



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

**Relación potencial-curvatura
conforme en la ecuación de
Schrödinger**

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestro en Ciencias Físicas

PRESENTA

Carlos Alexander López Bautista

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Idrish Huet Hernández



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Marzo de 2020.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DIRECCIÓN

CONTROL ESCOLAR POSGRADO



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas

04 de marzo de 2020

Oficio No. FCFM/0150/20

Dr. Idrish Huet Hernández
Presidente y Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"RELACIÓN POTENCIAL-CURVATURA CONFORME EN LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER".

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestro en Ciencias Físicas del Lic. **Carlos Alexander López Bautista** con matrícula escolar X130044.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

"Por la conciencia de la necesidad de servir"

Dra. Karen Salomé Caballero Mora

Directora



**DIRECCIÓN
FCFM**

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
KSCM /jmag

FCFM- UNACH – Ciudad Universitaria, Carretera Emiliano Zapata Km 8, Rancho San Francisco, Tuxtla Gutiérrez,
Chiapas. C. P. 29050.

Correo electrónico: fcfm.posgrado@gmail.com Tel. 61 7 80 00 ext. 8104

Dedicatoria

*Este trabajo está dedicado a mi hermano Josué,
a pesar de su partida él estará siempre en mi corazón.*

Agradecimientos

A mis padres, Juan Pedro y Nicolasa y a mi hermano Juan por su apoyo incondicional, consejos y gran paciencia. No me alcanzaría la vida para mostrar lo agradecido que estoy con ustedes.

A mi hermano Josué, a pesar de su partida, me ha dejado grandes enseñanzas de vida y debido a ello puedo ver a la vida de distinta manera.

A ti Libni Gabriela que, durante estos años, el apoyo incondicional que me muestras día a día me ayuda a superarme. Has estado a mi lado en uno de los momentos más difíciles de mi vida y me has mostrado amor incondicional, gracias por la gran paciencia, gracias a ti he logrado ser mejor persona.

A mi asesor, el Dr. Idrish Huet Hernández, durante estos años, ha mostrado ser un grandísimo mentor, un gran ser humano, pero además un gran amigo, el tiempo que llevo de conocerlo ha sido una de las personas más importantes en mi formación académica, agradezco su paciencia y sus consejos pero más aún esos consejos que salen del ámbito académico, gracias a él he logrado superar grandes dificultades, él es una gran ejemplo que me inspira a superarme día a día.

A mis amigos Rogelio, Víctor, Aníbal, Gerardo, Marcelo, Osmar y Ángel Javier que durante estos años han mostrado ser personas con las que puedo contar y confiar plenamente.

A mis compañeros con los que he compartido los estudios de maestría, por su apoyo tanto académico como con sus muestras de amistad.

A los doctores Pavel Castro Villareal y Sendic Estrada Jiménez por darse el tiempo de revisar y dar las correcciones necesarias para la realización de un mejor trabajo.

A los doctores Armando Felipe Mendoza Pérez y Peter Sloane por ser parte del comité de evaluación.

Introducción

La mecánica cuántica proporciona una descripción fundamental de la naturaleza, las ecuaciones de onda en física cuántica nos proporcionan información sobre el comportamiento de la materia y la energía. El tratar de describir dichos fenómenos a estas escalas conlleva un sinnúmero de dificultades matemáticas.

Uno de los elementos importantes dentro de este ámbito es el llamado *propagador* [1], éste es capaz de proporcionarnos la función de onda de un sistema dada una función de onda inicial en un intervalo de tiempo. Existen pocas soluciones exactas para propagadores para funciones de onda, en general es un problema complicado de resolver más aún si hablamos de propagadores en espacios curvos.

En este trabajo de tesis buscamos el *propagador* de una partícula libre en un espacio curvo de dimensión n , dicho espacio tendrá una métrica conformalmente plana relacionada con el espacio Euclidiano.

Para la búsqueda del *propagador* es necesario conocer dos elementos importantes, primeramente cómo se modifica la ecuación de Schrödinger bajo una transformación conforme [2] y la otra es que dicha transformación tiene asociada la llamada *función característica o factor conforme*, el caso de dimensión 2 es muy especial, debido a ciertas propiedades matemáticas existe un gran número de transformaciones conformes, ¿existirá igual número para dimensiones $n \geq 3$? En este trabajo se exponen las condiciones teóricas necesarias que se deben cumplir para encontrar dicha función en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ además se realiza el cálculo explícito para encontrar dicho elemento.

Buscamos además la relación existente entre la curvatura del espacio y la *función característica*, mostramos las expresiones para los propagadores para dimensiones mayores o iguales a tres y se examinará de manera general un ejemplo concreto para el caso 2 dimensional.

Contenido

Dedicatoria	V
Agradecimientos	VII
Introducción	IX
1. Ecuación de Schrödinger, propagador cuántico y transformaciones conformes	1
1.1. Ecuación de Schrödinger	1
1.2. Propagador	1
1.3. Ejemplos de propagadores	2
1.3.1. Propagador de la partícula libre unidimensional	2
1.3.2. Propagador del oscilador armónico	3
1.4. Transformaciones conformes	3
1.5. Transformaciones conformes en el espacio Euclidiano	4
1.5.1. Transformaciones conformes en el plano	4
1.5.2. Transformaciones conformes en tres o más dimensiones	5
2. Ecuación de Schrödinger, escalar de curvatura bajo una transformación conforme y propagador conforme	7
2.1. Ecuación de Schrödinger bajo una transformación conforme	7
2.2. Propagador conforme	8
2.3. Escalar de curvatura bajo una transformación conforme	9
3. Búsqueda del factor conforme para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ y su relación entre V_{eff} y la curvatura del espacio	11
3.1. Búsqueda del factor conforme para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$	11
3.2. Factor conforme y V_{eff}	12
3.3. Relación de V_{eff} y la curvatura del espacio	13
3.4. Propagador, ecuación de Schrödinger y V_{eff}	14
3.4.1. Caso $n = 2$	14
3.4.2. Caso $n = 3$	15
3.4.3. Caso $n \geq 4$	15

4. Solución general a las ecuaciones homogéneas y propagadores	17
4.1. Propagador para el caso $\epsilon = 0$	18
4.2. Propagador para el caso $\epsilon = 2$	19
4.2.1. Solución de la ecuación homogénea ($n = 3$)	19
4.2.2. Solución de la ecuación homogénea ($n \geq 4$)	21
4.2.3. Funciones de Green espacial y temporal para $n = 3$	22
4.2.4. Funciones de Green espacial y temporal para $n \geq 4$	23
4.2.5. Propagador para $n = 3$	25
4.2.6. Propagador para $n \geq 4$	26
4.3. Caso $n = 2$	27
4.3.1. Régimen $r \ll R$	29
4.3.2. Régimen $R < r$	34
4.3.3. Resultados	38
5. Conclusiones	41
A. Operador de Laplace-Beltrami y propagador conforme	45
Operador de Laplace-Beltrami	45
Propagador conforme	46
B. Método para solución de ecuaciones diferenciales	47
Caso $n = 3$	47
Caso $n \geq 4$	50
C. Construcción de la función de Green radial y temporal	55
Funciones de Green radiales	55
Función de Green temporal	62
D. Integrales	63
Integrales para $n = 3$	63
Integrales para $n \geq 4$	66
Integrales para $n = 2$	68
Bibliografía	71

Capítulo 1

Ecuación de Schrödinger, propagador cuántico y transformaciones conformes

1.1. Ecuación de Schrödinger

Como sabemos la ecuación de Schrödinger describe la evolución temporal de una partícula masiva (subatómica) con una naturaleza ondulatoria en el régimen no relativista.

Esta descripción puede ser extendida a espacios curvados (variedades de Riemann), debemos tomar en cuenta que todos los elementos con los cuales se describen las ecuaciones como son los gradientes y laplacianos deben estar bien definidos.

Por lo tanto la ecuación de Schrödinger en un espacio curvo toma la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_g \varphi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

donde Δ_g es el operador de Laplace-Beltrami y $V(\mathbf{x}, t)$ una función potencial.

Para una partícula libre

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_g \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

1.2. Propagador

La cantidad $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ se conoce como la *función o propagador de Green* [1]. Describe el efecto de una onda $\psi(\mathbf{x}', t')$, que estaba en un punto $\mathbf{x}'$ en el pasado (en tiempo $t' < t$), sobre la onda $\psi(\mathbf{x}, t)$, que está en el punto $\mathbf{x}$ en el tiempo posterior t , en otras palabras el *propagador*

permite encontrar la función de onda de un sistema, dada una función de onda inicial y un intervalo de tiempo. La nueva función de onda está especificada por la ecuación

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int d^n x' K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \psi(\mathbf{x}', t'), \quad t > t'. \quad (1.3)$$

Conocer K es equivalente a la solución fundamental de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{i\hbar} \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.4)$$

donde $\hat{H}$ denota el hamiltoniano escrito en términos de las coordenadas $\mathbf{x}$ y $\delta(\mathbf{x})$ denota la función delta de Dirac.

Este propagador también se puede escribir como la amplitud de transición [3]

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle \mathbf{x} | \hat{U}(t, t') | \mathbf{x}' \rangle, \quad (1.5)$$

$\hat{U}(t, t')$ es el operador unitario de evolución temporal para el sistema que toma estados en el tiempo t' a estados en el tiempo t . Tenga en cuenta la condición inicial impuesta por

$$\lim_{t \rightarrow t'} K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1.6)$$

Para el caso n -dimensional el propagador de una partícula libre

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \prod_{q=1}^n K(x_q, t; x'_q, t'). \quad (1.7)$$

con la condición de frontera

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 0, \quad t < t'. \quad (1.8)$$

1.3. Ejemplos de propagadores

1.3.1. Propagador de la partícula libre unidimensional

Como se muestra en [3], en el espacio de momentos

$$K(x, t; x', t') = \Theta(t - t') \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp \left[\frac{ip'(x - x')}{\hbar} - \frac{ip'^2(t - t')}{2m\hbar} \right], \quad (1.9)$$

la integral puede ser evaluada dando como resultado

$$K(x, t; x', t') = \Theta(t - t') \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t - t')}} \exp \left[\frac{im(x - x')^2}{2\hbar(t - t')} \right]. \quad (1.10)$$

1.3.2. Propagador del oscilador armónico

En [4] y [5] se expone una manera en la cual se calcula el propagador para el oscilador armónico cuya expresión tiene la forma

$$K(x, t; x', t') = \Theta(t - t') \sqrt{\frac{-im\omega}{2\pi\hbar \sin\omega(t - t')}} \exp \left[\frac{im\omega}{2\hbar} \frac{(x^2 + x'^2) \cos\omega(t - t') - 2xx'}{\sin\omega(t - t')} \right]. \quad (1.11)$$

1.4. Transformaciones conformes

Definición: Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es llamado una **transformación conforme** [2] si conserva la métrica hasta una escala, en términos de componentes

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(f(p)) = e^{2\sigma(p)} g_{\mu\nu}(p) \quad \sigma \in \mathcal{F}(M), \quad (1.12)$$

donde $e^{2\sigma}$ es una función estrictamente positiva y es llamada la *función característica* del mapeo conforme f o también como *factor conforme* y $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones suaves en M , f cambia la escala localmente.

Un resultado de gran importancia es aquel que dicta que para cualesquiera dos variedades Riemannianas (M, g) , 2-dimensionales estas son conformalmente planas.

Esto puede mostrarse al tomarse (x, y) las coordenadas locales originales con las cuales la métrica toma la forma

$$ds^2 = g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2. \quad (1.13)$$

Sea $g \equiv g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2$, de tal manera que

$$ds^2 = \left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} + i\sqrt{g}}{g_{xx}}dy \right) \left(\sqrt{g_{yy}}dx + \frac{g_{xy} - i\sqrt{g}}{g_{xx}}dy \right). \quad (1.14)$$

De acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales, existe un factor integrante $\lambda(x, y) = \lambda_1(x, y) + i\lambda_2(x, y)$ tal que

$$\lambda \left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} + i\sqrt{g}}{g_{xx}}dy \right) = du + idv, \quad (1.15)$$

$$\bar{\lambda} \left(\sqrt{g_{yy}}dx + \frac{g_{xy} - i\sqrt{g}}{g_{xx}}dy \right) = du - idv. \quad (1.16)$$

Entonces $ds^2 = (du^2 + dv^2)/|\lambda|^{-2}$ y denotando a $|\lambda|^{-2} = e^{2\sigma}$, tenemos el sistema de coordenadas deseado.

1.5. Transformaciones conformes en el espacio Euclidiano

1.5.1. Transformaciones conformes en el plano

Teorema: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la clase C^1 con Jacobiano no nulo. Entonces f como un mapeo es conforme si y solo si f , en función de la variable compleja z , es holomorfo o anti-holomorfo.

La demostración del teorema anterior se encuentra en [6] páginas 79-80.

Así vemos que el plano es rico en mapeos conformes; en particular, cada función holomórfica en un conjunto abierto U con derivada que no se anula es un mapeo conforme. Para observar esta abundancia de manera más dramática, establecemos el celebre *Teorema de mapeo de Riemann*.

Definición: Decimos que un conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ es *simplemente conexo* si cada curva cerrada simple que se encuentra en U es contraíble dentro de U (o de manera equivalente tiene su interior en U).

Teorema: Sea U un conjunto abierto, conexo, simplemente conexo $\subset \mathbb{R}^2$ distinto de $\mathbb{R}^2$ en sí. Entonces existe un mapeo conforme uno a uno f de U en el disco unitario abierto (*Figura 1*).

Para la demostración véase [7] página 337.

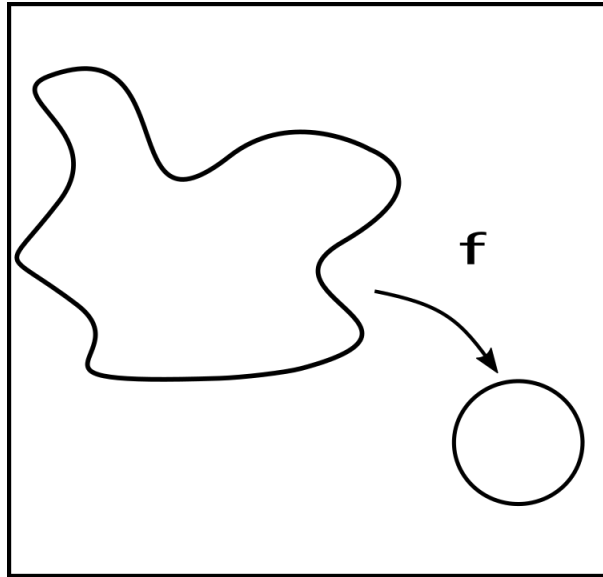


Figura 1

1.5.2. Transformaciones conformes en tres o más dimensiones

Como se mostró hay un gran número de mapeos conformes en el plano, la pregunta a realizar es ¿existe la misma abundancia de mapeos conformes en $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$?

El **teorema de Liouville** establece que cualquier mapeo conforme suave en un dominio de $\mathbb{R}^n$, donde $n > 2$, puede expresarse como una composición de traslaciones, transformaciones de similitud, transformaciones ortogonales e inversiones: son transformaciones de Möbius (en n dimensiones) [6], esto significa que dichas transformaciones toman la forma

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \beta \mathbf{A} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^\epsilon}, \quad (1.17)$$

donde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$ un escalar, $\mathbf{A}$ una matriz de rotación con $\epsilon = 0$ o $\epsilon = 2$ [8].

Capítulo 2

Ecuacion de Schrödinger, escalar de curvatura bajo una transformación conforme y propagador conforme

2.1. Ecuacion de Schrödinger bajo una transformación conforme

La ecuación de Schrödinger para una partícula libre en un espacio curvo está descrita por Ec.(1.2), ahora bien tomando una métrica conformalmente plana relacionada con el espacio Euclidiano mediante una transformación conforme ($g_{ik} = e^{\alpha\Phi}\delta_{ik}$), el operador de Laplace-Beltrami toma la forma (Apéndice [A])

$$\Delta_g = e^{-\alpha\Phi} \left(\nabla^2 + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha \nabla\Phi \cdot \nabla \right), \quad (2.1)$$

donde ∇^2 el operador de Laplace, n la dimensión del espacio, $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$ una función que solo depende de $\mathbf{x}$ y α una constante.

Tomando $\hbar = 1$ y $m = 1$, Ec.(1.2) adopta la forma

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} e^{-\alpha\Phi} \left(\nabla^2 + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha \nabla\Phi \cdot \nabla \right) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (2.2)$$

2.2. Propagador conforme

Tomando todas las condiciones que tiene el propagador descrita en el capítulo 1 consideraremos el siguiente propagador

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{K}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= \Theta(t - t') K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \\ K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= e^{\theta \Phi(\mathbf{x})} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'),\end{aligned}\quad (2.3)$$

donde $k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ cuando $t \rightarrow t'$, $\Theta(t - t')$ la función escalón de Heaviside, $\Phi(\mathbf{x})$ alguna función y θ una constante.

Sustituyendo Ec.(2.3) en Ec.(1.3)

$$\begin{aligned}i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathcal{K}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -\frac{1}{2} \Delta_g \hat{\mathcal{K}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'), \\ \frac{1}{2} \Delta_g \left(e^{\theta \Phi(\mathbf{x})} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \right) + i \frac{\partial \left(e^{\theta \Phi(\mathbf{x})} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \right)}{\partial t} &= -i e^{\theta \Phi(\mathbf{x})} \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}').\end{aligned}\quad (2.4)$$

Dado que

$$\begin{aligned}\nabla(e^{\theta \Phi} k) &= e^{\theta \Phi} [\nabla k + \theta k(\nabla \Phi)], \\ \nabla^2(e^{\theta \Phi} k) &= e^{\theta \Phi} [\nabla^2 k + \theta k \nabla^2 \Phi + 2\theta \nabla \Phi \cdot \nabla k + \theta^2 |\nabla \Phi|^2 k].\end{aligned}\quad (2.5)$$

Tenemos entonces

$$\Delta_g(e^{\theta \Phi} k) = e^{-\alpha \Phi} e^{\theta \Phi} \left[\nabla^2 + \theta \nabla^2 \Phi + \left(2\theta + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha \right) (\nabla \Phi \cdot \nabla) + \left(\theta^2 + \theta \alpha \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \right) |\nabla \Phi|^2 \right] k, \quad (2.6)$$

tomando $\theta = -\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{n}{2} - 1 \right)$

$$\Delta_g(e^{\theta \Phi} k) = e^{-\alpha \Phi} e^{\theta \Phi} \left[\nabla^2 - \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \nabla^2 \Phi - \frac{1}{4} \alpha^2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 |\nabla \Phi|^2 \right] k. \quad (2.7)$$

Definiendo a $\mathbf{V}_{eff}$ como

$$\mathbf{V}_{eff} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \nabla^2 \Phi + \frac{1}{4} \alpha^2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 |\nabla \Phi|^2. \quad (2.8)$$

Ec.(2.4) toma la forma

$$\frac{1}{2} (\nabla^2 - \mathbf{V}_{eff}) k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i e^{\alpha \Phi(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -e^{\alpha \Phi(\mathbf{x})} i \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.9)$$

Por lo tanto para encontrar $k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ debemos encontrar soluciones a la ecuación homogénea

$$\frac{1}{2} (\nabla^2 - \mathbf{V}_{eff}) k(\mathbf{x}, t) + i e^{\alpha \Phi(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.10)$$

2.3. Escalar de curvatura bajo una transformación conforme

Para una métrica

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\tilde{\Phi}} g_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

se tiene que

$$\bar{g}^{\lambda\rho} = \frac{g^{\lambda\rho}}{\Omega}, \quad (2.12)$$

donde $g^{\lambda\rho} = \frac{1}{g_{\lambda\rho}}$, si $\lambda = \rho$, $G = (g_{\lambda\rho})$ diagonal y $\Omega = e^{2\tilde{\Phi}}$.

Los símbolos de Christoffel con la métrica $\bar{G} = (\bar{g}_{\lambda\rho})$ están dados por

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\lambda\rho} \left(\partial_{\mu} \bar{g}_{\rho\nu} + \partial_{\nu} \bar{g}_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \bar{g}_{\mu\nu} \right). \quad (2.13)$$

Por lo tanto

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \delta_{\nu}^{\lambda} \partial_{\mu} \tilde{\Phi} + \delta_{\mu}^{\lambda} \partial_{\nu} \tilde{\Phi} - g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu} \partial_{\rho} \tilde{\Phi}. \quad (2.14)$$

Por definición el tensor de Riemann con la métrica $\bar{G}$ está dado por

$$\bar{R}_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} = \partial_{\mu} \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^{\kappa} - \partial_{\nu} \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\kappa} + \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^{\rho} \bar{\Gamma}_{\rho\mu}^{\kappa} - \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\rho} \bar{\Gamma}_{\rho\nu}^{\kappa}, \quad (2.15)$$

$$\bar{R}_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} = R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} - g_{\nu\lambda} B_{\mu}^{\kappa} + g_{\xi\lambda} B_{\mu}^{\xi} \delta_{\mu}^{\kappa} - g_{\xi\lambda} B_{\nu}^{\xi} \delta_{\mu}^{\kappa} + g_{\mu\lambda} B_{\nu}^{\kappa}, \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} B_{\mu}^{\kappa} &= -\partial_{\mu} \tilde{\Phi} g^{\kappa\lambda} \partial_{\lambda} \tilde{\Phi} + g^{\kappa\lambda} \left(\partial_{\mu} \partial_{\lambda} \tilde{\Phi} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\xi} \partial_{\xi} \tilde{\Phi} \right) + \frac{1}{2} g^{\lambda\xi} \left(\partial_{\lambda} \tilde{\Phi} \partial_{\xi} \tilde{\Phi} \delta_{\mu}^{\kappa} \right) \\ &= -g^{\kappa\lambda} \partial_{\mu} \tilde{\Phi} \partial_{\lambda} \tilde{\Phi} + g^{\kappa\lambda} \left(\partial_{\mu} \partial_{\lambda} \tilde{\Phi} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\xi} \partial_{\xi} \tilde{\Phi} \right) + \frac{1}{2} g^{\lambda\xi} \left(\partial_{\lambda} \tilde{\Phi} \partial_{\xi} \tilde{\Phi} \delta_{\mu}^{\kappa} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nótese que $B_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} B_{\nu}^{\lambda} = B_{\nu\mu}$, de tal manera que el tensor de Ricci en términos de $\bar{G}$ está dado por $\bar{R}_{\mu\nu} = \delta_{\kappa}^{\lambda} \bar{R}_{\lambda\mu\nu}^{\kappa}$.

Con lo cual

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} B_{\lambda}^{\lambda} - (n-2) B_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

donde n es la dimensión del espacio.

Entonces el escalar de Ricci toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} \\ &= \frac{g^{\mu\nu}}{\Omega} \left(R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} B_{\lambda}^{\lambda} - (n-2) B_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{\Omega} \left(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} B_{\lambda}^{\lambda} - (n-2) g^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{\Omega} \left(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - n B_{\lambda}^{\lambda} - (n-2) B_{\lambda}^{\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{\Omega} \left(R - 2(n-1) B_{\lambda}^{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Capítulo 3

Búsqueda del factor conforme para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ y su relación entre V_{eff} y la curvatura del espacio

3.1. Búsqueda del factor conforme para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$

Dado el mapeo descrito por Ec.(1.17) y la manera de medir distancias está dada por

$$ds^2 = dy_i dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} dx_j dx_k, \quad (3.1)$$

encontrar $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ conlleva identificar el factor conforme.

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} &= \beta \left[\frac{A_{il} \delta_{lk}}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^\epsilon} - \epsilon \frac{A_{il}(x_l - a_l)(x_p - a_p) \delta_{pk}}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^{\epsilon+2}} \right] \\ &= \beta \left[\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 A_{il} \delta_{lk} - \epsilon A_{il}(x_l - a_l)(x_p - a_p) \delta_{pk}}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^{\epsilon+2}} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

definiendo a $|\mathbf{X}| = |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\beta}{|\mathbf{X}|^{\epsilon+2}} \left[|\mathbf{X}|^2 A_{il} \delta_{lk} - \epsilon A_{il} X_l X_p \delta_{pk} \right], \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\beta}{|\mathbf{X}|^{\epsilon+2}} \left[|\mathbf{X}|^2 A_{im} \delta_{mj} - \epsilon A_{im} X_m X_q \delta_{qj} \right], \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} &= \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^{2\epsilon+4}} \left[|\mathbf{X}|^4 A_{il} A_{im} \delta_{lk} \delta_{mj} - \epsilon |\mathbf{X}|^2 \left(A_{il} \delta_{lk} A_{im} \delta_{qj} X_m X_q + A_{il} \delta_{pk} A_{im} \delta_{mj} X_l X_p \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^2 A_{il} A_{im} X_l X_p X_m X_q \delta_{pk} \delta_{qj} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^{2\epsilon+4}} \left[|\mathbf{X}|^4 A_{ik} A_{ij} - \epsilon |\mathbf{X}|^2 \left(A_{ik} A_{im} X_m X_j + A_{il} A_{ij} X_l X_k \right) + \epsilon^2 A_{il} A_{im} X_l X_k X_m X_j \right], \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^{2\epsilon+4}} \left[|\mathbf{X}|^4 \delta_{jk} - 2\epsilon |\mathbf{X}|^2 X_j X_k + \epsilon^2 |\mathbf{X}|^2 X_j X_k \right], \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^{2\epsilon}} \left[\delta_{jk} - 2\epsilon \hat{X}_j \hat{X}_k + \epsilon^2 \hat{X}_j \hat{X}_k \right], \quad (3.8)$$

con $\hat{X} = \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|}$.

Tenemos entonces

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^{2\epsilon}} \delta_{jk}, \quad (3.9)$$

pues $\epsilon = 0$ o $\epsilon = 2$.

De tal manera que

$$e^{\alpha\Phi} = \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^{2\epsilon}} = \left(\frac{\beta}{|\mathbf{X}|^\epsilon} \right)^2, \quad (3.10)$$

encontrando que

$$\alpha = 2, \quad \Phi = \ln(\beta) - \epsilon \ln(|\mathbf{X}|). \quad (3.11)$$

3.2. Factor conforme y V_{eff}

Dado que

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \nabla^2 \Phi + \frac{1}{4} \alpha^2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 |\nabla \Phi|^2,$$

utilizando el resultado de Ec.(3.11)

$$V_{eff} = -\epsilon \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \nabla^2 (\ln(|\mathbf{X}|)) + \epsilon^2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 |\nabla (\ln(|\mathbf{X}|))|^2, \quad (3.12)$$

como

$$\begin{aligned} \nabla (\ln(|\mathbf{X}|)) &= \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^2}, \\ \nabla^2 (\ln(|\mathbf{X}|)) &= \frac{1}{|\mathbf{X}|^2}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_{eff} = -\epsilon \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{1}{|\mathbf{X}|^2} + \epsilon^2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 \frac{1}{|\mathbf{X}|^2},$$

$$\mathbf{V}_{eff} = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{n-2}{|\mathbf{X}|^2} \right) \left(\epsilon \left(\frac{n}{2} - 1 \right) - 1 \right),$$

$$\mathbf{V}_{eff} = \frac{\epsilon (n-2) (\epsilon (n-2) - 2)}{4 |\mathbf{X}|^2},$$

$$\mathbf{V}_{eff} = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon = 0 \\ \frac{(n-2)(n-3)}{|\mathbf{X}|^2} & \text{si } \epsilon = 2. \end{cases} \quad (3.13)$$

3.3. Relación de $\mathbf{V}_{eff}$ y la curvatura del espacio

Utilizando la métrica descrita por (2.11), con $g_{ik} = \delta_{ik}$ y $\tilde{\Phi} = \alpha\Phi/2$, el tensor y escalar de Ricci toman la forma

$$\bar{R}_{ij} = -\delta_{ij} B_l^l - (n-2) B_{ij}, \quad (3.14)$$

$$\bar{R} = \frac{-2(n-1)}{\Omega} B_l^l, \quad (3.15)$$

con

$$B_{ij} = \left(\frac{\alpha}{2} \right) \partial_i \partial_j \Phi - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \partial_i \Phi \partial_j \Phi + \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 |\nabla \Phi|^2, \quad (3.16)$$

$$B_l^l = \left(\frac{\alpha}{2} \right) \nabla^2 \Phi + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) |\nabla \Phi|^2 = \frac{2}{n-2} \mathbf{V}_{eff}. \quad (3.17)$$

Para el caso $n = 2$

$$\bar{R}_{ij} = -\delta_{ij} B_l^l = -\delta_{ij} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \nabla^2 \Phi, \quad (3.18)$$

$$\bar{R} = \frac{-2}{\Omega} B_l^l = -2e^{-\alpha\Phi} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \nabla^2 \Phi = -\alpha e^{-\alpha\Phi} \nabla^2 \Phi. \quad (3.19)$$

Para el caso donde $n \geq 3$

$$\bar{R}_{ij} = -\delta_{ij} \left(\frac{2}{n-2} \right) \mathbf{V}_{eff} - (n-2) \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left(\partial_i \partial_j \Phi - \left(\frac{\alpha}{2} \right) \partial_i \Phi \partial_j \Phi + \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\frac{\alpha}{2} \right) |\nabla \Phi|^2 \right), \quad (3.20)$$

$$\bar{R} = -\frac{2(n-1)}{\Omega(n-2)} \mathbf{V}_{eff} = -\frac{2(n-1)}{(n-2)} e^{-\alpha\Phi} \mathbf{V}_{eff}. \quad (3.21)$$

Del resultado anterior podemos concluir lo siguiente:

- Para el caso $n = 2$, $\mathbf{V}_{eff} = 0$ pero $\bar{R} = -\alpha e^{-\alpha\Phi} \nabla^2 \Phi$.
- Si $n = 3$ también $\mathbf{V}_{eff} = 0$ pero $\bar{R} = 0$.

Para $n \geq 4$

- Si $\epsilon = 0$ se tiene que $\mathbf{V}_{eff} = 0$ y por lo tanto $\bar{R} = 0$.
- Si $\epsilon = 2$, $\mathbf{V}_{eff} \neq 0$, con lo cual

$$\bar{R} = -\frac{2(n-1)(n-3)}{\beta^2} |\mathbf{X}|^2. \quad (3.22)$$

3.4. Propagador, ecuación de Schrödinger y $\mathbf{V}_{eff}$

Recordando que Ec.(2.9) y Ec.(2.10) describen el propagador como la ecuación de Schrödinger de una partícula libre respectivamente bajo el efecto de una transformación conforme

$$\frac{1}{2} (\nabla^2 - \mathbf{V}_{eff}) k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} i \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$\frac{1}{2} (\nabla^2 - \mathbf{V}_{eff}) k(\mathbf{x}, t) + i e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Ahora bien, dado que ya conocemos expresiones para $e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})}$ y $\mathbf{V}_{eff}$ cuando $n \geq 3$ también es posible encontrar expresiones para las ecuaciones antes mencionadas

3.4.1. Caso $n = 2$

Como se expuso anteriormente para el caso 2-dimensional existe un gran número de transformaciones conformes, además para este caso $\mathbf{V}_{eff} = 0$ con lo cual Ec.(2.9) y Ec.(2.10) toman la forma

$$\frac{1}{2} \nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} i \delta(t - t') \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{2} \nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.24)$$

El efecto de la transformación conforme se hace evidente pues modifica el término temporal haciendo que dichas expresiones no coincidan con las expresiones que describen la propagación de una partícula libre.

3.4.2. Caso $n = 3$

Como se observa a través de Ec.(3.13), $\mathbf{V}_{eff} = 0$, el parámetro ϵ arroja dos resultados posibles para el factor conforme.

Cuando $\epsilon = 0$

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i\beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i\beta^2 \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i\beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.26)$$

Cuando $\epsilon = 2$

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.28)$$

Aunque no existe el efecto de $\mathbf{V}_{eff}$, en ambos casos existe modificaciones en el término temporal.

3.4.3. Caso $n \geq 4$

Cuando $\epsilon = 0$, $\mathbf{V}_{eff} = 0$, por lo tanto

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i\beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i\beta^2 \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i\beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.30)$$

Por Ec.(3.13) cuando $\epsilon = 2$, $\mathbf{V}_{eff} \neq 0$, de tal modo que

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{|\mathbf{X}|^2} \right) k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{|\mathbf{X}|^2} \right) k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.32)$$

El estudiar la propagación de una partícula libre en un espacio curvo bajo el efecto de una transformación conforme arroja resultados interesantes.

Primeramente uno de los efectos de la transformación conforme puede apreciarse a través de la acción de un “potencial efectivo” V_{eff} . Para los casos de dimensión 2 y mayores o iguales a 3 (cuando $\epsilon = 0$) dicho potencial es cero pero el efecto de la transformación conforme aún se hace presente al modificar el término temporal. Mientras que en el caso de dimensión $n \geq 4$ cuando $\epsilon = 2$ presenta el efecto tanto del “potencial efectivo” como la modificación en el término temporal.

En el siguiente capítulo buscaremos expresiones analíticas para el propagador en los casos cuando $n \geq 3$ y también exploraremos un ejemplo para el caso 2-dimensional.

Capítulo 4

Solución general a las ecuaciones homogéneas y propagadores

Para encontrar el *propagador*, se propone como la superposición del producto entre la función de Green espacial y temporal, se aplicará el método de separación de variables. Durante la aplicación de dicho método surge la constante v^2 (constante de separación), en la formulación del problema, físicamente hablando, esta constante corresponde con los autovalores de energía E del sistema. Dicho espectro de energía puede tomar valores en todo el intervalo $(0, \infty)$.

De esta manera el propagador está dado por

$$k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \int_0^\infty G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') H_v(t, t') dv.$$

Dicho propagador debe contar con las siguientes características:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t'} K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_0^\infty G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dv, \\ K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= 0 \quad t < t'. \end{aligned}$$

Para la construcción del propagador se tomarán los casos $\epsilon = 0$ y $\epsilon = 2$ por separado. Para el caso donde $\epsilon = 2$ es necesario encontrar soluciones a la ecuación homogénea descrita por Ec.(2.10).

El caso 2-dimensional como fue descrito anteriormente es una caso especial, debido al gran número de transformaciones existentes, se tomará un ejemplo particular para explorar este caso.

4.1. Propagador para el caso $\epsilon = 0$

La propagación de una partícula libre sometida bajo una transformación conforme está descrita por Ec.(2.9)

$$\frac{1}{2} (\nabla^2 - \mathbf{V}_{eff}) k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} i \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Para el caso donde $\epsilon = 0$ con $n \geq 3$, $\mathbf{V}_{eff} = 0$, además el factor conforme descrito por Ec.(3.10) toma el valor de

$$e^{\alpha\Phi} = \beta^2,$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto Ec.(2.9) toma la forma

$$\frac{1}{2} \nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i \beta^2 \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.1)$$

utilizando el cambio de variable $t = \beta^2 \tau$, la ecuación anterior puede expresarse como

$$\frac{1}{2} \nabla^2 k(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', \tau') + i \frac{\partial}{\partial \tau} k(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', \tau') = -i \delta(\tau - \tau') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.2)$$

pues

$$\delta(t - t') = \delta(\beta^2(\tau - \tau')) = \frac{\delta(\tau - \tau')}{\beta^2}.$$

Nótese que Ec.(4.2) corresponde a la ecuación diferencial asociada a una partícula libre con tiempo τ cuyo propagador es

$$k(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', \tau') = -\theta(\tau - \tau') \left(\frac{1}{2\pi i(\tau - \tau')} \right)^{n/2} \prod_{q=1}^n e^{i \frac{(x_q - x'_q)^2}{2(\tau - \tau')}}, \quad (4.3)$$

de tal manera que

$$k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\theta(t/\beta^2 - t'/\beta^2) \left(\frac{\beta^2}{2\pi i(t - t')} \right)^{n/2} \prod_{q=1}^n e^{i \beta^2 \frac{(x_q - x'_q)^2}{2(t - t')}}. \quad (4.4)$$

Recordando que la transformación conforme en su forma general esta descrita por Ec.(1.17), cuando $\epsilon = 0$ esta toma la forma

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \beta \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

observando que dicha transformación consiste en traslaciones, dilataciones y rotaciones.

La expresión descrita por Ec.(4.4) esta reescalada por el factor β , dicha expresión corresponde a la del propagador de una partícula libre que ha sufrido una traslación y una rotación en el espacio, nótese que dicha expresión se reduce al propagador de una partícula libre en el espacio plano cuando $\beta^2 = 1$.

4.2. Propagador para el caso $\epsilon = 2$

Ahora que el caso $\epsilon = 0$ ya fue abordado, busquemos solucionar el mismo problema, la búsqueda del propagador cuántico para el caso donde el parámetro $\epsilon = 2$. El valor del parámetro ϵ dota de nuevas características a las ecuaciones a resolver.

Para el caso 3-dimensional el valor de V_{eff} nuevamente es cero pero el factor conforme toma la forma

$$e^{\alpha\Phi} = \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4},$$

de tal modo que las ecuaciones a resolver son la siguientes:

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Cuando $n \geq 4$, $V_{eff} \neq 0$, el factor conforme tiene la misma forma que el caso 3-dimensional y por tanto las ecuaciones a resolver son la siguientes:

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{|\mathbf{X}|^2} \right) k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{|\mathbf{X}|^2} \right) k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Ahora bien buscaremos construir los propagadores cuánticos a partir de las ecuaciones antes mostradas, primeramente abordaremos el caso 3-dimensional, se buscará solución a la ecuación homogénea, posteriormente se construirán las funciones de Green (espacial y temporal) y a partir de estas se construirá el propagador, el procedimiento para el caso $n \geq 4$ es exactamente el mismo.

4.2.1. Solución de la ecuación homogénea ($n = 3$)

La ecuación homogénea que describe una partícula libre en dimensión 3 está descrita por

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.5)$$

para resolver la ecuación anterior recurrimos al *método de separación de variables*.

Primeramente supondremos que $k(\mathbf{x}, t) = \int f_v(\mathbf{x}) T_v(t) dv$.

De tal manera

$$\frac{|\mathbf{X}|^4}{f_v(\mathbf{x})} \nabla^2 f_v(\mathbf{x}) + \frac{2i\beta^2}{T_v(t)} \frac{\partial}{\partial t} T_v(t) = 0.$$

Esto ocurre si

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{X}|^4}{f_v(\mathbf{x})} \nabla^2 f_v(\mathbf{x}) &= -v^2, \\ \frac{2i\beta^2}{T_v(t)} \frac{d}{dt} T_v(t) &= v^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

con v una constante de separación, en general esta constante puede ser compleja.

Solución de la parte espacial y temporal

Dado que $|\mathbf{X}| = |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$, sin pérdida de generalidad tomamos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, de esta manera $|\mathbf{X}| = r$.

$$\begin{aligned} \frac{r^4}{f_v(\mathbf{x})} \nabla^2 f_v(\mathbf{x}) &= -v^2, \\ \nabla^2 f_v(\mathbf{x}) + \frac{v^2}{r^4} f_v(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente separación de variables en coordenadas esféricas

$$f_v(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} \frac{R_{l,v}(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

Las ecuaciones y el método de solución que resultan de la separación de variables se presentan en el Apéndice B.

Para la parte radial

$$\begin{aligned} R_{l,v}(r) &= r^{1/2} Z_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) \\ &= r^{1/2} \left(A J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) + B N_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

con $J_{l+\frac{1}{2}}$ y $N_{l+\frac{1}{2}}$ las funciones de Bessel y Neumann de orden $l + 1/2$ respectivamente [9] y A, B constantes arbitrarias. La solución para la parte angular corresponde a los armónicos esféricos $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ [9].

Para la parte temporal la solución correspondiente es

$$T_v(t) = C \exp\left(-i \frac{v^2}{2\beta^2} t\right), \quad (4.8)$$

con C una constante.

Solución general

La solución general a la Ec.(4.5)

$$k(\mathbf{x}, t) = Cr^{-1/2} \int_0^\infty \sum_{l,m} Z_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) Y_{l,m}(\theta, \phi) \exp\left(-i \frac{v^2}{2\beta^2} t\right) dv. \quad (4.9)$$

4.2.2. Solución de la ecuación homogénea ($n \geq 4$)

Dado que en dimensiones mayores o iguales a 4 la ecuación a resolver es

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{|\mathbf{X}|^2} \right) k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Haciendo las mismas consideraciones que en el caso 3 dimensional, recurriendo a la separación de variables y utilizando coordenadas polares n -dimensionales [10] es posible encontrar la solución a la ecuación anterior.

Solución de la parte espacial y temporal

Por lo anteriormente mencionado la ecuación a resolver es

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{r^2} \right) k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{r^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.10)$$

Aplicando nuevamente separación de variables

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}, t) &= \int f_v(\mathbf{x}) T_v(t) dv, \\ f_v(\mathbf{x}) &= \sum_{l,m} R_{l,n,v}(r) \mathcal{Y}_l^m(\Omega). \end{aligned}$$

Definiendo además a $\mu = (n-2)(n-3)$, las ecuaciones a resolver son las siguientes

$$\frac{r^4}{f_v(\mathbf{x})} \left(\nabla^2 - \frac{\mu}{r^2} \right) f_v(\mathbf{x}) = -v^2, \quad (4.11)$$

$$\frac{2i\beta^2}{T_v(t)} \frac{d}{dt} T_v(t) = v^2, \quad (4.12)$$

con v una constante, en general dicha constante puede ser compleja.

Para la parte radial

$$R_{l,N,v}(r) = r^{-N/2} Z_p\left(\frac{v}{r}\right), \quad (4.13)$$

con

$$\begin{aligned} N &\geq 2, \\ p &= \sqrt{\left(l + \frac{N}{2}\right)^2 + (N)(N-1)}, \end{aligned}$$

donde $Z_p\left(\frac{v}{r}\right) = AJ_p\left(\frac{v}{r}\right) + BN_p\left(\frac{v}{r}\right)$, J_p y N_p las funciones de Bessel y Neumann de orden p respectivamente, con A, B constantes arbitrarias.

La solución para la parte angular $\mathcal{Y}_l^m(\Omega)$ corresponde a las funciones hiperesféricas armónicas [11] que viene expresada por los polinomios de Gegenbauer [12].

Para la parte temporal la solución correspondiente es

$$T_v(t) = C \exp\left(-i \frac{v^2}{2\beta^2} t\right), \quad (4.14)$$

con C una constante.

Por todo lo anterior la solución general a la Ec.(4.10) es

$$k(\mathbf{x}, t) = C r^{-N/2} \int_0^\infty \sum_{l,m} Z_p\left(\frac{v}{r}\right) \mathcal{Y}_l^m(\Omega) \exp\left(-i \frac{v^2}{2\beta^2} t\right) dv. \quad (4.15)$$

4.2.3. Funciones de Green espacial y temporal para $n = 3$

Recordando que la intención principal es encontrar el propagador a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ r^4 \nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + 2i\beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -2i\beta^2 \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ahora que se conoce la solución general (Ec.(4.9)) a la ecuación homogénea (Ec.(4.5)), procederemos a encontrar la función de Green (G_v) asociada a la parte espacial y temporal (H_v).

Tanto la función de Green espacial como la temporal deben satisfacer lo siguiente (por separación de variables)

$$\nabla^2 G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{v^2}{r^4} G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -2i\beta^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.17)$$

$$\frac{dH_v(t, t')}{dt} - \frac{v^2}{2i\beta^2} H_v(t, t') = \delta(t - t'). \quad (4.18)$$

Función de Green espacial

Utilizando coordenadas esféricas, la función de Green espacial debe satisfacer lo siguiente

$$G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_{l,v}(r, r') Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (4.19)$$

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (4.20)$$

de tal manera que $g_{l,v}(r, r')$ (función de Green radial) debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r g_{l,v}(r, r'))}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} g_{l,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,v}(r, r') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r - r')}{r^2}, \quad (4.21)$$

donde $g_{l,v}(r, r')$ satisface la ecuación homogénea

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r g_{l,v}(r, r'))}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} g_{l,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,v}(r, r') = 0. \quad (4.22)$$

Podemos encontrar la función de Green radial a partir de la Ec.(4.7), la construcción de la función de Green puede encontrarse en el Apéndice C.

Por lo tanto la función de Green para la parte espacial para $n = 3$ es

$$G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -2v\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{j_l\left(\frac{v}{r_{>}}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right)}{r_{>} r_{<}} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (4.23)$$

donde j_l y $h_l^{(1)}$ son las funciones esféricas de Bessel y Hankel de orden l respectivamente, $Y_{l,m}$ los armónicos esféricos además $r_{<} = \min(r, r')$ y $r_{>} = \max(r, r')$ con $|\mathbf{x}| = r$ y $|\mathbf{x}'| = r'$.

Función de Green temporal

Notemos que la función de Green asociada al operador $\partial_t + \gamma$ es $\Theta(t)e^{-\gamma t}$ [13], por lo tanto

$$H_v(t, t') = \Theta(t - t') \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t - t')\right). \quad (4.24)$$

4.2.4. Funciones de Green espacial y temporal para $n \geq 4$

Para encontrar las funciones de Green tanto espacial como temporal se procede de manera similar al caso 3 dimensional. Dado que buscamos el propagador de la ecuación

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{|\mathbf{X}|^2} \right) k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$r^4 \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{r^2} \right) k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + 2i\beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -2i\beta^2 \delta(t-t') \delta^n(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

La función de Green espacial G_v como temporal H_v debe satisfacer lo siguiente (por separación de variables):

$$\left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{r^2} \right) G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{v}{r^4} G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -2i\beta^2 \delta^n(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad (4.25)$$

$$\frac{dH_v(t, t')}{dt} - \frac{v^2}{2i\beta^2} H_v(t, t') = \delta(t-t'). \quad (4.26)$$

La función de Green temporal H_v es la misma que en el caso 3 dimensional.

Función de Green espacial

Ahora bien para la función espacial G_v haremos uso de coordenadas polares n -dimensionales, dicha función debe satisfacer lo siguiente

$$G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} g_{l,n}(r, r') (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega), \quad (4.27)$$

$$\delta^n(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r-r')}{r^{n-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega), \quad (4.28)$$

donde d_l^n es la degeneración de las funciones hiperesféricas armónicas [14].

$$d_l^n = \begin{cases} \frac{(2l+n-2)(l-n-3)!}{l!(n-2)!} & \text{para } l \geq 1 \\ 1 & \text{para } l = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

La función $g_{l,n,v}(r, r')$ (función de Green radial) debe satisfacer

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_{l,n,v}(r, r')}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{dg_{l,n,v}(r, r')}{dr} \\ - \frac{l(l+n-2) + (n-2)(n-3)}{r^2} g_{l,n,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,n,v}(r, r') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r-r')}{r^{n-1}}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$g_{l,n,v}(r, r)$ debe satisfacer también la ecuación homogénea

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_{l,n,v}(r, r')}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{dg_{l,n,v}(r, r')}{dr} \\ - \frac{l(l+n-2) + (n-2)(n-3)}{r^2} g_{l,n,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,n,v}(r, r') = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

La construcción de la función $g_{l,n,v}$ puede hacerse a partir de la Ec.(4.17) y puede consultarse en el Apéndice C. La función de Green para la parte espacial con $N \geq 2$, ($n \geq 4$) es

$$G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\pi\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \frac{J_p\left(\frac{v}{r_{>}}\right)}{r_{>}^{N/2}} \frac{H_p^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right)}{r_{<}^{N/2}} (\mathcal{Y}_l^m(\Omega))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega), \quad (4.32)$$

donde J_p y $H_l^{(p)}$ son las funciones de Bessel y Hankel de orden p respectivamente.

Con $r_{<} = \min(r, r')$ y $r_{>} = \max(r, r')$, $|\mathbf{x}| = r$ y $|\mathbf{x}'| = r'$ y $p = \sqrt{\left(l + \frac{N}{2}\right)^2 + (N)(N-1)}$.

4.2.5. Propagador para $n = 3$

Tanto la función de Green espacial como temporal estan dadas por

$$\begin{aligned} G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -2v\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{j_l\left(\frac{v}{r_{>}}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right)}{r_{>} r_{<}} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi), \\ H_v(t, t') &= \Theta(t - t') \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t - t')\right). \end{aligned}$$

El propagador está dado por

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -2\beta^2 \Theta(t - t') \int_0^{\infty} v \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{j_l\left(\frac{v}{r_{>}}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right)}{r_{>} r_{<}} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t - t')\right) dv. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dada la ecuación anterior el problema a resolver es el encontrar el valor de la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} v j_l\left(\frac{v}{r_{>}}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right) \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t - t')\right) dv. \quad (4.34)$$

Dado que

$$\exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t - t')\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{iv^2(t-t')}{2\beta^2}\right)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\vartheta^s}{s!} v^{2s}, \quad (4.35)$$

donde $\vartheta = -i(t - t')/2\beta^2$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} v j_l\left(\frac{v}{r_{>}}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right) \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t - t')\right) dv &= \int_0^{\infty} v j_l\left(\frac{v}{r_{>}}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right) dv \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\vartheta^s}{s!} \int_0^{\infty} v^{2s+1} j_l\left(\frac{v}{r_{>}}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right) dv. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Las soluciones a las integrales son expuestas en el Apéndice D.

El propagador esta dado por

$$k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\pi\beta^2\Theta(t-t') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(-i)^s (2(t-t')/\beta^2)^s}{s!} \frac{\Gamma(l+s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} r_{<}^{2s} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{l+1} \right. \right. \\ \left. \left. \times {}_2\tilde{F}_1 \left(s + \frac{1}{2}, l+s+1; l + \frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right) \right] Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (4.37)$$

donde ${}_2\tilde{F}_1$ es la función hipergeométrica regularizada [15] (${}_2\tilde{F}_1(a, b; c; d) = {}_2F_1(a, b; c; d)/\Gamma(c)$)

Por el teorema de adición de los armónicos esféricos

$$k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{\beta^2\Theta(t-t')}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2l+1) \left[\left(\frac{(-i)^s (2(t-t')/\beta^2)^s}{s!} \frac{\Gamma(l+s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} r_{<}^{2s} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{l+1} \right. \right. \\ \left. \left. \times {}_2\tilde{F}_1 \left(s + \frac{1}{2}, l+s+1; l + \frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right) \right] P_l(\cos \gamma), \quad (4.38)$$

con P_l el polinomio de Legendre de orden l y γ en el ángulo en términos de los productos de dos armónicos esféricos con coordenadas angulares (θ, ϕ) y (θ', ϕ') .

4.2.6. Propagador para $n \geq 4$

Para este caso se procede de igual manera al caso 3-dimensional, recordando que

$$G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\pi\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \frac{J_p\left(\frac{v}{r_{>}}\right)}{r_{>}^{N/2}} \frac{H_p^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right)}{r_{<}^{N/2}} (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega), \\ H_v(t, t') = \Theta(t-t') \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t-t')\right).$$

Tenemos que el propagador esta expresado entonces por

$$k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\pi\beta^2\Theta(t-t') \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \frac{J_p\left(\frac{v}{r_{>}}\right)}{r_{>}^{N/2}} \frac{H_p^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right)}{r_{<}^{N/2}} (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega) \\ \times \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t-t')\right) dv. \quad (4.39)$$

Ahora las integrales a resolver son

$$\int_0^{\infty} J_p\left(\frac{v}{r_{>}}\right) H_p^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right) \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t-t')\right) dv = \int_0^{\infty} J_p\left(\frac{v}{r_{>}}\right) H_p^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right) dv \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\partial^s}{s!} \int_0^{\infty} v^{2s} J_p\left(\frac{v}{r_{>}}\right) H_p^{(1)}\left(\frac{v}{r_{<}}\right) dv. \quad (4.40)$$

Las soluciones a las integrales están expuestas en el Apéndice D.

Por lo tanto el propagador para en caso donde la dimensión es mayor o igual a 4 esta expresado por

$$k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\pi\beta^2\Theta(t-t') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(-i)^s (2(t-t')/\beta^2)^s}{s!} \frac{\Gamma(p+s+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} \frac{(r_{<})^{2s+1}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p \right. \right. \\ \left. \left. \times {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, p+s+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right] (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega). \quad (4.41)$$

Los armónicos hiperesféricos cumplen también con el teorema de adición [16], por tanto

$$k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{\beta^2\Gamma(\frac{N+2}{2})\Theta(t-t')}{2N\pi^{N+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2l+N) \left[\left(\frac{(-i)^s (2(t-t')/\beta^2)^s}{s!} \frac{\Gamma(p+s+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{(r_{<})^{2s+1}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, p+s+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right] C_l^{N/2}(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}), \quad (4.42)$$

con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}'$ vectores unitarios en la dirección de los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$

$$\mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{x}}{r} = \frac{1}{r} (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \mathbf{u}' \equiv \frac{\mathbf{x}'}{r'} = \frac{1}{r'} (x'_1, x'_2, \dots, x'_n).$$

4.3. Caso $n = 2$

Para el caso 2-dimensional, $\mathbf{V}_{eff} = 0$, por lo tanto Ec.(2.9) toman la forma:

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} i \delta(t-t') \delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (4.43)$$

$k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ debe satisfacer la ecuación homogénea

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i e^{\alpha\Phi(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 0. \quad (4.44)$$

Como se explicó anteriormente, el caso $n = 2$ es especial debido a que existe un gran número de mapeos conformes. Como ejemplo tomaremos el caso de la propagación de una partícula libre sobre una esfera. Utilizando la proyección estereográfica buscaremos expresiones para el propagador sobre el plano.

Utilizando la proyección estereográfica como punto de partida (*Figura 2.*)

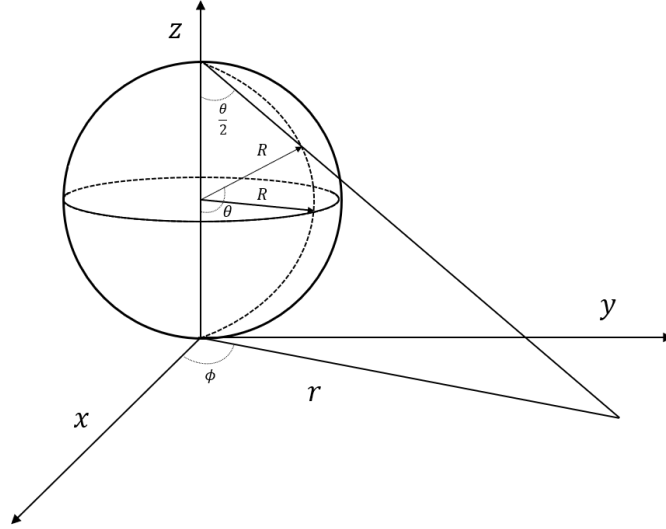


Figura 2

$$\begin{aligned} x &= 2R \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\phi), \\ y &= 2R \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\phi). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Denotamos a dS^2 como el elemento de línea en coordenadas cartesianas, mientras que dS_E^2 es el elemento de línea en coordenadas θ y ϕ (coordenadas esféricas sobre una esfera de radio R).

Ahora bien, notemos que

$$\begin{aligned} dx &= 2R \left(\frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\phi) d\theta - \sin(\phi) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) d\phi \right), \\ dy &= 2R \left(\frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\phi) d\theta + \cos(\phi) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) d\phi \right), \end{aligned} \quad (4.46)$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} dS^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= R^2 \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta^2 + 4R^2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\phi^2 \\ &= \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(R^2 d\theta^2 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\phi^2 \right) \\ &= \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) (R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2(\theta) d\phi^2) \\ &= \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) dS_E^2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Un resultado importante en variable compleja que involucra las transformaciones conformes y el operador de Laplace en dos dimensiones es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right), \quad (4.48)$$

donde $f(z)$ es una función analítica y $f'(z) \neq 0$.

Ahora bien, dada Ec.(4.45), se tiene que

$$r = 2R \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (4.49)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$.

Además

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 + r^2}}, \quad (4.50)$$

$$\sec\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{1/2}, \quad (4.51)$$

para nuestro caso

$$e^{\alpha\Phi} = \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{-2}, \quad (4.52)$$

de tal modo que

$$\frac{1}{R^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{-2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right). \quad (4.53)$$

Por lo tanto Ec.(4.44) toma la forma

$$\frac{1}{2} \nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{-2} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 0. \quad (4.54)$$

4.3.1. Régimen $r \ll R$

Ahora bien, tomaremos el régimen donde $r \ll R$

$$\left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{16} \frac{r^4}{R^4} - \dots, \quad (4.55)$$

de tal manera que Ec.(4.54) toma la forma

$$\frac{1}{2} \nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 0. \quad (4.56)$$

Busquemos primeramente como son las soluciones a la ecuación homogénea

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.57)$$

Reorganizando la ecuación anterior se obtiene

$$D_0 k - \frac{r^2}{R^2} D_1 k = 0, \quad (4.58)$$

donde D_0 y D_1 son operadores diferenciales

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{2}\nabla^2 + i\frac{\partial}{\partial t}, \\ D_1 &= \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Ahora propondremos una solución de la forma

$$k = k_0 + \frac{r^2}{R^2}k_1 + \frac{r^4}{R^4}k_2 + \dots, \quad (4.60)$$

donde

$$D_0 k_0 = 0. \quad (4.61)$$

Sustituyendo Ec.(4.60) en Ec.(4.58) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} D_0 k_0 &= 0, \\ D_0(r^2 k_1) - r^2 D_1(k_0) &= 0, \\ D_0(r^4 k_2) - r^2 D_1(r^2 k_1) &= 0, \\ &\vdots \\ D_0(r^{2n} k_n) - r^2 D_1(r^{2(n-1)} k_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

De Ec.(4.62) obtenemos un conjunto de ecuaciones recurrentes, que al resolverlas se obtendría una aproximación para k .

Nótese que

$$D_0(r^2 k_1) - r^2 D_1(k_0) = 0, \quad (4.63)$$

de aquí que

$$D_0(r^2 k_1) = r^2 D_1(k_0). \quad (4.64)$$

Por lo tanto

$$r^2 k_1 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (x'^2 + y'^2) G_0(x, y, t; x', y', t') D_1(k_0(x', y', t')) dx' dy' dt', \quad (4.65)$$

donde G_0 es la función de Green asociado al operador D_0 .

Para nuestro caso

$$\begin{aligned} G_0(x, y, t; x', y', t') &= \frac{1}{i} \theta(t - t') \left(\frac{1}{2\pi i(t - t')} e^{i \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2(t-t')}} \right) \\ &= -\frac{\theta(t - t')}{2\pi(t - t')} e^{i \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2(t-t')}}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Donde

$$\theta(t - t') = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t' \\ 1 & \text{si } t > t'. \end{cases} \quad (4.67)$$

Tomando k_0 como

$$k_0(x', y', t') = \frac{1}{2\pi i t'} e^{\frac{i(x'^2 + y'^2)}{2t'}}, \quad (4.68)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} D_1 k_0 &= \frac{i}{2} \frac{\partial k_0}{\partial t'} \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{i e^{\frac{i(x'^2 + y'^2)}{2t'}}}{2\pi t'^2} - \frac{(x'^2 + y'^2) e^{\frac{i(x'^2 + y'^2)}{2t'}}}{4\pi t'^3} \right) \\ &= -\frac{e^{\frac{i(x'^2 + y'^2)}{2t'}} (2t' + i(x'^2 + y'^2))}{8\pi t'^3}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

De tal manera que

$$\begin{aligned} r^2 k_1 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (x'^2 + y'^2) \left(-\frac{\theta(t - t')}{2\pi(t - t')} e^{i \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2(t-t')}} \right) \\ &\quad \times \left(-\frac{e^{\frac{i(x'^2 + y'^2)}{2t'}} (2t' + i(x'^2 + y'^2))}{8\pi t'^3} \right) dx' dy' dt'. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Utilizando coordenadas polares, la integral anterior toma la forma

$$\begin{aligned} r^2 k_1 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r'^2 \left(-\frac{\theta(t - t')}{2\pi(t - t')} e^{i \frac{(r^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi') + r'^2)}{2(t-t')}} \right) \\ &\quad \times \left(-\frac{e^{\frac{i(r'^2)}{2t'}} (2t' + i r'^2)}{8\pi t'^3} \right) (r' dr' d\phi') dt'. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Resolviendo la integral anterior obtenemos

$$r^2 k_1(r, t) = -\frac{1}{24\pi} \left(\frac{r^4 + i r^2 t - 2t^2}{t^2} \right) e^{\frac{i r^2}{2t}}, \quad (4.72)$$

la solución de la integrales involucradas se encuentran en el Apéndice D.

De tal modo que

$$k(r, t) \approx \frac{1}{2\pi i t} e^{\frac{ir^2}{2t}} - \frac{1}{24\pi} \frac{1}{R^2} \left(\frac{r^4 + ir^2 t - 2t^2}{t^2} \right) e^{\frac{ir^2}{2t}}. \quad (4.73)$$

Retomando Ec.(4.56), tomando a k_0 (propagador de una partícula libre) como

$$k_0(x, y, t; x', y', t') = -\frac{\theta(t - t')}{2\pi i(t - t')} e^{i \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2(t-t')}}, \quad (4.74)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} D_1 k_0 &= \frac{i}{2} \frac{\partial k_0}{\partial t} \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{i\delta(t - t') e^{\frac{i((x-x')^2 + (y-y')^2)}{2(t-t')}}}{2\pi(t - t')} + \frac{\theta(t - t') e^{\frac{i((x-x')^2 + (y-y')^2)}{2(t-t')}} (-2it + 2it' + (x - x')^2 + (y - y')^2)}{4\pi(t - t')^3} \right). \end{aligned} \quad (4.75)$$

De tal manera que

$$\begin{aligned} r^2 k_1 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (x''^2 + y''^2) \left(-\frac{\theta(t - t'')}{2\pi(t - t'')} e^{i \frac{(x-x'')^2 + (y-y'')^2}{2(t-t'')}} \right) \\ &\quad \times \left(\theta(t'' - t') \frac{e^{\frac{i((x''-x')^2 + (y''-y')^2)}{2(t''-t')}} (2(t'' - t') + i((x'' - x')^2 + (y'' - y')^2))}{8\pi(t'' - t')^3} \right) dx'' dy'' dt'' \\ &\quad - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (x''^2 + y''^2) \left(-\frac{\theta(t - t'')}{2\pi(t - t'')} e^{i \frac{(x-x'')^2 + (y-y'')^2}{2(t-t'')}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\delta(t'' - t') e^{\frac{i((x''-x')^2 + (y''-y')^2)}{2(t''-t')}}}{4\pi(t'' - t')} \right) dx'' dy'' dt'', \end{aligned} \quad (4.76)$$

Utilizando coordenadas polares

$$\begin{aligned} r^2 k_1 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r''^2 \left(-\frac{\theta(t - t'')\theta(t'' - t')}{2\pi(t - t'')} e^{i \frac{(r^2 - 2rr'' \cos(\phi - \phi'') + r''^2)}{2(t-t'')}} \right) \left(e^{i \frac{(r''^2 - 2r''r' \cos(\phi'' - \phi') + r'^2)}{2(t''-t')}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{2(t'' - t') + i(r''^2 - 2r''r' \cos(\phi'' - \phi') + r'^2)}{8\pi(t'' - t')^3} \right) (r'' dr'' d\phi'') dt'' \\ &\quad - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r''^2 \left(-\frac{\theta(t - t'')\theta(t'' - t')}{2\pi(t - t'')} e^{i \frac{(r^2 - 2rr'' \cos(\phi - \phi'') + r''^2)}{2(t-t'')}} \right) \left(e^{i \frac{(r''^2 - 2r''r' \cos(\phi'' - \phi') + r'^2)}{2(t''-t')}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\delta(t'' - t')}{4\pi(t'' - t')} \right) (r'' dr'' d\phi'') dt''. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Por lo tanto

$$k(r, \phi, t; r', \phi', t') \approx -\frac{\theta(t - t')}{2\pi i(t - t')} e^{i \frac{r^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi') + r'^2}{2(t-t')}} + \frac{r^2}{R^2} k_1(r, \phi, t; r', \phi', t'). \quad (4.78)$$

Ahora bien, si tomamos a $r' = 0$, $t' = 0$, $\phi' = 0$

$$\begin{aligned}
 r^2 k_1 = & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r''^2 \left(-\frac{\theta(t-t'')\theta(t'')}{2\pi(t-t'')} e^{i\frac{(r^2-2rr''\cos(\phi-\phi'')+r''^2)}{2(t-t'')}} \right) \left(e^{i\frac{r''^2}{2t''}} \right) \\
 & \times \left(\frac{2t'' + ir''^2}{8\pi(t'')^3} \right) (r'' dr'' d\phi'') dt'' \\
 & - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r''^2 \left(-\frac{\theta(t-t'')\theta(t'')}{2\pi(t-t'')} e^{i\frac{(r^2-2rr''\cos(\phi-\phi'')+r''^2)}{2(t-t'')}} \right) \left(e^{i\frac{r''^2}{2t''}} \right) \\
 & \times \left(\frac{\delta(t'')}{4\pi(t'')^3} \right) (r'' dr'' d\phi'') dt''.
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

La integral anterior se encuentra resuelta en el Apéndice D.

Por lo tanto el propagador esta descrito por

$$k(r, t; r' = 0, t' = 0) \approx -\frac{\theta(t)}{2\pi i t} e^{\frac{ir^2}{2t}} + \frac{1}{24\pi} \frac{\theta(t)}{R^2} \left(\frac{r^4 + ir^2 t - 2t^2}{t^2} \right) e^{\frac{ir^2}{2t}}. \tag{4.80}$$

Es importante mencionar que las expresiones descritas por Ec.(4.73), Ec.(4.78) y Ec.(4.80) se reducen a los casos planos cuando $R \rightarrow \infty$, un resultado que es de esperarse.

Identificamos claramente al propagador de partícula libre

$$k_0(r, t; 0, 0) = -\frac{\theta(t)}{2\pi i t} e^{\frac{ir^2}{2t}}$$

Por tanto

$$k(r, t; 0, 0) \approx k_0(r, t; 0, 0) + \frac{1}{R^2} f(r, t) k_0(r, t; 0, 0), \tag{4.81}$$

donde

$$f(r, t) = \frac{1}{12} \frac{(r^4 - 2t^2) + ir^2}{it}. \tag{4.82}$$

Recordando que la curvatura de Gauss de una 2-esfera de radio R esta dado por

$$\kappa = \frac{1}{R^2} \tag{4.83}$$

$$k(r, t; 0, 0) \approx k_0(r, t; 0, 0) + \kappa f(r, t) k_0(r, t; 0, 0). \tag{4.84}$$

Sea

$$k_1(r, t; 0, 0) = f(r, t) k_0(r, t; 0, 0), \tag{4.85}$$

$$k(r, t; 0, 0) \approx k_0(r, t; 0, 0) + \kappa k_1(r, t; 0, 0). \tag{4.86}$$

Tomando una partícula descrita por la función de onda $\varphi_0 = \varphi_0(r', 0)$ que se encuentra originalmente en r' cuando $t' = 0$, entonces es posible encontrar la evolución temporal de dicha onda con Ec.(4.84)

$$\varphi(r, t) \approx \int r' k_0(r, t; r', 0) \varphi_0(r', 0) dr' + \kappa \int r' k_1(r, t; r', 0) \varphi_0(r', 0) dr', \tag{4.87}$$

claramente los efectos de la curvatura κ del espacio son evidentes en este régimen.

4.3.2. Régimen $R < r$

Recordando que

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha\Phi} &= \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{-2}, \\
 \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{-2} &= \left(\frac{r^2}{4R^2} \left(1 + \frac{4R^2}{r^2}\right)\right)^{-2} \\
 &= \frac{16R^4}{r^4} \left(1 + \frac{4R^2}{r^2}\right)^{-2} \\
 &= \frac{16R^4}{r^4} \left(1 - \frac{8R^2}{r^2} + \frac{48R^4}{r^4} - \dots\right),
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

de tal modo que

$$\left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{-2} \approx \frac{16R^4}{r^4}. \tag{4.89}$$

Por lo tanto la ecuación a resolver es

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(r, t) + i \frac{16R^4}{r^4} \frac{\partial}{\partial t} k(r, t) = 0. \tag{4.90}$$

Además para nuestro caso

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right). \tag{4.91}$$

Aplicando una transformada de Fourier a la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{1}{2}\nabla^2 \tilde{k}(r, \omega) + \frac{16R^4\omega}{r^4} \tilde{k}(r, \omega) = 0. \tag{4.92}$$

Donde hemos utilizado la propiedad de las transformadas de Fourier

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \right] = (-i\omega)^n F(\omega), \tag{4.93}$$

además denotamos a la transformada de Fourier de k por $\tilde{k} = \tilde{k}(r, \omega)$. De esta manera Ec.(4.92) toma la forma

$$\frac{d^2 \tilde{k}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{k}}{dr} + \frac{32R^4\omega}{r^4} \tilde{k} = 0, \tag{4.94}$$

cuya solución general

$$\tilde{k}(r, \omega) = \frac{c_1 K_0 \left(\frac{4\sqrt{2}\sqrt{-R^4\omega}}{r} \right)}{\sqrt{\pi}} + c_2 I_0 \left(\frac{4\sqrt{2}\sqrt{-R^4\omega}}{r} \right), \tag{4.95}$$

donde c_1 y c_2 constantes de integración, I_0 y K_0 las funciones modificadas de Bessel de primera y segunda especie respectivamente.

Aplicando la transformada inversa de Fourier obtenemos lo siguiente:

Definamos a $\alpha = \frac{4\sqrt{2}R^2}{r}$, por lo tanto Ec.(4.95) toma la forma

$$\tilde{k}(r, \omega) = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} K_0(i\alpha\sqrt{\omega}) + c_2 I_0(i\alpha\sqrt{\omega}). \quad (4.96)$$

Calculemos la transformada inversa de I_0 .

Tomemos en cuenta que $I_0(i\alpha\sqrt{\omega}) = J_0(-\alpha\sqrt{\omega})$, donde J_0 es la función de Bessel de orden 0.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(i\alpha\sqrt{\omega}) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} I_0(-\alpha\sqrt{\lambda}) e^{i\lambda t} d\lambda + \int_0^{\infty} J_0(-\alpha\sqrt{\omega}) e^{-i\omega t} d\omega \right) \quad (4.97)$$

$$\int_0^{\infty} I_0(-\alpha\sqrt{\lambda}) e^{i\lambda t} d\lambda = \int_0^{\infty} I_0(-\alpha\sqrt{\omega}) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} J_0(-i\alpha\sqrt{\omega}) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.98)$$

Dado que

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta\sqrt{x}) e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad (4.99)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(-i\alpha\sqrt{\omega}) e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{it} e^{\frac{i\alpha^2}{4t}}, \quad (4.100)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(-\alpha\sqrt{\omega}) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{it} e^{\frac{i\alpha^2}{4t}}. \quad (4.101)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(i\alpha\sqrt{\omega}) e^{-i\omega t} d\omega = 0. \quad (4.102)$$

Calculemos la transformada inversa de K_0 .

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(i\alpha\sqrt{\omega}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.103)$$

dado que

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z \cosh s} ds, \quad (4.104)$$

realizando el cambio de variable

$$r = e^s, \quad (4.105)$$

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}(r+\frac{1}{r})} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{zr}{2} - \frac{z}{2r}} \frac{dr}{r}, \quad (4.106)$$

sea $\tau = \frac{zr}{2}$

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\tau - \frac{z^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau}, \quad (4.107)$$

por lo tanto

$$K_0(i\alpha\sqrt{\omega}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\tau + \frac{\alpha^2\omega}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau}, \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K_0(i\alpha\sqrt{\omega}) e^{-i\omega t} d\omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\tau + \frac{\alpha^2\omega}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau} \right) e^{-i\omega t} d\omega, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\tau + \frac{\alpha^2\omega}{4\tau}} e^{-i\omega t} d\omega \right), \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{\alpha^2\omega}{4\tau}} e^{-i\omega t} d\omega \right), \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{\alpha^2\omega}{4\tau}} e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^\infty e^{i\eta\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.110)$$

donde $\eta = \frac{-i\alpha^2}{4\tau}$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{\alpha^2\omega}{4\tau}} e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^\infty e^{i\eta\omega} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t - \eta) = 2\pi\delta(\eta - t), \quad (4.111)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau} \delta(\eta - t) = \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta} e^{\frac{i\alpha^2}{4\eta}} \delta(\eta - t) = \frac{\theta(t)}{t} e^{\frac{i\alpha^2}{4t}} = \frac{\theta(t)}{t} e^{\frac{i8R^4}{4t}}. \quad (4.112)$$

De tal manera

$$k(r, t) = c_1 \frac{\theta(t)}{\sqrt{2t}} e^{\frac{i8R^4}{4t}}. \quad (4.113)$$

donde c_1 es determinada por las condiciones de frontera.

Ahora bien si buscamos que Ec.(4.113) cumpla como el propagador

$$k(r, t) = -\frac{\theta(t)}{2\pi i t} e^{\frac{i8R^4}{4t}} = -\frac{\theta(t)}{2\pi i t} e^{\frac{i16R^4}{4t}}. \quad (4.114)$$

Si tomamos a $\rho = \frac{4R^2}{r}$, Ec.(4.114) toma la forma

$$k(\rho, t) = -\frac{\theta(t)}{2\pi i t} e^{\frac{i\rho^2}{2t}}, \quad (4.115)$$

mostrando que la propagación de una partícula libre en este régimen es equivalente a la propagación de una partícula libre en el plano.

Mostremos ahora que la ecuación de Laplace en coordenadas polares conserva su forma ante la transformación

$$r = \frac{\mathcal{R}^2}{r'}, \quad (4.116)$$

donde $\mathcal{R}$ es una constante (radio de inversión).

Dado que

$$\nabla^2 \Phi(r, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \phi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi(r, \phi) = 0, \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \frac{r'}{\mathcal{R}^2} \left[-\frac{(r')^2}{\mathcal{R}^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left[\frac{\mathcal{R}^2}{r'} \left(-\frac{(r')^2}{\mathcal{R}^2} \frac{\partial}{\partial r'} \right) \right] \right] \\ &= \frac{(r')^3}{\mathcal{R}^4} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} \right), \end{aligned} \quad (4.118)$$

por tanto

$$\frac{(r')^3}{\mathcal{R}^4} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} \Phi(r', \phi) \right) + \frac{(r')^2}{\mathcal{R}^4} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi(r', \phi) = 0, \quad (4.119)$$

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} \Phi(r', \phi) \right) + \frac{1}{(r')^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi(r', \phi) = 0. \quad (4.120)$$

Con lo anterior podemos mostrar que la ecuación con la forma

$$\frac{1}{2} \nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\mathcal{R}^4}{r^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.121)$$

se transforma como

$$\frac{1}{2} \nabla'^2 k(\mathbf{x}', t) + i \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}', t) = 0. \quad (4.122)$$

Dado que

$$\frac{\mathcal{R}^4}{r^4} = \mathcal{R}^4 \frac{(r')^4}{\mathcal{R}^8} = \frac{(r')^4}{\mathcal{R}^4}, \quad (4.123)$$

se tiene entonces que

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(r')^3}{\mathcal{R}^4} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} k(\mathbf{x}', t) \right) + \frac{(r')^2}{\mathcal{R}^4} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} k(\mathbf{x}', t) \right] + i \frac{(r')^4}{\mathcal{R}^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}', t) = 0, \quad (4.124)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} k(\mathbf{x}', t) \right) + \frac{1}{(r')^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} k(\mathbf{x}', t) \right] + i \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}', t) = 0. \quad (4.125)$$

Por lo tanto una solución a Ec.(4.122)

$$k(r', t) = \frac{1}{2\pi i t} e^{\frac{i(r')^2}{2t}}, \quad (4.126)$$

de tal modo que una solución a Ec.(4.121) es

$$k(r, t) = \frac{1}{2\pi i t} e^{\frac{i\mathcal{R}^4}{2r^2 t}}. \quad (4.127)$$

Haciendo uso de la transformación descrita por Ec.(4.116) es posible encontrar el propagador de una partícula en el régimen donde $r > R$.

Tomando a $\mathcal{R} = 2R$ y $\varrho = \frac{\mathcal{R}^2}{r}$, el propagador en este régimen es siguiente:

$$k(\varrho, \vartheta, t; \varrho', \vartheta', t') = -\frac{\theta(t-t')}{2\pi i(t-t')} e^{\frac{i(\varrho^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\vartheta - \vartheta') + (\varrho')^2)}{2(t-t')}} \quad (4.128)$$

4.3.3. Resultados

Para analizar la propagación de una partícula libre sobre una superficie esférica fue necesario el uso de distintas técnicas. La aplicación de una transformación conforme, el método de perturbaciones, transformaciones integrales (Fourier) y transformaciones de inversión fueron utilizadas en este problema.

Algo interesante independientemente de la búsqueda del propagador, fue la relación entre la curvatura del espacio y el potencial efectivo V_{eff} .

Para el caso de la esfera es posible encontrar una relación entre la curvatura del espacio y el factor conforme a pesar de que $V_{eff} = 0$. Recordemos que esta relación puede apreciarse a través de Ec.(3.19)

$$\bar{R} = -\alpha e^{-\alpha\Phi} \nabla^2 \Phi,$$

tomando en cuenta que el factor conforme en este caso está dado por

$$e^{\alpha\Phi} = \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{-2},$$

identificamos rápidamente que

$$\alpha = -2 \quad \Phi = \log\left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right). \quad (4.129)$$

De lo anterior se obtiene

$$\bar{R} = \frac{2}{R^2} = 2\kappa. \quad (4.130)$$

Mostrando que la curvatura escalar es el doble de la curvatura gaussiana, un resultado que es de esperarse.

Régimen $r \ll R$

En el régimen donde $r \ll R$ se utilizó el método de perturbaciones, con ello mostramos que el propagador de una partícula está descrita por Ec.(4.86)

$$k(r, t; 0, 0) \approx k_0(r, t; 0, 0) + \kappa k_1(r, t; 0, 0).$$

donde k_0 corresponde al propagador de una partícula libre en coordenadas polares, mientras que k_1 es el primer término que surge del método de perturbaciones. Es importante mencionar que el efecto de la curvatura de espacio κ (superficie esférica) se hace presente pues aparece junto a k_1 .

Si buscamos la evolución temporal de dicha partícula descrita por la función de onda φ_0 (Ec.(4.87)),

$$\varphi(r, t) \approx \int r' k_0(r, t; r', 0) \varphi_0(r', 0) dr' + \kappa \int r' k_1(r, t; r', 0) dr',$$

muestra claramente la influencia de la curvatura κ en la evolución temporal de dicha función de onda.

Régimen $R < r$

En este caso utilizamos el método de transformada de Fourier, con ello observamos que la propagación de una partícula en este régimen es equivalente a la propagación de una partícula libre en coordenadas polares. Si se hace uso de una transformación de inversión ($\varrho = \frac{4R^2}{r}$), encontramos que el propagador tiene la forma

$$k(\varrho, \vartheta, t; \varrho', \vartheta', t') = -\frac{\theta(t - t')}{2\pi i(t - t')} e^{\frac{i(\varrho^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\vartheta - \vartheta') + (\varrho')^2)}{2(t - t')}}.$$

De ambas maneras se llega al mismo resultado.

Capítulo 5

Conclusiones

Trabajos como los de Corradini, Faccioli y Orland (2009) [17] muestran que el efecto de una transformación conforme pueden interpretarse como la acción de un “potencial efectivo”, inspirados en estas ideas se investigó el efecto que tiene una transformación conforme en la propagación cuántica de una partícula libre en un espacio curvo.

Para observar dicho efecto fue necesario investigar como se modifica la ecuación de Schrödinger ante dicha transformación, se buscó expresiones analíticas para los propagadores cuánticos y se exploró la relación existente entre la transformación conforme y elementos geométricos del espacio.

Dado lo anterior encontramos los siguientes resultados:

Efectos de la transformación conforme

- Encontramos que la aplicación de una transformación conforme induce el efecto de un “potencial efectivo” pero esta cambia la forma funcional de la ecuación de Schrödinger, la transformación crea una distorsión del término temporal, la expresión final es una ecuación de "tipo Schrödinger".

Potencial efectivo (V_{eff})

- Fue posible encontrar la expresión general que toma el factor conforme para dimensiones mayores o iguales a 3 en el espacio euclidiano, como se mencionó anteriormente el “potencial efectivo” está en función de este factor, encontrando de igual manera una expresión general para dicho potencial en dimensiones mayores o iguales a 3, los casos 2 y 3 dimensional son muy interesantes pues en estos casos $V_{eff} = 0$.

Potencial efectivo y curvatura del espacio

- Se investigó la relación entre el “potencial efectivo” y el escalar de Ricci, encontramos que el escalar de Ricci es proporcional al potencial, el escalar de curvatura y el potencial están relacionados a través del factor conforme.
- Para el caso de dimensión dos $V_{eff} = 0$ a pesar de ello el escalar de Ricci es distinto cero, mostrando que para nuestro ejemplo este coincide con el doble de la curvatura gaussiana, un resultado que es de esperarse.
- Para el caso 3 dimensional de igual manera $V_{eff} = 0$, el escalar de Ricci en este caso es cero, este es un resultado no esperado. El explorar las propiedades geométricas en esta dimensión es un problema interesante que merece una atención especial.

Potencial efectivo y propagadores

- Parte importante de este trabajo fue también la búsqueda de los propagadores cuánticos, encontramos expresiones analíticas para los casos donde la dimensión es mayor o igual a tres.
- El caso 2 dimensional es sumamente interesante pues debido a la teoría expuesta en este trabajo existe un inmenso número de transformaciones conformes, podría pensarse que es un caso sencillo debido a la dimensión pero cada transformación lleva al estudio de un problema completamente nuevo. Esto abre una nueva vertiente en uso de transformaciones conformes a problemas de mecánica cuántica en el plano.
- Dentro de este trabajo se mostró la aplicación de una transformación conforme para la descripción de la propagación de una partícula libre sobre una esfera, dichos resultados coinciden con el caso plano cuando el radio de la esfera $R \rightarrow \infty$. Además, pudimos observar el efecto que tiene la curvatura del espacio en la propagación de la partícula en el régimen donde $r \ll R$ y encontramos que en el régimen donde $R < r$ la propagación de la partícula es equivalente a la propagación de una partícula libre en dos dimensiones.

Importancia y aplicaciones de los propagadores cuánticos

Un propagador es una función de Green para la ecuación de Schrödinger, como se mostró en este trabajo la búsqueda del propagador cuántico implica la aplicación de diversas herramientas matemáticas.

Como es bien sabido el propagador nos permite encontrar la función de onda de un sistema, dada una función de onda inicial en un intervalo de tiempo.

¿Existen otras aplicaciones?

El propagador como función de Green en áreas como la **física estadística cuántica** son funciones de correlación que nos permiten conocer:

- La densidad de estados.
- Tiempos de relajación.
- Funciones de respuesta.

También es posible aplicar el propagador en **teoría de dispersión**. Este permite describir la dispersión de un haz de partículas (átomos, moléculas, electrones, fotones) y con ello comprender sistemas físicos, por ejemplo, colisiones atómicas y colisiones de partículas elementales de alta energía.

En **física del estado sólido** nos encontramos con el método Korringa – Kohn – Rostoker o método KKR [18]. Este método utiliza el formalismo de la función de Green en mecánica cuántica para calcular la estructura de banda electrónica de sólidos periódicos.

Green's Functions in Quantum Physics [19] es un texto que nos permite profundizar más en el formalismo de los propagadores y además muestra un gran número de aplicaciones.

Comentarios finales

Mostramos que la búsqueda de propagadores cuánticos implica un reto matemático, pero a su vez estos tienen una gran aplicación en diversas áreas de la física por ello la importancia de realizar estudios en este tipo de temas.

Es interesante haber encontrado la equivalencia *potencial-curvatura*, esto conlleva a explorar problemas en escenarios físicos tales como el movimiento browniano o la propagación de campos cuánticos.

Podemos concebir un problema geométrico a un problema equivalente relacionado con un potencial. Esto es muy interesante pues muestra una relación parecida a las encontradas en áreas como la relatividad general, donde se muestra la relación entre la geometría y la dinámica de la materia, dicha relación se hace presente en la modificación de la curvatura del espacio-tiempo.

Apéndice A

Operador de Laplace-Beltrami y propagador conforme

Operador de Laplace-Beltrami

El operador de Laplace-Beltrami tiene la forma

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} g^{ik} \partial_k \right), \quad (\text{A.1})$$

utilizando una métrica

$$\begin{aligned} g_{ik} &= e^{\alpha\Phi} \delta_{ik}, \\ g^{ik} &= e^{-\alpha\Phi} \delta^{ik}, \\ g &= e^{n\alpha\Phi}, \end{aligned}$$

con δ_{ij} la métrica euclidiana, g determinante de g_{ij} , $\alpha = cte$ y $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$. Con lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_g &= e^{-\frac{n\alpha\Phi}{2}} \partial_i \left(e^{\frac{n\alpha\Phi}{2}} e^{-\alpha\Phi} \delta^{ik} \partial_k \right) \\ &= e^{-\frac{n\alpha\Phi}{2}} \partial_i \left(e^{(\frac{n}{2}-1)\alpha\Phi} \partial_i \right) \\ &= e^{-\frac{n\alpha\Phi}{2}} e^{(\frac{n}{2}-1)\alpha\Phi} \left(\partial_i \partial_i + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha (\partial_i \Phi) \partial_i \right) \\ &= e^{-\alpha\Phi} \left(\nabla^2 + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha \nabla \Phi \cdot \nabla \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Propagador conforme

Dado que

$$\begin{aligned}\Delta_g K &= \Delta_g(e^{\theta\Phi} k) \\ &= \left(\nabla^2 + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha \nabla\Phi \cdot \nabla \right) (e^{\theta\Phi} k),\end{aligned}\tag{A.3}$$

donde

$$\nabla(e^{\theta\Phi} k) = e^{\theta\Phi} [\nabla k + \theta k (\nabla\Phi)],\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2(e^{\theta\Phi} k) &= \partial_i \left[e^{\theta\Phi} \partial_i k + \theta e^{\theta\Phi} (\partial_i \Phi) k \right] \\ &= \partial_i \left[e^{\theta\Phi} (\partial_i k + \theta (\partial_i \Phi) k) \right] \\ &= e^{\theta\Phi} \partial_i [\partial_i k + \theta (\partial_i \Phi) k] + \theta e^{\theta\Phi} (\partial_i \Phi) [\partial_i k + \theta (\partial_i \Phi) k] \\ &= e^{\theta\Phi} [\partial_i^2 k + \theta k \partial_i^2 \Phi + \theta (\partial_i \Phi \partial_i k) + \theta (\partial_i \Phi \partial_i k) + \theta^2 (\partial_i \Phi)^2 k] \\ &= e^{\theta\Phi} [\nabla^2 k + \theta k \nabla^2 \Phi + 2\theta \nabla\Phi \cdot \nabla k + \theta^2 |\nabla\Phi|^2 k].\end{aligned}\tag{A.5}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta_g(e^{\theta\Phi} k) &= e^{-\alpha\Phi} \left(\nabla^2 + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha \nabla\Phi \cdot \nabla \right) (e^{\theta\Phi} k) \\ &= e^{-\alpha\Phi} e^{\theta\Phi} \left[\nabla^2 k + \theta k \nabla^2 \Phi + 2\theta \nabla\Phi \cdot \nabla k + \theta^2 |\nabla\Phi|^2 k + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha \nabla\Phi \cdot (\nabla k + \theta k (\nabla\Phi)) \right] \\ &= e^{-\alpha\Phi} e^{\theta\Phi} \left[\nabla^2 + \theta \nabla^2 \Phi + \left(2\theta + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha \right) (\nabla\Phi \cdot \nabla) + \left(\theta^2 + \theta \alpha \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \right) |\nabla\Phi|^2 \right] k.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Tomando $\theta = -\frac{1}{2}\alpha \left(\frac{n}{2} - 1 \right)$

$$\Delta_g(e^{\theta\Phi} k) = e^{-\alpha\Phi} e^{\theta\Phi} \left[\nabla^2 - \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \nabla^2 \Phi - \frac{1}{4}\alpha^2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 |\nabla\Phi|^2 \right] k.\tag{A.7}$$

Apéndice B

Método para solución de ecuaciones diferenciales

La ecuación diferencial dada por

$$y'' + \frac{1-2a}{x} y' + \left[(bcx^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2 c^2}{x^2} \right] y = 0,$$

tiene como solución

$$y = x^a Z_p(bx^c),$$

donde Z_p esta dada por la combinación lineal de J_p y N_p , las funciones de Bessel y Neumann respectivamente y a, b, c, p constantes [20].

Caso $n = 3$

Dado que

$$\frac{1}{2} \nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Utilizando el método de separación de variables con $k(\mathbf{x}, t) = \int f_v(\mathbf{x}) T_v(t) dv$

$$\frac{|\mathbf{X}|^4}{f_v(\mathbf{x})} \nabla^2 f_v(\mathbf{x}) + \frac{2i\beta^2}{T_v(t)} \frac{\partial}{\partial t} T_v(t) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Esto ocurre si

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{X}|^4}{f_v(\mathbf{x})} \nabla^2 f_v(\mathbf{x}) &= -v^2, \\ \frac{2i\beta^2}{T_v(t)} \frac{d}{dt} T_v(t) &= v^2, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

con v una constante, esta constante en general puede ser compleja.

Parte espacial

Como

$$\frac{|\mathbf{X}|^4}{f_v(\mathbf{x})} \nabla^2 f_v(\mathbf{x}) = -v^2,$$

$$\nabla^2 f_v(\mathbf{x}) + \frac{v^2}{|\mathbf{X}|^4} f_v(\mathbf{x}) = 0.$$

Sin pérdida de generalidad tomamos $\mathbf{a} = 0$, por lo tanto $|\mathbf{X}| = |\mathbf{x}| = r$.

En coordenadas esféricas se tiene que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f_v}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_v).$$

Utilizando nuevamente separación de variables y coordenadas esféricas

$$f_v(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} \frac{R_{l,v}(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

De tal manera que

$$\begin{aligned} & \frac{Y_{l,m}}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{v^2}{r^4} \right] R_{l,v}(r) \\ & + \frac{R_{l,v}(r)}{r^3} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y_{l,m}(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

multiplicando por r^3 y dividiendo por $R_{l,v}(r) Y_{l,m}(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned} & \frac{r^2}{R_{l,v}(r)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{v^2}{r^4} \right] R_{l,v}(r) \\ & + \frac{1}{Y_{l,m}(\theta, \phi)} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y_{l,m}(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

lo anterior ocurre si

$$\frac{r^2}{R_{l,v}(r)} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{v^2}{r^4} \right] R_{l,v}(r) = cte, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{Y_{l,m}(\theta, \phi)} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y_{l,m}(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) = -cte. \quad (\text{B.6})$$

Tomando $cte = l(l+1)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), obtenemos lo siguiente

$$\frac{d^2 R_{l,v}(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{l,v}(r) + \frac{v^2}{r^4} R_{l,v}(r) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Para la parte angular

$$\Delta_{\Omega} Y_{l,m}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (\text{B.8})$$

donde Δ_{Ω} es el laplaciano angular, $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ los armónicos esféricos.

$$\Delta_{\Omega} = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Ahora busquemos una solución general a Ec.(B.7), utilizando el método mostrado al principio de esta sección.

Como

$$\frac{d^2 R_{l,v}(r)}{dr^2} + \left[(\nu r^{-2})^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{l,v}(r) = 0,$$

$$1 - 2a = 0 \quad (bc)^2 = \nu^2 \quad c - 1 = -2 \quad a^2 - p^2 c^2 = -l(l+1).$$

Considerando que $\nu > 0$

$$a = \frac{1}{2} \quad c = -1 \quad b = \nu \quad p^2 = \frac{1}{4} + l(l+1) = (l+1/2)^2 \quad p = \pm \left(\frac{1}{2} + l \right).$$

De tal modo que

$$\begin{aligned} R_{l,v}(r) &= r^{1/2} Z_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{r} \right) \\ &= r^{1/2} \left(A J_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{r} \right) + B N_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{r} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

con A, B constantes arbitrarias.

Parte temporal

De Ec.(B.2), para la parte temporal

$$\begin{aligned} \frac{2i\beta^2}{T_v(t)} \frac{d}{dt} T_v(t) &= \nu^2, \\ \frac{1}{T_v(t)} \frac{d}{dt} T_v(t) &= -i \frac{\nu^2}{2\beta^2}. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial anterior tiene como solución

$$T_v(t) = C \exp \left(-i \frac{\nu^2}{2\beta^2} t \right), \quad (\text{B.10})$$

con C una constante de integración.

Solución general

La solución general a la ecuación

$$\frac{1}{2}\nabla^2 k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0,$$

es

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}, t) &= C \int_0^\infty \sum_{l,m} \left(r^{-1/2} Z_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{v}{r} \right) \right) Y_{l,m}(\theta, \phi) \exp \left(-i \frac{v^2}{2\beta^2} t \right) dv \\ &= C r^{-1/2} \int_0^\infty \sum_{l,m} Z_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{v}{r} \right) Y_{l,m}(\theta, \phi) \exp \left(-i \frac{v^2}{2\beta^2} t \right) dv. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Caso $n \geq 4$

Dado que en dimensiones mayores o iguales a 4 la ecuación a resolver es

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{|\mathbf{X}|^2} \right) k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Haciendo consideraciones similares al caso anterior

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{r^2} \right) k(\mathbf{x}, t) + i \frac{\beta^2}{r^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\text{B.12})$$

sea $\mu = (n-2)(n-3)$, de tal manera que

$$r^4 \left(\nabla^2 - \frac{\mu}{r^2} \right) k(\mathbf{x}, t) + 2i\beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (\text{B.13})$$

Ahora bien haremos uso coordenadas polares n -dimensionales

$$\nabla^2 = r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_{\Omega n},$$

con r (hiperradio) la variable polar y $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \phi)$ las variables angulares. $\nabla_{\Omega n}$ un operador cuya solución son los armónicos hiperesféricos.

Aplicando nuevamente separación de variables

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}, t) &= \int f_v(\mathbf{x}) T_v(t) dv, \\ f_v(\mathbf{x}) &= \sum_{l,m} R_{l,n,v}(r) \mathcal{Y}_l^m(\Omega), \\ \frac{r^4}{f_v(\mathbf{x})} \left(\nabla^2 - \frac{\mu}{r^2} \right) f_v(\mathbf{x}) &= -v^2, \\ \frac{2i\beta^2}{T_v(t)} \frac{d}{dt} T_v(t) &= v^2, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

con v una constante, en general esta puede ser compleja.

Parte espacial

De Ec.(B.14) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{r^4}{f_v(\mathbf{x})} \left(\nabla^2 - \frac{\mu}{r^2} \right) f_v(\mathbf{x}) &= -v^2, \\ \left(\nabla^2 - \frac{\mu}{r^2} \right) f_v(\mathbf{x}) + \frac{v^2}{r^4} f_v(\mathbf{x}) &= 0.\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

Haciendo uso de la separación de variables nuevamente, donde $f_v(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} R_{l,n,v}(r) \mathcal{Y}_l^m(\Omega)$

$$\left[r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_{\Omega n}(\Omega) - \frac{\mu}{r^2} \right] R_{l,n,v}(r) \mathcal{Y}_l^m(\Omega) + \frac{v^2}{r^4} R_{l,n,v}(r) \mathcal{Y}_l^m(\Omega) = 0, \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{r^2}{R_{l,n,v}(r)} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r^4} \right] R_{l,n,v}(r) + \frac{1}{\mathcal{Y}_l^m(\Omega)} \nabla_{\Omega n} \mathcal{Y}_l^m(\Omega) = 0. \quad (\text{B.17})$$

Esto ocurre si

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{R_{l,n,v}(r)} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r^4} \right] R_{l,n,v}(r) &= cte, \\ \frac{1}{\mathcal{Y}_l^m(\Omega)} \nabla_{\Omega n} \mathcal{Y}_l^m(\Omega) &= -cte,\end{aligned}\quad (\text{B.18})$$

tomando a $cte = l(l+n-2)$, ($l = 0, 1, 2, \dots$) obtenemos

$$\frac{d^2 R_{l,n,v}(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d R_{l,n,v}(r)}{dr} - \frac{\mu}{r^2} R_{l,n,v}(r) + \frac{v^2}{r^4} R_{l,n,v}(r) - \frac{l(l+n-2)}{r^2} R_{l,n,v}(r) = 0, \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{d^2 R_{l,n,v}(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d R_{l,n,v}(r)}{dr} - \frac{\gamma}{r^2} R_{l,n,v}(r) + \frac{v^2}{r^4} R_{l,n,v}(r) = 0, \quad (\text{B.20})$$

con $\gamma = \mu + l(l+n-2) = (n-2)(n-3) + l(l+n-2)$.

La solución general para la parte radial puede ser determinada con el método utilizado para el caso 3 dimensional

$$\frac{d^2 R_{l,n,v}(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d R_{l,n,v}(r)}{dr} + \left[(vr^{-2})^2 - \frac{\gamma}{r^2} \right] R_{l,n,v}(r) = 0, \quad (\text{B.21})$$

$$1 - 2a = n - 1 \quad (bc)^2 = v^2 \quad c - 1 = -2 \quad a^2 - p^2 c^2 = -\gamma,$$

$$a = -\left(\frac{n-2}{2}\right) \quad b = \nu \quad c = -1 \quad p = \frac{\sqrt{(n-2)^2 + 4\nu}}{2} = \sqrt{\left(l + \frac{n-2}{2}\right)^2 + (n-2)(n-3)}.$$

Sea $N = n - 2$, por tanto

$$p = \sqrt{\left(l + \frac{N}{2}\right)^2 + (N)(N-1)},$$

con $N \geq 2$.

De tal manera que

$$R_{l,n,\nu}(r) = r^{-(n-2)/2} Z_p\left(\frac{\nu}{r}\right), \quad (\text{B.22})$$

$$R_{l,N,\nu}(r) = r^{-N/2} Z_p\left(\frac{\nu}{r}\right). \quad (\text{B.23})$$

Parte angular y polinomios de Gegenbauer

Para la parte angular

$$\nabla_{\Omega n} \mathcal{Y}_l^m(\Omega) = -l(l+n-2) \mathcal{Y}_l^m(\Omega), \quad (\text{B.24})$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla_{\Omega n} = & \frac{1}{(\sin \theta_{n-2})^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}} \left[(\sin \theta_{n-2})^{n-2} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}} \right] \\ & + \frac{1}{(\sin \theta_{n-2})^2} \frac{1}{(\sin \theta_{n-3})^{n-3}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-3}} \left[(\sin \theta_{n-3})^{n-3} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-3}} \right] \\ & + \frac{1}{(\sin \theta_{n-2})^2} \frac{1}{(\sin \theta_{n-3})^2} \frac{1}{(\sin \theta_{n-4})^{n-4}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-4}} \left[(\sin \theta_{n-4})^{n-4} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-4}} \right] \\ & + \dots \\ & + \frac{1}{(\sin \theta_{n-2})^2} \frac{1}{(\sin \theta_{n-3})^2} \dots \frac{1}{(\sin \theta_2)^2} \frac{1}{(\sin \theta_1)^1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[(\sin \theta_1)^1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right] \\ & + \frac{1}{(\sin \theta_{n-2})^2} \frac{1}{(\sin \theta_{n-3})^2} \dots \frac{1}{(\sin \theta_2)^2} \frac{1}{(\sin \theta_1)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

La solución para la parte angular corresponde a la función hiperesférica armónica $\mathcal{Y}_l^m(\Omega)$ que viene expresada por los polinomios de Gegenbauer

$$\mathcal{Y}_l^m(\Omega) = N_{l,\sigma} e^{im\phi} \prod_{j=1}^{n-2} C_{\sigma_j - \sigma_{j+1}}^{\alpha_j + \sigma_{j+1}}(\cos \theta_j) (\sin \theta_j)^{\sigma_{j+1}}, \quad (\text{B.26})$$

con $\alpha_j = (n-j-1)/2$, $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-2}\}$, $l = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{n-2} = |m|$, con $m \in \mathbb{Z}$ y $-l \leq m \leq l$, mientras que

$$(N_{l,\sigma})^2 = \frac{1}{2\pi} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{(\alpha_j + \sigma_j)(\sigma_j - \sigma_{j+1})! \Gamma^2(\alpha_j + \sigma_{j+1})}{2^{1-2\alpha_j-2\sigma_{j+1}} \pi \Gamma(2\alpha_j + \sigma_j + \sigma_{j+1})}. \quad (\text{B.27})$$

Los polinomios de Gegenbauer pueden ser definidos por la siguiente función generatriz

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(\alpha)}(x) t^m. \quad (\text{B.28})$$

De forma explícita

$$C_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(m-k+\alpha)}{\Gamma(\alpha) k! (m-2k)!} (2x)^{m-2k}. \quad (\text{B.29})$$

Solución general

Por todo lo anterior

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}, t) &= C \int_0^\infty \sum_{l,m} \left(r^{-(n-2)/2} Z_p \left(\frac{v}{r} \right) \right) \mathcal{Y}_l^m(\Omega) \exp \left(-i \frac{v^2}{2\beta^2} t \right) dv \\ &= C r^{-N/2} \int_0^\infty \sum_{l,m} Z_p \left(\frac{v}{r} \right) \mathcal{Y}_l^m(\Omega) \exp \left(-i \frac{v^2}{2\beta^2} t \right) dv, \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

con C una constante de integración.

Apéndice C

Construcción de la función de Green radial y temporal

Funciones de Green radiales

Caso $n = 3$

Para este caso tenemos

$$r^4 \nabla^2 k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t) + 2i\beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t) = -2i\beta^2 \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Ahora que ya conocemos la solución general a la ecuación homogénea

$$k(\mathbf{x}, t) = Cr^{-1/2} \int_0^\infty \sum_{l,m} Z_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) Y_{l,m}(\theta, \phi) \exp\left(-i \frac{v^2}{2\beta^2} t\right) dv.$$

El propagador se propone de la siguiente manera

$$k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t) = \int_0^\infty G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') H_v(t, t') dv,$$

procederemos a encontrar la función de Green ($G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$) asociada a la parte espacial.

La función de Green $G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ debe satisfacer lo siguiente (por separación de variables):

$$\nabla^2 G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{v^2}{r^4} G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -2i\beta^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Utilizando coordenadas esféricas y proponiendo a G_v como

$$G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l g_{l,v}(r, r') Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),$$

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),$$

de tal manera que $g_{l,v}(r, r')$ satisface

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r g_{l,v}(r, r'))}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} g_{l,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,v}(r, r') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r - r')}{r^2}, \quad (C.1)$$

donde $g_{l,v}(r, r')$ satisface la ecuación homogénea

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r g_l(r, r'))}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} g_{l,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,v}(r, r') = 0. \quad (C.2)$$

Además $g_{l,v}(r, r')$ debe cumplir con lo siguiente:

1. $g_{l,v}(r, r')$ es finita cuando $r \rightarrow 0$
2. $g_{l,v}(r, r') \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$
3. $g_{l,v}(r, r')$ es continua en $r = r'$
4. La derivada de $g_{l,v}(r, r')$ es discontinua en $r = r'$

Por lo tanto se propone a $g_{l,v}(r, r')$

$$g_{l,v}(r, r') = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(A(r') J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) + B(r') N_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) \right) & \text{si } 0 < r < r' \\ \frac{1}{\sqrt{r}} \left(C(r') J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) + D(r') N_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) \right) & \text{si } r' < r < \infty, \end{cases} \quad (C.3)$$

con A, B, C, D coeficientes a determinar.

Otra soluciones linealmente indepedientes además de $J_{l+\frac{1}{2}}$ y $N_{l+\frac{1}{2}}$ son las funciones de Hankel

$$H_{l+\frac{1}{2}}^{(1,2)}\left(\frac{v}{r}\right) = J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) \pm i N_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right). \quad (C.4)$$

También se tiene que

$$\begin{aligned} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) &= \sqrt{\frac{2v}{\pi r}} j_l\left(\frac{v}{r}\right), \\ N_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{r}\right) &= \sqrt{\frac{2v}{\pi r}} n_l\left(\frac{v}{r}\right), \end{aligned} \quad (C.5)$$

con j_l, n_l las funciones de Bessel esféricas.

Las funciones esféricas de Hankel están dadas por

$$h_l^{(1,2)}\left(\frac{v}{r}\right) = j_l\left(\frac{v}{r}\right) \pm i n_l\left(\frac{v}{r}\right). \quad (C.6)$$

Las funciones de Bessel esféricas tienen las siguientes formas asintóticas.

Para argumentos pequeños ($x \ll 1, l$)

$$j_l(x) \rightarrow \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \dots \right), \quad (C.7)$$

$$n_l(x) \rightarrow -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} \left(1 - \frac{x^2}{2(1-2l)} + \dots \right). \quad (C.8)$$

Para argumentos grandes ($x \gg l$)

$$j_l(x) \rightarrow \frac{1}{x} \sin \left(x - \frac{l\pi}{2} \right), \quad (C.9)$$

$$n_l(x) \rightarrow -\frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{l\pi}{2} \right). \quad (C.10)$$

Tomando las condiciones 1 y 2 para $g_{l,v}(r, r')$ y expresando a todo lo anterior en términos de las funciones de Bessel y Hankel esféricas, tenemos que

$$g_{l,v}(r, r') = \begin{cases} \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2v}{\pi}} A(r') h_l^{(1)} \left(\frac{v}{r} \right) & \text{si } 0 < r < r' \\ \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2v}{\pi}} B(r') j_l \left(\frac{v}{r} \right) & \text{si } r' < r < \infty, \end{cases} \quad (C.11)$$

con A, B coeficientes a determinar.

De la condición 3 (continuidad) obtenemos

$$A(r') h_l^{(1)} \left(\frac{v}{r'} \right) - B(r') j_l \left(\frac{v}{r'} \right) = 0, \quad (C.12)$$

mientras que de la condición 3 (discontinuidad de la derivada)

$$\sqrt{\frac{2v}{\pi}} \left(B(r') j_l' \left(\frac{v}{r'} \right) - A(r') h_l'^{(1)} \left(\frac{v}{r'} \right) \right) = -\frac{2i\beta^2}{r'}, \quad (C.13)$$

lo anterior se obtiene al tomar Ec.(C.1), multiplicarla por r e integrarla entre los intervalos $(r' - \epsilon, r' + \epsilon)$, posteriormente haciendo que $\epsilon \rightarrow 0$.

Como j_l y $h_l^{(1)}$ son linealmente independientes, el Wronskiano para este caso esta dado por

$$h_l^{(1)} j_l' - j_l h_l'^{(1)} = \frac{i}{v}, \quad (C.14)$$

de Ec.(C.12)

$$A h_l^{(1)} j_l' - B j_l j_l' = 0, \quad (C.15)$$

de Ec.(C.13)

$$A j_l h_l^{(1)} - B j_l j_l' = 2i\beta^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \frac{j_l}{r'}, \quad (\text{C.16})$$

de Ec.(C.15) y (C.16)

$$A \left(h_l^{(1)} j_l' - j_l h_l'^{(1)} \right) = -2i\beta^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \frac{j_l}{r'}. \quad (\text{C.17})$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A(r') &= -\sqrt{2\pi\nu}\beta^2 \frac{j_l\left(\frac{\nu}{r'}\right)}{r'}, \\ B(r') &= -\sqrt{2\pi\nu}\beta^2 \frac{h_l^{(1)}\left(\frac{\nu}{r'}\right)}{r'}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$$g_{l,\nu}(r, r') = \begin{cases} -2\nu\beta^2 \frac{j_l\left(\frac{\nu}{r'}\right)}{r'} \frac{h_l^{(1)}\left(\frac{\nu}{r}\right)}{r} & \text{si } 0 < r < r' \\ -2\nu\beta^2 \frac{h_l^{(1)}\left(\frac{\nu}{r'}\right)}{r'} \frac{j_l\left(\frac{\nu}{r}\right)}{r} & \text{si } r' < r < \infty. \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

De tal forma que

$$g_{l,\nu}(r, r') = -2\nu\beta^2 \frac{j_l\left(\frac{\nu}{r_{>}}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{\nu}{r_{<}}\right)}{r_{>} r_{<}}, \quad (\text{C.20})$$

con $r_{<} = \min(r, r')$ y $r_{>} = \max(r, r')$.

La función de Green para la parte espacial para $n = 3$ es

$$G_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -2\nu\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \frac{j_l\left(\frac{\nu}{r_{>}}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{\nu}{r_{<}}\right)}{r_{>} r_{<}} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

Caso $n \geq 4$

Tratamos de encontrar el propagador de la ecuación

$$r^4 \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{r^2} \right) k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t) + 2i\beta^2 \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t) = -2i\beta^2 \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Ya que conocemos la solución general a la ecuación homogénea

$$k(\mathbf{r}, t) = C r^{-(n-2)/2} \int_0^\infty \sum_{l,m} Z_p\left(\frac{\nu}{r}\right) Y_{l,m}(\Omega) \exp\left(-i \frac{\nu^2}{2\beta^2} t\right) d\nu,$$

procederemos a encontrar la función de Green ($G_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$) asociada a la parte espacial.

La función de Green $G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ debe satisfacer lo siguiente (por separación de variables):

$$\left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{r^2} \right) G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{v}{r^4} G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -2i\beta^2 \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

donde

$$\delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r - r')}{r^{n-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega),$$

$$G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} g_{l,n}(r, r') (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega).$$

La función de Green radial $g_{l,n,v}(r, r')$ debe satisfacer

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_{l,n,v}(r, r')}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{dg_{l,n,v}(r, r')}{dr} \\ - \frac{l(l+n-2) + (n-2)(n-3)}{r^2} g_{l,n,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,n,v}(r, r') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r - r')}{r^{n-1}}, \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

$g_{l,n,v}(r, r)$ debe satisfacer también la ecuación homogénea

$$\frac{d^2 g_{l,n,v}(r, r')}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{dg_{l,n,v}(r, r')}{dr} - \frac{l(l+n-2) + (n-2)(n-3)}{r^2} g_{l,n,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,n,v}(r, r') = 0. \quad (\text{C.22})$$

Ahora bien, si $N = n - 2$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_{l,N,v}(r, r')}{dr^2} + \frac{N+1}{r} \frac{dg_{l,N,v}(r, r')}{dr} \\ - \frac{l(l+N) + N(N-1)}{r^2} g_{l,N,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,N,v}(r, r') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r - r')}{r^{N+1}}, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$g_{l,N,v}(r, r)$ debe satisfacer también la ecuación homogénea

$$\frac{d^2 g_{l,N,v}(r, r')}{dr^2} + \frac{N+1}{r} \frac{dg_{l,N,v}(r, r')}{dr} - \frac{l(l+N) + N(N-1)}{r^2} g_{l,N,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,N,v}(r, r') = 0. \quad (\text{C.24})$$

Nótese que Ec.(C.23) y Ec.(C.24) toman la forma

$$\begin{aligned} r^{-(N+1)} \frac{d}{dr} \left(r^{N+1} \frac{d}{dr} (g_{l,N,v}(r, r')) \right) - \frac{l(l+N) + N(N-1)}{r^2} g_{l,N,v}(r, r') \\ + \frac{v^2}{r^4} g_{l,N,v}(r, r') = -2i\beta^2 \frac{\delta(r - r')}{r^{N+1}}, \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

$$r^{-(N+1)} \frac{d}{dr} \left(r^{N+1} \frac{d}{dr} (g_{l,N,v}(r, r')) \right) - \frac{l(l+N) + N(N-1)}{r^2} g_{l,N,v}(r, r') + \frac{v^2}{r^4} g_{l,N,v}(r, r') = 0. \quad (C.26)$$

De tal manera se propone a $g_{l,N,v}(r, r')$ como

$$g_{l,N,v}(r, r') = \begin{cases} r^{-N/2} A(r') H_p^{(1)}\left(\frac{v}{r}\right) & \text{si } 0 < r < r' \\ r^{-N/2} \left(B(r') J_p\left(\frac{v}{r}\right) + C(r') N_p\left(\frac{v}{r}\right) \right) & \text{si } r' < r < \infty, \end{cases} \quad (C.27)$$

con

$$p = \sqrt{\left(l + \frac{N}{2}\right)^2 + (N)(N-1)},$$

y

$$H_p^{(1,2)}\left(\frac{v}{r}\right) = J_p\left(\frac{v}{r}\right) \pm i N_p\left(\frac{v}{r}\right),$$

las funciones de Hankel.

Las funciones de Bessel tienen las siguientes expansiones asintóticas para p no negativos, para argumentos pequeños $0 < x \ll \sqrt{p+1}$

$$J_p(x) \approx \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^p, \\ N_p(x) \approx \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\ln(x/2) + \gamma] & \text{si } p = 0 \\ -\frac{\Gamma(p)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^p & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

Pedimos que $g_{l,N,v}(r, r') \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$ y que $g_{l,N,v}(r, r')$ se finita cuando $r \rightarrow 0$, de tal manera que

$$g_{l,N,v}(r, r') = \begin{cases} r^{-N/2} A(r') H_p^{(1)}\left(\frac{v}{r}\right) & \text{si } 0 < r < r' \\ r^{-N/2} B(r') J_p\left(\frac{v}{r}\right) & \text{si } r' < r < \infty. \end{cases} \quad (C.28)$$

Dado que se exige que $g_{l,N,v}(r, r')$ sea continua en $r = r'$

$$B(r') J_p\left(\frac{v}{r'}\right) - A(r') H_p^{(1)}\left(\frac{v}{r'}\right) = 0. \quad (C.29)$$

Ahora bien de Ec.(C.25)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^{N+1} \frac{d}{dr} (g_{l,N,v}(r, r')) \right) - (l(l+N) + N(N-1)) r^{N-1} g_{l,N,v}(r, r') \\ + v^2 r^{N-3} g_{l,N,v}(r, r') = -2i\beta^2 \delta(r - r'). \end{aligned} \quad (C.30)$$

Integrando la ecuación anterior entre los intervalos $(r' - \epsilon, r' + \epsilon)$, posteriormente haciendo que $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene

$$B(r')r'^{-N/2} \left[J_p' \left(\frac{\nu}{r'} \right) - \frac{N}{2r'} J_p \left(\frac{\nu}{r'} \right) \right] - A(r')r'^{-N/2} \left[H_p^{(1)'} \left(\frac{\nu}{r'} \right) - \frac{N}{2r'} H_p^{(1)} \left(\frac{\nu}{r'} \right) \right] = -2i\beta^2 \frac{1}{r'^{N+1}}, \quad (\text{C.31})$$

$$B(r') \left[J_p' \left(\frac{\nu}{r'} \right) - \frac{N}{2r'} J_p \left(\frac{\nu}{r'} \right) \right] - A(r') \left[H_p^{(1)'} \left(\frac{\nu}{r'} \right) - \frac{N}{2r'} H_p^{(1)} \left(\frac{\nu}{r'} \right) \right] = -\frac{2i\beta^2}{r'^{\frac{N+2}{2}}}. \quad (\text{C.32})$$

De Ec.(C.29) y Ec.(C.32)

$$A(r') \left(H_p^{(1)} \left(\frac{\nu}{r'} \right) J_p' \left(\frac{\nu}{r'} \right) - H_p^{(1)'} \left(\frac{\nu}{r'} \right) J_p \left(\frac{\nu}{r'} \right) \right) = -2i\beta^2 \frac{J_p \left(\frac{\nu}{r'} \right)}{r'^{\frac{N+2}{2}}}. \quad (\text{C.33})$$

Como $H_p^{(1)}$ y J_p son linealmente independientes, el Wronskiano esta dado por

$$H_p^{(1)} \left(\frac{\nu}{r'} \right) J_p' \left(\frac{\nu}{r'} \right) - H_p^{(1)'} \left(\frac{\nu}{r'} \right) J_p \left(\frac{\nu}{r'} \right) = \frac{2i}{\pi r'}, \quad (\text{C.34})$$

por lo tanto

$$A(r') = -\pi\beta^2 \frac{J_p \left(\frac{\nu}{r'} \right)}{r'^{N/2}}, \quad (\text{C.35})$$

$$B(r') = -\pi\beta^2 \frac{H_p^{(1)} \left(\frac{\nu}{r'} \right)}{r'^{N/2}}, \quad (\text{C.36})$$

$$g_{l,N,\nu}(r, r') = \begin{cases} -\pi\beta^2 \frac{J_p \left(\frac{\nu}{r'} \right)}{r'^{N/2}} \frac{H_p^{(1)} \left(\frac{\nu}{r} \right)}{r^{N/2}} & \text{si } 0 < r < r' \\ -\pi\beta^2 \frac{H_p^{(1)} \left(\frac{\nu}{r'} \right)}{r'^{N/2}} \frac{J_p \left(\frac{\nu}{r} \right)}{r^{N/2}} & \text{si } r' < r < \infty, \end{cases} \quad (\text{C.37})$$

$$g_{l,N,\nu}(r, r') = -\pi\beta^2 \frac{J_p \left(\frac{\nu}{r_{>}} \right)}{r_{>}^{N/2}} \frac{H_p^{(1)} \left(\frac{\nu}{r_{<}} \right)}{r_{<}^{N/2}}, \quad (\text{C.38})$$

con $r_{<} = \min(r, r')$ y $r_{>} = \max(r, r')$.

La función de Green para la parte espacial para $N \geq 2$, ($n \geq 4$) es

$$G_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\pi\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \frac{J_p \left(\frac{\nu}{r_{>}} \right)}{r_{>}^{N/2}} \frac{H_p^{(1)} \left(\frac{\nu}{r_{<}} \right)}{r_{<}^{N/2}} (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega).$$

Función de Green temporal

La función de Green temporal que denotaremos por $H_v(t, t')$ debido a la separación de variables debe cumplir con lo siguiente

$$\frac{dH_v(t, t')}{dt} - \frac{v^2}{2i\beta^2} H_v(t, t') = \delta(t - t'), \quad (\text{C.39})$$

donde $H_v(t, t')$ satisface la ecuación homogénea

$$\frac{dH_v(t, t')}{dt} - \frac{v^2}{2i\beta^2} H_v(t, t') = 0. \quad (\text{C.40})$$

Notemos que la función de Green asociada al operador $\partial_t + \gamma$ es $\Theta(t)e^{-\gamma t}$, por lo tanto

$$H_v(t, t') = \Theta(t - t') \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t - t')\right). \quad (\text{C.41})$$

Apéndice D

Integrales

Integrales para $n = 3$

Para el caso $n = 3$ se busca resolver la siguiente integral

$$\int_0^\infty v j_l \left(\frac{v}{r_>} \right) h_l^{(1)} \left(\frac{v}{r_<} \right) \exp \left(-\frac{iv^2}{2\beta^2} (t - t') \right) dv, \quad (\text{D.1})$$

dado que

$$\exp \left(-\frac{iv^2}{2\beta^2} (t - t') \right) = \sum_{s=0}^\infty \frac{\left(-\frac{iv^2(t-t')}{2\beta^2} \right)^s}{s!} = \sum_{s=0}^\infty \frac{\vartheta^s}{s!} v^{2s}, \quad (\text{D.2})$$

donde $\vartheta = -i(t - t')/2\beta^2$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v j_l \left(\frac{v}{r_>} \right) h_l^{(1)} \left(\frac{v}{r_<} \right) \exp \left(-\frac{iv^2}{2\beta^2} (t - t') \right) dv &= \int_0^\infty v j_l \left(\frac{v}{r_>} \right) h_l^{(1)} \left(\frac{v}{r_<} \right) dv, \\ &+ \sum_{s=1}^\infty \frac{\vartheta^s}{s!} \int_0^\infty v^{2s+1} j_l \left(\frac{v}{r_>} \right) h_l^{(1)} \left(\frac{v}{r_<} \right) dv, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v j_l \left(\frac{v}{r_>} \right) h_l^{(1)} \left(\frac{v}{r_<} \right) dv &= \int_0^\infty v j_l \left(\frac{v}{r_>} \right) j_l \left(\frac{v}{r_<} \right) dv \\ &+ i \int_0^\infty v j_l \left(\frac{v}{r_>} \right) n_l \left(\frac{v}{r_<} \right) dv, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\int_0^\infty v j_l \left(\frac{v}{r_>} \right) j_l \left(\frac{v}{r_<} \right) dv = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} r_>^{-l} r_<^{l+2} \Gamma(l+1) {}_2\tilde{F}_1 \left(\frac{1}{2}, l+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_<^2}{r_>^2} \right), \quad r_< > 0 \wedge \Re(l) > -1, \quad (\text{D.5})$$

$$\int_0^\infty v j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) n_l\left(\frac{v}{r_<}\right) dv = 0 \quad r_< > 0 \wedge \Re(l) > -1, \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^{2s+1} j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_<}\right) dv &= \int_0^\infty v^{2s+1} j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) j_l\left(\frac{v}{r_<}\right) dv \\ &+ i \int_0^\infty v^{2s+1} j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) n_l\left(\frac{v}{r_<}\right) dv, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^{2s+1} j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) j_l\left(\frac{v}{r_<}\right) dv &= \frac{\pi 2^{2s-1} r_>^{-l} r_<^{l+2s+2} \Gamma(l+s+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)} \\ &\times {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, l+s+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_<^2}{r_>^2}\right) \quad r_< > 0 \wedge \Re(l+s) > -1, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^{2s+1} j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) n_l\left(\frac{v}{r_<}\right) dv &= 2^{2s-1} r_>^{-l} \sin(\pi s) \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) r_<^{l+2s+2} \Gamma(l+s+1) \\ &\times {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, l+s+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_<^2}{r_>^2}\right) \\ &\Re(s) > -\frac{1}{2} \wedge r_< > 0 \wedge \Re(l+s) > -1 \wedge r_> > 0, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_<}\right) \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t-t')\right) dv &= \int_0^\infty v j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) n_l\left(\frac{v}{r_<}\right) dv \\ &+ \sum_{s=1}^\infty \frac{\partial^s}{s!} \int_0^\infty v^{2s+1} j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) n_l\left(\frac{v}{r_<}\right) dv, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v j_l\left(\frac{v}{r_>}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{v}{r_<}\right) \exp\left(-\frac{iv^2}{2\beta^2}(t-t')\right) dv &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} r_>^{-l} r_<^{l+2} \Gamma(l+1) {}_2\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}, l+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_<^2}{r_>^2}\right) \\ &+ \sum_{s=1}^\infty \frac{\partial^s}{s!} \frac{2^{2s-1} \pi r_>^{-l} r_<^{l+2s+2} \Gamma(l+s+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)} \\ &\times {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, l+s+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_<^2}{r_>^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

De lo anterior

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -\sqrt{\pi} \beta^2 \Theta(t-t') \sum_{l=0}^\infty \sum_{l=-m}^l \Gamma(l+1) \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{l+1} {}_2\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}, l+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_<^2}{r_>^2}\right) Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi) \\ &- \pi \beta^2 \Theta(t-t') \sum_{l=0}^\infty \sum_{l=-m}^l \sum_{s=1}^\infty \left(\frac{(2^2 \partial)^s}{s!} \frac{\Gamma(l+s+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)} r_<^{2s} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{l+1}\right. \\ &\quad \left. \times {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, l+s+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_<^2}{r_>^2}\right)\right) Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -\beta^2 \Theta(t-t') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \left[\sqrt{\pi} \Gamma(l+1) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{l+1} {}_2\tilde{F}_1 \left(\frac{1}{2}, l+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \pi \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(2^2 \vartheta)^s}{s!} \frac{\Gamma(l+s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} r_{<}^{2s} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{l+1} {}_2\tilde{F}_1 \left(s+\frac{1}{2}, l+s+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right) \right] \\
&\quad \times Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -\beta^2 \Theta(t-t') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \left[\sqrt{\pi} \Gamma(l+1) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{l+1} {}_2\tilde{F}_1 \left(\frac{1}{2}, l+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \pi \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(-i)^s (2(t-t')/\beta^2)^s}{s!} \frac{\Gamma(l+s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} r_{<}^{2s} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{l+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times {}_2\tilde{F}_1 \left(s+\frac{1}{2}, l+s+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right) \right] Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -\pi \beta^2 \Theta(t-t') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(-i)^s (2(t-t')/\beta^2)^s}{s!} \frac{\Gamma(l+s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} r_{<}^{2s} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{l+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times {}_2\tilde{F}_1 \left(s+\frac{1}{2}, l+s+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right) \right] Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{D.15}$$

donde ${}_2\tilde{F}_1$ es la función hipergeométrica regularizada ${}_2\tilde{F}_1(a, b; c; d) = {}_2F_1(a, b; c; d)/\Gamma(c)$.

Cuando $t = t'$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}', t') &= -\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \left[\sqrt{\pi} \Gamma(l+1) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{l+1} {}_2\tilde{F}_1 \left(\frac{1}{2}, l+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right] \\
&\quad \times Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}', t') &= -2\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(l+1)}{2} \left(\frac{r_{<}}{r_{<}} \right) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{l+1} {}_2\tilde{F}_1 \left(\frac{1}{2}, l+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right] \\
&\quad \times Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}', t') &= -2\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(l+1)}{2} \left(\frac{(r_{>})^{-l} (r_{<})^{l+2}}{r_{>} r_{<}} \right) {}_2\tilde{F}_1 \left(\frac{1}{2}, l+1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \right] \\
&\quad \times Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{D.18}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}', t') &= -2\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \left[\left(\frac{1}{r_{>} r_{<}} \right) \int_0^{\infty} v j_l \left(\frac{v}{r_{>}} \right) j_l \left(\frac{v}{r_{<}} \right) dv \right] \\
&\quad \times Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{D.19}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}', t') &= -2\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \left[\left(\frac{1}{r_{>} r_{<}} \right) \int_0^{\infty} v j_l \left(\frac{v}{r_{>}} \right) h_l^{(1)} \left(\frac{v}{r_{<}} \right) dv \right] \\
&\quad \times Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{D.20}$$

$$k(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}', t') = \int_0^{\infty} G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dv. \tag{D.21}$$

Integrales para $n \geq 4$

Como

$$\frac{1}{2} \left(\nabla^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{|\mathbf{X}|^2} \right) k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \frac{\partial}{\partial t} k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i \frac{\beta^2}{|\mathbf{X}|^4} \delta(t - t') \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

La integral a solucionar para este caso es

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} J_p \left(\frac{v}{r_{>}} \right) H_p^{(1)} \left(\frac{v}{r_{<}} \right) \exp \left(-\frac{i v^2}{2\beta^2} (t - t') \right) dv &= \int_0^{\infty} J_p \left(\frac{v}{r_{>}} \right) H_p^{(1)} \left(\frac{v}{r_{<}} \right) dv \\
&\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\vartheta^s}{s!} \int_0^{\infty} v^{2s} J_p \left(\frac{v}{r_{>}} \right) H_p^{(1)} \left(\frac{v}{r_{<}} \right) dv,
\end{aligned} \tag{D.22}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} J_p \left(\frac{v}{r_{>}} \right) H_p^{(1)} \left(\frac{v}{r_{<}} \right) dv &= \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} (r_{<}) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^p {}_2\tilde{F}_1 \left(\frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}; p + 1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \\
&\quad r_{<} > 0 \wedge \Re(p) > -\frac{1}{2} \wedge r_{>} > 0,
\end{aligned} \tag{D.23}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} v^{2s} J_p \left(\frac{v}{r_{>}} \right) H_p^{(1)} \left(\frac{v}{r_{<}} \right) dv &= \frac{4^s (1 + i \tan(\pi s)) \Gamma(p + s + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - s)} (r_{<})^{2s+1} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^p \\
&\quad \times {}_2\tilde{F}_1 \left(s + \frac{1}{2}, p + s + \frac{1}{2}; p + 1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2} \right) \\
&\quad \Re(s) > -\frac{1}{2} \wedge r_{<} > 0 \wedge \Re(p + s) > -\frac{1}{2} \wedge r_{>} > 0,
\end{aligned} \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -\pi\beta^2\Theta(t-t') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \left[\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{r_{<}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p {}_2\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right. \\
&\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\vartheta^s 4^s (1+i\tan(\pi s))\Gamma(p+s+\frac{1}{2})}{s! \Gamma(\frac{1}{2}-s)} \frac{(r_{<})^{2s+1}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p \right. \\
&\quad \left. \left. \times {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, p+s+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right] (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega),
\end{aligned} \tag{D.25}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -\pi\beta^2\Theta(t-t') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \left[\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{r_{<}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p {}_2\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right. \\
&\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(-i)^s (2(t-t')/\beta^2)^s (1+i\tan(\pi s))\Gamma(p+s+\frac{1}{2})}{s! \Gamma(\frac{1}{2}-s)} \frac{(r_{<})^{2s+1}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p \right. \\
&\quad \left. \left. \times {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, p+s+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right] (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega),
\end{aligned} \tag{D.26}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -\pi\beta^2\Theta(t-t') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \left[\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{r_{<}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p {}_2\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right. \\
&\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(-i)^s (2(t-t')/\beta^2)^s \Gamma(p+s+\frac{1}{2})}{s! \Gamma(\frac{1}{2}-s)} \frac{(r_{<})^{2s+1}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p \right. \\
&\quad \left. \left. \times {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, p+s+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right] (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega),
\end{aligned} \tag{D.27}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= -\pi\beta^2\Theta(t-t') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(-i)^s (2(t-t')/\beta^2)^s \Gamma(p+s+\frac{1}{2})}{s! \Gamma(\frac{1}{2}-s)} \frac{(r_{<})^{2s+1}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times {}_2\tilde{F}_1\left(s+\frac{1}{2}, p+s+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right] (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega).
\end{aligned} \tag{D.28}$$

Notemos que cuando $t = t'$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}', t') &= -\pi\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \left[\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{r_{<}}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^p {}_2\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}; p+1; \frac{r_{<}^2}{r_{>}^2}\right) \right] \\
&\quad \times (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega),
\end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}', t') &= -\pi\beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l^n} \left[\frac{1}{(r_{>}r_{<})^{N/2}} \int_0^{\infty} J_p\left(\frac{\nu}{r_{>}}\right) H_p^{(1)}\left(\frac{\nu}{r_{<}}\right) d\nu \right] \\
&\quad \times (\mathcal{Y}_l^m(\Omega'))^* \mathcal{Y}_l^m(\Omega),
\end{aligned} \tag{D.30}$$

$$k(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}', t') = \int_0^\infty G_v(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dv. \quad (\text{D.31})$$

Integrales para $n = 2$

Las siguientes integrales surgen al tratar de encontrar solución a Ec.(4.70)

$$\begin{aligned} r^2 k_1 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (x'^2 + y'^2) \left(-\frac{\theta(t-t')}{2\pi(t-t')} e^{i \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2(t-t')}} \right) \\ &\times \left(-\frac{e^{i \frac{(x'^2 + y'^2)}{2t'}} (2t' + i(x'^2 + y'^2))}{8\pi t'^3} \right) dx' dy' dt'. \end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares, la integral anterior toma la forma

$$\begin{aligned} r^2 k_1 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r'^2 \left(-\frac{\theta(t-t')}{2\pi(t-t')} e^{i \frac{(r^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi') + r'^2)}{2(t-t')}} \right) \\ &\times \left(-\frac{e^{i \frac{(r'^2)}{2t'}} (2t' + i r'^2)}{8\pi t'^3} \right) (r' dr' d\phi') dt', \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

$$r^2 k_1 = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \theta(t-t') \frac{r'^3 (2t' + i r'^2)}{t'^3 (t-t')} e^{i \frac{(r^2 - 2rr' \cos(\phi') + r'^2)}{2(t-t')}} e^{\frac{i r'^2}{2t'}} dr' d\phi' dt', \quad (\text{D.33})$$

$$r^2 k_1 = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \theta(t-t') \frac{r'^3 (2t' + i r'^2)}{t'^3 (t-t')} e^{i \frac{(r^2 - 2rr' \cos(\phi') + r'^2)}{2(t-t')}} e^{\frac{i r'^2}{2t'}} d\phi' dr' dt'. \quad (\text{D.34})$$

Notemos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{r'^3 (2t' + i r'^2)}{t'^3 (t-t')} e^{i \frac{(r^2 - 2rr' \cos(\phi') + r'^2)}{2(t-t')}} e^{\frac{i r'^2}{2t'}} d\phi' = -\frac{2\pi r'^3 (2t' + i r'^2) e^{\frac{i(r^2 t' + t r'^2)}{2t'(t-t')}} J_0\left(\frac{rr'}{t-t'}\right)}{t'^3 (t-t')}, \quad (\text{D.35})$$

$$\begin{aligned} &- \int_0^\infty \frac{2\pi r'^3 (2t' + i r'^2) e^{\frac{i(r^2 t' + t r'^2)}{2t'(t-t')}} J_0\left(\frac{rr'}{t-t'}\right)}{t'^3 (t-t')} dr' = \\ &\frac{2\pi e^{\frac{i r^2}{2t}} (-6t^2 t' (2t + i r^2) + t'^2 (-r^4 + 8i r^2 t + 8t^2) + 4t^4)}{t^5}, \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \theta(t-t') \frac{2\pi e^{\frac{i r^2}{2t}} (-6t^2 t' (2t + i r^2) + t'^2 (-r^4 + 8i r^2 t + 8t^2) + 4t^4)}{t^5} dt' = \\ &-\theta(t) \frac{2\pi e^{\frac{i r^2}{2t}} (r^4 + i r^2 t - 2t^2)}{3t^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Por lo tanto

$$r^2 k_1(r, t) = \frac{1}{16\pi^2} \left(-\frac{2\pi e^{\frac{ir^2}{2t}} (r^4 + ir^2 t - 2t^2)}{3t^2} \right), \quad (\text{D.38})$$

$$r^2 k_1(r, t) = -\frac{1}{24\pi} \left(\frac{r^4 + ir^2 t - 2t^2}{t^2} \right) e^{\frac{ir^2}{2t}}. \quad (\text{D.39})$$

De tal modo que

$$k(r, t) \approx \frac{1}{2\pi i t} e^{\frac{ir^2}{2t}} - \frac{1}{24\pi} \frac{1}{R^2} \left(\frac{r^4 + ir^2 t - 2t^2}{t^2} \right) e^{\frac{ir^2}{2t}}. \quad (\text{D.40})$$

Las siguientes integrales surgen al tratar de encontrar solución a Ec.(4.77)

$$\begin{aligned} r^2 k_1 = & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r''^2 \left(-\frac{\theta(t-t'')\theta(t''-t')}{2\pi(t-t'')} e^{i\frac{(r^2-2rr''\cos(\phi-\phi'')+r''^2)}{2(t-t'')}} \right) \left(e^{i\frac{(r''^2-2r''r'\cos(\phi''-\phi')+r'^2)}{2(t''-t')}} \right) \\ & \times \left(\frac{2(t''-t') + i(r''^2-2r''r'\cos(\phi''-\phi')+r'^2)}{8\pi(t''-t')^3} \right) (r'' dr'' d\phi'') dt'' \\ & - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r''^2 \left(-\frac{\theta(t-t'')\theta(t''-t')}{2\pi(t-t'')} e^{i\frac{(r^2-2rr''\cos(\phi-\phi'')+r''^2)}{2(t-t'')}} \right) \left(e^{i\frac{(r''^2-2r''r'\cos(\phi''-\phi')+r'^2)}{2(t''-t')}} \right) \\ & \times \left(\frac{\delta(t''-t')}{4\pi(t''-t')} \right) (r'' dr'' d\phi'') dt'', \end{aligned}$$

si tomamos a $r' = 0$, $t' = 0$, $\phi' = 0$

$$\begin{aligned} r^2 k_1 = & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r''^2 \left(-\frac{\theta(t-t'')\theta(t'')}{2\pi(t-t'')} e^{i\frac{(r^2-2rr''\cos(\phi-\phi'')+r''^2)}{2(t-t'')}} \right) \left(e^{i\frac{r''^2}{2t''}} \right) \\ & \times \left(\frac{2t'' + ir''^2}{8\pi(t'')^3} \right) (r'' dr'' d\phi'') dt'' \\ & - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r''^2 \left(-\frac{\theta(t-t'')\theta(t'')}{2\pi(t-t'')} e^{i\frac{(r^2-2rr''\cos(\phi-\phi'')+r''^2)}{2(t-t'')}} \right) \left(e^{i\frac{r''^2}{2t''}} \right) \\ & \times \left(\frac{\delta(t'')}{4\pi(t'')} \right) (r'' dr'' d\phi'') dt''. \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

Notemos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{r''^3 (2t'' + ir''^2)}{t''^3(t-t'')} e^{i\frac{(r^2-2rr''\cos(\phi-\phi'')+r''^2)}{2(t-t'')}} e^{\frac{ir''^2}{2t''}} d\phi'' = -\frac{2\pi r''^3 (2t'' + ir''^2) e^{\frac{i(r^2 t'' + tr''^2)}{2t''(t-t'')}} J_0\left(\frac{rr''}{t-t''}\right)}{t''^3(t''-t)}, \quad (\text{D.42})$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty \frac{2\pi r''^3 (2t'' + ir''^2) e^{\frac{i(r^2 t'' + tr''^2)}{2t''(t-t'')}} J_0\left(\frac{rr''}{t-t''}\right)}{t''^3(t''-t)} dr'' = \\ & \frac{2\pi e^{\frac{ir^2}{2t}} (-6t^2 t' (2t + ir^2) + t'^2 (-r^4 + 8ir^2 t + 8t^2) + 4t^4)}{t^5}, \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

$$\int_0^\infty \theta(t-t'')\theta(t'') \frac{2\pi e^{\frac{ir^2}{2t}} (-6t^2 t' (2t+ir^2) + t'^2 (-r^4+8ir^2 t+8t^2) + 4t^4)}{t^5} dt' =$$

$$-\theta(t) \frac{2\pi e^{\frac{ir^2}{2t}} (r^4+ir^2 t-2t^2)}{3t^2}. \quad (\text{D.44})$$

Ahora bien

$$\int_0^{2\pi} \frac{r'^3}{t''(t-t'')} e^{i \frac{(r^2-2rr'' \cos(\phi') + r'^2)}{2(t-t'')}} e^{\frac{ir'^2}{2t''}} d\phi' = \frac{2\pi r'^3 e^{\frac{i(r^2 t'' + tr'^2)}{2t''(t-t'')}} J_0\left(\frac{rr''}{t-t''}\right)}{tt''-t'^2}, \quad (\text{D.45})$$

$$\int_0^\infty \frac{2\pi r'^3 e^{\frac{i(r^2 t'' + tr'^2)}{2t''(t-t'')}} J_0\left(\frac{rr''}{t-t''}\right)}{tt''-t'^2} dr'' = -\frac{2\pi t'' e^{\frac{ir^2}{2t}} (t''-t) (2t(t''-t) + ir^2 t'')}{t^3(t-t'')}, \quad (\text{D.46})$$

$$\int_0^\infty \delta(t'')\theta(t-t'')\theta(t'') \left(-\frac{2\pi t'' e^{\frac{ir^2}{2t}} (t''-t) (2t(t''-t) + ir^2 t'')}{t^3(t-t'')} \right) dt'' = 0. \quad (\text{D.47})$$

Bibliografía

- [1] Greiner, W., & Reinhardt, J. (2008). *Quantum electrodynamics*. Springer Science & Business Media.
- [2] Nakahara, M. (2003). *Geometry, topology and physics*. CRC Press.
- [3] Sakurai, J. J., & Commins, E. D. (1995). *Modern quantum mechanics*, revised edition.
- [4] Galindo, A., & Pascual, P. (2012). *Quantum mechanics I*. Springer Science & Business Media.
- [5] Luís de la (físico) Peña, & Villavicencio, M. (2003). *Problemas y ejercicios de Mecánica Cuántica*. Universidad Autónoma de México.
- [6] Blair, D. E. (2000). *Inversion theory and conformal mapping (Vol. 9)*. American Mathematical Soc.
- [7] Marsden, J. E., Hoffman, M. J., & Buenrostro, G. I. (1996). *Análisis básico de variable compleja*. Trillas.
- [8] Iwaniec, T., & Martin, G. (2001). *Geometric function theory and non-linear analysis*. Clarendon Press.
- [9] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons.
- [10] Dehesa, J. S., Martínez-Finkelshtdein, A., & Sánchez-Ruiz, J. (2001). Quantum information entropies and orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 133(1-2), 23-46.
- [11] Costas, E., & Christopher, F. (2014). *Spherical harmonics in p dimensions*. World Scientific.
- [12] Emil, A. J., & Scales, A. J. (2017). *Hyperspherical harmonics and their physical applications*. World Scientific.
- [13] Duffy, D. G. (2001). *Green's Functions with Applications*. CRC Press.

-
- [14] Szmytkowski, R. (2007). Closed forms of the Green's function and the generalized Green's function for the Helmholtz operator on the N-dimensional unit sphere. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(5), 995.
 - [15] Andrews, G. E., Askey, R., & Roy, R. (1999). *Special functions* (Vol. 71). Cambridge university press.
 - [16] Avery, J. (1993). Selected applications of hyperspherical harmonics in quantum theory. *The Journal of Physical Chemistry*, 97(10), 2406-2412.
 - [17] Corradini, O., Faccioli, P., & Orland, H. (2009). Simulating stochastic dynamics using large time steps. *Physical Review E*, 80(6), 061112.
 - [18] Misra, P. (2011). *Physics of condensed matter*. Academic Press.
 - [19] Economou, E. N. (2006). *Green's functions in quantum physics* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.
 - [20] Boas, M. L. (2006). *Mathematical methods in the physical sciences*. John Wiley & Sons.