función de Whitney para H(X)*** *a una función $\mu : H(X) \to [0, +\infty)$ continua tal que:*

1) $\mu(A) = 0$ si y solo si $A \in F_1(X) \cap H(X)$, donde $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$

2) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$,

3) $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subsetneq B$.

Veamos un primer ejemplo sencillo.
Ejemplo: Si $X = [0, 1]$, entonces $C(X) = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Sea $\mu : C(X) \to [0, +\infty)$, definida por $\mu([a, b]) = b - a$, la cual es continua, para ver esto, sea $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a $[a, b]$. Notemos que $\lim_{n\to\infty} \mu([a_b, b_n]) = \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b = \mu([a - b])$ lo que concluye la continuidad de μ.
Observemos que

1) $\mu([a, b]) = 0$ si y solo si $b = a$, es decir, $[a, b] \in F_1(X)$.

2) Si $[a, b] \subset [c, d]$ entonces $b - a \leq d - c$, con lo cual $\mu([a, b]) \leq \mu([c, d])$.

3) Si ahora $[a, b] \subsetneq [c, d]$ entonces $b - a < d - c$, así que $\mu([a, b]) < \mu([c, d])$.

De los puntos 1), 2) y 3) se sigue que μ es una función de Whitney para $C(X)$.

2.1. Existencia de funciones de Whitney

El principal objetivo de esta sección es mostar que, para cada continuo X, existe una función de Whitney para 2^X; antes de esto mostraremos dos lemas que serán de utilidad para dicho fin.

Lema 2.1.1. *Si X es un continuo entonces $h : 2^X \to \mathbb{R}$ dada por $h(A) = diam(A) = sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$ es una función continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Mostraremos que si $A, B \in 2^X$, entonces $|h(A) - h(B)| < 2\epsilon$ si $H(A, B) < \epsilon$, esto concluirá que h es uniformemente continua.
Supongamos que $A, B \in 2^X$ y que $H(A, B) < \epsilon$. Como A es compacto, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $h(A) = diam(A) = d(a_1, a_2)$. Por otra parte, ya que $A \subset N(\epsilon, B)$ existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $d(a_1, b_1) < \epsilon$ y $d(a_2, b_2) < \epsilon$. Por tanto $h(A) = d(a_1, a_2) \leq d(a_1, b_1) + d(b_1, b_2) + d(b_2, a_2) < \epsilon + \epsilon + h(B)$.
Así que $h(A) - h(B) < 2\epsilon$.
De forma similar se muestra que $h(B) - h(A) < 2\epsilon$ y por tanto $|h(A) - h(B)| < 2\epsilon$ □

Observación 2.1.2. *Sea $\mu : 2^X \to [0, +\infty)$ una función de Whitney.*

- *Si $H(X) \subseteq 2^X$ entonces, $\mu|_{H(X)} : H(X) \to [0, +\infty)$ es una función de Whitney para $H(X)$. Por tanto basta con encontrar una función de Whitney para 2^X para tener funciones de Whitney en cada hiperespacio $H(X)$ de X con $H(X) \subset 2^X$.*
- *Como μ es continua y 2^X es compacto, entonces $\mu(2^X) \subseteq [0, \mu(X)]$ y como X tiene más de un punto $\mu(X) > 0$.*
- *Si $\lambda = \frac{1}{\mu(X)}$, entonces la función $\widehat{\mu} : 2^X \to [0, 1]$ dada por $\widehat{\mu}(A) = \lambda\mu(A)$, para todo $A \in 2^X$, es una función de Whitney y $\widehat{\mu}(X) = 1$.*
- *Por el punto anterior, en la definición de función de Whitney, agregaremos la condición de que $\mu(X) = 1$.*
- *Si X es un continuo, y dado que 2^X es conexo (vease por ejemplo [3, Corolario 1.8.9, p. 62]), como $\mu(2^X) \subseteq [0, \mu(X)] = [0, 1]$, entonces $\mu(2^X) = [0, 1]$.*

Lema 2.1.3. *Si $f : X \to Y$ es una función continua y supreyectiva entre continuos, entonces $2^f : 2^X \to 2^Y$ dada por $2^f(A) = f(A)$, para todo $A \in 2^X$, es continua.*

Demostración. Si $A \in 2^X$, entonces A es compacto y como f es continua $f(A)$ es compacto en Y y como Y es métrico $f(A) \in 2^Y$. Por tanto 2^f es una función bien definida. Consideremos $\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle$ un básico en la topología de Vietoris para 2^Y, mostraremos que su preimagen bajo 2^f es un abierto en 2^X, esto último se sigue de la siguiente afirmación ya que f es continua,

Afirmación: $(2^f)^{-1}(\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle) = \langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), ..., f^{-1}(U_n) \rangle$.

Sea $A \in (2^f)^{-1}(\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle)$.
En este caso, $(2^f)(A) = f(A) \in \langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$, es decir, $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $f(A) \cap U_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)$, por otra parte, usando que $f(A) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $x_i \in A$ tal que $f(x_i) = y_i \in f(A) \cap U_i$, así que $x_i \in A \cap f^{-1}(U_i)$. Por tanto $A \in \langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_n)\rangle$.

Supongamos ahora que $A \in \langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_n)\rangle$, en tal caso se cumple que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)$ y $A \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Usando que f es suprayectiva se tiene que $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, y también $f(A) \cap U_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por lo que $f(A) = 2^f(A) \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ y por lo tanto $A \in (2^f)^{-1}(\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle)$.

$\square$

El siguiente teorema mostrará la existencia de funciones de Whitney, siendo este uno de los principales objetivos de esta sección.

Teorema 2.1.4. *Si (X, d) es un continuo entonces existe $\mu : 2^X \to [0, 1]$ una función de Whitney.*

Demostración. Sea $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso y numerable de X, donde $z_n \neq z_m$ si $n \neq m$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + d(x, z_n)}$ para todo $x \in X$. Observe que cada función f_n es continua.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $W_n : 2^X \to \mathbb{R}$ dada por $W_n(A) = diam(f_n(A))$ para cada $A \in 2^X$. Como $W_n(A) = diam(2^{f_n}(A))$, por lo que W_n es una función continua al ser una composición de funciones continuas.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $A \in 2^X$, $0 \leq W_n(A) \leq 1$. Sea $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$, dada por $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{W_n(A)}{2^n}$, para todo $A \in 2^X$.
Como $0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{W_n(A)}{2^n} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1$ entonces $\mu(A) \in \mathbb{R}$, así que μ es una función bien definida.

Como $\left|\dfrac{W_n(A)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$, para todo $A \in 2^X$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ converge, entonces $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ es continua (vease [6, Teorema 7.10, p.148] y [6, Teorema 7.12, p.150]).
Mostraremos que μ es en efecto una función de Whitney.

I) Si $A \in F_1(X)$ entonces $W_n(A) = diam(f_n(A)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que $\mu(A) = 0$.
Si ahora $A \notin F_1(X)$, entonces existen $a, b \in A$ con $a \neq b$, tomando $z_n \notin \{a, b\}$, tenemos que $0 < diam(f_n(\{a, b\})) \leq diam((f_n(A)) = W_n(A)$. Concluyendo que $\mu(A) > 0$.

II) Sean $A, B \in 2^X$, con $A \subseteq B$, entonces $diam(f_n(A)) \leq diam(f_n(B))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $W_n(A) \leq W_n(B)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(A)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(B)}{2^n} \leq \mu(B).$$

III) Supongamos que $A \subsetneq B$. Como $A \subseteq B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$. Para concluir que $\mu(A) < \mu(B)$, basta con mostrar que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $W_i(A) < W_i(B)$.
Sean $p \in B - A$ y $r = \dfrac{d(p, A)}{2} > 0$. Como $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso, existe $z_i \in B_r(p)$.
Ya que $d(p, z_r) < r$, entonces $f_i(p) = \dfrac{1}{1 + d(p, z_i)} > \dfrac{1}{1 + r}$. Por otra parte, $d(z_i, A) > r$, con esto, para cada $a \in A$, $f_i(a) = \dfrac{1}{1 + d(a, z_i)} < \dfrac{1}{1 + r}$.
Es decir, $f_i(A) \subseteq \left[0, \dfrac{1}{1+r}\right)$ y $\dfrac{1}{1+r} < f_i(p)$, con lo cual $W_i(A) = diam(f_i(A)) < \dfrac{1}{1+r} < f_i(p)$, y como $f_i(A) \subseteq f_i(B)$, tenemos que $W_i(A) = diam(f_i(A)) < diam(f_i(B)) = W_i(B)$.

$\square$

Aunque el teorema anterior nos muestra como construir una función de Whitney, esta manera no es única, para evidenciar esto daremos otra construcción de una función de Whitney.

Otra demostación del teorema 2.1.4. Como X es compacto podemos suponer que $d(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$. Usando nuevamente la compacidad de X, existe $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso y numerable de X.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $W_n : 2^X \to [0, 1]$ dada por

$$W_n(A) = \max\{d(p_n, a) : a \in A\} - \min\{d(p_n, a) : a \in A\},$$

para todo $A \in 2^X$. Geométricamente $W_n(A)$ es el ancho del anillo más pequeño con centro en p_n y que contiene a A.

Afirmación: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $W_n : 2^X \to [0, 1]$ es continua.
Sea $\epsilon > 0$ y fijemos $n \in \mathbb{N}$. Sea $A, B \in 2^X$ son tales que $H(A, B) < \epsilon$, como A es compacto existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $W_n(A) = d(a_1, p_n) - d(a_2, p_n)$, es decir

$\max\{d(a, p_n) : a \in A\} = d(a_2, p_n)$ y $\min\{d(a, p_n) : a \in A\} = d(a_1, p_n)$.
Como $A \subseteq N(\epsilon, B)$, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $d(a_1, b_1) < \epsilon$ y $d(a_2, b_2) < \epsilon$, con esto,

$$\min\{d(p_n, a) : a \in A\} = d(a_2, p_n) \leq d(a_2, b_2) + d(b_2, p_n) < \epsilon + \max\{d(p_n, b) : b \in B\}.$$

Por tanto,

$$\min\{d(p_n, b) : b \in A\} \leq d(p_n, b_1) \leq d(p_n, a_1) + d(a_1, b_1) < \min\{d(p_n, a) : a \in A\} + \epsilon.$$

Lo anterior concluye que $\min\{d(p_n, b) : b \in B\} - \min\{d(p_n, a) : a \in A\} < \epsilon$. Con esto

$$W_n(A) - W_n(B) < 2\epsilon.$$

De forma análoga, $W_n(A) - W_n(B) < 2\epsilon$, es decir, $|W_n(A) - W_n(B)| < 2\epsilon$. Esto concluye que W_n es uniformemente continua y así continua.

Por otra parte, notemos que $W_n(A) \in [0, 1]$ para todo $A \in 2^X$. Sea $\mu : 2^X \to [0, 1]$ dada por $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(A)}{2^n}$, para todo $A \in 2^X$. Por el criterio de Weirstrass, μ es continua (vease [6, Teorema 7.10, p.148] y [6, Teorema 7.12, p.150]).

Mostraremos en las siguientes afirmaciones que μ satisface las condiciones para ser una función de Whitney.

Afirmación: $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$.
En efecto para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $W_n(\{x\}) = \max\{d(x, p_n)\} - \min\{d(p_n, x)\} = 0$, y por tanto $\mu(\{x\}) = 0$.

Afirmación: Si $A, B \in 2^X$ y $A \subseteq B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
Notese que, si cada $n \in \mathbb{N}$, $W_n(A) \leq W_n(B)$. Así que

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(A)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(B)}{2^n} = \mu(B).$$

Afirmación: Si $A, B \in 2^X$ y $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Por la afirmación anterior basta con encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $W_n(A) < W_n(B)$. Sea $b_0 \in B - A$, como A es cerrado, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(b_0) \cap A = \emptyset$. Como $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p_m \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(b_0)$. Con esto $d(p_m, a) \geq \frac{\epsilon}{2}$, para todo $a \in A$. Así que, $\frac{\epsilon}{2} \leq \min\{d(p_a, a) : a \in A\}$ y por otra parte $\min\{d(p_m, b) : b \in B\} \leq d(p_m, b_0) < \frac{\epsilon}{2}$.
Además, también es cierto que $\max\{d(p_m, a) : a \in A\} \leq \max\{d(p_m, b) : b \in B\}$. Con esto $W_n(A) < W_n(B)$ y así $\mu(A) < \mu(B)$.

2.2. Arcos ordenados

Una de las herramientas mas fuertes que tienen los hiperespacios de continuos, 2^X y $C(X)$, es la arco conexidad. En esta sección mostraremos los resultados que garantizan la existencia de un tipo especial de arcos (arcos ordenados) en el hiperespacio 2^X.

Definición 2.2.1. *Una familia no vacia de conjuntos $\mathcal{H}$ se llama* ***red*** *si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$, se cumple que $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$. Si (X, d) es un continuo y $\mathcal{H}(X) \subseteq 2^X$, se dice que $\mathcal{H}(X)$ es* ***un arco ordenado*** *si $\mathcal{H}(X)$ es un arco y $\mathcal{H}(X)$ es una red.*

Proposición 2.2.2. *Si (X, d) es un continuo y $\mathcal{H}(X) \subset 2^X$ entonces para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ se cumple que, si N es una red que es un subespacio compacto de $\mathcal{H}(X)$, entonces N es homeomoerfo a $\mu(N)$.*

Demostración. Consideremos a $\mu|_N : N \to \mu(N)$. Como μ es continua, $\mu|_N$ es continua.
Afirmación: $\mu|_N$ es inyectiva.
Sean $A, B \in N$ tales que $\mu|_N(A) = \mu|_N(B)$. Como N es red, podemos suponer que $A \subset B$ y como $\mu(A) = \mu(B)$, entonces $A = B$.
Ahora $\mu_N : N \to \mu(N)$ es continua, biyectiva, con dominio compacto N e imagen $\mu(N) \subseteq [0, 1]$ un espacio métrico, por lo que μ_N es un homeomorfismo. □

Definición 2.2.3. *Si $A_0, A_1 \in 2^X$, se dice que* ***una red $\mathcal{H}$ va de A_0 hasta A_1*** *si para todo $H \in \mathcal{H}$, $A_0 \subseteq H \subseteq A_1$ y $A_0, A_1 \in \mathcal{H}$.*

El siguiente resultado provee de una condición suficiente para que una red en $C(X)$ sea compacta.

Lema 2.2.4. *Sean (X, d) un continuo y $A_0, A_1 \in C(X)$ con $A_0 \subseteq A_1$. Si M es una red maximal respecto a la inclusión en $C(X)$ tal que M va de A_0 hasta A_1 entonces M es compacto.*

Demostración. Como $M \subseteq C(X)$ y $C(X)$ es compacto, basta con mostrar que M es un cerrado en $C(X)$.
Sea $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $B_i \in M$, para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\lim_{i \to \infty} B_i = B \in C(X)$.
Mostraremos que $B \in M$, para esto veamos que $M \cup \{B\}$ es una red desde A_0 hasta que A_1.
Sea $C \in M$. Como M es red, para cada $i \in \mathbb{N}$, se cumple que $B_i \subseteq C$ ó $C \subseteq B_i$. Tenemos dos casos:

a) $B_i \subseteq C$ para una infinidad de índices i. En este caso $\lim_{i \to \infty} B_i \subseteq C$ y así $B \subseteq C$.

b) $C \subseteq B_i$ para una infinidad de índices i. En este otro caso $C \subseteq \lim_{i \to \infty} B_i = B$.

En cualquier caso, concluimos que $M \cup \{B\}$ es un red desde A_0 hasta A_1. La maximalidad de M implica que $M \cup \{B\} \subseteq M$. Por tanto $B \in M$. □

Lema 2.2.5. *Sean (X, d) un continuo y $A_0, A_1 \in C(X)$ con $A_0 \subsetneq A_1$, entonces toda red maximal $\mathcal{H}$ en $C(X)$ de A_0 hasta A_1 es un arco ordenado, con extremos A_0 y A_1.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y sean $t_0 = \mu(A_0)$ y $t_1 = \mu(A_1)$. Como $A_0 \subseteq A_1$ se tiene que $\mu(A_0) < \mu(A_1)$, con lo cual se tiene que $t_0 < t_1$, y como para cada $H \in \mathcal{H}$, $A_0 \subseteq H \subseteq A_1$, entonces $\mu(\mathcal{H}) \subseteq [t_0, t_1]$.
Por el lema 2.2.4, $\mathcal{H}$ es compacto y por la proposición 2.2.2, $\mu|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mu(\mathcal{H})$ es un homeomorfismo. Basta mostrar que $\mu(\mathcal{H}) = [t_0, t_1]$.
Por contradicción, supongamos que $\mu(\mathcal{H}) \subsetneq [t_0, t_1]$. Notemos que $t_0, t_1 \in \mu(\mathcal{H})$ y como $\mu(\mathcal{H})$ es compacto, existe $s_0, s_1 \in \mu(\mathcal{H})$ tales que $(s_0, s_1) \subseteq [t_0, t_1] - \mu(\mathcal{H})$.
Tomemos a $r_0 = \inf\{t \in \mu(\mathcal{H}) : s_0 < t\}$ y $r_1 = \sup\{t \in \mu(\mathcal{H}) : t < s_1\}$, ya que $\mu(\mathcal{H})$ es compacto, tenemos que $r_0, r_1 \in \mu(\mathcal{H})$ y $(r_0, r_1) \cap \mu(\mathcal{H}) = \emptyset$.
Sean $B_0, B_1 \in \mathcal{H}$ tales que $\mu(B_0) = r_0$ y $\mu(B_1) = r_1$. Como $\mathcal{H}$ es red, $B_0 \subsetneq B_1$. Por el teorema de Golpes en la Frontera I, existe $B \in C(X)$ tal que $B_0 \subsetneq B \subsetneq B_1$.

Afirmación: $\mathcal{H} \cup \{B\}$ es una red de A_0 hasta A_1.
Primero notemos que $A_0 \subseteq B_0 \subseteq B \subseteq B_1 \subseteq A_1$ y así $A_0 \subsetneq B \subsetneq A_1$. Sea $C \in \mathcal{H}$, entonces $\alpha = \mu(C) \in \mu(\mathcal{H}) \subseteq [t_0, t_1] - (r_0, r_1)$, con esto $\alpha \leq r_0$ ó $\alpha \geq r_1$. Si $\alpha \leq r_0$, $C \subseteq B_0 \subseteq B$ y, si $r_1 \leq \alpha$, $B \subseteq B_1 \subseteq C$, es decir $C \subseteq B$ ó $B \subseteq C$, por lo cual B se compara con los elementos de $\mathcal{H}$, así que $\mathcal{H} \cup \{B\}$ es una red.

De la afirmación anterior y ya que $\mathcal{H}$ es red máximal, se cumple que $B \in \mathcal{H}$. De este modo $\mu(B) \in (r_0, r_1) \cap \mu(\mathcal{H}) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mu(\mathcal{H}) = [t_0, t_1]$ □

Usaremos el siguiente reultado para concluir el corolario 2.2.7 que muestra la existencia de arcos ordenados. Para esto, primero recordemos que, si C es una colección de subconjuntos no vacíos, un elemento $F \in C$ es maximal en C, si ningún elemento de C contiene propiamente a F; un elemento $E \in C$ es minimal en C si ningún elemento de C esta contenido propiamente en E.

Teorema 2.2.6. *Sea X un espacio compacto. Si C es un subconjunto cerrado no vacío de 2^X, entonces hay un elemento maximal de C y hay un elemento minimal de C.*

El resultado anterior se puede consultar en [2, 13.11, p. 110].

Corolario 2.2.7. *Si (X, d) es un continuo, y $A_0, A_1 \in C(X)$, con $A_0 \subsetneq A_1$, entonces existe un arco ordenado $\mathcal{H}$ con extremo A_0 y A_1.*

Observación 2.2.8. *Un espacio topológico X es conexo por trayectorias si y solo si existe $p \in X$ tal que para todo $x \in X$, existe una función continua $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = p$. La ida es trivial. Para el regreso, si $x, y \in X$, por hipótesis existen dos funciones continuas $f, g : [0, 1] \to X$ tales que $f(0) = x$, $g(0) = y$, $f(1) = p = g(1)$. Definimos $h : [0, 1] \to X$, como*

$$h(x) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \\ g(2-2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Por el lema del pegado se puede ver que h es continua, y notemos que $h(0) = x$, $h(1) = y$.

Usando la observación anterior y tomando $A_1 = X$ en el corolario 2.2.7, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.2.9. *Si (X, d) es un continuo entonces $C(X)$ es conexo por trayectorias.*

El resultado anterior se extiende para el hiperespacio 2^X, nuevamente esto se logra usando la observación 2.2.8.

Teorema 2.2.10. *Si (X, d) es un continuo entonces $(2^X, \tau_H)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea $A \in 2^X$. Mostraremos que existe $f : [0,1] \to 2^X$ una función continua tal que $f(0) = A$ y $f(1) = X$.
Si $A = X$, tomamos la función constante $f([0,1]) = \{X\}$.
Supongamos que $A \subsetneq X$. Sea C una componente de A. Como C es cerrado en A, $C \in 2^X \cap C(X)$. Con esto $C \subsetneq X$ y $C, X \in C(X)$. Por el corolario 2.2.7, existe $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\alpha(0) = C$ y $\alpha(1) = X$.
Sea $f : [0,1] \to 2^X$ dada por $f(t) = A \cup \alpha(t)$, para todo $t \in [0,1]$. En este caso $f(0) = A \cup C = A$ y $f(1) = A \cup \alpha(1) = A \cup X = X$. Además, f esta bien definida pues la unión finita de cerrados en un cerrado. Resta ver que f es continua, para esto sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Para justificar lo sigiente se usara lo siguiente [2, Ejercicios 4.14 y 4.15, p.27].
Veremos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$. Para esto

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty}(A \cup \alpha(t_n)) = \limsup(A \cup \alpha(t_n)) =$$
$$= A \cup (\limsup \alpha(t_n)) = A \cup \lim_{n\to\infty} \alpha(t_n) = A \cup \alpha(t) = f(t).$$

□

Definición 2.2.11. *Un arco ordenado en el hiperespacio $\mathcal{H}(X)$, es un arco $\alpha \subset \mathcal{H}(X)$ tal que existe $f : [0,1] \to \alpha$ un homeomorfismo tal que $f(t) \subsetneq f(s)$, si $0 \leq t < s \leq 1$ como todo arco, α tiene dos extremos, A_0 y A_1. Diremos que α es* ***un arco ordenado de*** *A_0* ***a*** *A_1, si $A_0 \subsetneq A_1$.*

Lo que hemos probado anteriormente, justifica que, si $A_0, A_1 \in C(X)$ y $A_0 \neq A_1$, entonces existe $\alpha \subset C(X)$ un arco ordenado de A_0 a A_1, si $A_0 \subseteq A_1$. Mostraremos una versión similar para el caso de 2^X.

Lema 2.2.12. *Sean (X, d) un continuo y $M_0, M_1 \in 2^X$, tales que $M_0 \subseteq M_1$ y $M_0 \neq M_1$. Si cada componente de M_1 intersecta a alguna componente de M_0 entonces existe $C \in 2^X$ tal que $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$, y cada componente de C intersecta a M_0.*

Demostración. Por hipótesis podemos tomar $p \in M_1 - M_0$. Sea K_1 la componente de p en M_1. En este caso $K_1 \cap M_0 \neq \emptyset$, con esto existe K_0 una componente de M_0 tal que $K_0 \subsetneq K_1$. Como $p \in K_1 - K_0, K_0 \subsetneq K_1$.
Por el corolario 1.4.3 existe $B \in C(K_1)$ tal que $K_0 \subsetneq B \subsetneq K_1 - \{p\}$. Sea $C = M_0 \cup B$, es claro que $C \in 2^X$, además $p \notin M_0 \cup B$, y ya que $B \subseteq K_1 \subseteq M_1$, entonces $C = M_0 \cup B \subsetneq M_1$.
Es claro que $M_0 \subseteq C$.
Sea $q \in B - K_0$, con esto $q \in C$. Si suponemos que $q \in M_0$, existe $D \subseteq M_0$ la componente de M_0 que contine a q, al ser D un conjunto conexo, $C \subseteq K_0$, lo cual es una contradicción. Por tanto $q \in B - M_0$, y así $M_0 \subsetneq M_0 \cup B = C$.
Si K es la componente de C tal que $B \subseteq K$, entonces $\emptyset \neq K_0 \subseteq B \cap M_0 \subseteq K \cap M_0$, por lo cual cada componente de C intersecta a M_0. □

Veamos una caracterización de los arcos ordenados en 2^X.

Teorema 2.2.13. *Sean (X, d) un continuo y $A_0, A_1 \in 2^X$, con $A_0 \neq A_1$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

I) Existe un arco ordenado α en 2^X de A_0 a A_1.

II) $A_0 \subseteq A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Demostración. Veamos primero que $I) \Rightarrow II)$.
Sea α un arco ordenado en 2^X de A_0 a A_1. Por contradicción, supongamos que existe K componente de A_1 tal que $K \cap A_0 = \emptyset$.
Si $C \subseteq A_1$ es conexo y $C \cap K \neq \emptyset$, entonces $C \subseteq K$ y ya que $K \cap A_0 = \emptyset$, concluimos que $C \cap A_0 = \emptyset$, es decir, ningún subespacio conexo de A_1 intersecta a K y A_0 de manera simultanea. Por el teorema del Cable Cortado existen E y F dos cerrados de A_1 tales que $A_1 = E \cup F$, $E \cap F = \emptyset$, $K \subseteq E$ y $A_0 \subseteq F$.
Sean

$$\mathcal{F} = \{A \in \alpha : A \subseteq F\} = \alpha \cap \{A \in 2^X : A \subseteq F\},$$

$$\mathcal{E} = \{A \in \alpha : A \cap E \neq \emptyset\} = \alpha \cap \{A \in 2^X : A \cap E \neq \emptyset\}.$$

Si $A \in \alpha$, $A_0 \subseteq A \subseteq A_1$, así $A \subseteq E \cup F$. Si $A \cap E \neq \emptyset$ entonces $A \in \mathcal{E}$, en caso contrario $A \subset F$, y entonces $A \in \mathcal{F}$. Esto muestra que $\alpha = \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$.

También $A_0 \in \mathcal{F}$, $A_1 \in \mathcal{E}$, y así $\mathcal{F} \neq \emptyset \neq \mathcal{E}$, por otra parte, si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A \subseteq F$ y como $E \cap F = \emptyset$, $A \notin \mathcal{E}$, es decir $\mathcal{F} \cap \mathcal{E} = \emptyset$, con lo anterior, α se descompone como la unión de dos cerrados ajenos y no vacios, lo cual no puede ser pues α es conexo, generando esto la contradicción. Por lo tanto cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Veamos ahora que $II) \Rightarrow I)$. Supongamos que $A_0 \subseteq A_1$, $A_0 \neq A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0. Sea Γ la familia de todos los conjuntos $N' \subseteq 2^X$ tales que N' es una red compacta en 2^X de A_0 hasta A_1 y si $N \in N'$, entonces cada componente de N intersecta a A_0.
Por hipótesis es claro que $\{A_0, A_1\} \subset \Gamma$. La familia Γ puede ser ordenada parcialmente

con la contención usual de conjuntos. Por el principio Maximal de Hausdorff, existe un elemento maximal en Γ digamos M'.

Afirmación: M' es un arco ordenado desde A_0 hasta A_1. Al ser M' una red, basta con mostrar que M' es un arco. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Por la proposición 2.2.2, $\mu|_{M'} : M' \to [\mu(A_0), \mu(A_1)]$ es un homeomorfismo sobre su imagen. Para terminar la afirmación, resta mostrar que $\mu(M') = [\mu(A_0), \mu(A_1)]$.
Por contradicción, supongamos que $\mu(M') \subsetneq [\mu(A_0), \mu(A_1)]$. Por la compacidad de $\mu(M')$ existen $t_0 < t_1$ tales que $t_0, t_1 \in \mu(M')$ y $(t_0, t_1) \cap \mu(M') = \emptyset$. Con esto, existen $B_0, B_1 \in M'$ tales que $t_0 = \mu(B_0) < \mu(B_1) = t_1$.
Por hipotesis, cada componente de B_1, intersecta a A_0, como $A_0 \subseteq B_0$, también intersecta a B_0. Por el lema 2.2.12 existe, $C \in 2^X$ tal que $B_0 \subsetneq C \subsetneq B_1$ y cada componente de C intersecta a B_0. En particular $C \notin M'$.
Sea K una componente de C. Si K_1 es una componente de B_0 tal que $K_1 \cap K \neq \emptyset$ entonces $K_1 \subseteq K$. Por otra parte $K_1 \cap A_0 \neq \emptyset$, por tanto $K \cap A_0 \neq \emptyset$. Esto muestra que $M' \cup \{C\} \in \Gamma$ y como M' es maximal en Γ, concluimos que $C \in M'$, generando una contradicción.
Por lo tanto $\mu(M') = [\mu(A_0), \mu(A_1)]$. □

El siguiente resultado muestra que si un arco ordenado en 2^X inicia en un elemento de $C(X)$ entonces el arco se mantiene todo el tiempo en $C(X)$.

Teorema 2.2.14. *Si (X,d) es un continuo y $A_0 \in C(X)$, entonces para cada arco ordenado de A_0 hasta $A \in 2^X$, α cumple que $\alpha \subseteq C(X)$.*

Demostración. Sea $B \in \alpha$. Supongamos que $A_0 \neq B$, en otro caso no hay nada que probar. Con esto $A_0 \subseteq B$ y $A_0 \neq B$. Si $h : [0,1] \to \alpha$ es un homeomorfismo tal que $h(0) = A_0$ y $h(1) = A$, entonces existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $h(t_0) = B$.
De esto $h|_{[0,t_0]} : [0, t_0] \to h([0, t_0])$ es un homeomorfismo tal que $h(0) = A_0$, $h(t_0) = B$. Si $s < t$, $s, t \in [0, t_0]$, entonces $h(s) \subsetneq h(t)$, es decir $h([0, t_0])$ es un arco ordenado de A_0 hasta B.
Por el resultado anterior, cada componente de B intersecta a A_0. Sea C una componente de B. Con esto $A_0 \cap C \neq \emptyset$ y como $A_0 \subsetneq B$, usando que $A_0 \in C(X)$, concluimos que $A_0 \subseteq C$. Esto concluye que cada componente de B, contiene a A_0, por tanto B solo puede tener una componente, es decir $B \in C(X)$. □

Definición 2.2.15. *Un continuo X es* ***localmente arco conexo*** *en $p \in X$, si para todo abierto U de X tal que $p \in U$, existe un abierto V tal que $p \in V$, $V \subseteq U$ tal que para todo $q \in V$ existe una función continua $f : [0,1] \to V$ con $f(0) = p$ y $f(1) = q$.*

Teorema 2.2.16. *Si (X,d) es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son localmente arco conexo en X.*

Demostración. Sea U un abierto en 2^X tal que $X \in U$. Con esto, existe $\epsilon > 0$ tal que si $A \in 2^X$ y $H_d(A, X) < \epsilon$ entonces $A \in U$.

Sea $V = \{A \in 2^X : H_d(A, X) < \epsilon\}$. En este caso V es un abierto en 2^X y $X \in V \subseteq U$. Sea $A \in V - \{X\}$. En este caso $A \subsetneq X$ y la única componante de X, que es X, intersecta a A. De este modo, existe un arco ordeando $\alpha \subseteq 2^X$ desde A hasta X.
Por otra parte, si $B \in \alpha$, entonces $A \subseteq B \subsetneq X$ y así $H_d(B, X) \leq H_d(A, X) < \epsilon$, es decir $\alpha \subseteq V$.
La prueba para $C(X)$ es análoga, usando que, si $A \in C(X)$ entonces $\alpha \subseteq C(X)$. □

Definición 2.2.17. *Sea X un continuo arco conexo. Diremos que X es* ***únicamente arco conexo****, si para todo $p, q \in X$ con $p \neq q$, existe un único arco en X con extremos p y q.*

Una pregunta natural es ¿bajo que condiciones alguno de los hiperespacios 2^X o $C(X)$ son únicamente arco conexos?. La respuesta para el hiperespacio $C(X)$ se relaciona con el siguiente concepto.

Definición 2.2.18. *Un continuo X se dice* ***hereditariamente indescomponible*** *si para cada $A, B \in C(X)$ con $A \cap B \neq \emptyset$, ó bien $A \subseteq B$ ó bien $B \subseteq A$.*

En el siguiente capítulo abordaremos el concepto de continuo indescomponible (continuo que no se puede escribir como la unión de dos de sus subcontinos propios) de manera más amplia, y resulta que un continuo es hereditariamente indescomponible si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible, la prueba de esto último es sencilla. De momento solo requerimos del siguiente resultado sobre continuos indescomponibles.

Lema 2.2.19. *Si X es un continuo indescomponible y $\mathcal{A}$ un arco en $C(X)$ tal que $\bigcup \mathcal{A} = X$, entonces $X \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $h : [0,1] \to C(X)$ un encaje tal que $h([0,1]) = \mathcal{A}$, con esto $\bigcup h([0,1]) = X$. Sea
$$t_0 = \text{ínf}\{t \in [0,1] : \bigcup h([0,t]) = X\}.$$
Si $t_0 < t$, entonces $\bigcup h([0,t]) = X$. Como h es continua, se tiene que $\bigcup h([0,t_0]) = X$.
Si $t_0 = 0$, entonces $h(0) = h(t_0) = X$ y así $X \in \mathcal{A}$, concluyendo la prueba. Supongamos entonces que $0 < t_0$. Para cada $t \in [0, t_0]$, sean $A_t = \bigcup h([0,t])$ y $B_t = \bigcup h([t, t_0])$. Así $A_t \cup B_t = X$. Como además $A_t, B_t \in C(X)$ y si $t < t_0$, entonces $A_t \neq X$, ya que X es indescomponible $B_t = X$. Por lo que $B_{t_0} = X$, y ya que $B_{t_0} = h(t_0)$, concluimos que $X = h(t_0) \in \mathcal{A}$. □

Proposición 2.2.20. *Si X es hereditariamente indescomponible, $A \subseteq B$, $A \neq B$ y $\mathcal{A}$ es un arco en $C(X)$ con extremos A y B, entonces $\mathcal{A}$ es un arco ordenado.*

Demostración. Para cada $A_0 \in \mathcal{A} - \{A\}$, sea $\mathcal{A}(A, A_0)$ el subarco de $\mathcal{A}$ con extremos A y A_0. Denotemos por $\mathcal{A}(A, A) = \{A\}$. Sea $\alpha = \{\cup \mathcal{A}(A, A_0) : A_0 \in \mathcal{A}\}$.
Mostraremos que :

1. α es un continuo.

2. $A, B \in \alpha$.

3. $\alpha = \mathcal{A}$.

4. $\mathcal{A}$ es un arco ordenado con extremos A y B.

Veamos la prueba de cada uno de los puntos anteriores.

1. Consideremos la función $f : \mathcal{A} \to C(\mathcal{A})$ dada por $f(A_0) = \mathcal{A}(A, A_0)$. Ya que f es continua y $U : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $U(\mathcal{C}) = \cup\mathcal{C}$ es también continua, $U \circ f$ es también es continua. Con esto $(U \circ f)(\mathcal{A})$ es un continuo, ya que $(U \circ f)(\mathcal{A}) = \alpha$, α es continuo.

2. Es claro que $A \in \alpha$, pues $\{A\} = \cup\mathcal{A}(A, A)$. Por otra parte, definamos
$$N = \{A_0 \in \mathcal{A} : B \subseteq \cup\mathcal{A}(A, A_0)\}$$
y
$$M = \{A_0 \in \mathcal{A} : \cup\mathcal{A}(A, A_0) \subseteq B\}.$$
Observemos que $B \in N$ y $A \in M$, así que $N \neq \emptyset \neq M$. Tambien notemos que M, N son cerrados.
Afirmación: $\mathcal{A} = M \cup N$.
Sean $A_0 \in \mathcal{A}$ y $Z = \cup\mathcal{A}(A, A_0)$, en este caso $Z \in C(X)$, por otra parte $A \subseteq Z$, así que $Z \cap B \neq \emptyset$. Como X es hereditariamente indescomponible $B \subseteq \cup\mathcal{A}(A, A_0)$ o bien $\cup\mathcal{A}(A, A_0) \subseteq B$. Por tanto $A_0 \in M \cup N$.
Como $\mathcal{A}$ es conexo, existe $A_0 \in N \cap M$, es decir $B = \cup\mathcal{A}(A, A_0)$. Lo cual concluye que $B = \alpha$.

3. Para mostrar que $\alpha = \mathcal{A}$, basta con mostrar que $\alpha \subseteq \mathcal{A}$, pues si $\alpha \subseteq \mathcal{A}$, entonces al ser α un subcontinuo del arco $\mathcal{A}$ y tener los mismos extremos se concluiria que $\alpha = \mathcal{A}$.
Sea $Y = \cup\mathcal{A}(A, A_0) \in \alpha$, donde $A_0 \in \mathcal{A}$. Como Y es un subcontinuo de X, Y es indescomponible, y ya que $\mathcal{A}(A, A_0)$ es un arco contenido en Y, tal que $\cup\mathcal{A}(A, A_0) = Y$, por el lema 2.2.19 concluimos que $Y \in \mathcal{A}(A, A_0) \subseteq \mathcal{A}$, es decir $Y \in \mathcal{A}$.

4. Como α es claramente una red y $\alpha = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ es una red en $C(X)$, por tanto $\mathcal{A}$ es un arco ordenado.

□

Proposición 2.2.21. *Sea (X, d) un continuo hereditariamente indescomponible y $A_0, A_1 \in C(X)$ con $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Si $\mathcal{A}$ es un arco en $C(X)$ con extremos A_0 y A_1, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ donde $\mathcal{A}_0$ es un arco ordenado de A_0 hasta $\cup\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_1$ es un arco ordenado de A_1 hasta $\cup\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $Y = \cup\mathcal{A}$. En este caso Y es un continuo indescomponible. Tambien $\mathcal{A}_0 \subseteq Y$ y $A_0 \neq Y$. Como $\cup\mathcal{A} = Y$, $Y \in \mathcal{A}$.
Además $Y \notin \{A_0, A_1\}$ y así $\mathcal{A}$ es la unión de dos arcos $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ con extremos A_0, Y, y, A_1, Y, respectivamente. Como $A_0 \subsetneq Y$ y $\mathcal{A}_0$ es un arco con extremos A_0 y Y, por el resultado anterior se concluye que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado. Similarmente $\mathcal{A}_1$ es un arco ordenado. □

Lema 2.2.22. *Si (X, d) es hereditariamente indescomponible y $\mu : C(X) \to [0, 1]$ es una función de Whitney, entonces para cada $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $\mu(A) = \mu(B)$ se cumple que $A = B$.*

Demostración. Sean $A, B \in C(X)$ tales que $\mu(A) = \mu(B)$. Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces por definición de continuo hereditariamente indescomponible, $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$ y ya que $\mu(A) = \mu(B)$, concluimos que $A = B$. □

Proposición 2.2.23. *Si (X, d) es un continuo hereditariamente indescomponible, $A, B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$, entonces existe uno y solo un arco en $C(X)$ con extremos A y B.*

Demostración. Como $A \subseteq B$ y $A \neq B$, existe un arco ordenado α en $C(X)$ con extremos A y B. Veamos que α es único.
Sea β un arco en $C(X)$ con extremos A y B. Verificaremos que $\beta = \alpha$.
Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Como X es hereditariamente indescomponible, β es un arco ordenado. Con esto $\mu(\alpha) = [\mu(A), \mu(B)] = \mu(\beta)$. Si $K \in \beta$, existe $L \in \alpha$ tal que $\mu(K) = \mu(L)$, y ya que $A \subseteq K \cap L$, entonces $K = L$. Por tanto $K \in \alpha$, es decir $\beta \subseteq \alpha$. Análogamente, se verifica que $\alpha \subseteq \beta$.
Por lo cual $\beta = \alpha$ □

Proposición 2.2.24. *Si (X, d) es un continuo hereditariamente indescomponible, $A, B \in C(X)$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces existe uno y solo un arco en $C(X)$ con extremos A y B.*

Demostración. Sea α un arco en $C(X)$ con extremos A y B, el cual existe pues $C(X)$ es arco conexo. Por la proposición 2.2.21, $\alpha = \alpha_0 \cup \alpha_1$ donde α_0 es un arco ordenado de A hasta $\cup\alpha$ y α_1 es un arco ordenado desde B hasta $\cup\alpha$.
Si β fuese otro arco en $C(X)$ con extremos A y B, pasa algo análogo, es decir $\beta = \beta_0 \cup \beta_1$ donde β_0 es arco ordenado desde B hasta $\cup\beta$.
Ya que $\cup\alpha, \cup\beta \in C(X)$, $\cup\alpha \cap \cup\beta \neq \emptyset$, entonces $\cup\alpha \subseteq \cup\beta$ ó bien $\cup\beta \subseteq \cup\alpha$. Si $\cup\alpha = \cup\beta$, por el resultado alterior $\alpha_0 = \beta_0$ y $\alpha_1 = \beta_1$ y así $\alpha = \beta$.
Supongamos que $\cup\alpha \neq \cup\beta$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\cup\alpha \subsetneq \cup\beta$. En este caso existe $\mathcal{L}$ un arco ordenado en $C(X)$ desde $\cup\alpha$ hasta $\cup\beta$. Con esto $\alpha_0 \cup \mathcal{C}$ es un arco ordenado desde A hasta $\cup\beta$. Por el resultado anterior se tiene que $\beta_0 = \alpha_0 \cup \mathcal{C}$. De forma similar $\beta_1 = \alpha_1 \cup \mathcal{C}$, por tanto $\alpha = \alpha_0 \cup \alpha_1 \subseteq \beta_0 \cup \beta_1 = \beta$ y ya que α y β son arcos con los mismos extremos $\alpha = \beta$. □

El siguiente resultado responde a la interrogante planteada en esta sección, sobre cuando un continuo X tiene hiperespacio $C(X)$ únicamente arco conexo.

Corolario 2.2.25. *Un continuo X es hereditariamente indescomponible si y solo si para cada $A, B \in C(X)$ con $A \neq B$, existe un único arco en $C(X)$ con extremos A y B.*

Demostración. Considerando las proposiciones 2.2.23 y 2.2.24, únicamente falta mostrar el regreso, para eso, supongamos por contradicción que existen $A, B \in C(X)$ con $A \cap B \neq \emptyset$ pero $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$.
Sea $p \in A \cap B$. Es claro que $\{p\} \subsetneq A$, por tanto existe un arco ordenado α en $C(X)$ desde $\{p\}$ hasta A y como $A \subsetneq A \cup B$, existe un arco ordenado λ en $C(X)$ desde A hasta $A \cup B$. De forma similar, existen dos arcos ordenados β y Γ en $C(X)$, desde $\{p\}$ hasta B y desde B hasta $A \cup B$, respectivamente.
Con esto $\alpha \cup \lambda$ y $\beta \cup \Gamma$ son dos arcos ordenados desde $\{p\}$ hasta $A \cup B$. Además $A \in (\alpha \cup \lambda) - (\beta \cup \Gamma)$, así que $\alpha \cup \lambda \neq \beta \cup \Gamma$, lo cual genera una contradicción. □

Terminaremos esta sección con el siguiente resultado que muestra que en los continuos indescomponibles X, el continuo X arco desconecta a $C(X)$.

Teorema 2.2.26. *Un continuo X es indescomponible si y solo si para cada $A \in C(X) - \{X\}$, existe $B \in C(X) - \{X, A\}$ tal que para cada arco α en $C(X)$ con extremos A y B, $X \in \alpha$.*

Demostración. Supongamos primero que X es indescomponible y sea $A \in C(X) - \{X\}$. Como X es indescomponible existe $p \in X$ tal que si $C \in C(X)$ y $A \cup \{p\} \subseteq C$, entonces $C = X$ (esto se justificará formalmente más adelante en el teorema 3.1.8). Sea $B = \{p\}$. Si α es un arco en $C(X)$ y tiene por extremos A y B, entonces $\cup\alpha \in C(X)$ y ya que $A \cup \{p\} \subseteq \cup\alpha$, $\cup\alpha = X$. Como X es indescomponible, usando el lema 2.2.19, $X \in \alpha$.

Sea $p \in C$. Como $\{p\} \in C(X) - \{X\}$, existe $B \in C(X)$ tal que si α es un arco $C(X)$ con extremos $\{p\}$ y B, entonces $X \in \alpha$. Sean $q \in B$ y λ un arco en $C(X)$ tal que sus extremos son $\{p\}$ y $\{q\}$. En este caso $X \in \lambda$, con esto si $C \in C(X)$ y $p, q \in C(X)$, entonces $C = X$, esta propiedad que veremos en el siguiente capítulo muestra que X es irreducible entre p y q, el resultado se seguirá del corolario 3.1.14. □

2.3. Niveles de Whitney

En esta sección abordaremos el concepto de nivel de Whitney, que es el análogo al concepto de superficie de nivel que se estudia en cursos de cálculo de varias variables.

Definición 2.3.1. *Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0, 1]$ es una función de Whitney, se llama **nivel de Whitney** a un conjunto de la forma*

$$\mu^{-1}(t) = \{A \in C(X) : \mu(A) = t\},$$

donde $t \in [0, 1]$.

Observación 2.3.2. *En general* $\mu^{-1}(0) = F_1(X)$ *y* $\mu^{-1}(1) = \{X\}$, *ya que estos conjuntos son triviales en el sentido de que el primero es homeomorfo a* X *y el segundo es un conjunto de un solo punto, en el resto del trabajo consideramos niveles de Whitney* $\mu^{-1}(t)$, *para valores* $t \in (0,1)$.

Teorema 2.3.3. *Si* X *es un continuo y* $\mu : C(X) \to [0,1]$ *es una función de Whitney entonces para toda* $t \in (0,1)$, *el nivel de Whitney* $\mu^{-1}(t)$ *cumple que* $\bigcup \mu^{-1}(t) = X$.

Demostración. Mostraremos únicamente que $X \subseteq \bigcup \mu^{-1}(t)$, pues la otra contención es claramente cierta. Sea $p \in X$, como $\{p\} \subsetneq X$, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = X$. Notemos que $\mu \circ \alpha : [0,1] \to [0,1]$ es una función continua tal que $(\mu \circ \alpha)(0) = 0$ y $(\mu \circ \alpha)(1) = 1$, por el teorema del valor intermedio existe $s \in [0,1]$ tal que $(\mu \circ \alpha)(s) = t$, es decir $\mu(\alpha(s)) = t$, así $\alpha(s) \in C(X)$ y $p \in \alpha(s)$. Por tanto $p \in \bigcup \mu^{-1}(t)$. □

El siguiente resultado muestra que dos elementos en un mismo nivel de Whitney que se intersectan, se pueden arco conectar dentro del nivel.

Lema 2.3.4. *Sean* X *un continuo y* $\mu : C(X) \to [0,1]$ *una función de whitney, si* $t \in (0,1)$, *entonces para cada par de elementos* $A, B \in \mu^{-1}(t)$ *tales que* $A \cap B \neq \emptyset$, *existe una trayectoria* $\mathcal{C}$ *en* $\mu^{-1}(t)$ *con extremos* A *y* B. *Más aún si* $p \in A \cap B$ *se puede pedir que todo elemento en* $\mathcal{C}$, *contenga a* p.

Demostración. Si $A = B$ basta tomar a $\mathcal{C}$ como la trayectoria constante A. Supongamos que $A \neq B$, como $\mu(A) = t = \mu(B)$, entonces $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$.
Sea $p \in A \cap B$, como $0 < t$, $\{p\} \subsetneq A$ y $\{p\} \subsetneq B$, con esto existe dos arcos ordenados $\alpha : [0,1] \to C(X)$ y $\lambda : [0,1] \to C(X)$ tales que $\alpha(0) = \{p\} = \lambda(0)$, $\alpha(1) = A$ y $\lambda(1) = B$.
Sea $s \in [0,1]$, para cada $r \in [0,1]$, definiremos a $f : [0,1] \to C(X)$ como $f(r) = \alpha(s) \cup \lambda(r)$. En este caso $f : [0,1] \to C(X)$ es una función continua, lo mismo que la función $(\mu \circ f) : [0,1] \to [0,1]$. Por otra parte, notemos que

$$(\mu \circ f)(0) = \mu(f(0)) = \mu(\alpha(s)) \leq \mu(A) = t$$

y

$$(\mu \circ f)(1) = \mu(f(1)) = \mu(\alpha(s) \cup \lambda(1)) = \mu(\alpha(s) \cup B) \geq t.$$

Por el teorema del valor intermedio existe $r(s) \in [0,1]$ tal que $(\mu \circ f)(r(s)) = t$, es decir

$$\mu(\alpha(s) \cup \lambda(r(s))) = t.$$

Sea $g : [0,1] \to C(X)$ dada por $g(s) = \alpha(s) \cup \lambda(r(s))$, para todo $s \in [0,1]$. En este caso $g([0,1]) \subseteq \mu^{-1}(t)$ y $p \in g(s)$, para todo $s' \in [0,1]$.
Veamos primero que la elección de $r(s)$ no cambia el valor de $\alpha(s) \cup \lambda(r(s))$. Supongamos que $r \in [0,1]$ es tal que $(\mu \circ f)(r) = t$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $r \leq r(s)$. En este caso $\lambda(r) \subseteq \lambda(r(s))$ y así $\mu(\alpha(s) \cup \lambda(r)) = t = \mu(\alpha(s) \cup \lambda(r(s)))$,

entonces $\alpha(s) \cup \lambda(r) = \alpha(s) \cup \lambda(r(s))$. Notemos que

$$g(0) = \alpha(0) \cup \lambda(r(0)), \text{ así que } r(0) = 1.$$

$$g(0) = \{p\} \cup \lambda(r(0)) = \lambda(r(0)) = B$$

$$g(1) = \alpha(1) \cup \lambda(r(1)) = A \cup \lambda(r(1)) = A, \text{ concluyendo que } r(1) = 0$$

Afirmación: g es continua (por la construcción de g, $g : [0,1] \to \mu^{-1}(t)$).
Sea $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ y (usando la compacidad de $C(X)$) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} g(s_n) = A \in C(X)$. Por otro lado $\lim\limits_{n\to\infty} g(s_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha(s_n) \cup \lambda(r(s_n))$. También tenemos que como α es continua $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(s_n) = \alpha(s)$. Como $\{r(s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el compacto $[0,1]$, existe una sucesión $\{r(s_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge en $[0,1]$, digamos a r. Ya que λ es continua, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda(r(s_{n_k})) = \lambda(r)$, con esto

$$A = \lim_{n\to\infty} \alpha(s_{n_k}) \cup \lambda(r(s_{N_k})) = \alpha(s) \cup \lambda(r).$$

Usando que $\mu^{-1}(t)$ es cerrado en $C(X)$, $A \in \mu^{-1}(t)$, así $\alpha(s) \cup \lambda(r) \in \mu^{-1}(t)$. Tomemos a $r = r(s)$. Por tanto $A = \alpha(s) \cup \lambda((r(s))) = g(s)$, por el resultado que se enuncia en la referencia [7, teorema 11.8, p.75] se tiene que g es continua. □

Teorema 2.3.5. *Si X es un continuo y $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ ($\mathcal{A} \subseteq 2^X$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y $\mathcal{A}$ es cerrado en 2^X), entonces $\cup\mathcal{A} \in 2^X$. Más aún, $U : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $U(\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$ es continua.*

Demostración. Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, existe $A \in 2^X$ tal que $A \in \mathcal{A}$, así $\cup\mathcal{A} \neq \emptyset$. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de puntos de $\cup\mathcal{A}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$, para mostrar que $\cup\mathcal{A}$ es cerrado en X, basta mostrar que $x \in \cup\mathcal{A}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$, como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el compacto $\mathcal{A}$, existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k} = A \in \mathcal{A}$. En este caso $x \in \limsup A_n = A$, así $x \in \cup\mathcal{A}$.

Para mostrar la continuidad de U, mostraremos que U es uniformemente continua. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $\rho = \epsilon$ y mostraremos que si $H_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \rho$, entonces $H(\cup\mathcal{A}, \cup\mathcal{B}) < \epsilon$, donde $H_{\mathcal{L}}$ denota la métrica de Hausdorff inducida por $(2^X, H)$. Para lo último mostraremos que $\cup\mathcal{A} \subseteq N(\epsilon, \cup\mathcal{B})$ (de forma similar se muestra que $\cup\mathcal{B} \subseteq N(\epsilon, \cup\mathcal{A})$).
Sea $x \in \cup\mathcal{A}$, con esto, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como $H_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \epsilon$, $\mathcal{A} \subseteq N(\epsilon, \mathcal{B})$ y así existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Como $A \subseteq N(\epsilon, B)$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \epsilon$. Finalmente, como $y \in \cup\mathcal{A}$, concluimos que $\cup\mathcal{A} \subseteq N(\epsilon, \cup\mathcal{B})$. □

Uno de los objetivos de este capítulo es mostrar que los niveles de Whitney ($t \neq 1$) son continuos, el siguiente teorema mostrará que estos son conexos.

Teorema 2.3.6. *Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney, entonces $\mu^{-1}(t)$ es conexo para todo $t \in [0,1]$.*

Demostración. Supongamos que existe $t \in [0,1]$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es conexo. Como $\mu^{-1}(t)$ es cerrado en $C(X)$, existen $\mathcal{L}$ y $\mathcal{K}$ dos cerrados ajenos y no vacíos en $C(X)$ tales que $\mu^{-1}(t) = \mathcal{L} \cup \mathcal{K}$. Sean $\mathcal{L}_0 = \cup\mathcal{L}$ y $\mathcal{K}_0 = \cup\mathcal{K}$.
Como $\mathcal{L} \neq \emptyset \neq \mathcal{K}$, se tiene que $\mathcal{L}_0 \neq \emptyset \neq \mathcal{K}_0$. Sea $p \in X$. Como $\cup\mu^{-1}(t) = X$, existe $A \in \mu^{-1}(t)$ tal que $p \in A$ y $A \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}$. Si $A \in \mathcal{L}$, $p \in \mathcal{L}_0$ y si $A \in \mathcal{K}$ entonces $p \in \mathcal{K}_0$. Esto concluye que $X = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{K}_0$, además de que los conjuntos $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{K}_0$ son cerrados ajenos en X.

Afirmación: $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{L}_0 = \emptyset$ (lo cual será una contradicción pues X es conexo).
Supongamos que existe $p \in \mathcal{K}_0 \cap \mathcal{L}_0$. Por definición existe $K \in \mathcal{K}$ y $L \in \mathcal{L}_0$ tales que $p \in K \cap L$. Por el lema 2.3.4 existe una trayectoria $\alpha : [0,1] \to \mu^{-1}(t)$ tal que $\alpha(0) = L$ y $\alpha(1) = K$. Con esto $\alpha([0,1]) \subseteq \mathcal{L} \cup \mathcal{K}$, $\alpha([0,1])$ es conexo y $\alpha([0,1]) \cap \mathcal{L} \neq \emptyset \neq \alpha([0,1]) \cap \mathcal{K}$ lo cual es una contradicción. $\square$

Puesto que $\mu^{-1}(t)$ es cerrado al ser la preimagen de un conjunto cerrado de $[0,1]$, se tiene por el teorema 2.3.6 el siguiente corolario.

Corolario 2.3.7. *Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo para todo $t \in (0,1)$.*

Ejemplo 1: Sea $X = [0,1]$ y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Sea $t \in (0,1)$. Tomemos $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$. Sea $f : \mathcal{A} \to [0,1]$ dado por $f(A) = \text{mín}(A)$. En este caso f es continua, veamos que f es inyectiva. Para esto supongamos que $f(A) = f(B)$, para $A, B \in \mathcal{A}$. En este caso, si $f(A) = a = f(B)$, entonces $A = [a,b]$ y $B = [a,c]$, por tanto $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$, y como A, $B \in \mu^{-1}(t)$ entonces $A = B$.
Así que $f : \mathcal{A} \to f(\mathcal{A})$ es homeomorfismo y ya que $\mathcal{A}$ es continuo no degenerado, $f(\mathcal{A})$ es un subcontinuo de $[0,1]$. Por lo cual $\mathcal{A}$ es un arco.

Ejemplo 2: Sean $X = S^1$, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Denotamos por $\mathcal{B} = \mu^{-1}(t)$.
Para cada $A \in \mathcal{B}$, A es un arco contenido en S^1. Sea $f : \mathcal{B} \to S^1$ dada por $f(A)$ igual al punto medio de A. Se puede verificar fácilmente que f es una función continua e inyectiva. Veamos que f es suprayectiva, para esto sea $p \in S^1$. Consideremos a $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los arcos que tienen a p como punto medio, unión con el conjunto $\{\{p\}, S^1\}$. En este caso $\mathcal{C}$ es un arco ordenado en $C(X)$, por lo que $\mu|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to [0,1]$ es suprayectiva. Como $t \in (0,1)$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\mu(C) = t$, en particular $f(C) = p$.
Con lo anterior se concluye que $f : \mu^{-1}(t) \to S^1$ es un homeomorfismo, es decir $\mu^{-1}(t)$ es una curva cerrada simple.

Concluiremos este capítulo con el siguiente concepto, el cual abordaremos a profundidad en el capítulo 4, para la propiedad de irreducibilidad.

Definición 2.3.8. *Sea P una propiedad definida para espacios topológicos. Se dice que P es:*

- ***de Whitney*** *si para cada continuo* X *y cada función de Whitney* $\mu : C(X) \to [0,1]$ *se cumple que si* X *satisface* P *entonces* $\mu^{-1}(t)$ *satisface* P*, para todo* $t \in (0,1)$.

- ***de Whitney reversible*** *si para cada continuo* X *y cada función de Whitney* $\mu : C(X) \to [0,1]$*, si* $\mu^{-1}(t)$ *cumple* P *para cada* $t \in (0,1)$*, entonces* X *cumple* P.

El problema general a estudiar en este trabajo es: ¿Si P es la propiedad de ser irreducible, entonces:

- P es de Whitney?

- P es de Whitney reversible?

Capítulo 3

Nociones básicas de irreducibilidad en continuos

En este capítulo daremos un repaso al concepto de irreducibilidad en continuos, mostraremos sus propiedades mas importantes, concluyendo con la construcción de un continuo indescomponible, se puede verificar en [4, Capitulo XI].

3.1. Irreducibilidad de continuos

Empezaremos esta sección con la siguiente definición.

Definición 3.1.1. *Un continuo X es llamado* ***descomponible*** *si $X = A \cup B$ para algunos $A, B \in C(X) - \{X\}$. El continuo X será llamado* ***indescomponible*** *si no es descomponible.*

Usando el concepto anterior, un continuo X se dirá que es **hereditariamente descomponible (indescompoble)** si cada uno de sus continuos propios y no degenerados es descomponible (indescomponible). Para entender la estructura de un continuo descomponible (indescomponible), usaremos los siguientes conceptos. Dados un continuo X y $p \in X$, se le llama **composante de** $p \in X$, al conjunto $\sum_p^X = \bigcup\{A \in C(X) - \{X\} : p \in A\}$.

Definición 3.1.2. *Si X es un continuo y $p, q \in X$, diremos que X es* ***irreducible entre*** *p* ***y*** *q si para todo $A \in C(X)$ tal que $p, q \in A$, se cumple que $A = X$, denotaremos esto como X=irr(p,q). Se dice que un continuo X es* ***irreducible*** *si existen $p, q \in X$ tal que X=irr(p,q).*

Observemos que X es irreducible si existe $p \in X$ tal que $\sum_p^x \neq X$.

Ejemplo: Si $X = [0, 1]$, entonces $X = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$, así que X es descomponible, de forma similar si $B = S^1$, entonces B es descomponible pues puede expresarse como la unión de dos de sus arcos. Casi cualquier ejemplo de continuo que se nos venga a la mente será descomponible, en efecto, construir un continuo indescomponible no es tarea fácil, construiremos un ejemplo de esta clase de continuos al final de este capítulo.

Aunque sencillo, el siguiente resultado presenta una manera alterna de expresar la composante de un punto dentro de un continuo.

Proposición 3.1.3. *Dados un continuo X y $p \in X$ tenemos que*

$$\sum\nolimits_p^X = \{x \in X : \ \textit{existe } A \in C(X) - \{X\} \textit{ tal que } p, x \in A\}.$$

Demostración. Sea $y \in \sum_p^X$. Por definición existe $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $p, y \in A$. Así $y \in \{x \in X : \text{ existe } A \in C(X) - \{X\} \text{ tal que } p, x \in A\}$.

Ahora, sea $y \in \{x \in X : \text{ existe } A \in C(X) - \{X\} \text{ tal que } p, x \in A\}$, es decir, existe $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $p, y \in A$, por lo que $y \in \cup\{A \in C(X) - \{X\} : p \in A\} = \sum_p^X$. □

Mostraremos que cuando el continuo X es indescomponible, la familia de composantes forman una partición, más adelante mostramos que solo en este tipo de continuos ocurre esto.

Proposición 3.1.4. *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Si X es indescomponible, entonces $\sum_p^X \cap \sum_q^X = \emptyset$ o $\sum_p^X = \sum_q^X$.*

Demostración. Supongamos que $\sum_p^X \cap \sum_q^X \neq \emptyset$ es decir existe $x \in \sum_p^X \cap \sum_q^X$. Mostraremos que $\sum_p^X = \sum_q^X$.
Por definición de composante, existe $A_p \in C(X) - \{X\}$ con $p, x \in A_p$ y existe $A_q \in C(X) - \{X\}$ con $q, x \in A_q$. Con lo cual $A_p \cup A_q$ es conexo , por lo tanto es un continuo, el cual no es X pues X es indescomponible.

Probemos las siguientes dos contenciones:

a) $\sum_p^X \subset \sum_q^X$. Sea $y \in \sum_p^X$, en cuyo caso existe $B \in C(X) - \{X\}$ tal que $y, p \in B$, notemos que $B \cup A_p \in C(X) - \{X\}$ y $y \in B \cup A_p$. Dado que $A_q \in C(X) - \{X\}$ se tiene que $(B \cup A_p) \cup A_q \in C(X) - \{X\}$ por la indescomponibilidad de X además de que $A_p \cap A_q \neq \emptyset$, siendo este último un subcontinuo propio que contiene a y y q, así que $y \in \sum_q^X$.

b) Análogamente al inciso anterior, se muestra que $\sum_q^X \subset \sum_p^X$.

Estas dos contenciones muestran que $\sum_p^X = \sum_q^X$. □

Mostraremos ahora una caracterización de los continuos descomponibles en términos del interior de alguno de sus subcontinuos.

Proposición 3.1.5. *Sea X un continuo, entonces X es descomponible si y solo si existe $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $int(A) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos primero que X es un descomponible, así que existen $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $A \cup B = X$, en particular $X - B \neq \emptyset$ es abierto en X tal que $X - B \subset A$ por lo que $X - B \subset int(A)$ así $int(A) \neq \emptyset$.

Para el regreso, supongamos que existe $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $int(A) \neq \emptyset$. Tenemos los siguientes dos casos:

a) Si $X - A$ es conexo, se sigue que $\overline{X - A} \in C(X) - \{X\}$, entonces $X = A \cup \overline{X - A}$, es decir X es descomponible.

b) Si $X - A$ no es conexo, existen D y C subconjuntos ajenos, cerrados y no vacíos tales que $X - A = D \cup C$. En este caso, $X = (A \cup D) \cup (A \cup C)$ donde $A \cup C, A \cup D \in C(X) - \{X\}$ concluyendo que X es descomponible.

□

El recíproco de la proposición 3.1.5 provee de una caracterización de los continuos indescomponibles la cual enunciamos a continuación.

Corolario 3.1.6. *Sea X un continuo, entonces X es indescomponible si y solo si para cada $A \in C(X) - \{X\}$, se cumple que $int(A) = \emptyset$.*

Recordemos que cada composante es una unión de subcontinuos, sin embargo, se pueden elegir de ellos una cantidad numerable como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 3.1.7. *Para cada continuo X y cada punto $p \in X$, se tiene que $\sum_p^X$ es una unión numerable de subcontinuos propios que contienen a p.*

Demostración. Consideremos una base numerable de abiertos en $X - \{p\}$, digamos $\mathbb{B} = \{U_i : U_i$ es abierto en X y $U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}\}$. Consideremos K_i la componente de p en $X - U_i$. Notemos que $K_i \subset X - U_i \subsetneq X$, y con esto $K_i \subsetneq X$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como los conjuntos U_i son abiertos en X, se tiene que $K_i \in C(X) - \{X\}$ y como $p \in K_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset \sum_p^X$, mostraremos que esta última contención en realidad es una igualdad lo cual concluirá el resultado.
Sea $x \in \sum_p^X$, por definición de composante, existe $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $p, x \in A$. Observemos que $X - A$ es un conjunto abierto de X contenido en $X - \{p\}$, y dado que $\mathbb{B}$ es base de $X - \{p\}$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $U_i \subset X - A$, es decir, $A \subset X - U_i$ y ya que $p \in A$ se sigue que $A \subset K_i$, por tanto $x \in K_i$, lo que concluye que $\sum_p^X \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} K_i$.

Concluimos que $\sum_p^X = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} K_i$, lo cual muestra el resultado. □

Ahora, veamos cuantas composantes puede tener un continuo indescomponible, más adelante veremos que en el caso de continuos descomponibles este número solo puede ser 1 o 3, pero en el caso indescomponible el asunto se torna con una cantidad no numerable.

Teorema 3.1.8. *Sea X un continuo. Si X es indescomponible y no degenerado, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

Demostración. Sea A la colección de todas las composantes de X. Supongamos que A es numerable. Supongamos que $A = \{\sum_{x_n}^{X} : n \in \mathbb{N} \text{ y } x_n \in X\}$. Notemos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{x_n}^{X}$.
Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el teorema 3.1.7 existe una colección numerable de subcontinuos propios de X, los cuales contienen a x_n, digamos $\{E_{x_{n,m}} : m \in \mathbb{N}\}$ tal que $\sum_{x_n}^{X} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{x_{n,m}}$. Se sigue que:

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sum\nolimits_{x_n}^{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{x_{n,m}} \right) = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} E_{x_{n,m}}.$$

Por el corolario 3.1.6, se tiene que, como $E_{x_{n,m}} \in C(X) - \{X\}$, entonces $int(E_{x_{n,m}}) = \emptyset$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$, además de que $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} E_{x_{n,m}}$ es denso en X, lo cual es absurdo, por el Teorema de la Categoría de Baire el cual implica que en un continuo la unión numerable de subespacios con interior vacío tiene interior vacío. Por lo tanto X tiene una cantidad no numerable de composantes. □

Proposición 3.1.9. *Si para cada $p \in X$ se cumple que $\sum_{p}^{X} = X$, entonces X no es irreducible.*

Demostración. Sea $p, q \in X$. Ya que $q \in X = \sum_{p}^{X}$, existe $C \in C(X) - \{X\}$ tal que $p, q \in C$, lo cual concluye que X no es irreducible entre p y q. Ya que los puntos p y q son arbitrarios, concluimos el resultado. □

Corolario 3.1.10. *Un continuo X es irreducible si y solo si existe $p \in X$ tal que $\sum_{p}^{X} \neq X$.*

Demostración. Para la ida, si $X = irr(p, q)$ entonces es claro que $q \in X - \sum_{p}^{X}$.
Para el regreso, si $p \in X$ y $\sum_{p}^{X} \subsetneq X$ entonces para cada $q \in X - \sum_{p}^{X}$ se tiene que si $C \in C(X)$ y $p, q \in C$, entonces $C = X$ es decir, X es irreducible entre p y q. □

Ahora, mostraremos una serie de resultados sobre continuos irreducibles.

Lema 3.1.11. *Si X es irreducible entre p y q, y además C es un conjunto conexo, tal que $p, q \in C$ entonces C es irreducible entre p y q. (El subespacio C lo entenderemos como irreducible entre p y q si no existe un subespacio propio que es cerrado y conexo en C que contenga a p y q)*

Demostración. Sea $F \subset C$ un conjunto cerrado y conexo en C, tal que $p, q \in F$. En este caso, $\overline{F}$ es un conjunto cerrado y conexo en X tal que $p, q \in \overline{F}$ con esto $\overline{F} = X$. Por otro lado $F = \overline{F} = \overline{F} \cap C = X \cap C = C$. Concluimos que $F = C$ y así C es irreducible entre p y q. □

Teorema 3.1.12. *Si X es un continuo y $p \in X$, entonces $X - \sum_{p}^{X}$ es conexo, es decir $\{x \in X : X$ es irreducible entre p y $x\}$ es conexo.*

Demostración. Si $\sum_p^X = X$, entonces $X - \sum_p^X = \emptyset$, el cual es conexo.
Ahora supongamos que $\sum_p^X \neq X$, por lo que existe $q \in X$ tal que X es irreducible para $p, q \in X$. Supongamos por contradicción, que $X - \sum_p^X$ no es conexo, es decir,

(1) $X - \sum_p^X = M \cup N$ con $M \cap N = \emptyset$ y M y N conjuntos separados.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $q \in M$. Como M y N están separados existe un conjunto abierto U de X tal que $M \subset U$ y $\overline{U} \cap N = \emptyset$.

(2) Así que $(\overline{U} - U) \cap (M \cup N) = \emptyset$.

Como $q \in M \subset U$, se puede considerar la componente Q de U que contiene a q. Mas aún $U \neq X$, ya que $\overline{U} \cap N = \emptyset$ y $N \neq \emptyset$, así por el teorema 1,4,6 se tiene que $\overline{Q} - U \neq \emptyset$. Sea $r \in \overline{Q} - U$, entonces como $\overline{Q} \subset \overline{U}$, $r \in \overline{U} - U$. Usando (1) y (2), obtenemos que $r \in \sum_p^X$. Por lo tanto, A es un continuo propio de X tal que $p, r \in A$. Ya que $r \in Q$ y $\overline{Q}$ es un continuo, $A \cup \overline{Q}$ es un continuo, además que $p, q \in A \cup \overline{Q}$ y X es irreducible entre p, q, se concluye que

(3) $A \cup \overline{Q} = X$.

Como $\overline{U} \cap N = \emptyset$ y $\overline{Q} \subset \overline{U}$, entonces $\overline{Q} \cap N = \emptyset$, por lo que, usando (3), se tiene que $N \subset A$. Nótese que $A \subset \sum_p^X$, lo cual contradice (1), así $N \neq \emptyset$, por lo tanto $X - \sum_p^X$ es conexo. $\square$

Recordemos que en un continuo indescomponible, las composantes son subconjuntos ajenos dos a dos además de que existe una cantidad no numerable de estas, por lo que ninguna composante puede ser el continuo total, lo cual no pasa en los continuos descomponibles como se mostrará a continuación.

Proposición 3.1.13. *Si X es descomponible, entonces existe $p \in X$ tal que $\sum_p^X = X$.*

Demostración. Por hipótesis existen $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$, como X es conexo, existe $p \in X$ tal que $p \in A \cap B$. De la definición, es claro que $\sum_p^X = X$. $\square$

Referente al resultado anterior, si X es indescomponible, para cada $p \in X$, $\sum_p^X \subsetneq X$. Se deduce de manera inmediata el siguiente resultado:

Corolario 3.1.14. *Un continuo X es indescomponible si y solo si para cada $p \in X$ se cumple que $\sum_p^X \neq X$.*

El siguiente es un resultado sencillo pero será de gran utilidad en algunos resultados más adelante.

Lema 3.1.15. *Si X es irreducible entre a y b, entonces X no se puede descomponer como la unión de subcontinuos propios A y B con la propiedad de que $a \in A \cap B$ ó $b \in A \cap B$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $a \in A \cap B$. Como $b \in X = A \cup B$, entonces o bien $b \in A$ ó $b \in B$, así que $a, b \in A$ ó $a, b \in B$, pero eso contradice la hipótesis de que X es irreducible entre a y b. □

Otra manera de enunciar el resultado anterior es la siguiente.

Corolario 3.1.16. *Si X es irreducible entre a y b y $X = A \cup B$, con $A, B \in C(X) - \{X\}$, entonces ($a \in A$ y $b \in B$) ó bien ($a \in B$ y $b \in A$).*

El siguiente resultado establece una propiedad sobre el complemento de los subcontinuos dentro de continuos irreducibles.

Lema 3.1.17. *Si X es un continuo y $C \in C(X)$ cumple que $X - C = U \cup V$ donde U y V son abiertos ajenos, entonces $C \cup U, C \cup V \in C(X)$.*

Demostración. Puesto que $C \cup U$ y $C \cup V$ son conexos, $C \cup U = X - V$ y $C \cup V = X - U$ se tiene que $C \cup U$ y $C \cup V$ son también cerrados y por tanto subcontinuos de X. □

Proposición 3.1.18. *Supongamos que X es irreducible entre a y b, si $C \in C(X) - \{X\}$ entonces:*

I) *Si $X - C$ es disconexo entonces $X - C = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X, tales que $U \cap V = \emptyset$ y $\{a, b\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{a, b\} \cap V \neq \emptyset$.*

II) *Si $a \in C$ ó $b \in C$ entonces $X - C$ es conexo.*

Demostración.

I) Como $X - C$ es disconexo, $X - C = U \cup V$ donde U y V son abiertos ajenos y no vacíos de X, con esto $C \cup U$ y $C \cup V$ son subcontinuos de X. Además $(C \cup U) \cap (C \cup V) = C$ y también $(C \cup U) \cup (C \cup V) = X$. Notemos que si $a \in C$, entonces $b \notin C$ pues $X = irr(a, b)$, y por tanto $b \in U$ o $b \in V$, concluyendo que $a, b \in C \cup U$ o bien $a, b \in C \cup V$, lo cual contradice que X es irreducible entre a y b; de la misma manera no puede pasar que $b \in C$.
Por la proposición anterior, ya que $a, b \notin C$, se tiene que $\{a, b\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{a, b\} \cap V \neq \emptyset$.

II) Supongamos que $b \in C$ y con esto tenemos que $a \notin C$. Si $X - C$ no es conexo por *I*) $X - C = U \cup V$, donde U y V son abiertos y estos cumplen que $\{a, b\} \cap U \neq \emptyset, \{a, b\} \cap V \neq \emptyset$. Si $a \in U$ se tiene que $b \in V$, y si $a \in V$ entonces $b \in U$, ambos casos son imposibles pues $b \in C$. Concluimos que $X - C$ es conexo. Análogamente, se deduce que $X - C$ es conexo si $a \in C$.

□

Lema 3.1.19. *Si X es un continuo irreducible entre a y b, y $A, B \in C(X)$ son tales que $a \in A$ y $b \in B$, entonces $X - (A \cup B)$ es conexo.*

Demostración. Consideremos los siguientes casos sobre $A \cap B$:

Caso I. $A \cap B \neq \emptyset$. Aqui $A \cup B \in C(X)$ y $a, b \in A \cup B$ con lo cual se tiene que $A \cup B = X$ así $X - (A \cup B) = \emptyset$ que es un conjunto conexo.

Caso II. $A \cap B = \emptyset$. Por la proposición 3.1.13, $X - A$ es conexo. Sea $C = X - A$ y notemos que $C - B = (X - A) - B = X - (A \cup B)$. Afirmamos que $C - B$ es conexo. Supongamos por el contrario, que $C - B = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X y además de que $U \cap V = \emptyset$. Con esto $B \cup U$ y $B \cup V$ son conexos, en consecuencia $B \cup \overline{U}$ y $B \cup \overline{V}$ son conjuntos conexos también, con esto $X = (A \cup B) \cup \overline{(C - B)}$ y además $A \cap B = \emptyset$.
Con lo anterior $X = A \cup (B \cup \overline{(X - (A \cup B))}$, es decir, $X = B \cup (A \cup \overline{(A - (X \cup B))}$, y ya que X es conexo, en particular $\overline{A \cap (X - (A \cup B))} \neq \emptyset$ con lo cual se tiene que $A \cap (\overline{U \cup V}) \neq \emptyset$ concluyendo que $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$ ó $A \cap \overline{V} \neq \emptyset$.
Sin pérdida de generalidad supongamos que $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$, por lo que $B \cup \overline{U} \cup A \in C(X)$, así $X = B \cup \overline{U} \cup A$ y además $V \cap (B \cup \overline{U} \cup A) = \emptyset$ entonces $V = \emptyset$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $C - B = X - (A \cup B)$ es conexo. □

Recuérdese que en general, si U es conexo, no necesariamente se tiene que $int(U)$ sea conexo. Sin embargo en la clase de continuos irreducibles se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1.20. *Si X es un continuo irreducible entre los puntos a y b, entonces para cada $C \in C(X)$, $int(C)$ es conexo.*

Demostración. Si $C = X$ se tiene que $int(C) = X$ es conexo. Supongamos que $C \subsetneq X$, entonces $a \in X - C$ ó $b \in X - C$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $a \in X - C$. Consideremos los siguientes dos casos:

Caso I. $X - C$ es conexo, así $\overline{X - C}$ es un subcontinuo que contiene a a. Por otro lado, Por el teorema 3.1.12 $X - \overline{X - C}$ es conexo. Por tanto $int(C) = X - \overline{X - C}$ es conexo.

Caso II. $X - C$ no es conexo, entonces por la proposición 3.1.18, $X - C = K_1 \cup K_2$ donde K_1 y K_2 son abiertos y conexos tales que $a \in K_1$ y $b \in K_2$. Por esto $X - (\overline{K_1} \cup \overline{K_2})$ es conexo. Ya que

$$int(C) = X - \overline{X - C} = X - \overline{(K_1 \cup K_2)} = X - (\overline{K_1} \cup \overline{K_2}),$$

concluimos que $int(C)$ es conexo. □

Lema 3.1.21. *Si X es un continuo irreducible entre los puntos a y b, entonces para cada $C \in C(X)$ tal que $a \in Fr(C)$ se cumple que $int(C) = \emptyset$.*

Demostración. Como $Fr(C) = \overline{C} \cap \overline{(X - C)} \subseteq \overline{C} = C$, se tiene que $a \in C$, por lo que $X - C$ es conexo y $b \in X - C$. Ahora, como $\overline{(X - C)}$ es un continuo que contiene a a y b, concluimos que $\overline{X - C} = X$. Por lo tanto, $X - \overline{X - C} = int(C) = \emptyset$. □

Corolario 3.1.22. *Si X es irreducible entre a y b, y $C \in C(X) - \{X\}$ tal que $a \in C$, entonces $\overline{X - C}$ es un subcontinuo irreducible entre b y x, para cada $x \in Fr(C)$.*

Demostración. Tenemos que $X - C$ es conexo, así que $\overline{X - C}$ es un continuo de X.
Para ver que $\overline{X - C} = irr(b, x)$ para cualquier punto $x \in Fr(C)$, consideraremos F un conjunto cerrado y conexo tal que $x, b \in F$ y $F \subseteq \overline{X - C}$.
Supongamos por contradicción que $F \subsetneq \overline{X - C}$. Como $x \in Fr(C)$ entonces $F \cup C$ es un subcontinuo de X. Ahora, ya que $a \in C$ y $b \in F$, entonces $F \cup C = X$. Por otro lado $F \cup C \subsetneq C \cup \overline{X - C}$ lo cual es una contradicción, por lo tanto, concluimos que $F = \overline{X - C}$. □

El siguiente resultado ya lo hemos mencionado antes pero lo colocamos de manera formal pues será utilizado más adelante.

Lema 3.1.23. *Si X es irreducible entre p y q entonces $\sum_p^X \neq \sum_q^X$.*

Demostración. $p \in \sum_p^X = \cup\{A \in C(X) - \{X\} : p \in A\}$ y $p \notin \sum_q^X$ pues X es irreducible entre p y q. □

Corolario 3.1.24. *Si X es descomponible e irreducible entre p y q entonces X, $\sum_p^X$, $\sum_q^X$ son 3 composantes distintas.*

Demostración. Se sigue de la proposición 3.1.13 y el lema anterior. □

Referente a este último resultado, mostraremos que de hecho en un continuo irreducible, las tres composantes mencionadas son las únicas composantes distintas dentro del continuo, para mostrar esto necesitamos del siguiente resultado.

Teorema 3.1.25. *Si X es descomponible e irreducible entre p y q entonces para cada composante K de X, se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

a) $p \in K$,

b) $q \in K$,

c) *si $p, q \in K$, entonces $K = X$.*

Demostración. Ya que X es descomponible, $X = A \cup B$ para algunos $A, B \in C(X) - \{X\}$.
Por hipótesis $\{p, q\} \nsubseteq A$ y $\{p, q\} \nsubseteq B$. Podemos suponer que $p \in A - B$ y $q \in B - A$. Sea $r \in X$ tal que $K = \sum_r^X$, notemos que $r \in A$ ó $r \in B$. Si $r \in B$, entonces $q \in \sum_r^X = K$ y si $r \in A$ entonces $p \in \sum_r^X = K$.
Ahora supongamos que tanto $p, q \in K = \sum_r^X$. Por definición existen $E, F \in C(X) - \{X\}$ tales que $p, r \in E$ y $q, r \in F$, así $E \cup F$ es un continuo de X que contiene a p y q, y por tanto $E \cup F = X$. Ya que $E \cup F \subset K$, concluimos que $X = K$. □

Teorema 3.1.26. *Si X es descomponible entonces X tiene exactamente una o tres composantes distintas. De manera más precisa, si X no es irreducible, X tiene una composante y si X es irreducible, X tiene 3 composantes.*

Demostración. Supongamos que X no es irreducible. Sea $x \in X$. Para cada $y \in X$, existe $C_y \in C(X) - \{X\}$, tal que $x, y \in C$, es decir $y \in \sum_x^X$. Por lo tanto $X = \sum_x^X$. Concluimos que X tiene una sola composante, a saber X.

Supongamos ahora que X es irreducible entre un par de puntos p y q. Recordemos que por ser X descomponible, X es una composante. Ahora, sea K una composante de X y supongamos que $K \neq X$.

Por el teorema anterior, se tiene que, K no puede tener a ambos p y q, así que supongamos en un primer caso, que $q \notin K$ y $p \in K$. Elijamos $r \in X$ tal que $\sum_r^X = K$. Mostraremos que $K = \sum_p^X$.
Sea $x \in K$. Ya que $p, x \in K$, consideremos $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $r, p \in A$ y $r, x \in B$. Con esto $A \cup B \subset K = \sum_r^X$. Como $A \cup B$ es subcontinuo de X y $K \subsetneq X$, entonces $q \notin A \cup B$, así que $A \cup B \in C(X) - \{X\}$ y con esto $x \in \sum_p^X$. Por lo tanto, $K \subset \sum_p^X$.
Sea $y \in \sum_p^X$. Tomemos $C \in C(X) - \{X\}$ tal que $p, y \in C$, en particular $q \notin C$. También existe $D \in C(X) - \{X\}$ tal que $p, r \in D$, este subcontinuo al ser propio tampoco contiene a q. Con esto $C \cup D$ es un subcontinuo que no contiene a q, es decir, $C \cup D \in C(X) - \{X\}$ y además $y, r \in C \cup D$, entonces $y \in \sum_r^X = K$. Por lo tanto $\sum_p^X \subset K$.
De las dos contenciones mostradas, concluimos que $K = \sum_p^X$.

De manera análoga se concluye que $K = \sum_q^X$ en el caso que $p \notin K$ y $q \in K$. Por lo que cualquier composante de X es alguna de las siguientes: X, $\sum_p^X$ o $\sum_q^X$. □

Lo siguiente que mostramos es una caracterización del concepto de indescomponibilidad en términos de composantes y de irreducibilidad (corolario 3.1.29), pero antes mostraremos un par de resultados que se cumplen en la clase de continuos indescomponibles.

Teorema 3.1.27. *Si X es un continuo indescomponible y $x \in X$, entonces x es punto de irreducibilidad (es decir, no existe punto p, tal que X=irr(x,p)). Mas aún, existe $J \subset X$, un conjunto no numerable de puntos de X, tal que X es irreducible entre cada par de puntos en J.*

Demostración. La primera parte se sigue del hecho de que en cualquier continuo indescomponible las composantes son ajenas dos a dos y la cantidad de composantes son no numerables.

Para la segunda parte, consideremos a $\mathbb{C} = \{\sum_x^X : x \in X\}$ la familia de composantes de X. Sea $J \subset X$ tal que $\mathbb{C} = \{\sum_x^X : x \in X\} = \{\sum_x^X : x \in J\}$ y si $x, y \in J$, con $x \neq y$,

entonces $\sum_x^X \cap \sum_y^X = \emptyset$.
Ya que X es indescomponible, entonces J es no numerable. Si $x \neq y$ con $x, y \in J$ entonces $\sum_x^X \cap \sum_y^X = \emptyset$, en particular $x \notin \sum_y^X$. Con esto X es irreducible entre x y y. $\square$

El resultado anterior establece que todo punto es punto de irreducibilidad cuando el continuo es indescomponible, el regreso de este resultado también es cierto y lo presentamos a continuación.

Teorema 3.1.28. *Si para cada $x \in X$, x es un punto de irreducibilidad, entonces X es indescomponible.*

Demostración. Sea $p \in X$, por hipótesis existe $y \in X$ tal que $y \notin \sum_p^X$. Por tanto $\sum_p^X \neq X$. Así que X es indescomponible, pues en un continuo descomponible X es la composante de alguno de sus puntos. $\square$

Como consecuencia de los dos resultados anteriores, tenemos la siguiente caracterización de un continuo indescomponible.

Corolario 3.1.29. *Si X es un continuo, los siguentes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es indescomponible.*
2. *Para cada $p \in X, \sum_p^X \neq X$.*
3. *Para cada $p \in X$, p es un punto de irreducibilidad de X.*

El teorema 3.1.27 muestra que si X es un continuo indescomponible, entonces existe $J \subset X$ un conjunto no numerable de X tal que, X es irreducible entre cada par de puntos de J. El regreso es también cierto y se puede mejorar pues basta que $|J| = 3$.

Teorema 3.1.30. *Un continuo X es indescomponible si y solo si existe $J \subset X$ con $|J| = 3$, tal que X es irreducible entre cada par de puntos distintos de J.*

Demostración. La ida se sigue del teorema 3.1.27.
Para el regreso, supongamos que $J = \{a, b, c\}$ y por contradicción supongamos que X es descomponible, es decir, $X = A \cup B$ con $A, B \in C(X) - \{X\}$. Por el principio del palomar $|A \cap J| \geq 2$ ó $|B \cap J| \geq 2$ lo cual contradice que X es irreducible entre cada par de elementos de J, por lo tanto, X es indescomponible. $\square$

El siguiente resultado muestra que cuando consideramos un continuo X y $p \in X$ un punto de irreducibilidad, entonces podemos considerar cualquier cantidad finita de subcontinuos propios que contengan a p y no podremos completar con esos subcontinuos a X.

Lema 3.1.31. *Si $C_1, \ldots, C_k$ son subcontinuos propios de X y p un punto de irreducibilidad de X tal que $p \in C_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $X \neq \bigcup_{i=1}^k C_i$*

Demostración. Sea $x \in X - \sum_p^X$ el cual existe pues p es un punto de irreducibilidad de X, entonces no existe un subcontinuo propio que contenga a p y a x, en particular $x \notin C_i$ para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, por tanto $X \neq \bigcup_{i=1}^k C_i$. □

Una consecuencia del lema 3.1.15 es que si p es un punto de irreducibilidad de X, entonces el continuo X no se puede expresar como la unión de dos subcontinuos que contengan a p, el regreso también es cierto, sin embargo es mucho más complejo de probar y lo ponemos hasta este punto ya que tenemos más conocimientos sobre el concepto de irreducibilidad; esta caracterización sobre la irreducibilidad se debe a Kuratowski y se presenta a continuación.

Teorema 3.1.32 (Kuratowski)**.** *Sean X un continuo y $p \in X$. Se tiene que p es un punto de irreducibilidad de X si y sólo si*

$$* \ X \text{ no es la unión de 2 subcontinuos propios que contienen a } p.$$

Es decir, X es irreducible si y sólo si existe $p \in X$ tal que $*$.

Demostración. La ida se sigue de manera directa del lema 3.1.15.
Para el regreso, supongamos que p satisface $*$.

Observación. Aunque el enunciado $*$ habla de dos subcontinuos propios, usando inducción es fácil deducir que, si $C_1, \cdots, C_n$ es una cantidad finita de subcontinuos propios que contienen a p entonces $\bigcup_{i=1}^n C_i \subsetneq X$.

Por contradicción, supongamos que p no es punto de irreducibilidad, es decir, $\sum_p^X = X$. Por el teorema 3.1.7, podemos suponer que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ donde $p \in C_i \in C(X) - \{X\}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} C_j$. Por lo mencionado en la observación, $A_i \in C(X) - \{X\}$, y notese que $A_i \subset A_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ además de que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Podemos suponer que $A_i \subsetneq A_{i+1}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ excluyendo los conjuntos con índice $i+1$ en donde $A_i = A_{i+1}$. Ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $x_i \in A_{i+1} - A_i$, y como X es compacto se tiene que $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a algún punto $x \in X$.
Sea $i \in \mathbb{N}$, si $j \geqslant i$, tenemos que $x_j \in X - A_i$, así que $x \in \overline{X - A_i}$.
Por otro lado existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_m$, por tanto

$$A_m \cap (\overline{X - A_i}) \neq \emptyset,$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, $X - A_m = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_i - A_m)$.
Puesto que cada conjunto A_i es cerrado en X y cada $A_i - A_m$ es abierto en A_i, $A_i - A_m =$

$\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} U_{j,i}$ donde cada conjunto $U_{j,i}$ es abierto en A_i de manera tal que $B_{j,i} := \overline{U_{j,i}} \subset A_i - A_m$, y por tanto

$$A_i - A_m \;\; = \;\; \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{j,i} \quad \text{donde } B_{j,i} \text{ es cerrado en } X.$$

De lo anterior, $X - A_m = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_{j,i}$, donde cada conjunto $B_{i,j}$ es cerrado en X.

Como $X - A_m$ tiene interior no vacío, el Teorema de Baire implica que existen $j, n \in \mathbb{N}$ tales que $B_{j,n}$ tiene interior no vacío, por lo que $A_n - A_m$ tiene interior no vacío, es decir $\overline{X - (A_n - A_m)} \neq X$.
Obsérvese que

$$\overline{(X - (A_n - A_m))} = \overline{(X - A_n)} \cup A_m,$$

por lo que $\overline{X - A_n} \cup A_m \neq X$. Mostraremos que $\overline{X - A_n} \cup A_m$ es un continuo. Para esto, basta mostrar que $\overline{X - A_n}$ es conexo ya que $\overline{X - A_n} \cap A_m \neq \emptyset$.
Supongamos por el contrario que no es conexo, en cuyo caso $X - A_n = E \cup F$, con $E \cap F = \emptyset$ y E y F cerrados en X. Los conjuntos E y F satisfacen las siguientes dos igualdades:

$$X = (A_n \cup E) \cup (A_n \cup F)$$

y

$$A_m = (A_n \cup E) \cap (A_n \cup F).$$

Ya que $A_n \cup E$ y $A_n \cup F$ son subcontinuos propios cuya unión es X y ambos contienen a p, obtenemos una contradicción a la hipótesis $*$. Por lo tanto $X - A_n$ y así $\overline{X - A_n}$ es conexo.

Sabiendo ahora que $\overline{X - A_n}$ es subcontinuo y por tanto $\overline{X - A_n} \cup A_m$ es un subcontinuo propio que contiene a p, tenemos que $(\overline{X - A_n} \cup A_m) \cup A_n = X$, es decir, X se puede expresar como la unión de dos subcontinuos propios que contienen a p, contradiciendo $*$. Esta contradicción surgió de suponer que $X = \sum_p^X$, por lo que $\sum_p^X \subsetneq X$ y por tanto p es punto de irreducibilidad de X. $\square$

La prueba anterior muestra también el siguiente resultado.

Proposición 3.1.33. *Si X es un continuo, $p \in X$ y $\sum_p^X = X$, entonces existen $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$ y $p \in A \cap B$.*

3.2. Construcción de un continuo indescomponible

En esta sección daremos un ejemplo de un continuo indescomponible, usando las herramientas de irreducibilidad de la sección anterior para detectar continuos indescomponibles.

Consideremos como espacio topológico a $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, y consideremos primero la siguiente definición.

Definición 3.2.1. ***Una cadena simple*** *en* $\mathbb{R}^2$ *es una familia finita y ordenada de conjuntos en* $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ *tal que* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, *si y solo si* $|i - j| \leq 1$. *Los elementos de* $\mathcal{C}$ *se dice* ***eslabones de*** $\mathcal{C}$ *y diremos que* $\mathcal{C}$ ***va de*** $\overline{x}$ ***a*** $\overline{y}$***, pasando por*** $\overline{z}$ *si:*

- $\overline{x} \in U_i$ *si y solo si* $i = 1$,
- $\overline{y} \in U_j$ *si y solo si* $j = n$,
- $\overline{z} \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i - (U_1 \cup U_n)$.

Con lo anterior construiremos un continuo indescomponible. Fijemos tres puntos distintos a, b, $c \in \mathbb{R}^2$.

Como primer paso, consideremos una cadena simple $\mathcal{C}_1$ formada por eslabones que son bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$ que va de a a c, pasando por b, de manera que todos los eslabones tengan diametros menores que 1. Notese que $X_1 = \overline{\cup \mathcal{C}_1}$, el cual es un continuo y a, b, $c \in Int_{\mathbb{R}^2}(X_1)$.

Como segundo paso, sea $\mathcal{C}_2$ una cadena simple de b a c, pasando por a, tal que $\cup\mathcal{C}_2 \subseteq \cup\mathcal{C}_1$ y cada elemento de $\mathcal{C}_2$ es una bola abierta de diametro menor que $\frac{1}{2}$. Sea $X_2 = \overline{\cup\mathcal{C}_2}$, el cual es un continuo y a, b, $c \in Int_{\mathbb{R}^2}(X_2)$.

Para el tercer paso, consideremos $\mathcal{C}_3$ una cadena simple de b a a, pasando por c, tal que $\cup\mathcal{C}_3 \subseteq \cup\mathcal{C}_2$ y los elementos de $\mathcal{C}_3$ son bolas abiertas de diametro menor que $\frac{1}{3}$. Sea $X_3 = \overline{\cup\mathcal{C}_3}$, el cual es un continuo y a, b, $c \in Int_{\mathbb{R}^2}(X_3)$. Por construcción, es claro que $X_3 \subseteq X_2 \subseteq X_1$.

De manera general, una vez construida la cadena simple $\mathcal{C}_n$ y el continuo $X_n = \overline{\cup\mathcal{C}_n}$, cumplen:

- Si $n = 3m$, $\mathcal{C}_{n+1}$ es una cadena simple de a a c, pasando por b, de tal manera que $\cup\mathcal{C}_{n+1} \subseteq \cup\mathcal{C}_n$ y los eslabones de $\mathcal{C}_{n+1}$ son bolas abiertas de díametro menor que $\frac{1}{n+1}$.

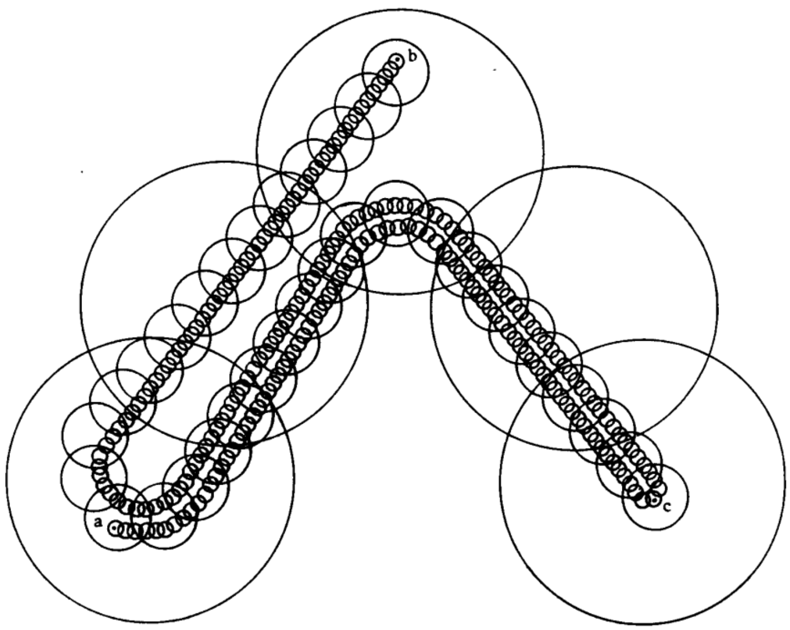

Figura 3.1: Cadenas $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$.

- Si $n = 3m+1$, $\mathcal{C}_{n+1}$ es una cadena simple de b a c, pasando por a, de tal manera que $\cup\mathcal{C}_{n+1} \subseteq \cup\mathcal{C}_n$ y los eslabones de $\mathcal{C}_{n+1}$ son bolas abiertas de díametro menor que $\frac{1}{n+1}$.
- Si $n = 3m+2$ $\mathcal{C}_{n+1}$, como una cadena simple de a a b, pasando por c, de tal manera que $\cup\mathcal{C}_{n+1} \subseteq \cup\mathcal{C}_n$ y los eslabones de $\mathcal{C}_{n+1}$ son bolas abiertas de díametro menor que $\frac{1}{n+1}$.

En cualquiera de los tres casos, se define $X_{n+1} = \overline{\cup\mathcal{C}_{n+1}}$. La construcción de los primeros tres pasos se puede visualizar en la figura 3.1, la imagen de dicha figura fue tomada de [5, Figura 1.10, p. 8].

Definamos $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, el cual es un continuo y a, b, $c \in X$.

Afirmación: Si Y es un subcontinuo de X tal que a, $b \in Y$, entonces $Y = X$, es decir $X = irr(a,b)$.
Por contradicción, supongamos que $Y \subsetneq X$. Sea $p \in X - Y$. Como Y es cerrado, $X - Y$ es abierto en X.
Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \subseteq X - Y$ (la bola abierta en X). Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = 3m+2$ y $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{4}$, para algún $m \in \mathbb{N}$. En este caso la cadena simple $\mathcal{C}_n$ cumple que p se encuentra en la cerradura de alguno de sus eslabones, digamos que $p \in \overline{C_j}$, con esto $Y \cap \overline{C_j} = \emptyset$. Si $\mathcal{C}_n = \{C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_r\}$, entonces $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{j-1} \overline{C_i} \cup \bigcup_{i=j+1}^{r} \overline{C_i}$, lo cual no

puede ocurrir ya que Y es conexo y $a \in Y \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} \overline{C_i}$ y $b \in Y \cap \bigcup_{i=j+1}^{r} \overline{C_i}$. Por lo tanto $Y = X$.

De manera similar, se puede verificar que $X = irr(a,c)$ y $X = irr(b,c)$. Por el teorema 3.1.30, concluimos que X es un continuo indescomponible.

Capítulo 4

Irreducibilidad en niveles de Whitney

En este capítulo estudiaremos una propiedad que garantice la irreducibilidad de los niveles de Whitney, esta propiedad es conocida como la propiedad cubriente y nos servirá para justificar las afirmaciones en los ejemplos del siguiente capítulo.

4.1. Propiedad cubriente

Definición 4.1.1. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Se dice que X tiene **la propiedad cubriente relativa a** μ (lo que escribiremos como $X \in CP(\mu)$), si para cada $t \in (0,1)$, ningún subcontinuo propio $\mathcal{L}$ de $\mu^{-1}(t)$ cumple que $\bigcup \mathcal{L} = X$.*

Ejemplo: Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $X \in CP(\mu)$, para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$, en efecto, es $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, $t \in (0,1)$ y $\mathcal{L}$ es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}(t)$, entonces $\cup\mathcal{L} \neq X$. Para verificar lo anterior, sea $A \in \mu^{-1}(t) - \mathcal{L}$. Tomemos $a \in A$.
Afirmación: $a \in X - \bigcup \mathcal{L}$.
De cumplirse que $a \in \bigcup \mathcal{L}$, existe $B \in \mathcal{L}$ tal que $a \in B$, con esto $a \in A \cap B$. Como X es herditariamente indescomponible, $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$. Ya que $A, B \in \mu^{-1}(t)$, concluimos que $A = B \in \mathcal{L}$, lo que genera una contradicción. Por lo tanto $a \in X - \bigcup \mathcal{L}$ y así $\bigcup \mathcal{L} \neq X$.

Ejemplo: Si $X = S^1$, consideremos $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Sea $A \in \mu^{-1}(t)$, tal que A tiene extremos p y q. Consideremos a $\mathcal{L} = \{B \in C(X) \cap \mu^{-1}(t) : p \notin B\} \cup A$. Observese que $\mathcal{L}$ es un continuo propio de $\mu^{-1}(t)$, pues no contiene a elementos que tengan a p en su interior, por otra parte, es fácil verificar que $\bigcup \mathcal{L} = X$, lo que concluye que X no tiene la propiedad cubriente relativa a μ.

Teorema 4.1.2. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $X \in CP(\mu)$, entonces X es unicoherente.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que X no es unicoherente, es decir $X = A \cup B$, donde A, $B \in C(X)$ y $A \cap B$ no es conexa. Como $A \cap B$ es conjunto cerrado, podemos suponer que $A \cap B = K \cup L$, donde K y L son cerrados, ajenos y no vacíos en X.
Sea $p \in K$ y $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = B$. Sea $t_0 = \max\{t \in [0,1] : \alpha(t) \subseteq K\}$. En este caso $t_0 < 1$ y $\alpha(t_0) \cap L = \emptyset$, además de que $\alpha(t_0) \subseteq K$. De forma similar, sea $\gamma : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\gamma(0) = \{p\}$ y $\gamma(1) = A$.
Sea $t_1 = \max\{t \in [0,1] : \gamma(t) \subseteq L\}$ y notemos nuevamente que $t_1 < 1$, $\gamma(t_1) \subseteq L$ y $\gamma(t_1) \cap K = \emptyset$.
Por la continuidad de α y γ, existen t'_0 y t'_1 tales que $t_0 < t'_0 < 1$, $t_1 < t'_1 < 1$ y $\alpha(t'_0) \cap K = \emptyset = \gamma(t'_1) \cap L$.
Sea $s_0 = \mu(\alpha(t'_0) \cup \gamma(t'_1))$. En este caso $0 < s_0$.
Como $\mu|_{C(A)}$ y $\mu|_{C(B)}$ son funciones de Whitney,

$$A = \cup \mu|_{C(A)}^{-1}(s_0) = \cup \mu^{-1}(s_0) \cap C(A)$$

y

$$B = \cup \mu|_{C(B)}^{-1}(s_0) = \cup \mu^{-1}(s_0) \cap C(B).$$

Sea $l \in L$. Por lo anterior, existen $A_0 \in C(A)$ y $B_0 \in C(B)$ tales que $A_0, B_0 \in \mu^{-1}(s_0)$ y $l \in A_0 \cap B_0$.
Como $A_0, B_0 \in \mu^{-1}(s_0)$ y $l \in A_0 \cap B_0$ existe una trayectoria $f : [0,1] \to \mu^{-1}(s_0)$ tal que $f(0) = A_0$, $f(1) = B_0$ y $l \in f(r)$ para todo $r \in [0,1]$. En este caso $f([0,1])$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(s_0)$ y además

$$(\mu^{-1}(s_0) \cap C(A)) \cap f([0,1]) \neq \emptyset$$

y

$$(\mu^{-1}(s_0) \cap C(B)) \cap f([0,1]) \neq \emptyset.$$

Sea $\mathcal{A} = (\mu|_{C(A)}^{-1})(s_0) = \cup f([0,1]) \cup (\mu|_{C(B)}^{-1}(s_0))$, el cual es un subcontinuo de $\mu^{-1}(s_0)$, tal que $\cup\mathcal{A} = X$. En este caso $\alpha(t'_0) \cup \gamma(t'_1) \in \mu^{-1}(s_0) - \mathcal{A}$. Por lo tanto X no tiene la propidad cubriente respecto a μ, generando una contradicción. Por lo tanto X es unicoherente. □

Otra propiedad necesaria para tener la propiedad cubriente se muestra en el siguiente resultado. Para lo cual recordemos que un continuo X es llamado *triodo* si existe $Z \in C(X)$ tal que $X - Z$ puede escribirse como la unión de tres conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X.

Teorema 4.1.3. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $X \in CP(\mu)$ entonces X no es triodo.*

Demostración. Supongamos que existe $N \in C(X)$ tal que $X - N = \bigcup_{i=1}^{3} S_i$, donde S_1, S_2, S_3 son cerrados ajenos y no vacíos.

Para cada $i \in \{1,2,3\}$, sea $B_i = N \cup S_i$, notemos que B_1, B_2, $B_3 \in C(X)$. Sea $t_0 \in (0,1)$ tal que $\mu(N) < t_0 < \min\{\mu(B_i) : i \in \{1,2,3\}\}$.
Como $N \subset \bigcap_{i=1}^{3} B_i$, se tiene que $B_1 \cup B_2$, $B_2 \cup B_3$, $B_3 \cup B_1 \in C(X)$.
Si $i, j \in \{1,2,3\}$ y $i \neq j$ notemos que $\mu|_{C(B_i \cup B_j)}$ es una función de Whitney. Así $(\mu|_{C(B_i \cup B_j)})^{-1}(t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cap C(B_i \cap B_j)$ es un subcontinuo de $C(X)$.
Sean $\Gamma_1 = \mu^{-1}(t_0) \cap C(B_1 \cup B_2)$ y $\Gamma_2 = \mu^{-1}(t_0) \cap C(B_2 \cup B_3)$.
Por otra parte $\mu(N) < t_0 \leq \mu(B_2)$ y $N \subsetneq B_2$. Con lo anterior existe $K \in C(B_2)$, tal que $\mu(K) = t_0$. Por lo tanto $K \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.
Concluimos que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es un subcontinuo de $C(X)$. Por otra parte

$$\bigcup(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \bigcup \Gamma_1 \cup \bigcup \Gamma_2 = (B_1 \cup B_2) \cup (B_2 \cup B_3) = X.$$

Ya que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ y $\bigcup(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = X$, entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \mu^{-1}(t_0)$ pues $X \in CP(\mu)$. Como $N \subsetneq B_1$ y $\mu(N) < t_0 \leq \mu(B_1)$, podemos tomar t_1 tal que $\mu(N) < t_1 < t_0 \leq \mu(B_1)$. De esta forma existe $L_0 \in C(B_1)$ tal que $\mu(L_0) = t_1$ y $N \subseteq L_0$. Ya que $\mu(N) \leq \mu(L_0)$, $L_0 \cap S_1 \neq \emptyset$. Como $N \subseteq B_3$, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = N$ y $\alpha(1) = B_3$. Sea $f : [0,1] \to C(X)$ dada por $f(t) = \alpha(t) \cup L_0$.
Notemos que

$$\mu(f(0)) = \mu(\alpha(0) \cup L_0) = \mu(L_0) = t_1 < t_0 \leq \mu(B_3) \leq \mu(B_3 \cup L_0) = \mu(f(1)).$$

Así existe $t_1 \in (0,1)$ tal que $\mu(f(t_2)) = t_0$, en este caso $f(t_2) = (\alpha(t_2) \cup L_0) \cap S_3 \neq \emptyset$.
Finalmente $\alpha(t_2) \cup L_0 \in \mu^{-1}(t_0)$ y $(\alpha(t_0) \cup L_0) \cap S_1 \neq \emptyset$, $(\alpha(t_0) \cup L_0) \cap S_3 \neq \emptyset$.
El cual cumple que $(\alpha(t_2) \cup L_0) \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Por lo tanto X no es un triodo. □

Una consecuencia inmediata de los dos resultados anteriores es el siguiente, el cual se deduce de [5, 11.34, p. 216].

Corolario 4.1.4. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $X \in CP(\mu)$ entonces X es irreducible.*

El siguiente resultado relaciona la propiedad cubriente con la irreducibilidad de los niveles de Whitney.

Teorema 4.1.5. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $X \in CP(\mu)$, entonces para cada $t \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t)$ es irreducible.*

Demostración. Como $X \in CP(\mu)$, $X = irr(p,q)$ para algunos p, $q \in X$. Ya que $\bigcup \mu^{-1}(t) = X$ para todo $t \in (0,1)$, existen A, $B \in \mu^{-1}(t)$ tal que $p \in A$ y $q \in B$.
Afirmación: $\mu^{-1}(t)$ es irreducible entre A y B.
Para esto, sea $\mathcal{C}$ un continuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que A, $B \in \mathcal{C}$. De este modo $\bigcup \mathcal{C}$ es un continuo de X tal que p, $q \in \mathcal{C}$, esto concluye que $\bigcup \mathcal{C} = X$, lo que también concluye que $\mathcal{C} = \mu^{-1}(t)$ pues $X \in CP(\mu)$. □

4.2. Irreducibilidad en niveles de Whitney

En esta sección mostramos que los resultados anteriores, no son dependientes de la función de Whitney que se elija, en el sentido de que una vez que X tiene la propiedad cubriente relativo a una función μ, la tendrá respecto a cualquier otra función de Whitney. Primero requerimos del siguiente concepto.

Definición 4.2.1. *Sean X un continuo y $t_0 \in (0,1)$. Si $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney se dice que X tiene* ***la propiedad cubriente en*** t_0 ***respecto a*** *μ, si cada que $\mathcal{A} \in C(\mu^{-1}(t_0))$ y $\bigcup \mathcal{A} = X$, se cumple que $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t_0)$.*

Hemos probado que si un continuo tiene la propiedad cubriente entonces sus niveles son irreducibles, en orden de dar el regreso de este resultado primero veamos el siguiente sencillo lema.

Lema 4.2.2. *Si $X = irr(p,q)$ y X es arco conexo entonces X es un arco.*

Demostración. Como X es arco conexo, existe un arco $\alpha \subseteq X$ tal que p, $q \in \alpha$. Por lo tanto $\alpha = X$. $\square$

Teorema 4.2.3. *Si X es un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney y existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t_0)$ es irreducible, entonces X tiene la propiedad cubriente en t_0, respecto a μ.*

Demostración. Sean M_1, $M_2 \in \mu^{-1}(t_0)$, tales que $\mu^{-1}(t_0) = irr(M_1, M_2)$ y Γ un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ tal que $\cup\Gamma = X$.
Demostraremos que $\Gamma = \mu^{-1}(t_0)$, para esto basta con mostrar que M_1, $M_2 \in \Gamma$.
Sea $i \in \{1,2\}$. Definimos α_i, como sigue:

- Si $M_i \in \Gamma$, sea $\alpha_i = \{M_i\}$.
- Si $M_i \notin \Gamma$, como $\cup\Gamma = X$, entonces $\cup\Gamma \cap M_i \neq \emptyset$. De esta forma existe $G_i \in \Gamma$ tal que $G_i \cap M_i \neq \emptyset$. Ya que $M_i \notin \Gamma$ se tiene que $G_i \neq M_i$. De esta forma $G_i, M_i \in \mu^{-1}(t_0)$, $G_i \neq M_i$ y $G_i \cap M_i \neq \emptyset$, así que, existe un arco $\alpha : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ tal que $\alpha(0) = M_i$ y $\alpha(1) = G_i$. Sea $k_0 = \min\{t \in [0,1] : \alpha(t) \in \Gamma\}$, y notemos que $k_0 > 0$ pues $\alpha(0) = M_i \notin \Gamma$. Redefinimos $G_i := \alpha(k_0)$. En este caso $G_i \in \Gamma$ y $\alpha|_{[0,k_0]} : [0,k_0] \to \mu^{-1}(t_0)$ es un arco con extremos M_i y G_i tal que $(\alpha|_{[0,k_0]})([0,k_0]) \cap \Gamma = \{G_i\}$. Sea $\alpha_i = \alpha([0,k_0])$. Con esto quedan definidos α_1 y α_2.

Continuaremos la prueba por contradicción, supongamos que $\{M_1, M_2\} \nsubseteq \Gamma$.
Sin pérdida de generalidad supongamos que $M_1 \notin \Gamma$, en este caso está definido $G_1 \in \Gamma$, $\alpha_1 = \alpha([0,k_0])$, donde $G_1 \neq M_1$.
Fijamos $x_1 \in M_1 - G_1$, el cual existe pues no pasa que $M_1 \subseteq G_1$. Como α_1 es un arco, sea $f : [0,1] \to \alpha[(0,1)]$ una función, tal que $f(0) = M_1$ y $f(1) = G_1$. Consideremos al

conjunto cerrado $S = \{s \in [0,1] : x_1 \in f(s)\}$, el cual es no vacío y acotado superiormente, por tanto existe $s_1 = \sup S$. Como $x_1 \notin f(1) = G_1$ tenemos que $0 \leq s_1 < 1$. Como $\cup\Gamma = X$ y $x_1 \in X$, existe $X_1 \in \Gamma$ tal que $x_1 \in X_1$. De esta forma $f(s_1) \neq X_1$, pero $x_1 \in f(s_1) \cap X_1$.
Por el lema 4.2.2 existe un arco $\mathcal{B} \subseteq \mu^{-1}(t_0)$ con extremos $f(s_1)$ y X_1, tal que si $B \in \mathcal{B}$, $x_1 \in B$.
Como para cada $B \in \mathcal{B}$, $x_1 \in B$, tenemos por la definición de s_1 que

$$(1) \quad \mathcal{B} \cap \alpha([0,1]) \subseteq f([0,s_1]),$$

por construcción,

$$(2) \quad f([0,s_1]) \cap \Gamma = \emptyset,$$

como $f(s_1) \in \mathcal{B} \cap \alpha([0,1])$, se tiene que

$$(3) \quad \mathcal{B} \cap \alpha_1 \neq \emptyset,$$

y como $X_1 \in \mathcal{B} \cap \Gamma$, entonces,

$$(4) \quad \mathcal{B} \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Como $\mathcal{B}$ es conexo, por las propiedades anteriores se tiene que

$$(5) \quad \mathcal{B} \nsubseteq \Gamma \cup f([0,s_1]),$$

más aún $\mathcal{B} \nsubseteq \Gamma \cup \alpha_1$.
Por otra parte $\Gamma \cup \alpha_1 \cup \alpha_2$, es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ tal que $M_1, M_2 \in \Gamma \cup \alpha_1 \cup \alpha_2$ y así $\Gamma \cup \alpha_1 \cup \alpha_2 = \mu^{-1}(t_0)$.
Como $\mathcal{B}$ es un continuo en $\mu^{-1}(t_0)$, por (5) $\mathcal{B} \cap \alpha_2 \neq \emptyset$. De esta manera $\alpha_1 \cup \mathcal{B} \cup \alpha_2$ es un continuo en $\mu^{-1}(t_0)$ que nuevamente contiene a M_1 y M_2, así que $\alpha_1 \cup \mathcal{B} \cup \alpha_2 = \mu^{-1}(t_0)$. Por lo tanto $\mu^{-1}(t_0)$ es un continuo arco conexo e irreducible entre M_1 y M_2.
Usando el lema anterior $\mu^{-1}(t_0) = \alpha_1 \cup \mathcal{B} \cup \alpha_2$ es un arco con extremos M_1 y M_2. Como $f(0) = M_1$ y $s_1 < 1$, entonces $\mathcal{B} \subseteq f([0,s_1])$ y $\mathcal{B} \cap \Gamma \neq \emptyset$, pero $f([0,s_1]) \cap \Gamma = \emptyset$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $M_1 \in \Gamma$ y analogamente se prueba que $M_2 \in \Gamma$.

□

El siguiente resultado se sigue relacionando los teoremas 4.1.5 y 4.2.3

Corolario 4.2.4. *Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$X \in CP(\mu)$.*

2. *$\mu^{-1}(t_0)$ es irreducible para todo $t_0 \in (0,1)$.*

El siguiente teorema mostrará que la propiedad cubriente no depende de la elección de la función de Whitney.

Teorema 4.2.5. *Sean X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $X \in CP(\mu)$ y $\mu_1 : C(X) \to [0,1]$ es otra función de Whitney, entonces $X \in CP(\mu_1)$.*

Demostración. Sean $t_1 \in (0,1)$ y Λ_1 un subcontinuo propio de $\mu_1^{-1}(t_1)$. Mostraremos que $\cup\Lambda_1 \neq X$.
Sean $A_0 \in \mu_1^{-1}(t_1) - \Lambda_1$ y $t_0 = \mu(A_0)$. Definimos

$$\Lambda = \{B \in \mu^{-1}(t_0) : \text{ existe } K \in \Lambda_1, \text{ tal que } B \subseteq K \text{ ó } K \subseteq B\}.$$

Veamos que se cumplen los siguientes dos puntos:

1. $\cup\Lambda_1 \subseteq \cup\Lambda$.

2. Λ es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}(t_0)$.

1. Para ver que $\cup\Lambda_1 \subseteq \cup\Lambda$, sea $x \in \cup\Lambda_1$, con esto existe $K \in \Lambda_1$ tal que $x \in K$. Se tienen dos casos:

   a) $\mu(K) \geq t_0$. En este caso, como $\{x\} \subseteq K$, existe $B \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $\{x\} \subseteq B \subseteq K$, esto hace que $B \in \Lambda$ y por tanto $x \in \cup\Lambda$.

   b) $\mu(K) < t_0$. Como $K \subseteq X$, existe $B \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $K \subseteq B \subseteq X$ y así $x \in K \subseteq B \in \Lambda$, es decir $x \in \cup\Lambda$.

   De los dos casos concluimos que $\cup\Lambda_1 \subseteq \cup\Lambda$.

2. Ahora mostraremos que Λ es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}(t_0)$. Por definición se tiene que $\Lambda \subset \mu^{-1}(t_0)$ y $A_0 \in \mu^{-1}(t_0)$.

   Afirmación:$A_0 \notin \Lambda$.
   Supongamos que $A_0 \in \Lambda$. En este caso existe $K \in \Lambda_1$, tal que $A_0 \subseteq K$ ó $K \subseteq A_0$. Como $\Lambda_1 \subseteq \mu_1^{-1}(t_1)$ y $A_0 \in \mu_1^{-1}(t_1)$, concluimos que $K = A_0$, es decir $A_0 \in \Lambda_1$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $A_0 \notin \Lambda$. Esto significa que $\Lambda \subsetneq \mu^{-1}(t_0)$.

   Ahora mostraremos que Λ es un continuo. Para probar que Λ es cerrado en $\mu^{-1}(t_0)$, sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Λ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B \in \mu^{-1}(t_0)$. Mostraremos que $B \in \Lambda$.
   Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $K_n \in \Lambda_1$, tal que $B_n \subseteq K_n$ ó $K_n \subseteq B_n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B_n \subseteq K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien $K_n \subseteq B_n$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Como $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión en el compacto Λ_1, podemos suponer que $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K \in \Lambda_1$. Así $B \subseteq K$ ó $K \subseteq B$. Esto concluye que $B \in \Lambda$.

Para ver ahora que Λ es conexo, supongamos por contradicción que $\Lambda = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde Γ_1 y Γ_2 son dos subespacios cerrados ajenos y no vacíos en Λ.
Definimos para $i \in \{1, 2\}$,

$$\Gamma_i^1 = \{A \in \Lambda_1 : \text{ existe } G \in \Gamma_i \text{ tal que } G \subseteq A \text{ ó } A \subseteq G\}.$$

Afirmación: $\Lambda_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1$ y los conjuntos Γ_1^1 y Γ_2^1 son cerrados, ajenos y no vacíos (esto generará la contradicción deseada).

Para ver que $\Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1 = \Lambda_1$ basta con mostrar que $\Lambda_1 \subseteq \Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1$.
Sea $L \in \Lambda_1$, usando los casos $\mu(L) \geq t_0$ ó $t_0 > \mu(L)$. Existe $A \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $A \subseteq L$ ó $L \subseteq A$. Por definición $A \in \Lambda = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y así $L \in \Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1$.
Por lo tanto $\Lambda_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1$.
Usando que $\Gamma_1 \neq \emptyset \neq \Gamma_2$, concluimos que $\Gamma_1^1 \neq \emptyset \neq \Gamma_2^1$. Por otro lado, ya que Λ_1 es un continuo y por la compacidad de Γ_1 y Γ_2, podemos concluir que Γ_1^1 y Γ_2^1 son cerrados en Λ.
Finalmente mostraremos que $\Gamma_1^1 \cap \Gamma_2^1 = \emptyset$.
Supongamos que existe $A \in \Gamma_1^1 \cap \Gamma_2^1$. Tenemos dos casos:

- $\mu(A) \geq t_0$. Como $A \in \Gamma_i^1$ y $\Gamma_i \subseteq \Lambda \subseteq \mu^{-1}(t_0)$, existe $G_i \in \Gamma_i$ tal que $G_i \subseteq A$. Por otra parte, sabemos $C(A) \cap \mu^{-1}(t_0) = \mu|_{C(A)}^{-1}(t_0)$ es un continuo, también $C(A) \cap \mu^{-1}(t_0) \subseteq \Lambda = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, por lo que $C(A) \cap \mu^{-1}(t_0)$ es un subcontinuo de Λ.
  Tenemos que $G_i \in C(A) \cap \mu^{-1}(t_0) \cap \Gamma_i$, es decir $(C(A) \cap \mu^{-1}(t_0)) \cap \Gamma_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$, lo cual contradice la conexidad de $C(A) \cap \mu^{-1}(t_0)$.
- $\mu(A) < t_0$. Como $A \in \Gamma_i^1$ y $\Gamma_i \subsetneq \Lambda \subseteq \mu^{-1}(t_0)$ existe $G_i \in \Gamma_i$ tal que $A \subseteq G_i$. En este caso, $A \subseteq G_1 \cap G_2$, $G_1, G_2 \in \mu^{-1}(t_0)$ y A es un continuo. Así que, existe un arco $\alpha \subseteq \mu^{-1}(t_0)$ con extremos G_1 y G_2, cuyos elementos contienen a A. Por definición $\alpha \subseteq \Lambda$ generando una contradicción pues α es un continuo, $\alpha \subseteq \Lambda = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y $\alpha \cap \Gamma_1 \neq \emptyset \neq \alpha \cap \Gamma_2$.

Los puntos anteriores concluyen que $\Gamma_1^1 \cap \Gamma_2^1 = \emptyset$.

$\square$

El resultado anterior justifica la siguiente definición.

Definición 4.2.6. *Diremos que un continuo X* ***tiene la propiedad cubriente*** *($X \in CP$), si existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ tal que $X \in CP(\mu)$.*

El siguiente resultado se sigue de manera inmediata del teorema 4.1.5.

Teorema 4.2.7. *Si $X \in CP$, entonces para toda función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ y para cada $t \in (0, 1)$, se cumple que $\mu^{-1}(t)$ es irreducible.*

Capítulo 5

La no irreducibilidad no es una PWR

La propiedad Whitney reversible fue introducida por Sam B. Nadler, Jr en [4], desde entonces se han demostrado que muchas propiedades son Whitney reversible, sin embargo, todavía hay algunas propiedades para las que no se sabe si son o no Whitney reversibles. En este capítulo expondremos el ejemplo presentado en [1], que sirve para mostrar que la no irreducibilidad no es una propiedad de Whitney reversible (abreviado, no es una PWR). De manera adicional presentaremos un ejemplo de un continuo irreducible con algunos de sus niveles no irreducibles, este ejemplo es más sencillo que el presentado en [1], siendo esto una de las principales aportaciones de este trabajo.

Iniciaremos trabajando con el ejemplo mostrado en [1], pero antes requerimos del siguiente concepto.

Definición 5.0.1. *Sean X un espacio métrico, $D \subset X$ y $h : D \to [0,1]^n$ un homeomorfismo, donde $[0,1]^n$ es la n-celda unitaria, la cual se considera como subespacio del espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Sea $K = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n : \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cap \{0,1\} \neq \emptyset\}$. Se define la* ***frontera como variedad de D****, denotado como $\rho(D)$, como el conjunto $h^{-1}(K)$ y el* ***interior como variedad de D****, denotado por $i(D)$, como el conjunto $D - h^{-1}(K)$.*

Antes de comenzar con la construcción del ejemplo, requerimos del siguiente resultado.

Lema 5.0.2. *Sea Y un continuo. Si existe una 2-celda $D_0 \subseteq Y$, tal que $Int_Y(D_0) \neq \emptyset$, entonces Y no es irreducible.*

Demostración. Sea $y \in Int_Y(D_0)$. En este caso existe un abierto U de Y tal que $y \in U \subseteq D_0$. Sea D una 2-celda tal que $y \in D \subseteq U \subseteq Int_Y(D_0)$. En particular $i(D) \subseteq Int_Y(D_0)$. Sea $T = [-2,2]^2$ en $\mathbb{R}^2$ y $S = \rho([0,1]^2) \cup \rho([-1,0]^2) \subseteq T$. Notemos que S es un subcontinuo de T tal que $T - S$ tiene tres componentes, una de los cuales contiene a $\rho(T)$. Sea $h : T \to D$ un homeomorfismo, ya que $i(D) \subseteq Int_Y(D)$ se sigue que $Y - h(S)$ tiene al menos 3 componentes, usando el principio del palomar se puede verificar que Y no es irreducible. $\square$

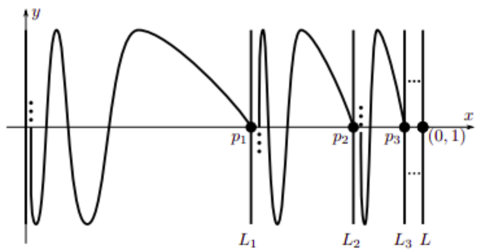

Figura 5.1: Construcción de X

Ejemplo 1

A continuación construimos un continuo X irreducible tal que si $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney y $t \in (0,1)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ no es irreducible. Para cada $n \in \mathbb{N}$ contruiremos una copia del continuo $\sin(\frac{1}{x})$ al que llamaremos Y_n, en el intervalo $\left[\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \dfrac{2^n-1}{2^n}\right] \times [-1,1]$, tal que el punto al extremo derecho de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se corresponde con $\left(\dfrac{2^n-1}{2^n}, 0\right) = p_n$.

Recordemos el cálculo del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} - \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1-2^n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Definiremos $X := \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \cup (\{1\} \times [-1,1])$, veáse la figura 5.1.

Obsérvese que:

- X es irreducible entre los puntos $p \in \{0\} \times [-1,1]$ y $q \in \{1\} \times [-1,1]$.
- Y_n es irreducible y p_n es punto de irreducibilidad de Y_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un arco ordenado en $C(X)$ con extremos $\{p_n\}$ y $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} Y_i \in C(X) - \{X\}$.

Sea $0 < t < 1$. Usando la continuidad de μ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} Y_i\right) > t$. Sea $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} Y_i$. Usando un arco ordenado desde $\{p_k\}$ hasta A, existe $B \in C(A)$ tal que $p_k \in B$ y $\mu(B) = t$. En tal caso, $B \cap (\{0\} \times [-1,1]) = \emptyset$.

Por construcción $p_k \in \left\{\dfrac{2^k-1}{2^k}\right\} \times [-1,1]$, $B \cap \left(\left\{\dfrac{2^k-1}{2^k}\right\} \times [-1,1]\right) = \{p_k\}$. Sea L_k la recta limite de X_{k+1}. En tal caso $B \cup L_k$ es un triodo, tal que $\mu(B \cup L_k) > t$. La idea es *mover* B dentro de $B \cup L_k$ en $\mu^{-1}(t)$ generando dos parámetros en L_k que generan una 2-celda. A continuación describiremos de manera analítica el continuo X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$R_n = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}x - 2^{n-1}+1}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^n-1}{2^n}\right]\right\}.$$

Veamos que la cerradura de R_n es en efecto una copia del continuo $\sin(1/x)$. Para esto primero veamos para que valores $\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}x-2^{n-1}+1}\right) = 1$,
Si $\dfrac{\pi}{2^{n-1}x - 2^{n-1}+1} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = \pi\left(\dfrac{1+4k}{2}\right)$, para algún $k \in \mathbb{N}$, es decir

$$2^{n-1}x - 2^{n-1} + 1 = \frac{2}{1+4k}, \text{ por lo que}$$

$$x = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^{n-1}+2^{n+1}k}.$$

Para ver los puntos en donde $\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}x-2^{n-1}+1}\right) = -1$, se tiene que,
$\dfrac{\pi}{2^{n-1}x - 2^{n-1}+1} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi = \pi\left(\dfrac{3+8k}{4}\right)$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

$$2^{n-1}x - 2^{n-1} + 1 = \frac{4}{3+8k},$$

$$x = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} + \frac{4}{3\cdot 2^{n-1}+2^{n+2}k}.$$

Observemos que estos puntos están sobre el intervalo $\left(\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \dfrac{2^n-1}{2^n}\right]$, a partir de cierto número natural n, los cuales se van alternando, y se observa que la cerradura de R_n, a la que denotaremos como Y_n, es una copia del continuo $\sin(1/x)$, y la segunda coordenada de su extremo derecho es

$$\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2^n-1}{2} - 2^{n-1}+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2^n-1-2^n+2}{2}}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \sin(2\pi) = 0.$$

Denotando al extremo derecho de R_n como p_n, tenemos que $p_n = \left(\dfrac{2^n-1}{2^n}, 0\right) \in R_n$.

Sea $X = \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right)} \subseteq \mathbb{R}^2$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotemos por $X_k = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{k} R_i\right)}$, y también denotaremos como $L_k = \left\{\frac{2^k - 1}{2^k}\right\} \times [-1, 1]$ (la barra límite de Y_k).
Observemos que:

- X_k es un continuo irreducible entre p_k y cualquier punto en $\{0\} \times [-1, 1]$.
- $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots$
- $\lim_{n \to \infty} X_n = X$.

Proposición 5.0.3. *Si X es el continuo descrito previamente, $\mu : C(X) \to [0, 1]$ es una función de Whitney y $t \in (0, 1)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ contiene una 2-celda con interior no vacío. En particular, usando el lema 5.0.2, se tiene que $\mu^{-1}(t)$ no es irreducible.*

Demostración. Como $t < 1$ y $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = \mu(X) = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t < \mu(X_N)$. Tomando un arco ordenado de $\{p_N\}$ a X_N, existe $A \in C(X_N)$ tal que $p_N \in A$ y $\mu(A) = t$. Como $0 < t$, existe $a \in (0, 1]$ tal que $\mu\left(\left\{\frac{2^N - 1}{2^N}\right\} \times [-a, a]\right) < t$. Para cada $u, v \in [0, a]$ consideramos $Z_{u,v} = X_N \cup \left(\left\{\frac{2^N - 1}{2^N}\right\} \times [-u, v]\right)$.
Notemos que $\mu\left(\left\{\frac{2^N - 1}{2^N}\right\} \times [-u, v]\right) < t$. Tomando un arco ordenado que inicie en $\left\{\frac{2^N - 1}{2^N}\right\} \times [-u, v]$ y termine en $Z_{u,v}$ existe un único subcontinuo $A_{u,v} \in C(Z_{u,v})$ tal que $\mu(A_{u,v}) = t$.

Consideremos a $\Delta = \{A_{u,v} \in \mu^{-1}(t) : u, v \in [0, a]\}$, la cual es una 2-celda contenida en $\mu^{-1}(t)$. Sea $(u_0, v_0) \in [0, a)^2$, tomemos $\epsilon = \text{mín}\{a - v_0, a - u_0\}$.

Afirmación: $\Lambda = \{B \in \mu^{-1}(t) : H(A_{u_0,v_0}, B) < \epsilon\} \subseteq \Delta$. Esto mostrará que el interior de Δ dentro de $\mu^{-1}(t)$ es no vacío.
Sea $B \in \Lambda$. Si $B \cap R_{N+1} \neq \emptyset$ entonces $L_N \subseteq B$ ó $B \subseteq R_{N+1}$, lo cual implica que $H(A_{u_0,v_0}, B) > \epsilon$. Esto concluye que $B \cap R_{N+1} = \emptyset$.
Así que, si $B \in \mu^{-1}(t)$ y $H(A_{u_0,v_0}, B) < \epsilon$, entonces $B = A_{u_1,v_1}$ donde $u_1, v_1 \in [0, a]$. Por lo cual $B \in \Delta$. □

En resumen el continuo construido en este ejemplo es irreducible y ninguno de sus niveles de Whitney es irreducible, es decir, la propiedad de no ser irreducible no es una propiedad de Whitney reversible.

Ejemplo 2

Terminaremos el presente trabajo de tesis, con el siguiente ejemplo, el cual es más sencillo que el ejemplo 1, también es un continuo irreducible y algunos de sus niveles de Whitney no lo son. Este ejemplo no aparece en la literatura y es una de las aportaciones de este trabajo. El continuo consiste de un rayo que se aproxima a una circunferencia como se muestra en la figura 5.2.

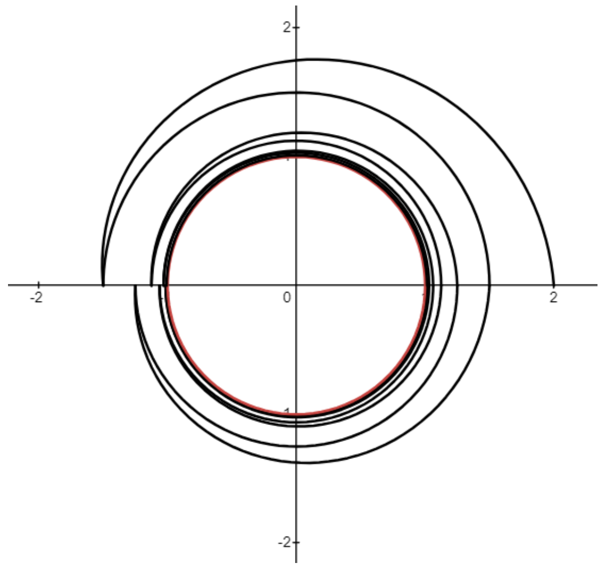

Figura 5.2: Construcción de X

Describamos de manera analitica al continuo X. Sea

$$X = \{(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0,1]\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i\right),$$

donde L_i es un arco como se describe a continuación:

- L_1 es una curva que va disminuyendo de norma, con extremos $(0,2)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, en este caso $L_1 := \left\{(-t+2)(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$.

- L_2 es la semi circunferencia en el plano $y \geq 0$ de radio $\frac{3}{2}$, es decir $L_2 := \left\{\frac{3}{2}(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$.

- L_3 es una curva que va creciendo de norma con extremos $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y $\left(1, \frac{5}{4}\right)$, esto es
$L_3 := \left\{ \left(\frac{t}{2} + 1\right)(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}.$

- L_4 es la semi circunferencia en el plano $y \leq 0$ de radio $\frac{5}{4}$, es decir
$L_4 := \left\{ \frac{5}{4}(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}.$

  Describiremos las siguientes cuatro curvas para entender la regla general de su construcción.

- L_5 es una curva que va disminuyendo de norma con extremos $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{8}\right)$, con esto
$L_5 := \left\{ \left(\frac{-t}{4} + \frac{1}{4} + 1\right)(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$

- L_6 es la semi circunferencia en el plano $y \geq 0$ de radio $\frac{9}{8}$, es decir
$L_6 := \left\{ \frac{9}{8}(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\}.$

- L_7 es una curva que va creciendo de norma con extremos $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{8}\right)$ y $\left(1, \frac{17}{16}\right)$, por ejemplo
$L_7 := \left\{ \left(\frac{t}{8} + 1\right)(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}.$

- L_8 es la semi circunferencia en el plano $y \leq 0$ de radio $\frac{17}{16}$, por tanto
$L_8 := \left\{ \frac{17}{16}(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}.$

De manera general la descripción de los arcos L_n sigue la siguiente regla para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$L_{4m+1} = \left\{ \left(\frac{-t+1}{4^m} + 1\right)(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\},$$
$$L_{4m+2} = \left\{ \left(\frac{2^{1+2m}+1}{2^{1+2m}}\right)(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\},$$

$$L_{4m+3} = \left\{ \left(\frac{t}{2^{2+2m}} + 1 \right) (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\},$$
$$L_{4m} = \left\{ \left(\frac{1 + 2^{2+2m}}{2^{2+2m}} \right) (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}.$$

Es fácil ver que X es irreducible entre $(2, 0)$ y cualquier punto de S^1. El siguiente resultado mostrará que algunos de sus niveles de Whitney no son irreducibles.

Proposición 5.0.4. *Sea X el continuo descrito en este ejemplo. Si $\mu : C(X) \to [0, 1]$ es una función de Whitney, entonces existen $0 < t < 1$ y $\mathcal{A}$ un continuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que $\mathcal{A} \subsetneq \mu^{-1}(t)$ pero $\cup\mathcal{A} = X$, es decir X no tiene la propiedad cubriente en t, así que $\mu^{-1}(t)$ no es irreducible.*

Demostración. Sea $t \in (0, t_0)$, donde $t_0 = \mu(S^1)$.
Sea $\mathcal{A}_1 = \{B \in C(X) : \mu^{-1}(B) = t \text{ y } B \subset X - S^1\}$. En este caso, los elementos de $\mathcal{A}_1$ son arcos contenidos en la espiral. Si $q \in X - S^1$, podemos elegir un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{q\}$ y $\alpha(1) = X$, y así, existe $s \in (0, 1)$ tal que $\mu(\alpha(s)) = t$, notemos que $\alpha(s) \subseteq X - S^1$, esto es $\alpha(s) \in \mathcal{A}_1$, por lo tanto $\cup\mathcal{A}_1 = X - S^1$.

Mostraremos que $\mathcal{A}_1$ es conexo. Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{A}_1$, en este caso existe $\mathcal{L}$ un arco contenido en $X - S^1$ tal que $B_1, B_2 \subset \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ es un continuo, $\mu|_{\mathcal{L}}^{-1}(t)$ es un subcontinuo de $\mathcal{A}_1$ que contiene a B_1 y B_2, lo cual concluye que $\mathcal{A}_1$ es conexo.

Sea $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_1} \subseteq \mu^{-1}(t)$. Como $\mathcal{A}_1$ es conexo, concluimos que $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. Mostraremos ahora que $\mathcal{A} \subsetneq \mu^{-1}(t)$ pero $\cup\mathcal{A} = X$. Si $B \in \overline{\mathcal{A}_1} - \mathcal{A}_1$, entonces $B \in \mu|_{S^1}^{-1}(t)$ y $(-1, 0) \notin int_{S^1}(B)$, pues ningún arco dentro de S^1 que tenga a $(-1, 0)$ en su interior es límite de arcos en $X - S^1$. Como al menos existe un arco, A, dentro de S^1 que tiene como punto medio a $(-1, 0)$ y $\mu(A) = t$, concluimos que $\mathcal{A} \subsetneq \mu^{-1}(t)$.

Veamos finalmente que $\cup(\overline{\mathcal{A}_1} - \mathcal{A}_1) = S^1$, esto concluye que $\cup\mathcal{A} = X$. Sea $q \in S^1$. Tomemos una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X - S^1$ convergente a q. Como $\cup\mathcal{A}_1 = X - S^1$, para cada n consideremos $A_n \in \mathcal{A}_1$, tal que $q_n \in A_n$. Usando que $\mu^{-1}(t)$ es un continuo, podemos suponer que $\lim A_n = A \in \mu^{-1}(t)$. Es claro que $q \in A \in \overline{\mathcal{A}_1} - \mathcal{A}_1$, lo cual termina la prueba. □

Conclusión

Este trabajo tuvo como objetivo dar una respuesta a las preguntas ¿Si P es la propiedad de ser irreducible, entonces P es una propiedad de Whitney? y ¿Si P es la propiedad de ser irreducible, entonces P es una propiedad de Whitney reversible? A lo largo del trabajo se desarrolló la teoría necesaria para caracterizar la irreducibilidad de un nivel de Whitney, lo cual permitió responder en negativo la primer pregunta y en positivo la segunda.

Para ser más específicos, se mostró que si $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney, entonces X tiene la propiedad cubriente respecto a μ si y solo si cada nivel de Whitney es irreducible. Ya que tener la propiedad cubriente implica irreducibilidad, se concluye que la propiedad de ser irreducible es una propiedad de Whitney reversible. En el capítulo 5, se muestra la existencia de continuos irreducibles con niveles de Whitney sin esta propiedad, es decir la propiedad de ser irreducible no es una propiedad de Whitney.

Bibliografía

[1] B. Espinoza, J. M. Martínez-Montejano, N. Ordoñez, and L. C. Simon Romero, *Non-irreducibility is not a Whitney reversible property*, Topology Proceedings, Vol. 44 (2014), 133-138.

[2] A. Illanes and S.B. Nadler, Jr.,*Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **216**, New York, Marcel Dekker, Inc., 1999.

[3] S. Macías, *Topics on Continua*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, E.U., 2005.

[4] Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets. A Text with Research Questions* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. New York-Basel: Marcel Dekker, Inc., 1978.

[5] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Marcel Dekker, New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[6] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis, Third Edition*, McGraw-Hill Education, Singapore, 1976.

[7] S. Willard, *General topology*, Dover Publication INC, Mineola, New York, 2004.