



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS**

Facultad de Ingeniería

Campus I

Coordinación de Investigación y Posgrado



**SOCIOEPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO Y  
RESIGNIFICACIÓN DIDÁCTICA DE LA SERIE  
DE TAYLOR EN CONTEXTO DE PREDICCIÓN EN CIRCUITOS  
ELÉCTRICOS**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática  
Educativa**

PRESENTA

**Ing. Francisco Agustín Zúñiga Coronel PS1338**

DIRECTOR DE TESIS

**Dr. Germán Muñoz Ortega**

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México; febrero de 2022



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA C-I**



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.  
28 de enero de 2022  
Oficio No. F.I.01.189/2022.

**C. FRANCISCO AGUSTÍN ZÚÑIGA CORONEL**  
**ALUMNO DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA**  
**P R E S E N T E:**

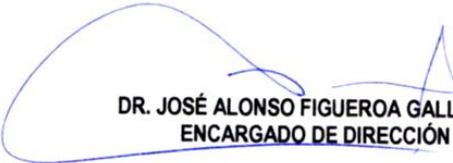
Con base en el Reglamento de Evaluación Profesional para los egresados de la Universidad Autónoma de Chiapas, y habiéndose cumplido con las disposiciones en cuanto a la aprobación por parte de los integrantes del jurado en el contenido de su Tesis Titulada:

**"SOCIOEPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO Y RESIGNIFICACIÓN DIDÁCTICA DE LA SERIE DE TAYLOR EN CONTEXTO DE PREDICCIÓN EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS"**

CERTIFICO el **VOTO APROBATORIO** emitido por éste y autorizo la impresión de dicho trabajo para que sea sustentado en su Examen Profesional para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**  
**"POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR"**

  
**DR. JOSÉ ALONSO FIGUEROA GALLEGOS**  
**ENCARGADO DE DIRECCIÓN**



C.c.p. Dra. Daisy Escobar Castillejos. Coordinadora de Investigación y Posgrado. Facultad de Ingeniería.  
C.c.p. Archivo/minutario  
JAFG/DEC/amj"



Código: FO-113-05-05

Revisión: 0

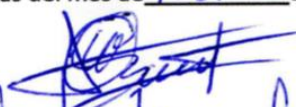
**CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.**

El (la) suscrito (a) Francisco Agustín Lúñiga Coronel  
Autor (a) de la tesis bajo el título de "SOCIOEPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO Y RESIGNIFICACIÓN DIDÁCTICA DE LA SERIE DE TAYLOR EN CONTEXTO DE PREDICCIÓN EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS."

presentada y aprobada en el año 20 22 como requisito para obtener el título o grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, autorizo a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.
- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 16 días del mes de febrero del año 20 22.

  
Francisco Agustín Lúñiga Coronel  
Nombre y firma del Tesista o Tesistas

## **DEDICATORIA**

Este trabajo de investigación lo dedico, principalmente, a mis padres Juana Paula Coronel Ballinas y Francisco Zúñiga Santiago, por su gran apoyo emocional en mi vida. A mi hermana Luz Esther Zúñiga Coronel y a mi sobrino Ian Fernando Zúñiga Coronel por ser parte de mis experiencias. A mi hermano Juan Antonio Zúñiga Coronel por las reflexiones académicas y ser un amigo de confianza.

A toda mi familia por compartir experiencias de vida.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi director de tesis, al Dr. Germán Muñoz Ortega, por su apoyo incondicional en la consolidación de este trabajo. Por sus significativas observaciones y aportaciones. Por su gran visión hacia la Matemática Educativa. Por apoyarme en superar mis retos, mis errores, mis dudas y mis inquietudes. Por ser un colega de trabajo académico y de investigación. Por el tiempo dedicado a las conversaciones sobre el escrito y por encontrar en él a un amigo de confianza.

Al Dr. Edgar Javier Morales Velasco por sus revisiones y aportaciones. Por la amistad que se ha consolidado a través de las experiencias académicas.

Al Mtro. Cristóbal Cruz Ruiz por sus enseñanzas en las actividades de clase y por su dedicación en la construcción de conocimientos matemáticos.

Al Dr. Hipólito Hernández Pérez por compartir diversas experiencias académicas y discusiones en clases. Por el apoyo en el proceso de investigación.

A la Dra. Alma Rosa Pérez Trujillo por su apoyo en el proceso de investigación y por las significativas reflexiones académicas.

Al Dr. Miguel Solís Esquinca por compartir diversas experiencias académicas y discusiones en clases.

Al M. en C. Pierre Francois Benoit Pourier por las discusiones en clases.

## CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>14</b>
<b>Capítulo 1. Contextualización de la investigación .....</b>	<b>17</b>
1.1. Problemática y pregunta de investigación .....	17
1.2. Objetivos de investigación: general y específicos .....	21
1.3. Justificación.....	21
1.4. Contextualización de los estudiantes de ingeniería en sistemas computacionales .....	23
1.5. Estado del Arte .....	25
1.5.1. La Serie de Taylor como el instrumento predictor .....	25
1.5.2. La Serie de Taylor en las escuelas de ingeniería. Análisis de textos.....	26
1.5.3. Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación de movimiento.....	27
1.5.4. Del binomio de Newton a la Serie de Taylor .....	28
1.5.5. La predicción y la derivación sucesiva como elementos de la Serie de Taylor .....	28
1.5.6. Resignificación de la Serie de Taylor a través de la tecnología .....	29
1.5.7. La Serie de Taylor y su relación con los teoremas fundamentales de la Aritmética, el Álgebra y el Cálculo.....	30
1.5.8. La enseñanza del Cálculo a través de la variación y el cambio .....	31
1.5.9. Dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas de variación .....	31
1.5.10. El lenguaje variacional en el discurso de la información.....	32
1.5.11. La variación y el fenómeno de la propagación del calor .....	32
1.5.12. Tipos de problemas matemáticos a los que están expuestos los estudiantes de Cálculo al analizar libros de texto.....	33
1.5.13. Modelación escolar: análisis de las variaciones en gráficas.....	34
1.5.14. El uso de los órdenes superior de variación en la interpretación clínica del electrocardiograma.....	35
1.5.15. Resignificación de las ecuaciones diferenciales en el contexto de circuitos eléctricos.....	36
1.5.16. Modelado de circuitos eléctricos .....	36

1.5.17. Enseñanza y aprendizaje de la corriente eléctrica .....	37
1.5.18. Modelación de circuitos eléctricos a través de ecuaciones diferenciales .....	37
<b>Capítulo 2. Marco teórico y metodológico .....</b>	<b>40</b>
2.1. Socioepistemología.....	40
2.1.1. Pensamiento y Lenguaje Variacional .....	44
2.1.2. Modelo de anidación de prácticas e instrumento de análisis.....	50
2.2. Ingeniería didáctica y sus elementos.....	53
2.2.1. El análisis preliminar .....	55
2.2.2. La concepción y el análisis <i>a priori</i> .....	55
2.2.3. La experimentación .....	55
2.2.4. El análisis <i>a posteriori</i> y validación .....	56
<b>Capítulo 3. Análisis histórico - epistemológico de la Serie de Taylor .....</b>	<b>58</b>
3.1. Desarrollo histórico del Cálculo .....	58
3.2. Génesis histórica de la Serie de Taylor .....	69
3.3. Desarrollo histórico de los circuitos eléctricos .....	78
<b>Capítulo 4. Diseño didáctico y construcción del conocimiento .....</b>	<b>86</b>
4.1. Análisis preliminar.....	86
4.1.1. Dimensión cognitiva .....	86
4.1.2. Dimensión didáctica.....	92
4.2. Análisis <i>a priori</i> del diseño didáctico .....	100
4.2.1. Situación diagnóstica 1. Análisis de diagramas eléctricos .....	101
4.2.2. Situación diagnóstica 2. Experimentación con un led.....	104
4.2.3. Situación diagnóstica 3. Análisis de diagramas eléctricos .....	107
4.2.4. Situación diagnóstica 4. Experimentación con un capacitor.....	109
4.2.5. Situación de aprendizaje 1. Predicción del voltaje de carga: análisis numérico del primer orden de variación.....	113
4.2.6. Situación de aprendizaje 2. Predicción del voltaje de carga: análisis numérico del segundo orden de variación .....	115
4.2.7. Situación de aprendizaje 3. Predicción del voltaje de carga: análisis gráfico .....	118

4.2.8. Situación de aprendizaje 4. Diseño y simulación de un panel de indicadores .....	121
4.3. Experimentación (puesta en escena) .....	123
4.4. Análisis <i>a posteriori</i> y validación .....	124
4.4.1. Resultados de la situación diagnóstica 1. Análisis de diagramas eléctricos .....	124
4.4.2. Resultados de la situación diagnóstica 2. Experimentación con un led .....	131
4.4.3. Resultados de la situación diagnóstica 3. Análisis de diagramas eléctricos .....	136
4.4.4. Resultados de la situación diagnóstica 4. Experimentación con un capacitor .....	140
4.4.5. Resultados de la situación de aprendizaje 1. Predicción del voltaje de carga: análisis numérico del primer orden de variación .....	145
4.4.6. Resultados de la situación de aprendizaje 2. Predicción del voltaje de carga: análisis numérico del segundo orden de variación .....	152
4.4.7. Resultados de la situación de aprendizaje 3. Predicción del voltaje de carga: análisis gráfico .....	162
4.4.8. Resultados de la situación de aprendizaje 4. Simulación de un panel de indicadores con base en el comportamiento de un capacitor .....	172
<b>Capítulo 5. Resignificación Didáctica de la Serie de Taylor en Contexto de Predicción en Circuitos Eléctricos .....</b>	<b>175</b>
5.1. Resignificación Didáctica de la Serie de Taylor en Contexto de Predicción en Circuitos Eléctricos .....	175
<b>Capítulo 6. CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>195</b>
6.1. CONCLUSIONES .....	195
6.2. PROSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN .....	199
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>201</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>208</b>



## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Proceso de resignificación .....	28
<b>Figura 2.</b> La Serie de Taylor en el análisis de gráficas (derivadas sucesivas y la regla de los signos de Descartes). .....	35
<b>Figura 3.</b> Elementos del sistema de referencia variacional .....	52
<b>Figura 4.</b> Ciclo 3AP - Ingeniería Didáctica Robusta .....	54
<b>Figura 5.</b> Mapa de Mesopotamia .....	59
<b>Figura 6.</b> Modelo de Ptolomeo .....	64
<b>Figura 7.</b> Construcción geométrica del teorema de Galileo.....	67
<b>Figura 8.</b> Escrito original de Newton: Diferencias sucesivas.....	74
<b>Figura 9.</b> Modelo de regularidad binomial .....	74
<b>Figura 10.</b> Del binomio de Newton a la Serie de Taylor .....	75
<b>Figura 11.</b> La Serie de Taylor en notación funcional .....	75
<b>Figura 12.</b> Obra original de Brook Taylor .....	76
<b>Figura 13.</b> Fragmento de portada .....	76
<b>Figura 14.</b> Profesoras participantes.....	87
<b>Figura 15.</b> Participantes en la RELME.....	87
<b>Figura 16.</b> Applet de GeoGebra .....	88
<b>Figura 17.</b> Resultados del participante .....	88
<b>Figura 18.</b> Resultados del participante .....	89
<b>Figura 19.</b> Resultados del participante .....	90
<b>Figura 20.</b> Resultados del participante .....	91
<b>Figura 21.</b> Teorema de Taylor .....	93
<b>Figura 22.</b> Análisis de un circuito eléctrico RC .....	94
<b>Figura 23.</b> Ejemplo sobre la Serie de Taylor con derivación sucesiva .....	95
<b>Figura 24.</b> Diagrama de un led y una batería (pila) .....	102
<b>Figura 25.</b> Diagrama de una pila, una resistencia y un led .....	102
<b>Figura 26.</b> Elementos y símbolos de un circuito eléctrico.....	105
<b>Figura 27.</b> Diagrama de un circuito eléctrico con un led y una pila .....	105
<b>Figura 28.</b> Descarga del capacitor .....	110
<b>Figura 29.</b> Medición del voltaje.....	110
<b>Figura 30.</b> Configuración RC .....	110

<b>Figura 31.</b> Conexión de la terminal negativa de las pilas a la terminal negativa del capacitor .....	111
<b>Figura 32.</b> Interfaz de Tinkercad .....	121
<b>Figura 33.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 1, inciso A.....	124
<b>Figura 34.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 1, inciso B .....	125
<b>Figura 35.</b> Cuestionamientos del inciso B .....	126
<b>Figura 36.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 1, inciso C .....	129
<b>Figura 37.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 2, inciso A.....	132
<b>Figura 38.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 2, inciso B .....	132
<b>Figura 39.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 2, inciso D y E.....	134
<b>Figura 40.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 3, inciso A.....	136
<b>Figura 41.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 3, inciso B .....	137
<b>Figura 42.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 4, inciso A y B.....	140
<b>Figura 43.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 4, inciso C .....	141
<b>Figura 44.</b> Sesión virtual de la situación diagnóstica 4, inciso D y E.....	142
<b>Figura 45.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 1, inciso A.....	145
<b>Figura 46.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 1, inciso B .....	147
<b>Figura 47.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 1, inciso C .....	150
<b>Figura 48.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 1, inciso D.....	151
<b>Figura 49.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 2, inciso A.....	153
<b>Figura 50.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 2, inciso B, C y D.....	156
<b>Figura 51.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 3, inciso A.....	162
<b>Figura 52.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 3, inciso C .....	165
<b>Figura 53.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 3, inciso E .....	168
<b>Figura 54.</b> Interfaz de la plataforma TINKERCAD .....	172
<b>Figura 55.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 4, inciso A y B.....	172
<b>Figura 56.</b> Sesión virtual de la situación de aprendizaje 4, inciso C .....	173
<b>Figura 57.</b> Diferencias de diferencias .....	187
<b>Figura 58.</b> Diferencias de la variable dependiente e independiente .....	188
<b>Figura 59.</b> Cociente de diferencias (velocidad) .....	189
<b>Figura 60.</b> Diferencias de las velocidades.....	189
<b>Figura 61.</b> Predicción del voltaje .....	190

<b>Figura 62.</b> Origen de una regularidad .....	190
<b>Figura 63.</b> Regularidad triángulo - binomio de Newton.....	191
<b>Figura 64.</b> Hacia la Serie de Taylor.....	192
<b>Figura 65.</b> Elementos del sistema de referencia variacional con base en prácticas.	198
<b>Figura 66.</b> Producción musical con software .....	200

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.</b> Contraste entre el programa clásico y el alternativo .....	43
<b>Tabla 2.</b> Instrumento de análisis .....	52
<b>Tabla 3.</b> Análisis de la situación diagnóstica 1 .....	103
<b>Tabla 4.</b> Análisis de la situación diagnóstica 2.....	106
<b>Tabla 5.</b> Análisis de la situación diagnóstica 3.....	109
<b>Tabla 6.</b> Datos de medición del voltaje.....	111
<b>Tabla 7.</b> Análisis de la situación diagnóstica 4.....	112
<b>Tabla 8.</b> Cálculo de las primeras diferencias .....	113
<b>Tabla 9.</b> Comparación de la variable tiempo.....	114
<b>Tabla 10.</b> Comparación del voltaje del capacitor .....	114
<b>Tabla 11.</b> Análisis de la situación de aprendizaje 1 .....	115
<b>Tabla 12.</b> Cálculo de las segundas diferencias .....	116
<b>Tabla 13.</b> Comparación del voltaje .....	116
<b>Tabla 14.</b> Análisis de la situación de aprendizaje 2.....	117
<b>Tabla 15.</b> Análisis de la situación de aprendizaje 3.....	120
<b>Tabla 16.</b> Valores de control.....	122
<b>Tabla 17.</b> Análisis de la situación de aprendizaje 4.....	122
<b>Tabla 18.</b> Mediciones numéricas .....	185
<b>Tabla 19.</b> De lo numérico a lo algebraico.....	185

# INTRODUCCIÓN

## INTRODUCCIÓN

En esta investigación partimos de la problemática que se refiere a la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. Esta separación provoca una deficiente comprensión de los objetos matemáticos. La Serie de Taylor por ser un objeto matemático considerado como el instrumento predictor es de interés abordarlo desde el estudio de la variación. Esto implica a centrar la investigación en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar), siendo una línea de investigación de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. En el contexto escolar, la Serie de Taylor se centra en la convergencia para la aproximación de funciones. Desde el sistema de referencia variacional, la Serie de Taylor se centra en el estudio de la variación y en la práctica social del *Prædicere*. Las investigaciones muestran que la Serie de Taylor se analiza en el contexto de cinemática donde se significa (Morales, 2009; Almazán, 2009). En el reconocimiento de otro contexto en el que se resignifique la Serie de Taylor mediante su uso, encontramos el análisis de circuitos eléctricos. Entonces, este trabajo se centra en dicho contexto y se divide en cinco capítulos presentados en los siguientes párrafos.

En el capítulo 1 se presenta la contextualización de la investigación, en el que se da a conocer la principal problemática que se refiere a la separación entre lo conceptual y lo algorítmico, la cual provoca una comprensión limitada de los objetos matemáticos. Consideramos que el discurso Matemático Escolar (dME) carece de escenarios que permitan la construcción de significados en situaciones contextuales. Derivado de lo anterior, se establece la pregunta de investigación: ¿de qué manera se resignifica la Serie de Taylor en el contexto de circuitos eléctricos? Se plantea la hipótesis, los objetivos (general y específicos), la justificación del estudio, la contextualización de los estudiantes de ingeniería en sistemas computacionales y un breve estado del arte.

Seguido se establece el capítulo 2 donde se presenta el marco teórico y el marco metodológico que guían la investigación y aportan elementos para la construcción del conocimiento matemático. La Socioepistemología se retoma como marco teórico con la finalidad de descentrar los objetos matemáticos y centrarse en las prácticas que los acompañan. La ingeniería didáctica se establece como marco metodológico, ya que permite elaborar un diseño didáctico con base en un análisis

preliminar (dimensión “histórica - epistemológica”, dimensión didáctica y dimensión cognitiva). Para el análisis (*a posteriori*) de los resultados se elabora un instrumento con base en el modelo de anidación de prácticas y de un sistema de referencia variacional.

En tanto que en el capítulo 3 se muestra un análisis “histórico - epistemológico” del Cálculo, la génesis histórica de la Serie de Taylor y la evolución de los circuitos eléctricos, considerándose parte del análisis preliminar. Lo histórico se basa en acontecimientos (hechos) y lo epistemológico sobre las circunstancias que hacen posible la construcción de conocimiento matemático. Se analizan ideas relacionadas con el Cálculo con base en la predicción (hilo conductor).

Posteriormente se plantea el capítulo 4 que se refiere a un análisis cognitivo y un análisis didáctico que complementan el análisis preliminar. El diseño didáctico consta de cuatro situaciones diagnósticas (situación experimental) y cuatro situaciones de aprendizaje (situación predictiva). Se establece el análisis *a priori* de las situaciones, la experimentación (puesta en escena) y el análisis *a posteriori* y validación. Se reconocen elementos que permitan una resignificación didáctica de la Serie de Taylor en el contexto de circuitos eléctricos.

El capítulo 5 corresponde a una Resignificación Didáctica de la Serie de Taylor en Contexto de Predicción en Circuitos Eléctricos. Se discuten elementos del análisis preliminar: aspectos “históricos – epistemológicos”, aspectos cognitivos, aspectos didácticos y aspectos sociales. Se retoman resultados de la confrontación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*. Se presenta un panorama sobre la integración de lo conceptual y lo algorítmico, a través de un hilo conductor para la reconstrucción didáctica de la Serie de Taylor como enlace del cálculo diferencial, el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales.

Por último, en el capítulo 6, se plantean las conclusiones y las perspectivas de la investigación. Se establece un esquema sobre los elementos del sistema de referencia variacional basado en prácticas. Se presenta la manera en que se resignifica la Serie de Taylor en el contexto de circuitos eléctricos y la integración de lo conceptual y lo algorítmico. Así también, algunas perspectivas de investigación que contribuyan al rediseño del discurso matemático escolar.

# **CAPÍTULO 1.**

## **CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN**



## CAPÍTULO 1. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta la contextualización de la investigación, en el que se da a conocer la principal problemática que se refiere a la separación entre lo conceptual y lo algorítmico, la cual provoca una comprensión limitada de los objetos matemáticos. Consideramos que el discurso Matemático Escolar (dME) carece de escenarios que permitan la construcción de significados en situaciones contextuales. Derivado de lo anterior, se establece la pregunta de investigación: ¿de qué manera se resignifica la Serie de Taylor en el contexto de circuitos eléctricos? Se plantea la hipótesis, los objetivos (general y específicos), la justificación del estudio, la contextualización de los estudiantes de ingeniería en sistemas computacionales y un breve estado del arte.

### 1.1. PROBLEMÁTICA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

En esta investigación se aborda una problemática de la Matemática Educativa, que de acuerdo con Muñoz (2006), consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. El autor la plantea en el cálculo integral, al establecer que existen investigaciones centradas en la primacía de lo algorítmico sobre lo conceptual (procesos algebraicos) y la primacía de lo conceptual sobre lo algorítmico (significados visuales).

Por otra parte, una problemática del cálculo diferencial la plantea Dolores (2005), la cual es la dificultad que tienen los estudiantes en reconocer las ideas de variación y cambio al resolver problemas relacionados con la derivada. Las ideas variacionales quedan escondidas con la presentación del cálculo formal (definiciones y demostraciones). La variación “desde un enfoque algebraico [...] reduce [...] su enseñanza a las reglas y las tablas de derivación y los métodos de integración. El significado se reduce a su operatividad” (Cantoral, 2019, pp. 68-69). Entonces, identificamos una separación entre lo conceptual y lo algorítmico.

Esta separación genera otra problemática, tal como se presenta en el estudio de Salinas y Alanís (2009), donde se establece la deficiente comprensión de los objetos matemáticos que tienen los estudiantes para resolver problemas: en lo cotidiano, en la ingeniería o en la ciencia. Esta problemática la identifican en la enseñanza del

Cálculo (diferencial, integral y ecuaciones diferenciales), la cual se genera a partir del paradigma tradicional de la enseñanza, donde el maestro (transmisor del conocimiento) enseña y el alumno (receptor del conocimiento) aprende (Cantoral, 2016). Por su parte, Hernández (2006) describe a este paradigma de la siguiente manera:

Se sigue con la creencia de la transferencia simple de la enseñanza hacia el aprendizaje, donde el alumno solo mecaniza la información adquirida por medio de la enseñanza tradicional [...] el estudiante es considerado como un sujeto pasivo que asimila ideas de forma natural mediante el estudio de apuntes de clases y textos escolares de circulación comercial. (p. 2)

Esta relación de transmisión de conocimiento maestro - alumno genera un aprendizaje sin comprensión, ya que de acuerdo con Artigue (1995) solo se centra en prácticas algorítmicas (algebraicas) del Cálculo. El contenido matemático se presenta estructurado de manera formal (ausencia de significados reales) y rigurosa (secuencia de definiciones y teoremas). Desde el punto de vista de Farfán (2012) también podemos identificar la problemática centrada en lo algorítmico, donde, "los métodos de enseñanza han sido inspirados durante mucho tiempo solo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en el empleo de algoritmos" (p. 16).

En la investigación de Morales (2011) también se identifica la problemática (centrada en lo algorítmico) en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Establece que, el aprendizaje se centra en métodos cuantitativos con el manejo de expresiones algebraicas, esto deja en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha imagen (enfoque cualitativo) de las ecuaciones diferenciales (campos de pendientes). La primacía de lo algorítmico sobre la conceptual aún predomina (en menor medida) en los salones de clases, debido al paradigma tradicional de la enseñanza.

En el intento por hacer énfasis en los significados visuales y no en el empleo de algoritmos (manejo algebraico), se han generado propuestas para la comprensión de los objetos matemáticos. La primacía de lo conceptual (análisis de gráficas) sobre lo algorítmico la podemos observar en el estudio que presenta Suárez (2008), el cual se centra en la modelación - graficación para la construcción de conocimientos en

situaciones de variación y cambio. La investigación retoma la teoría Socioepistemológica y la ingeniería didáctica como metodología. El diseño de la situación se divide en tres momentos:

En el momento 1, se presenta una situación de movimiento, la cual consiste en otorgar las características de dicha situación donde se pide a los estudiantes que realicen la gráfica correspondiente, así también se presenta el modelo gráfico donde los estudiantes trabajan en equipo para realizar un bosquejo a lápiz y papel. En el momento 2, se describe el modelo gráfico donde los equipos exponen sus gráficas, explican por qué corresponden a una situación de movimiento y finalizan con una simulación. En el momento 3, los estudiantes usan los argumentos contruidos para coordinar el comportamiento de las gráficas con las características del movimiento. En el estudio son evidentes los significados visuales (lo conceptual) que se le da al uso de las gráficas.

Otra investigación donde se identifica la primacía de lo conceptual (significados visuales) sobre lo algorítmico es en [Trujillo \(2016\)](#), donde se pretende mostrar cómo se argumenta con las gráficas para identificar y superar obstáculos cognitivos asociados con la variación y el cambio en un ambiente de trabajo tecnológico. El estudio se centra en la concepción de obstáculo de Brousseau (manifestación del obstáculo, origen, ejemplos del mismo y manifestación), la génesis instrumental y como metodología la ingeniería didáctica. Concluye que, las gráficas cartesianas activan los obstáculos y también permiten mediar la superación de los mismos al proponer prácticas de predicción sobre ellas. Así también, el trabajo de [Méndez, Ferrari y Trejo \(2018\)](#) se centra en el análisis de las variaciones en las gráficas. En las actividades se analizan variaciones numéricas y gráficas con el uso de calculadoras que permiten describir comportamientos globales y locales de funciones polinómicas.

En el trabajo de [Dolores \(2007\)](#) se presentan algunos tipos de representaciones gráficas que hacen estudiantes de nivel medio superior con base en enunciados verbales acerca de la rapidez de variación. El autor establece que, “las representaciones gráficas llamaron la atención de investigadores [...] desde la década de los ochenta, cuando los profesores de visualización fueron sobreponiéndose cada vez al rigor y a la formalización en la enseñanza y aprendizaje

de la matemática" (p. 360). El estudio de las gráficas se refiere a su interpretación y a su construcción. La investigación retoma los registros de representación semiótica: verbal (escrita) y gráfica. Los resultados indican seis tipos de representaciones: pictográficas, gráficas de barras, gráficas de puntos, gráficas de rectas, gráficas de curvas y gráficas de flechas; donde la rapidez la asociaron (los estudiantes) con una magnitud y no como la pendiente o cociente de magnitudes de cambios.

Como se mencionó en párrafos anteriores, la separación entre lo conceptual y lo algorítmico influye en la comprensión de los objetos matemáticos. La Serie de Taylor como el objeto matemático principal de la investigación se ubica en dos paradigmas: cauchiano (convergencia) y newtoniano (predicción). En los cursos actuales de Cálculo esta serie se aborda con el concepto de límite (Cantoral, 2001). De acuerdo con Morales (2009), se inserta en el sistema didáctico con el discurso de Cauchy centrado en su convergencia, es decir, en aproximar funciones por medio de polinomios en un punto específico. Para la aproximación de funciones (logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, entre otras) se hace uso de las reglas de derivación centrándose en lo algorítmico.

En el dME del Cálculo aun predomina lo algorítmico sobre la conceptual, lo que provoca que se pierda el sentido de variación. Así también, en dicho discurso se identifica la falta de marcos de referencia que dotan de significados a los objetos matemáticos (Soto, 2013). El marco de referencia lo asumimos como el escenario donde se interactúa para la construcción de significados en situaciones contextuales. Esto conlleva a una resignificación progresiva que favorece la comprensión de los objetos matemáticos.

Con base en lo anterior, se pretende abordar la Serie de Taylor para su resignificación en el contexto de los circuitos eléctricos a través de la variación. Con la finalidad de procurar la integración de lo conceptual y lo algorítmico que permita contribuir al rediseño del discurso matemático escolar. Entonces, derivado de la problemática se establece la siguiente pregunta de investigación: ¿de qué manera se resignifica la Serie de Taylor en el contexto de circuitos eléctricos?

Dicha pregunta permite establecer la siguiente hipótesis: el análisis de los circuitos eléctricos a través de la variación permite la resignificación de la Serie de Taylor, procurándose la integración de lo conceptual y lo algorítmico.

## 1.2. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN: GENERAL Y ESPECÍFICOS

En este apartado se presenta el objetivo general que, de acuerdo con la pregunta de investigación, es el siguiente: conocer la manera en que se resignifica la Serie de Taylor (objeto matemático) en el contexto de los circuitos eléctricos a través de la variación, que permita la integración de lo conceptual y lo algorítmico.

Y se establecen los objetivos específicos que, con base con el objetivo general, son los siguientes:

- a) Elaborar un análisis socioepistemológico (aspectos "históricos - epistemológicos", aspectos cognitivos, aspectos didácticos y aspectos sociales) de la Serie de Taylor.
- b) Implementar situaciones diagnósticas y de aprendizaje enfocadas al análisis de circuitos eléctricos a través de la variación.
- c) Favorecer la integración de lo conceptual y lo algorítmico.
- d) Contribuir al rediseño del discurso Matemático Escolar.

## 1.3. JUSTIFICACIÓN

La separación entre lo conceptual y lo algorítmico provoca una comprensión limitada de los objetos matemáticos. Es indispensable, para este estudio, establecer las ideas sobre lo conceptual y lo algorítmico:

No reducimos lo conceptual a los conceptos o a la definición del concepto sino más bien lo conceptual lo entendemos en un sentido amplio como todo lo asociado a ideas, nociones, pensamientos, concepciones, conceptos, estructuras, objetos mentales, semántica de los sistemas simbólicos, significados, teorías. Por otro lado, no reducimos lo algorítmico a los algoritmos sino más bien lo consideramos en un sentido amplio como todo lo asociado a métodos, reglas, procesos, operaciones, técnicas, procedimientos algorítmicos, procedimientos no algorítmicos, algoritmos, sintaxis de los sistemas simbólicos, significantes. (Muñoz - Ortega, 2010, p. 285)

Entonces, para favorecer la comprensión se generan propuestas enfocadas a dar significados a los objetos matemáticos con base en ideas variacionales. Ya que, la variación y el cambio los dotan de significados en contextos específicos (Pérez, 2019). Estas ideas permiten dinamizarlos mediante tratamientos gráficos, apoyos

tecnológicos o el estudio de situaciones contextuales. De acuerdo con Caballero (2018):

El desarrollo de una perspectiva variacional del Cálculo es un punto de partida para la construcción de significados de objetos matemáticos como derivada y pendiente, por lo que comprender cómo los estudiantes se apropian de la noción de variación es un aspecto necesario en el aprendizaje del Cálculo. (p. 15)

El estudio de la variación, de acuerdo con Caballero - Pérez y Cantoral (2017), permite abordar los siguientes cuestionamientos: ¿qué cambia y respecto de qué cambia?, ¿cuánto y cómo cambia? y ¿por qué cambia de esa manera? Dichos cuestionamientos son requisitos necesarios para la construcción de la variación al ser elementos del sistema de referencia variacional. Este sistema permite el reconocimiento y la organización del cambio para la construcción de la variación en situaciones de predicción. Como señala Caballero (2018), en el estudio de la variación es de interés considerar:

Qué tipo de escenarios favorece su construcción, de qué manera las personas perciben esta noción en diversos fenómenos, como operan con ella, cómo la representan, cómo la comunican, la forma en cómo piensan la variación, la clase de situaciones y tareas en las que emerge o se utiliza. (p. 18)

Entonces, "la variación es una noción que se construye socialmente, pues su uso se desarrolla bajo situaciones de cambio con fines predictivos y bajo el esquema de desarrollo de prácticas" (Caballero, 2018, p. 143).

En la investigación de Muñoz (2006) se establecen algunas rutas de investigación en el campo de las prácticas sociales con la finalidad de incidir en el rediseño del discurso Matemático Escolar. Se plantea lo siguiente: "en el caso del procedimiento de derivación sucesiva estudiar el desarrollo de la predicción desde el binomio de Newton hasta la Serie de Taylor..." (p. 157). Esta ruta de investigación ya fue abordada en la tesis de Hernández (2006). Por lo tanto:

Otra perspectiva de investigación a seguir consiste en estudiar cómo la relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico vive en dominios científicos distintos a los de la Cinemática (por ejemplo [...] Circuitos Eléctricos [...]) a través de analizar los matices de la transposición de prácticas sociales de un dominio científico a

otro en donde se requiere la matematización de la predicción. (Muñoz, 2006, p. 157)

En las reflexiones finales que presenta Morales (2009) se plantea la siguiente pregunta: ¿cuál sería el rol de la predicción en otro ambiente (no de cinemática)? y señala que:

En cinemática la persona está más involucrada porque puede realizar los movimientos, tanto las personas como el hecho de que ellos mismos puedan mover los objetos, por otro lado, la cinemática se les hace más familiar porque de alguna manera es tratada en su enseñanza previa a la universitaria y por ende sus ecuaciones son más familiares... (p. 170)

El contexto, de acuerdo con Solís (1999) matiza la idea de variación y lo significa. De esta idea, establece la pregunta de investigación: ¿cuáles contextos de significación, y en qué circunstancias, son los más adecuados para desarrollar nociones de variación?

Con base en lo planteado, la Serie de Taylor es un objeto matemático que, en el discurso Matemático Escolar (dME), de acuerdo con los libros de texto de matemáticas o de ingeniería, se identifica en el tema de convergencia de series infinitas y en el tema de aproximación de funciones mediante polinomios (Cantoral, 2001). Al retomar la problemática sobre la manera en que es abordada la Serie de Taylor en el discurso Matemático Escolar a través de su convergencia, se ve la necesidad de centrarse en su resignificación en una situación de variación y predicción; y en el contexto de los circuitos eléctricos (diferente al de cinemática) para favorecer la integración de lo conceptual y lo algorítmico. Así también, es de interés analizar las prácticas que lo acompañan en su significación mediante un sistema de referencia variacional.

#### **1.4. CONTEXTUALIZACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES**

La licenciatura de Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC), de acuerdo con el plan de estudios, está conformada por nueve semestres (Universidad de Los Altos de Chiapas, 2004). En el primero se cursan matemáticas I (cálculo diferencial e integral) y diseño estructurado de algoritmos; en el segundo se cursan matemáticas II (cálculo de varias variables), álgebra lineal, electricidad y magnetismo y programación I; en el tercero las asignaturas de matemáticas III (ecuaciones diferenciales), electrónica básica y programación II; en cuarto fundamentos de análisis numéricos, simulación y

programación III; y en sexto graficación. Se identifica que, lo conceptual y lo algorítmico se encuentra implícito en los contenidos de las asignaturas mencionadas.

En el programa de estudios de ISC se observa la relación que existe entre la física, la matemática y la programación. En las asignaturas de electrónica básica y electricidad y magnetismo se presentan los temas sobre el análisis de circuitos eléctricos tales como: La Ley de Coulomb, la Ley de Ohm, circuitos (resistencias) en serie y en paralelo, métodos de análisis, teoremas de redes, el estudio de los capacitores e inductores, entre otros. Entonces, en la investigación se retoma el análisis de dichos circuitos, ya que el Cálculo, de acuerdo con Salinas y Alanís (2009), debe ser un medio o herramienta que le permita al estudiante entender la realidad en otras áreas de conocimiento.

De acuerdo con el plan de estudios, la Serie de Taylor no aparece en los contenidos de la asignatura de fundamentos de análisis numéricos ni en ninguna de Cálculo (Universidad de Los Altos de Chiapas, 2004). Sino que, para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales aparecen los métodos de: Euler, Runge - Kutta, Milne, Adams - Bashforth y Adams - Moulton. Entonces, se puede decir que los estudiantes no abordan, en clases, la Serie de Taylor.

La Universidad de Los Altos de Chiapas es una institución privada ubicada en la zona urbana de la ciudad de San Cristóbal de Las Casas, Chiapas, México. Su contexto social está considerado como un lugar turístico de la zona Altos con gran diversidad cultural. Gran parte de los estudiantes cuentan con teléfonos celulares, calculadoras científicas y computadora personal (laptop) e incluso algunos con coche propio. Por lo regular, los alumnos pueden cubrir los gastos de colegiatura (a veces realizan los pagos tardíos) y de material didáctico (libros, fotocopias, maquetas, instrumentos de medición, entre otros). Los estudiantes de primero a quinto semestre estudian en el turno matutino, y a partir del sexto semestre se pasan al vespertino. Actualmente, la institución se encuentra en un proceso de transición del plan semestral al plan cuatrimestral, es decir, todas las licenciaturas serán cuatrimestrales.

La asignatura de circuitos eléctricos, por lo regular, se aborda con base en conceptos teóricos establecidos en los libros de texto y no en la experimentación (conexiones físicas, simulaciones o programación). Algunos conceptos teóricos se identifican en la Ley de Ohm y en temas sobre potencia y energía. El proceso de



enseñanza y aprendizaje de los circuitos eléctricos se da con base en el análisis de diagramas eléctricos (configuraciones) y en la aplicación de fórmulas ya establecidas que permiten calcular variables: voltaje, corriente, resistencia, potencia y energía. Se analizan circuitos (configuraciones de resistencias) en serie y en paralelo, posteriormente se analizan circuitos en redes con los métodos de mallas y nodos, por mencionar algunos. En temas posteriores se analiza el capacitor en serie y en paralelo. Se analizan configuraciones de resistencia-capacitor (RC), resistencia-inductor (RI) y resistencia-capacitor-inductor (RCI) con algunos métodos (leyes de Kirchhoff) para establecer ecuaciones diferenciales que los modelan.

Con base en lo planteado, en este estudio se retoma el análisis de los circuitos eléctricos (campo de la electricidad), específicamente, el comportamiento de un led con base en la Ley de Ohm y el comportamiento de un capacitor (voltaje de carga).

## **1.5. ESTADO DEL ARTE**

El Estado del Arte presenta un breve estudio del conocimiento acumulado con base en la investigación documental. Tiene como objetivo sistematizar la producción en un área del conocimiento, ya que permite hacer una reflexión sobre las tendencias y vacíos en dicha área. El Estado del Arte está contextualizado en investigaciones que tienen que ver con el Cálculo (matemática del cambio), ya que la Serie de Taylor es un objeto matemático que integra el cálculo diferencial, el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales (Cantoral, 1995). La Serie de Taylor, de acuerdo con la dimensión "histórica - epistemológica", tiene relación con la predicción y con la variación y el cambio. Así también, de manera muy breve, se habla de algunas investigaciones relacionadas con los circuitos eléctricos.

### **1.5.1. LA SERIE DE TAYLOR COMO EL INSTRUMENTO PREDICTOR**

Existen diversas investigaciones sobre la Serie de Taylor relacionadas con la práctica social de predicción, tal es el caso del estudio de Cantoral (1990) donde analiza las circunstancias que hacen posible la construcción de conocimiento matemático al estudiar fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. Realiza un estudio sobre la relación dialéctica entre las nociones de predicción propias de las ciencias físicas y lo analítico propio de la matemática. Hace un análisis de textos originales de: Galileo,

Newton, Clairaut, D'Alembert, Euler, Fourier, Lagrange, Taylor, entre otros; con la finalidad de aportar elementos para la construcción del *Prædiciere* y el reconocimiento de la Serie de Taylor como el instrumento predictor. El *Prædiciere* "consiste en aquello que norma la actividad matemática con fines predictivos, no es el acto de predecir sino lo que orienta a querer predecir" (Cantoral, 2019, p. 110).

Dicho estudio dio la pauta para la construcción de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. En dicha teoría, según Cantoral (2019):

Importa conocer el papel de las prácticas en la construcción del objeto y, en consecuencia, analiza fenómenos de la vida diaria que la favorezcan. En este sentido, la práctica de predicción antecede y acompaña a ese concepto, y es además socialmente compartida y valorada en distintas actividades. (p. 110)

La predicción de un fenómeno consiste en determinar el valor futuro al conocer el valor actual y su variación. El binomio de Newton se relaciona con la predicción al querer conocer el estado futuro de un fenómeno. La Serie de Taylor se relaciona con el binomio de Newton al reconocer la expresión matemática con base en las variaciones sucesivas en torno a la variable independiente. Dicha serie, de acuerdo con Cantoral (2019), es considerada como "el objeto matemático para predecir el estado futuro de eso que fluye en una situación variacional" (p. 124). Cabe destacar que la investigación se llevó a cabo con grupos de profesores del nivel medio superior y superior, con la intención de contribuir al rediseño del dME.

### **1.5.2. LA SERIE DE TAYLOR EN LAS ESCUELAS DE INGENIERÍA. ANÁLISIS DE TEXTOS**

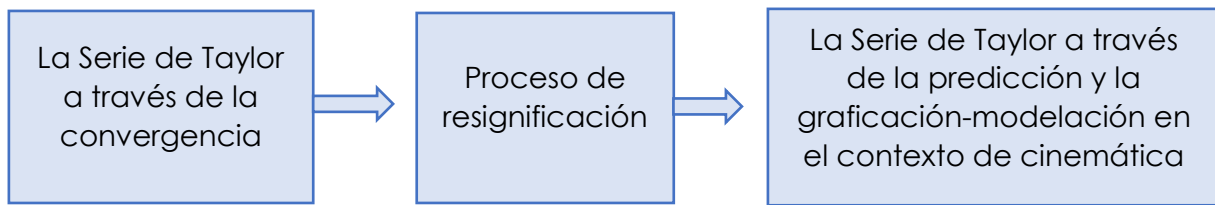
En el trabajo de Arcos (1993) se analizan textos de ingeniería, de Cálculo y de análisis numérico. Se establece que la actividad de modelación matemática debe ser familiar para todo ingeniero. En los textos de ingeniería se estudian fenómenos de flujo en la naturaleza (variación continua) enfocándose en procesos de predicción. Establece que, "la Serie de Taylor ha sido, desde su origen, la principal herramienta de predicción, sobre todo cuando se modelan fenómenos de variación continua" (p. 15).

En textos de ingeniería (electricidad y magnetismo, mecánica de fluidos, termodinámica, máquinas y mecanismos, resistencia de materiales) la Serie de Taylor es utilizada como un instrumento de predicción. En textos de Cálculo se aborda con los criterios de convergencia basados en el concepto de límite, para la aproximación de funciones. Esto conlleva a no abordarse en el proceso de modelación matemática de un fenómeno físico. En textos de métodos numéricos, la Serie de Taylor, se utiliza para la determinación del error cometido al resolver numéricamente un problema matemático, además de aproximar funciones. Esta serie también es utilizada para resolver ecuaciones diferenciales.

### **1.5.3. RESIGNIFICACIÓN DE LA SERIE DE TAYLOR EN UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN DE MOVIMIENTO**

En el estudio de Morales (2009) se presenta una resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento, específicamente, de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones. La resignificación se da a partir del análisis de gráficas (para generar argumentos) obtenidas con un sensor, estas gráficas representan diversos movimientos: personas, pelotas, automóviles o cualquier objeto. La investigación retoma a la Socioepistemología como aproximación teórica y a la ingeniería didáctica como metodología de investigación. El estudio se centra en el rediseño del discurso del cálculo escolar, con la inserción de la Serie de Taylor relacionada con la práctica social de predicción y la práctica de graficación - modelación. Se aborda la pregunta: ¿cuál es el uso de las gráficas cuando se resignifica la Serie de Taylor en una situación de modelación de movimiento?

En el trabajo se concluye que, la Serie de Taylor deja de ser el objeto de la situación, sino más bien, el movimiento es el objeto. La relación de la Serie de Taylor con la práctica de predicción brinda un marco de referencia ausente en el dME, y a través de éste permite su resignificación, es decir, de un paradigma cauchiano (convergencia) a un paradigma newtoniano (predicción). El uso de las gráficas permite visualizar el comportamiento de los fenómenos de variación y cambio que generan argumentos para su resignificación (ver figura 1).



**Figura 1.** Proceso de resignificación

Fuente: elaboración propia

#### **1.5.4. DEL BINOMIO DE NEWTON A LA SERIE DE TAYLOR**

El trabajo de investigación de Hernández (2006) se centra en una reconstrucción de la Serie de Taylor a partir del binomio de Newton. El autor plantea la pregunta de investigación: ¿qué prácticas sociales emergen en la transición del binomio de Newton a la Serie de Taylor? Es por ello que, se propone un rediseño del cálculo y física escolar a partir de las prácticas sociales de predicción e interpolación. Estas prácticas favorecen la construcción del conocimiento matemático y físico a partir del análisis de fenómenos de variación. El estudio señala que:

El binomio de Newton y la serie de Taylor son estudiados en forma separadas en los cursos de álgebra, cálculo, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales, y en los cursos de física, estos contenidos están desvinculados con los fenómenos físicos y su contexto social en cuanto a su necesidad de surgimiento en el conocimiento matemático, sólo se utiliza como algoritmo operativo en los textos de álgebra, física e ingeniería. (p. 146)

Retoma la Socioepistemología como aproximación teórica al hacer énfasis en la dimensión “histórica - epistemológica”. Establece que, “las prácticas sociales de la predicción y la interpolación favorecen la construcción del conocimiento matemático y físico, estas prácticas deben entenderse en el marco de la dimensión social” (p. 147).

#### **1.5.5. LA PREDICCIÓN Y LA DERIVACIÓN SUCESIVA COMO ELEMENTOS DE LA SERIE DE TAYLOR**

En la investigación de Muñoz (2006) se aborda la problemática sobre la separación entre lo conceptual y lo algorítmico desde una aproximación Socioepistemológica a través de las dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural (eje

transversal). En el estudio se toma como unidad de análisis a la práctica social de predicción (lo conceptual) y la variación sucesiva (lo algorítmico) para la reconstrucción de la Serie de Taylor. El autor señala que, el objetivo fundamental desde el punto de vista de la Matemática Educativa consiste en rediseñar el dME con base en prácticas sociales. El estudio también se apoya en la teoría de campos conceptuales con la finalidad de identificar algunas situaciones problema (derivados de fenómenos de variación y cambio) para los diseños didácticos. Señala que, en el proceso histórico se generan marcos epistémicos sobre el movimiento, por lo que:

El marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos, consistió en: ¿cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? Pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento. Así, el objeto fue calcular la evolución posterior del sistema de movimiento sin plantearse otras preguntas sobre las causas reales de él. (p. 213)

Dicho marco epistémico también se puede considerar para la Serie de Taylor, debido a que su reconstrucción parte del binomio de Newton. Para la predicción se requiere de un análisis sobre la evolución de las variaciones sucesivas. Al predecir un estado futuro de la variable dependiente se considera el estado inicial de dicha variable más la evolución de sus variaciones.

#### **1.5.6. RESIGNIFICACIÓN DE LA SERIE DE TAYLOR A TRAVÉS DE LA TECNOLOGÍA**

El estudio de Almazán (2009) se centra en los argumentos y significados que estudiantes de nivel superior construyen sobre la Serie de Taylor. Este estudio se da en interacción con una herramienta tecnológica de visualización. La problemática se basa en la carencia de significados de la Serie de Taylor sobre nociones, ideas y estrategias variacionales. Se establece el constructo teórico de transposición informática, que se refiere a transformaciones de presentación y tratamiento de conceptos matemáticos al utilizar herramientas tecnológicas que pueden o no dotar de significados a dichos conceptos. La visualización se da a través de la interfaz de una calculadora gráfica para enriquecer y dotar de significados a la Serie de Taylor.

Así también, se considera la argumentación a través de la interacción con la tecnología como el elemento principal para la resignificación.

### **1.5.7. LA SERIE DE TAYLOR Y SU RELACIÓN CON LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA ARITMÉTICA, EL ÁLGEBRA Y EL CÁLCULO**

En la investigación de Ríos (2020) se reconoce la articulación de argumentos involucrados en el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFAr), el Teorema Fundamental del Álgebra (TFAI) y el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC - Taylor). Se analiza la vinculación entre los tres teoremas con base en el pensamiento variacional.

El enfoque por Taylor permite la relación entre la derivada y la integral. Dicha relación involucra los significados de cada una de las formas de descomposición: en el caso del TFAr el número natural se descompone en una magnitud mínima de referencia, el número primo; en el TFAI el polinomio de variable real se descompone en factores lineales o cuadráticos y en el TFC-Taylor la función queda expresada en términos de sus derivadas sucesivas con sus correspondientes coeficientes. Para significar el comportamiento de la función graficada se requiere de su interpretación con base en sus derivadas sucesivas.

Establece una reconstrucción racional del saber transversal (los tres teoremas) mediante prácticas, significados y procedimientos. Parte de *los elementos* de Euclides, la *Introducción del Arte Analítico* de Viète, la *Geometría* de Descartes, la *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* de Newton, el *Método de los Incrementos Directos e Inversos* de Taylor y las *Disquisiciones Aritméticas* de Gauss. En dichas obras se encuentran impregnadas las circunstancias sociales y culturales que les dio cabida.

En el estudio se reconoce que, en la vida diaria predecimos, estimamos comportamientos y conjeturamos en la acción, nos anticipamos a los hechos. Por tanto, se considera una característica de la actividad humana. Los tres teoremas (TFAr, TFAI y el TFC - Taylor) se significan mediante el ejercicio de prácticas normadas. Dichas prácticas anteceden y acompañan a los objetos matemáticos para dotarlos de significados.

### **1.5.8. LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO A TRAVÉS DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO**

Existen investigaciones sobre la enseñanza del Cálculo, tal es el caso del estudio de Salinas (2010), el cual presenta una propuesta sobre el qué enseñar y el cómo enseñar Cálculo. Esta propuesta busca promover en el aula el surgimiento y la evolución de los procedimientos y conceptos básicos del Cálculo. Aquí, la matemática es considerada como una actividad humana para dar solución a problemas en diversas áreas de conocimiento. El diseño se basa en un acercamiento newtoniano con un acercamiento leibniziano para favorecer la construcción de nociones y procedimientos del Cálculo, centrándose en el estudio de la variación y el cambio. Se retoma el método de Euler con la finalidad de incorporar nociones de razón de cambio y cambio acumulado propias de la derivada y la integral, respectivamente.

### **1.5.9. DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES AL RESOLVER PROBLEMAS DE VARIACIÓN**

En el estudio de Barajas, Parada y Molina (2018) se analizan las dificultades que tienen los estudiantes de nuevo ingreso, de la Licenciatura en Matemáticas y de Ingeniería en Sistemas Computacionales, en resolver problemas de variación. El cálculo diferencial implica resolver problemas de variación, por lo que se requiere del desarrollo del pensamiento variacional. Este pensamiento permite el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos. En la investigación se retoma la taxonomía de procedimientos: aritméticos, geométricos, métricos y analíticos; y se centra en el desarrollo de habilidades.

Los resultados y las conclusiones se basan en el “problema de la pelota”, se identifica que las dificultades en los procedimientos de tipo aritmético se manifestaron al utilizar propiedades y relaciones numéricas para realizar cálculos; las dificultades en los procedimientos de tipo geométrico se identificaron al realizar operaciones geométricas y usarlas para resolver el problema; sobre las dificultades a los procedimientos de tipo métrico se identifican las relaciones entre distintas unidades de medida, las operaciones entre magnitudes y al realizar comparaciones y estimaciones; por último, sobre algunas dificultades a los procedimientos de tipo analítico son: reconocer y describir regularidades y patrones en el estudio de un fenómeno, establecer correctamente interdependencia entre las magnitudes

variables y reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional.

#### **1.5.10. EL LENGUAJE VARIACIONAL EN EL DISCURSO DE LA INFORMACIÓN**

Hay una gran variedad de investigaciones sobre la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Tal es el caso del estudio de Dolores (2010), donde se establece que, el lenguaje variacional se encuentra en los diarios, periódicos, revistas, programas de televisión, diagnósticos médicos, informes de funcionarios, programas de radio, entre otros. Analiza cómo se usa el lenguaje variacional en el discurso de la información, específicamente, en los periódicos. Este discurso está presente en ámbitos extraescolares, la gente común o los profesionales lo utilizan con fines prácticos: para tomar decisiones o para resolver problemas de la vida cotidiana. El trabajo se basa en la Socioepistemología y se enfoca en tres procesos metodológicos: selección, recolección y análisis del discurso. Para el análisis se seleccionó a dos periódicos: *El Reforma* y *La Jornada*. En consideraciones finales establece que, el lenguaje variacional, en el discurso de la información, las variables (cualitativas) están asociadas a nombres concretos (palabras) que explican el comportamiento de la variación (tendencias y predicción) en lenguaje común.

#### **1.5.11. LA VARIACIÓN Y EL FENÓMENO DE LA PROPAGACIÓN DEL CALOR**

Hay investigaciones sobre la variación en un contexto diferente al de cinemática, tal es el caso del fenómeno de la propagación del calor. En el estudio de Solís (1999) se aborda la noción de variación (idea fundamental del Cálculo) en ese contexto físico. En el cual se intenta obtener información acerca de cómo la noción de variación se forma en los individuos cuando son expuestos al fenómeno de la propagación del calor. Un nivel se da cuando las personas pueden hacer representaciones de la variación, las cuales pueden ser: verbales, gráficas o simbólicas. Otro nivel del manejo de la variación se da, cuando el individuo es capaz de construir un modelo que permita hacer del fenómeno un evento predecible.

El trabajo se realiza desde dos direcciones: una de tipo epistemológico (génesis de los conceptos de calor y temperatura) y la otra sobre cómo la variación, instalada en los científicos de cada época, jugó un papel importante en la construcción de



conocimientos. Se realizó una entrevista clínica con tres jóvenes y se diseñaron cuatro experimentos sobre el fenómeno de la propagación del calor: interacción con velas, calentamiento de una barra metálica, mezcla de agua a diferentes temperaturas y percepción de temperatura por medio del sentido del tacto. El autor establece tres estadios de la noción de variación, los cuales son: la percepción, la interpretación y la representación.

Una de las reflexiones finales es que la noción de variación está determinada por el contexto fenoménico en el que se presenta, por lo que las ideas de variación y cambio se significan a partir de dicho contexto. Históricamente, la medición de la transferencia de calor ha presentado dificultades, ya que se consideraba como un fluido, sin peso ni sustancia, que pasaba de un cuerpo caliente a uno frío (Montiel, 2005). La acción de medir, al tomar datos numéricos producto de la empiria, permite el reconocimiento de la matemática que subyace al fenómeno. Entonces, se plantea la pregunta: ¿cuáles contextos de significación, y en qué circunstancias, son los más adecuados para desarrollar nociones de variación?

#### **1.5.12. TIPOS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS A LOS QUE ESTÁN EXPUESTOS LOS ESTUDIANTES DE CÁLCULO AL ANALIZAR LIBROS DE TEXTO**

Los estudiantes de Cálculo se enfrentan a diversos problemas planteados en los libros de texto, Valencia y Valenzuela (2017) realizan una investigación sobre los tipos de problemas matemáticos a los que están expuestos los estudiantes de Cálculo al analizar libros de texto. El estudio retoma nueve aspectos (criterios) sobre las categorías de clasificación propuestos por Green y Emerson, los cuales son: la naturaleza de la evidencia disponible, conexión con los procedimientos matemáticos, tipo de supuestos necesarios, complejidad del problema, singularidad, evaluación, robustez, transferencia de las técnicas utilizadas y tipo de revisión. La finalidad del estudio es identificar los tipos de problemas convencionales (PC) y problemas de modelaje (PM) planteados en cinco libros de texto. Se realizó un análisis cualitativo y un análisis cuantitativo (investigación mixta).

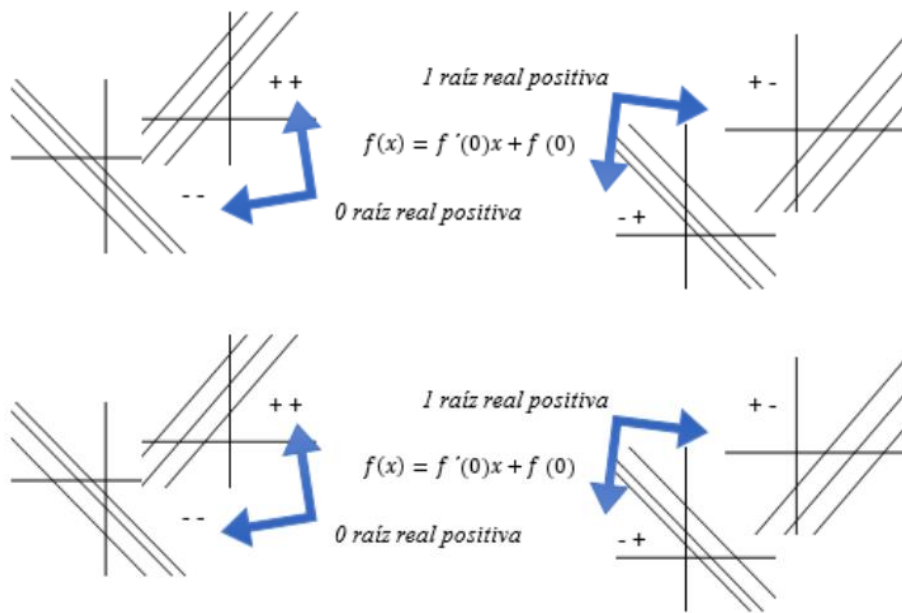
En la Educación Matemática, un problema de modelaje involucra la representación de la realidad por medio de un modelo matemático y pueden ser resueltos por múltiples procedimientos que conducen a una gran cantidad de

resultados; las soluciones de los PM solo pueden ser más apropiadas o menos apropiadas dependiendo de las condiciones donde la modelación matemática refuerza los conceptos. Algunas características de los problemas convencionales es que pueden ser resueltos por un número limitado de métodos que, si son aplicados correctamente, llevan a un único resultado correcto; las soluciones de los PC solo pueden ser correctas o incorrectas. La evaluación de los PC consiste principalmente en valorar si se efectuaron correctamente los procedimientos matemáticos y si se llegó a una respuesta determinada. Mientras que la evaluación de los PM consiste en determinar qué tan apropiada es la solución en el contexto del problema.

En las conclusiones plantean que la resolución de problemas es central en la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, ya que se espera que los estudiantes no solo posean los conocimientos y habilidades matemáticas, sino que también sean capaces de aplicarlos efectivamente dentro y fuera del aula. Los libros analizados dedican la mayoría de sus ejemplos y ejercicios en la práctica de PC y en menor medida a la aplicación de los conceptos y técnicas matemáticas en una situación real, o al modelaje matemático. Los PM son prácticos, motivan al alumno, facilitan la comprensión de conceptos y le demuestran la clase de situaciones que las matemáticas ayudan a resolver. Se reconoce que, los estudiantes tienen dificultades para conectar el Cálculo con la realidad.

#### **1.5.13. MODELACIÓN ESCOLAR: ANÁLISIS DE LAS VARIACIONES EN GRÁFICAS**

El trabajo de Méndez, Ferrari y Trejo (2018) se centra en el análisis de las variaciones en gráficas. Los diseños están basados en la modelación matemática (herramienta para la construcción de conocimientos) desde la Socioepistemología. Las actividades están enfocadas en analizar variaciones numéricas y gráficas con el uso de calculadoras, con la finalidad de describir comportamientos globales y locales de las funciones polinómicas. Se analiza el signo (regla de los signos de Descartes) de la función y de sus derivadas. Estas derivadas sucesivas se entrelazan con la Serie de Taylor (ver figura 2) al observar cómo varía lo que varía (la gráfica). Concluyen que, en el contexto escolar aún no se ha logrado significar a la función polinómica mediante sus variaciones.



**Figura 2.** La Serie de Taylor en el análisis de gráficas (derivadas sucesivas y la regla de los signos de Descartes).

Fuente: Méndez, Ferrari y Trejo (2018, p. 1517)

#### 1.5.14. EL USO DE LOS ÓRDENES SUPERIOR DE VARIACIÓN EN LA INTERPRETACIÓN CLÍNICA DEL ELECTROCARDIOGRAMA

En el escrito de Moreno-Durazo y Cantoral (2017) abordan la noción de orden de variación usada por los profesionales de la medicina cuando interpretan un electrocardiograma. Establecen que, la predicción desde una postura sistémica es una práctica relativa a la humanidad cuya base es el estudio del cambio y la variación. Señalan que:

Los estudios sobre aspectos que posibilitan la predicción son relevantes para el proceso de significación de las matemáticas del cambio y la variación, pues estas nacen y se desarrollan como respuesta a cierta necesidad de predicción ante problemas que se ocupan de fenómenos naturales o sociales. (p. 928)

Plantean como objetivo: analizar aquellos elementos, relativos al estudio del cambio y la variación que permiten al profesional de la medicina emitir un diagnóstico ante la situación de su paciente. Pretenden clasificar y organizar aquellas prácticas predictivas de la medicina relativas al uso de los órdenes de variación. Se muestra el

papel que juegan los órdenes superiores de variación en la interpretación de un electrocardiograma. Con base en la representación gráfica de los cambios eléctricos en los procesos de contracción y relajación del músculo cardíaco en función de las variables tiempo y voltaje. La predicción en fenómenos deterministas se analiza con el apoyo de la Serie de Taylor.

Se identifica la relación de tiempo y el voltaje para analizar el comportamiento del ritmo cardíaco del paciente. Así también, cómo es que la noción de orden de variación es utilizada para identificar comportamientos en los procesos rítmicos del corazón, de los cuales surge el diagnóstico que el médico realiza; basados en la comparación y la seriación de una "parte" del electrocardiograma.

#### **1.5.15. RESIGNIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL CONTEXTO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS**

El contexto de los circuitos eléctricos también ha sido abordado en varios estudios. Morales (2011) se centra en la resignificación de las ecuaciones diferenciales a partir del análisis de un circuito eléctrico. La resignificación se considera un constructo teórico propio de la Socioepistemología, es por ello que realiza una investigación donde pretende identificar argumentos que generan los estudiantes de ingeniería civil y de la maestría en Matemática Educativa. El trabajo está basado en la práctica de modelación - graficación. El autor señala que los sistemas de representación son un papel preponderante para la comprensión de los objetos matemáticos, como son de tipo: algebraico, gráfico y registro de la lengua natural. El campo de pendientes permite conocer el comportamiento (visual) de una ecuación diferencial, sin la necesidad de resolverla algebraicamente. Una de las conclusiones que presenta es que la herramienta tecnológica optimiza los tiempos para realizar cálculos y permite el desarrollo del pensamiento en los estudiantes al analizar los campos de pendientes.

#### **1.5.16. MODELADO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS**

El estudio de Ramos (2015) se enfoca en el modelado de circuitos eléctricos en CC (corriente directa) y AC (corriente alterna) a través de la plataforma de simulación MatLab / Simulink. Esta práctica de modelación - simulación en los circuitos eléctricos se hace por medio de diagramas de bloques. Los bloques representan elementos de un circuito eléctrico: leds, resistencias, capacitores (condensadores), diodos, circuitos

integrados, interruptores, entre otros. Así también instrumentos de medición: generador de señales, osciloscopio y multímetro. El autor señala que la herramienta Simulink favorece la enseñanza - aprendizaje de los circuitos eléctricos con estudiantes de ingeniería eléctrica - mecánico. La simulación permite verificar los resultados obtenidos de la experimentación al medir las variables: voltaje y corriente.

#### **1.5.17. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA**

El trabajo de Cano, Gómez y Cely (2009) se orienta en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de corriente eléctrica desde un enfoque histórico - epistemológico. Establecen que, los estudiantes presentan dificultades para distinguir los conceptos de electricidad, voltaje y corriente eléctrica; ya que son considerados como sinónimos. Derivado a estas dificultades establecen la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles estrategias construir, para que los docentes en formación, de los campos de la licenciatura en matemáticas y física, modifiquen sus modelos sobre la corriente eléctrica? Es por ello que, proponen el diseño y la aplicación de actividades de aprendizaje encaminadas a generar espacios de discusión y contrastación de ideas entre los estudiantes, para modificar los modelos de corriente eléctrica que utilizan. La investigación retoma la propuesta argumentativa de Toulmin como marco teórico centrada en un estudio de caso.

#### **1.5.18. MODELACIÓN DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS A TRAVÉS DE ECUACIONES DIFERENCIALES**

Las ecuaciones diferenciales son parte del Cálculo y son herramientas para resolver problemas sobre circuitos eléctricos. El estudio que realiza Rodríguez (2010) señala la utilidad de las matemáticas como una herramienta para modelar en otras ciencias. Su estudio se enfoca en la modelación matemática donde presenta dos propósitos: “estudiar cómo se pone en práctica el proceso de modelación en el sistema escolar y por otro, identificar las dificultades de los estudiantes para modelar un problema de la vida real” (p. 193). Escoge como herramienta de análisis a una Ecuación Diferencial (ED) y relaciona la física con la matemática al analizar un circuito eléctrico, estableciéndose las siguientes tareas: representar un diagrama de un circuito eléctrico (RC), establecer una ED que modela el voltaje del capacitor, encontrar una solución particular de la ED y determinar la corriente eléctrica usando la función del

voltaje en el capacitor. En la situación experimental se pide a los estudiantes modelar el funcionamiento de un desfibrilador cardíaco, “este dispositivo electrónico funciona aplicando un choque eléctrico a un ser humano para restaurar el ritmo de su corazón” (p. 199).

## **CAPÍTULO 2.**

### **MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO**

## CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

El marco teórico y el marco metodológico guían la investigación, ya que aportan elementos para la construcción del conocimiento matemático. La Socioepistemología se retoma como marco teórico con la finalidad de descentrar los objetos matemáticos y centrarse en las prácticas que los acompañan. La ingeniería didáctica se establece como marco metodológico, ya que permite elaborar un diseño didáctico con base en un análisis preliminar: dimensión "histórica - epistemológica", dimensión didáctica y dimensión cognitiva. Para el análisis (*a posteriori*) de los resultados se elabora un instrumento con base en el modelo de anidación de prácticas y de un sistema de referencia variacional.

### 2.1. SOCIOEPISTEMOLOGÍA

La Matemática Educativa se ha consolidado a través de los años debido al trabajo colectivo de investigadores, profesores y estudiantes. Tal como señala Cantoral (1997):

El Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN... se fundó en el año de 1975 en una atmósfera propicia para la investigación. De entonces a la fecha se han formado muchas generaciones de matemáticos educativos, y en ese proceso, la matemática educativa misma se ha ido constituyendo como un campo de investigación autónomo. (p. 28)

La investigación en Matemática Educativa, propone:

Mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y promover las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos, asegurando entre los alumnos la construcción de un saber viviente, susceptible de evolución, y funcional, que permita resolver problemas y plantear verdaderas preguntas. (Cantoral, 1999, p. 41)

La Socioepistemología es una construcción teórica de base empírica, la cual "surge en el cruce de caminos entre Matemáticas, Ciencias Sociales y Humanidades en un intento por explicar las relaciones entre mente, saber y cultura en el campo de las Matemáticas apoyándonos en la noción de práctica social" (Cantoral, 2016, p. 23). El "acercamiento socioepistemológico a la Matemática Educativa, se caracterizó por explicar el "misterio" de la construcción social del



conocimiento matemático." (p. 100). Es por ello que, la teoría modeliza las dinámicas del saber o conocimiento puesto en uso. El saber:

Se construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y el espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa: se posiciona a la opción constructivista en la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se rediseñe con fines didácticos. (Cantoral, 2016, pp. 101-102)

Este saber "lo construyen los seres humanos en el ejercicio de una gran cantidad de prácticas normadas por muy pocas prácticas sociales" (Sierra, 2008, p. 6). El concepto de dME y la predicción fueron la base para las elaboraciones teóricas de práctica social, rediseño del discurso Matemático Escolar, construcción social, epistemología de prácticas (Cantoral, 2016). Entonces, "la noción de práctica se encuentra ligada a la actividad humana, pero cabe aclarar que no toda actividad humana es una práctica, sino aquellas realizadas de manera consciente e intencional, no los actos instintivos o inconscientes" (Caballero - Pérez y Cantoral, 2017, p. 404).

Las prácticas sociales son las generadoras del conocimiento matemático que contribuyen al rediseño del dME (Reyes, 2011). Entonces, "la apropiación del objeto matemático precisa de prácticas que le acompañen en su construcción, tanto al nivel de la cultura como del uso que viven los saberes matemáticos situados" (Paz, 2019, p. 10). De acuerdo con la evidencia empírica se utiliza la siguiente expresión: "la práctica social no es lo que hacemos, sino lo que nos hace hacer lo que hacemos" (Cantoral, 2016, p. 113). O como establece Caballero (2018) la práctica social es aquello que regula las actividades vinculadas a la construcción social del conocimiento matemático.

Las prácticas anteceden y acompañan a los objetos matemáticos para dotarlos de significados (Ríos, 2020). El "...campo de prácticas sociales a través de la predicción permite tender puentes entre dominios científicos diversos: Física, Química, Biología, Economía [...] la predicción por su naturaleza va entretejiendo los conocimientos sin una frontera rígida entre conceptos, sin un orden lineal [...]" (Muñoz-Ortega, 2010, p. 300). La práctica social de predicción sirve para la

construcción social del conocimiento matemático y se relaciona con la variación y el cambio.

La centración en las prácticas sociales permite crear otro discurso que contribuye al rediseño del dME y como consecuencia rompe con la centración de los objetos matemáticos (Morales, 2009). Para el rediseño del Cálculo, según Salinas y Alanís (2009), se debe considerar:

El énfasis de las prácticas sociales que dan sentido al surgimiento de las nociones y procedimientos del Cálculo sugiere un cambio de modelo de enseñanza, en el que se correspondan mutuamente tanto el contenido como la forma en que se pretende que sea aprendido. (p. 358)

La teoría, según Cantoral (2016), se centra en tres planos: la naturaleza del saber (respuesta - actividad humana), la práctica social como normativa de la actividad humana (respuesta - práctica social) y las articulaciones teóricas (respuesta - teoría). En el plano respuesta - actividad humana establece que el saber posiciona al ser humano en el acto de significar, conocer y construir significados. En la respuesta - práctica social no se limita a caracterizar lo que el ser humano hace, sino a describir las circunstancias de cómo y cuándo lo hace, en dónde y por qué lo hace. En el tercer plano se ocupa de caracterizar las articulaciones teóricas de base empírica y de articular las nociones con los procesos.

La Socioepistemología, según Paz (2019), tiene como base cuatro principios fundamentales: principio normativo de la práctica social (las prácticas sociales son la base y orientación de los procesos de construcción del conocimiento); principio de la racionalidad contextualizada (la construcción del conocimiento depende del contexto en un momento y lugar determinado); principio del relativismo epistemológico (el saber matemático posee validez subjetiva y de verdades relativas); y el principio de la resignificación progresiva (el saber se significa y resignifica en diversas situaciones que lo rodean).

La Socioepistemología establece cuatro dimensiones del saber: la cognitiva referida a los procesos del pensamiento; la epistemológica referida a cómo se construye el saber; la didáctica a la interacción entre el alumno, el maestro y el saber; y la social a todo aquello que ocurre en toda una colectividad (Cantoral y González, 1998; Reséndiz, 2006). La problematización del saber, de

acuerdo con Reyes (2011), se refiere a la integración “entre las dimensiones del saber y las componentes de la construcción social” (p. 28).

La dimensión social, según Montiel (2005), “afecta a las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva, pero sobre todo modifica su relación sistémica para explicar los fenómenos didácticos alrededor de la construcción de un conocimiento matemático particular en escenario escolar” (p. 20). Por lo tanto, al analizar el cómo se organizan los grupos humanos es donde aparece la componente social (Morales, 2009). Lo cultural, según Reséndiz (2006) “implica que aquello que se aprende esté cerca de lo que da significados. Entonces, lo significativo del conocimiento estará asociado tanto al contexto donde se presenten las explicaciones como a la estructura matemática de los conceptos” (p. 452).

El dME es una elaboración teórica de la Socioepistemología, según Farfán (1997), “describe los saberes en el escenario educativo y abre la posibilidad de hacer matemáticas para encontrar las maneras de articular los saberes matemáticos en situación escolar, de forma que logren el aprendizaje la mayoría de los estudiantes” (p. 12). A su vez, “el discurso Matemático Escolar es el paradigma educativo que norma y regula a las matemáticas escolares.” (Cantoral, 2016, p. 68).

Uno de los objetivos centrales que pretende alcanzar la Matemática Educativa es: democratizar el aprendizaje en matemáticas, “este objetivo precisa el rediseño del discurso Matemático Escolar y para ello no basta con el rediseño de sus estructuras objetivables (libros de texto, currículo, programas de estudio, evaluaciones nacionales, entre otros)” (Cantoral, 2016, p. 38), sino que es necesario el tránsito del programa clásico a un programa alternativo (ver tabla 1).

**Tabla 1.** Contraste entre el programa clásico y el alternativo

Programa clásico	Programa alternativo
Racionalidad universal	Racionalidad contextual
Currículum fijo	Currículum flexible

Basado en objetos	Basado en prácticas
Discurso matemático escolar - fijo	Rediseño del discurso Matemático Escolar
Reificación como norma	Práctica social como norma
Centrada en el sujeto	Centrada en comunidades

Fuente: Cantoral (2013, p. 38)

La descentración del objeto, según Cantoral (2016), no es su abandono, sino más bien es “dejar de analizar exclusivamente a los objetos matemáticos para empezar a analizarlos conjuntamente con las prácticas que acompañan a su producción y que hacen posible su trascendencia de una generación a otra” (p. 50). Ya que, “la centración en los objetos matemáticos no sólo no deja ver el carácter variacional del Cálculo, sino que también es el origen de las dificultades para el desarrollo del pensamiento variacional” (Caballero, 2012, p. 140).

La resignificación es otra construcción teórica considerada como “una construcción social que evoluciona con el tiempo a través [...] de sus circunstancias.” (Cantoral, 2019, p. 58). El conocimiento está en constante resignificación, ya que no es algo acabado y se encuentra normado por lo social. En este estudio se considera a la resignificación como el uso que hace un individuo o colectivo para dotar de significados a los objetos matemáticos en situaciones contextuales.

### 2.1.1. PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) es una línea de investigación y una forma de pensamiento que “estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida” (Cantoral, 2019, p. 21). El PyLVar “se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación de esos fenómenos” (Caballero, 2012, p. 136).

El PyLVar consiste en el estudio de las formas en cómo las personas reconocen el cambio y la variación en un fenómeno, como usan estas nociones para resolver situaciones problemáticas, como comunican el cambio y la variación, así como la manera en cómo estas nociones intervienen y contribuyen en la construcción social de conocimiento matemático. En un sentido amplio, consiste en el estudio de las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente el cambio y la variación en situaciones de predicción. (Caballero, 2018, p. 18)

Este pensamiento, según Cantoral (1999), parte de la siguiente premisa:

En la naturaleza lo único constante es el cambio. Las plantas y los árboles y los animales crecen, el torrente de los ríos y de las tempestades fluye incesantemente, los vientos desplazan gigantes y multiformes nubes, los cultivos de bacterias crecen a sus máximos límites posibles, la cantidad circulante en una economía cambia de un momento a otro, los planetas se enfrían y se calientan en un eterno proceso cíclico, la sangre corre por nuestras venas. La energía se transforma y con ella percibimos los distintos estados de un proceso de cambio, los puentes vibran, y en fin, un vasto tejido de situaciones de cambio escenifica nuestra cotidianeidad. (p. 45)

El PyLVar se desarrolla a partir de las ideas de Newton (1643 - 1727). En estas ideas se presenta la noción de *Prædiciere* como la acción y efecto de predecir el estado ulterior de acuerdo al estado de facto (estado inicial) con el reconocimiento de patrones de regularidad que permiten reconocer al todo solo con mirar la parte (Cantoral, 1990). Las ideas de Newton, según Muñoz-Ortega (2010), se centran en:

Calcular la evolución posterior del sistema de movimiento sin plantearse otras preguntas sobre las causas reales de él. Pero la evolución misma es calculada sobre la base de un sistema de transformaciones que permiten pasar de los valores de las variables en el estado inicial a los valores que adquieren en cualquier otro instante. (p. 288)

La noción de *Prædiciere* se ubicó como el motor de una larga y prolífica secuencia de desarrollos teóricos que miraban a los fenómenos físicos desde la perspectiva de la matemática, tomándose como instrumento predictor a la Serie de Taylor (Cantoral, 1990; Muñoz-Ortega, 2010). Esta noción juega un papel fundamental para el estudio de la matemática de la variación y el cambio (Hernández y Cantoral, 2017).

La noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la variable independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de la imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir (Caballero, 2018). Analíticamente, la predicción consiste en determinar el valor futuro  $f(x + h)$  conociendo el valor actual  $f(x)$  y su variación, donde  $x$  (variable independiente) representa el estado actual y  $x + h$  el estado posterior. Desde el punto de vista de Morales (2009) "la idea de predicción se refiere al estudio de la cuantificación de las "formas" variables de la naturaleza: partículas móviles, cuerpos terrestres y celestes y los fenómenos de flujo continuo" (p. 59).

En el ambiente de los fenómenos de flujo resulta esencial describir cómo sucede su evolución, esto significa poder anunciar lo que acontecerá con el comportamiento del flujo antes de que efectivamente suceda: es decir, se requiere predecir el comportamiento de la evolución del fenómeno de flujo [...] predecir tal comportamiento variable del flujo, significa reconocer en los estados primitivos, iniciales o de facto, alguna información con la que efectivamente se pueda predecir (Cantoral, 1990, p. 135)

El estudio de los fenómenos de flujo continuo considera la variación como modelo predictivo. El modelo establece que, los coeficientes de un polinomio tienen significado variacional. De acuerdo con Cantoral (2019) si se considera una función  $f$  derivable en todo su dominio y si se desarrolla en torno al punto  $x$  con un incremento  $h$  se obtiene:

$$f(x + h) = a(x) + b(x)h + c(x)\frac{h^2}{2!} + \dots$$

Si se escribe el desarrollo anterior en términos de derivadas sucesivas se obtiene:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots$$

Si se desarrolla la expresión anterior en torno de  $x - a$  se tiene:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2!} + \dots$$

Entonces, para encontrar las derivadas sucesivas de una función en un punto dado, se desarrolla en Serie de Taylor.

La Serie de Taylor exige del estudio del cambio y la variación que son nociones fundamentales del PyLVar. La noción de cambio “denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto (Pérez, 2019, p. 9). Las situaciones de cambio que se observa, por lo común, presentan regularidades (patrones). Varios personajes históricos se ocuparon de su estudio, tales como: Newton, Euler, Clairaut, Feynman, Maxwell, Copérnico, Aristóteles, Galileo, Laplace, Einstein, Taylor, entre otros. La noción de cambio, según (Cantoral, 1999), “da lugar al concepto de variación, el cual describe las cualidades del cambio, nos proporciona elementos para saber cómo es que cambia eso que cambia. En este sentido, la variación trata de la medida de los cambios” (p. 45).

Se considera que, “todo cambio se expresa a través de estados, pero la diferencia entre estados puede ser medida con la diferencia entre valores de la variable elegida” (Cantoral, 2019, p. 43). Se toma en cuenta la diferencia fundamental:

$$\begin{array}{cc} f(x+h) & - & f(x) \\ \text{Posterior} & & \text{Anterior} \end{array}$$

Representa a la variación donde los tipos de cambio que se dan son:

Cambio en la variable independiente de

$$x_0 \quad \alpha \quad x_0 + h$$

Cambio en la variable dependiente

$$f(x_0) \quad \alpha \quad f(x_0 + h)$$

El cambio y la variación “se encuentran inmersos en todos los ámbitos de la vida, pudiéndose encontrar en situaciones no solo escolares sino también profesionales y experiencias cotidianas.” (Caballero, 2018, p. 40). Entonces, “el estudio del cambio a través de la variación es justamente de lo que se ocupa el pensamiento y lenguaje variacional” (Cantoral, 2019, p. 58).

Para procesar el cambio se requiere de cierta evolución, una dinámica que sea expresada mediante estados y comparaciones. La distinción de un estado respecto de otro se establece por comparación [...] (Cantoral, 2019, p. 20)

De acuerdo con Caballero (2018):

El cambio es percibido por los sentidos [...] la variación es una noción que no se percibe de manera directa por los sentidos, por tanto, no está presente de manera explícita en los fenómenos [...] cambio y variación son nociones que están relacionadas, no significan lo mismo. El cambio alude a una cualidad que experimenta una transformación, en tanto que la variación consiste en una abstracción de las propiedades y características del cambio que se percibe [...] (p. 16)

En el estudio del cambio y la variación se reconocen ciertas prácticas variacionales. Dichas prácticas "consisten en una forma particular de razonar y actuar ante una situación de cambio, siendo algunas de las prácticas reconocidas la predicción, la comparación, la seriación y la estimación." (Cantoral, 2018, p. 52).

La comparación, de acuerdo con Caballero (2018), "es la acción de establecer diferencias entre dos estados, uno anterior y uno posterior [...]" (p. 52). La seriación "consiste en analizar estados consecutivos de un fenómeno y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos que describa el comportamiento variacional [...] que posibilite determinar el carácter estable del cambio" (p. 56). La predicción "consiste en la acción de anticipar un estado o valor específico de una variable, sea futuro o anterior a los datos que se tienen" (p. 58). Y la estimación "consiste en la acción de anticipar comportamientos o tendencias en la variación del fenómeno en un intervalo" (p. 59).

Las cuatro prácticas descritas caracterizan la forma en cómo la variación es operada en situaciones de predicción, donde el uso de estas comienza por la comparación de estados para identificar y cuantificar el cambio mediante el reconocimiento de modificaciones en los valores de las variables [...] y después la seriación, vista como una organización de comparaciones, caracteriza el patrón de regularidad de la variación en un conjunto de estados sucesivos [...] la estimación y predicción, bajo el estatus de prácticas predictivas, organizan la información obtenida en modelos predictivos para anticipar comportamientos globales o estados puntuales, respectivamente. (Caballero, 2018, p. 60)

Para el estudio de la variación se requiere de un sistema de referencia variacional (Cantoral, 2019). Dicho sistema "consiste en el reconocimiento del cambio y la variación, de su organización y comunicación." (Caballero, 2018, p. 4). El cual



permite como la variación es reconocida y construida para el desarrollo de prácticas variacionales en situaciones de predicción.

La noción de sistema de referencia variacional [...] tiene lugar mediante el desarrollo de las nociones de temporización y de causalidad, esta última mediante los constructos de relación de variables [...] es de naturaleza situacional, consiste en una construcción fenomenológica influenciada por las experiencias vividas y el entorno sociocultural. (Caballero, 2018, p. 98)

El sistema de referencia variacional atiende los siguientes cuestionamientos: el ¿qué cambia? hace referencia a reconocer la variable, el ¿respecto de qué cambia? se refiere a reconocer la dependencia entre las variables, el ¿cómo cambia? al comportamiento global de un fenómeno, el ¿cuánto cambia? caracteriza el comportamiento local de un estado a otro y el ¿por qué cambia de esa manera? se orienta a reconocer y justificar la forma de variación que se reconoce.

Una de las variables involucradas en muchos fenómenos es el tiempo, el cual siempre está presente (de forma explícita o implícita) y es considerado como la duración de dicha modificación. Las variables que se relacionan pueden ser discretas o continuas, la elección de dichas variables se considera como la constantificación de primer orden y la elección de las variaciones como la constantificación de segundo orden (Cantoral, 2019).

Los órdenes de variación, el carácter estable del cambio y la variación acotada son aspectos de la variación. Donde “el primer orden consiste en la medición del incremento en el valor de la variable, el segundo orden en la medición del incremento en el incremento del primer orden de variación, y así sucesivamente para órdenes superiores [...]” (Caballero, 2018, p. 42). La articulación de más de un orden de variación se denomina variación sucesiva. El carácter estable del cambio consiste en reconocer algún patrón o regularidad en el comportamiento de la variación que permite determinar el comportamiento de los estados ulteriores del fenómeno (Caballero, 2018). La variación acotada permite reconocer cuando la variable se estabiliza hacia un valor determinado (Fallas y Cantoral, 2018).

### 2.1.2. MODELO DE ANIDACIÓN DE PRÁCTICAS E INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

El modelo de anidación de prácticas permite explicar la construcción del conocimiento matemático. Al hablar de la vida cotidiana (lo cotidiano) de las personas se refiere a lo que hacen (actividades) día a día. La vida cotidiana escolar se refiere a la interacción de profesores, estudiantes, administrativos, personal de limpieza, encargados de laboratorios (Bazdresch, 2009). Dentro de la escuela se realizan diversas actividades: practicar deportes, realizar tareas, conversar y dialogar, organizar eventos culturales, realizar prácticas en laboratorios, hacer trámites administrativos, ingerir alimentos, entre otras.

Gran parte del tiempo, los estudiantes de ingeniería lo dedican a la escuela, ya sea en turno matutino, vespertino o mixto. Dentro de las actividades que realizan se encuentran las prácticas de laboratorio, ya que, "los programas de ingeniería tienen establecidos unos espacios para las prácticas de laboratorio que complementan algunas asignaturas de su programa de formación" (Cruz y Valencia, 2005, p. 118). Estas prácticas se llevan a cabo en algunas sesiones dentro de la semana de clases. Esto conlleva a que las situaciones de aprendizaje se puedan realizar en un laboratorio, ya que dichos espacios cuentan con instrumentos de medición y con materiales necesarios (elementos para los circuitos eléctricos). Debido a los cambios educativos provocados por la COVID-19 se optó por crear laboratorios a través de sesiones virtuales donde los estudiantes interactúan con las situaciones desde casa.

La práctica es una actividad humana consciente e intencional. Los significados del objeto matemático emergen mediante una anidación de prácticas, que de acuerdo con Paz (2019, p. 13):

Todo individuo desde su quehacer parte de acciones (hacer). Al organizarlas en conjunto racionalmente se convierten en actividades (saber hacer). Y cuando estas son compartidas por un individuo, y el colectivo, se consolidan como prácticas socialmente compartidas (compartir el saber hacer) donde se alcanza un significado compartido por una cultura.

La práctica social "es un emergente social del ejercicio intencional de prácticas que tienen como característica coadyuvar al tránsito del conocimiento al saber a través de una funcionalidad con valor de uso" (Cantoral, 2016, p. 26). La práctica

social norma a la práctica de referencia, ésta norma a las prácticas socialmente compartidas, las prácticas socialmente compartidas norman a las actividades y las actividades a las acciones.

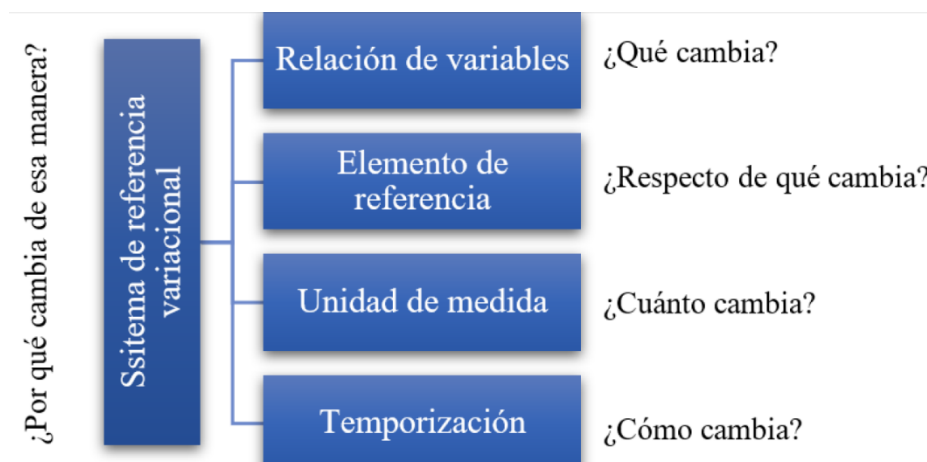
La Socioepistemología se centra en el desarrollo de prácticas asociadas al estudio del cambio: comparar estados, secuenciar cambios, estimar comportamientos y predecir valores; estas prácticas hacen posible la construcción social del conocimiento matemático (Caballero - Pérez y Cantoral, 2017). La comparación permite identificar modificaciones en los valores de las variables; la seriación permite identificar cómo cambian las variables; la predicción permite anticipar estados futuros puntuales y la estimación comportamientos globales.

Con base en el modelo de anidación de prácticas que presenta Caballero (2018) se retoma lo siguiente: las prácticas a nivel de acciones, las prácticas a nivel de actividades, las prácticas socialmente compartidas, la práctica de referencia y la práctica social. En este estudio las situaciones (diagnósticas y de aprendizaje) se encaminan por medio de la práctica social del *Prædicere* (lo que orienta a predecir).

La práctica de referencia se considera como una práctica situada en un determinado contexto (Tuyub, 2008). Para dicha práctica, de acuerdo con Cantoral (2016), “no existe un uso, sin usuario, y este no es tal sin el contexto donde acontece el uso [...]” (p. 102). Entonces, la práctica de referencia en esta investigación, se considera a la práctica del ingeniero (electrónico, eléctrico, mecánico y en sistemas computacionales) al analizar circuitos eléctricos, dicho análisis se puede llevar a cabo en laboratorios dentro del contexto escolar, en talleres o en el campo laboral. Dichos contextos, por lo regular, se encuentran equipados con instrumentos de medición: osciloscopios, multímetros digitales, analizadores de señales, entre otros. Así también de dispositivos para realizar prácticas: fuentes de alimentación, generadores de señales, caufines para soldar, placas de adquisición de datos, sensores y actuadores.

Para el análisis de los resultados se retoman elementos del instrumento de análisis que presenta Caballero (2018), específicamente, el desarrollo de prácticas y el sistema de referencia variacional (causalidad y temporización). La noción de causalidad se centra en la relación entre las variables. La noción de temporización

se centra en los órdenes de variación, la variación sucesiva, el carácter estable del cambio y la variación acotada. Dicho instrumento se toma en cuenta en el análisis *a posteriori* y validación. Los elementos del sistema de referencia variacional se presentan en la figura 3.



**Figura 3.** Elementos del sistema de referencia variacional

Fuente: Caballero (2018, p. 99).

Con base en el modelo de anidación de prácticas y los elementos del sistema de referencia variacional se construye el instrumento de análisis (tabla 2).

**Tabla 2.** Instrumento de análisis

Categoría de análisis	Subcategoría	Indicadores
Desarrollo de prácticas	Práctica social.	<i>Prædiciere</i>
	Práctica de referencia.	La práctica que realizan los ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y en sistemas computacionales que consiste en el análisis de circuitos eléctricos (campo de la electricidad).
	Práctica socialmente compartida.	Predicción.
	Prácticas a nivel de actividades.	Comparación y seriación.
	Prácticas a nivel de acciones.	Medir, conectar, grabar, tabular, graficar, relacionar, dibujar...
	Causalidad: ¿Qué cambia?	Relación entre variables: a. Constantificación de primer orden.

Sistema de referencia variacional: ¿por qué cambia de esa manera?	¿Respecto de qué cambia?	
	Temporización: ¿Cuánto cambia? ¿Cómo cambia?	Comportamiento y cuantificación del cambio: a. Cálculo de diferencias. b. Órdenes de variación. c. Variación sucesiva. d. Constantificación de segundo orden. e. Carácter estable del cambio. f. Variación acotada.

Fuente: Adaptado de Caballero (2018, p. 108)

## 2.2. INGENIERÍA DIDÁCTICA Y SUS ELEMENTOS

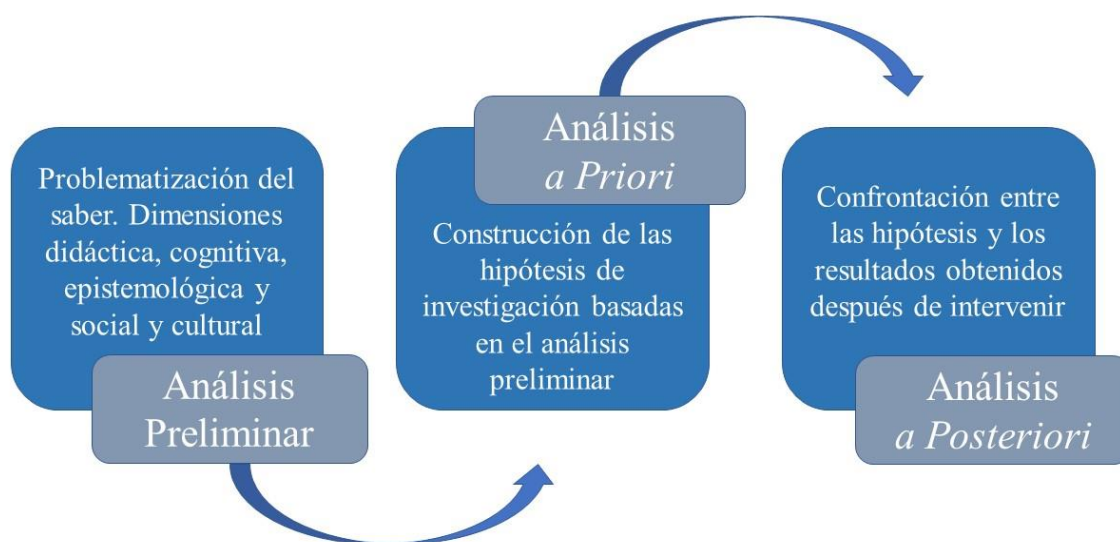
En este trabajo se empleó la metodología de ingeniería didáctica que surge y se desarrolla como una metodología de investigación. La noción de ingeniería didáctica tiene su desarrollo en los años ochenta al abordar la cuestión de las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza. Esta metodología se diferencia de los métodos experimentales usuales en educación por su modo de validación; el cual se basa en la confrontación entre un análisis *a priori* en el cual se encuentra un cierto número de hipótesis y un análisis *a posteriori* que se apoya en los datos obtenidos de la puesta en escena (Artigue, 1995).

La metodología “se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Artigue, 1995, p. 36). Se ubica en el registro de los estudios de caso y cuya validación es interna; “es a la vez un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase” (Douady, 1995, p. 61).

La ingeniería didáctica está basada en la transposición y la teoría de situaciones didácticas, la cual designa un conjunto de actividades de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor, para efectuar un proceso de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo de estudiantes. El proceso metodológico se divide en cuatro fases: análisis preliminar (dimensión epistemológica, dimensión cognitiva y dimensión didáctica), concepción y análisis *a priori*, experimentación, y análisis *a*

*posteriori* y validación (Artigue, 1995). En esta investigación se toma en cuenta un análisis “histórico-epistemológico”.

La ingeniería didáctica con un enfoque socioepistemológico se le considera una cuarta dimensión (dimensión sociocultural) al análisis preliminar. En la teoría, de acuerdo con Cantoral y González (1998), “es posible considerar el empleo de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, por medio de esta pueden guiarse las experimentaciones en clase... “(p. 12). Entonces, “con frecuencia los diseños de ingeniería didáctica son usados por la Socioepistemología cuando se pretende diseñar situaciones de aprendizaje para la intervención en situaciones controladas” (Cantoral, 2016, p. 178). Esta metodología se emplea para realizar diseños y evaluarlos en el aula, con base en el ciclo 3AP (ver figura 4).



**Figura 4.** Ciclo 3AP - Ingeniería Didáctica Robusta

Fuente: Cantoral (2016, p. 179)

En este ciclo 3AP ya se encuentra incluida la dimensión social y cultural normada por prácticas sociales que permiten el rediseño del dME.

### 2.2.1. EL ANÁLISIS PRELIMINAR

El análisis preliminar consta de algunos estudios que aportan elementos para el diseño didáctico (Artigue, 1995). Desde el punto de vista de Farfán (1997), una de las fases que contempla la metodología es:

Un análisis preliminar de la situación a abordar involucrando tres componentes: la didáctica, es decir, acerca del estado de la enseñanza; la componente epistemológica en tanto da explicación del devenir del contenido matemático en juego, así como su funcionamiento y diversas formulaciones; y la componente cognitiva de la población que va a ser sometida a la ingeniería. (p. 14)

### 2.2.2. LA CONCEPCIÓN Y EL ANÁLISIS A PRIORI

El análisis *a priori* es una de las fases de la ingeniería didáctica que establece hipótesis en el diseño de las situaciones de aprendizaje, donde "... el objetivo del análisis *a priori* es determinar en que las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado" (Artigue, 1995, p. 45). En este análisis "se construyen las hipótesis del diseño" (Cantoral, 2016, p. 178).

Este análisis tiene como base al análisis preliminar, es decir, se retoman algunos elementos de lo "histórico-epistemológico", lo cognitivo, lo didáctico y lo sociocultural. Así también, el modelo de anidación de prácticas y el sistema de referencia variacional. Estos elementos darán pauta para el diseño didáctico y permitirá la experimentación (puesta en escena) y el análisis *a posteriori* mediante el instrumento de la tabla 2.

### 2.2.3. LA EXPERIMENTACIÓN

La experimentación es considerada como la tercera fase de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995). En esta fase se lleva a cabo la puesta en escena (observación y recolección de datos) del diseño didáctico, con la intención de reconocer argumentos y significados. En esta fase se interactúa directamente con los estudiantes y se analizan los objetos matemáticos puestos en escena (Serie de Taylor). Así también, pretende comprender la realidad para validar los supuestos

establecidos en el análisis *a priori* (lo que se espera) y realizar el análisis *a posteriori* (lo que ocurre).

#### **2.2.4. EL ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN**

El análisis *a posteriori* permite la validación de las hipótesis (supuestos) formuladas en el análisis *a priori*. Este análisis, según Artigue (1995):

Se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella [...] en la confrontación de los dos análisis, el *a priori* y *a posteriori*, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (p. 48)



## **CAPÍTULO 3.**

# **ANÁLISIS HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICO DE LA SERIE DE TAYLOR**

### CAPÍTULO 3. ANÁLISIS HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICO DE LA SERIE DE TAYLOR

En este capítulo se presenta un análisis "histórico - epistemológico" del Cálculo, la Serie de Taylor y los circuitos eléctricos, considerándose parte del análisis preliminar. Lo histórico se basa en acontecimientos (hechos) y lo epistemológico sobre las circunstancias que hacen posible la construcción de conocimiento matemático. Se analizan ideas relacionadas con el Cálculo mediante la predicción (hilo conductor).

#### 3.1. DESARROLLO HISTÓRICO DEL CÁLCULO

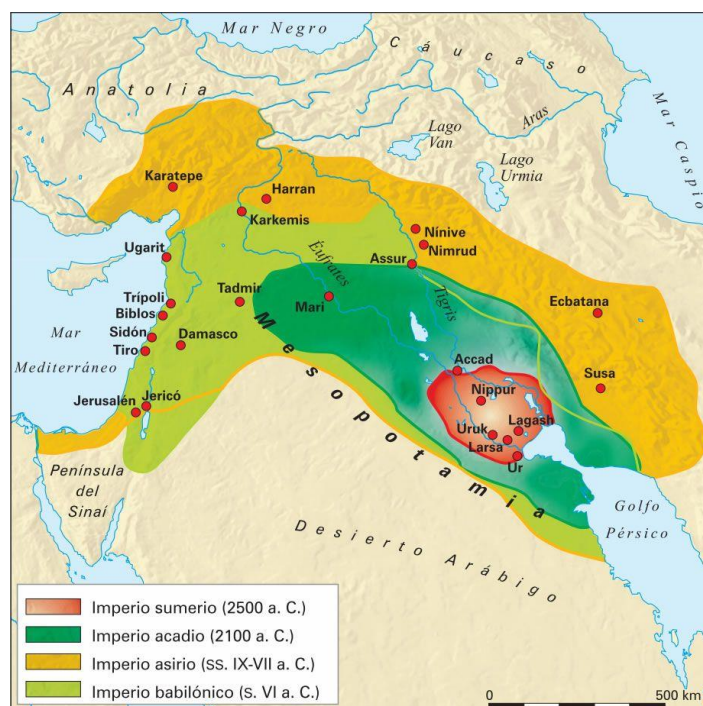
El desarrollo histórico del Cálculo se debe a diversas aportaciones de matemáticos, físicos, filósofos, científicos, investigadores e historiadores. Esto establece que, "los modos de transmisión y construcción del saber matemático han sido diferentes a lo largo de la historia" (Cantoral, 1995, p. 67). Hernández (2006) señala que, "la historia de la matemática nos enseña, sin lugar a dudas, que los conceptos y métodos del Cálculo tienen un origen empírico muy concreto" (p. 17). El desarrollo del Cálculo se encuentra relacionado con el movimiento de los cuerpos, la variación, la recta tangente, el cálculo de áreas, los infinitesimales, la predicción, las funciones, el límite, entre otros. Como señala Cantoral (2016):

El surgimiento del Cálculo no estuvo asociado exclusivamente al estudio de los procesos infinitos o al arribo del concepto de límite a la matemática, ni mucho menos al desarrollo de la noción de infinitesimal como entidad para el uso y la fundamentación, o la aparición del concepto de función, entre otros más, sino más bien y en definitiva, a la existencia de campos de prácticas que guiaban y estructuraban al proceso de construcción del pensamiento matemático [...]" (p. 112)

El concepto de derivada se ha estudiado a través de los años y se ha consolidado como uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas. Según Grabiner (1983) primero se dio uso, luego se descubrió, exploró y desarrolló, y posteriormente se definió. En la historia varios personajes se dedicaron al estudio de la derivada, algunos con ideas intuitivas y otros desde el punto de vista de la formalización. La derivada es un concepto fundamental de las matemáticas escolares, ya que tiene diversas aplicaciones tales como: optimización (máximos y mínimos), análisis de

funciones crecientes y decrecientes, concavidad hacia arriba o hacia abajo, puntos de inflexión y razones de cambio. Estas aplicaciones pueden resolver gran variedad de problemas en la ciencia, la ingeniería o en el cotidiano. La derivada “tuvo su origen en el problema de las tangentes y, la integral tuvo su origen en el problema del cálculo de áreas de superficies con lados curvos” (García y Dolores, 2016, p. 321).

Este desarrollo tuvo sus inicios en varias regiones del mundo. En la región de Mesopotamia (ver figura 5) se realizaron diversas observaciones astronómicas centradas en los movimientos de los planetas. En el año 2,000 a.C., según Mason (2012), Venus volvía a la misma posición cinco veces en ocho años, lo que permitió un registro sistemático de dicho movimiento. Los mesopotámicos fueron capaces de calcular los valores medios (promedios) de los principales fenómenos periódicos de las revoluciones planetarias, así como predicciones de acontecimientos astronómicos (eclipses). Cabe señalar que, “los habitantes de Mesopotamia no emplearon métodos geométricos para interpretar sus observaciones astronómicas” (p. 27). Sino más bien, analizaron datos numéricos.



**Figura 5.** Mapa de Mesopotamia

Fuente: <https://www.pinterest.com.mx/pin/848506386016418981/>

En Grecia se dieron varias aportaciones, tal es el caso del matemático griego Tales de Mileto (624 - 548 a.C.), quien realizó estudios de astronomía a partir de observaciones y con el uso de la geometría. En el año 585 a.C., hizo la predicción de un eclipse de sol (Collette, 1986). La predicción, desde esa época, era de gran relevancia para comprender la naturaleza.

Por su parte, Demócrito (460 - 370 a.C.), realizó estudios sobre los átomos, donde establecía que:

Todos los fenómenos deben ser explicados... en términos de átomos infinitamente pequeños [...], que se mueven en el espacio vacío. La creación del universo es el resultado de una ordenación y de una coagulación de átomos que poseen un cierto parecido [...] Los problemas matemáticos que interesan a Demócrito presentaban dificultades, en cierta medida, de naturaleza infinitesimal [...] concebía un sólido como una suma de un número infinito de capas planas paralelas unas a otras, infinitamente delgadas e infinitamente próximas. (Collette, 1986, pp. 83 y 84)

Esta idea de los átomos como objetos infinitamente pequeños está relacionada con la noción de diferencial, es decir, si se asume que cualquier objeto está conformado por estos átomos, cualquier variable (propiedad de un objeto) puede considerarse muy pequeña que permita calcular el cambio puntual en la otra variable.

Eudoxo de Cnido (408 - 355 a.C.) realizó observaciones astronómicas. Collette (1986) señala:

Eudoxo considerado en ocasiones como el padre de la astronomía científica, elaboró, para explicar los movimientos aparentes del sol, la luna y los cinco planetas conocidos en su época, una elegante hipótesis sobre las esferas concéntricas. En esta hipótesis, los movimientos descritos son movimientos circulares uniformes. (p. 98)

Eudoxo empleó el método exhaustivo para calcular áreas que consistía en inscribir y circunscribir a los círculos polígonos, cuyo número de lados puede aumentar tantas veces como se quiera, de tal forma que habrá siempre una diferencia determinada entre el área del polígono y el área del círculo. Este método contribuyó al desarrollo del cálculo integral (Collette, 1986). Esta noción de

aproximar polígonos da la idea de lo infinitamente grande (número de lados del polígono).

Arquímedes (287 - 212 a.C.) fue un matemático inventor de máquinas: catapultas, palancas, entre otras. Realizó estudios relacionados con la mecánica, la hidrostática y la astronomía. Arquímedes aplicó el método exhaustivo empleado por Eudoxo (aproximar áreas por medio de polígonos) para calcular áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos.

Las principales contribuciones de Arquímedes se refieren a la teoría de las palancas, establecida sobre principios de estática, al estudio de los centros de gravedad de figuras planas y sólidos y a su equilibrio físico, al estudio de la hidrostática, por ejemplo, a las propiedades de los líquidos y al equilibrio de los cuerpos en ellos sumergidos, al estudio de la representación de los grandes números, a la aproximación  $\pi$  por un polígono inscrito de noventa y seis lados, al estudio de la espiral aritmética y de las tangentes a esta espiral, a la cuadratura de los segmentos de curvas. (Collette, 1986, pp. 138-139)

Herón de Alejandría (75 - 150 a.C.) trabajó problemas de medidas y construyó diversos aparatos mecánicos. Sus obras tratan del cálculo de áreas de distintas figuras: cuadrados, rectángulos, triángulos, polígonos regulares, segmentos de esferas, cilindros y segmentos parabólicos; y sobre la medición de volúmenes de figuras sólidas: conos, esferas, sólidos regulares, cilindros, paralelepípedos, pirámides y troncos de pirámides (Collette, 1986). En esta etapa ya se hacía referencia a las medidas de los objetos geométricos y en la construcción de instrumentos de medición. Posteriormente, estos instrumentos contribuirán al desarrollo de las ciencias (química, física, biología, medicina, matemáticas, entre otras).

Los griegos también se enfocaron en resolver problemas relacionados con tangentes y áreas. En ellos se identifica el problema de las tangentes, es decir, calcular la pendiente de la recta tangente en un solo punto de una curva. Este problema generó varias discusiones que contribuyeron al desarrollo de la derivada. Tal como señala Grabiner (1983):

Los griegos, por supuesto, habían sabido cómo encontrar las tangentes a los círculos, a las secciones cónicas y algunas curvas más sofisticadas, como la espiral de Arquímedes [...] Los griegos habían definido una tangente como una

línea que toca una curva sin cortarla, y generalmente esperaban que tuviera solo un punto en común con la curva [...] (p. 196)

El movimiento se puede considerar como una propiedad que tienen todos los cuerpos. Desde la historia de la ciencia e incluso de la humanidad se han realizado múltiples investigaciones sobre el movimiento. Algunos de los principales representantes que lo estudiaron fueron Aristóteles, Ptolomeo, Copérnico, Kepler, los científicos de Merton, Oresme, Galileo, Newton y Taylor. Estos personajes aportaron algunas ideas fundamentales para la construcción científica del estudio del movimiento.

La visión de Aristóteles (384 - 322 a. C.) sobre el movimiento, según Koyré (1980), es considerada como una teoría basada en datos obtenidos de la intuición (sentido común). Los datos eran sometidos a un proceso sistemático (lógico). Aristóteles, como señala Duarte (2011), "es considerado el fundador de la mecánica debido a que fue el primero en proponer una teoría razonable sobre el movimiento de los cuerpos en general" (p. 64). No consideraba importante la experimentación para estudiar los fenómenos naturales, sino más bien usaba el razonamiento lógico (silogismo) para analizar las causas del movimiento. El universo se divide en dos regiones: supralunar y sublunar. En la supralunar los cuerpos tienen forma esférica y el movimiento de todos ellos es perfecto (en el mismo sentido y con velocidad uniforme).

En la región sublunar los cuerpos no son perfectos ni sus movimientos uniformes.

En la región sublunar, los objetos de naturaleza terrestre se encontraban cerca al centro del universo y estaban formados por cuatro elementos que se entremezclaban entre sí, éstos eran el fuego, el aire, la tierra y el agua. Los dos primeros con la propiedad de "la ligereza" que consiste en que su movimiento natural es hacia arriba, intentado huir del centro del universo, pero sin traspasar la esfera terrestre. Los dos últimos tienen la propiedad de "la pesadez" que nos dice que su movimiento natural es vertical hacia abajo, intentando llegar al centro del universo. (Duarte, 2011, p. 66)

Aristóteles analiza el movimiento de los cuerpos y establece que, el cielo es un cuerpo celeste y es considerado como una esfera que gira en círculo. La Tierra lo establece como el centro del universo y su estado es el reposo.

Aristóteles creía que la Tierra era estacionaria y que el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas se movían en órbitas circulares alrededor de ella. Creía eso porque estaba convencido, por razones místicas, de que la Tierra era el centro del universo y de que el movimiento circular era el más perfecto... La Tierra permaneció en el centro, rodeada por ocho esferas que transportaban a la Luna, el Sol, las estrellas y los cinco planetas conocidos en aquel tiempo, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. (Hawking, 2011, pp. 10 y 11)

En el universo las cosas están distribuidas y dispuestas de una forma bien determinada, ya que tienen un lugar propio conforme a su naturaleza (estado estático). Aristóteles identifica a dos estados de movimientos: naturales y violentos. Los movimientos naturales son considerados como equilibrios de los cuerpos para poder regresar a su lugar natural. Los movimientos violentos se consideran como desequilibrios debido a fuerzas externas ejercidas sobre los cuerpos. El reposo es un estado de los cuerpos que como señala Duarte (2011):

No es necesario... explicar el reposo, al menos el reposo natural de un cuerpo en su lugar propio; es su naturaleza misma lo que lo explica, como explica, por ejemplo, el reposo de la tierra en el centro del mundo (p. 10).

El movimiento tiene como fin el reposo, es decir, en algún momento el objeto en movimiento se equilibrará (detendrá). "Así, moverse es cambiar,... comportarse (o ser) de otro modo" (Koyré, 1980, p. 11). Todo cambio tiene una causa que lo provoca llamada motor. El motor tiene la función de mantener el movimiento, si el motor se suprime el movimiento desaparece. El movimiento violento requiere de la acción (fuerza) continua de un motor externo en contacto con el móvil.

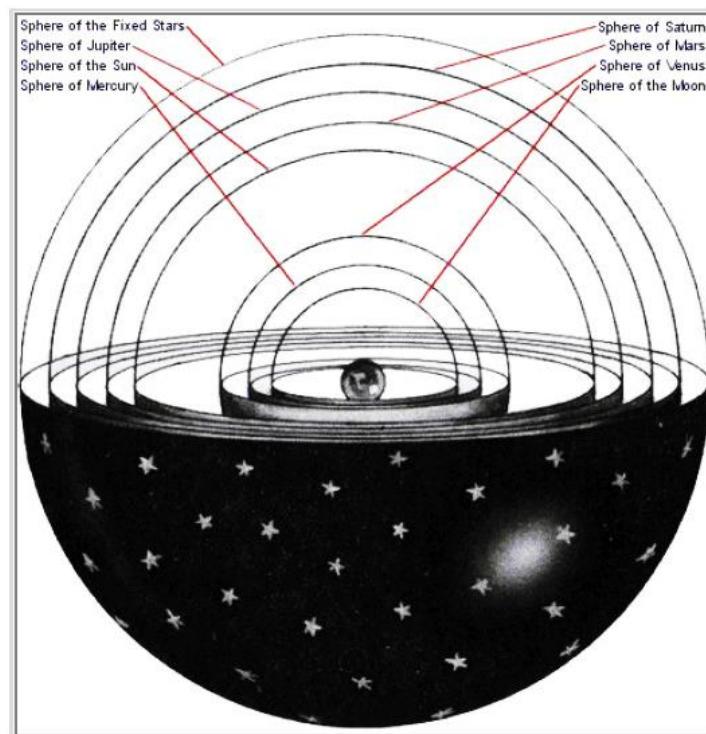
Los cuerpos pesados caen más rápido que los cuerpos livianos al dirigirse al centro del universo (la Tierra), simplemente porque los empuja su naturaleza (movimiento natural). En caída libre los cuerpos aumentan su movimiento conforme se acercan al centro. De acuerdo con Duarte (2011) "las teorías del movimiento de Aristóteles se acercan más al sentido común que a la misma noción cuantitativa y experimental que la ciencia actual maneja. Se preocupa más por el porqué del movimiento que por el cómo [...]" (p. 69).

El movimiento es una propiedad que tienen todos los cuerpos para cambiar de posición en algún instante de tiempo. Algunos movimientos pueden ser

observados a simple vista, tales como: imágenes en la televisión, flujo de agua, flujo de datos (mensajes de texto) en el celular. Pero, algunos movimientos no pueden ser observados a simple vista, sino que se requiere de instrumentos de observación (microscopios, telescopios, satélites, videocámaras y osciloscopios), tales como: desplazamientos de los planetas y galaxias; electrones, protones y neutrones; señales digitales; bacterias, células y tejidos, entre otros.

Claudio Ptolomeo (85 - 165 a. C.) también se enfocó en el movimiento, en el campo de la Astronomía (ver figura 6), que como señala [Hawking \(2011\)](#):

El modelo de Ptolomeo proporcionaba un sistema razonablemente preciso para predecir las posiciones de los cuerpos celestes... Pero, para poder predecir dichas posiciones correctamente, Ptolomeo tenía que suponer que la Luna seguía un camino que la situaba en algunos instantes dos veces más cerca de la Tierra que en otros. ¡Y esto significaba que la Luna debería aparecer a veces con tamaño doble del que usualmente tiene! Ptolomeo reconocía esta inconsistencia, a pesar de lo cual su modelo fue amplio, aunque no universalmente aceptado. (p. 11)

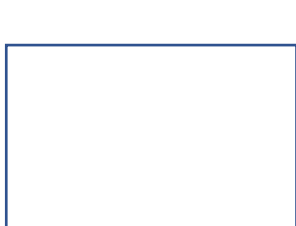


**Figura 6.** Modelo de Ptolomeo

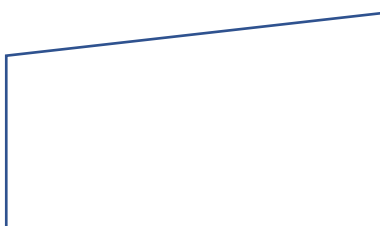
Fuente: Hawking, 2011, p. 10



Los científicos de Merton definieron al movimiento uniforme como distancias iguales son recorridas en tiempos iguales. La aceleración uniforme la definieron como el mismo incremento de velocidad se da en tiempos iguales. Nicolás de Oresme (1323 - 1382), según [Hernández \(2006\)](#), plantea tres tipos de movimientos: movimiento uniformemente uniforme, movimiento uniformemente diforme y movimiento diformemente diforme. Estos movimientos se representan en las gráficas A, B y C.



Gráfica A.  
Movimiento  
uniformemente  
uniforme.



Gráfica B.  
Movimiento  
uniformemente  
diforme.



Gráfica C.  
Movimiento  
diformemente  
diforme.

Oresme reconoce la necesidad de la representación gráfica de la variación y propone el uso de un recurso geométrico para representar la intensidad de una cualidad de un objeto: la latitud de formas. Su acercamiento consiste en representar el "objeto" que posee la cualidad como una línea horizontal, la longitud, y para cada punto de ella se determina la latitud representada con una línea perpendicular cuyo tamaño representa la intensidad de la cualidad del "objeto". ([Salinas, 2010, p. 56](#))

En el siglo XV se realizaron observaciones en el campo de la astronomía. Nicolás Copérnico (1473 - 1543) propuso un nuevo sistema del mundo al colocar al Sol como el centro del universo (sistema heliocéntrico). Su obra principal fue: *De las revoluciones de los orbes celestes*, publicado en 1543. En ella analiza los movimientos de los cuerpos celestes para predecir sus posiciones futuras. Establece que los movimientos de dichos cuerpos son circulares y uniformes. Suponía que la Tierra rotaba sobre su propio eje diariamente y se movía en torno al Sol (como los demás planetas) por una órbita anual. La Tierra y los demás planetas se movían alrededor del Sol en la misma dirección con velocidades que decrecían con la distancia al Sol (el Sol en el centro y las estrellas en la periferia del universo). Las

predicciones de las posiciones de los planetas tenían un margen de error considerable. La rotación y el movimiento uniforme eran atributos naturales de la forma perfectamente esférica (Mason, 2012).

Por su parte, Johannes Kepler (1571 - 1630) modificó la teoría de Copérnico, sugiriendo que los planetas no se movían en círculos, sino en elipses (Hawking, 2011). Kepler explicó los movimientos de los cuerpos celestes por medio de elipses. Analizó tablas de datos sobre los movimientos planetarios para identificar el patrón (regularidad) que permitiera predecir estados futuros con mayor precisión. Los movimientos de los planetas ya no fueron circulares ni uniformes. Cada planeta describe una elipse con el Sol en uno de los focos y la línea trazada desde el Sol al planeta genera áreas iguales en tiempos iguales (Mason, 2012).

Galileo Galilei (1564 - 1642) contribuyó al desarrollo de la derivada y se enfocó en estudiar el movimiento de los cuerpos. De acuerdo con Muñoz-Ortega (2010):

Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? (Piaget & García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento. En dicho marco Galileo elimina las preguntas sobre causas reales que hacían referencia a cualidades (atributos) e introduce mediciones (medir es comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos). (p. 287)

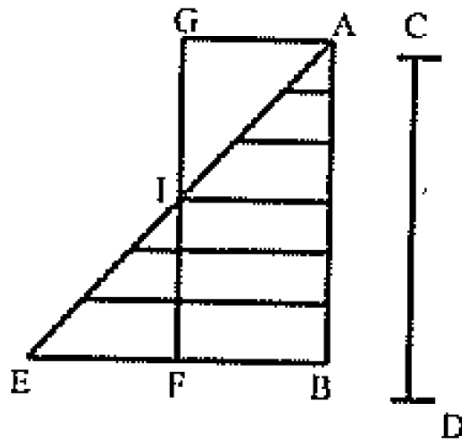
Es así que, "Galileo introduce el concepto de relación funcional entre las variables que caracteriza el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria; esto supone la introducción del tiempo como variable independiente." (Muñoz-Ortega, 2010, p. 287). Hacia el siglo XVI, Galileo fue considerado el fundador del método científico (Duarte, 2011, p. 69).

La caída de los graves (cuerpos) es un movimiento con aceleración constante. Levi (2001) señala que, "Galileo empieza a estudiar el movimiento naturalmente acelerado" (p. 57). Establece el siguiente teorema:

El tiempo en que un móvil partiendo del reposo recorre cierto espacio con movimiento uniformemente acelerado es igual al tiempo que requeriría para recorrer el mismo espacio con movimiento uniforme, pero con velocidad

mitad de la que adquiere con dicho movimiento acelerado (Levi, 2001, p. 57).

Esta afirmación (ver figura 7), según Cantoral (2001), "establece tácitamente la variación continua de la velocidad. Y en consecuencia la evaluación de lo variable por lo constante: el promedio." (p. 12).



**Figura 7.** Construcción geométrica del teorema de Galileo  
Fuente: Cantoral (2001, p. 12)

Se pone de manifiesto de todo lo dicho que espacios iguales serán atravesados en tiempos iguales por dos cuerpos, uno de los cuales, partiendo del reposo, se mueve con una aceleración uniforme, mientras que la intensidad de velocidad del otro, que se mueve con velocidad uniforme, es un medio de la intensidad máxima que alcanzaría con movimiento acelerado. (Cantoral, 2001, p. 13)

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) fue uno de los mejores alumnos de Galileo. Escribió obras de matemáticas, óptica y astronomía. Su obra sobre el método de los indivisibles lo publicó en 1635. Para Cavalieri una superficie está constituida por un número indefinido de rectas paralelas equidistantes y un sólido por planos paralelos equidistantes (Collette, 1986). Este método contribuyó al desarrollo de la integral, ya que una figura plana o sólida está compuesta por infinitos objetos con la misma forma (rectas o planos), es decir, la suma de las partes (planos) genera el todo (sólido).

Uno de los primeros matemáticos que se enfocaron en el estudio de la derivada fue Pierre de Fermat (1601 - 1665) que atacó el problema de las tangentes desde el punto de vista de que se puede determinar la pendiente en solo un punto de una curva, no importando que la corte o toque en otro de sus puntos. Fermat de acuerdo con Cruse y Lehman (1982) se enfocó "en resolver el problema de las tangentes [...] encontró una forma de determinar las ecuaciones de las tangentes a cualquier tipo de curva que se presente" (p. 32).

El problema de determinar máximos y mínimos también lo abordó Fermat, en 1630, sin saber acerca de las derivadas (Grabiner, 1983). Los matemáticos del siglo XVII esperaban que la nueva álgebra simbólica pudiera ayudar de alguna manera a resolver todos los problemas de máximos y mínimos. Fermat no llamó a  $E$  infinitamente pequeño, ni desapareció, ni a un límite; no explicó por qué podía dividir primero por  $E$  (tratándolo como distinto de cero) y luego descartarlo (tratándolo como cero). Además, no explicó lo que estaba haciendo como un caso especial de un concepto más general, la derivada, tasa de cambio o incluso pendiente de la tangente. De mayor interés que el problema de los extremos en el siglo XVII fue el hallazgo de tangentes. Aquí se pensaba que la tangente era una secante por la cual los dos puntos se acercaban más y más hasta que coincidían. Lo que significaba para una secante "convertirse" en una tangente no fue completamente explicada.

Por su parte, Lagrange establece que el cálculo debería reducirse al álgebra (álgebra de series infinitas). En 1797 pensó que había demostrado, que cualquier expresión analítica, finita o infinita tenía una expansión en la serie de poder (Serie de Taylor). Definió una nueva función, el coeficiente del término lineal en la serie la llamó función derivada dando el origen de nuestro término "derivada" e introdujo la notación  $f'(x)$ . Definió  $f''(x)$  como la primera función derivada de  $f'(x)$  y así sucesivamente. Finalmente demostró los coeficientes de los términos de la Serie de Taylor. Lagrange usó series de potencias truncadas en aproximaciones para dar una caracterización útil de la derivada de una función, por lo que la derivada queda definida por la posición en la Serie de Taylor (Grabiner, 1983). A mediados del siglo XVIII la ecuación diferencial se había convertido en la herramienta

matemática más útil en la historia de la física. En esta etapa, la Serie de Taylor era una herramienta desarrollada para ayudar a resolver ecuaciones diferenciales.

En 1823 Cauchy definió la derivada de  $f(x)$  como el límite, cuando existe, del cociente de diferencias  $f(x+h) - f(x) / h$  cuando  $h$  tiende a cero, enfocándose en lo algebraico. Utilizó su concepto de límite para definir la integral como el límite de sumas. También realizó una prueba del teorema fundamental del Cálculo. Dio la primera prueba de la existencia de una solución a una ecuación diferencial. Después de Cauchy, el Cálculo fue visto como un tema riguroso, con definiciones y con teoremas de acuerdo a esas definiciones (Grabiner, 1983). En el siglo XIX Cauchy resolvió el problema de la tangente con la definición de la derivada mediante el concepto de límite. En 1850 Karl Weierstrass presentó un tratamiento sistemático y riguroso del Cálculo que se basaba en el análisis de delta - epsilon.

El lapso de tiempo desde Fermat hasta Weierstrass es de más de doscientos años. Fermat lo utilizó implícitamente; Newton y Leibniz lo descubrieron; Taylor, Euler, Maclaurin lo desarrollaron; Lagrange lo nombró y caracterizó; y solo al final de este largo período de desarrollo lo definieron Cauchy y Weierstrass (Grabiner, 1983).

### 3.2. GÉNESIS HISTÓRICA DE LA SERIE DE TAYLOR

La Serie de Taylor se desarrolla a partir del último tercio del siglo XVII hasta principios del siglo XX. Tiene su génesis (origen) histórica en el binomio de Newton, tal como señala Cantoral (1990): "el antecedente de la serie de Taylor: el binomio de Newton para exponentes fraccionarios". (p. 139). Entonces, el binomio de Newton es la herramienta de construcción de la Serie de Taylor. Isaac Newton (1643 - 1727) comenzó a trabajar el Cálculo, en 1664, con Barrow. Newton presenta su serie binomial en dos cartas de 1676 dirigidas a Oldenburg (Struik, 1986). El binomio permitió el desarrollo en series de potencias con la siguiente expresión

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \dots$$

Donde

$$A = P^{m/n}, \quad B = \frac{m}{n}AQ, \quad C = \frac{m-n}{2n}BQ, \quad D = \frac{m-2n}{3n}CQ, \quad E = \frac{m-3n}{4n}DQ, \quad \dots$$

Por ejemplo (retomado de Struik, 1986, p. 286), al desarrollar el siguiente binomio

$$\sqrt{c^2 + x^2}$$

Es equivalente a

$$(c^2 + x^2)^{1/2}$$

Donde

$$P = c^2$$

$$PQ = x^2$$

$$Q = \frac{x^2}{P} = \frac{x^2}{c^2}$$

$$m = 1$$

$$n = 2$$

A es el primer término de la serie

$$A = P^{m/n} = c^{2(1/2)} = c$$

El segundo término de la serie es

$$B = \frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} c \frac{x^2}{c^2} = \frac{x^2}{2c}$$

El tercer término es

$$C = \frac{m-n}{2n} B Q = \frac{1-2}{2(2)} \frac{x^2}{2c} \frac{x^2}{c^2} = -\frac{1}{8} \frac{x^4}{c^3}$$

El siguiente término es

$$D = \frac{m-2n}{3n} C Q = \frac{1-2(2)}{3(2)} \left[ -\frac{x^4}{8c^3} \right] \left[ \frac{x^2}{c^2} \right] = \frac{x^6}{16c^5}$$

El otro término es

$$E = \frac{m-3n}{4n} D Q = \frac{1-3(2)}{4(2)} \left[ \frac{x^6}{16c^5} \right] \left[ \frac{x^2}{c^2} \right] = -\frac{5x^8}{128c^7}$$

Y así sucesivamente...

Por lo tanto, el desarrollo del binomio de Newton, con los términos determinados, es el siguiente

$$\sqrt{c^2 + x^2} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7}$$

Esto quiere decir que la expresión que está a la derecha de la igualdad es una aproximación de  $\sqrt{c^2 + x^2}$ , entre más términos se consideren mejor será dicha aproximación. Si consideramos que

$$c = 8$$

$$x = 5$$

Entonces

$$\sqrt{c^2 + x^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9.433981132$$

Con la aproximación en serie de potencias obtenemos

$$c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} = 8 + \frac{5^2}{2 \cdot 8} - \frac{5^4}{8 \cdot 8^3} + \frac{5^6}{16 \cdot 8^5} - \frac{5 \cdot 5^8}{128 \cdot 8^7} = 9.432401212$$

Los trabajos de Newton se relacionaron con los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, que según Cantoral (1990):

El año 1665, Isaac Newton reflexionó sobre la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que fluyen continuamente, o fluentes, como él las llamó. Entre tales magnitudes se tienen a longitudes, áreas, volúmenes, temperaturas, velocidad y fuerzas, entre otras. Desde entonces él denominó "mi método" a la asociación del manejo de las series infinitas con el estudio de las velocidades de cambio, de las que, a su vez, se servía para determinar la fuente, construyendo así lo que a la postre se llamaría Teorema Fundamental del Cálculo. (p. 142)

Newton matematizaba con un programa de investigación tipo geométrico - temporal (Cantoral, 2016). No fue el único que inventó el Cálculo sino también Leibniz contribuyó a su desarrollo, por lo que retomaron métodos para encontrar tangentes, extremos y áreas para los conceptos de derivadas e integrales.

En 1693 Newton produjo un manuscrito llamado *Tractatus de quadratura curvarum* en el que establece su teoría sobre fluxiones. Newton llamó a la "derivada" fluxión, una tasa de flujo o cambio; en su caso Leibniz vio a la derivada como una proporción de diferencias infinitesimales y la llamó cociente diferencial (Grabiner, 1983). La herramienta del cálculo infinitesimal fue creada y desarrollada por Newton y Leibniz. Newton se basaba en métodos dinámicos geométricos para la predicción de fenómenos naturales. El tiempo lo consideró como un elemento infinitesimal (Pérez, 2019).

El método de las fluxiones (relación entre variables y sus movimientos) permitió resolver problemas de la física (astronómicos, cinemáticos, mecánicos, ópticos e hidrodinámicos), ya que se puede calcular la posición de un objeto en cualquier instante al conocer su velocidad, "las fluxiones son las velocidades de variación de las cantidades (fluentes), lo cual corresponde a nuestras derivadas" (Cantoral y Farfán, 2004, p. 92). Newton proporcionó un sistema de cálculo para predecir, con precisión, las posiciones de la Luna y de los planetas (aportaciones a la Astronomía). En sus cálculos, podía pasar de los cambios de las magnitudes a las magnitudes mismas, y viceversa; por lo que estableció la concepción dinámica del universo. En este sentido, Muñoz-Ortega (2010) establece que:

El marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos fue: ¿cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento". (pp. 287-288)

En 1687 se publica la obra de Newton: *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*; derivada del problema de describir matemáticamente la órbita de los planetas alrededor del sol (contexto astronómico) con base en la predicción. Newton parte de una estructura basada en lo general y abstracto hasta llegar a lo particular y concreto en el mundo de los fenómenos. La obra consta de tres libros que contienen los fundamentos de la física y la astronomía escritos en el lenguaje de la geometría pura. Por tanto, en el campo de la mecánica enunció sus tres famosas leyes del movimiento y con base a ello su Ley de la Gravitación Universal (Pérez, 2019). Como señala Cantoral (1990), "es con los trabajos de Newton que se da el paso cualitativamente decisivo al señalar que es en el estudio de la evolución, digamos inicial, en donde se determina completamente el desarrollo ulterior del fenómeno." (p. 135).

Newton "asoció el manejo de las series infinitas al estudio de las velocidades de cambio [...] las series infinitas nacen como una necesidad funcional para el estudio del movimiento... planteó como objetivo de la mecánica el predecir cierta evolución sin plantear las causas inherentes del movimiento" (Espinoza, 2009, p. 13).



La naturaleza de los fenómenos de flujo [...] señala la necesidad de mirar diferencias del tipo

$$\omega (A + dA) - \omega (A)$$

En las que  $\omega$  puede representar a una variedad amplia de parámetros físicos particulares. Resulta factible contar con una colección de datos que formen parte de una información inicial, local o instantánea, con los que habrá de anunciar la manera en que se comportará el fenómeno. De ahí que la colección

$$h, A, \omega (A), \omega'(A), \omega''(A), \text{etc.}$$

Permita conocer el estado posterior del parámetro físico observado  $\omega (A + h)$ , pero sobre todo con ello se podrá analizar la diferencia esencial

$$\omega (A + dA) - \omega (A)$$

Dicha diferencia estará completamente determinada por el comportamiento del estado de variaciones en el punto  $A$ , esto es

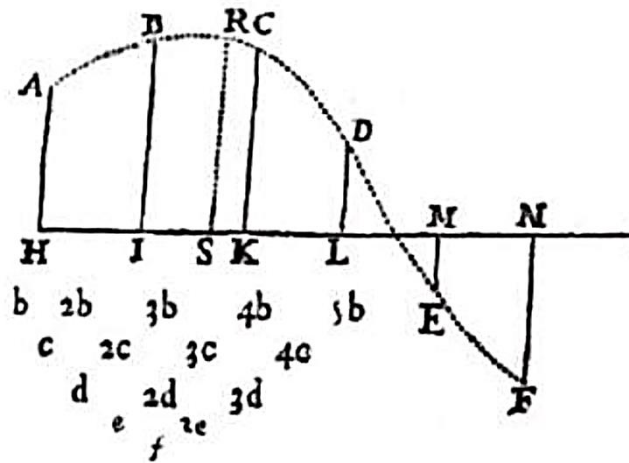
$$\omega (A + dA) - \omega (A) = \omega'(A) h + \omega''(A) \frac{h^2}{2!} + \omega'''(A) \frac{h^3}{3!} + \dots$$

Así la expresión

$$f (x + h) = f (x) + f'(x) h + f''(x) \frac{h^2}{2!} + \dots$$

Significa al fenómeno, al establecer una relación primaria entre el estado vecino  $f (x + h)$  con el estado primitivo caracterizado por un conjunto infinito numerable de datos  $x, h, f(x), f'(x), f''(x), \dots$  la serie de Taylor se constituye pues en el instrumento mediante el cual aquellos fenómenos de flujo en la naturaleza serán analizados. Así la descripción de la evolución mediante la predicción, cristalizará en el instrumento de predicción que le es adecuado. (Cantoral, 1990, pp. 136-138)

Las diferencias sucesivas fueron utilizadas por Newton con base en una gráfica. En dicha gráfica se establecen los órdenes de variación representados por las letras  $b, c, d, e$  y  $f$  tal como se muestra en la figura 8. Es decir, la letra  $b$  representa el primer orden de variación y la primera diferencia,  $2b$  es la segunda diferencia del primer orden de variación,  $3b$  la tercera diferencia y así sucesivamente. Entonces, la letra  $c$  representa el segundo orden de variación y su primera diferencia,  $2c$  es su segunda diferencia del segundo orden de variación y así sucesivamente para las letras  $d, e$  y  $f$ .

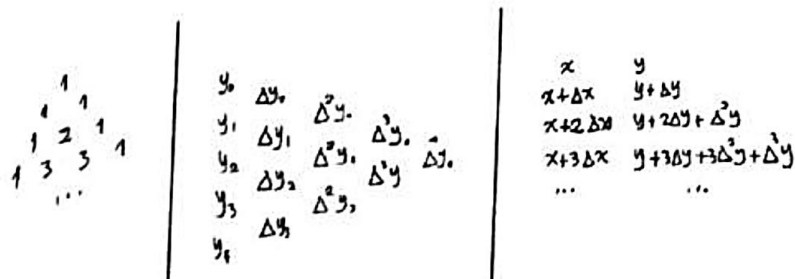


**Figura 8.** Escrito original de Newton: Diferencias sucesivas

Fuente: Cantoral (2016)

En el comportamiento de dichas diferencias sucesivas se observa la regularidad binomial de acuerdo con los coeficientes de los términos de la variable dependiente. Dichos coeficientes son representados en el triángulo de Pascal para la construcción del binomio de Newton (ver figura 9).

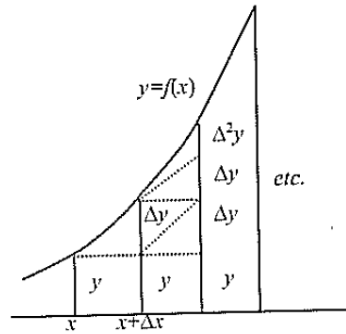
$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m}{n} \frac{m-n}{2n}BQ + \text{etc.}$$



**Figura 9.** Modelo de regularidad binomial

Fuente: Cantoral (2001)

De acuerdo con las diferencias sucesivas, el triángulo de Pascal, la regularidad binomial y el binomio de Newton se parte para la reconstrucción de la Serie de Taylor (ver figuras 10 y 11).



$$x \rightarrow y$$

$$x + \Delta \rightarrow y + \Delta y$$

$$x + 2\Delta x \rightarrow y + 2\Delta x + \Delta y^2$$

$$x + 3\Delta x \rightarrow y + 3\Delta x + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$$

Así el teorema del binomio de Newton se tendrá:

$$x + n\Delta x \rightarrow y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 y + K$$

donde  $n\Delta x = h$ , así

**Figura 10.** Del binomio de Newton a la Serie de Taylor

Fuente: Cantoral (2001)

$$x + h \rightarrow y + \frac{\Delta y}{\Delta x} h + \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \frac{h(h-x)}{2!} + \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{3!} + \dots$$

Vale la pena observar, como una nota colateral, que en este modelo adquieren un sentido holístico la posición del número  $m$  en las expresiones  $\Delta^m y$  ó  $\Delta y^m$ , lo que suele decirse o interpretarse hoy en día como mera notación.

En los siguientes corolarios hace la operación de toma al límite cuando  $n$  tiende a infinito [Taylor, 1715] pp. 23, quedando finalmente

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} h + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \frac{h^3}{3!} + \dots$$

**Figura 11.** La Serie de Taylor en notación funcional

Fuente: Cantoral (2001)

Durante 1715, Taylor publicó su *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, el cual contiene la primera publicación del desarrollo en serie, conocida hoy como serie de Taylor y, que a juzgar por el escrito original, se presenta con el fin de estimar el valor de una ordenada a partir del conocimiento de otra que se encuentre ubicada en sus proximidades (Cantoral y Farfán, 2004, p. 110).

La reconstrucción anterior parte de las diferencias sucesivas, la generalización del triángulo de Pascal, seguido del binomio de Newton y finalmente las derivadas sucesivas. Observamos que la notación que se presenta es funcional y se usa la idea del límite para generar los términos de la Serie de Taylor. Esto provoca cierta incertidumbre, como se observa en la obra original de Taylor (ver figura 12). En dicha obra no se habla de funciones ni de límite sino más bien de crecimiento de las cantidades variables relacionadas. La portada de la obra de Taylor (figura 13) señala la fecha *MDCCXVII* correspondiente al año de 1717, en el que presenta su publicación.

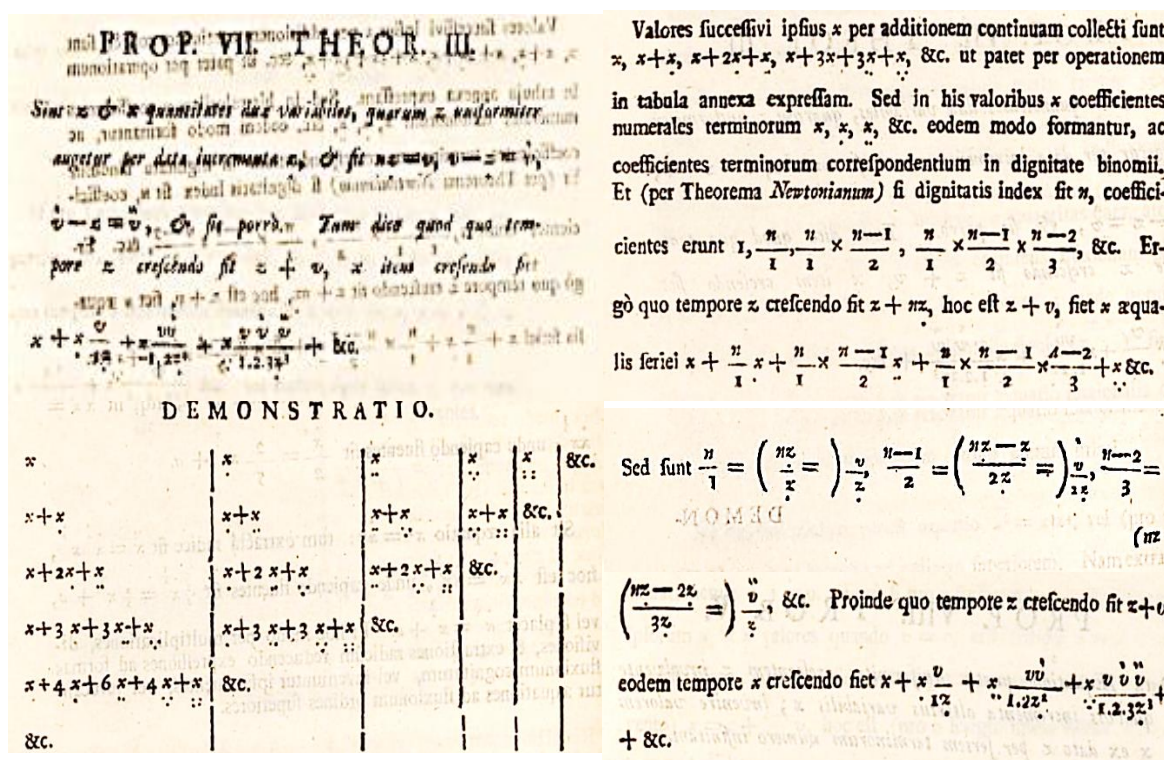


Figura 12. Obra original de Brook Taylor

Fuente: Taylor (1717, pp. 21-23)



Figura 13. Fragmento de portada

Fuente: Taylor (1717)

Brook Taylor (1685-1731) fue secretario de la Royal Society, y en su *Methodus incrementorum directa et inversa* intentó un cálculo sistemático de diferencias finitas. La demostración que plantea Taylor se refiere a la construcción de su serie. Este método de incrementos tiene una parte “directa” y una “inversa” como en el método de las fluxiones. El método de los incrementos que presenta Taylor describe el comportamiento de una cantidad de variación continua (Ríos, 2020).

Struik (1986) hace una interpretación de la demostración (ver figura 12). En notación actual de cambios ( $\Delta x$  y  $\Delta z$ ) se presenta de la siguiente manera

Demostración:

$x$	$\Delta x$	$\Delta^2 x$	$\Delta^3 x$	$\Delta^4 x$	Etc.
$x + \Delta x$	$\Delta x + \Delta^2 x$	$\Delta^2 x + \Delta^3 x$	$\Delta^3 x + \Delta^4 x$	Etc.	
$x + 2\Delta x + \Delta^2 x$	$\Delta x + 2\Delta^2 x + \Delta^3 x$	$\Delta^2 x + 2\Delta^3 x + \Delta^4 x$	Etc.		
$x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$	$\Delta x + 3\Delta^2 x + 3\Delta^3 x + \Delta^4 x$	Etc.			
$x + 4\Delta x + 6\Delta^2 x + 4\Delta^3 x + \Delta^4 x$	Etc.				

El autor señala que  $x$  y  $z$  son cantidades variables que están relacionadas, es decir, los valores que toma  $z$  afectan los valores de  $x$ . Establece que  $z$  aumenta uniformemente con incrementos dados y  $x$  crece conforme a sus variaciones sucesivas. Plantea la primera ( $\Delta x$ ), segunda ( $\Delta^2 x$ ), tercera ( $\Delta^3 x$ ) y cuarta variación ( $\Delta^4 x$ ) de  $x$ . Para la predicción de los valores de  $x$  hace uso del modelo predictivo

Estado futuro = Estado inicial + su variación (o variaciones)

Los valores sucesivos de  $x$ , recopilados mediante la suma continua, son

$$x, x + \Delta x, x + 2\Delta x + \Delta^2 x, x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x, x + 4\Delta x + 6\Delta^2 x + 4\Delta^3 x + \Delta^4 x, \dots$$

Pero los coeficientes numéricos de los términos

$$x, \Delta x, \Delta^2 x, \Delta^3 x, \Delta^4 x, \dots$$

Se forman a partir del binomio de Newton, generándose

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3}, \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \frac{n-3}{4}, \dots$$

Por lo tanto,  $z$  crece en  $z + n\Delta z$ , es decir, en  $z + v$ , entonces  $x$  será igual a la serie

$$x + \frac{n}{1} \Delta x + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \Delta^2 x + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \Delta^3 x + \dots$$

Pero

$$\frac{n}{1} = \left[ \frac{n\Delta z}{\Delta z} \right] = \frac{v}{\Delta z}$$

$$\frac{n-1}{2} = \left[ \frac{n\Delta z - \Delta z}{2\Delta z} \right] = \frac{\dot{v}}{2\Delta z}$$

$$\frac{n-2}{3} = \left[ \frac{n\Delta z - 2\Delta z}{3\Delta z} \right] = \frac{\ddot{v}}{3\Delta z}$$

$$\frac{n-3}{4} = \left[ \frac{n\Delta z - 3\Delta z}{4\Delta z} \right] = \frac{\ddot{\ddot{v}}}{4\Delta z}$$

Por lo tanto, cuando  $z$  crece en  $z + v$ ,  $x$  crece en

$$x + \Delta x \frac{v}{1 \cdot \Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1 \cdot 2 \cdot (\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\Delta z)^3} + \Delta^4 x \frac{v\dot{v}\ddot{\ddot{v}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\Delta z)^4} + \dots$$

Se puede observar que el primer término ( $x$ ) es el valor inicial. El segundo término es su primera variación, el tercer término corresponde a la segunda variación y así sucesivamente. Reconocemos que la Serie de Taylor queda expresada en variaciones sucesivas de las cantidades variables  $x$  y  $z$ .

### 3.3. DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

El desarrollo histórico de los circuitos eléctricos se remonta a los primeros años de la aparición del hombre. Hace 120 mil años solo existía la especie Homo Sapiens, este hombre conoció el primer fenómeno eléctrico perceptible por sus sentidos, llamado rayo. Este fenómeno destruía árboles y animales, y en muchas ocasiones provocaba fuego a la vegetación y a los bosques. Estos hombres concebían al rayo como signo de furia o de magia procedentes de algún dios muy poderoso (Poveda, 2003). Los fenómenos eléctricos se podían observar (en la atracción de objetos), tal como señala Braun (2003):

Desde tiempos inmemoriales el hombre se dio cuenta de que después de frotar con paño un tipo de resina llamada ámbar, ésta adquiría la capacidad de atraer algunos objetos ligeros, como trozos de papel. La historia registra a Tales de Mileto, filósofo y matemático griego, que vivió hace unos 2 600 años, como el primero que hizo experimentos de esta naturaleza... En griego ámbar se dice elektron y de esta palabra se deriva electricidad. (p. 10)

En los experimentos que realizaba Niccolo Cabeo (1586-1650), en 1629, descubrió el fenómeno de la repulsión eléctrica entre cargas del mismo signo (Poveda, 2003). Por tanto, “existen en la naturaleza dos tipos de cargas eléctricas: positiva y negativa [...] dos cargas eléctricas del mismo tipo se repelen, mientras que dos

cargas de tipo distintos (positiva - negativa) se atraen" (Braun, 2003, p.11). "Hasta mediados del siglo XVII la única manera que se conocía de electrizar un cuerpo era frotándolo con un paño, manualmente [...] Otto Von Guericke inventó su máquina electrostática, la primera en la historia de esta ciencia" (Poveda, 2003, p. 136).

Un científico francés, François du Fay (1698 - 1739), hizo otro tipo de experimentos que reportó entre 1733 y 1734. Frotó con tela de seda dos tubos de vidrio iguales. Al acercarse los tubos vio que siempre se repelían. Así concluyó que dos materiales idénticos se repelen cuando se electrifican en formas idénticas. Como cada uno de los tubos adquiere el mismo tipo de carga se puede afirmar que cargas iguales se repelen. (Braun, 2003, p. 11)

Hacia principios del siglo XVIII según Braun (2003):

Se inició la investigación detallada de los fenómenos eléctricos. Entre 1729 y 1736 dos científicos ingleses, Stephen Gray (1696 - 1736) y Jean Desaguliers (1683 - 1744) dieron a conocer una serie de resultados de experimentos eléctricos muy cuidadosos. Encontraron que, si unían por medio de un alambre metálico un tubo de vidrio previamente frotado con un trozo de corcho, éste se electrificaba. Comprobaron que el trozo de corcho se electrificaba ya que al acercarle trozos de papel éstos eran atraídos por él. Este fenómeno persistía aun si el vidrio y el corcho se separaban a distancias de 300 metros. (p. 10)

En 1729, según Bernal (1979), Stephen Gay descubrió un modo de transmitir la electricidad. La electricidad producida por el frotamiento de una varilla de vidrio puede ser transmitida a grandes distancias (hacia otros objetos). Su principal contribución fue que la electricidad podía fluir de un lugar a otro, sin que se produjera aparentemente ningún movimiento en la materia y también encontró que la electricidad puede acumularse en aquellos cuerpos en que se genera a los que llamó no-conductores. Por otro lado, la electricidad que fluye a través de los metales les llamó conductores. Según Braun (2003):

Benjamín Franklin (1706 - 1790) realizó estos mismos descubrimientos en Estados Unidos [...] Según él, el vidrio electrificado había adquirido un exceso de fluido (carga) eléctrico, y le llamó a este estado positivo. Al estado de la seda con la que frotó el vidrio lo llamó negativo, pues consideraba que había tenido una deficiencia de fluido (carga) eléctrico. (p. 11)



Franklin establece que sólo existe una clase de electricidad representada como un fluido inmaterial existente en todos los cuerpos (Bernal, 1979). La electricidad es considerada como una propiedad de todos los cuerpos. Entonces, como señala Braun (1983):

La electrificación era un efecto que se presentaba en la superficie de los cuerpos, en donde aparecía lo que llamaron una "virtud" o "fluido" eléctrico al que en la actualidad se le llama carga eléctrica. Encontraron que la carga eléctrica podía moverse libremente de un cuerpo a otro a través de ciertos materiales que llamaron conductores (el cuerpo humano, los metales, el aire húmedo, etc.). También existen materiales que no conducen electricidad, a los que se llama aislantes o no conductores (la madera, la seda, la cerámica, etcétera). (p. 10)

La botella de Leyden fue el primer artefacto para almacenar energía. "En 1745, Von Kleist [...] intentó hacer pasar la electricidad a una botella, valiéndose de un clavo. Al estar sosteniendo con una mano el clavo y con la otra la botella, recibió lo que vino a ser el primer choque eléctrico producido artificialmente [...] el holandés Musschenbroek (1692 - 1761) consiguió realizar el mismo experimento" (Bernal, 1979, p. 578). Lo que le permitió construir la botella de Leyden con la finalidad de almacenar electricidad. Posteriormente, Faraday desarrolló este artefacto al aumentar su capacidad de almacenamiento, al cual le llamó condensador (capacitor).

Al inicio del siglo XVIII, las investigaciones científicas buscaban la forma de condensar el fluido eléctrico (concepción considerada hoy en día como imprecisa) para no perder la electricidad generada por las máquinas basadas en el frotamiento de cuerpos. Esto llevó a la invención accidental del primer capacitor (dispositivo para almacenar energía eléctrica) en 1745 por el clérigo alemán E. G. Von Kleist, después de recibir varias sacudidas por descargas eléctricas. Aunque las consideraciones teóricas no eran correctas del todo, se pudo desarrollar un dispositivo eléctrico de uso común aún en nuestros días (Barragán, Núñez, Cerpa, y Rodríguez, 2014, p. iv).

En 1784, Charles Coulomb demostró, en París, que la fuerza entre las cargas está inversamente relacionada con el cuadrado de la distancia que las separa. En 1791, Luigi Galvani, profesor de anatomía en la Universidad de Boloña, Italia, experimentó con los efectos de la electricidad en los nervios y músculos de animales. La primera



celda voltaica, con capacidad de producir electricidad gracias a la acción química de un metal que se disuelve en un ácido, fue desarrollada por otro italiano, Alessandro Volta, en 1799. Esta celda voltaica permite concentrar cargas positivas en un extremo y cargas negativas en el otro, "en 1799, Volta anunció la invención de la pila voltaica con la que se pudo producir una corriente eléctrica continua por primera vez" (Barragán, Núñez, Cerpa, y Rodríguez, 2014, p. iv). Alessandro Volta (1745 - 1827) construye una pila y logra establecer corrientes eléctricas estables.

Los primeros trabajos realizados por Thompson sobre la electricidad, se orientaban a partir de analogías matemáticas entre los fenómenos térmicos y eléctricos. En ese período, tal y como afirma Harman (1982), se exploraron diversas analogías físicas y matemáticas entre las leyes del calor y de la electricidad, y a partir de la obra de Fourier sobre el flujo de calor, Georg Simon Ohm (1787-1854) describió un análisis similar mediante el flujo de electricidad, estableciendo analogías entre la tensión de la corriente y la temperatura y la cantidad de electricidad y el calor. (Cano, Gómez y Cely, 2009, p. 29)

La teoría de los circuitos eléctricos comenzó su desarrollo como una rama independiente del electromagnetismo, con conceptos y métodos propios. En el periodo de 1826 a 1827, un físico alemán, George Simon Ohm (1789 - 1854), introdujo una importante relación entre el potencial, la corriente y la resistencia, conocida actualmente como ley de Ohm. Empezó sus experimentos sobre corrientes eléctricas en 1825. Inicialmente, utilizó las pilas de Volta, pero más tarde las sustituyó por elementos termoeléctricos de cobre - bismuto que había inventado T. J. Seebeck en 1823, y que daban una f.e.m. (voltaje) mucho más estable, lo que le permitió establecer su célebre ley:  $i = E/(R + r)$  en la que  $i$  representa la intensidad de la corriente;  $E$ , la f.e.m.;  $R$ , su resistencia interna; y  $r$ , la resistencia del circuito exterior (Fraile, 2012).

Los circuitos RC y RL en corriente directa, eran conocidos, en 1853, por William Thomson y Lord Kelvin (1824 - 1907). Estos circuitos se modelaban por medio de ecuaciones diferenciales generándose métodos para resolver circuitos RCL. En estos circuitos el condensador es considerado como un elemento principal, ya que almacena cargas eléctricas. Este dispositivo se construye con dos placas conductoras paralelas separadas por un material aislante llamado dieléctrico.

Faraday, según Boylestad (2011), "realizó un extenso trabajo en un dispositivo de almacenamiento que llamó condensador, al cual conocemos actualmente como capacitor. Faraday propuso la idea de agregar un dieléctrico entre las placas de un capacitor para incrementar su capacidad de almacenamiento" (p. 5). Entonces, una de las variables que se puede medir en el capacitor es el voltaje de carga.

Heinrich Göbel (1818 - 1893) creó una fuente de luz para interiores, en 1854 fabricó la primera bombilla eléctrica del mundo. Posteriormente, Thomas Alva Edison (1847 - 1931) inventó la bombilla eléctrica apta para el mercado. En 1807, en Londres Inglaterra, se encendió por primera vez el alumbrado de gas. Edison quería sustituir el alumbrado de gas por luz eléctrica, en 1879 inventó su bombilla eléctrica que dio comienzo a la era de la luz eléctrica y en 1882 construyó la primera central eléctrica (Päch y Franke, 1991). El filamento de la bombilla es un conductor eléctrico, cuando fluye la corriente los electrones chocan con los átomos al pasar y de ese choque se desprende parte de su energía como consecuencia la agitación de los átomos es cada vez mayor y el filamento del conductor se enciende. Como a mayores temperaturas el filamento de carbono va aumentando su conductividad y con ella aumenta también la intensidad de la corriente (en algún momento se funde). Este comportamiento se puede observar en un led al conectarlo con dos pilas en serie.

El libro de Gilbert es el primer gran tratado sobre la electricidad como ciencia y como teoría [...] para Gilbert las partículas del fluido eléctrico, que emanan del cuerpo electrizado, rodean al cuerpo que encuentran y lo transportan (mientras tengan energía) a la fuente de la cual son emitidos. (Poveda, 2003, p. 135)

A mediados del siglo XIX Gustav Robert Kirchhoff presentó una serie de leyes de voltajes y corrientes (Boylestad, 2011). En 1897 Joseph Thomson (1856 - 1940) descubrió el electrón, una partícula muy pequeña y ligera que pertenece a un átomo. En 1904 Thomson desarrolló un modelo atómico que establecía al electrón como un elemento constitutivo fundamental para el desarrollo de la electricidad, estos electrones se consideraron con carga negativa (Päch y Franke, 1991). El

estudio de estas partículas tuvo gran desarrollo aportando las bases para la teoría de la electricidad.

El estado de agitación extrema continuó hasta principios del siglo XIX, cuando Hans Christian Oersted, profesor danés de física, dio a conocer en 1820 una relación entre el magnetismo y la electricidad que sirve como base para la teoría del electromagnetismo como la conocemos en la actualidad. En el mismo año, un físico francés, André Ampère, demostró que alrededor de un conductor que transporta corriente se presentan efectos magnéticos y que éstos pueden atraerse o repelerse como los imanes... En 1831, un físico inglés, Michael Faraday, demostró su teoría de la inducción electromagnética, según la cual una corriente cambiante en una bobina puede inducir una corriente cambiante en otra, aunque ambas bobinas no estén conectadas directamente. James Clerk Maxwell, un profesor escocés de filosofía natural, realizó extensos análisis matemáticos para desarrollar las ecuaciones de Maxwell, las cuales apoyan los esfuerzos de Faraday de vincular los efectos eléctricos y magnéticos. Maxwell también desarrolló, en 1862, la teoría electromagnética de la luz, la cual, entre otras cosas, reveló que las ondas electromagnéticas viajan a través del aire a la velocidad de la luz. En 1888, Heinrich Rudolph Hertz, un físico alemán, comprobó mediante experimentación con ondas electromagnéticas de baja frecuencia (microondas), las predicciones y ecuaciones de Maxwell. (Boylestad, 2011, p. 5)

En el trabajo de Maxwell acerca de la electricidad y el magnetismo establece que la electricidad es una cantidad física medible y no es posible asegurar que sea una sustancia o manifestación de energía. Maxwell obtiene la ecuación diferencial que modela el comportamiento de la electricidad y que consiste en encontrar la cantidad de electricidad que entra y sale en cada conexión del circuito. La ecuación diferencial obtenida es matemáticamente idéntica a la obtenida por Fourier para el calor (Hinojos y Farfán, 2018).

Las leyes de la electricidad y el magnetismo fueron construidas sobre un modelo newtoniano, y que la teoría atómica de los químicos fue una consecuencia directa de las especulaciones atómicas de Newton (Bernal, 1979). En el siglo XVIII se generalizaron los principios de la mecánica, lo que permitió el estudio de la electricidad y el calor. Según Bernal (1979), "la electricidad fue la

primera ciencia nueva que surgió después del periodo newtoniano... fue casi el único aspecto de la ciencia física al que no dedicó Newton [...]" (p. 576). Esto conlleva a una posible resignificación de la Serie de Taylor en el contexto de circuitos eléctricos.

El estudio de la electricidad ha tenido gran desarrollo, desde la experimentación y construcción de artefactos, hasta la modelación y resolución de ecuaciones diferenciales. Se reconoce que el estudio de los fenómenos eléctricos se da en contextos reales centrados en la experimentación. Posteriormente, se direcciona al uso de fórmulas matemáticas con procesos algebraicos.

## **CAPÍTULO 4.**

# **DISEÑO DIDÁCTICO Y CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO**

## CAPÍTULO 4. DISEÑO DIDÁCTICO Y CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

En este capítulo se presenta el análisis cognitivo y el análisis didáctico que complementan el análisis preliminar. El diseño didáctico consta de cuatro situaciones diagnósticas y cuatro situaciones de aprendizaje. Se establece el análisis *a priori* de todas las situaciones, la experimentación y el análisis *a posteriori* y validación. Se reconocen elementos que permitan la resignificación didáctica de la Serie de Taylor en el contexto de circuitos eléctricos.

### 4.1. ANÁLISIS PRELIMINAR

El análisis preliminar permite identificar elementos para las situaciones de aprendizaje del diseño didáctico. Dicho análisis está conformado por la dimensión “histórica - epistemológica”, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica. Se toma en cuenta que, con base en la Socioepistemología se considera una cuarta dimensión, la social, como un eje transversal entre las otras dimensiones. En este apartado se presenta la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica. La dimensión “histórica - epistemológica” se establece en el capítulo 3.

#### 4.1.1. DIMENSIÓN COGNITIVA

La dimensión cognitiva pretende identificar cómo los participantes abordan situaciones problema sobre predicción. Para ello se toma en cuenta que, para el estudio de la variación y el cambio se involucran dos o más variables que desde el punto de vista cognitivo se requiere del desarrollo del sentido covariacional. La coordinación de dos variables (cantidades que varían entre sí) en situaciones de variación permite el desarrollo del pensamiento variacional (Dolores, 2010; Caballero - Pérez y Cantoral, 2017). En este caso, las principales variables a coordinar son: el voltaje de carga y el tiempo. Se establece que:

La dimensión cognitiva del saber analiza las formas de apropiación y significación que experimentan quienes se encuentran en situación de construcción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento situado en su acción de significar y resignificar. La dimensión social y cultural del saber está centrada en los roles que juegan los actores y el papel que tiene el saber en la

construcción de consensos, la elaboración y adaptación de instrumentos mediadores y los usos del saber en situaciones específicas. (Caballero, 2018, p. 34)

Los aspectos cognitivos que caracterizan al pensamiento variacional se identifican por el contexto en el que suceden para dar sentido y significado a los objetos matemáticos. Por ejemplo, en el estudio de Solís (1999), sobre el fenómeno de la propagación del calor se identifican dos tipos de comportamientos: continuo y discreto. En el continuo el calor se propaga en el medio (la barra) conforme pasa el tiempo; en el discreto el calor se mueve (en la barra) por cada pedazo (cada punto de la barra). La propagación del calor es un fenómeno que se dificulta observarlo a simple vista, pero que sí se percibe por el sentido del tacto. En dicho análisis la variable se considera al calor que se mueve en un medio (objeto) y la temperatura como su medida.

Para los aspectos cognitivos se toma en cuenta los resultados obtenidos de cuatro participantes al experimentar con una situación de predicción en un contexto de circuitos eléctricos. La puesta en escena se implementó en un laboratorio de cómputo de la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) de la Habana, Cuba. En el taller asistieron dos participantes: un ingeniero industrial de Colombia y una profesora normalista de México (ver figura 14). En otro espacio, el taller se llevó a cabo con dos participantes: una profesora con formación en ingeniería civil y otra con formación en ingeniería mecatrónica (ver figura 15).



**Figura 15.** Participantes en la RELME



**Figura 14.** Profesoras participantes

Al inicio del taller se proyectaron algunas diapositivas con la finalidad de dar una introducción al tema. Posteriormente se interactuó con una simulación en

GeoGebra (observar la figura 16) de un circuito RC (configuración resistencia - capacitor) con la finalidad de llenar una tabla sobre el voltaje de carga del capacitor respecto al tiempo. Al completar la tabla se les pidió que hicieran la predicción del voltaje de carga en dos tiempos posteriores (50 y 65 segundos).

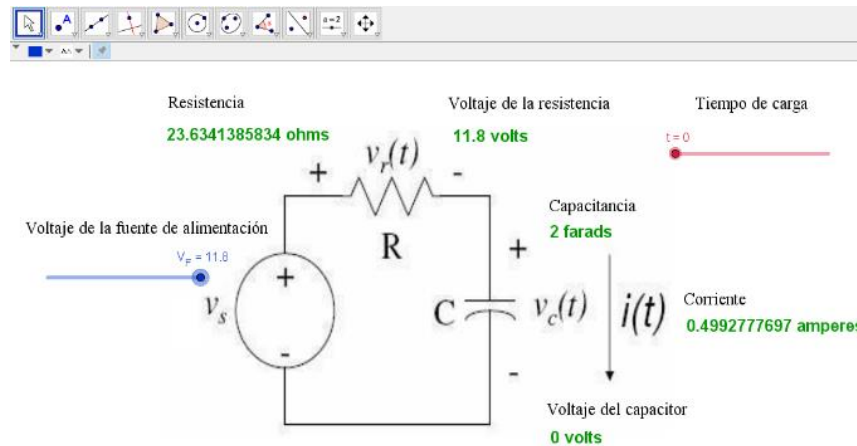


Figura 16. Applet de GeoGebra

Los resultados obtenidos de los cuatro participantes sobre la actividad de predicción se presentan en los siguientes apartados.

### Participante con formación en ingeniería civil

Los resultados (ver figura 17) que presenta una de las profesoras son los siguientes:

Analizó la diferencia que existe entre el segundo 5 y el 0; el 10 y el 5; el 15 y el 10; el 20 y el 15; y así sucesivamente hasta el 45 y 40 considerándose todos los decimales de la calculadora científica. Identificó que el voltaje va en aumento, pero cada vez más lento. Posteriormente, dividió cada variación entre 5 que es el valor de cada intervalo. Seguido determinó las diferencias de las diferencias, pero para cada segundo. Realizó la operación de

Tabla 1. Datos cada cinco segundos: capacitor de 2 farads, resistencia de 23.63 ohms y fuente de alimentación de 11.80 volts.

Tiempo de carga (en segundos)	Voltaje del capacitor (en volts)	Diferencias entre cada intervalo	Diferencia entre 5 para saber cuánto se incrementa a cada segundo
0	0		
5	1.1844453748	1.1844453748	0.236889075
10	2.25	1.065554625	0.213110925
15	3.208597399	0.958597939	0.191719548
20	4.020974576	0.862376836	0.172475367
25	4.846788848	0.775814272	0.155162854
30	5.544324424	0.697940575	0.139588115
35	6.172613008	0.627883584	0.125576717
40	6.737471694	0.564858686	0.112971737
45	7.245631714	0.50816002	0.101632009
50	7.71667.708	0.46	0.09263009
55	8.1491		0.002
60			
65			

① Usación de intervalos  
 ① -0.02377815 ② 0.014011398  
 ② -0.021391377 ③ 0.01260796  
 ③ 0.01924418 ④ 0.011337735  
 ④ 0.017312513 ⑤ 0.009  
 ⑤ 0.015574739

a) Calcular el voltaje de carga en el tiempo de 50 segundos.  
 b) Calcular el voltaje de carga en el tiempo de 65 segundos.

Figura 17. Resultados del participante



$0.213110925 - 0.236889075 = -0.02377815$  y así calculó todas las demás diferencias. Por lo que logró identificar que la variación es de aproximadamente 0.002 permitiendo predecir el voltaje a los 50 segundos de la siguiente manera:

La variación 0.092632004 del tiempo de 45 segundos le suma la variación aproximada de 0.002 (lo consideró constante) obteniendo el resultado de  $0.092632004 + 0.002 = 0.094632004$ . Posteriormente, lo multiplicó por 5 para obtener la variación en todo el intervalo (de 45 a 50 segundos):  $0.094632004 (5) = 0.47316002$ . Seguido retomó el estado inicial y le sumó su variación:  $7.2456317144 + 0.47316002 = 7.718791734$  por lo que tomó como el valor de predicción, a los 50 s, a 7.708 volts. Para dicho análisis se consideró al segundo orden de variación para la predicción, tomándose como modelo el siguiente: *Estado inicial + Variación + Variación de la variación = Estado futuro*.

### Participante con formación en ingeniería mecatrónica

La profesora completa la tabla al interactuar con la simulación en GeoGebra (ver figura 18). Calcula las diferencias para cada intervalo de tiempo, es decir, realiza la operación (razón del voltaje y el tiempo) de:

$$\frac{1.1844 - 0}{5 - 0} = 0.23688$$

Lo que le da la variación en cada segundo dentro del intervalo comprendido entre 0 y 5 segundos. Así también realiza las operaciones para los otros intervalos:

Tiempo de carga (en segundos)	Voltaje del capacitor (en volts)	
0	0 Volts	
5	1.1844 Volts	
10	2.3688 Volts	1.0656
15	3.2085 Volts	0.9585
20	4.0709 Volts	0.8624
25	4.8467 Volts	0.7758
30	5.5447 Volts	
35	6.1726 Volts	
40	6.7334 Volts	
45	7.2456 Volts	
50	7.708 V	
55	8.1284 V	
60	8.5028 V	
65	8.8322 V	

Handwritten calculations on the right side of the table:

- $5s = 1.1844 V$
- $10s = 2.3688$
- $15s = 3.5532$
- $1s = 0.2368 V$
- $5s = 1.1844 V$

Figura 18. Resultados del participante

$$\frac{2.25 - 1.1844}{10 - 5} = \frac{1.0656}{5} = 0.41312$$

$$\frac{3.2085 - 2.25}{15 - 10} = \frac{0.9585}{5} = 0.1917$$

$$\frac{4.0709 - 3.2085}{20 - 15} = \frac{0.8624}{5} = 0.17248$$

$$\frac{4.8467 - 4.0709}{25 - 20} = \frac{0.7758}{5} = 0.15516$$

Reconoce que el voltaje aumenta en cada segundo, pero se da cuenta que las variaciones para cada intervalo van en disminución. La profesora se da cuenta que al multiplicar el voltaje en 1 segundo (0.23688) por el tiempo correspondiente obtiene una buena aproximación, es decir, al realizar las operaciones de  $0.23688 (5) \approx 1.1844$  volts;  $0.23688 (10) \approx 2.3688$  volts;  $0.23688 (15) \approx 3.5532$  volts;  $0.23688 (20) \approx 4.7376$  volts; y así sucesivamente. Por lo que retoma el voltaje en 1 segundo para predecir el voltaje en el tiempo de 50 segundos al realizar la operación de  $0.23688 (50) \approx 11.844$  volts. Así también utiliza el mismo procedimiento para predecir el voltaje a los 65 s al realizar la operación de  $0.23688 (65) \approx 15.3972$  volts.

#### Participante normalista

En los resultados que presenta la profesora normalista (ver figura 19) nos damos cuenta que tiene un pequeño error al colocar el voltaje en el tiempo de 10s, es decir, ella coloca 2.225 en vez de 2.25. Al iniciar el proceso calcula la diferencia entre el tiempo de 5 y 10 segundos, realizando la operación de  $2.225 - 1.184 = 1.041$ , seguido calcula la diferencia en el tiempo de 20 y de 15 s, es decir,  $4.0709 - 3.208 = 0.8629$ , después realiza la diferencia de  $5.5447 - 4.8467 = 0.698$ ; la diferencia de  $6.7374 - 6.1726 = 0.5648$ ; y con esa información trata de predecir el voltaje en el tiempo de 50 s. Se da cuenta que el voltaje va aumentando en el tiempo por lo que el voltaje tiene que

Tiempo de carga (en segundos)	Voltaje del capacitor (en volts)	
0	<del>1.184</del> 0	
5	<del>1.184</del> 1.184	1.041
10	2.225	
15	3.208	$\frac{4.0709}{- 3.208}$
20	4.0709	0.8629
25	4.8467	0.698
30	5.5447	
35	6.1726	0.5648
40	6.7374	
45	7.2456	7.2456
50	8.6228	

Figura 19. Resultados del participante

ser mayor al anterior, debido a que solo calcula cuatro diferencias no observa la regularidad. Realiza su predicción de 8.6228 volts en el tiempo de 50 s. En dicho análisis se observa que no reconoce los órdenes de variación que le permita predecir.

#### Participante con formación en ingeniería industrial

Al iniciar el taller, el participante señaló que en sus cursos de Cálculo vio a la serie de Taylor como un proceso algebraico, para aproximar funciones mediante un polinomio en un punto específico. Al analizar los resultados (ver figura 20) observamos que coloca cada voltaje del capacitor redondeándolo a tres decimales.

Después, calcula las diferencias:  $\Delta_1 = 5.545 - 4.847 = 0.698$  ,  $\Delta_2 = 6.173 - 5.545 = 0.628$  ,  $\Delta_3 = 6.737 - 6.173 = 0.564$  y  $\Delta_4 = 7.246 - 6.737 = 0.509$  ; con la notación delta. Reconoce que  $\Delta V$  es la variación de voltaje. Posteriormente calcula las diferencias de las diferencias:  $\Delta_{12}^2 = \Delta_1 - \Delta_2 = 0.698 - 0.628 = 0.07$  ,  $\Delta_{23}^2 = \Delta_2 - \Delta_3 = 0.628 - 0.564 = 0.064$  ,  $\Delta_{34}^2 = \Delta_3 - \Delta_4 = 0.564 - 0.509 = 0.055$ . Por último, calcula las terceras diferencias  $\Delta_{1223}^3 = \Delta_{12}^2 - \Delta_{23}^2 = 0.07 - 0.064 = 0.006$  ,  $\Delta_{2334}^3 = \Delta_{23}^2 - \Delta_{34}^2 = 0.064 - 0.055 = 0.009$  ,

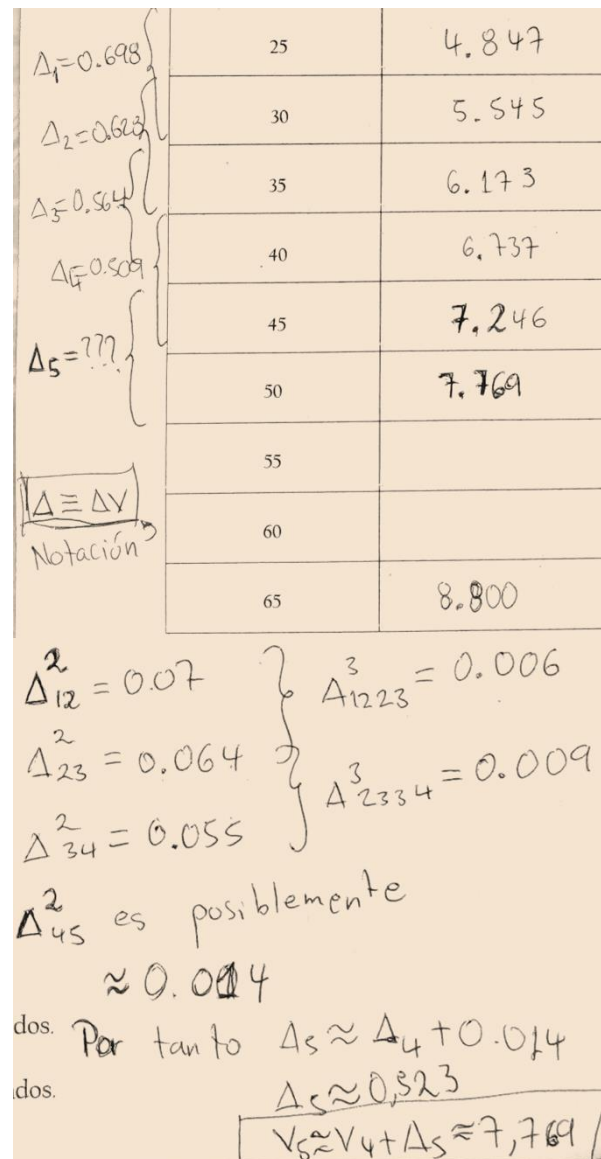


Figura 20. Resultados del participante

entonces aproxima la segunda diferencia  $\Delta_{45}^2$  con un valor de 0.014 de acuerdo a las segundas diferencias anteriores, es decir, se da cuenta que la variación en cada segunda diferencia es cada vez menor. Por lo tanto, para predecir la variación  $\Delta_5$ ,

lo aproxima con la expresión  $\Delta_4 + \Delta_{45}^2 \approx 0.509 + 0.014 \approx 0.523$ . Dicho modelo corresponde al primer orden de variación de la Serie de Taylor. Y para predecir el voltaje:  $V_5 \approx V_4(\text{en } 45s) + \Delta_5 \approx 7.246 + 0.523 = 7.769$  por lo que se aproxima al valor que da la simulación de GeoGebra en el tiempo de 50s, es decir, al valor de 7.7027842954 volts. Cabe señalar que retoma el modelo de predicción: *Estado inicial + Variación = Estado futuro*. Todas las diferencias fueron positivas, porque, en ocasiones calculó el *Estado inicial – Estado siguiente* y en otras calculó *Estado siguiente – Estado inicial*. Para la predicción en el tiempo de 65 segundos no se observa procedimiento.

#### 4.1.2. DIMENSIÓN DIDÁCTICA

El Cálculo es considerado como la matemática de la variación y el cambio. Los contenidos del Cálculo, según Dolores (2010), están presentes en la matemática escolar, con base en el plan de estudios de 1993 de la Educación Básica Mexicana. Principalmente en el eje temático de procesos de cambio. Por otra parte, en el plan actual (plan de estudios 2011), sus contenidos están incluidos en los ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico, manejo de la información y forma, espacio y medida.

El discurso escolar, de acuerdo con los libros de texto de matemáticas, la Serie de Taylor se identifica en el tema de convergencia de series infinitas y en el tema de aproximación de funciones mediante polinomios (Cantoral, 2001). Por ejemplo, en el libro de métodos numéricos para ingenieros de Chapra y Canale (2011), en el capítulo 4, se aborda la Serie de Taylor como “un medio para predecir el valor de una función en un punto, en términos del valor de la función y sus derivadas. En particular, el teorema establece que, cualquier función suave puede aproximarse por un polinomio” (p. 71). Hacen énfasis en el residuo (error de aproximación) de la serie, es decir, si se omite el residuo del lado derecho de la igualdad, la expresión que queda es la aproximación del polinomio de Taylor para  $f(x)$  (ver figura 21).

### Teorema de Taylor

Si la función  $f$  y sus primeras  $n + 1$  derivadas son continuas en un intervalo que contiene  $a$  y  $x$ , entonces el valor de la función en  $x$  está dado por

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ & + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \end{aligned} \quad (\text{C4.1.1})$$

### Figura 21. Teorema de Taylor

Fuente: Chapra y Canale (2001, p. 72)

En el libro de Carmona y Filio (2011) se aborda una aplicación de las ecuaciones diferenciales en el análisis de un circuito eléctrico RC (ver figura 22). Primeramente, identifica el voltaje de la fuente de alimentación ( $E = 100 e^{-5t}$ ), aplica la ley de Ohm para el voltaje de la resistencia ( $IR = 10I$ ) y calcula el voltaje del capacitor ( $q/c = 50q$ ). Seguido se aplica la ley de Kirchhoff y se construye la ecuación diferencial lineal. Posteriormente, se resuelve la ecuación diferencial por el método del factor integrante y se responden los cuestionamientos señalados.

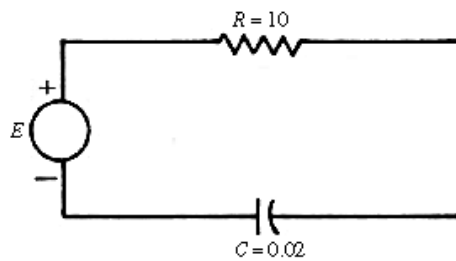
Voltaje proporcionado:

$$E = 100e^{-5t}$$

Caída de voltaje en la resistencia:  $IR = 10I$

Caída en el condensador:

$$\frac{q}{c} = \frac{q}{0.02} = 50q$$



**Figura 5-3.**

a. Por la segunda ley de Kirchhoff:

$$10I + 50q = 100e^{-5t}, \text{ como } I = \frac{dq}{dt} \text{ entonces,}$$

$$10 \frac{dq}{dt} + 50q = 100e^{-5t}$$

$$\text{o } \frac{dq}{dt} + 5q = 10e^{-5t}, \text{ con } q(0) = 0$$

cuya solución es:  $q = 10te^{-5t}$

La intensidad de la corriente es  $I = \frac{dq}{dt}$ , es decir,

$$I = \frac{dq}{dt} = 10e^{-5t} - 50te^{-5t} = 10e^{-5t}(1 - 5t)$$

b. La carga máxima ocurre cuando:  $\frac{dq}{dt} = 0$  entonces,

$$10e^{-5t}(1 - 5t) = 0, t = 0.2 \text{ segundos.}$$

Para este tiempo, la carga es:  $q = 2e^{-1} = \frac{2}{e} = 0.735$  coulombios.

**Figura 22.** Análisis de un circuito eléctrico RC

Fuente: Carmona y Filio (2011, p. 230)

Rainville, Bedient y Bedient (1998) consideran a la Serie de Taylor como un teorema y lo usan como método numérico para aproximar soluciones, al considerar problemas con valor inicial. Se calculan las derivadas sucesivas de la solución  $y = f(x)$ . Plantean un ejemplo sobre el método utilizado (ver imagen 23).

Para el ejemplo:

$$y' = y^2 - x^2; \quad x_0 = 0, y_0 = 1, \quad (4)$$

es relativamente fácil demostrar que:

$$\begin{aligned} y'' &= 2yy' - 2x, \\ y''' &= 2yy'' + 2(y')^2 - 2, \\ y^{(4)} &= 2yy''' + 6y'y'', \\ y^{(5)} &= 2yy^{(4)} + 8y'y''' + 6(y'')^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Así podemos obtener los valores:

$$y_0 = 1, \quad y'_0 = 1, \quad y''_0 = 2, \quad y'''_0 = 4, \quad y^{(4)}_0 = 20, \quad y^{(5)}_0 = 96.$$

Por lo tanto, la ecuación (2) se transforma en:

$$y \approx 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4. \quad (6)$$

**Figura 23.** Ejemplo sobre la Serie de Taylor con derivación sucesiva

Fuente: Rainville, Bedient y Bedient (1998, p. 53)

Se observa que la derivada de la función ( $y'$ ) está despejada, por lo que se calculan las siguientes derivadas sucesivas (hasta la quinta), posteriormente se aplican las condiciones iniciales:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  se obtiene el valor de la primera derivada:  $y' = y^2 - x^2 = 1^2 - 0^2 = 1$ ; al sustituir en  $y'' = 2yy' - 2x$  las condiciones iniciales de  $y = 1$ ,  $y' = 1$  y  $x = 0$  obtenemos:  $y'' = 2(1)(1) - 2(0) = 2$ ; y así sucesivamente. Posteriormente, retoma la Serie de Taylor:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{1}{2!} y''_0(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} y'''_0(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} y^{(n)}_0(x - x_0)^n$$

Al sustituir y al realizar todos los cálculos se obtiene el polinomio de aproximación:

$$y \approx 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4$$

El ejemplo no tiene contexto físico, es decir, es propio de la matemática (función y función derivada).

En la siguiente expresión

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!} f''(a)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)h^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n$$

El valor de  $h$  es infinitesimal (muy pequeño). La expresión proporciona el valor de  $f(a + h)$  una aproximación con un error tan pequeño como se desee. La serie de

potencias se denomina Serie de Taylor de  $f$  alrededor de  $a$ . Si solo se conserva un número finito de términos, la expresión resultante se denomina polinomio de Taylor.

Si tomamos en cuenta que  $x = a + h$ ,  $h = x - a$  entonces la expresión queda

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x - a)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^n(a)(x - a)^n$$

La aproximación de una función por medio del polinomio de Taylor es mejor si se toma en cuenta un grado mayor del polinomio y esté más cerca del punto de referencia. Si hacemos tender el número de términos del polinomio hacia el infinito podemos esperar que la función quede expresada en forma exacta.

El en libro de Carmona y Filio (2011) se establece el método de Taylor para resolver ecuaciones diferenciales. Este método es enseñado a estudiantes de ingeniería, el cual consiste en el desarrollo de una función en Serie de Taylor, como se muestra en la siguiente expresión

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{(x - a)}{1!} + y''(a) \frac{(x - a)^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} y^{(n)}(a) \frac{(x - a)^n}{n!}$$

En el libro se plantea el siguiente ejemplo (p. 504-505)

#### EJEMPLO 1

Aplicar el método de Taylor de orden tres a la ecuación:

$$y' = x - y + 1, y(0) = 1, 0 \leq x \leq 1, h = 0.1, N = 10$$

Como  $y' = x - y + 1$ , entonces,  $y'' = 1 - y' = 1 - x + y - 1 = -x + y$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} y'_0 &= x_0 - y_0 + 1 \\ &= 0 - 1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y luego,

$$\begin{aligned} y''_0 &= -x_0 + y_0 \\ &= -0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



entonces,

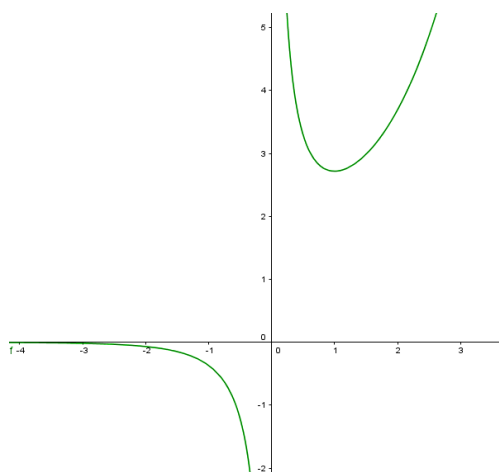
$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + y'_0(0.1) + y''_0 \frac{(0.1)^2}{2} \\ &= 1 + 0(0.1) + 1(0.005) \\ &= 1.005 \end{aligned}$$

Se observa que la aproximación  $y_1$  es 1.005 de acuerdo con las condiciones iniciales.

En el contexto escolar, la Serie de Taylor se aborda como un polinomio de aproximación a una función (3Blue1Brown, 2017). Por ejemplo, si tenemos la función

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

Con su representación gráfica



Si queremos aproximar la función en el punto 1.5, se calcula su primera derivada

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

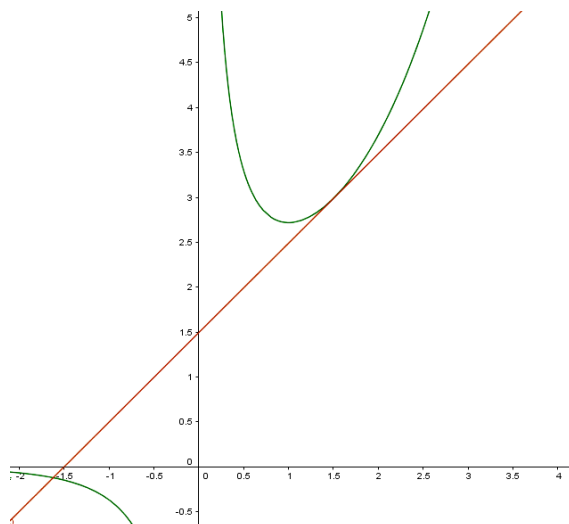
Y se evalúa en el punto 1.5

$$f'(1.5) = 0.9959309045$$

Si consideramos los primeros dos términos de la serie

$$f(x) \approx f(1.5) + f'(1.5)(x - 1.5) \approx 2.9877927136 + 0.9959309045 (x - 1.5)$$

Obtenemos la siguiente aproximación gráfica



Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{-2xe^x + x^2 e^x + 2e^x}{x^3}$$

Y lo evaluamos en 1.5

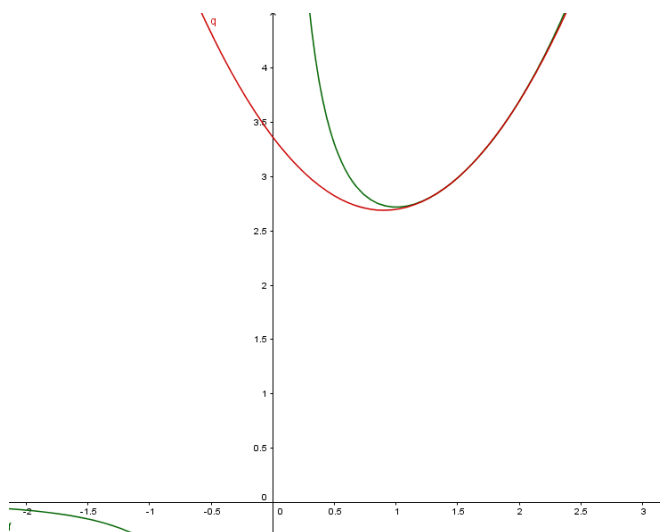
$$f''(1.5) = 1.6598848409$$

Si consideramos tres términos de la serie

$$f(x) \approx f(1.5) + f'(1.5)(x - 1.5) + \frac{f''(1.5)(x - 1.5)^2}{2}$$

$$f(x) \approx 2.9877927136 + 0.9959309045 (x - 1.5) + \frac{1.6598848409 (x - 1.5)^2}{2}$$

Obtenemos la siguiente aproximación gráfica



Calculamos la tercera derivada

$$f'''(x) = \frac{6xe^x - 3x^2e^x + x^3e^x - 6e^x}{x^4}$$

Y lo evaluamos en 1.5

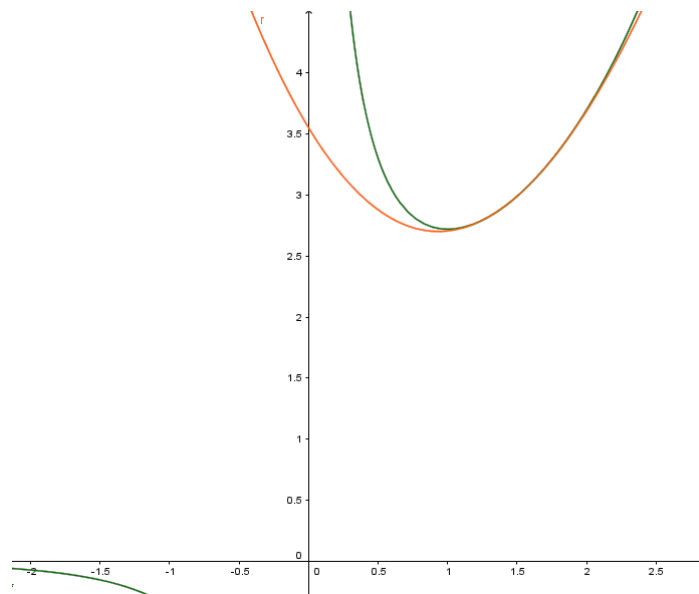
$$f'''(1.5) = -0.3319769682$$

Si consideramos cuatro términos de la serie

$$f(x) \approx f(1.5) + f'(1.5)(x - 1.5) + \frac{f''(1.5)(x - 1.5)^2}{2} + \frac{f'''(1.5)(x - 1.5)^3}{6}$$

$$f(x) \approx 2.9877927136 + 0.9959309045(x - 1.5) + \frac{1.6598848409(x - 1.5)^2}{2} - 0.3319769682 \frac{(x - 1.5)^3}{6}$$

Obtenemos la siguiente aproximación gráfica



Calculamos la cuarta derivada

$$f^{(4)}(x) = \frac{-24xe^x + 12x^2e^x - 4x^3e^x + x^4e^x + 24e^x}{x^5}$$

Y lo evaluamos en 1.5

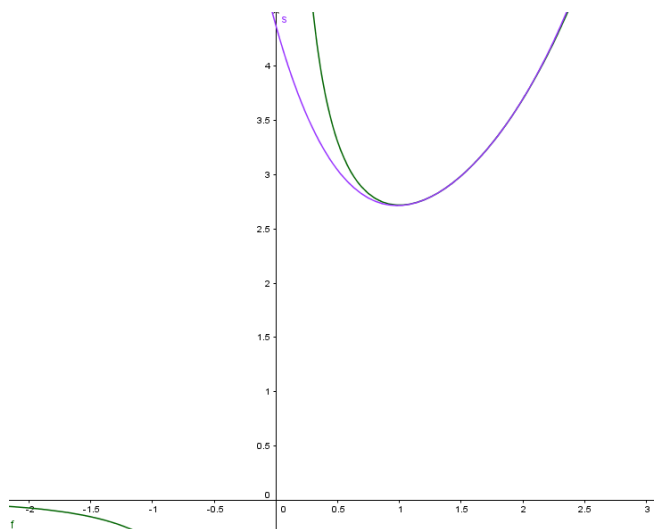
$$f^{(4)}(1.5) = 3.8730646287$$

Si consideramos cinco términos de la serie

$$f(x) \approx f(1.5) + f'(1.5)(x - 1.5) + \frac{f''(1.5)(x - 1.5)^2}{2} + \frac{f'''(1.5)(x - 1.5)^3}{6} + \frac{f^{(4)}(1.5)(x - 1.5)^4}{24}$$

$$f(x) \approx 2.9877927136 + 0.9959309045 (x - 1.5) + \frac{1.6598848409 (x - 1.5)^2}{2} - 0.3319769682 \frac{(x - 1.5)^3}{6} + 3.8730646287 \frac{(x - 1.5)^4}{24}$$

Obtenemos la siguiente aproximación gráfica



Observamos que entre más términos consideremos de la serie mejor nos aproximamos a la función. Si suponemos que tomamos en cuenta todos los términos de la serie (en el infinito), el polinomio es “igual” a la función dada.

## 4.2. ANÁLISIS A PRIORI DEL DISEÑO DIDÁCTICO

El análisis *a priori* es una fase de la ingeniería didáctica donde se plantean ciertas hipótesis. Las situaciones del diseño didáctico están basadas en el análisis preliminar, es decir, se retoman elementos del análisis “histórico - epistemológico”, de los aspectos cognitivos, de los aspectos didácticos. El diseño didáctico está conformado por las siguientes situaciones: cuatro situaciones diagnósticas y cuatro situaciones de aprendizaje. Además, se toma en cuenta el modelo de anidación de prácticas y elementos del sistema de referencia variacional.

### 4.2.1. SITUACIÓN DIAGNÓSTICA 1. ANÁLISIS DE DIAGRAMAS ELÉCTRICOS

Las situaciones diagnósticas se toman en cuenta para conocer algunos conocimientos previos que tienen los alumnos, ya que permiten identificar algunas nociones relacionadas con los circuitos eléctricos tales como: corriente eléctrica, voltaje (diferencia de potencial) y resistencia eléctrica. Esta situación retoma las ideas de George Simon Ohm (1789 - 1854) al introducir una importante relación entre el potencial, la corriente y la resistencia, conocida actualmente como Ley de Ohm (Fraile, 2012).

Así también, se retoman las ideas de Stephen Gray al descubrir un modo de transmitir la electricidad. Su principal contribución fue que la electricidad puede fluir de un lugar a otro, sin que se produjera aparentemente ningún movimiento en la materia (Bernal, 1979). La electricidad fluye a través de los metales llamados conductores. En un circuito eléctrico, las cargas eléctricas (electrones) fluyen de un polo positivo a un polo negativo (de la pila o fuente de alimentación) a través de un alambre de cobre, que, en este caso, el alambre es representado por trazos. Además de las ideas de Ohm y las ideas de Stephen Gray, se rediseñan algunas actividades que presentan Cano, Gómez y Cely (2009). La situación diagnóstica 1 se presenta a continuación:

#### Situación diagnóstica 1. Análisis de diagramas eléctricos

**A.** ¿Cuál de los siguientes diagramas consideras que es un circuito eléctrico?

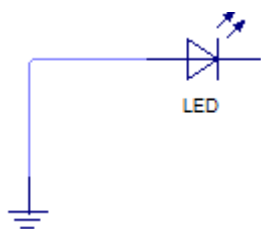


Diagrama 1. Inciso A

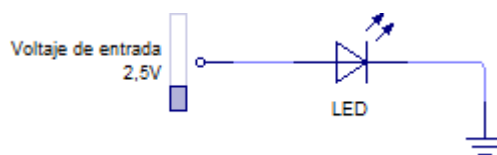


Diagrama 2. Inciso B

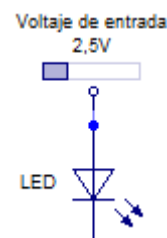
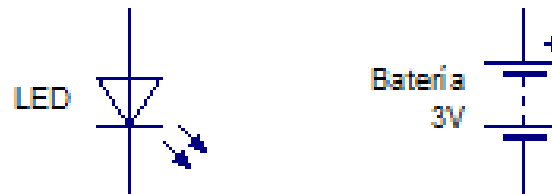


Diagrama 3. Inciso C

De acuerdo con tú elección, ¿por qué consideras que es un circuito eléctrico?

**B.** Dibuja (por medio de trazos) cómo conectarías el led a la batería (pila) de 3 volts, para que el led encienda (figura 24).



**Figura 24.** Diagrama de un led y una batería (pila)

Con base en el inciso B responde los siguientes cuestionamientos:

¿Por qué crees que enciende el led?

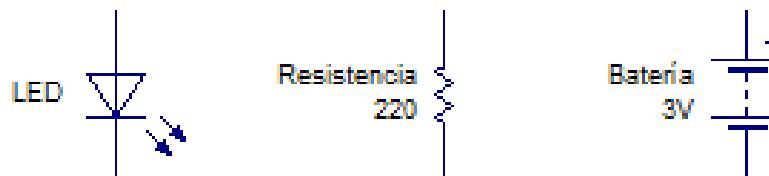
¿Qué es lo que se mueve para que el led encienda?

¿Qué crees que pasa si aumenta el voltaje de la batería (pila)?

¿Qué crees que pasa si disminuye el voltaje de la batería (pila)?

¿Qué crees que pasa si se desconecta la batería?

**C.** Dibuja (por medio de trazos) cómo conectarías el led y la resistencia a la batería de 3 volts (figura 25).



**Figura 25.** Diagrama de una pila, una resistencia y un led

Con base en el inciso C, responde los siguientes cuestionamientos:

Al realizar los trazos, ¿el led se enciende o permanece apagado?

Enciende

Permanece apagado

¿Por qué?

¿Qué sucede si aumenta el valor de la resistencia?

¿Qué sucede si disminuye el valor de la resistencia?

¿Qué sucede si quitas o desconectas la resistencia?

En el **inciso A** se pretende que los estudiantes elijan el diagrama que representa a un circuito eléctrico, reconozcan que el voltaje de entrada es suministrado por una fuente de alimentación y que la corriente (electrones) fluye del voltaje de entrada (polo positivo) a tierra (polo negativo), es decir, el circuito eléctrico es cerrado. El led por ser un diodo tiene polaridad (positiva - negativa). Identifiquen que, en los diagramas de circuitos eléctricos los elementos se representan por símbolos, tales como: tierra, el diodo (led) y el voltaje de entrada.

En el **inciso B**, se espera que conecten el led con la pila por medio de trazos (líneas). Reconozcan que la pila y el led tienen polaridad (positiva - negativa) para ser conectados correctamente. Debido a que las conexiones no son físicas sino abstractas (trazos), se considera que los estudiantes retomen una imagen mental para dicha conexión. Se pretende que reconozcan el cambio (flujo de electrones o corriente). Este flujo provoca que el led se ilumine, si aumenta el voltaje, aumenta el flujo de corriente y aumenta la intensidad luminosa; si disminuye el voltaje, disminuye el flujo de corriente y disminuye la intensidad luminosa; si se desconecta la batería no hay flujo de corriente, por lo tanto, el led no enciende.

El **inciso C** tiene la finalidad que los estudiantes conecten, por medio de trazos (líneas), el led y la resistencia con la pila. La resistencia no tiene polaridad, por lo que se puede conectar de cualquier manera. Se pretende que reconozcan el efecto que tiene el cambio de la resistencia. Si la resistencia aumenta la intensidad luminosa disminuye; si la resistencia disminuye la intensidad luminosa aumenta; si se desconecta la resistencia no hay flujo de corriente, por lo tanto, el led no enciende. El análisis se sintetiza en la tabla 3.

**Tabla 3.** Análisis de la situación diagnóstica 1

Categoría de análisis	Subcategoría	Indicadores
	Práctica social.	<i>Prædicere</i>
	Práctica de referencia.	La práctica que realizan los ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y en sistemas computacionales, que consiste en el análisis de circuitos eléctricos (campo de la electricidad).

Desarrollo de prácticas	Práctica socialmente compartida.	No se especifica
	Prácticas a nivel de actividades.	No se especifica
	Prácticas a nivel de acciones.	Inciso A. Comparar diagramas. Inciso B. Dibujar conexiones por medio de trazos. Inciso C. Dibujar conexiones por medio de trazos.
Sistema de referencia variacional: ¿Por qué cambia de esa manera?	Causalidad: ¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?	Relación entre variables: Inciso A. Cantidad de electrones (carga eléctrica). Inciso B. Intensidad luminosa respecto al voltaje. Inciso C. Intensidad luminosa respecto a la resistencia.
	Temporización: ¿Cómo cambia?	Comportamiento del cambio: Inciso A. Flujo de electrones de positivo a negativo. Inciso B. Si el voltaje aumenta, la intensidad luminosa aumenta. Si el voltaje disminuye, la intensidad luminosa disminuye. Inciso C. Si la resistencia aumenta, la intensidad luminosa disminuye. Si la resistencia disminuye, la intensidad luminosa aumenta.

#### 4.2.2. SITUACIÓN DIAGNÓSTICA 2. EXPERIMENTACIÓN CON UN LED

La situación diagnóstica 2 se centra en observar el comportamiento del led a través de la experimentación.

##### Situación diagnóstica 2. Experimentación con un led

**A.** Relaciona con una flecha el elemento de un circuito eléctrico (diagrama físico) con su símbolo (diagrama eléctrico), observa la figura 26:

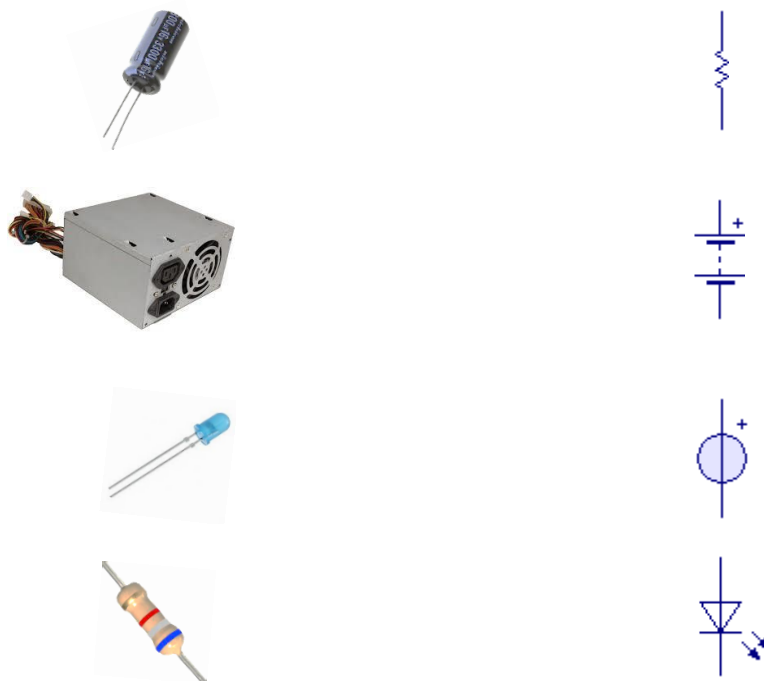
Elemento de un circuito eléctrico



Símbolo

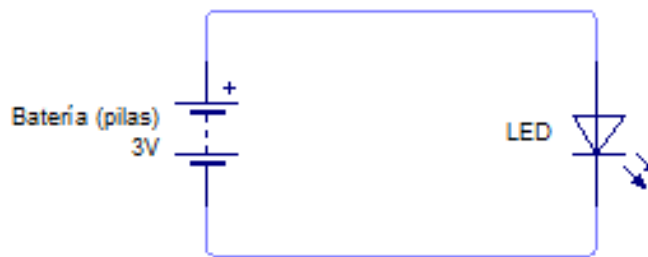






**Figura 26.** Elementos y símbolos de un circuito eléctrico

**B.** Conecta dos pilas en serie y realiza las conexiones (con cables) correspondientes al siguiente diagrama de circuito eléctrico (figura 27):



**Figura 27.** Diagrama de un circuito eléctrico con un led y una pila

¿Qué pasa con el led?

¿Por qué crees que ocurre ese fenómeno?

¿Qué se mueve en el circuito eléctrico?

**C.** Agrega una resistencia al circuito eléctrico anterior y dibuja su diagrama eléctrico correspondiente:

**D.** Realiza las conexiones (con cables) de acuerdo con el diagrama anterior, al considerar una resistencia de 220 ohms.

Responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué pasa con el led?

¿Por qué crees que ocurre ese fenómeno?

**E.** Realiza las conexiones (con cables) correspondientes, pero ahora con una resistencia de 1,000 ohms.

Responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué pasa si aumenta el valor de la resistencia?

¿Qué pasa si disminuye el valor de la resistencia?

El **inciso A**, tiene la intención de que los estudiantes reconozcan que cada elemento de un circuito eléctrico se representa por un símbolo. En el **inciso B** realicen conexiones por medio de cables de un led con la pila de acuerdo con su polaridad (positiva - negativa). Así también, identifiquen que existe una relación entre variables: voltaje e intensidad luminosa. En el **inciso C** se pretende que dibujen el diagrama eléctrico que represente la conexión de un led y una resistencia con una pila. En el **inciso D**, se pide que conecten, por medio de cables, el led y la resistencia con la pila, de acuerdo con el diagrama creado. Reconozcan que al agregar una resistencia el flujo de corriente disminuye, es decir, la resistencia se opone al paso de corriente. En el **inciso E** se espera que los estudiantes identifiquen que, a mayor resistencia menor intensidad luminosa y a menor resistencia mayor intensidad luminosa. El análisis se sintetiza en la tabla 4.

**Tabla 4.** Análisis de la situación diagnóstica 2

Categoría de análisis	Subcategoría	Indicadores
	Práctica social.	<i>Prædiciere</i>
	Práctica de referencia.	La práctica que realizan los ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y en sistemas computacionales que consiste en el

Desarrollo de prácticas		análisis de circuitos eléctricos (campo de la electricidad).
	Práctica socialmente compartida.	No se especifica
	Prácticas a nivel de actividades.	No se especifica
	Prácticas a nivel de acciones.	<b>Inciso A.</b> Relacionar por medio de flechas. <b>Inciso B.</b> Conectar por medio de cables. <b>Inciso C.</b> Dibujar un diagrama de circuito eléctrico. <b>Inciso D.</b> Conectar por medio de cables. <b>Inciso E.</b> Conectar por medio de cables.
Sistema de referencia variacional: ¿Por qué cambia de esa manera?	Causalidad: ¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?	Relación entre variables: <b>Inciso A.</b> No se especifica. <b>Inciso B.</b> Cantidad de electrones (carga eléctrica). <b>Inciso C.</b> No se especifica. <b>Inciso D.</b> Intensidad luminosa respecto a la resistencia. <b>Inciso E.</b> Intensidad luminosa respecto a la resistencia.
	Temporización: ¿Cómo cambia?	Comportamiento del cambio: <b>Inciso A.</b> No se especifica. <b>Inciso B.</b> Flujo de electrones de positivo a negativo. <b>Inciso C.</b> No se especifica. <b>Inciso D.</b> Intensidad luminosa disminuye. <b>Inciso E.</b> Si la resistencia aumenta, la intensidad luminosa disminuye. Si la resistencia disminuye, la intensidad luminosa aumenta.

#### 4.2.3. SITUACIÓN DIAGNÓSTICA 3. ANÁLISIS DE DIAGRAMAS ELÉCTRICOS

La situación diagnóstica 3 tiene la intención de analizar diagramas eléctricos con un capacitor.

##### Situación diagnóstica 3. Análisis de diagramas eléctricos

**A.** ¿Cuál de los siguientes diagramas consideras que es un circuito eléctrico?

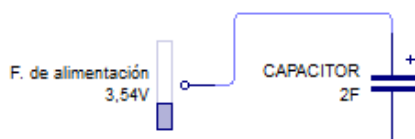


Diagrama 1. Inciso A

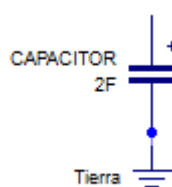


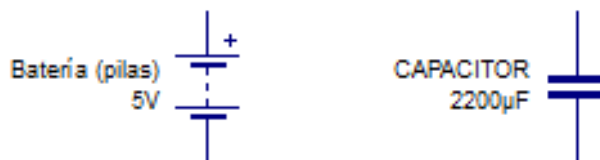
Diagrama 2. Inciso B



Diagrama 3. Inciso C

De acuerdo con tu elección, ¿por qué consideras que es un circuito eléctrico?

**B.** Dibuja (por medio de trazos) cómo conectarías el capacitor a las pilas que entregan 5 volts.



Con base en el inciso **B**, responde los siguientes cuestionamientos:

- ¿Qué le pasa al capacitor?
- ¿Por qué crees que sucede ese fenómeno?
- ¿Qué pasa si aumenta el voltaje de las pilas?
- ¿Qué pasa si disminuye el voltaje de las pilas?

El **inciso A**, tiene la intención de que los alumnos reconozcan que un circuito eléctrico es cerrado, es decir, la corriente eléctrica fluye a través de capacitor suministrada por la fuente de alimentación y después a tierra. En el **inciso B** se espera que dibujen, por medio de trazos, la conexión del capacitor con la batería considerando la polaridad. Reconozcan que el capacitor almacena cargas eléctricas. Si el voltaje aumenta, el capacitor almacena mayor cantidad de cargas. Si el voltaje disminuye, el capacitor almacena menor cantidad de cargas. El análisis se sintetiza en la tabla 5.

**Tabla 5.** Análisis de la situación diagnóstica 3

Categoría de análisis	Subcategoría	Indicadores
Desarrollo de prácticas	Práctica social.	<i>Prædiciere</i>
	Práctica de referencia.	La práctica que realizan los ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y en sistemas computacionales que consiste en el análisis de circuitos eléctricos (campo de la electricidad).
	Práctica socialmente compartida.	No se especifica
	Prácticas a nivel de actividades.	No se especifica
	Prácticas a nivel de acciones.	Inciso A. Comparar diagramas. Inciso B. Dibujar conexiones por medio de trazos.
Sistema de referencia variacional: ¿Por qué cambia de esa manera?	Causalidad: ¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?	Relación entre variables: Inciso A. Cantidad de electrones (carga eléctrica). Inciso B. Voltaje respecto al tiempo.
	Temporización: ¿Cómo cambia?	Comportamiento del cambio: Inciso A. Flujo de electrones de positivo a negativo. Inciso B. Si aumenta el voltaje, aumenta el almacenamiento de cargas eléctricas. Si disminuye el voltaje disminuye el almacenamiento de cargas eléctricas.

#### 4.2.4. SITUACIÓN DIAGNÓSTICA 4. EXPERIMENTACIÓN CON UN CAPACITOR

Esta situación tiene la intención de interactuar con el modelo físico de un circuito eléctrico RC para el análisis del comportamiento de carga de un capacitor. Para el desarrollo de las actividades se requiere de un multímetro digital, un capacitor de 2,200 microfaradios, un celular (o cámara de video), cables tipo caimán, tres pilas AA y una resistencia de 10 kilohms. La situación se centra en la experimentación.

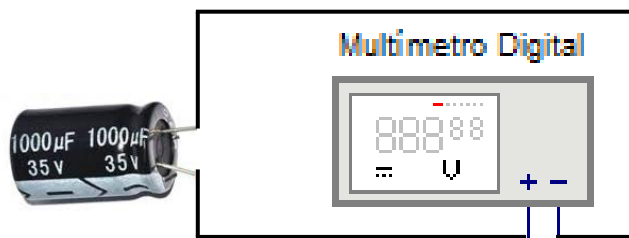
#### Situación diagnóstica 4. Experimentación con un capacitor

**A.** Descarga el capacitor al conectar sus dos terminales (positiva y negativa), durante 10 segundos, como se muestra en la figura 28.



**Figura 28.** Descarga del capacitor

**B.** Conecta el multímetro digital para medir el voltaje del capacitor (ver figura 29).

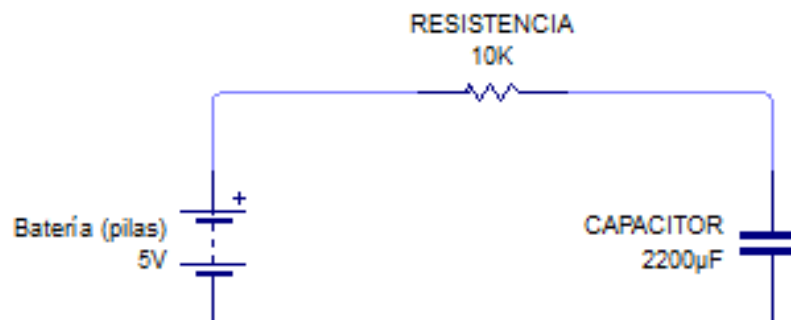


**Figura 29.** Medición del voltaje

Responde el cuestionamiento:

¿Cuál es el voltaje del capacitor? \_\_\_\_\_.

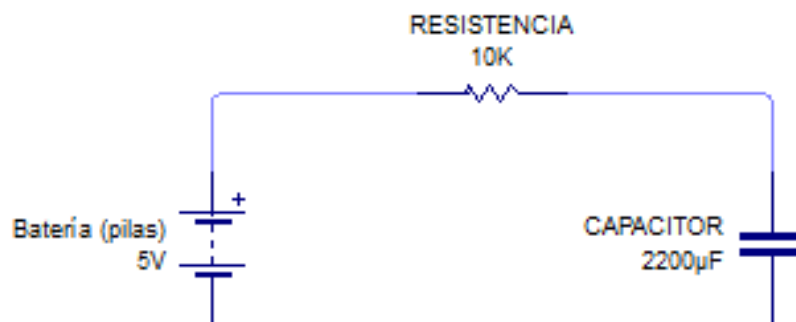
**C.** Realiza las conexiones (con cables) correspondientes con el siguiente diagrama (figura 30).



**Figura 30.** Configuración RC

Nota. Conecta las tres pilas en serie. No conectes la terminal negativa de las pilas con el capacitor.

**D.** Conecta el multímetro digital a las terminales del capacitor. Conecta la terminal negativa de las pilas a la terminal negativa del capacitor (figura 31) y simultáneamente graba un video (30 segundos de duración) observando el voltaje (en la pantalla del multímetro) del capacitor.



**Figura 31.** Conexión de la terminal negativa de las pilas a la terminal negativa del capacitor

Responde los cuestionamientos:

¿Qué cambia?

¿Respecto de qué cambia?

**E.** Con base en la grabación (video), completa la tabla 6.

**Tabla 6.** Datos de medición del voltaje

Tiempo, en segundos	Voltaje del capacitor, en volts
0	
5	
10	
15	
20	
25	
30	

En el **inciso A** se pide que descarguen el capacitor, es decir, que no tenga carga eléctrica. En el **inciso B** se espera que conecten el multímetro digital en las terminales positiva y negativa para medir el voltaje inicial (cero volts) del capacitor. El **inciso C** tiene la finalidad de que los estudiantes conecten las pilas en serie con

la resistencia y el capacitor, sin conectar la terminal negativa. En el **inciso D** conecten el multímetro digital en las terminales del capacitor y graben un video observando la lectura del voltaje. Reconozcan que el voltaje cambia respecto al tiempo. Y en el **inciso E** se pide que completen una tabla donde se establece la relación del voltaje de carga respecto al tiempo.

**Tabla 7.** Análisis de la situación diagnóstica 4

Categoría de análisis	Subcategoría	Indicadores
Desarrollo de prácticas	Práctica social.	<i>Prædiciere</i>
	Práctica de referencia.	La práctica que realizan los ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y en sistemas computacionales que consiste en el análisis de circuitos eléctricos (campo de la electricidad).
	Práctica socialmente compartida.	No se especifica
	Prácticas a nivel de actividades.	No se especifica
	Prácticas a nivel de acciones.	<b>Inciso A.</b> Conectar las dos terminales (positiva y negativa) del capacitor. <b>Inciso B.</b> Conectar el multímetro digital para medir el voltaje del capacitor. <b>Inciso C.</b> Conectar las pilas, la resistencia y el capacitor. <b>Inciso D.</b> Medir el voltaje del capacitor con el multímetro. Grabar un video. <b>Inciso E.</b> Completar una tabla.
Sistema de referencia variacional: ¿Por qué cambia de esa manera?	Causalidad: ¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?	Relación entre variables: <b>Inciso A.</b> No se especifica. <b>Inciso B.</b> El voltaje. <b>Inciso C.</b> No se especifica. <b>Inciso D.</b> EL voltaje de carga respecto al tiempo. <b>Inciso E.</b> EL voltaje de carga respecto al tiempo.
	Temporización: ¿Cómo cambia?	Comportamiento del cambio: <b>Inciso A.</b> No se especifica. <b>Inciso B.</b> No se especifica. <b>Inciso C.</b> No se especifica. <b>Inciso D.</b> No se especifica. <b>Inciso E.</b> No se especifica.



4.2.5. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 1. PREDICCIÓN DEL VOLTAJE DE CARGA: ANÁLISIS NUMÉRICO DEL PRIMER ORDEN DE VARIACIÓN

La situación de aprendizaje 1 se centra en el estudio del cambio que permita la predicción del voltaje de carga mediante el análisis del primer orden de variación.

Situación de aprendizaje 1. Predicción del voltaje de carga: análisis numérico del primer orden de variación

A. Retoma los valores de la tabla 6 y calcula las primeras diferencias (en la tabla 8) para cada dos valores de las variables (tiempo y voltaje).

Tabla 8. Cálculo de las primeras diferencias

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Primeras diferencias
Estado posterior - estado anterior =	0		Estado posterior - estado anterior =
	5		
	10		
	15		
	20		
	25		
	30		

B. Compara cada dos valores del tiempo y cada dos valores del voltaje. Realiza tu análisis con base en las tablas 9 y 10.

**Tabla 9.** Comparación de la variable tiempo

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable tiempo aumenta o disminuye
El estado posterior es		Que el estado anterior	

**Tabla 10.** Comparación del voltaje del capacitor

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
El estado posterior es		Que el estado anterior	

**C.** Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento de la variable tiempo:

Describe el comportamiento del voltaje:

¿El voltaje del capacitor está en proceso de carga o en proceso de descarga?

¿Por qué?

**D.** De acuerdo con el comportamiento, predice el voltaje del capacitor al transcurrir 35 segundos, de la siguiente manera:

1. Calcula el promedio de las primeras diferencias (variación)

2. Usa el modelo predictivo

$$\text{Estado futuro} = \text{Estado actual} + \text{variación}$$

¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?

3. Describe la relación del valor obtenido (predicción) con el comportamiento anterior:

En el **inciso A** se espera que los estudiantes calculen las primeras diferencias de la variable tiempo y de la variable voltaje. El **inciso B** tiene la finalidad de comparar estados de las variables para reconocer el cambio. En el **inciso C** se espera que reconozcan que el tiempo y el voltaje aumentan. El **inciso D** se centra

en el cálculo del promedio de las primeras diferencias y la predicción del voltaje mediante el modelo predictivo.

**Tabla 11.** Análisis de la situación de aprendizaje 1

Categoría de análisis	Subcategoría	Indicadores
Desarrollo de prácticas	Práctica social.	<i>Prædiciere</i>
	Práctica de referencia.	La práctica que realizan los ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y en sistemas computacionales que consiste en el análisis de circuitos eléctricos (campo de la electricidad).
	Práctica socialmente compartida.	Predicción.
	Prácticas a nivel de actividades.	Comparación y seriación.
	Prácticas a nivel de acciones.	<b>Inciso A.</b> Calcular diferencias. <b>Inciso B.</b> No se especifica. <b>Inciso C.</b> No se especifica. <b>Inciso D.</b> Calcular el promedio.
Sistema de referencia variacional: ¿Por qué cambia de esa manera?	Causalidad: ¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?	Relación entre variables: <b>Inciso A.</b> Voltaje respecto al tiempo. <b>Inciso B.</b> Tiempo. Voltaje. <b>Inciso C.</b> Tiempo. Voltaje. <b>Inciso D.</b> Voltaje respecto al tiempo.
	Temporización: ¿Cómo cambia?	Comportamiento del cambio: <b>Inciso A.</b> Cuantificación del cambio. <b>Inciso B.</b> Si el estado posterior es mayor al anterior, la variable aumenta. Si el estado posterior es menor al anterior, la variable disminuye. <b>Inciso C.</b> El tiempo aumenta uniformemente. El voltaje aumenta. <b>Inciso D.</b> El voltaje aumenta conforme pasa el tiempo.

#### 4.2.6. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 2. PREDICCIÓN DEL VOLTAJE DE CARGA: ANÁLISIS NUMÉRICO DEL SEGUNDO ORDEN DE VARIACIÓN

La situación de aprendizaje 2 se centra en la predicción del voltaje de carga mediante el análisis del segundo orden de variación.

## Situación de aprendizaje 2. Predicción del voltaje de carga: análisis numérico del segundo orden de variación

**A.** Retoma la tabla 8 de la situación de aprendizaje 1 y calcula las segundas diferencias (en la tabla 12) para cada dos valores del voltaje.

**Tabla 12.** Cálculo de las segundas diferencias

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Primeras diferencias	Segundas diferencias
	0		Estado posterior - estado anterior =	Estado posterior - estado anterior =
	5			
	10			
	15			
	20			
	25			
	30			

**B.** Compara cada dos valores del voltaje. Realiza tu análisis con base en la siguiente tabla

**Tabla 13.** Comparación del voltaje

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
El estado posterior es		Que el estado anterior	

**C.** Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento del voltaje del capacitor:

**D.** De acuerdo con el comportamiento, predice el voltaje del capacitor al transcurrir 35 segundos, de la siguiente manera:

1. Calcula el promedio de las segundas diferencias (variación de la variación)
2. Usa el modelo predictivo

$$\text{Estado futuro} = \text{Estado actual} + \text{variación} + \text{variación de la variación}$$

¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?

3. Describe la relación del valor obtenido (predicción) con el comportamiento del voltaje del capacitor:

Se plantea el **inciso A** con la intención de calcular las segundas diferencias realizando la resta entre el estado posterior y el estado anterior de las primeras variaciones. El **inciso B** se establece para comparar si el estado posterior es mayor, menor o igual que el anterior, con la intención de reconocer cambios en el segundo orden de variación. En el **inciso C** se espera que analicen todas las comparaciones para reconocer el carácter estable del cambio en el comportamiento del voltaje del capacitor. El **inciso D** pretende que los estudiantes calculen el promedio de las segundas variaciones para obtener un dato representativo. Usen el modelo predictivo propio de la Serie de Taylor para predecir el voltaje del capacitor.

**Tabla 14.** Análisis de la situación de aprendizaje 2

Categoría de análisis	Subcategoría	Indicadores
Desarrollo de prácticas	Práctica social.	<i>Prædiciere</i>
	Práctica de referencia.	La práctica que realizan los ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y en sistemas computacionales que consiste en el análisis de circuitos eléctricos (campo de la electricidad).
	Práctica socialmente compartida.	Predicción.
	Prácticas a nivel de actividades.	Comparación y seriación.

	Prácticas a nivel de acciones.	<b>Inciso A.</b> Calcular diferencias de las diferencias. <b>Inciso B.</b> No se especifica. <b>Inciso C.</b> No se especifica. <b>Inciso D.</b> Calcular el promedio. Usar el modelo predictivo.
Sistema de referencia variacional: ¿Por qué cambia de esa manera?	Causalidad: ¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?	Relación entre variables: <b>Inciso A.</b> Voltaje respecto al tiempo. <b>Inciso B.</b> Primera variación. <b>Inciso C.</b> Voltaje respecto al tiempo. <b>Inciso D.</b> Voltaje respecto al tiempo.
	Temporización: ¿Cómo cambia?	Comportamiento del cambio: <b>Inciso A.</b> No se especifica. <b>Inciso B.</b> El voltaje aumenta. <b>Inciso C.</b> El voltaje aumenta cada vez más lento. <b>Inciso D.</b> El voltaje aumenta cada vez más lento.

#### 4.2.7. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 3. PREDICCIÓN DEL VOLTAJE DE CARGA: ANÁLISIS GRÁFICO

La situación de aprendizaje 3 se centra en la predicción del voltaje de carga mediante el análisis de gráficas.

##### Situación de aprendizaje 3. Predicción del voltaje de carga: análisis gráfico

**A.** Retoma los valores de la tabla 12. Construye la gráfica de la segunda variación (segundas diferencias) respecto al tiempo



**B.** Analiza la gráfica y describe el comportamiento de la segunda variación del voltaje:

**C.** Construye la gráfica de la primera variación (primeras diferencias) respecto al tiempo



**D.** Analiza la gráfica y describe el comportamiento de la variación del voltaje:

**E.** Construye la gráfica del voltaje del capacitor respecto al tiempo



**F.** Relaciona el comportamiento de la gráfica del inciso A y del inciso C para predecir el voltaje del capacitor al transcurrir los 35 segundos.

¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?

Argumenta tu respuesta:

En el **inciso A** se espera que los estudiantes grafiquen las segundas diferencias. En el **inciso B** reconozcan que sus valores afectan a las primeras diferencias, y éstas al voltaje del capacitor. En el **inciso C** que grafiquen las primeras diferencias. En el **inciso D** reconozcan que las primeras diferencias afectan el comportamiento del voltaje del capacitor. Se establece el **inciso E** con la intención de que relacionen los comportamientos anteriores con el voltaje del capacitor. En

el **inciso F** reconozcan que el voltaje aumenta cada vez más lento. Este comportamiento les permita predecir el voltaje en un tiempo posterior.

**Tabla 15.** Análisis de la situación de aprendizaje 3

Categoría de análisis	Subcategoría	Indicadores
Desarrollo de prácticas	Práctica social.	<i>Prædicere</i>
	Práctica de referencia.	La práctica que realizan los ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y en sistemas computacionales que consiste en el análisis de circuitos eléctricos (campo de la electricidad).
	Práctica socialmente compartida.	Predicción.
	Prácticas a nivel de actividades.	Comparación y seriación.
	Prácticas a nivel de acciones.	<b>Inciso A.</b> Colocar puntos en un sistema coordinado de acuerdo con una tabla. <b>Inciso B.</b> No se especifica. <b>Inciso C.</b> Colocar puntos en un sistema coordinado de acuerdo con una tabla. <b>Inciso D.</b> No se especifica. <b>Inciso E.</b> No se especifica.
Sistema de referencia variacional: ¿Por qué cambia de esa manera?	Causalidad: ¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?	Relación entre variables: <b>Inciso A.</b> Voltaje y tiempo. <b>Inciso B.</b> Voltaje y tiempo. <b>Inciso C.</b> Voltaje y tiempo. <b>Inciso D.</b> Voltaje y tiempo. <b>Inciso E.</b> Voltaje y tiempo. <b>Inciso F.</b> Voltaje y tiempo.
	Temporización: ¿Cómo cambia?	Comportamiento del cambio: <b>Inciso A.</b> No se especifica. <b>Inciso B.</b> El voltaje aumenta cada vez más lento. <b>Inciso C.</b> No se especifica. <b>Inciso D.</b> El voltaje aumenta. <b>Inciso E.</b> El voltaje aumenta cada vez más lento. <b>Inciso F.</b> El voltaje aumenta cada vez más lento.

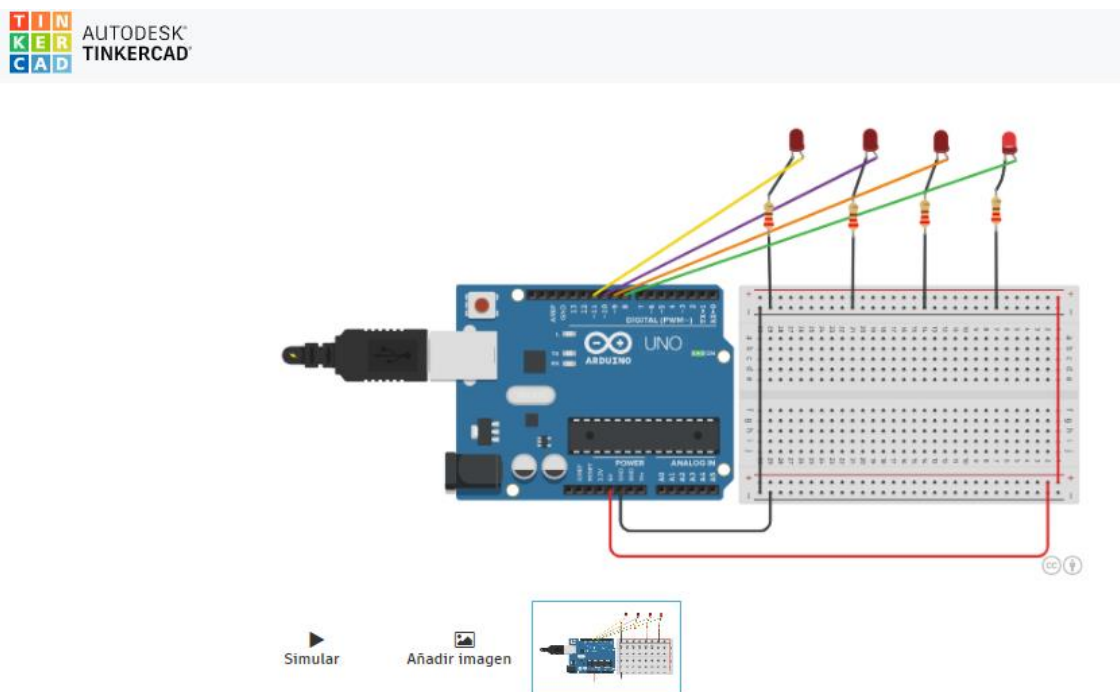


#### 4.2.8. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 4. DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN PANEL DE INDICADORES

Una de las aplicaciones del capacitor es el control de actuadores<sup>1</sup>, los cuales pueden ser: motores, solenoides, altavoces, leds, pantallas, entre otros. El control se establece de acuerdo con el comportamiento del voltaje de carga del capacitor. En este caso, la situación de aprendizaje 4 se centra en diseño de un panel de indicadores mediante un sistema de leds interactuando con una simulación.

##### Situación de aprendizaje 4. Simulación de un panel de indicadores

**A.** Interactúa con la simulación en TINKERCAD (figura 32). En la interfaz de la simulación oprime el botón de simular y observa el funcionamiento del panel de indicadores (sistema de leds).



**Figura 32.** Interfaz de Tinkercad

Fuente: <https://www.tinkercad.com/things/5I79Cev0XeO>

<sup>1</sup> Los actuadores son dispositivos electrónicos (transductores) que pueden afectar el entorno transformando un valor digital en un movimiento mecánico, la producción de sonido, un cambio de temperatura, o de intensidad luminosa.

Responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué cambia?

¿Respecto de qué cambia?

**B.** Modifica los valores del Delay con base en la tabla 16. Primero con 100 milisegundos, después con 400 milisegundos, seguido de 800 milisegundos y así sucesivamente.

**Tabla 16.** Valores de control

Delay
100 milisegundos
400 milisegundos
800 milisegundos
1300 milisegundos
1900 milisegundos

**C.** Analiza cada comportamiento y responde el siguiente cuestionamiento:

¿Qué observas en la simulación con relación al comportamiento del voltaje de carga del capacitor?

El **inciso A** se refiere a la interacción con la simulación del panel de indicadores. Se espera que los estudiantes reconozcan qué cambia (encendido – apagado de los leds) y respecto de qué cambia (tiempo). En el **inciso B** se espera que modifiquen el Delay (tiempo) y observen el comportamiento en los leds. El **inciso C** tiene la intención de que los estudiantes identifiquen que si el Delay es mayor, el encendido – apagado de los leds disminuye. Si el Delay es menor, el encendido – apagado de los leds aumenta.

**Tabla 17.** Análisis de la situación de aprendizaje 4

Categoría de análisis	Subcategoría	Indicadores
	Práctica social.	<i>Prædiciere</i>
	Práctica de referencia.	La práctica que realizan los ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y en sistemas computacionales que consiste en el

Desarrollo de prácticas		análisis de circuitos eléctricos (campo de la electricidad).
	Práctica socialmente compartida.	No se especifica.
	Prácticas a nivel de actividades.	No se especifica.
	Prácticas a nivel de acciones.	<b>Inciso A.</b> Simular el panel de indicadores <b>Inciso B.</b> Modificar el Delay. <b>Inciso C.</b> Interactuar con la simulación.
Sistema de referencia variacional: ¿Por qué cambia de esa manera?	Causalidad: ¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?	Relación entre variables: <b>Inciso A.</b> Encendido-apagado y el tiempo. <b>Inciso B.</b> Tiempo-Delay. <b>Inciso C.</b> Encendido – apagado y el tiempo.
	Temporización: ¿Cómo cambia?	Comportamiento del cambio: <b>Inciso A.</b> El encendido-apagado de los leds respecto al tiempo. <b>Inciso B.</b> No se especifica. <b>Inciso C.</b> Si el Delay es mayor el encendido – apagado disminuye. Si el Delay es menor el encendido – apagado aumenta.

### 4.3. EXPERIMENTACIÓN (PUESTA EN ESCENA)

La experimentación se refiere a la implementación de las situaciones diagnósticas y de aprendizaje en un escenario tipo laboratorio virtual. Debido a la contingencia de la pandemia provocada por la COVID - 19, la educación ha sufrido cambios importantes. Principalmente las clases migraron hacia lo virtual, es decir, la interacción en videoconferencias (Zoom, Google Meet, Skype, etc.), la comunicación en redes sociales (WhatsApp, Facebook, YouTube, E-mails) y en el uso de plataformas educativas (Moodle, Edmodo, Google Classroom). Esto ha generado que los docentes cambien sus prácticas educativas al diseñar actividades enfocadas en el uso de recursos digitales.

La implementación de las situaciones se llevó a cabo en sesiones virtuales y con actividades en la plataforma Moodle. En las sesiones virtuales se presentó cada una de las situaciones diagnósticas y de aprendizaje. La puesta en escena se llevó a cabo con un grupo de quince estudiantes que cursan el segundo cuatrimestre de Ingeniería en Sistemas Computacionales de la Universidad de Los Altos de Chiapas. En este trabajo se van presentando resultados cada seis estudiantes, que permitan el análisis *a posteriori*.

#### 4.4. ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

El análisis *a posteriori* “se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de trabajo de los estudiantes en clase o fuera de ella” (Artigue, 1995, p. 48). La validación se realiza con base en una confrontación entre el análisis *a priori* y el *a posteriori*. Entonces, en este apartado se discute cada una de las situaciones diagnósticas y de aprendizaje.

##### 4.4.1. RESULTADOS DE LA SITUACIÓN DIAGNÓSTICA 1. ANÁLISIS DE DIAGRAMAS ELÉCTRICOS

Los resultados de la situación diagnóstica 1 se presentan a continuación:

UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS

Situación diagnóstica 1. Análisis de diagramas eléctricos

A. ¿Cuál de los siguientes diagramas consideras que es un circuito eléctrico?

Diagrama 1. Inciso A

Diagrama 2. Inciso B

De acuerdo a tu elección, ¿Por qué consideras que es un circuito eléctrico?

Figura 33. Sesión virtual de la situación diagnóstica 1, inciso A

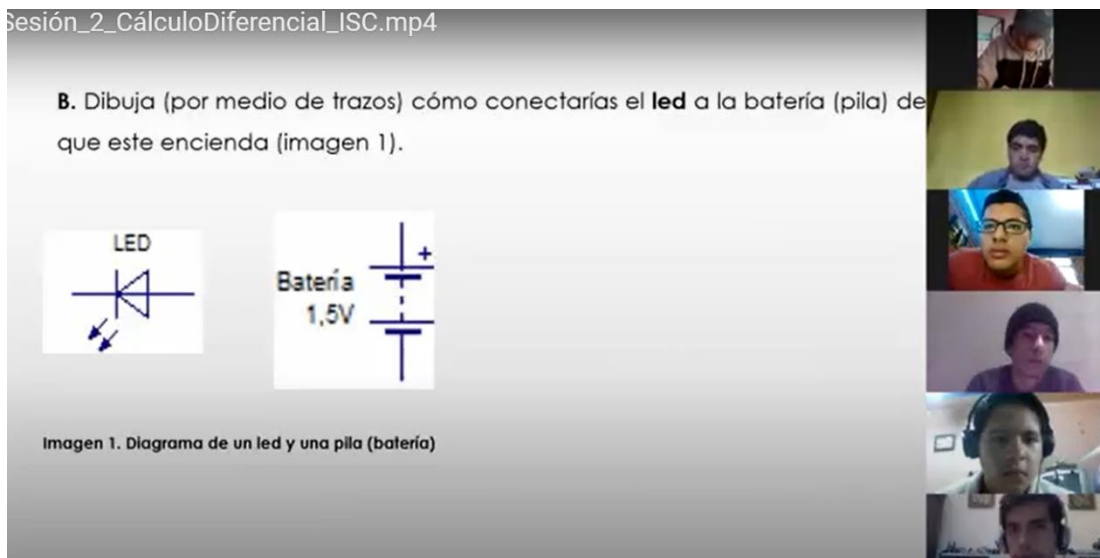
**Profesor:** ¿Cuál de los diagramas consideras que es un circuito eléctrico? y ¿por qué consideras que es un circuito eléctrico?

**Alumno\_1:** El inciso B, porque tiene un voltaje de entrada donde produce energías o cargas electrónicas.

**Alumno\_2:** El diagrama C, por la manera en que están conectados, tiene entrada y resistencia.

- Alumno\_3:** La opción B, ya que muestra el voltaje de la entrada y conexiones a la cual puede pasar la electricidad para poder encenderlo.
- Alumno\_4:** El diagrama C, el signo positivo de la pila a través de las fuerzas transporta energía.
- Alumno\_5:** El B, ya que muestra la entrada de la energía pasando por la resistencia.
- Alumno\_6:** La B, porque es la entrada del voltaje luego pasa por el led y termina donde están las rayitas.

En los argumentos que plantean los estudiantes se puede establecer que reconocen un voltaje de entrada. Tienen dificultades en identificar que la corriente fluye a través del led y que tiene polaridad. Algunos confunden el símbolo del led con el de la resistencia. Comparan los diagramas al observar sus componentes (fuente de alimentación, led y tierra). No especifican el movimiento de electrones de positivo a negativo. Algunos señalan que lo que se mueve es la electricidad, la energía o el voltaje.

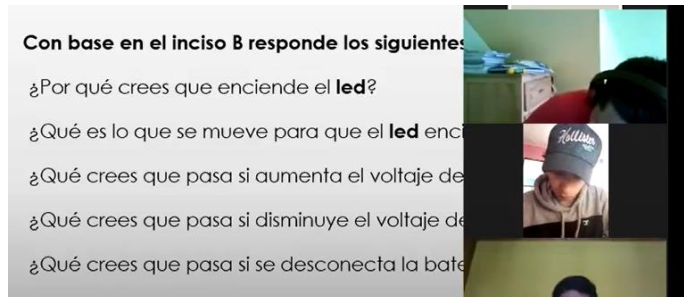


**Figura 34.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 1, inciso B

- Profesor:** ¿Cómo conectarías el led a la batería (pila) de 1.5 v, para que encienda?
- Alumno\_1:** No realiza los trazos.

- Alumno\_2:** La terminal positiva de la batería la conecta al ánodo (positivo) del led. El cátodo (negativo) del led no lo conecta.
- Alumno\_3:** Lo conecta sobre el símbolo de la batería, pero no reconoce la polaridad.
- Alumno\_4:** La terminal positiva y la negativa de la batería las conecta al ánodo del led.
- Alumno\_5:** No reconoce la terminal de entrada y la de salida del led, por lo que conecta el ánodo a la esquina superior del símbolo (triángulo) y al cátodo en la esquina inferior del símbolo del led.

Se establece que la mayoría realiza los trazos pero de manera inadecuada, es decir, solo un estudiante conecta la terminal positiva de la batería al ánodo (positivo) del led y la terminal negativa al cátodo. Los demás tienen dificultades en reconocer que el led tiene polaridad para que la electricidad fluya en el circuito eléctrico y el led encienda.



**Figura 35.** Cuestionamientos del inciso B

- Profesor:** ¿Por qué crees que enciende el led?
- Alumno\_1:** Por la carga positiva, pasa hacer carga negativa y así funcionando la pila y enciende la luz del led.
- Alumno\_2:** Por la manera en el que está y porque es positivo.
- Alumno\_3:** Por la electromagnetividad o por las conexiones.
- Alumno\_4:** Porque la corriente fluye desde la batería al led.
- Alumno\_5:** Porque al estar conectado a la batería le da energía.
- Alumno\_6:** Porque la batería tiene un voltaje de 1.5 v, la carga positiva lo lleva al led que tiene carga negativa.

En este cuestionamiento algunos argumentan que la batería es la que suministra corriente o energía, para que el led encienda.

**Profesor:** ¿Qué es lo que se mueve para que el led encienda?

**Alumno\_1:** La carga positiva del led a la batería para poder convertir a una carga negativa y poder encender el led.

**Alumno\_2:** La energía, el voltaje.

**Alumno\_3:** Por los sensores de movimiento que tienen.

**Alumno\_4:** Para que se encienda tiene que circular los electrones dentro de los cables.

**Alumno\_5:** El voltaje ya que al acomodarlo en positivo hace la función de encenderlo.

**Alumno\_6:** El voltaje de la batería le da corriente al led.

Algunos señalan que el voltaje es el que se mueve. Uno señala que la carga. Otro la energía y otro los electrones. Probablemente estas nociones de deben a que no se puede observar el movimiento con la vista.

**Profesor:** ¿Qué crees que pasa si aumenta el voltaje de la pila?

**Alumno\_1:** Explotaría el led por mucha carga de la batería (pila).

**Alumno\_2:** Se dañaría.

**Alumno\_3:** Disminuye la batería.

**Alumno\_4:** El amperaje de la corriente que circula por el circuito aumentará.

**Alumno\_5:** Se podría llegar a quemar ya que no aguantaría.

**Alumno\_6:** Llegará un momento en que el led no podrá soportar y hará una chispa y se funde o un corto circuito.

Comparten la idea de que si el led recibe mucho voltaje se daña o se quema.

**Profesor:** ¿Qué crees que pasa si disminuye el voltaje de la pila?

**Alumno\_1:** Apagaría o estuviera apagando y encendiendo.

**Alumno\_2:** La batería no duraría igual.

**Alumno\_3:** Aumenta la batería y se mantiene estable.

**Alumno\_4:** El amperaje de la corriente que circula por el circuito disminuirá, provocando que el led baje de intensidad.

**Alumno\_5:** No tendría suficiente energía para encender el led.

**Alumno\_6:** Llegará un momento en que el led no recibirá mucha carga positiva y negativa y hace que el led no de luz o dé poca.

Algunos señalan que el led genera poca luz o se mantiene apagado.

**Profesor:** ¿Qué crees que pasa si se desconecta la batería?

**Alumno\_1:** Se apagaría.

**Alumno\_2:** Nada, deja de trabajar o se apaga.

**Alumno\_3:** La batería en un cierto tiempo puede llegar a tener fallas.

**Alumno\_4:** El amperaje disminuirá totalmente y esto provocará que el led se apague.

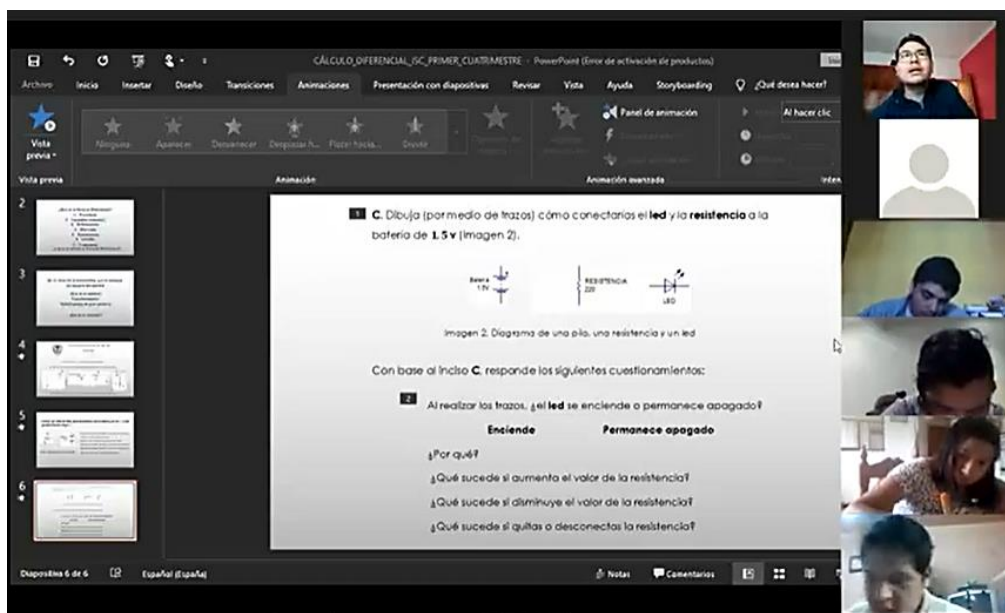
**Alumno\_5:** Perdería la energía y no podría encender el led.

**Alumno\_6:** El led se apaga porque ya no está recibiendo voltaje.

Los estudiantes comparten la idea de que el led se mantiene apagado.

En los argumentos del **inciso B** se establece que la batería es la que suministra corriente o energía para que el led encienda. Tienen dificultades en los conceptos al no observar a simple vista: energía, electrones, carga, corriente y voltaje. Señalan que, si el voltaje aumenta el led se daña o se quema. En este inciso se centran en el objeto físico y no en su propiedad física (intensidad luminosa), esto provoca que no relacionen las variables voltaje – intensidad luminosa. Aunque uno de ellos argumenta que si el voltaje disminuye el led da poca luz. Así también, si no hay voltaje el led no enciende.





**Figura 36.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 1, inciso C

**Profesor:** ¿Cómo conectarías el led y la resistencia a la batería (pila) de 1.5 volts, para que encienda?

**Alumno\_1:** No realiza los trazos.

**Alumno\_2:** La terminal positiva de la batería la conecta al ánodo del led y el cátodo lo conecta a la resistencia. El circuito no se conecta a tierra.

**Alumno\_3:** La resistencia se conecta a la pila y al ánodo del led, pero no se especifica la polaridad.

**Alumno\_4:** La resistencia la conecta a la terminal positiva de la batería y al ánodo del led. El cátodo es conectado a tierra (terminal negativa de la batería).

**Alumno\_5:** La resistencia se conecta a la pila y al ánodo del led, pero no se especifica la polaridad.

**Alumno\_6:** La resistencia la conecta a la terminal positiva de la batería y al ánodo del led. El cátodo es conectado a tierra (terminal negativa de la batería).

Algunos realizan las conexiones correctamente y otros presentan dificultades debido a que no reconocen la polaridad del led.

**Profesor:** ¿El led enciende o permanece apagado?, ¿por qué?

- Alumno\_1:** Permanece apagado, porque la batería está interrumpida por la resistencia y por lo consiguiente el led no podría encender.
- Alumno\_2:** Enciende, por la manera en que es conectado.
- Alumno\_3:** Permanece apagado, ya que no tiene un pulsador o conexión para que pueda encender.
- Alumno\_4:** Enciende, al no tener interruptor que controle al circuito la energía fluiría haciendo que el led se mantenga encendido.
- Alumno\_5:** Permanece apagado, porque la energía de positivo y negativo no le permite.
- Alumno\_6:** Permanece apagado, porque la resistencia lo frena o disminuye el paso de la corriente eléctrica.

Se observa que tienen dificultades en el funcionamiento de la resistencia, es decir, la mayoría no reconoce que la resistencia se opone al flujo de corriente eléctrica.

- Profesor:** ¿Qué sucede si aumenta el valor de la resistencia?
- Alumno\_1:** No enciende por la carga interrumpida de la pila.
- Alumno\_2:** No será adecuado para la conexión.
- Alumno\_3:** La corriente disminuye ya que no puede soportar mucho.
- Alumno\_4:** La resistencia se calcula dependiendo de los volts, en este caso al aumentarle. La resistencia hará que la corriente no llegue al led.
- Alumno\_5:** Perdería su energía para el led.
- Alumno\_6:** La corriente disminuye porque tiene más resistencia.

Algunos reconocen un primer orden variación, al decir que la corriente disminuye si la resistencia aumenta.

- Profesor:** ¿qué sucede si disminuye el valor de la resistencia?
- Alumno\_1:** El led ya podría estar encendido.
- Alumno\_2:** No aguantaría la batería.
- Alumno\_3:** La corriente se incrementa y funciona con normalidad.
- Alumno\_4:** El valor del voltaje será el mismo en todo el circuito llegando al led.
- Alumno\_5:** La resistencia se podría quemar.
- Alumno\_6:** La corriente aumenta porque tiene poca resistencia.

Algunos reconocen un primer orden de variación al decir que la corriente aumenta si disminuye el valor de la resistencia.

**Profesor:** ¿Qué sucede si quitas o desconectas la resistencia?

**Alumno\_1:** Encendería por completo el led.

**Alumno\_2:** Se puede quemar o no fluiría bien la electricidad.

**Alumno\_3:** Ya no pasa la electricidad para prender el led y en un momento puede tener fallas que haría que se descompusiera.

**Alumno\_4:** El amperaje (electrones) fluiría en su cantidad total haciendo que el circuito se sobrecaliente, provocando que se queme.

**Alumno\_5:** No pasaría la energía hacia el led.

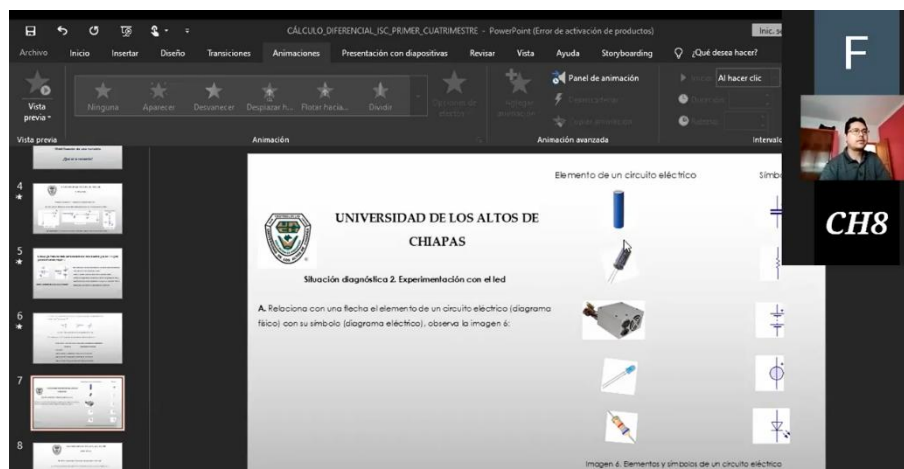
**Alumno\_6:** Se produce un corto circuito por la cantidad de electrones que circulan.

Argumentan que el led se puede quemar o en dado caso no encendería.

Con base en los argumentos se puede decir que los estudiantes realizan los trazos para conectar el led y la resistencia con la batería teniendo dificultades al reconocer la polaridad del led. Sobre la conexión de la resistencia no se observó dificultad de conexión ya que no tiene polaridad, es decir, sus terminales se conectan de cualquier forma. Establecen que si la resistencia aumenta la intensidad luminosa disminuye. Si la resistencia disminuye la intensidad luminosa aumenta. Reconocen la relación entre dos variables: resistencia – intensidad luminosa. Si se desconecta la resistencia, el led no enciende o se quema.

#### **4.4.2. RESULTADOS DE LA SITUACIÓN DIAGNÓSTICA 2. EXPERIMENTACIÓN CON UN LED**

Los resultados de la situación diagnóstica 2 se presentan a continuación:



**Figura 37.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 2, inciso A

**Profesor:** Relaciona con una flecha el elemento de un circuito eléctrico (diagrama físico) con su símbolo (diagrama eléctrico).

**Alumno\_1:** Relaciona los cinco elementos con su símbolo.

**Alumno\_2:** No reconoce el símbolo de cada elemento.

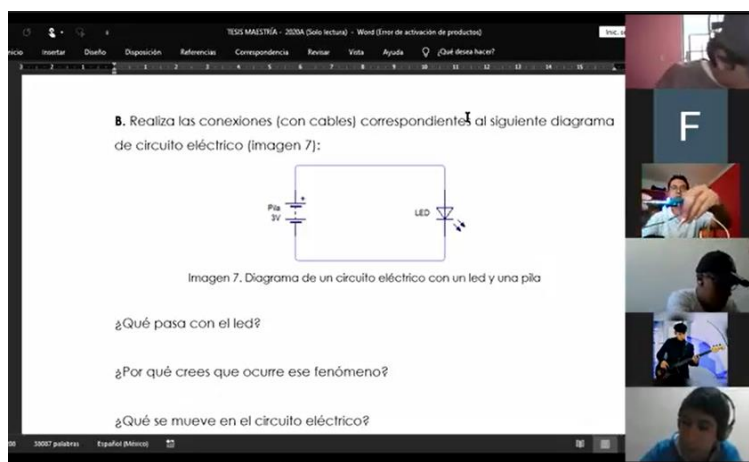
**Alumno\_3:** Se confunde al relacionar el símbolo del capacitor y símbolo del led.

**Alumno\_4:** Relaciona los cinco elementos con su símbolo.

**Alumno\_5:** No relaciona ningún elemento.

**Alumno\_6:** Relaciona los cinco elementos con su símbolo.

Se observa que algunos estudiantes relacionan cada elemento con su símbolo, sin embargo, algunos presentan dificultades. Esto se debe a que los símbolos pueden ser diferentes dependiendo del software en el que se diseñen.



**Figura 38.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 2, inciso B

**Profesor:** ¿Qué pasa con el led?

**Alumno\_1:** Empieza a fluir la energía del lado positivo al negativo; pasando por el led, haciendo que encienda. Se debe conectar bien la fuente de alimentación para que funcione.

**Alumno\_2:** La energía pasa directamente y calienta el led demasiado.

**Alumno\_3:** Comienza a prender.

**Alumno\_4:** Enciende.

**Alumno\_5:** Empieza a proporcionar energía luminosa.

**Alumno\_6:** El led enciende ya que recibe la energía necesaria.

En los argumentos que presentan los estudiantes comparten la idea de que si se realizan las conexiones del diagrama, el led enciende. Uno de los estudiantes reconoce la polaridad del led al decir que “empieza a fluir la energía del lado positivo al negativo; pasando por el led, haciendo que encienda”. Otro de los alumnos confunde el led con una resistencia al considerar el calentamiento.

**Profesor:** ¿Por qué crees que ocurre ese fenómeno?

**Alumno\_1:** Por la corriente eléctrica que fluye de positivo a negativo, en el circuito.

**Alumno\_2:** La energía pasa a través del cable (caimán) hacia el led.

**Alumno\_3:** Porque los cables que están conectados al led y a las pilas hace que corra la corriente.

**Alumno\_4:** Porque la batería tiene suficiente voltaje y por la corriente que pasa.

**Alumno\_5:** Porque la batería tiene un voltaje y ese voltaje pasa sobre el led y lo transforma en luz.

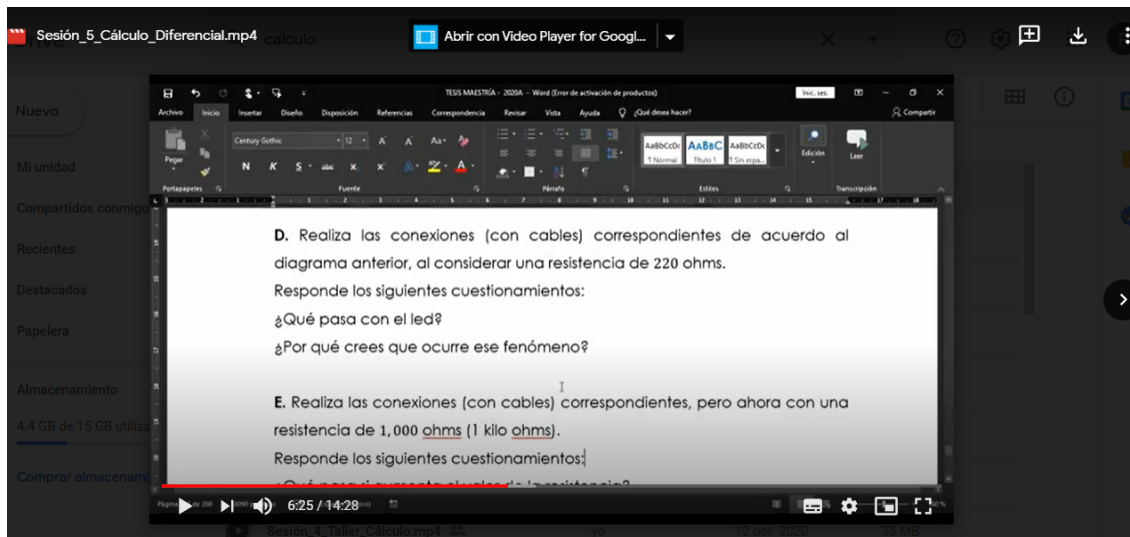
**Alumno\_6:** Porque el led recibe buen voltaje.

Algunos argumentan que la corriente eléctrica es la que provoca que el led encienda. Otros señalan que el voltaje de la batería. Probablemente consideran que el voltaje y la corriente son sinónimos. El voltaje es el que almacena y suministra los electrones y la corriente es el flujo de esos electrones en un circuito eléctrico.

**Profesor:** ¿Qué se mueve en el circuito eléctrico?

- Alumno\_1:** Corriente eléctrica, el cual es un movimiento ordenado de cargas libres, llamados electrones.
- Alumno\_2:** La energía eléctrica que es transmitida a través de los cables.
- Alumno\_3:** Lo que se mueve son los cables y las pilas (conexiones).
- Alumno\_4:** La energía eléctrica por medio de cables.
- Alumno\_5:** La corriente que tiene la batería, la carga positiva y la carga negativa.
- Alumno\_6:** Por la corriente de la pila.

En este cuestionamiento argumentan que la corriente eléctrica es la que fluye. Uno de ellos señala que la energía eléctrica es la que se mueve. Otro relaciona la corriente eléctrica con las cargas y los electrones. Y uno de ellos no observa la propiedad física (corriente eléctrica) sino más bien lo tangible (cables y pilas).



**Figura 39.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 2, inciso D y E

- Profesor:** ¿Qué pasa con el led?
- Alumno\_1:** Baja la intensidad.
- Alumno\_2:** La luz se baja.
- Alumno\_3:** Enciende, pero de manera muy baja, más bien disminuye su intensidad.
- Alumno\_4:** El led enciende con una intensidad normal, sin que se pueda quemar.

**Alumno\_5:** Disminuye la cantidad de luz que emite el led.

**Alumno\_6:** Disminuye su intensidad de luz.

Al conectar una resistencia argumentan que baja la intensidad luminosa del led. Aunque uno de ellos señala que el led tiene un funcionamiento normal sin que pueda quemarse.

**Profesor:** ¿Por qué crees que ocurre ese fenómeno?

**Alumno\_1:** Porque la resistencia disminuye su carga.

**Alumno\_2:** Porque el circuito tiene la resistencia, lo que hace que reciba menos energía, pero seguro.

**Alumno\_3:** Al pasar la energía por la resistencia provoca que disminuya la corriente, ya que ésta la retiene.

**Alumno\_4:** La resistencia controla la corriente que fluye a través del led sin quemarlo.

**Alumno\_5:** La resistencia genera una pérdida de energía que fluye.

**Alumno\_6:** Porque la resistencia detiene o frena la circulación de las cargas eléctricas de la batería.

En estos argumentos comparten la idea de que la resistencia disminuye la corriente eléctrica o energía que recibe el led.

**Profesor:** ¿Qué pasa si aumenta el valor de la resistencia?

**Alumno\_1:** La carga es un poco mayor y hay un mejor equilibrio.

**Alumno\_2:** Se baja más la luz del led.

**Alumno\_3:** La corriente disminuye al pasar por la resistencia y esto provoca que la intensidad disminuya.

**Alumno\_4:** El led enciende con intensidad baja.

**Alumno\_5:** El led puede permanecer apagado.

**Alumno\_6:** Disminuye su carga eléctrica y por consecuencia el led disminuye su luz.

Los estudiantes señalan que si aumenta el valor de la resistencia la intensidad luminosa disminuye o en dado caso el led se apaga.

**Profesor:** ¿Qué pasa si disminuye el valor de la resistencia?

**Alumno\_1:** La carga disminuye.

**Alumno\_2:** Aumenta su luz del led.

**Alumno\_3:** La corriente pasa de mayor manera, es decir, el led enciende con mayor intensidad.

**Alumno\_4:** La intensidad aumenta dependiendo del valor del voltaje.

**Alumno\_5:** Aumenta la energía luminosa.

**Alumno\_6:** Aumenta su carga eléctrica y a cambio de eso el led aumenta su luz.

Los estudiantes relacionan, los elementos con su símbolo, por medio de flechas. Comparten la idea de que si se realizan las conexiones el led enciende. Conectan por medio de cables para reconocer la relación entre el voltaje y la intensidad luminosa. Reconocen que si la resistencia aumenta la intensidad luminosa disminuye y si la resistencia disminuye la intensidad luminosa aumenta. Tienen dificultades en identificar que los electrones son los que fluyen (corriente) en el circuito eléctrico.

#### 4.4.3. RESULTADOS DE LA SITUACIÓN DIAGNÓSTICA 3. ANÁLISIS DE DIAGRAMAS ELÉCTRICOS

Los resultados de la situación diagnóstica 3 se presentan a continuación:



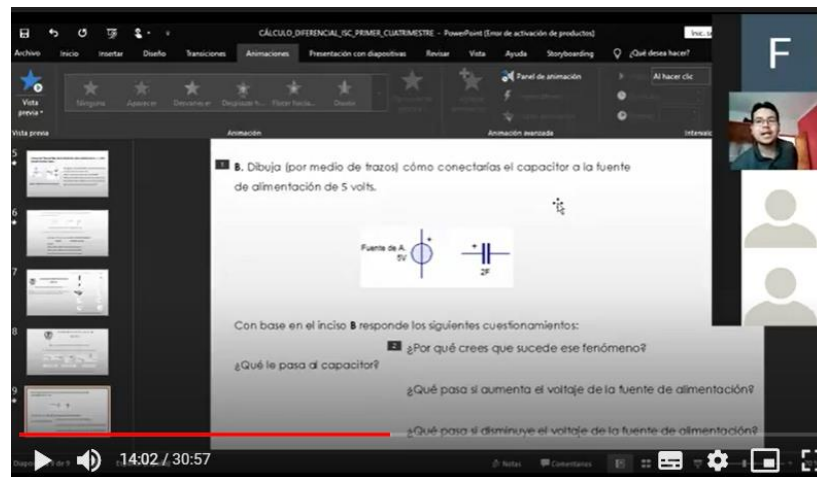
**Figura 40.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 3, inciso A

**Profesor:** ¿Cuál de los siguientes diagramas consideras que es un circuito eléctrico?



- Alumno\_1:** El diagrama 3, ya que tiene una fuente de alimentación, el capacitor y lleva la energía a tierra.
- Alumno\_2:** Inciso C, ya que tiene un punto de entrada, resguarda y salida de energía.
- Alumno\_3:** El inciso A, tiene cargas positivas y negativas.
- Alumno\_4:** El diagrama C, porque tiene una fuente de alimentación y recorre sobre el capacitor y de ahí llega a tierra.
- Alumno\_5:** El inciso C, porque tiene fuente de alimentación, el capacitor y tierra.
- Alumno\_6:** El diagrama 3, porque tiene una fuente de alimentación, el capacitor y tierra; sin la fuente no sería un circuito.

En un diagrama eléctrico se reconoce que el voltaje suministra los electrones. Estos electrones fluyen (corriente) a través de los cables llegando al capacitor para cargarlo y se cierra el circuito a tierra. En los argumentos de los estudiantes se observa que comparten esa idea.



**Figura 41.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 3, inciso B

- Profesor:** Dibuja (por medio de trazos) cómo conectarías el capacitor a la fuente de alimentación de 5 volts.
- Alumno\_1:** La terminal positiva de la fuente de alimentación la conecta al positivo del capacitor y el negativo a tierra.
- Alumno\_2:** La terminal positiva de la fuente de alimentación la conecta al positivo del capacitor.

- Alumno\_3:** La terminal positiva de la fuente de alimentación la conecta al positivo del capacitor y el negativo al negativo de la fuente de alimentación.
- Alumno\_4:** La terminal positiva de la fuente de alimentación la conecta al positivo del capacitor y el negativo al negativo de la fuente de alimentación.
- Alumno\_5:** La terminal positiva de la fuente de alimentación la conecta al positivo del capacitor, no conecta a tierra.
- Alumno\_6:** La terminal positiva de la fuente de alimentación la conecta al positivo del capacitor y el negativo al negativo de la fuente de alimentación.

Algunos estudiantes conectan la terminal positiva de la fuente de alimentación con el positivo del capacitor y la terminal negativa de la fuente de alimentación al negativo del capacitor, reconociendo la polaridad. Algunos solo conectan el positivo de la fuente de alimentación con el positivo del capacitor.

**Profesor:** ¿Qué le pasa al capacitor?

- Alumno\_1:** Conserva la energía creando un campo eléctrico.
- Alumno\_2:** Almacena la energía de la pila para su uso.
- Alumno\_3:** Funcionaría sin ningún problema o cumpliría su función.
- Alumno\_4:** Almacena energía en forma de campo eléctrico.
- Alumno\_5:** Empieza a acumular la energía eléctrica.
- Alumno\_6:** Almacena energía.

Los estudiantes comparten la idea de que el capacitor almacena, conserva o acumula la energía eléctrica.

**Profesor:** ¿Por qué crees que sucede ese fenómeno?

- Alumno\_1:** Porque así funciona correctamente.
- Alumno\_2:** Es su función, el almacenamiento de energía.
- Alumno\_3:** Porque el capacitor no está conectado a un alto voltaje.
- Alumno\_4:** Porque puede almacenar y liberar energía por sus dos placas conductoras.

**Alumno\_5:** Porque el capacitor recibe la energía de la fuente y es su única función.

**Alumno\_6:** Porque la energía circula.

Presentan algunas dificultades para explicar el fenómeno. El capacitor es un dispositivo que almacena cargas eléctricas (electrones) suministradas por el voltaje de la fuente de alimentación.

**Profesor:** ¿Qué pasa si aumenta el voltaje de la fuente de alimentación?

**Alumno\_1:** Aumenta la capacidad (energía) del capacitor.

**Alumno\_2:** El capacitor no soporta la energía.

**Alumno\_3:** Se quemaría el capacitor por mucha energía recibida.

**Alumno\_4:** Llegará a tener un corto circuito por no tener una mayor capacidad.

**Alumno\_5:** El capacitor se quema o no funciona.

**Alumno\_6:** Se puede hinchar el capacitor.

En estos argumentos señalan que, al recibir un mayor voltaje el capacitor se daña o se quema. No toman en cuenta que el capacitor tiene ciertas especificaciones para soportar el voltaje. Si soporta ese voltaje el capacitor almacena un mayor número de cargas eléctricas.

**Profesor:** ¿Qué pasa si disminuye el voltaje de la fuente de alimentación?

**Alumno\_1:** No tendría suficiente energía para que el capacitor funcione.

**Alumno\_2:** No carga.

**Alumno\_3:** No pasaría una cantidad de energía adecuada.

**Alumno\_4:** El capacitor mantendrá almacenada esa energía o disminuirá.

**Alumno\_5:** Disminuye su rendimiento del capacitor y no llegaría mucha energía.

**Alumno\_6:** No funcionaría bien el capacitor.

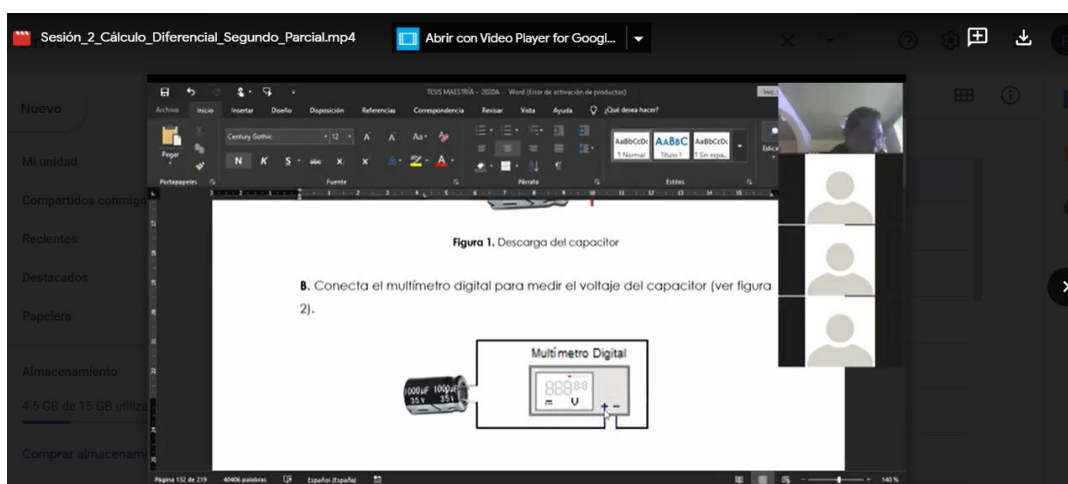
Algunos estudiantes comparten la idea de que el capacitor no funciona y otros argumentan que disminuye su energía y la almacena.

Con respecto al **inciso B** el capacitor tiene diferente funcionamiento en un circuito eléctrico, se encarga de almacenar cargas eléctricas suministradas por el

voltaje de la fuente de alimentación. Algunos estudiantes reconocen la polaridad del capacitor. Señalan que el capacitor almacena, conserva o acumula la energía eléctrica. Tuvieron dificultades al reconocer que si el voltaje aumenta el capacitor almacena un mayor número de cargas. Y si el voltaje disminuye dicen que el capacitor no funciona o disminuye su energía eléctrica.

#### 4.4.4. RESULTADOS DE LA SITUACIÓN DIAGNÓSTICA 4. EXPERIMENTACIÓN CON UN CAPACITOR

Los resultados de la situación diagnóstica 4 se presentan a continuación:



**Figura 42.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 4, inciso A y B

- Profesor:** Descarga el capacitor al conectar sus dos terminales (positiva y negativa) durante 10 segundos.
- Alumno\_1:** Conecta las dos terminales (positiva y negativa) y descarga el capacitor.
- Alumno\_2:** Conecta las dos terminales (positiva y negativa) y descarga el capacitor.
- Alumno\_3:** Conecta las dos terminales (positiva y negativa) y descarga el capacitor.
- Alumno\_4:** Conecta las dos terminales (positiva y negativa) y descarga el capacitor.
- Alumno\_5:** No conecta las terminales.

**Alumno\_6:** Conecta las dos terminales (positiva y negativa) y descarga el capacitor.

Los estudiantes conectan las dos terminales para descargar el capacitor. Solo uno de ellos no conecta las terminales en un primer intento, posteriormente observa la conexión correcta.

**Profesor:** Conecta el multímetro digital para medir el voltaje del capacitor.  
¿Cuál es el voltaje del capacitor?

**Alumno\_1:** Cero, porque lo descargamos.

**Alumno\_2:** 0.

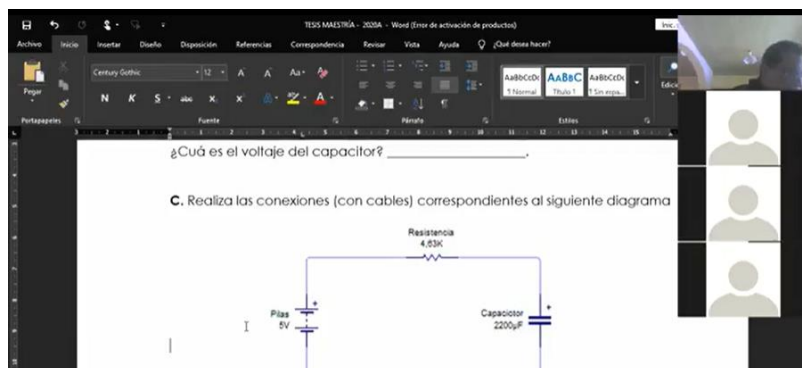
**Alumno\_3:** Cero, el capacitor no tiene carga.

**Alumno\_4:** Cero volts.

**Alumno\_5:** Cero, ya que lo descargamos.

**Alumno\_6:** Cero, ya que anteriormente se descargó.

Argumentan que al descargar el capacitor el voltaje es cero.



**Figura 43.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 4, inciso C

**Profesor:** Realiza las conexiones (con cables) correspondientes al diagrama. Conecta el multímetro digital a las terminales del capacitor. ¿Qué mide el multímetro?

**Alumno\_1:** Conecta el multímetro a las terminales del capacitor y argumenta que el instrumento mide la carga eléctrica en volts.

**Alumno\_2:** Coloca el número cero sin unidad de medida.

**Alumno\_3:** Calcula la capacitancia.

**Alumno\_4:** Mide el voltaje de capacitor.

**Alumno\_5:** La energía del capacitor.

**Alumno\_6:** El voltaje de capacitor.

Presentan dificultades al indicar qué es lo que se mide. Uno de ellos señala que la carga eléctrica es el voltaje. Otro confunde la capacitancia con el voltaje. Y otro de ellos trata la energía como el voltaje.

**Profesor:** Conecta la terminal negativa de las pilas a la terminal negativa del capacitor y simultáneamente graba un video (30 segundos de duración). ¿Qué cambia? y ¿respecto de qué cambia?

**Alumno\_1:** La energía del capacitor respecto al tiempo.

**Alumno\_2:** No hace explícita la respuesta de los cuestionamientos.

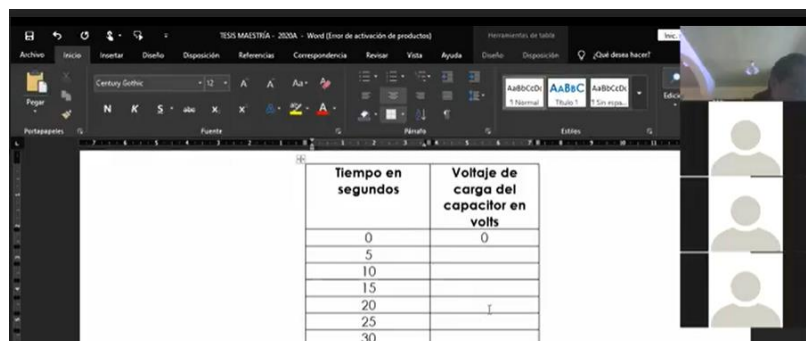
**Alumno\_3:** No hace explícita la respuesta de los cuestionamientos.

**Alumno\_4:** El voltaje de carga.

**Alumno\_5:** Energía y el tiempo.

**Alumno\_6:** El voltaje y el tiempo.

Algunos argumentan que lo que cambia es el voltaje (energía) respecto al tiempo. Uno de ellos solo aborda el qué cambia (voltaje de carga). Algunos no reconocen la relación entre variables.



Tiempo en segundos	Voltaje de carga del capacitor en volts
0	0
5	
10	
15	
20	1
25	
30	

**Figura 44.** Sesión virtual de la situación diagnóstica 4, inciso D y E

**Profesor:** Con base en la grabación (video), completa la tabla.

**Alumno\_1:**

Tiempo (s)	V. capacitor
5	0.20
10	0.07
15	0.04
20	0.03
25	0.02
30	0.02

**Alumno\_2:**

Tiempo en segundos	Voltaje de carga del capacitor en volts
0	0
5	2.1
10	4.8
15	6.1
20	6.4
25	6.4
30	6.4

**Alumno\_3:**

Tiempo en segundos	Voltaje de carga del capacitor en volts.
0	0
5	2.44
10	2.30
15	3.40
20	4.30
25	1.59
30	2.15

**Alumno\_4:**

Tiempo en segundos	Voltaje de carga del capacitor
0	0
5	3.85
10	4.65
15	4.65
20	0.38
25	4.65
30	4.65

**Alumno\_5:**

Tiempo de segundos	Voltaje de carga del capacitor en volts
0 - - - -	- - - - 0
5 - - - -	- - - - 2.44
10 - - - -	- - - - 2.30
15 - - - -	- - - - 3.40
20 - - - -	- - - - 4.30
25 - - - -	- - - - 1.59
30 - - - -	- - - - 2.15

**Alumno\_6:**

Tiempo en segundos	Voltaje de carga del capacitor en volts
0	0
5	1.59
10	2.67
15	3.26
20	3.52
25	3.65
30	3.72

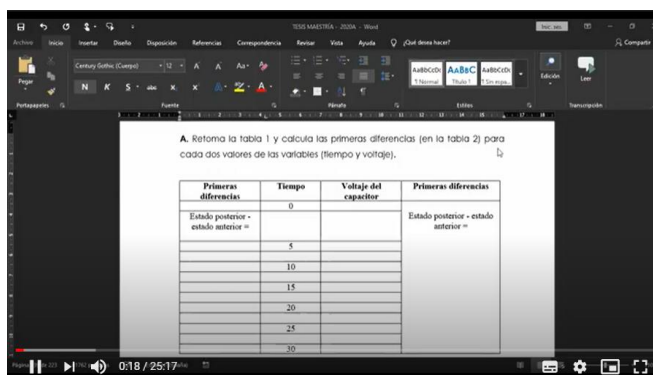
En la tabla del alumno 1 y del alumno 5 se observa que los valores del voltaje casi no cambian puede pensarse que realizó una conexión incorrecta del multímetro digital. La tabla del alumno 2 sobrepasa los 5 volts (voltaje de las pilas). En la tabla del alumno 3 los valores del voltaje aumentan y luego disminuye. En la tabla del alumno 4 se observa que el voltaje va en aumento pero a los 20 segundos obtiene un valor casi cero. Y en la tabla del alumno 6 los valores van en aumento.

En los argumentos de los **inciso D y E** los estudiantes descargan el capacitor y miden el voltaje (0 volts). Presentan dificultades al realizar las conexiones físicas del circuito eléctrico, lo que provocó valores inadecuados al completar la tabla. Algunos reconocen la relación entre el voltaje de carga respecto al tiempo. Otros presentan dificultades.



#### 4.4.5. RESULTADOS DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 1. PREDICCIÓN DEL VOLTAJE DE CARGA: ANÁLISIS NUMÉRICO DEL PRIMER ORDEN DE VARIACIÓN

Los resultados de la situación de aprendizaje 1 se presentan a continuación:



| **Figura 45.** Sesión virtual de la situación de aprendizaje 1, inciso A

**Profesor:** Retoma la tabla anterior y calcula las primeras diferencias para cada dos valores de las variables (tiempo y voltaje).

Alumno\_1:

PRIMERAS DIFERENCIAS	TIEMPO	VOLTAGE EL CAPACITOR	PRIMERAS DIFERENCIAS
5-0=5	0	0	1.09-0=1.09
10-5=5	5	1.09	2.13-1.09=1.04
15-10=5	10	2.13	2.77-2.13=0.64
20-15=5	15	2.77	3.10-2.77=0.33
25-20=5	20	3.10	3.26-3.10=0.16
30-25=5	25	3.26	3.25-3.26=0.01
	30	3.25	

Alumno\_2:

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Primeras diferencias
$5 - 0 = 5$ Estado posterior - estado anterior =	0	0	$0 - 1.09 = 1.09$ Estado posterior = estado anterior =
	5	1.09	
$10 - 5 = 5$	10	2.24	$2.24 - 1.09 = 1.15$
	15	2.80	$2.80 - 2.24 = 0.56$
$15 - 10 = 5$	20	3.11	$3.11 - 2.80 = 0.31$
	25	3.27	$3.27 - 3.11 = 0.16$
$20 - 15 = 5$	30	3.25	$3.25 - 3.27 = 0.05$

Alumno\_3:

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del Capacitor	Primeras diferencias
5	0	0	$0 - 1.18 = 1.18$
5	5	1.18	$2.18 - 1.18 = 1.00$
5	10	2.18	$2.88 - 2.18 = 0.7$
5	15	2.88	$3.13 - 2.88 = 0.25$
5	20	3.13	$3.26 - 3.13 = 0.13$
5	25	3.26	$3.25 - 3.26 = 0.01$
	30	3.25	

Alumno\_4:

Primeras diferencias	Tiempo	voltaje del capacitor	Primeras diferencias
	0	0	
$5 - 0 = 5$	5	1.18	$1.18 - 0 = 1.18$
	10	2.18	$2.18 - 1.18 = 1$
$10 - 5 = 5$	15	2.80	$2.80 - 2.18 = 0.62$
	20	3.11	$3.11 - 2.80 = 0.31$
$15 - 10 = 5$	25	3.26	$3.26 - 3.11 = 0.15$
	30	3.25	$3.25 - 3.26 = -0.01$

**Alumno\_5:**

Primeras diferencias	Tiempo	Voltage del capacitor	Primeras diferencias
$5-0=5$	0	0	$1.18-0=1.18$
$10-5=5$	5	1.18	$2.13-1.18=.95$
$15-10=5$	10	2.13	$2.83-2.13=.7$
$20-15=5$	15	2.83	$3.10-2.83=.27$
$25-20=5$	20	3.10	$3.26-3.10=.16$
$30-25=5$	25	3.26	$3.25-3.26=-0.01$
	30	3.25	

**Alumno\_6:**

Tiempo	Primeras Diferencias	Voltage del Capacitor	Primeras Diferencias
0		0	
5	$5-0=5$	1.18	$1.18-0=1.18$
10	$10-5=5$	2.13	$2.13-1.18=.95$
15	$15-10=5$	2.88	$2.88-2.13=.75$
20	$20-15=5$	3.14	$3.14-2.88=.26$
25	$25-20=5$	3.26	$3.26-3.14=.12$
30	$30-25=5$	3.24	$3.24-3.26=-.02$

Se retoman los resultados de otros seis estudiantes. Se observa que en las primeras diferencias obtienen un valor constante de 5 segundos y calculan las diferencias restando el estado anterior del posterior.

The screenshot shows a Microsoft Word document titled "TESIS MAESTRÍA - 2024 - Word". The document contains two tables for comparison of states.

**Tabla 1. Comparación de la variable tiempo**

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable tiempo aumenta o disminuye
El estado posterior es		Que el estado anterior	

**Tabla 2. Comparación del voltaje**

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
El estado posterior es		Que el estado anterior	

**Figura 46.** Sesión virtual de la situación de aprendizaje 1, inciso B

**Profesor:** Compara cada dos valores del tiempo y cada dos valores del voltaje.  
Realiza tu análisis con base en las tablas.

**Alumno\_1:**

Estado	comparación (mayor igual o menor)	Estado	La variación tiempo Aumenta o disminuye
0-5	mayor	5	Aumento

Estado	Comparación (mayor - igual o menor)	Estado	La variación tiempo Aumenta
0-1.09	mayor	estado Posterior	Aumenta

**Alumno\_2:**

Estado	Comparación (Mayor - igual - menor)	Estado	La variable tiempo aumenta o disminuye
0-5			
El estado Posterior es:	Menor	Que el estado anterior	aumenta

Estado	Comparación (Mayor - igual - menor)	Estado	La variable Voltaje aumenta o disminuye
0-1.18			
El estado Posterior es:	Menor	Que el estado anterior:	Aumenta

**Alumno\_3:**

Tiempo			
Estado	es (Mayor o Menor)	Estado	(aumenta o disminuye)
1.0	Mayor	5	aumenta

voltaje			
Estado	es (Mayor o Menor)	Estado	(aumenta o disminuye)
2.06	Mayor	1.26	aumenta

**Alumno\_4:**

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE TIEMPO AUMENTA O DISMINUYE
	0-5		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Menor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Aumenta

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE VOLTAJE AUMENTA O DISMINUYE
	0-1.09		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Menor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Aumenta

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE TIEMPO AUMENTA O DISMINUYE
	5-10		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Menor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Aumenta

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE VOLTAJE AUMENTA O DISMINUYE
	2.13-1.09		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Mayor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Disminuye

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE TIEMPO AUMENTA O DISMINUYE
	10-15		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Menor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Aumenta

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE VOLTAJE AUMENTA O DISMINUYE
	2.77-2.13		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Mayor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Disminuye

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE TIEMPO AUMENTA O DISMINUYE
	15-20		
EL ESTADO POSTERIOR ES	menor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Aumenta

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE VOLTAJE AUMENTA O DISMINUYE
	2.10-2.77		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Mayor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Disminuye



ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE TIEMPO AUMENTA O DISMINUYE
	<u>20-25</u>		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Menor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Aumenta

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE VOLTAJE AUMENTA O DISMINUYE
	<u>3.26-3.10</u>		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Mayor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Aumenta

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE TIEMPO AUMENTA O DISMINUYE
	<u>25-30</u>		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Menor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Aumenta

ESTADO	COMPARACIÓN ( MAYOR - IGUAL - MENOR )	ESTADO	LA VARIABLE VOLTAJE AUMENTA O DISMINUYE
	<u>3.25-3.26</u>		
EL ESTADO POSTERIOR ES	Menor	QUE EL ESTADO ANTERIOR	Aumenta

#### Alumno\_5:

Estado posterior es	Comparación (mayor-igual-menor)	Estado anterior	La variable tiempo aumenta o disminuye	Estado posterior es	Comparación (mayor-menor-igual)	Estado anterior	La variable voltaje aumenta o disminuye
5	Mayor	0	Aumenta	1.18	Mayor	0	Aumenta
10	Mayor	5	Aumenta	2.13	Mayor	1.18	Aumenta
15	Mayor	10	Aumenta	2.83	Mayor	2.13	Aumenta
20	Mayor	15	Aumenta	3.10	Mayor	2.83	Aumenta
25	Mayor	20	Aumenta	3.26	Mayor	3.10	Aumenta
30	Mayor	25	Aumenta	3.25	Menor	3.26	Disminuye
35	Mayor	30	Aumenta				
40	Mayor	35	Aumenta				

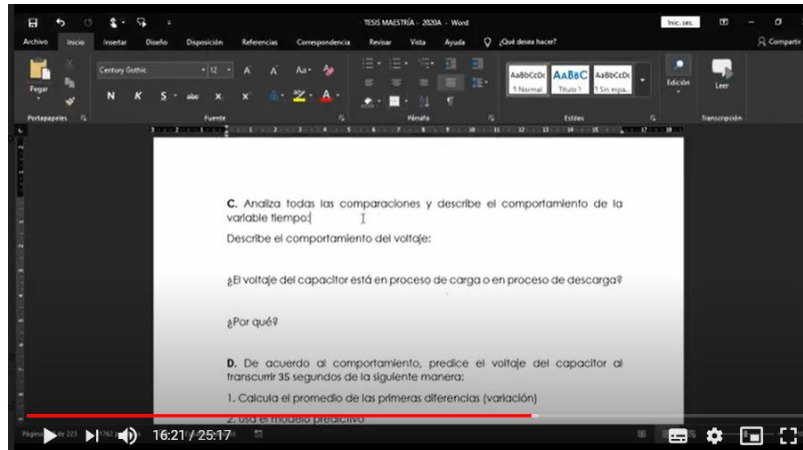
#### Alumno\_6:

ESTADO	COMPARACIÓN (MAYOR - IGUAL - MENOR)	ESTADO	LA VARIABLE TIEMPO AUMENTA O DISMINUYE
El estado posterior es	menor	Que el estado anterior	Aumenta

ESTADO	COMPARACIÓN (MAYOR - IGUAL - MENOR)	ESTADO	LA VARIABLE VOLTAJE AUMENTA O DISMINUYE
Que el estado posterior es	menor	Que el estado anterior	Aumenta

El alumno 1 solo realiza una comparación al argumentar que el tiempo y el voltaje van en aumento. El alumno 2 señala que si el estado posterior es menor el tiempo o el voltaje aumenta. El alumno 3 señala que si el estado posterior es mayor el tiempo o el voltaje aumenta. El alumno 4 analiza varias comparaciones (seriación) y establece que tanto el voltaje como el tiempo van en aumento, se observa que no hace distinción si el estado posterior es mayor o menor para que la variable aumente. El alumno 5 establece que si el estado posterior es mayor al anterior entonces, tanto el tiempo como el voltaje aumentan. Y el alumno 6 realiza una comparación en cada variable donde argumenta que si el estado posterior es menor que el anterior el tiempo o el voltaje aumenta.



**Figura 47.** Sesión virtual de la situación de aprendizaje 1, inciso C

**Profesor:** Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento de la variable tiempo y del voltaje. ¿El voltaje del capacitor está en proceso de carga o en proceso de descarga?, ¿por qué?

**Alumno\_1:** La variable tiempo tiene una constante que aumenta de 5 en 5 hasta llegar a los 30 segundos. La variable voltaje sí tiene variación conforme el tiempo transcurre, ocurre un aumento de voltaje. El capacitor está en proceso de carga.

**Alumno\_2:** La variable voltaje no disminuye constantemente. Se encuentra en proceso de carga porque está en un circuito cerrado que cuenta con una fuente de alimentación.

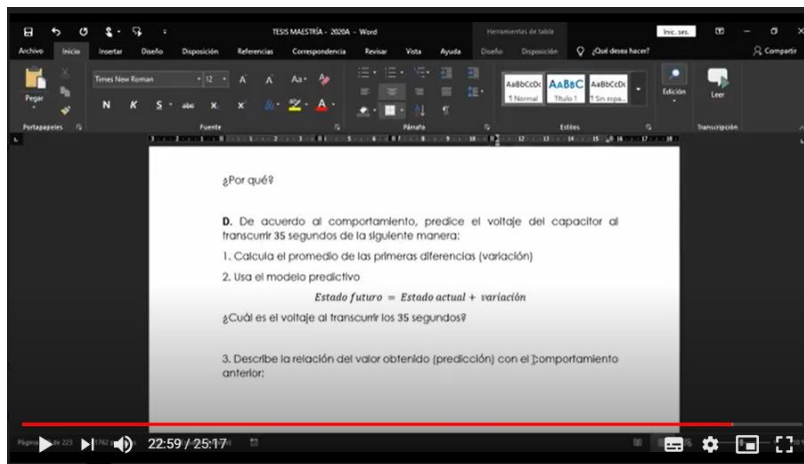
**Alumno\_3:** Cada segundo que pasa va aumentando el tiempo. Conforme pasa el tiempo el capacitor se va cargando hasta llegar a su máxima capacidad y empezar a disminuir poco a poco. El capacitor está en proceso de carga porque va almacenando energía.

**Alumno\_4:** El comportamiento del capacitor no es constante y varía con el tiempo. Está en proceso de carga porque se encuentra conectado a una fuente de poder.

**Alumno\_5:** La variable tiempo va aumentando de 0 a 30. La variable voltaje también va en aumento, llega a un punto que en vez de aumentar, disminuye. El capacitor está en proceso de carga porque el voltaje va en aumento.

**Alumno\_6:** El voltaje va cambiando conforme vaya pasando el tiempo y conforme vaya el proceso del capacitor junto con sus resistencias. Sí, porque lo mantienen conectado para que pueda ir cambiando su voltaje.

En los argumentos comparten la idea de que el tiempo y el voltaje aumentan. Reconocen que el capacitor está en proceso de carga porque almacena cargas eléctricas.



**Figura 48.** Sesión virtual de la situación de aprendizaje 1, inciso D

**Profesor:** Predice el voltaje del capacitor al transcurrir 35 segundos.

**Alumno\_1:** El valor del promedio es de 0.553

El valor obtenido (predicción) es de 3.25

**Alumno\_2:** El voltaje al transcurrir los 35 segundos es de 3.22

**Alumno\_3:** El voltaje es de 3.22

**Alumno\_4:** El voltaje es de 3.22

**Alumno\_5:** El voltaje es de 3.79

**Alumno\_6:** 2.75 es el voltaje al transcurrir los 35 segundos.

Hacen uso del modelo predictivo donde tres de los estudiantes obtienen el valor de 3.22 volts. Los demás obtienen valores próximos a excepción de uno que obtuvo el valor de 0.553 volts.

**Profesor:** Describe la relación del valor obtenido (predicción) con el comportamiento del capacitor.

**Alumno\_1:** No encontré ninguna relación, al contrario obtuve un valor que no concuerda con los parámetros que se debían obtener.

**Alumno\_2:** Ambos van disminuyendo en el voltaje de carga.

**Alumno\_3:** La relación que tienen es que después de llegar al máximo va disminuyendo poco a poco.

**Alumno\_4:** Se hace un proceso al azar.

**Alumno\_5:** El voltaje sigue en aumento con el paso del tiempo.

**Alumno\_6:** El valor obtenido se fue dando conforme al tiempo.

Los estudiantes tuvieron dificultades en relacionar el comportamiento del capacitor. Uno de ellos argumenta que el voltaje aumenta y luego disminuye. Otro señala que el tiempo y el voltaje disminuyen. Y algunos no encuentran ninguna relación.

Con los resultados presentados se puede decir que calculan diferencias (cuantificación del cambio) en estados del tiempo y del voltaje. La mayoría compara solo dos estados de las variables. Comparten la idea de que el tiempo y el voltaje van en aumento. Hacen uso del modelo predictivo propio de la Serie de Taylor (Estado inicial más su variación). Algunos tienen dificultades al calcular el promedio alejándose del valor de predicción. Tienen conflictos en relacionar las dos variables, es decir, ven las variables de forma separada.

#### **4.4.6. RESULTADOS DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 2. PREDICCIÓN DEL VOLTAJE DE CARGA: ANÁLISIS NUMÉRICO DEL SEGUNDO ORDEN DE VARIACIÓN**

Los resultados de la situación de aprendizaje 2 se presentan a continuación:



676785657, 9676747700 E-mail : info@uach.edu.mx FRANCISCO AGUSTIN ZUNIGA CORONEL

## Análisis de las segundas diferencias

Envía las actividades en un PDF



**UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS**

**Situación de aprendizaje 2. Predicción del voltaje de carga: análisis numérico del segundo orden de variación**

**A.** Retoma la tabla de la situación de aprendizaje 2 y calcula las segundas diferencias (en la tabla 2) para cada dos valores de las variables (tiempo y voltaje).

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Primeras diferencias	Segundas diferencias
	0		Estado posterior - estado anterior =	
	5		Estado posterior - estado anterior =	

**Figura 49.** Sesión virtual de la situación de aprendizaje 2, inciso A

**Profesor:** Calcula las segundas diferencias para cada dos valores de las variables.

**Alumno\_1:**

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Primeras diferencias	Segundas diferencias
	0	0		
$5 - 0 = 5$	5	1.18	$1.18 - 0 = 1.18$	$0.95 - 1.18 = -0.23$
$10 - 5 = 5$	10	2.13	$2.13 - 1.18 = 0.95$	$0.7 - 0.95 = -0.25$
$15 - 10 = 5$	15	2.83	$2.83 - 2.13 = 0.7$	$0.27 - 0.7 = -0.43$
$20 - 15 = 5$	20	3.10	$3.10 - 2.83 = 0.27$	$0.16 - 0.27 = -0.11$
$25 - 20 = 5$	25	3.26	$3.26 - 3.10 = 0.16$	$-0.01 - 0.16 = -0.17$
$30 - 25 = 5$	30	3.25	$3.25 - 3.26 = -0.01$	

Alumno\_2:

Primeras diferencias	Tiempo	voltaje del capacitor	Primeras diferencias	segundas diferencias
	0	0		
$5-0=5$			$0-0=0$	
	5	1		$1-0=1$
$10-5=5$			$1-0=1$	
	10	2.18		$1.18-1=0.18$
$15-10=5$			$2.18-1=1.18$	
	15	2.77		$0.59-1.18=-0.59$
$20-15=5$			$2.77-2.18=0.59$	
	20	3.11		$0.34-0.59=-0.25$
$25-20=5$			$3.11-2.77=0.34$	
	25	3.26		$0.15-0.34=-0.19$
$30-25=5$			$3.26-3.11=0.15$	
	30	3.25		$-0.01-0.15=-0.14$
			$3.25-3.26=-0.01$	

Alumno\_3:

Primeras diferencias	Tiempo	voltaje del capacitor	primeras dif	segundas dif
	0	0		
$5-0=5$			$1.18-0=1.18$	
	5	1.18		$1-1.18=-0.18$
$10-5=5$			$2.18-1.18=1$	
	10	2.18		$0.62-1=-0.38$
$15-10=5$			$2.80-2.18=0.62$	
	15	2.80		$0.31-0.62=-0.31$
$20-15=5$			$3.11-2.80=0.31$	
	20	3.11		$0.15-0.31=-0.16$
$25-20=5$			$3.26-3.11=0.15$	
	25	3.26		$-0.07-0.15=-0.16$
$30-25=5$			$3.25-3.26=-0.07$	
	30	3.25		

Alumno\_4:

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Segundas Diferencias
5	0	0	
5	5	1.18	$1.18 - 1.00 = 0.18$
5	10	2.18	$1.00 - 0.7 = 0.3$
5	15	2.88	$0.7 - 0.25 = 0.45$
5	20	3.13	$0.25 - 0.13 = 0.12$
5	25	3.26	$0.13 - 0.01 = 0.12$
5	30	3.25	$0.01 - 0.03 = -0.09$
5	40		

Primeras Diferencias		
0	-	1.18 = 1.18
2.18	-	1.18 = 1.00
2.88	-	2.18 = 0.7
3.13	-	2.88 = 0.25
3.26	-	3.13 = 0.13
3.25	-	3.26 = 0.01

Alumno\_5:

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Segundas diferencias
5 - 0 = 5 Estado posterior - estado anterior =	0	0	$0 - 1.09 = 1.09$ Estado posterior = estado anterior =
10 - 5 = 5	5	1.09	$2.24 - 1.09 = 1.15$
15 - 10 = 5	10	2.24	$2.80 - 2.24 = 0.56$
20 - 15 = 5	15	2.80	$3.11 - 2.80 = 0.31$
25 - 20 = 5	20	3.11	$3.27 - 3.11 = 0.16$
30 - 25 = 5	25	3.27	$3.25 - 3.27 = -0.02$
	30	3.25	

**Alumno\_6:**

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Primeras diferencias	Segundas diferencias
$5 - 0 = 5$	0	0	$1.18 - 0 = 1.18$	$.95 - 1.18 = -.23$
$10 - 5 = 5$	5	1.18	$2.13 - 1.18 = .95$	$0.7 - .95 = -.25$
$15 - 10 = 5$	10	2.13	$2.83 - 2.13 = .7$	$.27 - .7 = -.43$
$20 - 15 = 5$	15	2.83	$3.10 - 2.83 = .27$	$.16 - .27 = -.11$
$25 - 20 = 5$	20	3.10	$3.26 - 3.10 = .16$	$-.01 - .16 = -.17$
$30 - 25 = 5$	25	3.26	$3.25 - 3.26 = -.01$	
	30	3.25		

676785657, 9676747700 E-mail : info@uach.edu.mx FRANCISCO AGUSTIN ZUNIGA CORONEL

**B. Compara cada dos valores del voltaje. Realiza tu análisis con base a la siguiente tabla.**

Tabla. Comparación del voltaje

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
El estado posterior es		Que el estado anterior	

**C. Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento del voltaje del capacitor:**

**D. De acuerdo al comportamiento, predice el voltaje del capacitor al transcurrir 35 segundos, de la siguiente manera:**

1. Calcula el promedio de las segundas diferencias (variación)
2. Usa el modelo predictivo  

$$\text{Estado futuro} = \text{Estado actual} + \text{variación}$$
 ¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?
3. Describe la relación del valor obtenido (predicción) con el comportamiento anterior:

**Figura 50.** Sesión virtual de la situación de aprendizaje 2, inciso B, C y D

El alumno 1, 3 y el 6 calculan las segundas diferencias obteniendo valores negativos. El alumno 2 calcula las segundas diferencias pero obtiene valores negativos y positivos. El alumno 4 obtiene valores positivos ya que resta realiza la resta del estado anterior – estado posterior. El alumno 5 confunde las segundas diferencias con las primeras. El signo negativo en las segundas diferencias indica que las primeras diferencias disminuyen. El signo positivo indica que las segundas diferencias aumentan.

**Profesor:** Compara cada dos valores del voltaje. Realiza tu análisis con base en la tabla.

Alumno\_1:

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
El estado posterior es	0.95-1.18 Mayor	Que el estado anterior	disminuye
El estado posterior es	0.7-0.95 Mayor	Que el estado anterior	disminuye
El estado posterior es	0.27-0.7 Mayor	Que el estado anterior	disminuye
El estado posterior es	0.16-0.27 Mayor	Que el estado anterior	disminuye
El estado posterior es	-0.01-0.16 Mayor	Que el estado anterior	disminuye

Alumno\_2:

Estado	comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
El estado posterior es	1-0 = 1 es mayor	Que el estado anterior	Aumenta
	2.18-1.18 = 2.18 es mayor		Aumenta
	2.77-2.18 = 2.77 es mayor		Aumenta
	3.11-2.77 = 3.11 es mayor		Aumenta
	3.26-3.11 = 3.26 es mayor		Aumenta
	3.25-3.26 = 3.25 es menor		Disminuye.

Alumno\_3:

Estado	comparación (mayor, igual, menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
1	Menor	1.18	Disminuye
0.62	Menor	1	Disminuye
0.31	Menor	0.62	Disminuye
0.15	menor	0.31	Disminuye
-0.01	menor	-0.16	Disminuye



Alumno\_4:

Estado	Comparacion (igual - mayor - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
El estado Posterior es	5-0 mayor	Que el estado anterior	aumenta
	10-5 mayor		Disminuye
	15-10 = mayor		aumenta
	20-15 = mayor		Disminuye
	25-20 = mayor		igual al anterior
	30-25 = mayor		Disminuye
	35-30 mayor		

Alumno\_5:

0-1.09			
Estado	Comparacion (mayor- igual - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye.
Que el estado posterior es	menor	Que el estado anterior	Aumenta.

Alumno\_6:

Estado	Comparación (Mayor-Menor)	Estado	La variable vol- taje aumenta o disminuye
El estado posterior es	Mayor .95-1.18	Que el estado anterior	Aumenta
El estado posterior es	Mayor .7-.95	Que el estado an- terior	Disminuye
El estado posteriores	Mayor .27-.7	que el estado anterior	Disminuye
El estado posterior es	Mayor .16-.27	Que el estado anterior	Aumenta
El estado poste- rior es	Mayor -.01-.16	Que el estado anterior	Disminuye

En los resultados se observa que el alumno 1 argumenta que si el estado posterior es mayor que el anterior el voltaje disminuye. El alumno 2 y el 5 señalan que si el estado posterior es menor que el anterior entonces el voltaje aumenta. El alumno 3 indica que estado posterior es menor que el anterior el voltaje disminuye. El alumno 4 y el 6 tienen dificultades en reconocer la comparación.

**Profesor:** Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento del voltaje de capacitor.

**Alumno\_1:**

C. Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento del voltaje del capacitor. Que el voltaje va subiendo conforme el tiempo va igual subiendo, pero pasado mucho tiempo, este va disminuyendo.

**Alumno\_2:**

C. Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento del voltaje del capacitor.  
Al analizar el comportamiento del voltaje del capacitor podemos observar que en el voltaje la variable aumenta hasta el segundo 25, posteriormente disminuye con el siguiente tiempo de 30 segundos.

**Alumno\_3:**

C) Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento del voltaje del capacitor. Entre mas tiempo tenga el voltaje ira disminuyendo.

**Alumno\_4:**

C. Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento del voltaje del capacitor.  
Se logra observar que aunque la energía es constante presenta variaciones la carga del capacitor.

**Alumno\_5:**

Describe el comportamiento del voltaje.  
El voltaje va cambiando conforme vaya pasando el tiempo y conforme vaya el proceso del capacitor junto con sus resistencias.

**Alumno\_6:**

C- Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento del voltaje del capacitor:  
El voltaje va en aumento y al final en decrecimiento, no veo algún patrón o serie respecto a la variable voltaje.

El alumno 1, 2 y 6 señalan que el voltaje va subiendo (aumenta) conforme pasa el tiempo pero después disminuye. El alumno 3 argumenta que el voltaje va disminuyendo conforme pasa el tiempo. El alumno 4 y el 5 dicen que el capacitor presenta variaciones pero no especifican si el voltaje aumenta o disminuye.

**Profesor:** Predice el voltaje del capacitor al transcurrir 35 segundos. Describe el comportamiento.

**Alumno\_1:**

¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos? 3.22 volts  
3. Describe la relación del valor obtenido (predicción) con el comportamiento anterior: Que al igual que el comportamiento anterior entre mas sube el tiempo más sube, pero pasado mucho tiempo este disminuye.

**Alumno\_2:**

Promedio = 2.35  
②  
Estado futuro  $\leq 3.25 + 2.35 = 5.6$   
¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?  
5.6 v  
3. Describe la relación del valor obtenido con el comportamiento anterior:  
Al analizar el valor obtenido y si lo comparamos con el comportamiento anterior, nos daremos cuenta de que hay un aumento del voltaje y se podría decir que llegó al máximo ya que muestra un voltaje mayor en comparación con los otros comportamientos; en conclusión podríamos decir que es poco menos del doble de valor comparado al comportamiento anterior.



Alumno\_3:

¿Cual es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?  
Es -0.40

3) Describe la relación del valor obtenido (predicción) con el comportamiento anterior la predicción nos dice que al pasar los 35 segundos el valor obtenido ira disminuyendo

Alumno\_4:

Estado futuro = Estado actual + variacion.

$$\text{Estado futuro} = 0.01 + (0.201) = 0.211$$

logro apreciar que conforme el tiempo avanza el capacitor pareciera que llegara al limite ya que cada vez el numero es mas pequeño y por lo cual puede que nuestra predicción sea correcta.

Alumno\_5:

¿Cual es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?  
2.75 es el voltaje a transcurrir los 35 segundos

El valor obtenido se fue dando por conforme al tiempo y así mismo con poderlo saber o ver cuanto tiene el valor anterior al comportamiento de cada uno de ellos.

Alumno\_6:

I - Promedio: -0.046

II - Método predictivo:  $3.25 + (-0.046) = 3.204$

3 - Describe la relación del valor obtenido (predicción) con el comportamiento anterior:

Se nota una disminución, de 3.25 a 3.204, al igual que la mayoría de estados que analizamos, así que nada nuevo.

EL alumno 1 obtiene una predicción de 3.22 volts argumentando que el voltaje aumenta y luego disminuye. El alumno 2 obtiene un valor de 5.6 volts señalando que el voltaje aumenta hasta una valor máximo pero no se da cuenta que el voltaje no puede sobrepasar lo que entregan las pilas. Por su parte, el alumno 3 obtiene un valor de  $-0.4$  volts donde el voltaje va disminuyendo. El alumno 4 predice un valor de 0.211 argumentando que el voltaje avanza y llega a un valor límite muy pequeño, lo que parece una contradicción. El alumno 5 predice el valor de 2.75. El alumno 6 obtiene un promedio de  $-0.46$ , al hacer uso del modelo predictivo hace que el voltaje disminuya al valor de 3.204.

Los resultados de la situación de aprendizaje 2 establecen que los estudiantes calculan las segundas diferencias pero algunos obtienen valores positivos, negativos o alternados. Con respecto a la comparación se reconoce algunas dificultades, algunos estudiantes señalan que si el estado posterior es menor que el anterior el voltaje aumenta o si el estado posterior es mayor el voltaje disminuye. Entonces, algunos reconocen el carácter estable del cambio al señalar que el voltaje aumenta o disminuye por lo que solo reconocen un primer orden de variación. Hacen uso del modelo predictivo obteniendo voltajes menores al voltaje anterior. Se reconoce la relación entre el tiempo y el voltaje pero no se identifica el carácter estable del cambio con el análisis de las segundas diferencias, es decir, el voltaje aumenta cada vez más lento.

#### 4.4.7. RESULTADOS DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 3. PREDICCIÓN DEL VOLTAJE DE CARGA: ANÁLISIS GRÁFICO

Los resultados de la situación de aprendizaje 3 se presentan a continuación:

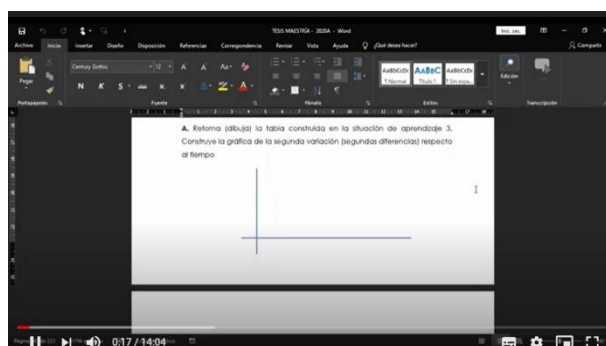
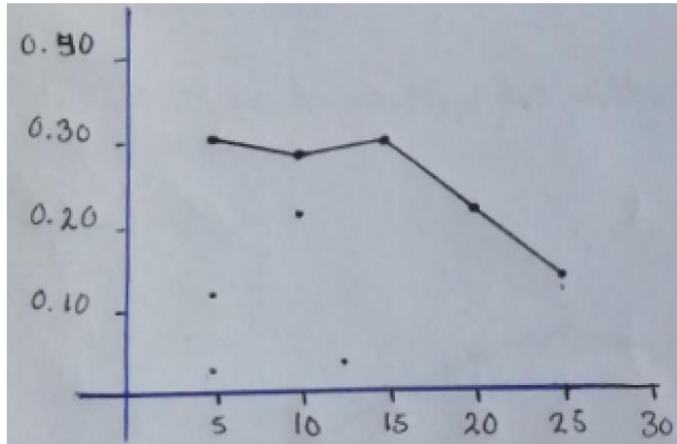


Figura 51. Sesión virtual de la situación de aprendizaje 3, inciso A

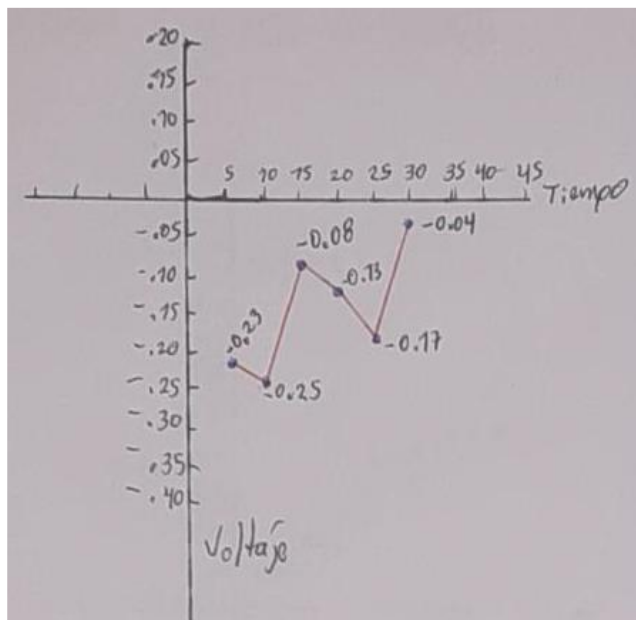
**Profesor:** Construye la gráfica de la segunda variación (segundas diferencias) respecto al tiempo. Analiza la gráfica y describe el comportamiento de la variación del voltaje.

**Alumno\_1:**



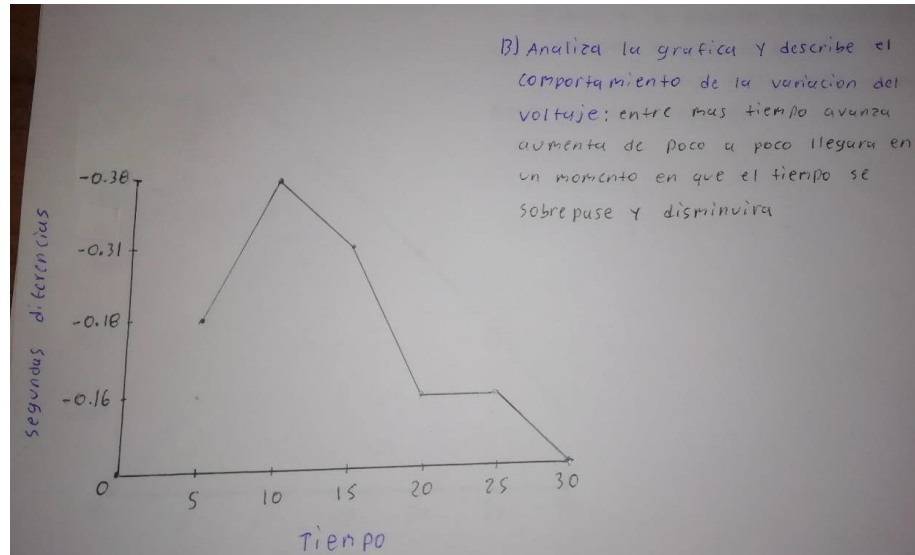
Va disminuyendo poco a poco segun el comportamiento o la cantidad de la variación segunda.

**Alumno\_2:**

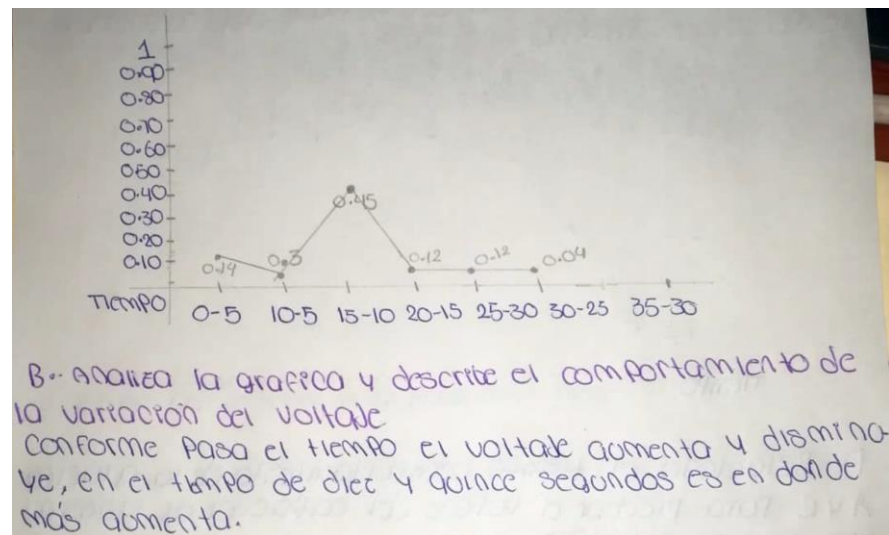


La variación del voltaje va subiendo y bajando, porque va conforme al tiempo.

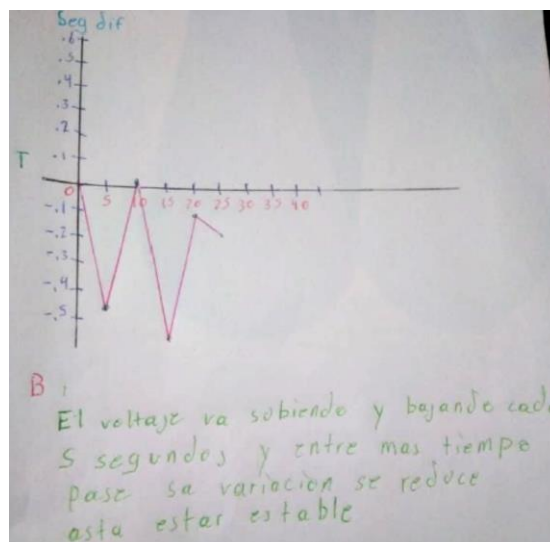
Alumno\_3:



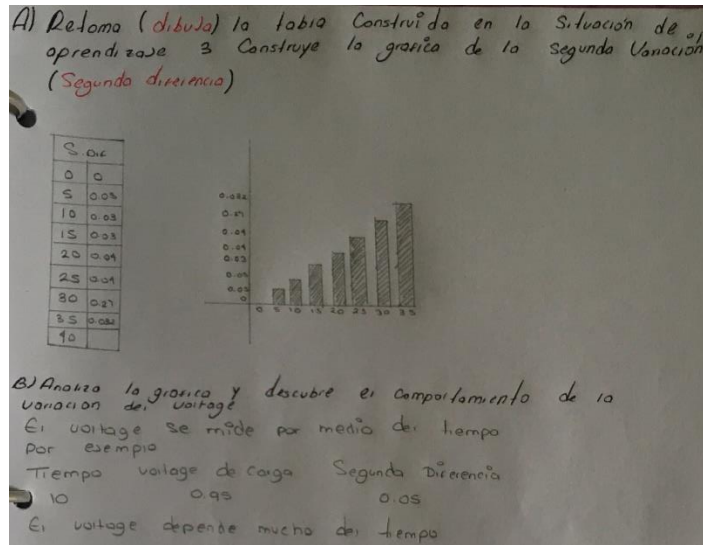
Alumno\_4:



Alumno\_5:



### Alumno\_6:



El alumno 1 construye una gráfica de la segunda variación donde argumenta que el voltaje va disminuyendo poco a poco según el comportamiento en la gráfica. Relaciona directamente la segunda variación con el voltaje. En la gráfica del alumno 2 se observa que todos los valores de la segunda variación son negativos pero señala que el voltaje va subiendo y bajando. El alumno 3 grafica los valores negativos de la segunda variación sobre el eje  $x$  donde argumenta que el voltaje aumenta poco a poco hasta llegar a un valor y después disminuye a cero. El alumno 4 y el alumno 5 dicen que el voltaje aumenta y disminuye. El alumno 6 construye una gráfica de barras donde solo argumenta la relación entre el voltaje y el tiempo y no su comportamiento. Entonces, se identifica que los estudiantes presentan dificultades en relacionar el comportamiento del segundo orden de variación con el voltaje del capacitor.

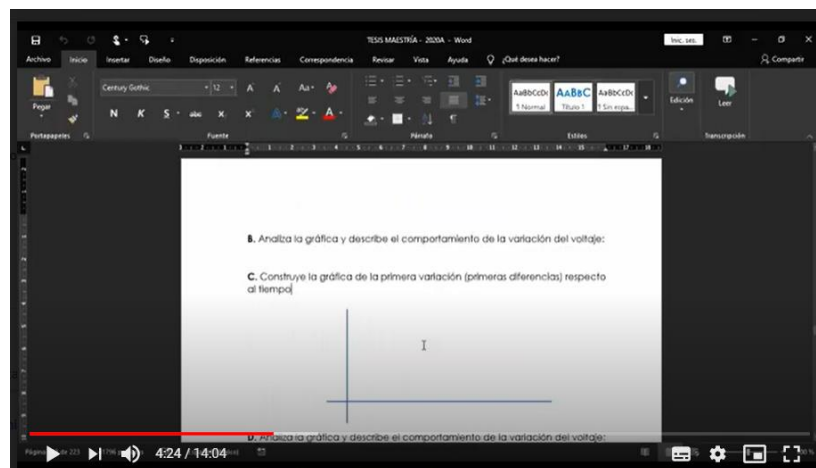
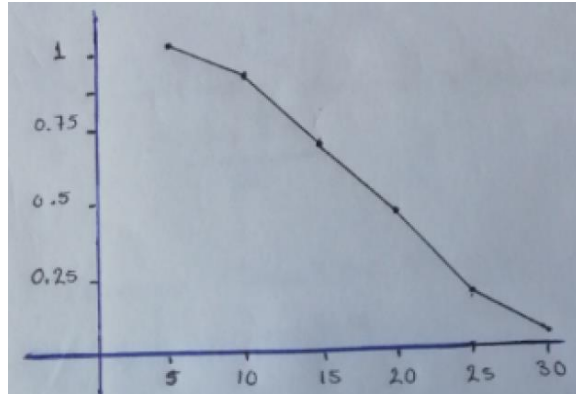


Figura 52. Sesión virtual de la situación de aprendizaje 3, inciso C

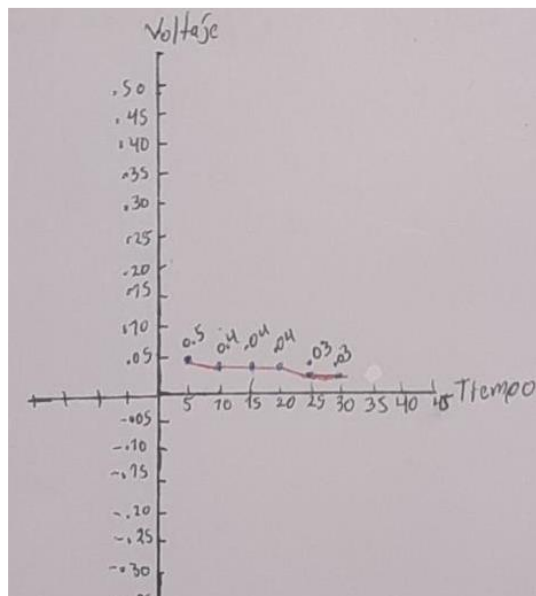
**Profesor:** Construye la gráfica de la primera variación (primeras diferencias) respecto al tiempo. Analiza la gráfica y describe el comportamiento de la variación del voltaje.

**Alumno\_1:**



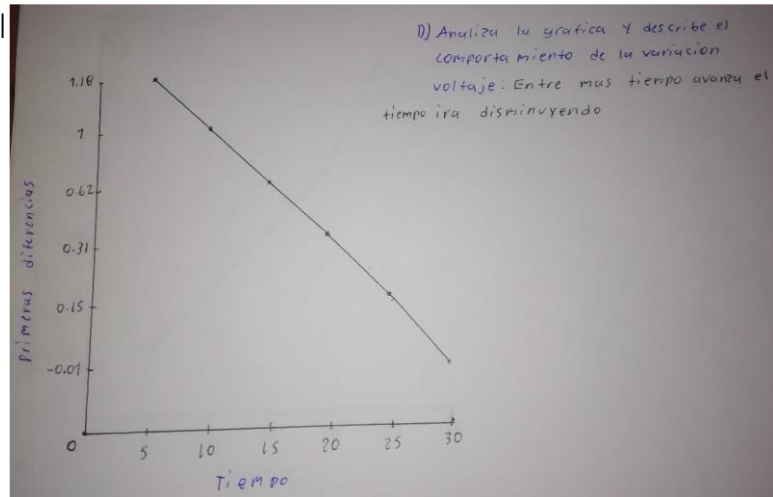
Esta tiene un aumento de "1" va disminuyendo respecto a la cantidad restante y tiene una desaceleración muy baja.

**Alumno\_2:**

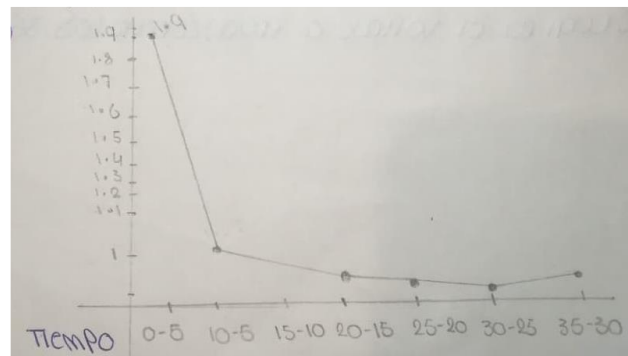


Que entre más tiempo, más ~~se~~ baja el voltaje, por que se gasta.

Alumno\_3:

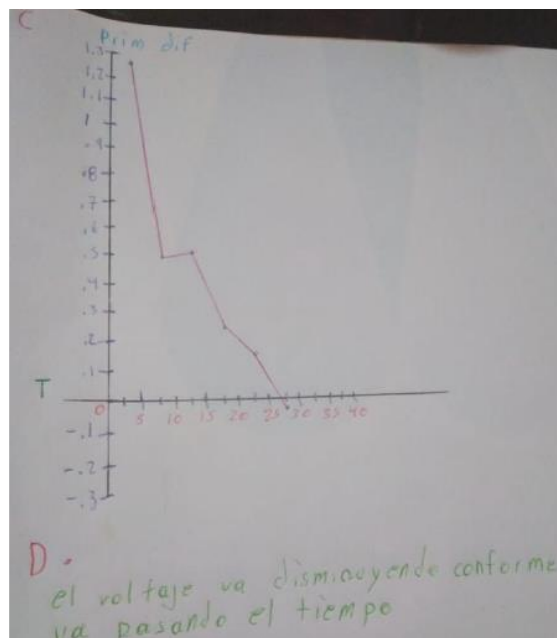


Alumno\_4:



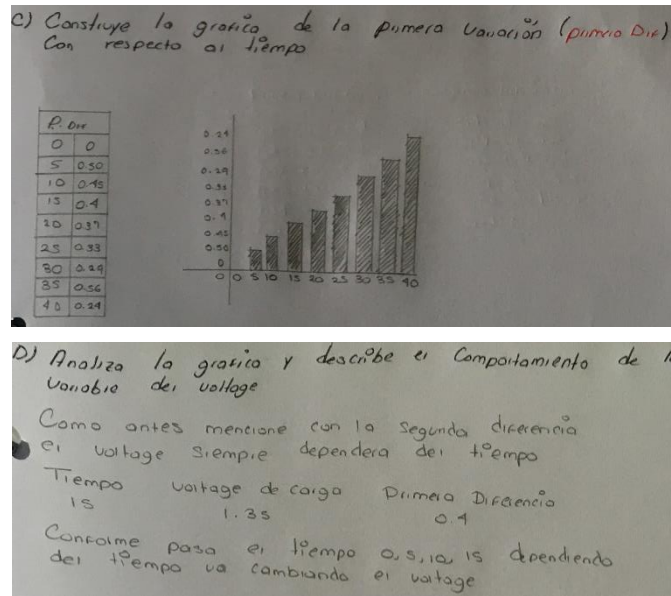
D. Analiza la grafica y describe el comportamiento de la variación del voltaje  
 el voltaje comienza aumentando pero conforme al tiempo disminuye

Alumno\_5:

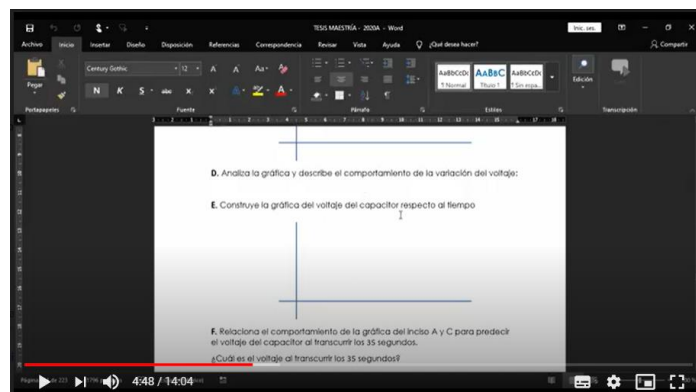




**Alumno\_6:**



En los resultados se observa que el alumno 1 construye una gráfica con valores positivos de las primeras variaciones lo que significa que van disminuyendo lo que el señala que el voltaje tiene una desaceleración. El alumno 2 obtiene una gráfica casi constante, señala entre más tiempo el voltaje "baja" porque se gasta. En la gráfica del alumno 3 se observa que las primeras variaciones son cada vez menores. Entonces señala que, entre más tiempo avanza el voltaje disminuye. El alumno 4 argumenta que el voltaje comienza aumentando, pero conforme pasa el tiempo va disminuyendo. El alumno 5 establece que, conforme pasa el tiempo el voltaje va disminuyendo. El alumno 6 construye una gráfica de barras, solo establece la relación entre el tiempo y el voltaje pero no reconoce el carácter estable del cambio. En los argumentos se identifica que los alumnos presentan dificultades en reconocer el carácter estable del cambio al relacionar las primeras variaciones con el voltaje respecto al tiempo.

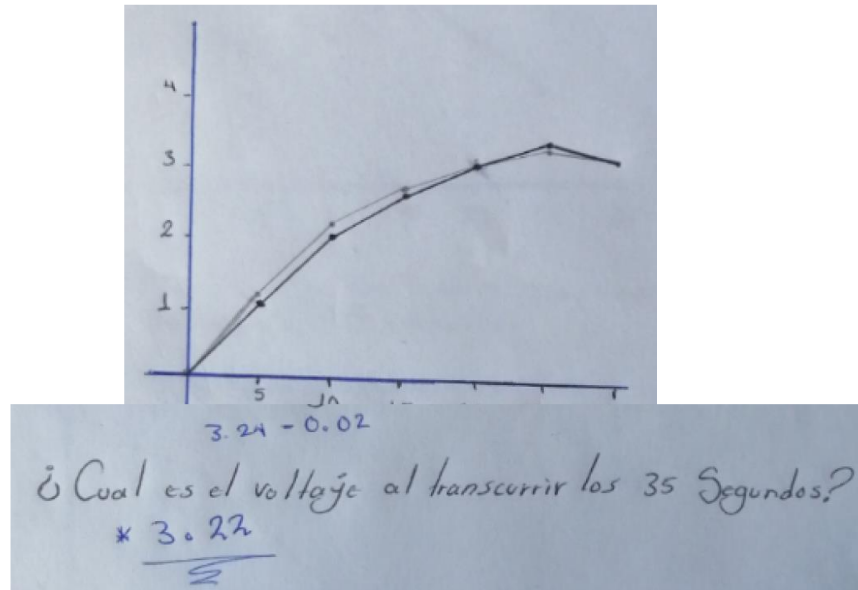


**Figura 53.** Sesión virtual de la situación de aprendizaje 3, inciso E

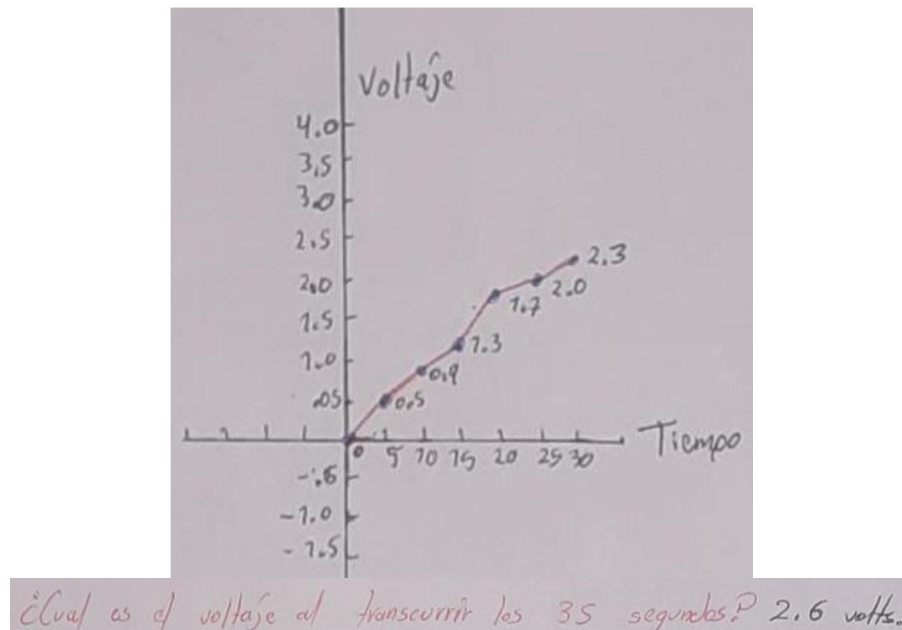


**Profesor:** Construye la gráfica del capacitor respecto al tiempo. Relaciona el comportamiento de la gráfica del inciso A y C para predecir el voltaje del capacitor al transcurrir 35 segundos. ¿Cuál es el voltaje del capacitor?

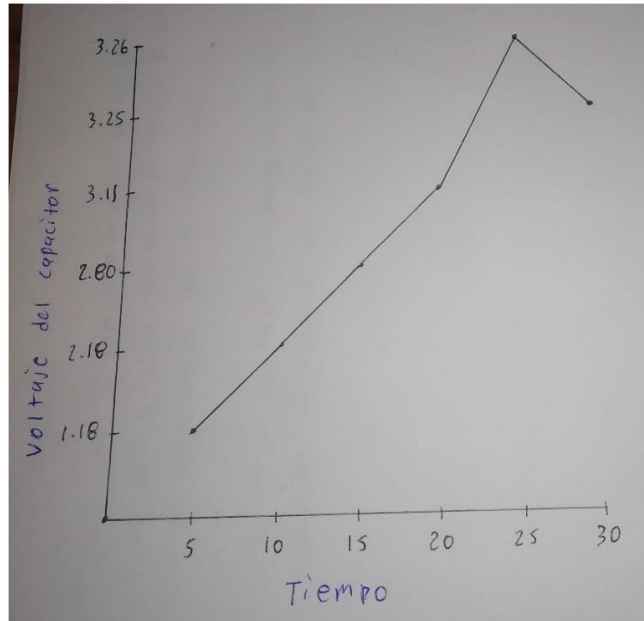
**Alumno\_1:**



**Alumno\_2:**

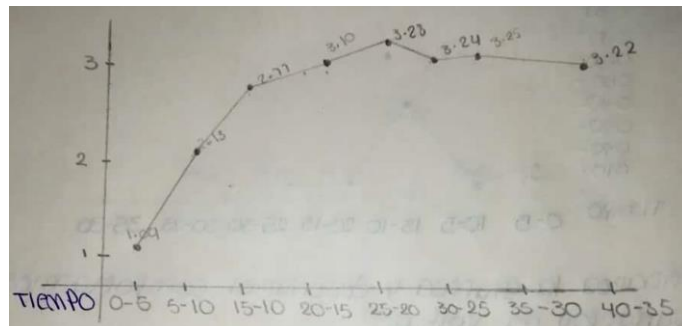


Alumno\_3:

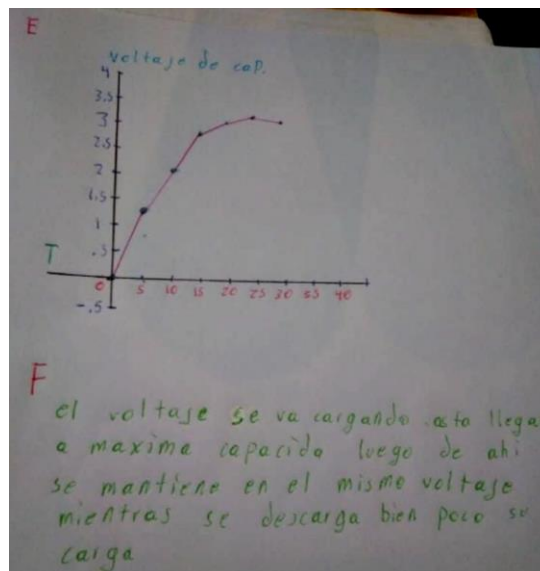


¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos? El voltaje va hacer de 1.56

Alumno\_4:



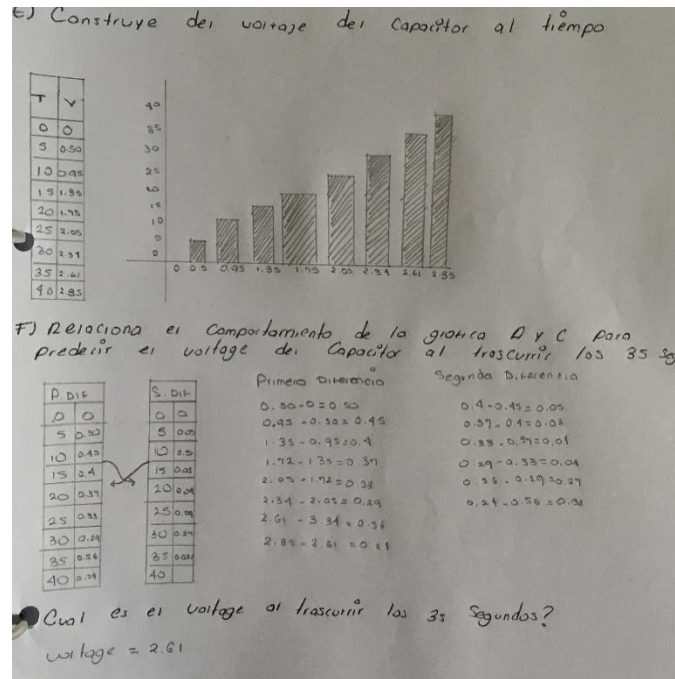
Alumno\_5:



F

el voltaje se va cargando asta llegar a maxima capacidad luego de ahí se mantiene en el mismo voltaje mientras se descarga bien poco se carga

### Alumno\_6:



En los resultados se observa que el alumno 1 y el alumno 2 construyen la gráfica del voltaje del capacitor respecto al tiempo. Se identifica que analizan el comportamiento del voltaje para obtener una predicción aproximada de 3.22 volts y de 2.26 volts, respectivamente, a los 35 segundos. Obtienen un valor mayor a los anteriores. El alumno 3 construye una gráfica que va en aumento, tiene un pico y después disminuye, por tanto, obtiene una predicción aproximada de 1.56 volts. El alumno 4 obtiene una predicción de 3.22 volts, pero el comportamiento del capacitor de los 20 a los 35 segundos el voltaje aumenta y disminuye. El alumno 5 no establece la predicción, señala que el voltaje aumenta hasta un valor máximo y luego se mantiene constante. Esto conlleva a reconocer la estabilidad (variación acotada) del voltaje de carga. El alumno 6 construye una gráfica de barras, considera al eje x como el voltaje del capacitor y el eje y como el tiempo. Retoma el comportamiento de la gráfica y establece una predicción aproximada de 2.61 volts. Con base en los resultados se reconoce que algunos estudiantes retoman el comportamiento del voltaje del capacitor para establecer la predicción. Otros alumnos obtienen una gráfica donde el voltaje aumenta y disminuye. Y uno de ellos reconoce la variación acotada pero no establece una predicción.

#### 4.4.8. RESULTADOS DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 4. SIMULACIÓN DE UN PANEL DE INDICADORES CON BASE EN EL COMPORTAMIENTO DE UN CAPACITOR

Con base en el análisis de la sesión virtual se establecen los resultados de la situación de aprendizaje 4:

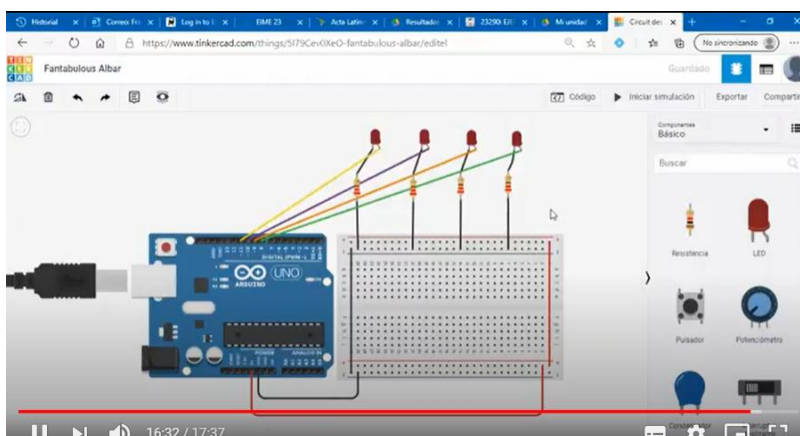


Figura 54. Interfaz de la plataforma TINKERCAD

**Profesor:** ¿Qué cambia? y ¿respecto de qué cambia?

**Alumnos:**

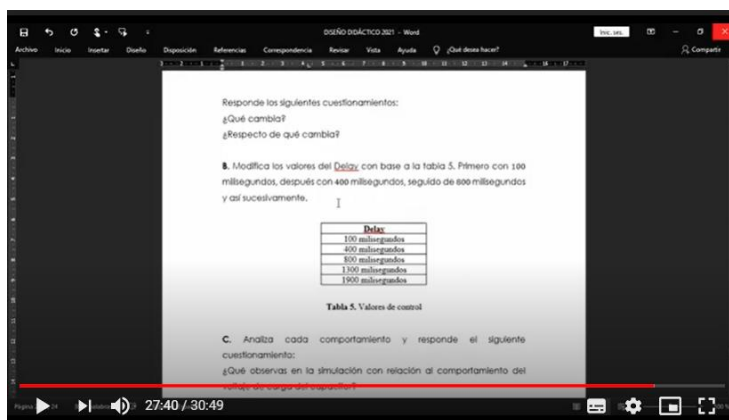


Figura 55. Sesión virtual de la situación de aprendizaje 4, inciso A y B

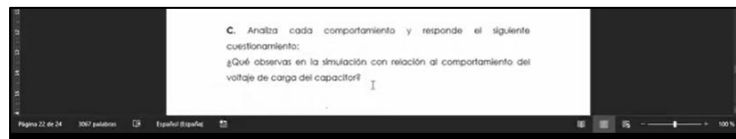
En la sesión virtual se explicaron las herramientas de TINKERCAD para armar el diagrama del sistema de leds y colocar el código de programación correspondiente.

**Profesor:** Modifica los valores del Delay con base en la tabla.

**Alumnos:** Los estudiantes realizan su registro en la plataforma de TINKERCAD y se les explica el armado del sistema de leds. Se les señala donde colocar el código de programación para la placa virtual de Arduino.

**Profesor:** Modifica los valores del Delay con base a la tabla.

**Alumnos:** Algunos estudiantes visualizan que lo que cambia es la secuencia de leds y cambian respecto a los valores del Delay. Algunos tienen dificultades al simular el sistema por cuestiones de sintaxis del código de programación. No especifican que el Delay es la variable tiempo.



**Figura 56.** Sesión virtual de la situación de aprendizaje 4, inciso C

**Profesor:** Analiza cada comportamiento y responde, ¿qué observas en la simulación con relación al comportamiento del voltaje de carga del capacitor?

**Alumnos:** Observan la secuencia de encendido-apagado de los leds al cambiar los valores del Delay. Presentan dificultades en relacionar el comportamiento de los leds con el voltaje del capacitor.

La situación de aprendizaje 4 es considerada como la actividad integradora donde el comportamiento del capacitor se refleja en el funcionamiento de un sistema de leds. Los estudiantes tuvieron dificultades en reconocer que la secuencia de leds se encienden y se apagan de acuerdo con los valores del Delay (tiempo), es decir, si el Delay es menor el encendido-apagado se hace cada vez más rápido y si el Delay es mayor el encendido-apagado de los leds se hace cada vez más lento. Este comportamiento tiene relación al señalar que el voltaje del capacitor aumenta cada vez más lento. Es por ello que se inicia con un valor pequeño del Delay (100 milisegundos) para que el encendido-apagado cambie rápidamente y conforme se modifica el Delay con un valor mayor, el encendido-apagado cambie más lentamente hasta el "apagado de los leds". Entonces, se reconoce el análisis de un segundo orden de variación.

## **CAPÍTULO 5.**

# **RESIGNIFICACIÓN DIDÁCTICA DE LA SERIE DE TAYLOR EN CONTEXTO DE PREDICCIÓN EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS**

## CAPÍTULO 5. RESIGNIFICACIÓN DIDÁCTICA DE LA SERIE DE TAYLOR EN CONTEXTO DE PREDICCIÓN EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En este capítulo se plantea una resignificación didáctica de la Serie de Taylor en contexto de Predicción en contexto de circuitos eléctricos. Se discuten elementos del análisis preliminar: aspectos “históricos – epistemológicos”, aspectos cognitivos, aspectos didácticos y aspectos sociales. Se retoman resultados de la confrontación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*. Se presenta un panorama sobre la integración de lo conceptual y lo algorítmico.

### 5.1. RESIGNIFICACIÓN DIDÁCTICA DE LA SERIE DE TAYLOR EN CONTEXTO DE PREDICCIÓN EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS

La principal problemática que se plantea en esta investigación es la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. Esto se debe a que algunas investigaciones dan prioridad a lo algorítmico sobre lo conceptual (procesos algebraicos) y otras dan prioridad a lo conceptual sobre lo algorítmico (significados visuales). La enseñanza tradicional del Cálculo se basa en definiciones y demostraciones de los objetos matemáticos desde un enfoque algebraico, centrándose en prácticas algorítmicas (Cantoral, 2019; Artigue, 1995; Farfán, 2012; Morales, 2011). Esto conlleva a resolver problemas ficticios planteados en los libros de texto, alejándose de la realidad de los estudiantes. En el contexto escolar, la Serie de Taylor se ubica en el paradigma cauchiano (convergencia) centrado en el concepto de límite (Cantoral, 2001; Morales, 2009; Arcos, 1993). Este paradigma se refiere en aproximar funciones por medio de polinomios en un punto específico. Lo que conlleva al uso de las reglas de derivación, centrándose en lo algorítmico.

La enseñanza tradicional con el empleo de algoritmos provoca que las ideas variacionales queden ocultas (Dolores, 2005). Las prácticas algorítmicas provocan carencia de significados de la Serie de Taylor sobre nociones, ideas y estrategias variacionales (Almazán, 2009). La primacía de lo conceptual sobre lo algorítmico se reconoce en el análisis de gráficas al generar significados visuales en situaciones

de variación y cambio (Suarez, 2008; Trujillo, 2016; Méndez, Ferrari y Trejo, 2018; Dolores, 2007).

La Serie de Taylor es el instrumento que permite el análisis de fenómenos de flujo continuo en la naturaleza (Cantoral, 1990). La Serie de Taylor, de acuerdo con la dimensión histórica-epistemológica está relacionada con el estudio del movimiento y se desarrolla sobre la práctica social del *Prædicere* (acto de querer predecir). La noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. En ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo.

Al centrarse en la predicción nos conduce a la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. La Socioepistemología establece cuatro dimensiones del saber: la cognitiva referida a los procesos del pensamiento; la epistemológica referida a cómo se construye el saber; la didáctica referida a la interacción entre el alumno, el maestro y el saber; y la social referida a todo aquello que ocurre en toda una colectividad (Cantoral y González, 1998; Reséndiz, 2006). La integración de las dimensiones corresponde a la problematización del saber (Reyes, 2011). La teoría establece cuatro principios: principio normativo de la práctica social (las prácticas sociales son la base y orientación de los procesos de construcción del conocimiento); principio de la racionalidad contextualizada (la construcción del conocimiento depende del contexto en un momento y lugar determinado); principio del relativismo epistemológico (el saber matemático posee validez subjetiva y de verdades relativas); y el principio de la resignificación progresiva (el saber se significa y resignifica en diversas situaciones que lo rodean) (Paz, 2019). La Socioepistemología señala que las prácticas sociales son las generadoras del conocimiento matemático que contribuye al rediseño del discurso matemático escolar (Reyes, 2011). Las prácticas anteceden y acompañan a los objetos matemáticos para dotarlos de significados (Ríos, 2020).

La práctica social del *Prædicere* se relaciona con el PyLVar, lo que permite generar propuestas enfocadas a dar significados a los objetos matemáticos con base en ideas variacionales. La variación y el cambio los dotan de significados en contextos específicos (Pérez, 2019). El sistema de referencia variacional permite el reconocimiento y la organización del cambio para la construcción de la variación



en situaciones de predicción. De acuerdo con Caballero (2018), "la variación es una noción que se construye socialmente, pues su uso se desarrolla bajo situaciones de cambio con fines predictivos y bajo el esquema de desarrollo de prácticas" (p. 143).

Las nociones de causalidad y de temporización permiten estudiar la evolución del cambio, su cuantificación, el carácter estable del cambio y los órdenes de variación. Estas nociones conforman un sistema de referencia variacional. La causalidad se refiere a reconocer la relación entre dos variables que intervienen en un fenómeno, es decir, los cambios en una variable afectan la otra. La temporización consiste en el reconocimiento de estados intermedios de un fenómeno que permita analizar su evolución. El sistema de referencia variacional explica la forma en cómo las personas perciben y organizan el cambio y la variación para su estudio mediante prácticas variacionales: comparación, seriación y predicción (Caballero, 2018; Caballero y Cantoral, 2017).

Los órdenes de variación son variaciones de los estados y variaciones de las variaciones que se determinan a partir de diferencias. El primer orden de variación son diferencias entre estados de la variable. El segundo orden de variación son diferencias entre las primeras variaciones. El tercer orden de variación son diferencias entre las segundas variaciones y así sucesivamente. La variación sucesiva se considera como la articulación de dos o más ordenes de variación donde se reconozca el carácter estable del cambio que permita predecir el comportamiento de un fenómeno. Las variables que se relacionan pueden ser discretas o continuas, la elección de dichas variables se considera como la constantificación de primer orden y la elección de las variaciones como la constantificación de segundo orden (Cantoral, 2019).

El estudio de la variación tiene como base el estudio del movimiento. Con base en la dimensión histórica-epistemológica se identifica que, algunos de los principales representantes que estudiaron el movimiento fueron: Aristóteles, Ptolomeo, Copérnico, Arquímedes, Kepler, los científicos de Merton, Oresme, Galileo, Newton y Taylor. Estos personajes aportaron ideas fundamentales para la construcción científica del estudio del movimiento. La astronomía fue el primer campo de estudio sobre movimiento de cuerpos. Los mesopotámicos y los griegos

estudiaron el movimiento de los planetas. La mecánica y la hidrostática fueron los siguientes campos de estudio con las aportaciones de Arquímedes. La cinemática se desarrolló con Galileo y la óptica con Cavalieri. Galileo estudió la relación entre variables y realizó mediciones (comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos), enfocándose en el método experimental. Los científicos de Merton definieron al movimiento uniforme como distancias iguales son recorridas en tiempos iguales. La aceleración uniforme la definieron como el mismo incremento de velocidad se da en tiempos iguales.

Los trabajos de Newton se relacionaron con los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. Desarrolló el método de las fluxiones que se refiere a la relación entre dos variables y sus movimientos. Llamó fluente a las cantidades que cambian y fluxión a la velocidad de cambio. Newton se basaba en métodos dinámicos geométricos para la predicción de fenómenos naturales. En la época de Newton el conocimiento estaba influenciado por ideas predictivas y el análisis de la variación y el cambio generaba significados a los objetos matemáticos (Pérez, 2019). Estudió fenómenos astronómicos, cinemáticos, mecánicos, ópticos e hidrodinámicos. Aquí se identifica que, el contexto de circuitos eléctricos no fue estudiado por Newton. Como señala Bernal (1979), "la electricidad fue la primera ciencia nueva que surgió después del periodo newtoniano... fue casi el único aspecto de la ciencia física al que no dedicó Newton..." (Bernal, 1979, p. 576). La Serie de Taylor por tener su génesis histórica con las ideas de Newton suponemos que estudió los mismos campos. Esto conlleva a su resignificación en el campo de la electricidad, específicamente, en el contexto de los circuitos eléctricos.

La predicción de un fenómeno consiste en determinar el valor futuro al conocer el valor actual y su variación. El binomio de Newton se relaciona con la predicción al querer conocer el estado futuro de un fenómeno. La Serie de Taylor se relaciona con el binomio de Newton al reconocer la expresión matemática con base en las variaciones sucesivas en torno a la variable independiente. La Serie de Taylor es el objeto matemático que permite predecir el estado futuro en un fenómeno de flujo continuo.

Así también, la dimensión histórica-epistemológica establece que los fenómenos eléctricos se pueden observar con la atracción de objetos. En el siglo

XVIII se inició la investigación detallada de los fenómenos eléctricos (Braun, 2003). La principal contribución de Stephen Gray fue que la electricidad podía fluir de un lugar a otro (a través de conductores), sin que se produjera aparentemente ningún movimiento en la materia y también encontró que la electricidad puede acumularse en aquellos cuerpos en que se genera a los que llamó no-conductores (Bernal, 1979). Franklin establece que sólo existe una clase de electricidad representada como un fluido inmaterial existente en todos los cuerpos. La botella de Leyden fue el primer artefacto para almacenar energía. Lo que le permitió construir la botella de Leyden con la finalidad de almacenar electricidad. Posteriormente, Faraday desarrolló este artefacto al aumentar su capacidad de almacenamiento, al cual le llamó condensador (capacitor). Alessandro Volta (1745 - 1827) construye una pila y logra establecer corrientes eléctricas estables. George Simon Ohm (1789 - 1854), introdujo una importante relación entre el potencial, la corriente y la resistencia, conocida actualmente como ley de Ohm. Los circuitos RC y RL en corriente directa, eran conocidos, en 1853, por William Thomson y Lord Kelvin (1824 - 1907). Estos circuitos se modelaban por medio de ecuaciones diferenciales generándose métodos para resolver circuitos RCL. En estos circuitos el condensador es considerado como un elemento principal, ya que guarda cargas eléctricas. En 1897 Joseph Thomson (1856 - 1940) descubrió el electrón, una partícula muy pequeña y ligera que pertenece a un átomo. En 1904 Thomson desarrolló un modelo atómico que establecía al electrón como un elemento constitutivo fundamental para el desarrollo de la electricidad.

En la dimensión didáctica se plantea que en el libro de métodos numéricos para ingenieros de Chapra y Canale (2011), en el capítulo 4, se aborda la Serie de Taylor como "un medio para predecir el valor de una función en un punto, en términos del valor de la función y sus derivadas. En particular, el teorema establece que, cualquier función suave puede aproximarse por un polinomio" (p. 71). En el libro de Carmona y Filio (2011) se analiza un circuito eléctrico RC, se aplica la ley de Kirchhoff y se construye la ecuación diferencial lineal. Posteriormente, se resuelve la ecuación diferencial por el método del factor integrante y se responden los cuestionamientos señalados. Rainville, Bedient y Bedient (1998) consideran a la Serie de Taylor como un teorema y lo usan como método numérico para aproximar

soluciones, al considerar problemas con valor inicial. Se calculan las derivadas sucesivas de la solución  $y = f(x)$ . Entonces, didácticamente, la Serie de Taylor se centra en lo algorítmico.

En los textos de ingeniería, según Arcos (1993), se estudian fenómenos de flujo en la naturaleza (variación continua) enfocándose en procesos de predicción. Establece que, la Serie de Taylor es la herramienta o instrumento de predicción cuando se modelas fenómenos de variación continua. Taylor desarrolló un cálculo sistemático de diferencias finitas. El método de los incrementos que presenta describe el comportamiento de una cantidad de variación continua (Ríos, 2020). De acuerdo con Struik (1986), cuando una cantidad variable  $z$  crece en  $z + v$ , otra cantidad variable  $x$  crece en

$$x + \Delta x \frac{v}{1 \cdot \Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1 \cdot 2 \cdot (\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\Delta z)^3} + \Delta^4 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\Delta z)^4} + \dots$$

Se puede observar que el primer término ( $x$ ) es el valor inicial de la variable. El segundo término es su primera variación, el tercer término corresponde a la segunda variación y así sucesivamente. Entonces, la Serie de Taylor queda expresada en variaciones sucesivas de las cantidades  $x$  y  $z$ . Esto conlleva a considerar a la Serie de Taylor como un modelo predictivo de la siguiente manera:

$$\textit{Estado inicial} + \textit{variación} = \textit{estado futuro}$$

$$\textit{Estado inicial} + \textit{variación} + \textit{variación de la variación} = \textit{estado futuro}$$

$$\textit{Estado inicial} + \textit{variación} + \dots + n \textit{ orden de variación} = \textit{estado futuro}$$

Este modelo predictivo analizado desde un sistema de referencia variacional aporta elementos para generar significados a la Serie de Taylor. La serie tiene como base principal la variación sucesiva (Méndez, Ferrari y Trejo, 2018). La variación sucesiva es la articulación de los órdenes de variación que permitan la predicción de estados futuros en un fenómeno continuo. En este caso, la predicción del voltaje de carga del capacitor. El estado inicial del fenómeno es el primer término de la serie, el primer orden de variación corresponde al segundo término de la serie y el segundo orden de variación al tercer término. Es por ello que, en las situaciones de aprendizaje se analiza hasta un segundo orden de variación. El comportamiento de un led permite el análisis de un primer orden de variación. El comportamiento de un capacitor permite el análisis del primero y el segundo orden de variación. La

variación en un contexto diferente al de cinemática la estudia Solís (1999) al analizar el fenómeno de la propagación del calor. Establece tres estadios de la noción de variación, los cuales son: la percepción, la interpretación y la representación. La noción de variación está determinada por el contexto fenoménico en el que se presenta, por lo que las ideas de variación y cambio se significan a partir de dicho contexto. Este fenómeno es similar el de los circuitos eléctricos, al considerar que el calor se desplaza sobre una barra metálica y en un circuito los electrones se desplazan sobre el cable de cobre.

En el plan de estudios de ISC se identifican temas de Cálculo, circuitos eléctricos, graficación, simulación, y programación (Universidad de Los Altos de Chiapas, 2004). Estos temas están integrados en el diseño de las situaciones diagnósticas y de aprendizaje. Se identifica que la Serie de Taylor no aparece en los contenidos de fundamentos de análisis numéricos ni en ninguna de Cálculo. Entonces, se puede argumentar que los estudiantes no tienen nociones de este objeto matemático. En el contexto escolar, con base en los libros de texto, la configuración resistencia-capacitor (RC) se analiza con el método de Kirchhoff para establecer la ecuación diferencial que lo modela (Carmona y Filio, 2011). La experimentación es fundamental para la obtención de datos y para el estudio de la variación. Si los datos no son adecuados, el análisis nos puede guiar a obtener otros significados y puede que limite la comprensión del objeto matemático.

En la situación diagnóstica 1 y 2 se analiza la relación entre variables: corriente eléctrica respecto al voltaje de la pila; intensidad luminosa respecto a la corriente eléctrica; intensidad luminosa respecto a la resistencia eléctrica. El comportamiento del led corresponde al análisis de un primer orden de variación. Si el voltaje aumenta, la intensidad luminosa aumenta. Si el voltaje disminuye, la intensidad luminosa disminuye. Si la resistencia aumenta, la intensidad luminosa disminuye. Si la resistencia disminuye, la intensidad luminosa aumenta.

En la situación diagnóstica 3 se reconoce que el capacitor almacena cargas eléctricas. El flujo de electrones se da de positivo a negativo. El comportamiento del capacitor corresponde al análisis de un primer orden de variación. Si el voltaje aumenta, el capacitor almacena mayor cantidad de cargas. Si el voltaje disminuye, el capacitor almacena menor cantidad de cargas. La situación

diagnóstica 4 se centra en la experimentación donde se analiza la relación entre el voltaje del capacitor respecto al tiempo. En este caso, no se pide el análisis del primer orden de variación.

En la situación de aprendizaje 1 se calculan las primeras diferencias para saber cuánto cambia el tiempo y el voltaje. Se centra en la comparación de estados, es decir, si el estado posterior es mayor que el anterior entonces el voltaje aumenta. Si el estado posterior es menor entonces el voltaje disminuye. Se analiza la seriación para identificar el carácter estable del cambio al argumentar que el voltaje va en aumento. Así también, se hace de uso del modelo predictivo (*Estado futuro = estado actual + variación*) y se predice el voltaje en un tiempo posterior.

La situación de aprendizaje 2 se refiere al análisis del segundo orden de variación. Se calculan las segundas diferencias para saber cuánto cambia el cambio del voltaje. Se centra en la comparación ente cambios, es decir, si el cambio posterior es mayor que el anterior entonces el voltaje aumenta. Si el estado posterior es menor entonces el voltaje disminuye. Se analiza la seriación para identificar el carácter estable del cambio al argumentar que el voltaje aumenta cada vez más lentamente. Así también, se hace de uso del modelo predictivo (*Estado futuro = estado actual + variación + variación de la variación*) y se predice el voltaje en un tiempo posterior.

La situación de aprendizaje 3 se centra en el análisis de gráficas para reconocer el comportamiento del segundo orden de variación, del primer orden y la relación entre los dos comportamientos para reconocer el carácter estable del cambio en el voltaje del capacitor, es decir, el voltaje aumenta cada vez más lentamente hacia un valor determinado. Con base en una gráfica se predice el voltaje del capacitor en un tiempo posterior.

Y en la situación de aprendizaje 4 se interactúa con una simulación sobre el comportamiento del voltaje del capacitor mediante un sistema de leds. Es decir, en visualizar el comportamiento del encendido-apagado de los leds donde se reconozca el comportamiento del capacitor (el voltaje aumenta cada vez más lentamente).

Señalamos que, en todas las situaciones diagnósticas y de aprendizaje, los estudiantes presentan diversas dificultades que son planteadas en el análisis *a posteriori*.

Desde la mirada del PyLVar retomamos que el estudio del cambio y la variación permiten su resignificación (Morales, 2009). Así también, la Serie de Taylor tiene un uso en el análisis de los circuitos eléctricos, específicamente, en el comportamiento de un capacitor siendo un fenómeno de variación continua. El marco de referencia lo asumimos como el escenario donde se interactúa para la construcción de significados en situaciones contextuales (Soto, 2013). Esto conlleva a una resignificación progresiva que favorece la comprensión de los objetos matemáticos. El laboratorio virtual a través de sesiones virtuales es considerado como el escenario donde los estudiantes construyen significados de la Serie de Taylor.

Morales (2009) señala que la relación de la Serie de Taylor con la práctica de predicción brinda un marco de referencia ausente en el discurso Matemático Escolar, y a través de éste permite su resignificación en un contexto de cinemática. Pasar de un paradigma cauchiano (convergencia) a un paradigma newtoniano (predicción). La Serie de Taylor deja de ser el objeto de la situación, sino más bien, el estudio del cambio y la variación es el objeto. El uso de las gráficas permite visualizar el comportamiento de los fenómenos de variación y cambio que generan argumentos para su resignificación. Hernández (2006) señala que la práctica de predicción favorece la construcción de conocimiento matemático y físico.

Desde el análisis histórico-epistemológico dice que el marco epistémico del binomio de Newton y la Serie de Taylor consistió en calcular el estado futuro del sistema en movimiento al considerar el estado inicial de la variable más la evolución de sus variaciones. Morales (2009) estudia la variación en el contexto de cinemática donde se pueden manipular objetos para su análisis. Las variables que se reconocen son: la posición, la velocidad y la aceleración. En el caso de los circuitos eléctricos no se puede manipular objetos tangibles para analizar el comportamiento de las variables. Tal es el caso de la corriente eléctrica (flujo de electrones) y el voltaje (suministro de electrones). Esto se debe a la dificultad que se tiene en visualizar dichos electrones. La carga eléctrica es la cantidad de

electrones en el circuito eléctrico. El voltaje es considerado como un recipiente (almacenamiento) que suministra electrones, es decir, la fuerza que empuja los electrones en el circuito eléctrico. La corriente, por su parte, es considerada como el flujo de electrones, es decir, son las cargas eléctricas respecto al tiempo.

En cinemática lo que cambia es la posición. En circuitos eléctricos lo que cambia es el voltaje (cantidad de electrones que son suministrados). En cinemática se habla de velocidad del objeto (posición respecto al tiempo). En circuitos eléctricos se habla de variación del voltaje (voltaje respecto al tiempo). En cinemática se habla de aceleración (velocidad respecto al tiempo). Y en circuitos eléctricos se habla de variación de la variación del voltaje. Por tanto, en cinemática podemos visualizar y manipular lo que se mueve (objetos), en circuitos eléctricos se dificulta la visualización y la manipulación de los electrones debido a que no contamos con los instrumentos adecuados, sin embargo, sí podemos medir las variables: voltaje, resistencia, tiempo. La intensidad luminosa es otra variable que podemos visualizar en el led de acuerdo con el voltaje suministrado. La corriente eléctrica presenta dificultades en la medición dado que es un valor pequeño que a veces el multímetro no detecta. Entonces, se elige la relación entre el voltaje de carga del capacitor respecto al tiempo.

Entonces, se establece que la Serie de Taylor para el análisis de un segundo orden de variación en el comportamiento de un capacitor genera otros significados en el contexto de los circuitos eléctricos, lo que permite su resignificación. Entonces, establecemos a la resignificación como el uso que hace un individuo o colectivo para dotar de significados a los objetos matemáticos en situaciones contextuales.

Presentamos una reconstrucción didáctica de la Serie de Taylor en el contexto de un circuito eléctrico RC fundamentada en el análisis histórico - epistemológico. Se de las primeras variaciones (diferencias), seguido de la variación de la variación (segundas diferencias) y así sucesivamente. Dichas variaciones sucesivas llevaron al descubrimiento de la regularidad del binomio de Newton y luego a la reconstrucción de la Serie de Taylor. En este caso se establece la transposición adaptándose a un circuito eléctrico RC permitiendo su resignificación en contexto de predicción en circuitos eléctricos, en donde se



coordinan las variables: voltaje de carga y tiempo. Enseguida se describe dicha reconstrucción:

La variable voltaje en un circuito eléctrico RC se considera como un recipiente que almacena electrones, dicho recipiente otorga electrones para el funcionamiento del circuito, en este caso, para cargar el capacitor. La carga representa la cantidad de electrones que hay en el recipiente (voltaje). El flujo de electrones (carga) que circula en el circuito eléctrico se le llama corriente eléctrica, dicho de otra manera, la corriente es la cantidad de electrones (carga) que se mueven en el circuito eléctrico respecto al tiempo. El voltaje de carga del capacitor es medido a través de un multímetro digital, donde su unidad de medida es el volt. La medición de la corriente en un circuito eléctrico RC se complica, debido a que es muy pequeña en comparación con el voltaje y además cambia con respecto al tiempo. Es por ello que, para la resignificación de la Serie de Taylor nos enfocamos en el comportamiento del voltaje de carga respecto al tiempo, sin dejar de lado el comportamiento de la corriente, la carga y la resistencia.

Entonces, en nuestra situación de aprendizaje que se refiere en la interacción con el modelo físico (circuito eléctrico RC) se realizan mediciones del voltaje de carga generándose una tabla de valores. Para dicha medición es indispensable elegir la variación de la variable independiente (tiempo) con intervalos de cinco minutos. Para la reconstrucción se retomarán seis mediciones (ver tabla 18). El siguiente proceso es pasar de lo numérico a lo algebraico (tabla 19), es decir, generalizar las variables al representarlas por medio de literales (letras) con subíndices ( $T_0, T_1, T_2 \dots V_0, V_1, V_2 \dots$ ), respectivamente.

**Tabla 18.** Mediciones numéricas

<b>T (tiempo)</b>	0	5	10	15	20	25
<b>V (voltaje)</b>	0	1.18	2.25	3.21	4.07	4.85

**Tabla 19.** De lo numérico a lo algebraico

<b>T (tiempo)</b>	$T_0$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
<b>V (voltaje)</b>	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$

Las literales que representan al tiempo y el voltaje de carga, respectivamente. Seguido se calculan las primeras diferencias, es decir, el primer orden de variación de la variable dependiente ( $\Delta V_0 = V_1 - V_0, \Delta V_1 = V_2 - V_1, \Delta V_2 = V_3 - V_2, \dots$ ). La notación  $\Delta$  (delta) representa la variación, por tanto, el segundo orden de variación se denota  $\Delta\Delta$ . Posteriormente, se calculan las diferencias de las diferencias ( $\Delta\Delta V_0 = \Delta V_1 - \Delta V_0, \Delta\Delta V_1 = \Delta V_2 - \Delta V_1, \dots$ ) como se muestra en lo siguiente

T (tiempo)	$T_0$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
V (voltaje)	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$

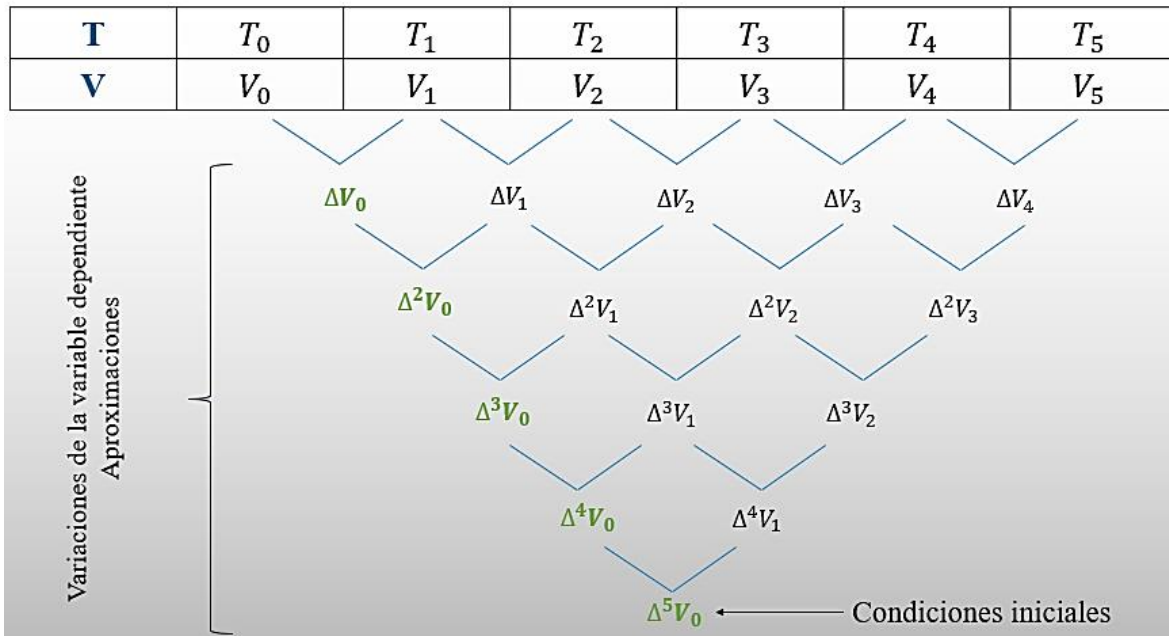
$V_2 - V_1$        $V_3 - V_2$        $V_4 - V_3$        $V_5 - V_4$

$[V_2 - V_1] - [V_1 - V_0]$     $[V_3 - V_2] - [V_2 - V_1]$     $[V_4 - V_3] - [V_3 - V_2]$     $[V_5 - V_4] - [V_4 - V_3]$

Donde:

$$\begin{aligned}\Delta V_0 &= V_1 - V_0 \\ \Delta\Delta V_0 &= [V_2 - V_1] - [V_1 - V_0] = \Delta V_1 - \Delta V_0 \\ \Delta^2 V_0 &= \Delta V_1 - \Delta V_0\end{aligned}$$

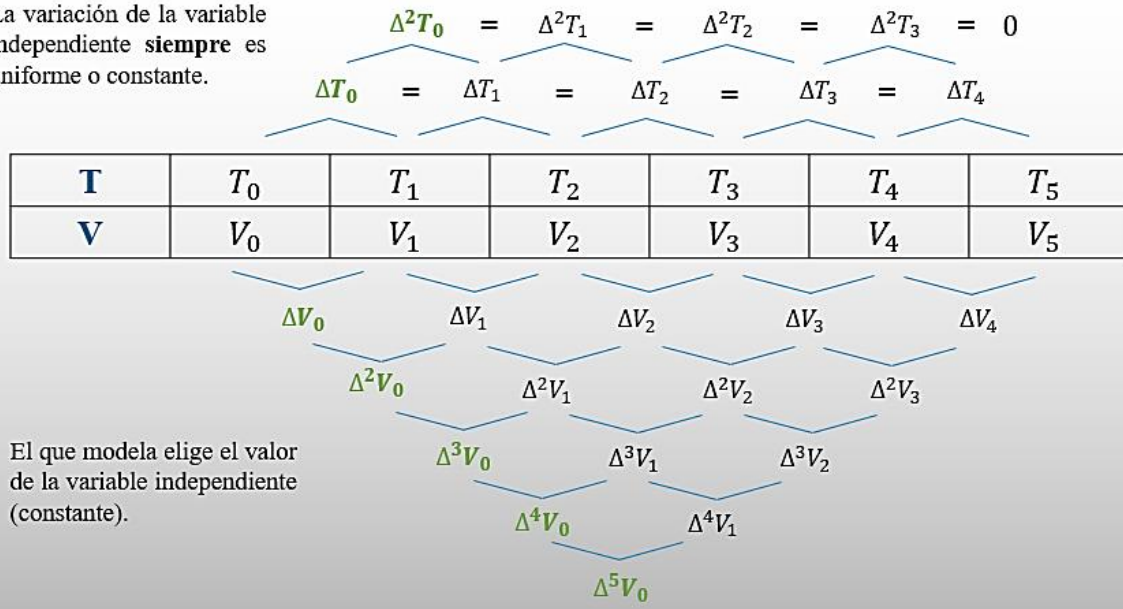
El exponente en delta  $\Delta$  significa el orden de variación. Consecuentemente se calculan terceras diferencias, y así sucesivamente hasta la última. La notación delta se puede compactar de la siguiente manera (a partir del segundo orden de variación):  $\Delta\Delta V_0 = \Delta^2 V_0, \Delta\Delta\Delta V_0 = \Delta^3 V_0, \Delta\Delta\Delta\Delta V_0 = \Delta^4 V_0$ , y así sucesivamente (figura 57). Al observar todas las variaciones (diferencias sucesivas) se identifica que el total de órdenes de variación es el número de datos a considerar menos uno, es decir, si elegimos a seis mediciones tendremos cinco órdenes de variación. Así también, en cada orden de variación las diferencias van disminuyendo, es decir, si se eligen las seis mediciones, en el primer orden de variación se calculan cinco diferencias, en el segundo orden se calculan cuatro diferencias, en el tercero se calculan tres y así sucesivamente hasta calcular la última diferencia.



**Figura 57.** Diferencias de diferencias

Con respecto a las variaciones de la variable independiente se deben hacer algunas consideraciones: la variación de dicha variable debe ser constante (uniforme) y el que modela elige tal variación. En este caso, como se mencionó anteriormente, las mediciones se realizaron cada cinco segundos, por lo que la variación del tiempo es cada cinco segundos. Esta condición se reflejará en los órdenes de variación, por ejemplo, en el primer orden de variación el valor de cada diferencia es igual ( $\Delta T_0 = \Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = \Delta T_4$ ). En el segundo orden de variación todas las diferencias son igual a cero, por lo que, en los siguientes órdenes de variación también son cero (figura 58).

La variación de la variable independiente **siempre** es uniforme o constante.



**Figura 58.** Diferencias de la variable dependiente e independiente

Newton señalaba que el cociente de las variaciones ( $\Delta V / \Delta T$ ) calcula la velocidad de la variable dependiente, en este caso, la velocidad del voltaje (figura 59). Por lo que, para modelar las velocidades del voltaje en el primer orden de variación obtenemos:

$$\frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}, \quad \frac{\Delta V_1}{\Delta T_1}, \quad \frac{\Delta V_2}{\Delta T_2}, \quad \frac{\Delta V_3}{\Delta T_3}, \quad \frac{\Delta V_4}{\Delta T_4}$$

¿Cómo relacionamos  $\Delta V$  y  $\Delta t$  ?

$$\frac{\Delta V}{\Delta T}$$

Newton decía que el cociente mide o calcula la velocidad de la variable dependiente.

$$Velocidad = \frac{\Delta V (\text{variación del voltaje})}{\Delta T (\text{variación del tiempo})} = \dot{V}$$

Modelar las velocidades del voltaje

<b>T</b>	$T_0$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
<b>V</b>	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$

	$\frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}$	$\frac{\Delta V_1}{\Delta T_1}$	$\frac{\Delta V_2}{\Delta T_2}$	$\frac{\Delta V_3}{\Delta T_3}$	$\frac{\Delta V_4}{\Delta T_4}$
--	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

Figura 59. Cociente de diferencias (velocidad)

Al calcular la velocidad de la velocidad del voltaje (segundo orden de variación) y al realizar las operaciones algebraicas (figura 60) se obtiene la segunda variación ( $\Delta^2 V_0 / \Delta T_0^2$ ).

Modelar las velocidades del voltaje

<b>T</b>	$T_0$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
<b>V</b>	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$

Velocidades del voltaje	$\frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}$	$\frac{\Delta V_1}{\Delta T_1}$	$\frac{\Delta V_2}{\Delta T_2}$	$\frac{\Delta V_3}{\Delta T_3}$	$\frac{\Delta V_4}{\Delta T_4}$
-------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

Velocidad de la velocidad del voltaje	$\frac{\frac{\Delta V_1}{\Delta T_1} - \frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}}{T_1 - T_0}$	$\frac{\frac{\Delta V_2}{\Delta T_2} - \frac{\Delta V_1}{\Delta T_1}}{T_2 - T_1}$	$\frac{\frac{\Delta V_3}{\Delta T_3} - \frac{\Delta V_2}{\Delta T_2}}{T_3 - T_2}$	$\frac{\frac{\Delta V_4}{\Delta T_4} - \frac{\Delta V_3}{\Delta T_3}}{T_4 - T_3}$	$\frac{\frac{\Delta V_5}{\Delta T_5} - \frac{\Delta V_4}{\Delta T_4}}{T_5 - T_4}$
---------------------------------------	---	---	---	---	---

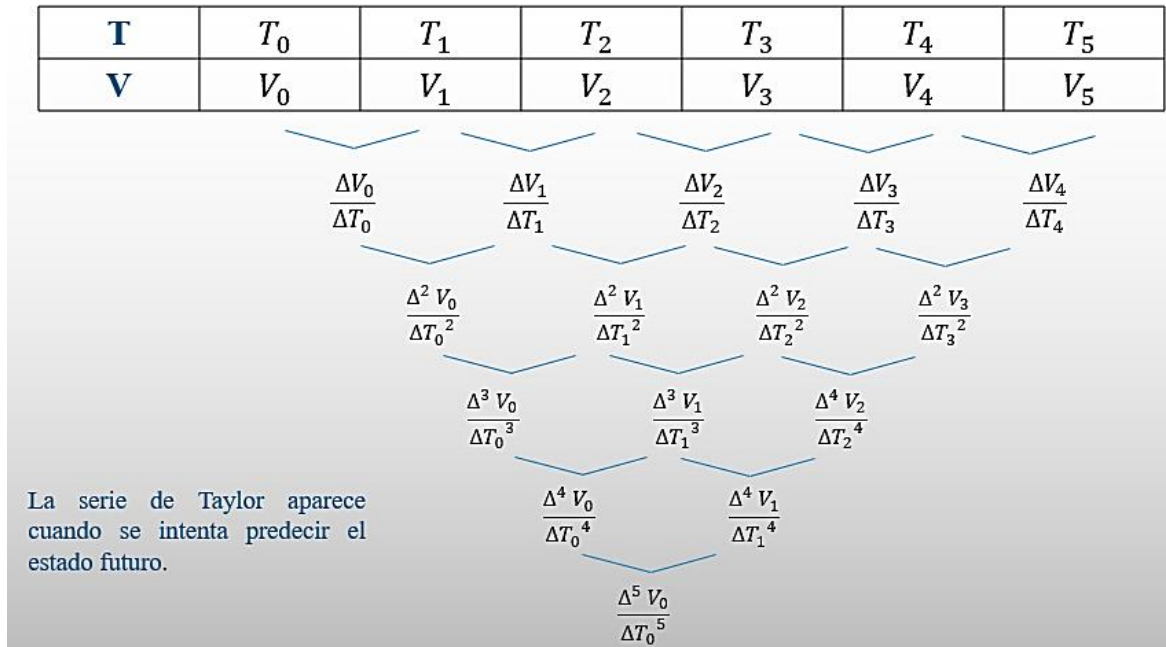
  

$$\frac{\frac{\Delta V_1 \Delta T_0 - \Delta V_0 \Delta T_1}{\Delta T_0 \Delta T_1}}{\Delta T_0} = \frac{\frac{\Delta V_1}{\Delta T_1} - \frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}}{\Delta T_0} = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_0}{\Delta T_0^2} = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_0}{\Delta T_0 \Delta T_1} = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_0}{\Delta T_0^2} = \frac{\Delta^2 V_0}{\Delta T_0^2}$$

Nacimiento de la serie de Taylor: presente del sistema (condiciones iniciales) – futuro del sistema.

Figura 60. Diferencias de las velocidades

Así sucesivamente con todos los órdenes de variación al tomar en cuenta que el cambio del tiempo es el mismo (figura 61). El nacimiento de la serie de Taylor se presenta al considerar el presente del sistema (condiciones iniciales) para predecir el estado futuro del sistema.



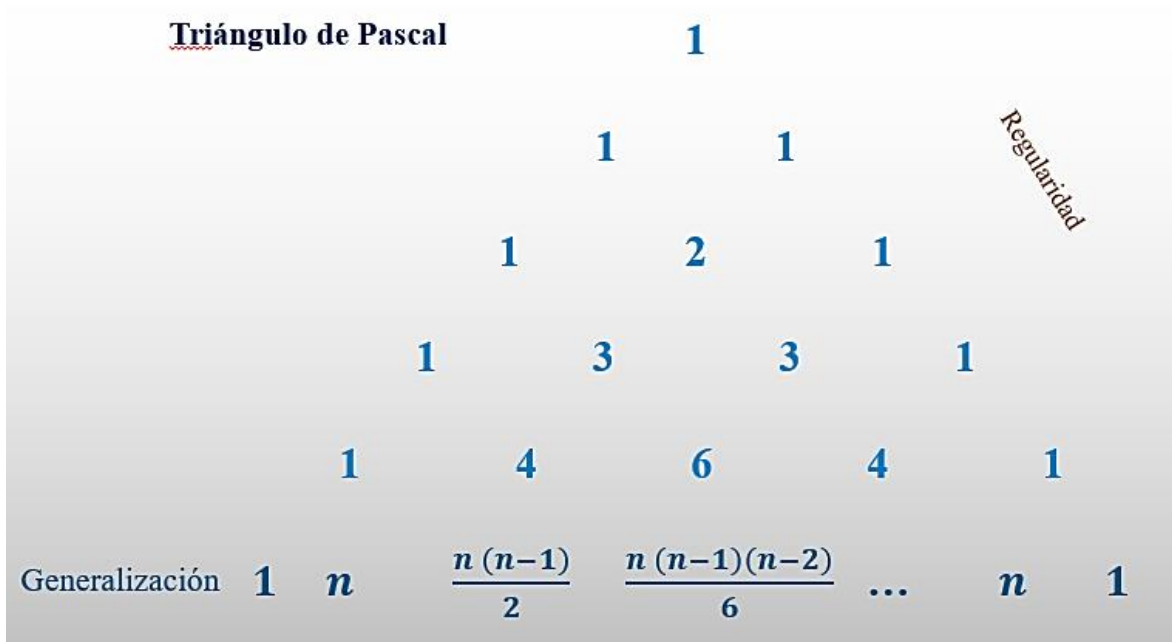
**Figura 61.** Predicción del voltaje

Para predecir el voltaje ( $V_5$ ) se considera el estado inicial ( $V_0$ ) más la suma de todas las variaciones ( $\Delta V_0, \Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \Delta V_4$ ) para obtener el estado futuro. Para determinar dichas variaciones se toma en cuenta las condiciones iniciales, es decir, todas las variaciones quedan en función de las condiciones iniciales ( $\Delta V_0, \Delta^2 V_0, \Delta^3 V_0, \Delta^4 V_0, \Delta^5 V_0$ ) tal como se muestra en la figura 62.

$V_0 + \text{variación larga} = V_5$			$V_0 + \text{variación larga} = V_5$		
$V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = V_5$			$V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = V_5$		
<i>Estado inicial + suma de variaciones = estado futuro</i>			<i>Estado inicial + suma de variaciones = estado futuro</i>		
$\Delta V_1 - \Delta V_0 = \Delta^2 V_0$ $\Delta V_1 = \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$	$\Delta V_2 - \Delta V_1 = \Delta^2 V_1$ $\Delta V_2 = \Delta^2 V_1 + \Delta V_1$ $\Delta V_2 = \Delta^2 V_1 + \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$	$\Delta^2 V_1 - \Delta^2 V_0 = \Delta^3 V_0$ $\Delta^2 V_1 = \Delta^3 V_0 + \Delta^2 V_0$	$\Delta V_3 - \Delta V_2 = \Delta^2 V_2$ $\Delta V_3 = \Delta^2 V_2 + \Delta V_2$	$\Delta^2 V_2 - \Delta^2 V_1 = \Delta^3 V_1$ $\Delta^2 V_2 = \Delta^3 V_1 + \Delta^2 V_1$ $\Delta^3 V_1 - \Delta^3 V_0 = \Delta^4 V_0$ $\Delta^3 V_1 = \Delta^4 V_0 + \Delta^3 V_0$	$\Delta V_3 = \Delta^3 V_1 + \Delta^2 V_1 + \Delta^3 V_0 + 2 \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$ $\Delta V_3 = \Delta^4 V_0 + \Delta^3 V_0 + \Delta^3 V_0 + \Delta^2 V_0 + \Delta^3 V_0 + 2 \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$ $\Delta V_3 = \Delta^4 V_0 + 3 \Delta^3 V_0 + 3 \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$
$\Delta V_2 = \Delta^3 V_0 + \Delta^2 V_0 + \Delta^2 V_0 + \Delta V_0 = \Delta^3 V_0 + 2 \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$					

**Figura 62.** Origen de una regularidad

Si retomamos la primera variación del voltaje:  $\Delta V_0 = V_1 - V_0$  ; su coeficiente es: 1.  
 La segunda variación del voltaje:  $\Delta V_1 = \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$  ; sus coeficientes son: 1 y 1.  
 La tercera variación del voltaje:  $\Delta V_2 = \Delta^3 V_0 + 2\Delta^2 V_0 + \Delta V_0$  ; sus coeficientes son: 1, 2 y 1. La siguiente variación del voltaje:  $\Delta V_3 = \Delta^4 V_0 + 3\Delta^3 V_0 + 3\Delta^2 V_0 + \Delta V_0$  ; sus coeficientes son: 1, 3, 3 y 1. Y la otra variación del voltaje:  $\Delta V_4 = \Delta^5 V_0 + 4\Delta^4 V_0 + 6\Delta^3 V_0 + 4\Delta^2 V_0 + \Delta V_0$  ; sus coeficientes son: 1, 4, 6, 4 y 1. Por lo que la regularidad de los coeficientes se relaciona con el triángulo de Pascal (figura 63).



**Figura 63.** Regularidad triángulo - binomio de Newton

Al retomar la generalización del triángulo de Pascal y al evaluarlo en el modelo predictivo:

$$V_0 + \Delta V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 + \Delta V_{n-1} = V_n$$

Se obtiene:

$$V_0 + n\Delta V_0 + \frac{n(n-1)\Delta^2 V_0}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 V_0}{3!} + \dots + n\Delta^{n-1} V_0 + \Delta^n V_0 = V_n$$

$$\text{La variación del tiempo} = T_n - T_0$$

Las variaciones del tiempo son iguales

$$\Delta T_0 = \Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = \Delta T_4 = \Delta T_n$$

Entonces

$$n\Delta T_0 = T_n - T_0$$

Despejando  $n$

$$n = \frac{T_n - T_0}{\Delta T_0}$$

Sustituyendo en

$$V_0 + n\Delta V_0$$

Se obtiene

$$V_0 + \frac{T_n - T_0}{\Delta T_0} \Delta V_0 = V_0 + \frac{\Delta V_0}{\Delta T_0} (T_n - T_0)$$

Al sustituir en el siguiente término se obtiene lo que se muestra en la figura 64.

$$\frac{\left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0}\right] \left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0} - 1\right] \Delta^2 V_0}{2!} = \frac{\left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0}\right] \left[\frac{T_n - T_0 - \Delta T_0}{\Delta T_0}\right] \Delta^2 V_0}{2!}$$

$$\frac{\frac{[T_n - T_0]^2 \Delta^2 V_0}{\Delta T_0^2} - \frac{[T_n - T_0] \Delta T_0 \Delta^2 V_0}{\Delta T_0^2}}{2!}$$

Donde:  $\frac{[T_n - T_0] \Delta T_0 \Delta^2 V_0}{\Delta T_0^2} = 0$       Entonces:  $\frac{\left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0}\right] \left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0} - 1\right] \Delta^2 V_0}{2!} = \frac{\Delta^2 V_0}{2! \Delta T_0^2} [T_n - T_0]^2$

**Figura 64.** Hacia la Serie de Taylor

Y al sustituir en los siguientes términos y simplificar las operaciones algebraicas se construye la **Serie de Taylor**:

$$V_0 + \frac{dV_0}{dT_0} (T_n - T_0) + \frac{d^2 V_0}{2! dT_0^2} (T_n - T_0)^2 + \frac{d^3 V_0}{3! dT_0^3} (T_n - T_0)^3 + \dots$$

$$+ \frac{d^n V_0}{n! dT_0^n} (T_n - T_0)^n = V_n$$

En este trabajo se establece lo algorítmico como todo lo asociado a métodos, reglas, procesos, operaciones, técnicas, procedimientos. Y lo conceptual lo entendemos como todo lo asociado a ideas, nociones, pensamientos, concepciones, conceptos, significados (Muñoz-Ortega, 2010; Muñoz, 2006). Entonces, la Serie de Taylor permite una integración de lo conceptual y lo



algorítmico. Lo conceptual se reconoce en el estudio de la variación para la predicción de estados futuros y lo algorítmico en el análisis de la variación sucesiva.

El *Prædiciere* como la práctica social y la predicción como la práctica variacional permite analizar fenómenos de variación continua en diversos contextos. En este trabajo se reconocen varios contextos donde se estudia la variación con fines predictivos. El contexto astronómico, desde los griegos, se refiere al movimiento de los planetas con la intención de predecir sus comportamientos (Collette, 1986). En el contexto de cinemática se hace uso de la Serie de Taylor con el estudio del movimiento de cuerpos físicos (Morales, 2009; Almazán, 2009). Se establece el estudio de la variación en el contexto de propagación del calor (Solís, 1999). El estudio de órdenes de variación en la interpretación de un electrocardiograma para el análisis del comportamiento del ritmo cardiaco de un paciente que permite un diagnóstico médico (Moreno-Durazo y Cantoral, 2017). El análisis del llenado de recipientes mediante un sistema de referencia variacional con base en prácticas (Caballero, 2018). El análisis de circuitos eléctricos mediante el campo de pendientes de una ecuación diferencial (Morales, 2011). El análisis de un circuito eléctrico a través de una ecuación diferencial (modelo matemático) en el contexto del funcionamiento de un desfibrilador cardíaco (Rodríguez, 2010). Por tanto, proponemos el uso de la Serie de Taylor en el análisis de circuitos eléctricos mediante un sistema de referencia variacional con base en prácticas. Esta propuesta la consideramos como un aporte a la Matemática Educativa que contribuye al rediseño del dME.

**CAPÍTULO 6.**  
**CONCLUSIONES Y**  
**PROSPECTIVAS DE LA**  
**INVESTIGACIÓN**

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se plantean las conclusiones y las prospectivas de la investigación. Se establece un esquema sobre los elementos del sistema de referencia variacional basado en prácticas. Se presenta la manera en que se resignifica la Serie de Taylor en el contexto de circuitos eléctricos y la integración de lo conceptual y lo algorítmico. Así también, algunas prospectivas de investigación que contribuyan al rediseño del discurso matemático escolar.

### 6.1. CONCLUSIONES

En el proceso de transposición didáctica es indispensable reconocer las transformaciones que sufren los objetos matemáticos para ser abordados dentro y fuera del aula (Chevallard, 1998). El papel que tiene la transposición didáctica en el rediseño del discurso matemático escolar es en el uso de Serie de Taylor en el contexto de los circuitos eléctricos. Se retoman elementos del análisis histórico-epistemológico para llevarlos al contexto escolar con estudiantes de ingeniería en sistemas computacionales. En el presente trabajo se plantean dos tipos de transposiciones: del contexto de la cinemática al contexto de los circuitos eléctricos y del saber histórico - epistemológico de la Serie de Taylor al discurso Matemático Escolar. Con el objetivo de democratizar el aprendizaje.

La Serie de Taylor es un objeto matemático considerado como el instrumento predictor. Este objeto permite el estudio de la variación en el campo de los circuitos eléctricos mediante un sistema de referencia variacional con base en prácticas. El uso de la Serie de Taylor se da con el análisis de fenómenos de flujo continuo en la naturaleza a través de las variaciones sucesivas, en este caso, en el comportamiento de un led y de un capacitor. En el comportamiento de un led se analiza un primer orden de variación y en el comportamiento del capacitor se analiza un segundo orden de variación. Los estudiantes presentan algunas dificultades, tales como: reconocer cantidades que cambian, relacionar esas cantidades (la modificación de una afecta a la otra), comparar los estados futuros y darles significado, realizar una seriación para reconocer el carácter estable del cambio y en articular los órdenes de variación para hacer la predicción.

La resignificación se da en el contexto de los circuitos eléctricos. Los significados que se le otorga a la Serie de Taylor con base en un sistema de referencia variacional son: el estado inicial corresponde al voltaje del capacitor en el tiempo inicial, la primera variación corresponde al cambio del voltaje del capacitor respecto al tiempo y la segunda variación al cambio del cambio del voltaje del capacitor respecto al tiempo.

La Serie de Taylor permite una integración de lo conceptual y lo algorítmico. Lo conceptual se reconoce en el estudio de la variación para la predicción de estados futuros y lo algorítmico en el análisis de la variación sucesiva. El modelo predictivo se refiere al estado inicial más las variaciones es igual al estado futuro. Los estudiantes presentan dificultades con el uso del modelo:

$$\textit{Estado inicial} + \textit{variación} + \textit{variación de la variación} = \textit{estado futuro}.$$

No pueden relacionar el segundo orden de variación con el comportamiento del voltaje del capacitor. Es decir, en reconocer el carácter estable del cambio que se a que el voltaje aumenta cada vez más lentamente.

En el modelo

$$\textit{Estado inicial} + \textit{variación} = \textit{estado futuro}$$

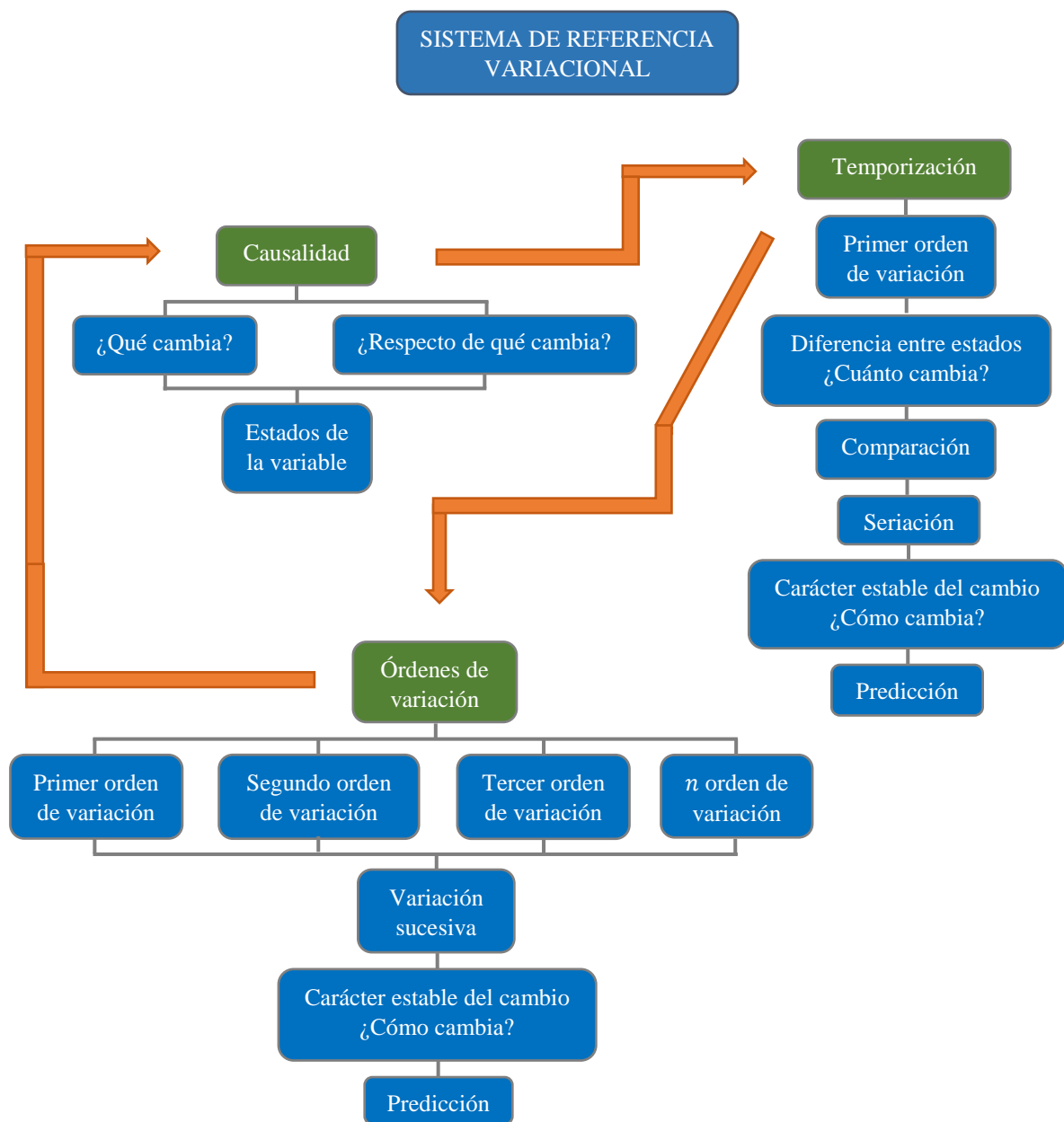
No presentan dificultades ya que reconocen el carácter estable del cambio al argumentar que la intensidad luminosa del led aumenta si aumenta el voltaje y disminuye si disminuye el voltaje.

La integración de lo conceptual y lo algorítmico se reconoce en el diseño de las situaciones diagnósticas y de aprendizaje. Lo conceptual se refiere al análisis de la variación para la predicción de estados futuros y lo algorítmico en el análisis de las variaciones sucesivas. El sistema de referencia variacional permite el estudio del cambio y la variación en el contexto de los circuitos eléctricos. Las prácticas sociales son las generadoras del conocimiento matemático que contribuye al rediseño del discurso matemático

La manera en que se resignifica la Serie de Taylor es con base en el sistema de referencia variacional. Los significados se reconocen en las variables que cambian: corriente eléctrica, voltaje, intensidad luminosa y el tiempo. La relación entre las variables (causalidad): voltaje-corriente; corriente-intensidad luminosa; voltaje-intensidad luminosa; voltaje-tiempo. Esta relación permite abordar el qué

cambia y respecto de qué cambia. El reconocimiento de estados intermedios (temporización) del voltaje de carga del capacitor respecto al tiempo. En el análisis del primer orden de variación permite el cálculo de las primeras diferencias. Se realiza la comparación entre estados y se generan los siguientes significados: si el estado posterior es mayor que el anterior el voltaje aumenta, si el estado posterior es menor que el anterior el voltaje disminuye. La práctica de seriación permite analizar varias comparaciones para reconocer el carácter estable del cambio, en este caso, los significados son: si en todas las comparaciones el estado posterior es mayor que el anterior el voltaje va en aumento conforme pasa el tiempo (cómo cambia). Unas de las dificultades que presentaron los estudiantes al interactuar con las situaciones de aprendizaje fue el análisis del segundo orden de variación, es decir, cómo afecta el cambio en las segundas diferencias en el voltaje de carga para reconocer el carácter estable del cambio que se refiere a que el voltaje de carga del capacitor aumenta cada vez más lentamente.

En la interacción con las sesiones virtuales también se identificaron ciertas dificultades, principalmente con la conexión a internet. Así también, la participación de los estudiantes es limitada, lo que provoca que algunos no pongan atención a la clase. La mayoría de los alumnos no tuvieron complicaciones en conseguir los materiales para los experimentos: leds, resistencias, capacitores, multímetro digital, celular, cables y pilas. Esto permitió el trabajo con material concreto centrándose en la medición. Con esta investigación concluimos que, el uso de la Serie de Taylor mediante un sistema de referencia variacional y con base en prácticas permite el análisis de circuitos eléctricos. Esto conlleva al diseño de una propuesta presentada en el esquema de la figura 64. En el esquema se plantean elementos del sistema de referencia variacional con base en prácticas, que permita la integración de lo conceptual con lo algorítmico.



**Figura 65.** Elementos del sistema de referencia variacional con base en prácticas

Entonces, proponemos el esquema para el análisis de fenómenos de flujo continuo que permita una resignificación de la Serie de Taylor en diversos contextos.

## 6.2. PROSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN

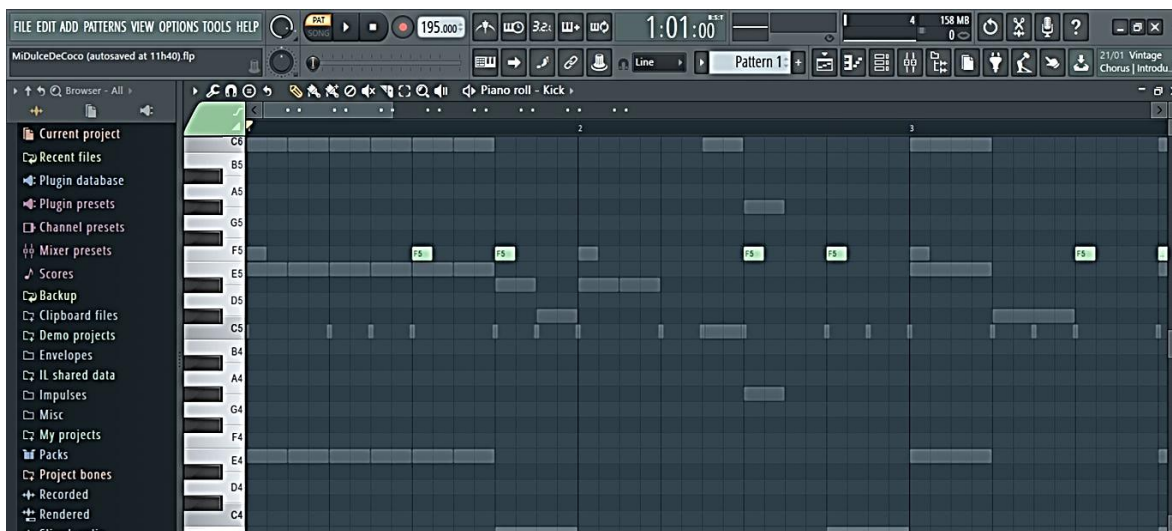
La Serie de Taylor como el instrumento predictor con base en un sistema de referencia variacional permite el estudio del cambio y la variación en fenómenos de flujo continuo (circuitos eléctricos). El cambio y la variación se estudian en situaciones no solo escolares sino también profesionales y experiencias cotidianas. En esta investigación solo se analiza un segundo orden de variación correspondiente a tres términos de la Serie de Taylor, dado que el comportamiento del capacitor lo permite. Entonces, puede ser de interés reconocer algún fenómeno de flujo continuo en el que se pueda analizar un tercer orden de variación, incluso un cuarto orden. Con estos análisis pueden considerarse cuatro términos o cinco, respectivamente.

Las situaciones diagnósticas y de aprendizaje se pueden implementarse con estudiantes de nivel medio superior para enriquecer los resultados. Así también, se pueden rediseñar las actividades con base en el esquema de la figura 57, que contribuyan al rediseño del discurso matemático escolar.

La física es una ciencia experimental donde podemos hacer uso de la Serie de Taylor para el análisis de sus conceptos en diversos campos de estudio: electromagnetismo, hidráulica, acústica, mecánica de fluidos, óptica, electrónica analógica y digital, energía cinética, entre muchos otros. Con la finalidad de procurar la transversalidad del saber matemático.

Es de interés que el saber sea funcional para los estudiantes, que se integre en su vida cotidiana para resolver problemas. En el contexto del consumo de energía eléctrica a veces nos preguntamos sobre el pago de luz que vamos a realizar en los dos meses. Esto conlleva a realizar un análisis sobre el uso de los aparatos eléctricos/electrónicos que tenemos en casa: refrigerador, lámparas o focos, módem de internet, computadoras, televisores, plancha, licuadora, entre otros. Estos aparatos son los que consumen cierta cantidad de energía eléctrica que se refleja en un costo económico. Entonces, nos orienta a querer predecir el pago de luz eléctrica de acuerdo al uso de los aparatos eléctricos. Con la intención de ahorrar energía eléctrica en los hogares y pagar menos luz. Por tanto, el consumo de energía eléctrica en los hogares puede ser un contexto en el que se haga uso de la Serie de Taylor que permita su resignificación. En producción musical

también se puede hacer uso de la Serie de Taylor con el análisis de las notas musicales. Este análisis permita reconocer el carácter estable de cambio para crear una canción (melodía).



**Figura 66.** Producción musical con software

Por ejemplo, en la figura 66 se muestran algunas notas musicales que corresponden a instrumentos: percusiones, piano, bajo eléctrico, entre otros. Establecemos que, el “piano roll” (teclas de un teclado) se puede representar en un plano cartesiano donde el origen puede significar la nota “central” denotada por C5. Entonces, una nota más aguda estará ubicada arriba del origen y una nota más grave estará debajo del origen. El eje positivo (a la derecha) corresponde al tiempo donde se pueden reconocer ciertos intervalos donde se ubican un conjunto de notas musicales. Por tanto, lo que cambia son los tonos de las notas musicales respecto al tiempo. Si el tono es diferente se reconoce el cambio con un primer orden de variación al analizar dos términos de la Serie de Taylor. Posiblemente, puede que exista un segundo orden de variación al analizar tres términos de la Serie de Taylor. Proponemos que en producción musical mediante un software puede ser un contexto que permita la resignificación de la Serie de Taylor.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almazán, C. (2009). *Elementos para la resignificación de la serie de Taylor a través de la tecnología* [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad Autónoma de Yucatán, México.
- Arcos, I. (1993). *La Serie de Taylor en las escuelas de ingeniería. Análisis de textos* [Tesis de maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59), México: Iberoamérica.
- Barajas, C., Parada, S., y Molina, J. (2018). Análisis de dificultades surgidas al resolver problemas de variación. *Educación Matemática*, 30 (3), 297 - 323.
- Barragán, A., Núñez, H., Cerpa, G., y Rodríguez, M. (2014). *Introducción al electromagnetismo: un enfoque constructivista basada en competencias*. México: Patria.
- Bazdresch, M. (2009). La vida cotidiana escolar en la formación valoral: un caso. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 7 (2), 49 - 71.
- 3Blue1Brown (2017). Series de Taylor | Capítulo 10, La esencia del Cálculo. Obtenido de YouTube: <https://youtu.be/3d6DsjlBzJ4>
- Bernal, J. (1979). *La ciencia en la historia*. México: Nueva Imagen.
- Boylestad, R. (2011). *Introducción al análisis de circuitos*. México: Pearson.
- Braun, E. (2003). *Electromagnetismo: de la ciencia a la tecnología*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Caballero - Pérez, M. y Cantoral, R. (2017). Anidación de prácticas para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 2, 402 - 413. Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.
- Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional* [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

- Cano, J., Gómez, J., y Cely, I. (2009). *La enseñanza del concepto de corriente eléctrica desde un enfoque histórico epistemológico* [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad de Antioquía, Colombia.
- Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas* [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Cantoral, R. (1995). *Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor*. MATHESES, XI (1), 55-101.
- Cantoral, R. (1997). *Matemática Educativa en Latinoamérica: ¿será posible el sur?* *Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, 28 - 32. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (1999). *Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea*. En R. M. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 12(1)*(pp. 41 – 48). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.
- Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber: pensamiento y lenguaje variacional*. España: Gedisa.
- Cantoral, R. y González, R. (1998). *Diseño de situaciones didácticas de resignificación: el caso de la derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. En R. M. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 12(1)* (pp. 11 – 14). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo*. México: Thomson.
- Carmona, I., y Filio, E. (2011). *Ecuaciones diferenciales*. México: Pearson.
- Chapra, S., y Canale, R. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGraw - Hill.

- Chevallard, Y. (1998). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. En C. Gilman, (trad.). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: AIQUE.
- Collette, J. (1986). *Historia de las matemáticas I*. México: siglo xxi editores.
- Cruse, A., y Lehman, M. (1982). *Lecciones de cálculo: volumen I*. México: Fondo Educativo Interamericano.
- Cruz, J., y Valencia, J. (2005). La formación práctica del ingeniero electrónico en el laboratorio. *Revista científica Guillermo de Ockham*, 3 (1), 115 - 130.
- Dolores, C. (2005). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Dolores, C. (2007). Tipos de representaciones gráficas sobre la rapidez de la variación. *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 359 - 171, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.
- Dolores, C. (2010). EL lenguaje variacional en el discurso de la información. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13 (4 - II), 241 - 254.
- Douady, R. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 61-96), México: Iberoamérica.
- Duarte, J. (2011). El mundo físico de Aristóteles. *GÓNDOLA*, 6 (1), 62 - 70.
- Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico* [Tesis de maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Fallas, R., y Cantoral, R. (2018). La variación acotada y su papel en el estudio del cambio. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 3, 25-35.
- Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Farfán, R. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. España: Gedisa.
- Fraile, J. (2012). *Circuitos eléctricos*. España: Pearson.

- García, J., y Dolores, C. (2016). Conexiones matemáticas entre la derivada y la integral: una revisión de libros de texto de bachillerato. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 1(16), 321 - 329.
- Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56(4), 195 - 206.
- Hawking, S. (2011). *Historia del tiempo: del Big Bang a los Agujeros Negros*. México: Alianza Editorial.
- Hernández, H. (2006). El papel de la interpolación y la predicción en el Cálculo. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, (pp. 786 – 792). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Hernández, H. (2006). *Una visión Socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Chiapas, México.
- Hernández, J., y Cantoral, R. (2017). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30 (pp. 1009-1017). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Hinojos, J., y Farfán, R. (2018). La analogía entre el calor y la electricidad. Una base para confrontar el obstáculo epistemológico sustancialista en la electricidad en escuelas de ingeniería. En L. S. Serna y D. Páges (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 31(1) (pp. 584-591). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Koyré, A. (1980). *Estudios galileanos*. España: siglo XXI de España editores.
- Levi, E. (2001). *El agua según la ciencia*. México: IMTA.
- Mason, S. (2012). *Historia de las ciencias, 1: desde la antigüedad hasta la revolución científica de los siglos XVI y XVII*. España: Alianza Editorial.
- Méndez, M., Ferrari, M., y Trejo, M. (2018). Modelación escolar: análisis de las variaciones en las gráficas. En L. S. Serna y D. Páges (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 31(2) (pp. 1512 – 1518). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica* [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Morales, A. (2009). *Resignificación de la serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones* [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Morales, E. (2011). *Resignificación de los campos de pendiente en las ecuaciones diferenciales en un contexto electrónico* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Chiapas, México.
- Moreno-Durazo, A., y Cantoral, R. (2017). El uso de los órdenes superior de variación en la interpretación clínica del electrocardiograma. En L. A. Serna (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa 30* (pp. 927 – 935). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Muñoz, G. (2006). *Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al Cálculo integral: aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos* [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Muñoz-Ortega, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (4), pp. 283 - 302.
- Päch, S., y Franke, H. (1991). La bombilla de Thomas A. Edison. Cumbres De Las Ciencias Y La Técnica 010 Thomas Alva Edison y La Bombilla (28 de julio de 2014). CienciaTv. Recuperado de [https://www.youtube.com/watch?v=\\_GGeB2Theil&list=PL6enpR8MLihG-eLPSLmvINbO3eCgp2pwl&index=7&pbjreload=10](https://www.youtube.com/watch?v=_GGeB2Theil&list=PL6enpR8MLihG-eLPSLmvINbO3eCgp2pwl&index=7&pbjreload=10)
- Paz, L. (2019). *Estudio socioepistemológico sobre la confrontación entre La Geometría de Descartes y el discurso Matemático Escolar* [Tesis de maestría

- no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Pérez, R. (2019). *Estudio sobre el papel de la confrontación en el tratamiento de la física clásica de Newton al discurso Matemático Escolar* [Tesis de maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Tecnológico Nacional, México.
- Poveda, G. (2003). La electricidad antes de Faraday. Parte 1. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, (30), 130 - 147.
- Rainville, E., Bedient, P., y Bedient, R. (1998). *Ecuaciones diferenciales*. México: Prentice Hall.
- Ramos, G. (2015). *Modelado de circuitos eléctricos en CC y AC a través de la plataforma de simulación MatLab / Simulink* [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad Católica de Santiago de Guayaquil, Ecuador.
- Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9 (3), pp. 435 - 458.
- Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas* [Tesis de maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Ríos, D. (2020). *Socioepistemología y transversalidad: una reconstrucción racional de tres teoremas fundamentales* [Tesis de maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4), 191 - 210.
- Salinas, P. (2010). *Un estudio socioepistemológico sobre el método de Euler como generador de procedimientos y nociones del Cálculo en el contexto del estudio del cambio* [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

- Salinas, P., y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12 (3), pp. 355 - 382.
- Sierra, E. (2008). *Pesas y medidas: un estudio socioepistemológico. El caso Metlatónoc* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo.
- Solís, M. (1999). *Estudio de la noción de variación en contextos físicos: el fenómeno de la propagación del calor*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Soto, D. (2013). *La dialéctica Exclusión – Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático* [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Struik, D. (1986). *A source book in mathematics, 1200-1800*. United States of America: Princeton.
- Suárez, L. (2008). *Modelación - graficación, una Categoría para la Matemática Escolar. Un Estudio Socioepistemológico* [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Taylor, B. (1717). *Methodus incrementorum directa & inversa*. Royal Society.
- Trujillo, M. (2016). Obstáculos cognitivos asociados con la variación y el cambio. En A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa: teoría y enfoques* (pp. 32 - 42), México: Lectorum.
- Tuyub, I. (2008). *Estudio Socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento* [Tesis de maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Universidad de Los Altos de Chiapas. (2004). *Ingeniería en sistemas computacionales: actualización del plan de estudios*. México.
- Valencia, A., y Valenzuela, J. (2017). ¿A qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Un análisis de libros de texto. *Educación Matemática*, 29 (3), 51- 78.

**ANEXOS**





# UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS

## Situación diagnóstica 1. Análisis de diagramas eléctricos

**A.** ¿Cuál de los siguientes diagramas consideras que es un circuito eléctrico?

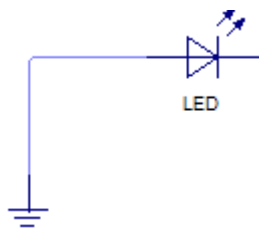


Diagrama 2. Inciso A

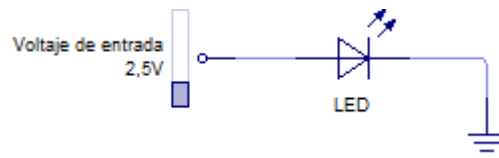


Diagrama 2. Inciso B

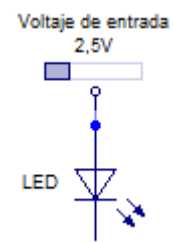
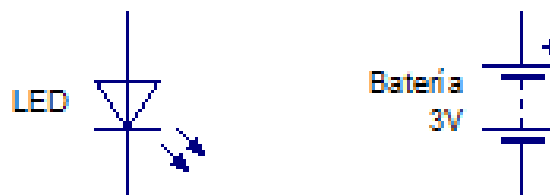


Diagrama 3. Inciso C

De acuerdo con tú elección, ¿por qué consideras que es un circuito eléctrico?

**B.** Dibuja (por medio de trazos) cómo conectarías el led a la batería (pila) de 3 volts, para que el led encienda (figura 1).



**Figura 1.** Diagrama de un led y una batería (pila)

Con base en el inciso B responde los siguientes cuestionamientos:

¿Por qué crees que enciende el led?

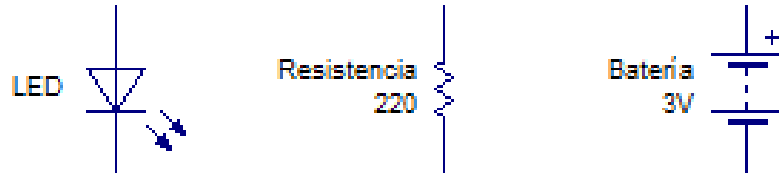
¿Qué es lo que se mueve para que el led encienda?

¿Qué crees que pasa si aumenta el voltaje de la batería (pila)?

¿Qué crees que pasa si disminuye el voltaje de la batería (pila)?

¿Qué crees que pasa si se desconecta la batería?

**C.** Dibuja (por medio de trazos) cómo conectarías el led y la resistencia a la batería de 3 volts (figura 2).



**Figura 2.** Diagrama de una pila, una resistencia y un led

Con base en el inciso C, responde los siguientes cuestionamientos:

Al realizar los trazos, ¿el led se enciende o permanece apagado?

Enciende

Permanece apagado

¿Por qué?

¿Qué sucede si aumenta el valor de la resistencia?

¿Qué sucede si disminuye el valor de la resistencia?

¿Qué sucede si quitas o desconectas la resistencia?



# UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS

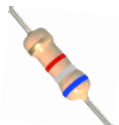
## Situación diagnóstica 2. Experimentación con el led

**A.** Relaciona con una flecha el elemento de un circuito eléctrico (diagrama físico) con su símbolo (diagrama eléctrico), observa la figura 3:

Elemento de un circuito eléctrico

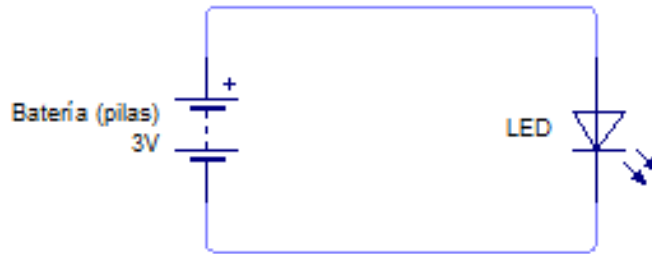


Símbolo



**Figura 3.** Elementos y símbolos de un circuito eléctrico

**B.** Conecta dos pilas en serie y realiza las conexiones (con cables) correspondientes al siguiente diagrama de circuito eléctrico (figura 4):



**Figura 4.** Diagrama de un circuito eléctrico con un led y una pila

¿Qué pasa con el led?

¿Por qué crees que ocurre ese fenómeno?

¿Qué se mueve en el circuito eléctrico?

**C.** Agrega una resistencia al circuito eléctrico anterior y dibuja su diagrama eléctrico correspondiente:

**D.** Realiza las conexiones (con cables) de acuerdo con el diagrama anterior, al considerar una resistencia de 220 ohms.

Responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué pasa con el led?

¿Por qué crees que ocurre ese fenómeno?

**E.** Realiza las conexiones (con cables) correspondientes, pero ahora con una resistencia de 1,000 ohms.

Responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué pasa si aumenta el valor de la resistencia?

¿Qué pasa si disminuye el valor de la resistencia?



# UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS

## Situación diagnóstica 3. Análisis de diagramas eléctricos

**A.** ¿Cuál de los siguientes diagramas consideras que es un circuito eléctrico?

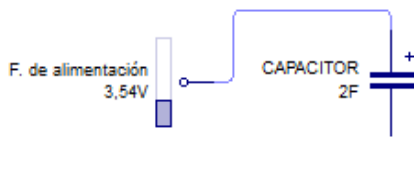


Diagrama 1. Inciso A

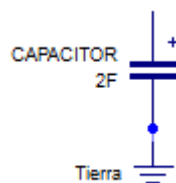


Diagrama 2. Inciso B

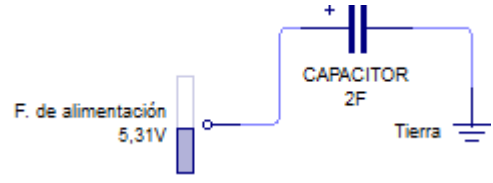
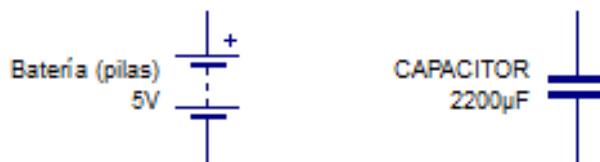


Diagrama 3. Inciso C

De acuerdo con tu elección, ¿por qué consideras que es un circuito eléctrico?

**B.** Dibuja (por medio de trazos) cómo conectarías el capacitor a las pilas que entregan 5 volts.



Con base en el inciso **B**, responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué le pasa al capacitor?

¿Por qué crees que sucede ese fenómeno?

¿Qué pasa si aumenta el voltaje de las pilas?

¿Qué pasa si disminuye el voltaje de las pilas?



# UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS

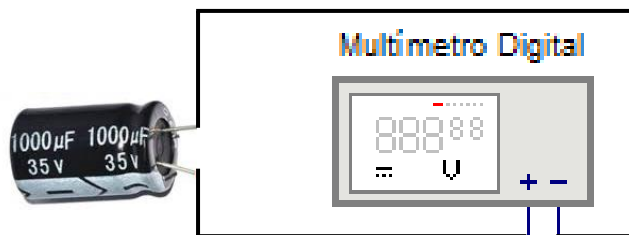
## Situación diagnóstica 4. Experimentación con un capacitor

**A.** Descarga el capacitor al conectar sus dos terminales (positiva y negativa), durante 10 segundos, como se muestra en la figura 5.



**Figura 5.** Descarga del capacitor

**B.** Conecta el multímetro digital para medir el voltaje del capacitor (ver figura 6).

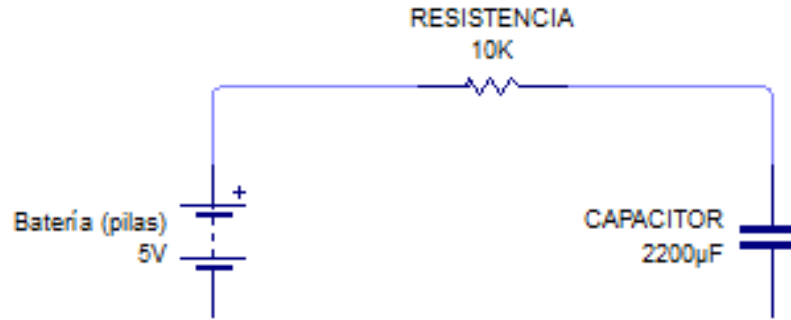


**Figura 6.** Medición del voltaje

Responde el cuestionamiento:

¿Cuál es el voltaje del capacitor? \_\_\_\_\_.

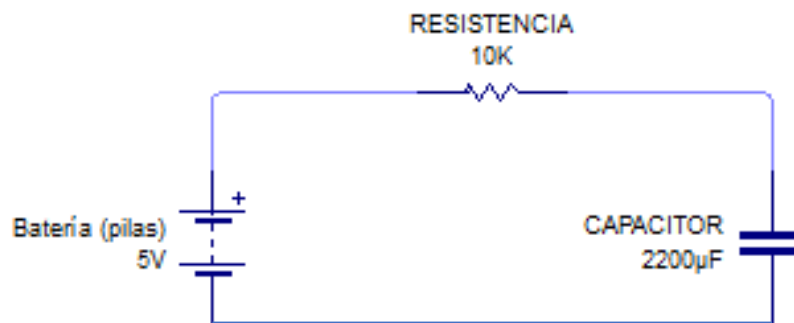
**C.** Realiza las conexiones (con cables) correspondientes con el siguiente diagrama (figura 7).



**Figura 7.** Configuración RC

Nota. Conecta las tres pilas en serie. No conectes la terminal negativa de las pilas con el capacitor.

**D.** Conecta el multímetro digital a las terminales del capacitor. Conecta la terminal negativa de las pilas a la terminal negativa del capacitor (figura 8) y simultáneamente graba un video (30 segundos de duración) observando el voltaje (en la pantalla del multímetro) del capacitor.



**Figura 8.** Conexión de la terminal negativa de las pilas a la terminal negativa del capacitor

Responde los cuestionamientos:

¿Qué cambia?

¿Respecto de qué cambia?

E. Con base en la grabación (video), completa la tabla 1.

**Tabla 1.** Datos de medición del voltaje

Tiempo, en segundos	Voltaje del capacitor, en volts
0	
5	
10	
15	
20	
25	
30	





# UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS

## Situación de aprendizaje 1. Predicción del voltaje de carga: análisis numérico del primer orden de variación

**A.** Retoma los valores de la tabla 1 y calcula las primeras diferencias (en la tabla 2) para cada dos valores de las variables (tiempo y voltaje).

**Tabla 2.** Cálculo de las primeras diferencias

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Primeras diferencias
Estado posterior - estado anterior =	0		Estado posterior - estado anterior =
	5		
	10		
	15		
	20		
	25		
	30		

**B.** Compara cada dos valores del tiempo y cada dos valores del voltaje. Realiza tu análisis con base en las tablas 3 y 4.

**Tabla 3.** Comparación de la variable tiempo

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable tiempo aumenta o disminuye
El estado posterior es		Que el estado anterior	

**Tabla 4.** Comparación del voltaje del capacitor

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
El estado posterior es		Que el estado anterior	

**C.** Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento de la variable tiempo:

Describe el comportamiento del voltaje:

¿El voltaje del capacitor está en proceso de carga o en proceso de descarga?

¿Por qué?

**D.** De acuerdo con el comportamiento, predice el voltaje del capacitor al transcurrir 35 segundos, de la siguiente manera:

1. Calcula el promedio de las primeras diferencias (variación)

2. Usa el modelo predictivo

$$\text{Estado futuro} = \text{Estado actual} + \text{variación}$$

¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?

3. Describe la relación del valor obtenido (predicción) con el comportamiento anterior:



# UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS

## Situación de aprendizaje 2. Predicción del voltaje de carga: análisis numérico del segundo orden de variación

**A.** Retoma la tabla 2 de la situación de aprendizaje 1 y calcula las segundas diferencias (en la tabla 5) para cada dos valores del voltaje.

**Tabla 5.** Cálculo de las segundas diferencias

Primeras diferencias	Tiempo	Voltaje del capacitor	Primeras diferencias	Segundas diferencias
	0		Estado posterior - estado anterior =	Estado posterior - estado anterior =
	5			
	10			
	15			
	20			
	25			
	30			

**B.** Compara cada dos valores del voltaje. Realiza tu análisis con base en la siguiente tabla

**Tabla 6.** Comparación del voltaje

Estado	Comparación (mayor - igual - menor)	Estado	La variable voltaje aumenta o disminuye
El estado posterior es		Que el estado anterior	

**C.** Analiza todas las comparaciones y describe el comportamiento del voltaje del capacitor:

**D.** De acuerdo con el comportamiento, predice el voltaje del capacitor al transcurrir 35 segundos, de la siguiente manera:

1. Calcula el promedio de las segundas diferencias (variación de la variación)
2. Usa el modelo predictivo

$$\text{Estado futuro} = \text{Estado actual} + \text{variación} + \text{variación de la variación}$$

¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?

3. Describe la relación del valor obtenido (predicción) con el comportamiento del voltaje del capacitor:



# UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS

## Situación de aprendizaje 3. Predicción del voltaje de carga: análisis gráfico

**A.** Retoma los valores de la tabla 5. Construye la gráfica de la segunda variación (segundas diferencias) respecto al tiempo



**B.** Analiza la gráfica y describe el comportamiento de la segunda variación del voltaje:

**C.** Construye la gráfica de la primera variación (primeras diferencias) respecto al tiempo



- D.** Analiza la gráfica y describe el comportamiento variación del voltaje:
- E.** Construye la gráfica del voltaje del capacitor respecto al tiempo



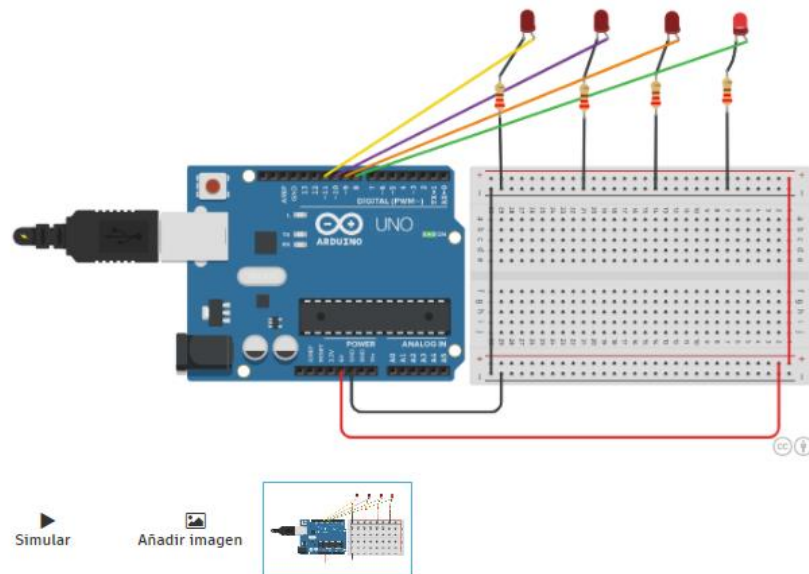
- F.** Relaciona el comportamiento de la gráfica del inciso A y del inciso C para predecir el voltaje del capacitor al transcurrir los 35 segundos.
- ¿Cuál es el voltaje al transcurrir los 35 segundos?
- Argumenta tu respuesta:



# UNIVERSIDAD DE LOS ALTOS DE CHIAPAS

## Situación de aprendizaje 4. Simulación de un panel de indicadores

A. Interactúa con la simulación en TINKERCAD (figura 9). En la interfaz de la simulación oprime el botón de simular y observa el funcionamiento del panel de indicadores (sistema de leds).



**Figura 9.** Interfaz de Tinkercad

Fuente: <https://www.tinkercad.com/things/5l79Cev0XeO>

Responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué cambia?

¿Respecto de qué cambia?

**B.** Modifica los valores del Delay con base en la tabla 7. Primero con 100 milisegundos, después con 400 milisegundos, seguido de 800 milisegundos y así sucesivamente.

**Tabla 7.** Valores de control

Delay
100 milisegundos
400 milisegundos
800 milisegundos
1300 milisegundos
1900 milisegundos

**C.** Analiza cada comportamiento y responde el siguiente cuestionamiento:

¿Qué observas en la simulación con relación al comportamiento del voltaje de carga del capacitor?