



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

Facultad de Ingeniería

Coordinación de Investigación y Posgrado

Campus I



**Resignificación del método grafico en los sistemas de
ecuaciones lineales**

T E S I S

que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

por

FRANCISCO HUGO OSORIO LUNA 12112006

Directora

DRA. ALMA ROSA PÉREZ TRUJILLO

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; Diciembre de 2021



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE INGENIERÍA C-I



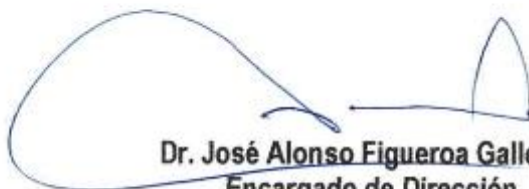
Tuxtla Gutiérrez; Chiapas.
A 10 de enero del 2021
Oficio. FI. 01/029/2021.

Ing. Francisco Hugo Osorio Luna
Estudiante de la Maestría en Ciencias
con Especialidad en Matemática Educativa
(PEOGAP)
Presente.

Por este medio comunico a usted, que se autoriza la impresión de su trabajo de tesis denominado:
"Resignificación del método gráfico en los sistemas de ecuaciones lineales", para que pueda continuar
con los trámites de titulación para la obtención del Grado de la Maestría en Ciencias con Especialidad
en Matemática Educativa.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.
"Por la conciencia de la necesidad de servir"



Dr. José Alonso Figueroa Gallegos
Encargado de Dirección



DIRECCIÓN DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA

C. c. p. Dra. Daisy Escobar Castillejos. Coordinadora de Investigación y Posgrado. - F.I.
Archivo Minutario.
DEC/acl*



Código: FO-113-09-05

Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) FRANCISCO HUGO OSORIO LUNA,
Autor (a) de la tesis bajo el título de "RESIGNIFICACIÓN DEL MÉTODO GRÁFICO
EN LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES"

presentada y aprobada en el año 20 21 como requisito para obtener el título o grado de MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, autorizo a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.
- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 12 días del mes de ENERO del año 20 22.


FRANCISCO HUGO OSORIO LUNA
Nombre y firma del Tesista o Tesistas

Dedicatoria

A mis padres por el amor incondicional, por provocar en mi el deseo de superación y el apoyo brindado para alcanzar mis sueños y aspiraciones. A mi esposa por su amor, comprensión, paciencia y apoyo incondicional a pesar de las dificultades; a mis hermanos que de alguna otra manera me apoyaron para alcanzar mis metas.

Agradezco y dedico este trabajo a mis padres: Francisco Hugo Osorio Calvo y Sandra Patricia Luna Villatoro; a mi esposa Iris Gabriela Hidalgo Trujillo a mis hermanos Alexis y Xóchitl; y principalmente dedico este trabajo mi hijo que viene en camino el cual es el principal motivo para seguir superándome día a día.

Agradecimientos

A dios por todas las bendiciones que me ha dado

A mi directora de tesis, Dra. Alma Rosa Pérez Trujillo por haberme brindado los conocimientos y soporte necesario para obtener el grado de Maestro en Ciencias

A los revisores de esta investigación, Dr. Hipólito Hernández Pérez y Mtro. Cristóbal Cruz Ruiz por las sugerencias que contribuyeron a la calidad del presente trabajo.

A mis profesores y compañeros de la maestría

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN	10
CAPITULO 1. GENERALIDADES	11
1.1 Problemática	12
1.2 Objetivos	15
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO	16
2.1 Estado del arte	17
2.1.1 Sistemas de ecuaciones lineales	17
2.1.2 Tecnología	21
2.1.3 Visualización	26
2.2 Análisis del plan y programa de estudios	28
2.3 Revisión de algunos libros de texto gratuitos	32
2.3.1 Definición de sistemas de ecuaciones y solución	32
2.4 El discurso matemático escolar vigente	38
2.5 La investigación	39
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA.....	41
3.1 Teoría de Situaciones	42
3.2 Competencias	43
3.2.1 Competencias desde la SEP	44
3.2.2 Competencia matemática	45
3.2.3 Competencia matemática en el planteamiento y resolución de problemas .	46
3.3 Ingeniería didáctica	47
3.3.1 Análisis Preliminar	48
3.3.2 Concepción y análisis α -priori	68
3.3.3 Puesta en escena	69
3.3.4 Análisis α -posteriori y validación	69

CAPÍTULO 4. RESULTADO Y DISCUSIÓN.....	71
4.1 Fase de planeación.....	72
4.2 Fase de diseño.....	72
4.3 Fase de experimentación.....	83
4.3.1 La puesta en escena.....	83
4.3.2 Los estudiantes.....	83
3.3.3 La dinámica	83
4.4 Fase de validación	84
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES.....	104
5.1 Conclusiones Generales.....	105
Bibliografía.....	107
APÉNDICE.....	111

Índice de figuras

Figura 1. Respuesta Intuitiva Fuente: (Ochoviet, 2009), p.55.....	19
Figura 2 Plan de estudios segundo grado de secundaria Fuente (Secretaría de Educación Pública., 2011), p. 42).....	29
Figura 3 Plan de estudios tercer grado de secundaria (Secretaría de Educación Pública., 2011) p. 48	30
Figura 4 Temas del bloque cinco, segundo año de secundaria (Trigueros, 2012)	34
Figura 5 Temas del bloque cinco, tercer año de secundaria (Escareño, 2013)	36
Figura 6 Sistema de Ecuación Lineal 3x3. Una solución	37
Figura 7 Sistema de Ecuación Lineal 3x3. Sin Solución.....	37
Figura 8 Sistema de Ecuación Lineal 3x3. Infinitas Soluciones	38
Figura 9 Esquema Didáctico tomado en (Cruz, 2008).....	49
Figura 10 Etapas de desarrollo (Santillana Horizontes, 2012).....	57
Figura 11 Temas del bloque 5 (Santillana Horizontes, 2012) pag.10	59
Figura 12 Inicio y Planeación (Santillana Horizontes, 2012) pag.218.....	60
Figura 13 Método de sustitución y de Igualación (Santillana Horizontes, 2012)	61
Figura 14 Método de suma y resta (Santillana Horizontes, 2012)	62
Figura 15 Sistemas de Ecuaciones Lineales.....	62
Figura 16 Sistema de Ecuación Lineal con diferente tipo de solución	63
Figura 17 Etapa de inicio Grafica y Sistema de Ecuaciones Lineales	64
Figura 18 Etapa de planeación Grafica y sistemas de ecuaciones lineales.....	65

Figura 19 Sistema de Ecuaciones Lineales, Método Grafico	65
Figura 20 Sistema de ecuación solución infinita.....	66
Figura 21 Sistemas de ecuaciones con sus diferentes soluciones	67
Figura 22 Astrid resolviendo actividades de la secuencia	119
Figura 23 Iris resolviendo actividades de la secuencia.....	119

Índice de tablas

Tabla 1. Software para la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas.	22
Tabla 2 Posibles soluciones de las ecuaciones lineales	35
Tabla 3. Relación entre n y $8n$	50
Tabla 4 tabla de cuadrados.....	53
Tabla 5 Etapas del Desarrollo Cognoscitivo: Las teorías de Piaget y Vygotsky	55

INTRODUCCIÓN

En nuestra propuesta se plantea el uso reflexivo de la visualización con apoyo de la tecnología privilegiando la modificación de parámetros. El propósito es que los estudiantes encuentren un significado nuevo al contenido de los sistemas de ecuaciones lineales aprovechando la solución del método gráfico de los sistemas de ecuaciones lineales, para ello se diseñó una situación didáctica considerando la graficación, la visualización y la tecnología con el fin de resignificar el método grafico en los sistemas de ecuaciones lineales. El método grafico como solución de los sistemas de ecuaciones lineales deja de ser importante desde el tercer grado de secundaria, suponemos que la dificultad de graficar y ser poco precisas obliga al docente a dejar a un lado este método de solución y les da un privilegio a los demás métodos de solución. Pero consideramos que con la manipulación de graficas a través de la modificación de los parámetros de las ecuaciones que forman parte de un sistema de ecuación lineal con apoyo de la tecnología y visualización el alumno construya significados sobre los sistemas de ecuaciones lineales. En esta investigación se busca que el alumno pueda crear significados de los sistemas de ecuaciones lineales a través de la visualización, por lo que se utilizó la teoría de situaciones didácticas y como metodología de investigación a la ingeniería didáctica, pues en sus diferentes etapas se logró la realización de una secuencia didáctica donde el alumno se encuentra en una situación adidáctica que propicia al análisis y reflexión, logrando así la resignificación de los sistemas de ecuaciones lineales en base a la variación de parámetros los cuales permitieron conceptualizar de manera adecuada a los sistemas de ecuaciones lineales, con el uso de la tecnología aprovechamos y privilegiamos las repeticiones de la modificación de parámetros la cual nos grafica de manera simultánea y se usa las veces que sea necesaria para llegar al objetivo

Palabras Clave: Graficación, Parámetros, Tecnología, Variación, Visualización

CAPITULO 1. GENERALIDADES

1.1 Problemática

El tema de sistemas de ecuaciones lineales aparece como tema de estudio a lo largo de la formación académica, su tratamiento va desde el nivel básico (secundaria) hasta el nivel superior, este tema se introduce desde el primer año de secundaria, en el eje patrones y ecuaciones, en el tema resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado, y de manera específica, en el segundo y tercer año de secundaria (alumnos de 13 a 15 años) como parte del eje sentido numérico y pensamiento algebraico, en el eje temático Patrones y Ecuaciones situado en el bloque V: donde el alumno: resuelve y plantea problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones lineales (Secretaría de Educación Pública, 2011).

En el programa de estudios de segundo grado de secundaria, el método gráfico aparece de forma separada de los otros métodos utilizados para la solución de sistemas de ecuaciones de 2×2 . En el tercer grado se retoma el tema de sistemas de ecuaciones, pero ya no se mencionan los métodos para resolverlos, quedando abierta la posibilidad de utilizar cualquiera de los vistos en segundo año, sin embargo, lo que hemos observado es que casi ningún maestro recurre al uso del método gráfico para solucionar los sistemas de ecuaciones.

En el bachillerato general el tema de sistemas de ecuaciones lineales aparece en el eje temático resuelve ecuaciones lineales I, II y III en el bloque VI, VII y VIII respectivamente (Secretaría de Educación Pública, 2013) con las siguientes competencias:

- ❖ Reconoce el modelo algebraico de una ecuación y un sistema de ecuaciones con dos y tres incógnitas.
- ❖ Resuelve e interpreta una ecuación y sistemas de ecuaciones dos y tres incógnitas mediante métodos:
 - Numérico: Determinantes
 - Algebraicos: Eliminación por igualación, reducción (suma y resta) y sustitución.
 - Gráficos
- ❖ Expresa y soluciona situaciones utilizando sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas.
- ❖ Identifica gráficamente si un sistema de ecuaciones simultaneas tiene una, ninguna o infinitas soluciones
- ❖ Resuelve problemas que se plantean en lenguaje algebraico utilizando métodos algebraicos, numéricos y gráficos.

- ❖ Elabora o interpreta gráficas, tablas y mapas, para resolver situaciones diversas que conlleven el uso de sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas.

Llegando al nivel superior la enseñanza de Ecuaciones Lineales se sigue viendo en la mayoría de las diferentes carreras de ingenieras, aplicando los métodos de Gauss y Gauss Jordán como solución, con objetivo que el alumno comprenderá los elementos básicos de las ecuaciones lineales, y aplicará dichos elementos a la solución de los sistemas de ecuaciones lineales, esto se ve en la materia de algebra en los programas de ingeniería (Secretaría de Educación Pública., 2008).

De acuerdo a Segura (2004) las dificultades en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones tienen orígenes diversos. Unos están ligados a la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición del objeto sistemas de ecuaciones lineales y su solución, y otro más en la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico. El autor menciona 3 tipos de registro: 1) Registro Verbal, 2) Registro Algebraico y 3) el Registro Grafico; como representación del objeto matemático.

En general de acuerdo a Ramírez (1997) los alumnos no efectúan la representación y resolución grafica de un sistema de ecuaciones lineales, dándole un estatus infra matemático a este registro de representación.

En los resultados de la investigación realizada por Ochoviet (2009) se observa que los alumnos no tienen ninguna complicación al resolver sistema de ecuaciones lineales, pero tiene dificultades con el método grafico no sólo en la solución sino que también en el concepto y la comprensión del sistema.

En ambos casos se hace patente la falta del pensamiento Sintético–Geométrico de Ochoviet (2009) y el registro Gráfico propuesto por Segura (2004). De acuerdo a los autores los alumnos aprenden a resolver problemas de manera sistemática y si ningún sentido por falta de representaciones del registro gráfico. Esto sucede desde el segundo grado de secundaria donde en el tema de soluciones de ecuaciones lineales se ven estos 3 registros (verbal, algebraico y gráfico) pero conforme se avanza de nivel se va reduciendo hasta el nivel superior donde se recurre casi siempre a la solución por métodos algebraicos.

Además de lo ya expuesto, hay que considerar que desde la reforma educativa para el nivel básico se platea el uso de la tecnología en el salón de clases. De acuerdo a los programas de estudio establecidos en la Guía para el maestro del nivel básico secundaria de la Secretaría de Educación Pública (2011, p. 65)

La noción de sociedad de la información se basa en los progresos tecnológicos; en cambio, la sociedad del conocimiento comprende una dimensión social, ética y política mucho más compleja. La sociedad del conocimiento pone énfasis en la diversidad cultural y lingüística; en las diferentes formas de conocimiento y cultura que intervienen en la

construcción de las sociedades, la cual se ve influida, por supuesto, por el progreso científico y técnico moderno.

En la Educación Básica se propone el desarrollo de habilidades digitales en los alumnos, sin importar su edad, situación social y geográfica, a partir de la oportunidad de acceder, a través de dispositivos tecnológicos de vanguardia, de nuevos tipos de materiales educativos, nuevas formas y espacios para la comunicación, creación y colaboración, que propician las herramientas de lo que se denomina la Web 2.0.” (SEP, 2011)

Además, se plantea el desarrollo de habilidad esa partir del desarrollo de nuevas prácticas de enseñanza y la creación de ambientes de aprendizajes dinámicos y conectados que permiten (SEP, 2011, p. 66):

- ❖ Manifestar sus ideas y conceptos; discutirlos y enriquecerlos a través de las redes sociales;
- ❖ Acceder a programas que simulan fenómenos, permiten la modificación de variables y el establecimiento de relaciones entre ellas;
- ❖ Registrar y manejar grandes cantidades de datos;
- ❖ Diversificar las fuentes de información;
- ❖ Crear sus propios contenidos digitales utilizando múltiples formatos (texto, audio y video);
- ❖ Atender la diversidad de ritmos y estilos de aprendizaje de los alumnos

Este enfoque, implica que el sistema educativo debe considerar el desarrollo de habilidades digitales, tanto en alumnos como en docentes, que sean susceptibles de construirse a lo largo de su formación académica y de su quehacer cotidiano respectivamente. De ahí que en nuestra propuesta se plantee el uso reflexivo de la tecnología, para que los estudiantes resignifiquen el método gráfico para la solución de un sistema de ecuaciones.

Por todo lo antes planteado, nos preguntamos ¿si la graficación y visualización pueden ser utilizados como una herramienta que permita la resignificación del método gráfico en los sistemas de ecuaciones lineales, apoyados en el uso de la tecnología?

Además, para dar respuesta a la pregunta anterior, pretendemos responder a las siguientes interrogantes:

¿La visualización es una herramienta que nos permitiría construir argumentos sobre un sistema de ecuaciones y su posible solución? y ¿El uso de la tecnología

favorece el aprendizaje significativo del concepto de sistema de ecuaciones lineales a partir de la variación de los parámetros de las ecuaciones del mismo?

Para ello, diseñaremos una situación didáctica en donde se considere a la graficación, la visualización y a la tecnología para resignificar el método gráfico en el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales.

1.2 Objetivos

Suponemos que el método gráfico deja de ser importante para la solución de un sistema de ecuaciones desde el tercer grado de secundaria, más aún en niveles superiores a éste, ya que las gráficas elaboradas de forma manual en ocasiones son difíciles de elaborar o poco precisas. Consideramos que con la manipulación de gráficas a través de la modificación de los parámetros de las ecuaciones que forman parte del sistema de ecuaciones, gracias al uso de la tecnología y a la visualización, el alumno puede construir significados sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Por lo anterior, para llevar a cabo la investigación nos proponemos los siguientes objetivos:

Objetivo General:

Resignificar el método gráfico como herramienta de utilidad para la interpretación y análisis de los sistemas de ecuaciones lineales.

Objetivos Específicos:

- 1) Diseñar una secuencia didáctica con el apoyo de la tecnología y software como el *GeoGebra* para construir significados sobre los sistemas de ecuaciones a partir del trabajo con la misma.
- 2) Generar un sistema de ecuaciones lineales a través de la manipulación de parámetros de las ecuaciones dadas ayudados con la tecnología.
- 3) Encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales, con el uso de la visualización y graficación.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 Estado del arte

En este apartado se abordarán los estudios realizados de varios autores que nos ayudará a ressignificar el concepto del método gráfico en la solución de ecuaciones lineales, para ello hemos dispuesto algunas categorías que nos ayudan a organizar la información y a resaltar aquellos aspectos que nos parecen más importantes.

Analizaremos 3 categorías fundamentales para lograr el objetivo de nuestra investigación: sistemas de ecuaciones lineales, el uso de tecnologías y la visualización.

2.1.1 Sistemas de ecuaciones lineales

a) Ochoviet 2009

El primer material que analizaremos y que es base de nuestra investigación es el trabajo realizado por la Dra. Teresa Ochoviet en su tesis doctoral “sobre un concepto de solución de un sistema de ecuación con dos incógnitas”. En su investigación realizada en Uruguay y se centra en el tema de sistema de ecuaciones lineales, que al igual que en México se da en los diferentes niveles educativos (nivel básico secundaria, nivel medio superior y nivel superior) el principal interés de la autora es, estudiar el concepto de solución de un sistemas de ecuaciones lineales que construyen los estudiantes uruguayos. Por lo que la pregunta de investigación fue la siguiente:

¿El concepto solución de un sistema que se construye, favorece al alumno la comprensión de solución de un sistema de ecuaciones lineales con mayor número de ecuaciones e incógnitas o por el contrario obstaculiza visiones más generales o abstractas? (Ochoviet, 2009).

De acuerdo a la pregunta de investigación los objetivos fueron los siguientes:

- ❖ Explorar el concepto de sistema y de solución de un sistema de ecuaciones lineales que construyen los estudiantes de enseñanza secundaria de 14–15 años y los de 17–18 años.
- ❖ Diseñar una secuencia de enseñanza y actividades para el aprendizaje del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales para estudiantes de 14-15 años y ponerlas en práctica.

Sierpinska (2000, citada en Ochoviet, 2009) menciona tres tipos de pensamiento:

- 1) En el modo sintético-geométrico (SG) los objetos son presentados al estudiante mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos. Las interpretaciones se dan mediante las operaciones que están definidas entre conjuntos, en este caso de puntos, esto es la unión, la intersección, etc. La

visualización matemática juega un rol fundamental en lo que es la resolución de problemas en este modo de pensamiento.

- 2) En el modo analítico-aritmético (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como n -uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas. En este modo el pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas o simbólicas.
- 3) En el modo analítico-estructural (AE) recurrimos más bien a las propiedades de los objetos o a su caracterización a través de axiomas. Las matrices, funciones, sucesiones, entre otras, pueden ser vistas como elementos genéricos de un espacio vectorial.

Históricamente el modo de pensamiento sintético-geométrico apareció primero que el pensamiento analítico-aritmético, sin embargo esto no quiere decir que uno elimine al otro ni cuál es el más relevante estos modos de pensamiento son igualmente útiles en la solución de sistemas de ecuaciones lineales y la idea es que el alumno transite de uno a otro sin ninguna dificultad (Sierpinski, 2000 citada en Ochoviet, 2009).

La problemática de Ochoviet (2009) se centra en torno al aprendizaje del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en estudiantes uruguayos del nivel medio y medio superior, para luego proponer una secuencia de enseñanza del concepto para estudiantes del nivel medio. La importancia radica en que el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales es considerada como la entrada a la enseñanza de álgebra lineal temas indispensables para las demás ramas de las matemáticas como: el cálculo diferencial, cálculo integral, ecuaciones diferenciales, geometría analítica, etc.

Conocer la definición del concepto no garantiza entenderlo, siempre se requiere de una interrelación entre la definición y la imagen del concepto. Esto es lo que menciona Sierpinski (2000) que los alumnos no aprenden por la ruptura que hay entre el pensamiento aritmético y el pensamiento geométrico.

Vinner (1991, citado en Ochoviet, 2009) describe el proceso seguido por los estudiantes para dar una respuesta (ver). Los alumnos consultan la imagen del

concepto, pero si el concepto no está enriquecido o anclado a la definición del objeto

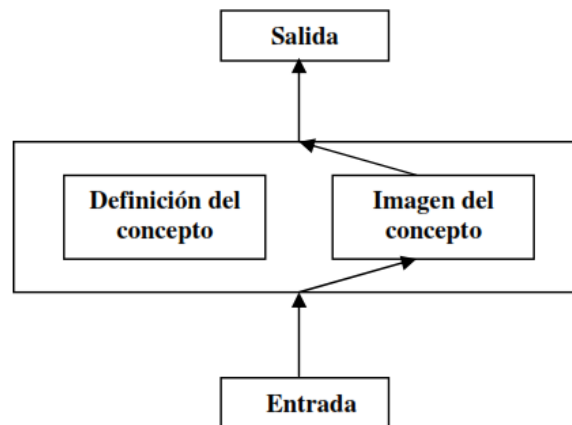


Figura 1. Respuesta Intuitiva Fuente: (Ochoviet, 2009), p.55

puede conllevar a una respuesta errónea.

Como podemos observar existe una ruptura entre la definición del concepto y la imagen del concepto Ochoviet (2009) En la secuencia didáctica propuesta en su tesis “Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas” los alumnos tienen claramente la definición del concepto de lo que es un sistema de ecuaciones lineales pero dan una respuesta errónea cuando se les presenta problemas visuales.

Con base a Vinner sobre la respuesta intuitiva Ochoviet propone una secuencia didáctica, la cual tiene como objetivo observar la reacción de los estudiantes complementándolo con entrevistas hechas a los alumnos, y generar un conflicto entre la definición y solución que los alumnos saben (sistemas de ecuaciones 2x2) con la representación gráfica y un sistema de ecuaciones con mas ecuaciones e incógnitas, con esto logra que a través del conflicto en que el alumno se enfrenta, resignifique la respuesta de lo que es un sistema de ecuaciones lineales imagen de lo que es un sistema de ecuaciones lineales anclados con la definición del mismo.

Como se observa en la tesis de Ochoviet (2009) la imagen que los alumnos poseen de los objetos matemáticos son las respuestas inmediatas, por esa razón es de importancia que el método gráfico en la resolución de problemas de los sistemas de ecuaciones lineales no desaparezca en estudios posteriores a la educación básica de secundaria como aparecen en los programas de estudio en los diferentes niveles educativos: nivel básico secundaria nivel medio superior y nivel superior.

b) Cutz 2005

Otro autor relevante para esta investigación fue la de Cutz (2005) en su tesis de maestría “Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los

sistemas de ecuaciones y su solución” al igual que (Ochoviet, 2009) su trabajo consistió en observar los fenómenos relacionados con la representación gráfica de la solución de los sistemas de ecuaciones lineales en alumnos de licenciatura, se observa la ruptura entre los tipos de pensamientos mencionados por Sierpinska el pensamiento sintético-geométrico (SG) y el analítico-aritmético(AA).

El objetivo de Cutz (2005) fue el de observar las estrategias y dificultades de los estudiantes al inducirlos a pensar en el modo sintético, y al pasar del modo de pensamiento Sintético-Geométrico al Analítico-Aritmético en los sistemas de ecuaciones lineales, así como observar su avance o persistencia en las concepciones al concluir un curso de álgebra línea.

En el trabajo se muestra las dificultades que los alumnos tienen al pasar de un pensamiento sintético-geométrico y el analítico-aritmético y viceversa. El problema está en la interpretación geométrica en los sistemas de ecuaciones de 2×3 y 3×3 y sus tres casos posibles en que un sistema puede darse: cuando tiene una solución, cuando tiene infinitas soluciones y cuando su solución es un conjunto vacío.

Los estudiantes no tienen claro el concepto de sistemas y su solución, esto lo concluye Cutz en sus tesis de maestría (Cutz, 2005, pág. 232):

La mayoría de los estudiantes entrevistados presentan una gran dificultad para lograr un tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales (rectas y planos) y más específicamente el concepto solución, en el momento de efectuar un pasaje del modo Sintético-Geométrico al Analítico-Aritmético o Analítico-Estructural, lo cual se debe de poca o nula familiaridad que tienen al tratar a los sistemas en este orden de representación, es decir, de un modo geométrico a uno analítico.

Tanto como Ochoviet y Cutz trabajan mucho las representaciones mencionadas por Sierpinska demostrando que las deficiencias en los 2 tipos de pensamientos, esto se pudiera deber a que los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales se ven de forma aislada.

c) Mora 2001

En Mora en el 2001 presenta una tesis que gira alrededor del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales como se presentan en clases es decir con sistemas de dos incógnitas “Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas”. El sustento de esta tesis como la de Ochoviet (2009) y Cutz (2005) son los modos de pensamiento de Sierpinska en el álgebra lineal.

Mora presupone que la enseñanza tradicional de los sistemas de ecuaciones lineales solo fortalece el pensamiento a analítico-aritmético, por lo cual la secuencia

diseñada por Mora tiene como objetivo de conocer las habilidades y estrategias de los estudiantes dentro de este modo de pensamiento.

La hipótesis central de mora se basa en lograr que el estudiante identifique el objeto matemático en por lo menos dos de los tres modos de razonamiento (sintético-geométrico (SG) y el analítico-aritmético (AA) analítico-estructural (AE)), y transitar conscientemente entre ellos para lograr una mejor comprensión del concepto.

Mora concluye que efectivamente la enseñanza tradicional de los sistemas de ecuaciones lineales se beneficia al modo aritmético-geométrico: sin embargo, el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales el modo del pensamiento ya mencionado es agotado en relación a las representaciones geométricas de los sistemas de ecuaciones lineales con más de tres incógnitas. Es importante buscar o diseñar alternativas didácticas que fomenten cada una de los modos de pensamiento.

La revisión de estas investigaciones refuerza la intensión de nuestra investigación, la cual retoma como eje central el uso de la graficación.

2.1.2 Tecnología

El uso reflexivo y creativo de la tecnología permite dar un significado concreto a las nociones matemáticas. Por esta razón es necesario el diseño de nuevos materiales utilizando esta nueva metodología, donde muestren su uso efectivo en el aula.

La tecnología ha cambiado en gran medida nuestra forma de vida. Tanto así que la secretaria de educación pública promueve el uso de tecnologías para la enseñanza. Pero comúnmente los docentes no están de acuerdo con esto puesto que ellos aprendieron de otra manera, según Gómez (2007) los docentes se sienten inhibidos o con temor que sus alumnos lo superen en el uso de las tecnologías. Ya que los alumnos de secundaria en esta época nacieron “con un mouse de computadora en la mano” Gómez (2007, p.11).

Es importante tener presente que la tecnología por sí sola no resuelve los problemas de aprendizaje. Hay que ser cauteloso al usar herramientas tecnológicas en el aula. Es necesario seleccionar y vincular.

El uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha sido objeto de varias investigaciones Márquez (1999,2004), Moreno (2002), Torres (2004), Suarez (2006), Pérez (2008), Gómez (2007), Rojano (2005).

a) Rojano 2005

En la tesis de Rojano (2005) “Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en

escuelas secundarias publicas de México” encontramos que en la actualidad existen varios software o herramientas tecnológicas diseñadas para el aprendizaje de las matemáticas que describe brevemente los siguientes:

Tabla 1. Software para la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas.

Software	Descripción
Cabri-Géomètre	El software se rige por las reglas de la geometría euclidiana y permite a los alumnos explorar y elaborar conjeturas. La manipulación directa de representaciones formales de los objetos matemáticos ayuda a cerrar la brecha entre percepción y geometría, debido a que el software cuenta con elementos que brindan la posibilidad de animar las construcciones y percibir transformaciones de trazos y figuras geométricas. Esto permite un acercamiento práctico a la enseñanza de la geometría.
Hoja electrónica de cálculo	Con esta herramienta se busca abordar dificultades bien conocidas en el aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria, específicamente en la introducción de los alumnos a nociones fundamentales como la de función, variable, parámetro, fórmula, expresiones equivalentes y simbolización de patrones numéricos o geométricos. También se utiliza para enseñar a modelar y resolver problemas aritmético-algebraicos, así como problemas planteados en el contexto de diferentes materias científicas.
Calculadora Gráfica TI-92	Es una herramienta de tecnología avanzada que contiene la mayoría de los paquetes de cómputo seleccionados para el modelo EMAT. Incluye las facilidades de cálculo de una calculadora científica, con una capacidad gráfica. Incorpora recursos que la convierten en un medio para abordar distintos aspectos del currículo de matemáticas de la educación básica, tales como la manipulación numérica y algebraica; la graficación de funciones; procesador geométrico Cabri-Géomètre; edición y manipulación de matrices y en particular, de tablas similares a una Hoja de Cálculo.
SimCalcMathWorlds	Con apoyo de una simulación, se ofrece al estudiante la oportunidad de aprender matemáticas con un enfoque gráfico, lo cual permite al alumno familiarizarse con la lectura e interpretación de gráficas, relacionadas a fenómenos de movimiento. Con esta herramienta es

	posible una introducción temprana a temas de la matemática de la variación y el cambio, de ahí que se considere que este software da la oportunidad de explorar ideas matemáticas avanzadas que contribuyen al desarrollo del pensamiento complejo. Puede notarse que los temas que se abordan con este software rebasan los límites del currículo vigente en la educación secundaria.
Stella	Es un paquete de cómputo que permite expresar y probar ideas acerca del funcionamiento de sistemas dinámicos reales a través de la construcción de modelos matemáticos. Este enfoque de modelación implica trabajar con ideas complejas de la matemática, las cuales pudieran resultar fuera del alcance de los alumnos de secundaria. Sin embargo, Stella proporciona un paso intermedio en la representación, la cual se hace por medio de un diagrama y no con un tratamiento simbólico a partir de ecuaciones matemáticas, lo que favorece su uso didáctico. La modelación no es un tema que aparezca explícitamente en el currículo vigente, pero las actividades con Stella permiten a los alumnos acercarse a ideas poderosas en matemáticas, a través de un ambiente de modelación.
GEOGEBRA	Es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades en el cual pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas, etc., mediante el empleo directo de herramientas operadas con el ratón o la anotación de comandos en la Barra de Entrada, con el teclado o seleccionándolos del listado disponible -. Todo lo trazado es modificable en forma dinámica: es decir que si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B pasa a ajustarse y actualizarse para mantener las relaciones correspondientes con A.

Fuente: elaboración propia con base en Rojano, 2005.

El propósito de Rojano (2005) fue poner a prueba modelos del uso de las Tic's en los que, a la vez que se incidiera en el mejoramiento del aprendizaje de temas curriculares clásicos, se tuviese una influencia en la transformación de las practicas en el aula, y se incursionara en la enseñanza de nuevos contenidos que permitieran al alumno accesos a ideas importantes en matemáticas.

b) Gómez 2007

Gómez expresa que su interés primordial es el concepto matemático que los alumnos pueden reflexionar a través del uso de las tecnologías en su tesis de maestría “La evaluación en actividades de aprendizaje con uso de la tecnología”. Menciona que:

El tránsito de un escenario a otro no es en sí un objeto matemático, sino el resultado de la interacción del estudiante con el medio, aquí la tecnología ayuda a agilizar este proceso, permitiendo hacer una exploración amplia en un tiempo en que apenas se podría ver un tránsito (Gómez, 2007, p. 47).

De ahí se derivó la pregunta de investigación: ¿Cómo debe de evaluarse el aprendizaje obtenido en un escenario tecnológico de modelación? Apoyándose de la siguiente hipótesis: al cambiar la forma de enseñanza, la evaluación necesita cambiar y adecuarse a las nuevas formas de trabajo, evitando así perder las conexiones y volverse ajena al proceso. Así los tres propósitos de la evaluación planteados se atienden de la siguiente manera: Apoyar el aprendizaje, medir el alcance individual, evaluar los programas.

El alumno juega un papel fundamental al ser el protagonista del aprendizaje, en situaciones basadas en el aprendizaje, es él quien realiza las actividades propuestas, es él el responsable de su propio aprendizaje; es él quien trabaja directamente con la tecnología. Los conocimientos matemáticos en juego son reorganizados al entrar la tecnología como instrumento.

Gómez (2007) propone 4 observaciones para la respuesta a su pregunta de investigación ¿Cómo debe de evaluarse el aprendizaje obtenido en un escenario tecnológico de modelación?

- 1) La evaluación debe estar inmersa en las situaciones mismas de aprendizaje, desde la planeación y sin ser un momento aparte.
- 2) La evolución debe ser lo más variada posible, al considerar una gama amplia de herramientas puede evaluarse efectivamente, tanto conceptos, como habilidades y actitudes.
- 3) El evaluador debe leer entre líneas, buscando los conocimientos implicados, para lo que el uso efectivo de herramientas permite el orden y la objetividad.
- 4) El evaluado debe aprender a mostrar sus aprendizajes, para lo que las habilidades de comunicación, tanto escritas como verbales se vuelven primordiales.

Sin duda la tecnología está cambiando nuestra forma de vida, es de importancia darle un buen uso al introducirlas en el ambiente de la educación y sacarle el mejor provecho como lo han mencionado varios autores por mencionar algunos están

(Betancourt, 2009) que lo utiliza para reducción de tiempos en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones con números fraccionarios, Gómez (2007) que a través de la tecnología puede darse cuenta en que están fallando los alumnos.

c) Pérez 2008

En Pérez (2008) “Una Vinculación a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología” basado en investigaciones socioepistemológica que favorezcan el uso de las tecnologías en la enseñanza del cálculo y precálculo. Debido a la falta de vinculación entre los resultados y de las practicas docentes se genero el objetivo de la cual resaltamos la coherencia de 2 palabras que son base de nuestra investigación: tecnología y visualización aunque la palabra visualización no se encuentre explícitamente en el objetivo si esta implícitamente en el uso de la tecnología como se pueden observar en los diseños didactas propuesto. El objetivo fue:

Proponer una vinculación entre las investigaciones sociepistemologicas sobre cálculo y precalculo de los últimos tiempos y el quehacer cotidiano del profesor, favoreciendo el uso inteligente de la tecnología (Pérez 2008, p.iv).

De acuerdo al objetivo las preguntas de investigación fueron las siguientes: ¿Sera posible establecer un vinculo entre las investigaciones socioepistemológica y el quehacer cotidiano en el aula del profesor?, ¿Cómo favorecer el uso de la tecnología en el aula de matemáticas? Y ¿Cómo viven las prácticas sociales en los diseños propuestos? fue requerida únicamente la primera fase de la metodología de la Ingeniería didáctica, el análisis a priori pero que deja abierta la posibilidad de continuar las demás etapas de dicha metodología.

El primer diseño basado en la obra *L'Hopital* y *Agenesis* se construyo con la ayuda de un software diseñado para la enseñanza de las matemáticas como es el “*CabriGeometre*” y se utilizó para analizar la caracterización de una curva en la propiedad geométrica al observar, visualizar y analizar con la libre manipulación y verificación de los comportamientos de las figuras y el momento en la que la subtangente de *L'Hopital* y *Agenesis* pasa del ∞ al 0 cuando alcanza el máximo de una función.

El segundo diseño basado en las áreas bajos las curvas y con el apoyo de la calculadora Classpad 300 (calculadora graficadora) se favoreció al anclaje de la visualización y a manejos de datos, problemas que han sido mencionada por diferentes autores como son Ochoviet, Segura, Cutz y el problema de la ruptura entre el pensamiento algebraico y numérico.

El tercer diseño basado en el uso de la semejanza de triángulos y con la ayuda de la calculadora se pudo demostrar distintos tipos de triángulos semejantes.

Como podemos observar la tecnología estuvo presente en todos los diseños privilegiando el uso de la visualización como discusión y reflexión.

2.1.3 Visualización

a) Planchart 2002

Una de las definiciones de visualización más acercadas a lo que le desarrollamos en esta investigación fue la de Zimmermann y Cunningham (1991 citados en Planchart, 2002, p. 67) que define a la visualización matemática como: “el proceso de producir o usar representaciones geométricas y gráficas de conceptos o principios o problemas matemáticos, ya sean hechas a manos o generadas por computadoras”.

La visualización juega un papel muy importante en esta investigación ya que uno de nuestros objetivos específicos es que a través de la visualización y graficación el alumno encuentre resultados de un sistema de ecuaciones lineales y viceversa. El cual con la ayuda de la tecnología y variación de parámetros el alumno manipule y pueda visualizar el comportamiento de una ecuación lineal y posteriormente, encontrar un nuevo significado de los que es un sistema de ecuaciones lineales encontrando su solución o viceversa, de una solución el alumno pueda crear un sistema de ecuaciones lineales.

La visualización fue el primer instrumento de la matemática para hacer representaciones de manera pictórica pero conforme avanza el tiempo, estas representaciones fueron desapareciendo para dar paso a los postulados y teoremas matemáticos. Planchart (2002).

De acuerdo con Cantoral-Montiel (2003) se aborda de cómo los estudiantes tienen la concepción de lo que ven.

...se menciona que a partir de la perspectiva desarrollada por Piaget al explorar la concepción de espacio que los sujetos desarrollan, se describe a las actividades de visualización, como actividades representacionales del espacio cartesiano. La imagen mental del espacio cartesiano con la que los jóvenes actúan, se forma mediante una reconstrucción activa de los objetos a un nivel simbólico, donde las representaciones mentales no son solamente evocadas por la memoria.

Por lo general los alumnos poseen el concepto matemático pero esto no quiere decir que comprendan el objeto de estudio. En el trabajo de Ochoviet (2008) menciona la ruptura entre el pensamiento algebraico y el pensamiento gráfico. Donde Planchart (2002) esta ruptura lo maneja como “el olvido” del pensamiento algebraico.

En el trabajo de castro y castro (1997) citado en Planchart (2002) afirma que el incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos (p.99).

Planchart (2002) en su investigación menciona los motivos por el cual el pensamiento grafico se va haciendo a un lado:

Algunos estudios están de acuerdo en que los estudiantes muestran preferencia por lo simbólico, es decir, trabajar con las expresiones algebraicas. Según Vinner (1989) esta preferencia se debe a las razones siguientes: a) La creencia que la prueba algebraica es “más” matemática y que para un examen final es preferible ir a lo seguro, más claro, más simplificado e inmediato que la prueba visual; b) La preparación para un examen final es a menudo por enseñanza memorizada y c) Los estudiantes prefieren la memorización de fórmulas y técnicas algebraicas, lo cual es una receta efectiva para tener éxito en los exámenes (p. 92).

Sin embargo Ben-Chaim, Lappan&Houang (1989) citado en Planchart (2002) menciona la importancia de las representaciones, los autores señalaron que: “La naturaleza visual de las representaciones permite a la mayoría de estudiantes entender una presentación informal de una prueba deductiva, mientras que un tratamiento algebraico podría estar lejos de su comprensión (p.55).”

La conclusión que llego Planchart (2002) al igual que Ochoviet (2008) fue que los alumnos tiene problemas en los ejercicios gráficos, por lo que Planchart recomendó: “incorporar la visualización como una herramienta didáctica que permita a los estudiantes acercarse a los objetos matemáticos y a la situación física particular y relacionarlas a imágenes mentales adecuadas de tal manera que los acerquen al concepto”.

Existen otros autores que han construido reflexiones sobre la visualización, enseguida listamos algunos:

Cantoral, et al. (2000) Generalmente se entiende por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico.

Para Aparicio (2003) el término visualización proviene de la palabra griega *yeorein* (teorema) que significa contempla. La imagen evoca la idea. Como la sombra a la realidad. También señala que en la actualidad el acto de visualización es considerado como un aspecto esencial a desarrollar en los estudiantes, utilizando comúnmente para

ellos el manejo de una gran diversidad de representaciones de los objetos matemáticos en la investigación.

Arcavi & Hadas (1998) La visualización generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar sobre información visual.

Encarnación & Enrique Castro (1997) El término visualización se emplea, por lo general, con referencia a figuras o representaciones pictóricas ya sean éstas externas o internas es decir, sobre soporte material (papel, pantalla, etc.) o en la mente. Y el pensamiento visual está fuertemente ligado a la capacidad para la formación de imágenes mentales también la capacidad para visualizar cualquier concepto matemático, o problema, requiere la habilidad para interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente, y expresarla sobre un soporte material.

La información visual que adquirimos es mayor que la información de conceptos o textos, consideramos la visualización fundamental para el mejoramiento del aprendizaje en los alumnos de secundaria.

2.2 Análisis del plan y programa de estudios

En este apartado se analizarán los planes de estudios de los diferentes niveles educativos desde la educación básica de secundaria hasta el nivel superior con el fin de encontrar en que momentos se da la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

En el plan de estudios de la SEP (2011) estructurados por 5 bloques temáticos y 3 ejes los cuales son: Sentido numérico y pensamiento, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información. Y favorecen a las siguientes competencias: Resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, y manejar técnicas eficientemente.

En el segundo año en el bloque número cinco contiene el subtema denominado “Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas” y en eje sentido numérico y pensamiento algebraico menciona la resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución) en otro punto se menciona la representación gráfica de un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros. Reconocimiento del punto de intersección de sus gráficas como la solución del sistema (ver fig. 2)

Bloque V

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
- Resuelve problemas que impliquen el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. - Construye figuras simétricas respecto de un eje e identifica las propiedades de la figura original que se conservan. - Resuelve problemas que impliquen determinar la medida de diversos elementos del círculo, como: ángulos inscritos y centrales, arcos de una circunferencia, sectores y coronas circulares. - Explica la relación que existe entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica.	PATRONES Y ECUACIONES - Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2×2 con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución). - Representación gráfica de un sistema de ecuaciones 2×2 con coeficientes enteros. Reconocimiento del punto de intersección de sus gráficas como la solución del sistema.	FIGURAS Y CUERPOS - Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos. MEDIDA - Cálculo de la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES - Lectura y construcción de gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos. - Análisis de los efectos al cambiar los parámetros de la función $y = mx + b$, en la gráfica correspondiente. NOCIONES DE PROBABILIDAD - Comparación de las gráficas de dos distribuciones (frecuencial y teórica) al realizar muchas veces un experimento aleatorio.

Figura 2 Plan de estudios segundo grado de secundaria Fuente (Secretaría de Educación Pública., 2011), p. 42)

En el tercer grado vuelve aparecer el tema de sistemas de ecuaciones lineales en el bloque número cinco con el subtema “resuelve y plantea problemas que involucren ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado” y en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico menciona “resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones, cuadráticas o sistemas de ecuaciones (ver fig. 3)

Tanto como en segundo y tercero los sistemas de ecuaciones lineales son manejados con 2 ecuaciones y con números enteros, destacamos que el método grafico solo se ve en segundo grado de secundaria y se ve aislado de los demás tipos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.

Para el caso de la educación media superior, se ha tomado el plan de estudios de la subsecretaría de educación media superior, dirección general del bachillerato para exhibir la continuidad de la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y como propone abordad el contenido

Bloque V

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado. • Resuelve problemas que impliquen calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones. • Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas. • Resuelve problemas que impliquen calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	PATRONES Y ECUACIONES • Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	MEDIDA • Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto. • Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides. • Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES • Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. NOCIONES DE PROBABILIDAD • Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Como competencias a desarrollar encontramos, competencias genéricas; que son aquellas que se desarrollaran de manera transversal en todas las asignaturas del mapa curricular y permite al estudiante comprender su mundo e influir en el, le brindan autonomía en el proceso de aprendizaje y favorecen el desarrollo de relaciones armónicas con quienes les rodean, competencias básicas refieren los mínimos necesarios de cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida. Asimismo, las competencias disciplinares extendidas implican los niveles de complejidad deseable para quienes opten por una determinada trayectoria académica, teniendo así una función propedéutica en la medida que prepararan a los estudiantes de la enseñanza media superior para su ingreso y permanencia de la educación superior (SEP, 2013).

Proveer al educando de una cultura general que le permitirá interactuar con su entorno de manera activa,

Figura 3 Plan de estudios tercer grado de secundaria (Secretaría de Educación Pública, 2011) p. 48

propositiva y crítica, prepararlo para su ingreso y permanencia en la educación superior, a partir de sus inquietudes y aspiraciones profesionales y finalmente promover su contacto con algún campo real que le permitirán, si ese es su interés y necesidad, incorporándose al ámbito laboral. Son los objetivos que tiene el plan de estudio de la Dirección General del Bachillerato hacia los alumnos (SEP, 2013).

El contenido de la materia de Matemáticas 1 está distribuido en diez bloques donde el tema de sistemas de ecuaciones lineales aparece en los siguientes bloques.

- ❖ Bloque VI. Resuelve ecuaciones lineales I.
- ❖ Bloque VII. Resuelve ecuaciones lineales II.
- ❖ Bloque VIII. Resuelve ecuaciones lineales III.

En los bloques VI, VII, VIII se estudia respectivamente los sistemas de ecuaciones de 1×1 , 2×2 y 3×3 .

En el bloque VI. Donde se estudia la ecuación de 1×1 los objetivos son la representación de relaciones entre magnitudes, uso de la calculadora y/o una computadora, modelos aritméticos o algebraicos.

En el bloque VII. Donde la enseñanza es un sistema de ecuación lineal de 2×2 los objetivos que se pretenden es la representación de relaciones entre, magnitudes, y modelos aritméticos o algebraicos.

En el bloque VIII. En la enseñanza de los sistemas de 3×3 el objetivo es igual que en las demás enseñanzas la representación de relaciones entre magnitudes y modelos aritméticos o algebraicos

En la educación superior, encontramos la materia de “álgebra lineal” en la mayoría de todas las ingenierías y en unas cuantas de licenciatura para este caso tomamos como ejemplo el programa de estudio de la materia de Álgebra lineal de la facultad de ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. Donde su objetivo del curso es que el alumno analice y aplique los conceptos de los sistemas numéricos para utilizarlo en la resolución de sistemas de ecuación lineal, polinomio, matrices, determinantes y estructuras algebraicas, para que de manera conjunta estos conceptos permitan al alumno iniciar el estudio de la física y la matemática aplicada. (Secretaría de Educación Pública., 2008).

El tema de sistemas de ecuaciones lineales aparece el tema cinco del programa de estudio donde el alumno fórmula, como modelo matemático de problemas, sistemas de ecuaciones lineales y los resuelve aplicando el método de gauss. Dentro del contenido se menciona la clasificación de los sistemas de ecuaciones en cuanto a su existencia y al número de soluciones (homogéneos, triviales y varias soluciones) y su resolución de sistemas por el método de gauss. (Secretaría de Educación Pública., 2008)

Matrices y determinantes aparecen en el tema número 6 que son métodos implícitos en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales como lo menciona el objetivo donde el alumno aplicara los conceptos fundamentales de las matrices, determinantes y sus propiedades a problemas que requieran de ellos para su resolución. En el contenido aparecer varios métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales como la operación con matrices y sus propiedades: adición, sustracción, multiplicación por un escalar y multiplicidad. Operaciones con una matriz inversa calculo por la transformación elemental. Ecuaciones matriciales y su resolución. Matrices triangulares, diagonales y sus propiedades. Transposición de una matriz y sus propiedades y finalmente cálculo de determinantes: regla de Sarrus, desarrollo por cofactores y método de condensación. Calculo de la inversa por medio de la adjunta y la regla de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones lineales de orden superior a tres (Secretaría de Educación Pública., 2008).

El nivel superior se enfoca más a los métodos numéricos de mayor número de ecuaciones y literales en un sistema de ecuaciones lineales. A pesar de que uno de los objetivos del programa de la dirección general de bachilleres es la representación, existen numerosos trabajos como la de Cutz, (2005), Mora (2001) y Ochoviet (2009) que reflejan las dificultades que tiene los alumnos en la interpretación de los sistemas de ecuaciones. Por lo que es de vital importancia la revisión de los libros de texto, y el contrato didáctico de la currícula de los sistemas de ecuaciones lineales en acción.

2.3 Revisión de algunos libros de texto gratuitos

En este apartado se presenta una breve revisión del contenido matemático escolar relacionado con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales enfocándonos más al método gráfico.

2.3.1 Definición de sistemas de ecuaciones y solución

En el libro Matemáticas 2 aprobado por la Secretaria de Educación Pública (SEP) para la enseñanza de segundo grado de secundaria, en el bloque 5, tema 32 “Sistema de ecuaciones” se considera a un sistema de ecuaciones como:

Grupo de dos ecuaciones o con dos o más incógnitas. Su solución es un conjunto de números que satisfacen a todas las ecuaciones (Trigueros, 2012, pág. 302).

En este libro Implícitamente establece que al no haber valores de las variables que satisfagan simultáneamente a todas y cada una de las ecuaciones del sistema, entonces no tiene solución. Otro caso es cuando existe más de una solución para el

sistema; entonces el sistema tiene múltiples soluciones, en realidad una infinidad de soluciones. En este sentido, al resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales cumplen alguno de los 3 casos siguientes:

1. Tiene una única solución
2. No tiene solución
3. Tiene un número infinito de soluciones

Explorando el libro la solución de ecuaciones lineales se explica de la forma: $ax + by = c$ utilizando coeficientes enteros, positivos o negativos. En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales se explica en sus diferentes tipos de resolución:

- ❖ Método de sustitución
- ❖ Método de igualación
- ❖ Método de suma y resta.

En el mismo bloque 5 pero en el tema 34 “Gráficas y sistemas de ecuaciones lineales” (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) salteándose un tema con respecto al tema 32 Sistemas de ecuaciones, aparece de manera muy breve las gráficas como modo de solución en los sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×2 . Recalcando que el método gráfico se ve aislado de los diferentes métodos de solución, no dándole la importancia del anclaje entre el pensamiento-analítico y el pensamiento-gráfico dicho por Sierpinska.

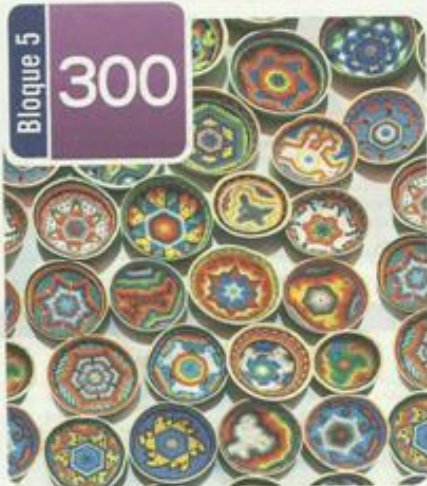
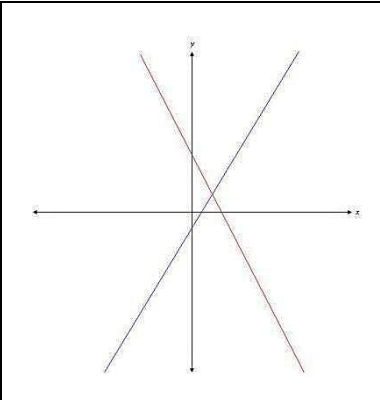
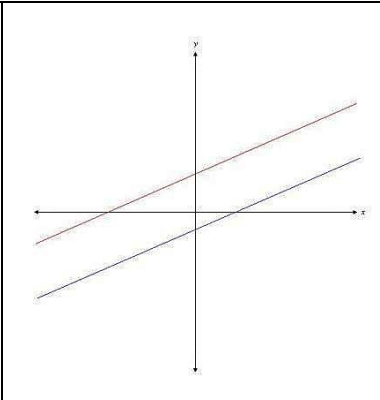
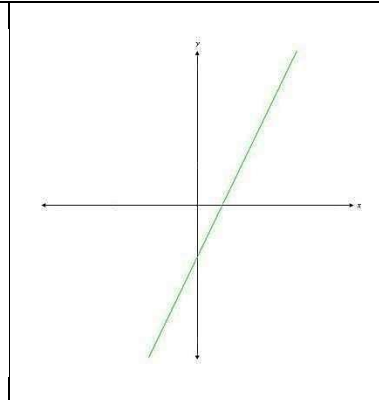
31. Gráficas formadas por segmentos de recta	282	34. Gráficas y sistemas de ecuaciones lineales	320
Taller de Matemáticas	292	35. Eventos mutuamente excluyentes y probabilidad	328
Infografía: Sin límites	296		
Ponte a prueba	298		
		Taller de Matemáticas	336
		Infografía: Espejito, espejito...	340
		Ponte a prueba	342
		Tu archivo de evidencias	344
		Índice analítico	346
		Fuentes de información	348
32. Sistemas de ecuaciones	302		
33. Mosaicos y transformaciones geométricas	310		

Figura 4 Temas del bloque cinco, segundo año de secundaria (Trigueros, 2012)

En las páginas 322 y 324 de este libro en el apartado de resolución de los problemas de los sistemas de ecuaciones lineales (2×2 y 3×2) por el método gráfico también visualiza las siguientes soluciones (ver tabla 2):

- ❖ Tiene una única solución tenemos dos rectas que se intersectan en un solo punto llamado punto de intersección
- ❖ Cuando no tiene solución tenemos dos rectas que no se intersectan
- ❖ Cuando tiene infinitas soluciones

Tabla 2 Posibles soluciones de las ecuaciones lineales

		
a) Una solución	b) Sin solución	c) Infinitas soluciones

En todos los métodos se menciona los 3 tipos de resolución, pero no existe ningún vínculo entre lo aritmético y gráfico ya que en este ultimo solo son lanzados las imágenes y lo que se espera es que el alumno identifique el punto de intersección y es abordado en temas aislado por lo tanto existe ruptura entre los pensamientos Analítico-Algebraico y Sintético-Geométrico.

También analizamos el libro que se utiliza en tercer año de secundaria aprobado por la SEP Matemáticas 3 de igual manera que en libro de Matemáticas 2 el tema aparece en el último bloque (ver Fig. 5.); el tema se ve demasiado rápido pues en tan solo 3 páginas se ve el tema.

Los métodos de resolución no se ven de manera explícita, si no que el libro invita al alumno a reflexionar en cada una de sus 5 actividades, mencionando que en cada problema, hay muchas y diversas formas de resolverlo, quizá pueda hallar su solución mediante un esquema sencillo, una tabla de valores, una grafica o una ecuación. También invita a analizar cada problema respondiendo una sencilla pregunta ¿Qué debe tomarse en cuenta para decidir cuál es el procedimiento más eficaz en un problema específico?

Bloque 5	26. Resolución de problemas con ecuaciones	211
	27. Sólidos con superficies curvas	217
	28. Fórmulas del volumen de cilindros y conos	227
	29. Cálculo del volumen de cilindros y conos	230
	30. Gráfica del tipo caja-brazos	236
	Evaluación	246
Apéndice, 247		
Bibliografía recomendada, 254		
Índice analítico, 255		

Figura 5 Temas del bloque cinco, tercer año de secundaria (Escareño, 2013)

El libro tiene muy poca información sobre lo que es un sistema de ecuación y su soluciones ya que ese tema es visto un año atrás, por lo que en tercer año de secundaria es mas practico que teórico.

Aun que nuestra secuencia fue aplicada para tercer grado de secundaria. Fue importante analizar los libros que se ven en bachiller y seguir la línea que tiene los sistemas de ecuaciones lineales hasta llegar al nivel superior.

Uno de los libros utilizados en preparatoria es el libro de Elementos del Algebra (Jhon Hewlett, 1984) en él se considera una ecuación de primer grado como:

Aquella donde las cantidades desconocidas no tiene potencias mayores que la primera y no hay productos de dos o más cantidades y estas ecuaciones tienen la forma: $ax + by = c$; donde a,b,c, son números conocidos, "x" y "y" las cantidades desconocidas (Jhon Hewlett,1984,p.206)

Un número finito de ecuaciones lineales en las variables forman un sistema de ecuaciones lineales. Usualmente, se dice que m ecuaciones lineales de n variables forman un sistema de ecuaciones lineales de orden "n". El propósito de estudiar a los sistemas de ecuaciones lineales es hallar su solución; es decir, resolver el sistema. La resolución de un sistema de ecuaciones lineal es el proceso por el cual encontramos el valor o los valores de las variables que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones del sistema.

Como en el libro de texto gratuito de segunda grado de secundaria se menciona los tres casos posibles de un sistema de ecuaciones lineales:

- ❖ Tiene una solución
- ❖ No tiene solución
- ❖ Tiene un número infinito de soluciones.

En el caso del método grafico, es un tema más complicado que requiere los conocimientos adquiridos en secundaria, pues el plan de estudio marca el aprendizaje de métodos gráficos para los sistemas de 3×3 , donde las representaciones geométricas del sistema la conforman tres planos en diferentes posiciones en el espacio tridimensional.

Tiene una solución los tres planos si se intersectan de tal forma que solo tengan un punto en común (ver fig.6).

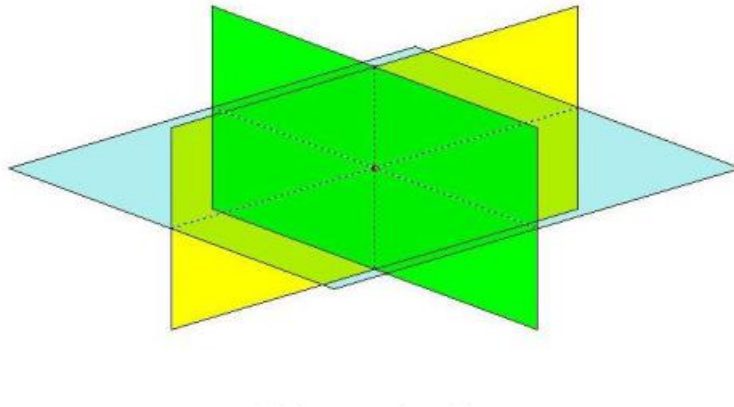


Figura 6 Sistema de Ecuación Lineal 3×3 . Una solución

No tiene solución, cuando los 3 planos no tiene una intersección común (ver Fig.7).

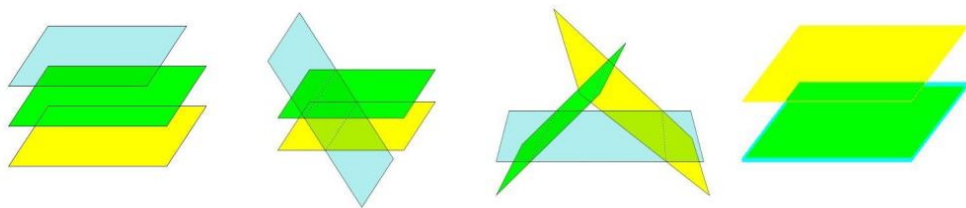


Figura 7 Sistema de Ecuación Lineal 3×3 . Sin Solución

Cuando tiene infinitas soluciones, tenemos tres planos que se intersectan en una recta o son un mismo plano (ver fig.8).

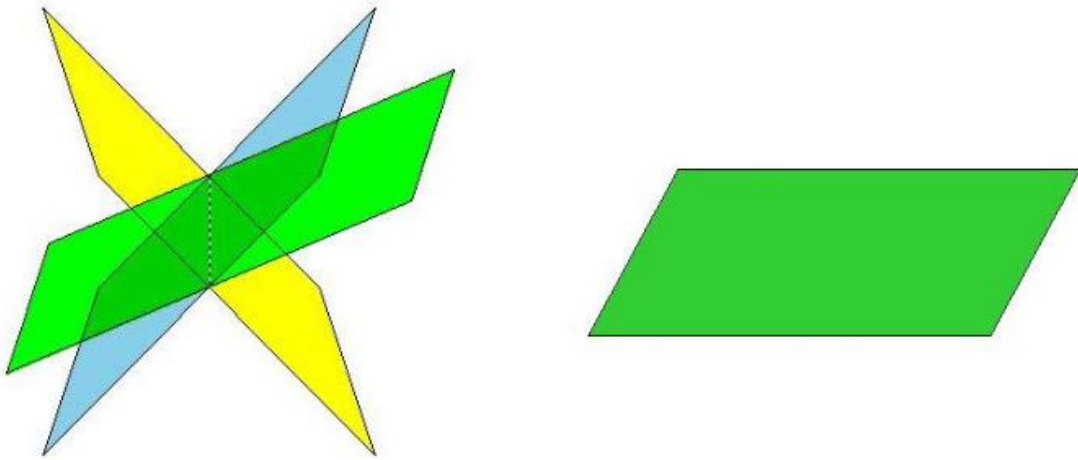


Figura 8 Sistema de Ecuación Lineal 3x3. Infinitas Soluciones

Estas son las diferentes representaciones graficas, como podemos observar son más complejas que las vistas en secundaria de 2×2 y 3×2 , es muy difícil que el alumno pueda hacer este tipo de representaciones con lápiz y papel. Es aquí donde nuestra secuencia toma importancia en el nivel de secundaria donde el alumno sepa comprender de manera gráfica que es un sistema de ecuaciones lineales y que mejor con el uso de la tecnología para que al llegar a nivel medio superior se tenga estas herramientas del método gráfico y el manejo de algún paquete computacional para la enseñanza de las matemáticas como es el Geogebra que es aplicada en la secuencia didáctica realizada.

2.4 El discurso matemático escolar vigente

Comúnmente el tema de Sistemas de Ecuaciones lineales por ser uno de los últimos temas del plan de estudio las lecciones se ven de manera muy rápida por tener el cierre de ciclo escolar donde los maestros están más preocupados en pasar calificación, llenado de boletas, prepara el fin de curso y muchas variantes más, el uso de la tecnología implica tiempo en auto capacitarse por lo que los maestros con mayor antigüedad rechazan esta idea, todo esto más sumando las pocas páginas que contienen los libros de texto gratuito hace que los estudiantes tengan poca oportunidad de aprendizaje de este tema y como ya se ha visto en la revisión de planes y programas es un tema importante pues lo seguirán utilizando en niveles superiores.

Cuando el tema es abordado, tradicionalmente se ha favorecido la enseñanza de sistemas de ecuaciones que presentan solución única y se abandonan aquellos sistemas cuya solución es infinita o aquellos que no tiene solución, y si se abordan, se hacen de manera limitada o superficial.

La enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales promueva la reflexión sobre el método de resolución que será utilizado y sobre todo que el alumno conozca a fondo lo que es un sistema con la ayuda de la visualización aportando los suficientes elementos que permitan comprender aquellas ideas y conceptos matemáticos que constituyen la base del método gráfico y así no sólo encuentre la solución si no que sea capaz de poder configurar un sistema de ecuaciones acoplado a una solución deseada demostrando su conocimiento y habilidades de la misma, evitando la ruptura de pensamientos entre el algebraico y el gráfico que siempre se hace presente en la enseñanza tradicional.

2.5 La investigación

Como hemos planteado, los sistemas de ecuaciones son un tópico revisado desde el nivel básico hasta el superior, existen además, diferentes métodos de solución de los mismos que le son enseñados a los estudiantes en los distintos niveles escolares ya señalados, sin embargo, el método gráfico se deja de lado para darle mayor importancia a los métodos algebraicos. De ahí que consideremos la resignificación del mismo a partir de herramientas tecnológicas y de la visualización.

Como seres humanos, es enorme la cantidad de información de tipo visual que continuamente estamos recibiendo y en el campo de la matemática, no es la excepción. Sin embargo, al hablar de generación de conocimiento matemático no es suficiente con “ver”, es necesario ver lo que no se ve, de tal manera que la visualización pueda ir más allá del puro sentido visual.

En la investigación, la visualización ha sido entendida tanto como el proceso como el producto de creación, interpretación y reflexión a partir de imagen y objetos procedentes de contexto gráficos y geométricos (Arcavi, 2003).

Consideramos que los modos de pensamiento presentados en Sierpinska (2000) (sintetico-geometrico, analítico-aritmético, analítico-estructural) son apropiados para interpretar los fenómenos en los que nos hemos concentrado. Cuando hablamos de modos de pensamiento nos referimos a que los objetos matemáticos adquieren diferentes significados al trabajar en diferentes modos.

Esto podría ser causa de dificultades cuando, por ejemplo, presentamos una pregunta en el modo sintético y pedimos al estudiante que de una interpretación analítica.

En el pensamiento sintético-geométrico (SG) los objetos son presentados al estudiante mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos. La interpretación se da mediante, una figura, un conjunto de puntos. Las interpretaciones se dan mediante las operaciones que están definidas entre conjuntos, en este caso de puntos.

En el pensamiento analítico-aritmético (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como n -uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas. En este modo de pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas o simbólicas.

El pensamiento analítico- estructural (AE) recurrimos más bien a las propiedades de los objetos o a su caracterización a través de axiomas. Las matrices, funciones, sucesiones, entre otras, pueden ser vistas como elementos genéricos de un espacio vectorial.

La visualización matemática juega un rol fundamental en lo que es la interpretación de problemas por lo que se retoma el pensamiento de modo SG. El objetivo de la investigación es que el alumno se genere un conocimiento a través de situaciones que le lleven a la reflexión del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales, por lo cual esta tesis está fundamentada en la teoría de situaciones de Guy Brousseau y la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, las cuales abordaremos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3. METODOLÓGIA

En nuestra investigación pretendemos que el alumno puedan crear significados de los sistemas de ecuaciones lineales a través de la visualización, por lo que utilizamos La teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau (1986), además el marco de competencia, propuesta por la Secretaría de Educación Pública (SEP) como un eje rector en planes y programas para la educación básica como marco teórico. Como metodología de investigación utilizamos a la ingeniería didáctica, pues en sus diferentes etapas se logra la realización de una secuencia didáctica donde el alumno se encuentra en una situación didáctica que propicia al análisis y reflexión.

3.1 Teoría de Situaciones

La teoría de situaciones desarrollada por Brousseau (1997) se propone un modelo el cual la enseñanza se ve como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar. Para producir conocimiento implica validarlos a través de varios métodos. También tiene como objetivo observar la producción de los alumnos y analizarlo desde tres puntos de vista: Estructura matemática, Estructura curricular y Estructura cognitiva y operacional.

Brousseau (1997) sostiene que el conocimiento matemático se va constituyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados a su vez por otros problemas. Concibe además la matemática como un conjunto organizado de saberes producidos por la cultura. Los procesos de producción de conocimiento en el aula están también atravesados por un sistema de normas y creencias que de alguna manera orientan el tipo de exploración, abordaje, búsqueda y validación.

Las interacciones entre docente y alumno con el medio, se describen y se explica a través de la noción del contrato didáctico. Esta herramienta teórica da cuenta de las elaboraciones con respecto a un conocimiento matemático en particular, que se produce cuando cada uno de los interlocutores de la relación didáctica interpreta las intenciones y las expectativas, explícitas e implícitas del otro en el proceso de comunicación. El alumno trata de descifrarlos implícitos: supone, infiere, se pregunta y se responde que quiso decir el docente con sus gestos. Todo eso interviene en la conceptualización que el alumno logra alcanzar. De alguna manera, el concepto de contrato didáctico nos permite tomar conciencia de que una parte de las ideas matemáticas de los alumnos son producto de inferencias que, por provenir de lo que el docente expresa pero no necesariamente dice.

La teoría de situaciones toma posición respecto de la necesidad de formar jóvenes con autonomía intelectual y con capacidad crítica. Al ubicar del lado de la escuela la responsabilidad de lograr que los alumnos se posicionen como sujetos

teóricos, como sujetos productores, deja sentado que todos los alumnos tienen derecho a construir conocimiento.

Brousseau (1997) plantea una tipología de situaciones didácticas. Cada una de ellas debería desembocar en una situación a-didáctica, es decir, en un proceso de confrontación del estudiante ante un problema dado, en el cual construirá su conocimiento:

La situación de acción, consiste básicamente en que el estudiante individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos y desarrolle un determinado saber. Es decir, el estudiante individualmente interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos.

La situación de formulación consiste en un trabajo en grupo, donde se requiere la comunicación de los estudiantes, compartir experiencias en la construcción del conocimiento.

La situación de validación, donde, una vez que los estudiantes han interactuado de forma individual o de forma grupal con el medio didáctico, se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esta interacción, es decir se valida lo que se ha trabajado, se discute con el docente acerca del trabajo realizado para cerciorar si realmente es el correcto.

Brousseau no plantea situaciones didácticas para favorecer una enseñanza-aprendizaje tradicional, su voluntad es crear una teoría que permita explicar las situaciones de aula, que potencie una adecuada interrelación entre el docente, el estudiante y un saber. En esta dirección, el propósito finalmente es que el estudiante asuma, integre, comprenda plenamente los conocimientos y aprenda a enfrentarse a problemas sin una intervención didáctica directa, son las situaciones a-didácticas, el objetivo fundamental de una situación didáctica. La situación didáctica no puede visualizarse únicamente como una cuestión teórica.

3.2 Competencias

En el Programa de Estudios 2011 de Educación Básica, específicamente el de secundaria se promueve el desarrollo de competencias, el logro de estándares curriculares y de aprendizajes esperados, porque a través de ello se proveerán a los niños y jóvenes de las herramientas necesarias para la aplicación eficiente de todas las formas de conocimientos adquiridos, con la intención de que respondan a las demandas actuales y en diferentes contextos, en este mismo sentido, la competencia se define como “la capacidad de responder a diferentes situaciones e implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)” (SEP, 2011a, p. 29).

En seguida presentamos un panorama más amplio sobre este concepto y la forma en cómo se aborda desde los planes y programas de estudio de la SEP.

3.2.1 Competencias desde la SEP

En los programas de estudio 2011 de educación básica, se promueve que los alumnos adquieran cinco competencias a lo largo de los cuatro periodos de su educación básica (preescolar, primaria y secundaria) y a lo largo de toda su vida, a las que le denominan las “Competencias para la vida”, y éstas se integran de la siguiente manera (SEP, 2011a, pp. 38-39):

1. **Competencias para el aprendizaje permanente.** Para su desarrollo se requiere: habilidad lectora, integrarse a la cultura escrita, comunicarse en más de una lengua, habilidades digitales y aprender a aprender.
2. **Competencias para el manejo de la información.** Su desarrollo requiere: identificar lo que se necesita saber; aprender a buscar; identificar, evaluar, seleccionar, organizar y sistematizar información; apropiarse de la información de manera crítica, utilizar y compartir información con sentido ético.
3. **Competencias para el manejo de situaciones.** Para su desarrollo se requiere: enfrentar el riesgo, la incertidumbre, plantear y llevar a buen término procedimientos; administrar el tiempo, propiciar cambios y afrontar los que se presenten; tomar decisiones y asumir sus consecuencias; manejar el fracaso, la frustración y la desilusión; actuar con autonomía en el diseño y desarrollo de proyectos de vida.
4. **Competencias para la convivencia.** Su desarrollo requiere: empatía, relacionarse armónicamente con otros y la naturaleza; ser asertivo; trabajar de manera colaborativa; tomar acuerdos y negociar con otros; crecer con los demás; reconocer y valorar la diversidad social, cultural y lingüística.
5. **Competencias para la vida en sociedad.** Para su desarrollo se requiere: decidir y actuar con juicio crítico frente a los valores y las normas sociales y culturales; proceder a favor de la democracia, la libertad, la paz, el respeto a la legalidad y a los derechos humanos; participar tomando en cuenta las implicaciones sociales del uso de la tecnología; combatir la discriminación y el racismo, y conciencia de pertenencia a su cultura, a su país y al mundo.

Se establecen competencias de carácter disciplinario, dentro de ellas se encuentra las competencias matemáticas, las cuales son abordadas enseguida.

3.2.2 Competencia matemática

En el programa de estudios de la SEP también se establecen cuatro competencias matemáticas, cuyo desarrollo es importante durante la Educación Básica (SEP, 2011a, p. 23):

1. **Resolver problemas de manera autónoma.** Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; por ejemplo, problemas con solución única, otros con varias soluciones o ninguna solución; problemas en los que sobren o falten datos; problemas o situaciones en los que sean los alumnos quienes planteen las preguntas. Se trata de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución.
2. **Comunicar información matemática.** Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación; se establezcan nexos entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; se deduzca la información derivada de las representaciones y se infieran propiedades, características o tendencias de la situación del fenómeno representado.
3. **Validar procedimientos y resultados.** Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.
4. **Manejar técnicas eficientemente.** Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora. Muchas veces el manejo eficiente o deficiente de técnicas establece la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución incompleta o incorrecta. Esta competencia no se limita a usar de forma mecánica las operaciones aritméticas, sino que, apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema; en la utilización del cálculo mental y la estimación; en el empleo de

procedimientos abreviados atajos a partir de las operaciones que se requieren en un problema, y en evaluar la pertinencia de los resultados. Para lograr el manejo eficiente de una técnica es necesario que los alumnos la sometan a prueba en muchos problemas distintos; así adquirirán confianza en ella y la podrán adaptar a nuevos problemas.

3.2.3 Competencia matemática en el planteamiento y resolución de problemas

En el libro *En la vida diez, en la escuela cero* (Carraher, Carraher, & Schliemann, 2011) nos habla básicamente la ruptura que hay entre los eternos de la matemática y los problemas de la vida cotidiana, como se ve en el dialogo de la presentación:

-¿Te acuerdas de aquel niño? Restó veintiuno menos seis y le dio veinticinco. ¡y ni se inmutó!”

-¿Recuerdas cómo lo hizo? Subió directamente en la cuenta el seis y después dijo: seis menos uno, cinco. Se baja el dos.”

-Pobre. No entiende nada. No tiene ni la más mínima lógica.

... -Pero, observa no fue falta de lógica. Apuesto a que si el muchacho estuviese en la esquina vendiendo almendras a cinco cruzeiros el paquete, daba el cambio exacto.

¡Que apuesta! Pasaron cinco años, las almendras cuestan hoy cinco cruzados, los muchachos dan el cambio exacto.

La ruptura entre estos 2 tipos de contexto no solo se observa en el nivel básico también podemos observar que el sacar una buena calificación en el nivel superior no es una garantía de encontrar un buen trabajo y las cuestiones ¿de qué me servirá lo que se enseña en la escuela con mi trabajo? Son conocimiento que los alumnos no conectan con la práctica dejando estos conocimientos sin uso en la vida cotidiana. eh aquí la importancia de trabajar por competencia desde el nivel básico.

Como definición de competencia matemática tenemos lo siguiente: *es la capacidad de un individuo para identificar y resolver y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano* (Rico, 2006)

Los ciudadanos se enfrentan regularmente a situaciones matemáticas cuando compran, viajan, se alimentan, pagan sus impuestos, gestionan sus finanzas personales,

organizan su tiempo y sus entornos vitales, juzgan cuestiones políticas, y muchas otras cosas, en las que usan el razonamiento cuantitativo. En estas y en muchas otras ocasiones tienen que mostrar su competencia matemática para clarificar, formular y resolver problemas ya que, en todos estos casos, abordan y resuelven cuestiones mediante herramientas matemáticas.

Las competencias matemáticas se puede considerar parte de la preparación educativa puesto que ideas y conceptos matemáticos son herramientas para actuar sobre la realidad y se privilegian más el uso de los conocimientos que el propio conocimiento, se eliminan la enseñanza por métodos metodológicos y el alumno crea su propio conocimiento al estar en una situación casi real donde el profesor “desaparece” como un ser enseñante y aparece como un proveedor de ejercicios y asesor para que el alumno utilice su intelecto y sentido común para la resolución de problemas.

Por lo anterior nos lleva a resignificar un concepto matemático y dar respuestas a nuestra pregunta de investigación sobre el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales sin dejar a un lado la parte de las competencias por lo cual el diseño de nuestra secuencia didáctica se presente en un contexto de la vida cotidiana mezclándolo con conceptos matemáticos para que el alumno no pierda ese vínculo que hay entre la vida cotidiana y el contexto matemático escolar.

3.3 Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas francesa, a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero quien, según Artigue (1998, p. 33):

“Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.”

En realidad el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje; y dado que en nuestra investigación la ocuparemos en ambos sentidos; para rescatar el método gráfico como herramienta útil para la comprensión de los sistemas de ecuaciones apoyándonos con la tecnología y modificación de parámetros donde el estudiante cree conocimiento con la manipulación

de graficas y que el alumno escapas de poner en funcionamiento y utiliza por sí mismo el saber que está construyendo.

Fases de la metodología de la ingeniería didáctica

- **Primera fase: Análisis preliminares.** Se analizan y determinan, desde una aproximación sistemática, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos, por lo cual se toma en consideración: el componente cognitiva, el componente didáctico y el componente socio-cultural.
- **Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas:** En esta fase de la Ingeniería Didáctica se eligen las variables didácticas que se controlan y se define la forma que las mismas serán gestionadas. Es una fase tanto prescriptiva como predictiva.
- **Tercera fase: Experimentación:** En esta etapa se procede a la “puesta en escena” de la situación diseñada, es decir, se implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.
- **Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación:** Consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina, en qué medida, las expectativas fueron alcanzadas o cuánto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

3.3.1 Análisis Preliminar

Para la concepción de una ingeniería didáctica son necesarios análisis preliminares respecto al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos y relacionados con el tema. Los análisis más frecuentes son los siguientes (Artigue, 1998 p.38):

- Conocimientos didácticos previamente adquiridos.
- Análisis epistemológico.
- Enseñanza tradicional en el tema.
- Concepción de los estudiantes.

Todo lo anterior se tiene que realizar en cuenta con los objetivos de la investigación, a partir de ello se establece una serie de dimensiones que permiten la realización de estos análisis, las dimensiones son las siguientes:

- ❖ **Dimensión epistemológica** (Polo epistemológico). Asociada a las Características del saber matemático puesto en funcionamiento.
- ❖ **Dimensión cognitiva** (Polo Psicológico). Asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.
- ❖ **Dimensión didáctica** (Polo Pedagógico). Asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Así tenemos el siguiente esquema representativo del funcionamiento didáctico Ferrari (2001) citado en (Cruz, 2008) (ver fig. 9)

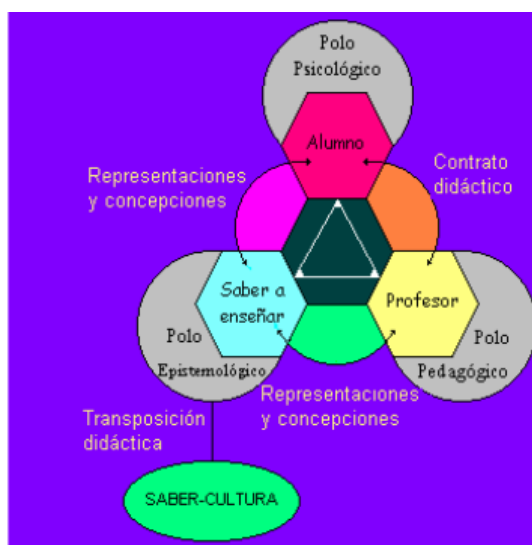


Figura 9 Esquema Didáctico tomado en (Cruz, 2008)

Enseguida se abordarán cada una de estas dimensiones de acuerdo al entorno que gira en el objeto de la investigación considerando la resignificación del método grafico en los sistemas de ecuaciones lineales.

3.3.1.1 Dimensión epistemológica

Naturalmente, el hombre desde siempre ha procurado buscar la manera de solucionar, como parte de su proceso evolutivo, situaciones complejas que emergen en su diario vivir. De aquí el aprecio a las matemáticas, dado que estas han permitido que los grandes esfuerzos del hombre por mejorar sus condiciones de vida fueran posibles gracias a esta venerable disciplina; conforme al deseo de mejora permitió la creación de nuevas teorías y un avance en el estudio de las matemáticas.

Problemas como la distribución de cosechas o el cálculo de la órbita de un planeta y muchos otros que presentaban forma lineal, o más bien podían ser vistos como

sistemas de ecuaciones lineales ocuparon a muchos personajes en la historia de las matemáticas.

A continuación se hace un recorrido por la historia de las diversas culturas que trabajaron este tipo de problemas y aportaron a su solución.

a) Los Egipcios (2000-1800 a.c.)

Una muestra de las matemáticas, más específicamente de la aritmética y del álgebra, que se desarrollaron en Egipto se encuentran en el Papiro de Rhind, escrito por el escriba Ahmés, hacia 1650 a.c. Este documento que es una copia de otra más antigua (2000 – 1800 a.c.) arroja evidencia del uso de ecuaciones lineales y más aún de sistemas de ecuaciones simultáneas, no necesariamente lineales. Se plantearon problemas que

implicaban la solución de sistemas como
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}.$$

En el Papiro de Rhind, los problemas 24 a 29 (Pulpon, Sin referencia, págs. 19,20) se refieren a la manera de solucionar ecuaciones lineales de una incógnita a través de la “regula falsi”, o la regla de falsa posición. El problema 24 enuncia: “Una cantidad y su séptima parte suman 19. ¿Cuál es esa cantidad?”

Claramente, en tiempos modernos el problema pediría resolver la ecuación $x + 1/7x = 19$. Para este problema, se toma 7 como si fuera la solución, quizás porque le permite realizar de manera más sencilla los cálculos, y a partir de este supuesto encuentra el valor real. Calcula $7 + \frac{7}{7} = 8 \neq 19$, la cual es una falsa posición. Posteriormente, dice que hay que encontrar un número de tal forma que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor remplazado resulte 19, es decir se necesitaría obtener $\frac{19}{8}$.

(Pulpon, Sin referencia) Presenta un listado de valores que se ajustan a lo pedido, así: cuando $x = 7$ el resultado es 8 se muestran algunos de ellos en la Tabla 3. Relación entre n y $8n$.

Tabla 3. Relación entre n y $8n$

n	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$8n$	8	16	4	2	1

Fuente: Guerra (2012)

Si se relacionan los resultados 16, 2,1 y al sumarlo se obtiene 19, al tomar los respectivos n , se obtiene: $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{19}{8}$. Este valor se multiplica por 7.

De esta forma, a partir de una falsa suposición, los egipcios solucionaban sus ecuaciones lineales.

b) Los Babilonios (2000 a.c.)

Los babilonios hacia el año 2000 a.c. también contribuyeron al surgimiento del álgebra a tal punto que sus aportaciones son consideradas de los avances más notables en la historia de las matemáticas, y no es para menos, los babilonios sabían cómo resolver problemas que involucran la solución de ecuaciones lineales, cuadráticas, cúbicas e incluso sistema de ecuaciones lineales y no lineales. Ellos registraban sus notas en ladrillos que luego de enfrentarlos a altas temperaturas permanecían grabadas de forma perdurable en el tiempo, es así como hoy por hoy se encuentran tablas babilónicas que aun son objetos de estudio. En tales tablillas se ofrecen instrucciones netamente verbales para solucionar ecuaciones.

Según (Kline, 1992) Uno de los problemas pedía hallar un número tal que sumando a su inverso multiplicativo diera un número dado; este problema genera una ecuación cuadrática. De presentarse problemas más complicados, los algebristas babilonios tendían a reducir y transformar ecuaciones a una forma típica o conocida.

Bell expresa en (Bell, 1985, pág. 656) expresa que los babilonios basándose en sus tablas resolvían ecuaciones simultáneas lineales con dos incógnitas y ecuaciones simultáneas de segundo grado. Los babilonios pudieron resolver sistemas de ecuaciones de hasta diez ecuaciones con diez incógnitas para estudiar una situación referida a observaciones astronómicas. Como ya se había mencionado, los problemas algebraicos se formulaban y resolvían de forma retórica, sin hacer uso del simbolismo algebraico; sin embargo, en ocasiones se valían de palabras asociadas a cantidades geométricas, como *us* que significaba longitud, para representar incógnitas. Inclusive para problemas que no estuvieran relacionados con situaciones geométricas. Esta especie de símbolos especiales para las incógnitas pudo marcar un inicio del álgebra simbólica; no obstante, paso por alto este hecho.

Rey en su libro “Historia de la Matemática” (Rey, 1985) ofrece en una de sus notas complementarias a la selección dedicadas a los babilonios, un problema que da idea de cómo los babilonios resolvían situaciones que requiera sistemas de ecuaciones lineales: “Se conoce la extensión total (1800) de un campo compuesto por dos hectáreas, en cada una de las cuales el rendimiento del grano por unidad de área está afectado por coeficientes diferentes ($\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$). Se desea saber la extensión de cada parcela conociendo la diferencia (500) del producto de la cosecha”.

En notación actual el problema requiere la formulación y resolución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \end{cases}$$

Cuya solución es $x=1200$ e $y=600$.

La menara como el calculista de la época solucionaba el problema se basaba en una falsa posición.

- Inicia suponiendo que cada una de las parcelas es igual a 900 (la mitad de 1800)
- Bajo esta suposición, encuentra la diferencia de producido, que para este caso es 150, así

$$\frac{2}{3}(900) - \frac{1}{2}(900) = 600 - 450 = 150 \neq 500$$

- Para remediar el error de 350, pues $500-150=350$, el calculista reconoce que el error de $\frac{7}{6}$ (la suma de $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$) de un valor que se desconoce y que al ser sumado y restado al dato errado del inicio las medidas buscadas. De otra forma, se trata de encontrar el valor de a :

$$\frac{2}{3}(x + a) - \frac{1}{2}(y - a) = 500 \text{ Que puede ser expresada como}$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{6}a = 500, \text{ luego}$$

$$\frac{7}{6}a = 500 - (\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y) \text{ Partiendo de la suposición inicial } \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 150$$

$$\frac{7}{6}a = 500 - 150, \text{ finalmente}$$

$$a = 300.$$

El calculista omite todo esto pensando que debe dividir los 350 por $\frac{7}{6}$ y para ello, se pregunta por cuanto debe multiplicar $\frac{7}{6}$ para obtener 350 y así encuentra la respuesta de 300.

- Por último, suma y resta 300 a los 900 de la suposición inicial:

$$\begin{cases} x = 900 + 300 = 1200 \\ y = 900 - 300 = 600 \end{cases}$$

c) Los Chinos (200 a.c.)

Hacia los años 200 a.c. los matemáticos chinos resolvieron sistemas de ecuaciones lineales 3×3 trabajando con los coeficientes numéricos de las ecuaciones, evidenciando en su famoso tratado *nueve capítulos sobre el arte matemático* (Luzardo & Peña, 2006)

en esta obra escrita por Chuan Tsanom en el año 152 a.c. donde se recogió los avances matemáticos de la época, aparece un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales conocidos como la regla “fan-chen” que se podría comparar con la eliminación gaussiana que conocemos hoy.

En la sección VIII del libro “Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX” (Luzardo & Peña, 2006) el problema 1 dice: *“Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?”*

Hoy por hoy, se plantearía un sistema de ecuaciones para encontrar su solución:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Y su solución es: $x=37/4$, $y=17/4$, $z=11/4$

Los chinos se valían de cuadrados para resolver este tipo de problemas (Boyer, 2007) (ver tabla 4) y finalmente solucionar el problema.

Tabla 4 tabla de cuadrados

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

En donde la primera fila de números se refería a los coeficientes de la variable x , la segunda fila a los coeficientes de la variable y y la última fila se ubicaban las constantes, a diferencia de cuando aplicamos la eliminación gaussiana en la actualidad, puesto que la matriz aumentada sería diferente a la presentada por los chinos en el cuadro, dado que en las matrices se ubica los respectivos coeficientes de las variables en columna y no en filas.

Luego mediante ciertas operaciones por columnas, los chinos obtuvieron:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

La última matriz representa las ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{cases}$$

A partir de la última matriz por el método de sustitución se encontraban los resultados ya mencionados, como se puede apreciar los chinos se aproximaron muy bien al método de eliminación gaussiana 2000 años antes que Gauss y otros matemáticos trabajaran en ello.

Los sistemas de ecuaciones lineales han existido por más de 4000 años siendo los egipcios los pioneros en hacer operaciones con estos sistemas utilizando la falsa suposición y hasta la fecha estos métodos de resolución se han ido mejorando pero su comprensión de estos conceptos no son las idóneas hoy en día encontramos los siguientes métodos de resolución:

- Método de suma y resta
- Método de igualación
- Método de sustitución
- Método gráfico
- Método de Gauss
- Eliminación Gauss-Jordan
- Regla de Cramer

3.3.1.2 Dimensión cognitiva

En este apartado corresponde a la dimensión cognitiva que se relaciona con los aspectos cognitivos, las funciones cognitivas las usan los individuos con el objetivo de procesar la información necesaria para la operatividad mental y así poder comprender los procesos implícitos en el procesamiento de la información.

Para la dimensión cognitiva consideramos las etapas que establece Jean Piaget y Vigotsky del desarrollo cognitivo el cual nos ayudará a comprender y diseñar una secuencia acorde a los procesos mentales que el alumno de 3 grado de secundaria se encuentra.

Considerando la Tabla 5 Etapas del Desarrollo Cognoscitivo: Las teorías de Piaget y , podemos ver que los estudiantes con los que llevamos a cabo esta investigación se encuentran ubicados en la última etapa propuesta por Piaget, de tal forma que se espera que estos estudiantes realicen operaciones formales y abstractas.

Tabla 5 Etapas del Desarrollo Cognoscitivo: Las teorías de Piaget y Vygotsky

ETAPA	EDAD	CARACTERÍSTICAS
Sensorio motora El niño Activo	Del nacimiento hasta los 2 años	Los niños aprenden la conducta propositiva, el pensamiento orientados a medios y fines, la permanencia de los objetos
Pre operaciones EL niño intuitivo	De los 2 a los 7 años	El niño puede usar símbolos y palabras para pensar, solución intuitiva de los problemas, pero el pensamiento está limitado por la rigidez, la centralización y el egocentrismo
Operaciones concretas El niño practico	De 7 a 11 años	El niño aprende de las operaciones lógicas, de clasificación y de conservación. El pensamiento está ligado a los fenómenos y objetos del mundo real
Operaciones formales El niño reflexivo	De 11 a 12 años en adelante	El niño aprende sistemas abstractos del pensamiento que le permiten usar la lógica proporcional al razonamiento proporcional

Fuente: tabla tomada en (Estrada, 2013)

Las operaciones formales se caracterizan por la posibilidad de razonar sobre hipótesis distinguiendo la necesidad de conexiones debidas a la forma y a la velocidad de los contenidos. El primer características de las operaciones formales es el de poder realizarse sobre hipótesis y no solo sobre objetos; esta es la novedad fundamental cuya aparición todos los autores han señalado la edad de los 11 años (Jean Piaget, 1982).

La descripción de la última etapa fue importante para saber las cosas que los alumnos pueden hacer en el 3 grado de secundaria y con ello la secuencia didáctica realizada.

3.3.1.3 Dimensión Didáctica

Esta dimensión fue construida a partir del los análisis de los programas de estudio y libros de texto gratuitos autorizados para el segundo año de secundaria descartamos los libros de 3er grado aun que en los planes de estudios del 2011 (SEP, 2011) el tema de sistemas de ecuaciones lineales también se encuentra en el tercer año bloque V para el ciclo escolar 2014-2015 el tema es suprimido en su totalidad como se observar en el catálogo de libros de texto para la educación básica secundaria 2014-2015 autorizadas por la Secretaria de Educación Pública (CONALITEG, 2014).

a) Libro de texto y sus ejes

Realicemos un acercamiento a los Estándares Curriculares de Matemáticas la cual presenta la visión de una población de aprendizajes que se espera de los alumnos en los tres periodos escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática.

Se organizan en:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
2. Forma, espacio y medida
3. Manejo de la información

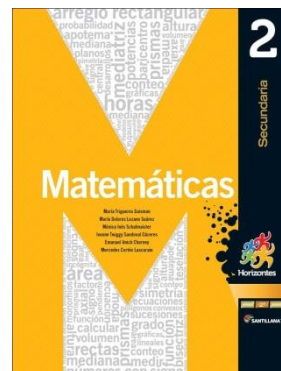
Y su progresión debe entenderse como:

- Transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados
- Ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas.
- Avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia el trabajo autónomo

b) Descripción breve y análisis del libro de texto

Para la realización del análisis se tomo un libro de texto gratuito dentro del catalogo autorizados por la Secretaria de Educación Pública para el ciclo escolar 2014-2015 (CONALITEG, 2014).

Libro de Texto Gratuito de Trigueros Gaisman, María; María Dolores Lozano Suárez; Mónica Inés Schulmaister; Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres; Emanuel Jinich Charney y Mercedes Cortés Lascurain. (2012), Matemáticas II, 2do. Grado, Volumen II. Editorial Santillana, Mexico D.F. (Santillana Horizontes, 2012)



En cada uno de los temas se desarrollan en 4 etapas para un mejor aprendizaje (Ver. Fig. 10) los cuales son:

- Inicio
- Desarrollo
- Planeación
- Cierre

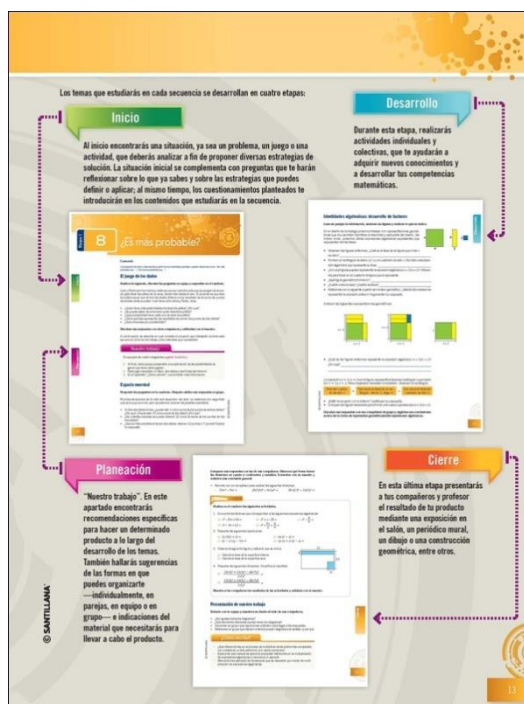


Figura 10 Etapas de desarrollo (Santillana Horizontes, 2012)

En la etapa de inicio se encuentra una situación, ya sea un problema, un juego o una actividad, que deberá analizarse a fin de proponer diversas estrategias de solución. La situación inicial se completa con preguntas que harán reflexionar sobre lo que ya se sabe y sobre las estrategias que puede definir o aplicar; al mismo tiempo, los cuestionamientos planteados te introducirán en los contenidos que estudiaras en la secuencia (Santillana Horizontes, 2012, pág. 13).

En la etapa de planeación se encontraran recomendaciones específicas para hacer un determinado producto a lo largo del desarrollo de los temas. También se hallara sugerencias de las formas en que puedes organizarte individualmente, en parejas, en equipos o en grupo e indicaciones del material que se necesitara para llevar a cabo el producto (Santillana Horizontes, 2012, pág. 13)

En la etapa de desarrollo se realizan actividades individuales y colectivas, que ayudarán a adquirir nuevos conocimientos y a desarrollar las competencias matemáticas (Santillana Horizontes, 2012, pág. 13)

En la última etapa que es el cierre se presentan a los compañeros de clases, y profesores los resultados del producto mediante una exposición en el salón, un periódico mural, un dibujo o una construcción geométrica, entre otros. (Santillana Horizontes, 2012, pág. 13)

Durante los temas también se encontrar 8 momentos en el que el alumno puede retroalimentar y reforzar lo aprendido en clases:

- ¿Cómo vamos?
- Historia de vida
- Espacio Tecnológico
- Glosario
- Presentación de nuestro trabajo
- Tareas
- ¿Cómo nos fue?
- Evaluación tipo PISA

Los temas que giran entorno a nuestra investigación se encuentran el tema 31.- Sistema de ecuaciones y también el tema 36.- Graficas y sistemas de ecuaciones lineales, encuentran ubicados en el bloque 5 con la competencia matemática: sentido numérico y pensamiento algebraico (Ver fig.11)

Bloque 5		
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	31. Sistemas de ecuaciones
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	32. Simetría axial
	Medida	33. Circunferencias y arcos
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	34. Las funciones lineales y sus gráficas
		35. Gráficas lineales con constantes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	36. Gráficas y sistemas de ecuaciones lineales
Manejo de la información	Nociones de probabilidad	37. Gráficas de distribución frecuencial y teórica

Figura 11 Temas del bloque 5 (Santillana Horizontes, 2012) pag.10

El bloque 5 inicia en la página 218 con el tema de sistemas de ecuaciones lineales con el contenido de: *“resolución de problemas que implican el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2×2 con coeficientes enteros, utilizando el método mas pertinente (suma y resta, Igualación o sustitución)*. En la pagina 254 continua con el tema de Gráficas y sistemas de ecuaciones lineales con el contenido de: *“Representación grafica de un sistema de ecuación 2×2 con coeficientes enteros. Reconocimiento del punto de intersección de sus graficas como la solución del sistema”* (Santillana Horizontes, 2012)

En la etapa de inicio del tema 31.- Sistemas de Ecuaciones Lineales inicia con una situación problema denominado “El tiempo de estudio” donde la lectura introduce un lenguaje verbal al estudiante de una situación real donde 2 individuos requieren estudiar para diferentes exámenes y a través de preguntas abiertas se analiza la situación con el fin de proponer diversas estrategias de solución a sistema de ecuación líneas que se encuentra implícitamente en la lectura; adema se encuentra un glosario con la definición del Sistema de Ecuaciones. Posterior mente encontramos la etapa de planeación “Nuestro Trabajo” donde se le pide al alumno trabajar con un cartel y gaceta con contenidos de la comunidad escolar donde resuelvan diversos Sistemas de Ecuaciones Lineales durante todo el tema se guiara al alumno para poder realizar dicho carteles (Ver fig. 12)..

Bloque 5

Inicio

31

Sistemas de ecuaciones

Contenido

Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2×2 con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución).

El tiempo de estudio

Los hermanos Saldívar están en temporada de exámenes. Joaquín tendrá examen de Historia y de Física, y María, de Inglés y de Literatura. Ambos empezaron a estudiar a las 5:00 de la tarde. Joaquín terminó a las 7:45, y María, a las 7:20. A Joaquín le tomó el doble de tiempo estudiar Historia que Física. María quería dedicar el mismo tiempo a sus dos asignaturas, pero tardó veinte minutos más estudiando Inglés que Literatura.

- ¿Cuánto tiempo estudió Historia Joaquín? ¿Cuánto tiempo estudió Física?
- ¿Cuánto tiempo estudió Inglés María? ¿Cuánto tiempo estudió Literatura?
- ¿Cómo puedes ordenar la información que tienes sobre el problema de modo que te ayude a encontrar una solución? ¿Te bastaría con una ecuación? ¿Por qué?
- ¿Cómo puedes representar cada uno de los datos del problema cuyo valor desconoces?

Comenta con tus compañeros y con el profesor tus respuestas y cómo llegaste a ellas. Identifiquen las dificultades que se les presentaron para solucionarlas.

Antes de continuar con el trabajo de la secuencia, reúnanse en equipo para trabajar en el proyecto que llevarán a cabo. Al final deberán entregarlo al maestro.

Planeación

Glosario

sistema de ecuaciones. Es un grupo de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas o variables. Al conjunto de valores que toman las variables, y que hacen que se cumplan todas las ecuaciones, se le llama solución del sistema.

Planeación

Nuestro trabajo

En esta ocasión diseñarán un **cartel de promoción** para los festejos de aniversario de la escuela Alta Montaña.

- Incluirán información de la comunidad escolar. Para ello deberán resolver varios **sistemas de ecuaciones**.
- Además elaborarán un gafete para los festejos.
- A lo largo de la secuencia, en el apartado "¿Cómo vamos?", encontrarán más información.

Figura 12 Inicio y Planeación (Santillana Horizontes, 2012) pag.218

En la etapa de desarrollo se inicia aun con el lenguaje verbal y una situación real denominada “la frutería” con problemas que comúnmente se encuentran en un puesto de frutas posteriormente, en esta etapa se pasa del lenguaje verbal al lenguaje algebraico pidiéndole al alumno en la lectura que le asigna variables a los diferentes tipos de frutas y el total de ellos, también se le proporciona información para la realización del cartel pedido en la etapa de planeación.

Los tres tipos de resolución se ven de una manera muy rápida y concreta con soluciones únicas y de manera más algebraica pero siempre se inician con los problemas de la frutería como se puede observar en las siguientes imágenes (ver fig. 13 y 14)



Método de sustitución

Analicen en parejas el siguiente procedimiento y sigan las instrucciones para encontrar la solución del sistema de ecuaciones.

$$z - 2x = 0$$

$$8z - 4x = 60$$

- ♦ Primero despejen el valor de una variable de una ecuación: $z = \underline{\hspace{2cm}}$
 - ♦ Sustituyan el valor de la variable anterior en la otra ecuación: $8 \underline{\hspace{1cm}} - 4x = 60$
 - ♦ Despejen x . ¿Cuál es su valor? $x = \underline{\hspace{2cm}}$
- ♦ Con base en las propiedades de igualdad, sustituyan el valor encontrado en la segunda ecuación para despejar z : $8z - \underline{\hspace{2cm}} = 60$
- ♦ ¿Cuál es el valor de z ?
- ♦ Comprueba que la solución satisfaga las dos ecuaciones del sistema.
 $\underline{\hspace{1cm}} - 2(\underline{\hspace{1cm}}) = 0$ $8(\underline{\hspace{1cm}}) - 4(\underline{\hspace{1cm}}) = 60$

Este método de resolución de ecuaciones se llama **método de sustitución**.

- ♦ ¿Por qué consideran que a este método se le llama “de sustitución”?
- ♦ Utilicen el método de sustitución para resolver los dos siguientes sistemas de ecuaciones. Una vez resueltos, comparen sus resultados con su equipo.

$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 3 \\ x &= y + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n + m &= 30 \\ 5n + 2m &= 114 \end{aligned}$$

Volvamos al problema de las zarzamoras.

- ♦ Escribe, en el cuaderno, nuevamente el sistema de ecuaciones lineales que diseñaste para este caso. Observa que en una de tus ecuaciones está despejada una variable. ¿Te sirve esto para encontrar la solución? Justifica tus respuestas.
 - ♦ ¿Cuántas bolsas hay de cada fruta? $\underline{\hspace{2cm}}$

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y registren sus conclusiones.

Método de igualación

Realiza las siguientes actividades en el cuaderno.

En la frutería de don Juan hay una caja con manzanas y peras. En total hay 72 frutas. La cantidad de manzanas es cinco veces mayor que la cantidad de peras. ¿Cuántas manzanas y cuántas peras hay?

- ♦ Si usamos letras para las variables, m representa la cantidad de manzanas, p la cantidad de peras, escribe el sistema de ecuaciones que represente la situación, de manera que ambas tengan despejada la misma variable.
 - ♦ Observa las ecuaciones, ¿qué tienen en común? ¿Para qué te sirve esta característica?
 - ♦ Usa las propiedades de igualdad para trabajar con estas ecuaciones y llegar a una ecuación con una sola incógnita.
 - ♦ Una vez que tengas la ecuación, resuélvela. ¿Cómo puedes usar este resultado para encontrar el valor de la otra variable?
 - ♦ Comprueba con el sistema original que los valores encontrados hagan verdaderas las igualdades.

Figura 13 Método de sustitución y de Igualación (Santillana Horizontes, 2012)

Método de suma y resta

Ahora con un compañero resuelve las actividades. Resuelvan en el cuaderno.

Dos señoras compraron fruta con don Juan. Una de ellas compró 2 papayas y una sandía, y pagó \$112; y la otra, 2 sandías y una papaya, y pagó \$119. Si todas las papayas cuestan lo mismo y las sandías también, ¿cuánto cuesta una sandía y cuánto una papaya?

Asignen una literal para representar la cantidad de papayas y otra para la cantidad de sandías, y reescriban el problema como un sistema de ecuaciones:

- ¿Qué operaciones les convendría realizar en estas dos ecuaciones para llegar al resultado? _____
- ¿Para qué serviría sumar ambas ecuaciones cuidando cada lado de la igualdad?, ¿qué ecuación encontrarían? _____
- ¿Qué modificación deben hacer en alguna de las ecuaciones para que al sumárselas se reduzca el número de variables y obtengas un sistema equivalente más fácil de resolver? _____
- Multiplica alguna de las ecuaciones por una constante y aplica las propiedades de igualdad, de modo que si sumas la ecuación resultante a la otra ecuación obtengas una ecuación con una sola variable.
 - Una vez que tengas una ecuación con una sola variable, resuélvela y utiliza el resultado para resolver tu sistema. ¿Puedes usar la ecuación resultante para resolver tu sistema original? ¿Qué te garantiza que el valor obtenido en la ecuación equivale al valor buscado en las ecuaciones originales?

© SANTILLANA

Analicen y resuelvan en el cuaderno los sistemas de ecuaciones que se muestran a continuación.

$$\begin{cases} 3x + y = 820 \\ 2x - y = 340 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4p + 5q = 37 \\ 8p - 5q = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 4a + b = 55 \end{cases}$$

Comparen sus respuestas en equipo y juntos inventen un problema para cada sistema. Al final, registren sus conclusiones en el cuaderno.

221

Figura 14 Método de suma y resta (Santillana Horizontes, 2012)

También se discute que para todo sistema de ecuación lineal se puede resolver con cualquier método de resolución antes vista pero cada sistema de ecuación lineal se acopla de mejor manera a un método de resolución haciendo más fácil de resolver y se propone 3 ecuaciones (Ver fig. 15), las cuales se discute que método se utilizaría para resolverlo de una manera más fácil (Santillana Horizontes, 2012, pág. 222).

- Analicen los siguientes sistemas de ecuaciones y respondan.

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ x = 5 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 2x = 6 \\ x = y - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$$

- ¿Qué método de solución usarían para resolver cada uno de los sistemas? Expliquen por qué. _____

Figura 15 Sistemas de Ecuaciones Lineales

El tema no se podría dar por completo si no se menciona los tipos de solución que tiene los sistemas de ecuaciones lineales por lo que en la página 222 del libro se

menciona que “*las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables pueden ser compatibles e incompatibles. Se le llama compatibles determinados cuando tiene una solución y compatible indeterminado cuando tiene infinitas soluciones. Es incompatible cuando no tiene soluciones.*” (Santillana Horizontes, 2012) y se pone una ecuación de cada tipo para su análisis (Ver fig.16)

- ♦ Consideren el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x + 3y = 6$$

$$4x + y = 2$$
 - ♦ ¿Cuántas soluciones encontraron? Si es el caso, ¿cuáles son?
- ♦ Ahora consideren el sistema de ecuaciones:

$$3x + y = 3$$

$$6x + 2y = 6$$
 - ♦ Encuentren distintas parejas de números (x, y) que sean solución de la primera ecuación.
 - ♦ Sustituyan esas parejas en la segunda ecuación. ¿Qué observan?
 - ♦ ¿Qué significa ese resultado?
 - ♦ ¿Sucedería lo mismo para cualquier pareja de números que elijan y que sea solución de la primera ecuación? ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones?
- ♦ Consideren el sistema de ecuaciones y resuévanlo:

$$2x - 3y = 4$$

$$4x - 6y = -2$$
 - ♦ ¿Qué significa ese resultado?

En una lluvia de ideas, comenten cuál de los tres sistemas anteriores es compatible determinado, cuál es compatible indeterminado y cuál es incompatible.

Figura 16 Sistema de Ecuación Lineal con diferente tipo de solución

En la etapa del cierre se presente el trabajo final del cartel realizado durante todo el tema se discute sobre el mejor diseñado y se termina con la formulación de cuatro preguntas y actividades que fortalecen y retroalimenta el tema las preguntas son las siguientes:

- ¿Cuántos métodos de solución hay para resolver un sistema de ecuaciones? ¿Cuáles son?
- Escribe, para cada método, un ejemplo de un sistema de ecuación que sea conveniente resolver.
- ¿De qué depende la elección de un método para resolver un sistema de ecuaciones?
- ¿de qué depende que un sistema de ecuaciones sea compatible o incompatible?

Cuatro temas después pero dentro del mismo bloque 5 encontramos la el ultimo método para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales de una forma aislada a los demás métodos de resolución con el tema 36.- Gráficas y sistemas de ecuaciones lineales. Con el contenido: “Representación de un sistema de ecuación 2×2 con coeficientes enteros. Reconocimiento del punto de intersección de sus graficas como la solución del sistema. El cual inicia con una situación real de dos empresas que a lo largo del año incrementa el precio como se observa en la siguiente imagen (Ver fig. 17)y se complementa con preguntas de reflexión.



Figura 17 Etapa de inicio Grafica y Sistema de Ecuaciones Lineales

En la etapa de planeación se le pide al alumno realizar dos planes que presente variación en la tarifa que se cobran por diversos servicios como pueden ser dos compañías de celulares, dos tiendas, etc.(Ver fig. 18) y que a lo largo de la etapa de planeación se le da tips al para poder realizar lo planeado en los apartados de “¿Cómo vamos? En estos apartados se proponen una serie de actividades desde escoger una situación problema, definir tarifas de dichas compañías, elaboración de tabulaciones, formulación de la ecuación, preguntas de reflexión por ejemplo ¿Cómo decidir en cual conviene comprar? ¿Cómo pueden encontrar la solución a un sistema de ecuación en una grafica? ¿Cómo encontrar la solución a un sistema de ecuaciones, si solamente tiene la ecuación? También se propone realizar diferente tarifas con el fin de observar los tres tipos de resultados posibles: solución única, infinita soluciones y ninguna

solución vistos en temas anteriores. (Santillana Horizontes, 2012, págs. 253,257, 259, 261).

Planeación

Nuestro trabajo

En esta ocasión, junto con un compañero elaborarán **dos planes que presenten variaciones en las tarifas que se cobran por diversos servicios.**

- ♦ Por ejemplo, dos compañías de teléfono celular o dos planes de crédito de una tienda, etcétera; luego, con ellas plantearán un sistema de ecuaciones y trazarán la gráfica correspondiente.
- ♦ A lo largo de la secuencia, en el apartado “¿Cómo vamos?” encontrarán los requisitos que deben cumplir las tarifas.

© SANTILLANA

254

Figura 18 Etapa de planeación Gráfica y sistemas de ecuaciones lineales

En la etapa de desarrollo se inicia con la tabulación de dos diferentes tiendas con los parámetros de mes y precio con el fin de que los alumnos sigan utilizando los métodos de resolución algebraicos y un acercamiento de la visualización al comparar resultados en las tablas con los problemas que ahí se plantean.

De manera introductoria al las graficas de los sistemas de ecuaciones lineales se le recuerda al alumno los diferentes resultados que pueden obtener un sistema de ecuaciones lineales y los que tiene solución bastan con darse cuenta el punto de intercesión de las rectas que conforman el sistemas de ecuación lineal. De manera de discusión se le presenta de manera grafica 3 sistemas de ecuaciones lineales (Ver fig. 19)poniéndole énfasis a la segunda grafica donde el punto de discusión girara sobre el valor de la pendiente de las rectas que conforman el sistema de ecuación lineal (Santillana Horizontes, 2012, pág. 256).

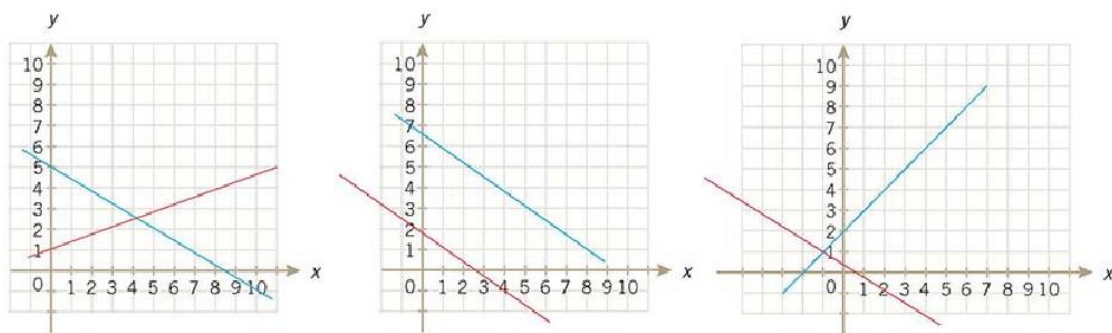


Figura 19 Sistema de Ecuaciones Lineales, Método Grafico

En la etapa de “¿Cómo vamos?” se le pide al estudiante realizar un proyecto con una situación problema de la vida real como es el caso de las tarifas telefónicas de diferente compañía y así el estudiante pueda ver un buen uso de los sistemas de

ecuaciones lineales en la vida real; también se le presente un sistema con infinitas soluciones (Ver fig. 20) y se le hace reflexionar con las siguientes preguntas:

- ♦ ¿Cuál es la solución del sistema?
 - ♦ ¿Qué punto o puntos satisfacen las dos ecuaciones a la vez?
 - ♦ ¿Cómo se representa en la grafica?
- ♦ Elabora la gráfica de este sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}6x + 2y &= 8 \\3x + y &= 4\end{aligned}$$

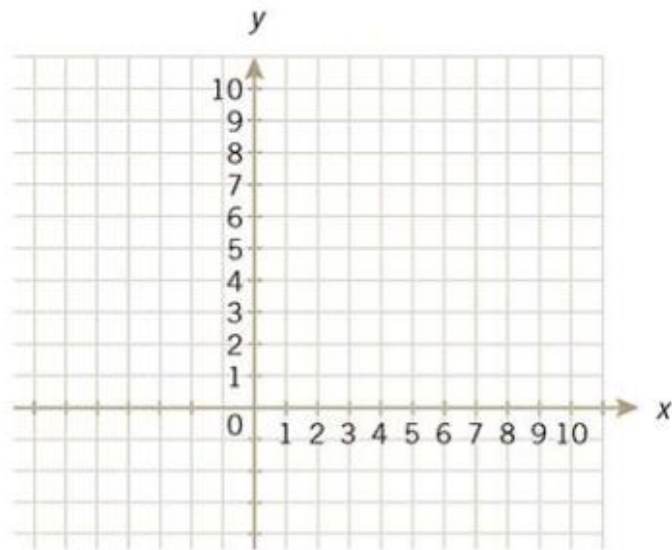


Figura 20 Sistema de ecuación solución infinita

Como conclusión se le presenta al alumno 4 graficas con sus diferentes soluciones explicándole y recordándole que un sistema puede tener 3 soluciones posibles (Ver fig. 21)

1. Solución única, en la grafica puede identificarse localizando el punto de intersección de todas las rectas
2. Infinita soluciones, cuando todas las ecuaciones representan la misma rectas.
3. Ninguna solución, cuando todas las rectas son paralelas, es decir, no se tocan en algún punto, en este caso, las rectas tienen la misma pendiente (m).

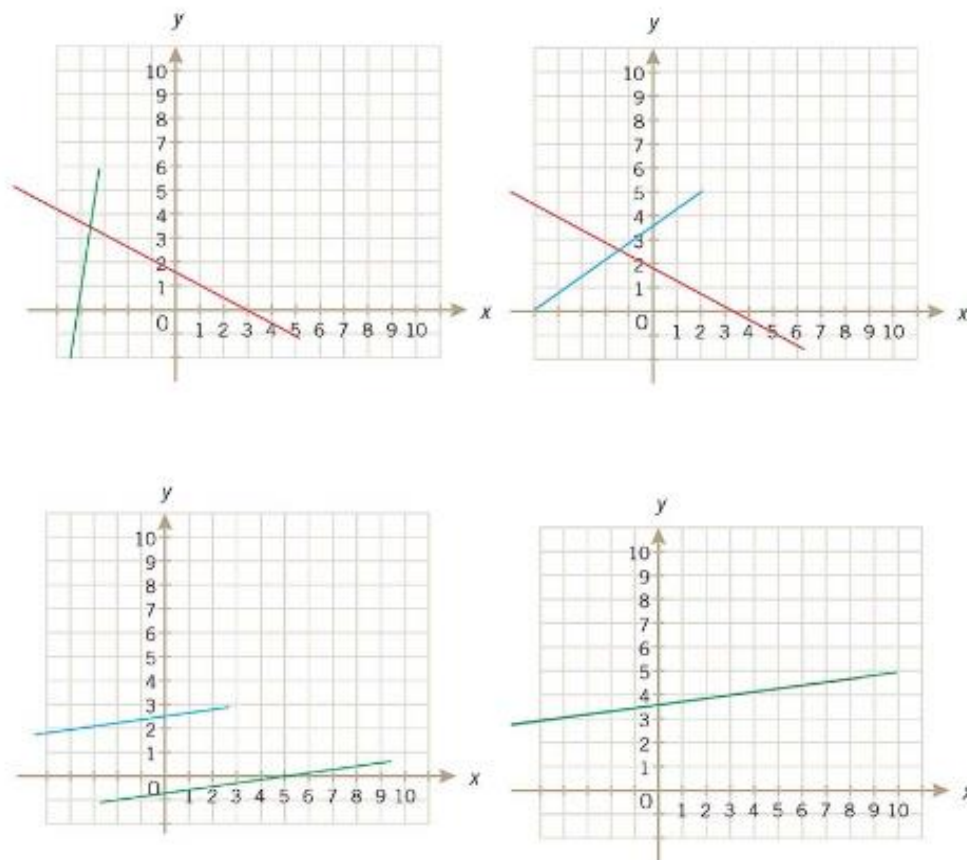


Figura 21 Sistemas de ecuaciones con sus diferentes soluciones

Una vez explicado los distintos tipos de soluciones se regresa al proyecto realizado en el tema, cuestionándose ¿qué tipo de sistema de ecuación fue la que se desarrollo y por qué? En esta etapa es posible algunos equipos tendrán diferente sistemas de ecuaciones y lo relacionen con los tipos de sistemas de ecuaciones analizadas con anterioridad. Hasta en esta etapa encontramos un espacio tecnológica donde se observa el Geogebra como graficador se le induce al estudiante a visatar la siguiente página electrónica:

http://arquimedes.mate.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/index.html (Santillana Horizontes, 2012, pág. 259)

Las actividades en el apartado de tareas son las de transitar del lenguaje grafico al lenguaje algebraico y de manera viceversa algo que en años atrás no se manejaba este tránsito entre los diferentes tipos de lenguajes.

Finamente en el cierre del tema se trata y se discute el trabajo realizado en una situación comúnmente en la vida real las preguntas para su discusión son las siguientes:

- ¿Qué estrategias usaste para elaborar las graficas en la lección?
- ¿Como se reconoce en un grafica la solución a un sistema de dos ecuaciones y dos variables?
- Describe como es la grafica de un sistema de dos ecuaciones y dos variables cuando no tiene solución.
- ¿Cómo aplicaste lo que aprendiste sobre graficas de sistemas de ecuaciones en tu proyecto?
- ¿Qué otra situación de la vida real, además de las planteadas en la lección, puede representarse por medio de unos sistema de ecuaciones lineales?

Como nos pudimos dar cuenta en el libro (Santillana Horizontes, 2012) se maneja los diferentes tipos de representación que el alumno puede abordar en el salón de clases, Duval citado en (Segura, 2004). Pero en lo tecnológica se ve de manera muy breve por lo que nuestra situación didáctica enfocado en la visualización y tecnología podría tener un mejor aprendizaje y reforzamiento al tema Sistemas de Ecuaciones Lineales.

3.3.2 Concepción y análisis a-priori

En esta segunda etapa de la ingeniería didáctica donde fue diseñada la secuencia didáctica implica los análisis previos de los sistemas de ecuaciones lineales y se consideran las diferentes variables encontradas las cuales pueden ser de:

- **Nivel global:** supone análisis de los vínculos epistemológicos, cognitivos y didácticos que permiten explicar las enseñanzas actual y sus efectos.
- **Nivel local:** la identificación de un grupo de condiciones para ser cumplidas por cada una de las secuencias didácticas planteadas con sus respectivas justificaciones. Y también identificar los momentos críticos principales de esta, y preverse para cada uno estos, además de tenerse que llevar a cabo un análisis de las posibles consecuencias en niveles internos y externos de cada una.

En esta metodología desde la misma fase de concepción se empieza el proceso de validación, por medio del análisis a-priori de las situaciones didácticas de la ingeniería. Este análisis a-priori se debe concebir como un análisis de control de significado. Por lo tanto, el objetivo del análisis *a-priori* es determinar en que las selecciones hechas permiten controlar comportamientos de los estudiantes y su significado. La validación de las mismas están indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la fase cuatro entre el análisis a-priori y el análisis a-posteriori.

En el siguiente capítulo se pueden observar a detalle los análisis a-priori que hemos realizado para el diseño de la secuencia didáctica.

3.3.3 Puesta en escena

En esta etapa se procede a la “puesta en escena” de la situación diseñada esta etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundaran en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

El objetivo de un experimento de diseño no es demostrar que la trayectoria prevista de aprendizaje funciona, si no mejorarla mediante contrastes y revisiones de conjeturas sobre el proceso de aprendizaje previsto y los medios específicos para apoyarlo. Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis a-priori.

A esta fase le sigue un análisis a-posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación.

3.3.4 Análisis a-posteriori y validación

El análisis a-posteriori consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis–priori y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuanto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

De esta confrontación entre los análisis a-priori y a-posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma. Esta validación, a diferencia de otros acercamientos tales como los de carácter cuantitativo para los cuales el éxito se mide en tanto el grupo experimental logra mejores resultados que el grupo de control, es decir, entre la situación planteada en sí misma, en la Ingeniería Didáctica, la validación es interna, pues se confrontan dos fases de la misma. Lo esperado y lo que se obtuvo en realidad, entre las hipótesis y expectativas que fueron explicitadas en el análisis a-priori y los resultados analizados y categorizados en el análisis a-posterior.

De las consideraciones realizadas, y del hecho que la validación de una Ingeniería Didáctica surge de la confrontación entre el análisis a-priori y a-posteriori. Se deducen dos aspectos relevantes de esta, el estricto control que debe ejercerse en la experimentación y la precisión de los análisis preliminares. Es por ello que nos abocamos a reportar el realizado para sentar las bases de la situación didáctica que se diseñara.

En el capítulo tres se centran en el presente diseño para el aula, de aquí que en él se encuentra a detalle cada una de las fases que se realizaron.

CAPÍTULO 4. RESULTADO Y DISCUSIÓN

La ingeniería didáctica está compuesta por cuatro fases: la primera planeación, en la cual se lleva a cabo un análisis preliminar mediante un sistema sistémico, haciendo consideraciones de tipo epistemológicas, cognitivas y didácticas; la segunda fase se refiere al diseño, realizando un análisis *a-priori*; la tercera es la fase experimental que consiste en la puesta en escena de la situación didáctica, así como, la observación y recolección de datos: finalmente la cuarta fase es la de la de validación, que se obtiene a partir de la confrontación del análisis *a-priori* y el análisis *a-posteriori*.

4.1 Fase de planeación

En esta fase de planeación un aspecto importante a considerar para el diseño de la situación didáctica es el concerniente a tres dimensiones que son: la dimensión histórica-epistemológica (asociada al proceso histórico sobre la construcción del saber en juego), la dimensión cognitiva (asociada a las características del conocimiento de los alumnos) y finalmente la dimensión didáctica (asociadas a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza – aula, libros de texto y programas de estudio) cabe mencionar que estas dimensiones ya fueron abordadas de manera amplia en el capítulo anterior, por ello no son objetos de análisis de nueva cuenta.

4.2 Fase de diseño

Dentro de esta fase se presenta los análisis *a priori* de cada una de las actividades de la secuencia didáctica diseñada la cual de observar en el apartado de anexos: “SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON GEOGEBRA”. De acuerdo a (Lezama, 2003) este análisis se basa en un conjunto de hipótesis sobre lo que harán los estudiantes. A continuación se presentan los análisis *a priori* de las 8 actividades, posteriormente se realizara el análisis *a posterior* en la fase de validación para completar esta metodología.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 1	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
<i>Se les pide identificar el punto de intersección de un sistema de ecuaciones de 2×2 de forma grafica, modificar parámetros de las constantes (K) para que el sistema tenga una solución deseada, observar la relación que existe entre los ejes de las abscisas y ordenada con la ecuaciones lineal al modificar su parámetro (K).</i>	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
Conocimientos y habilidades: Resolver sistemas de ecuaciones líneas de por el método grafico y manipular un sistema de ecuación lineal para la satisfacción de una solución deseada conociendo el comportamiento de la misma, con la modificación del parámetro (K). Intención didáctica: Antes de iniciar con la secuencia el profesor capacita de manera rápida al alumno de cómo modificar los parámetros de una ecuación lineal con el programa de Geogebra. Después se inicia con un texto donde el alumno se imagina en un laboratorio farmacéutico en el cual tiene	

que eliminar virus con un sistema de rayos laser. Dentro del texto se le pide realizar varias actividades con el Geogebra y responder 6 preguntas con respecto a la solución de un sistema de ecuación de el sistema que satisface una solución y como se comporta la ecuación la modificar el parámetro (K). Consideraciones previas: Se espera que el alumno identifique la solución de un sistema de ecuación de manera grafica. Que modifique un sistema de ecuación de manera que la solución sea un punto deseado y visualicen el comportamiento de las ecuaciones lineales con respectos a los ejes de las abscisas y ordenadas.	
---	--

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 2	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide modificar los parámetros de las (Y) en un sistema de ecuación lineal y que encuentren el sistema que satisface a la punto de solución establecido y <i>observar la relación que existe entre los ejes de las abscisas y ordenada con la ecuaciones lineal al modificar su parámetro (Y).</i>	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
Conocimientos y habilidades: Manipular un sistema de ecuación lineal para la satisfacción de una solución deseada conociendo el comportamiento de la misma, con la modificación del parámetro (Y) Intención didáctica: Se continua con la lectura donde el alumno se imagina en el laboratorio farmacéutico el cual continua eliminando virus con los rayos laser, pero esta vez modificando el parámetro de las (Y), se espera que responda las 3 preguntas sobre el nuevo sistema de ecuación lineal y el comportamiento des sistema al modificar el parámetro (Y). Consideraciones previas:	

Se espera que el alumno con la ayuda de la tecnología visualice y comprenda que sucede con las ecuaciones lineales al modificar el parámetro de las (Y) y con esto el alumno pueda manipular el sistema de ecuaciones para que tenga una solución deseada.	
---	--

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 3	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide modificar los parámetros de las (X) en un sistema de ecuación lineal y que encuentren el sistema que satisface a la punto de solución establecido y <i>observar la relación que existe entre los ejes de las abscisas y ordenada con la ecuaciones lineal al modificar su parámetro (X).</i>	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
Conocimientos y habilidades: Manipular un sistema de ecuación lineal 2×2 para la satisfacción de una solución deseada conociendo el comportamiento de la misma, con la modificación del parámetro (X) Intención didáctica: Se continua con la lectura donde el alumno se imagina en el laboratorio farmacéutico el cual continua eliminando virus con los rayos laser, pero esta vez modificando el parámetro de las (X), se espera que responda las 3 preguntas sobre el nuevo sistema de ecuación lineal y el comportamiento des sistema al modificar el parámetro (X). Consideraciones previas: Se espera que el alumno con la ayuda de la tecnología visualice y comprenda que sucede con las ecuaciones lineales al modificar el parámetro de las (X) y con esto el alumno pueda manipular el sistema de ecuaciones para que tenga una solución deseada.	

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 4	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide al alumno modificar cualquiera de los parámetros de una ecuación lineal (X), (Y) y (K) y establecer un sistema de 3×2 que satisfagan a un punto deseado.	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
Conocimientos y habilidades: Manipular completamente una ecuación lineal atreves de la modificación de su 3 parámetros (X) (Y) y (K) y trabajar el método grafico con un sistema de ecuación de 3×2. Intención didáctica: Manipular una ecuación lineal con todos sus parámetros y formar una ecuación lineal de 3×2 que satisfagan a una solución específica. Consideraciones previas: Se espera que el alumno pueda conocer y manipular una ecuación lineal y llegue a conformar un sistema cuya solución sea una específica.	

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 5	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide observar un sistema de ecuación lineal de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas y argumentar por que dicho sistema no tiene solución.	
<i>ANALISI A PRIORI</i>	<i>ANALISIS APOSTERIORI</i>
• Conocimientos y habilidades: Analizar un sistema de ecuación lineal de 3 ecuaciones con 2 incógnitas sin solución. • Intención didáctica: Se le pide al alumno al alumno responder por que los virus no fueron eliminado en la forma en que el asistente lanzo los 3 rayos laser. • Consideraciones previas: Se espera que el alumno pueda responder de manera acertada que dicho sistema de ecuación no tiene solución, para que tenga solución las 3 ecuaciones tiene que tener un punto en común.	

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 6	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide al alumno que modifique los parámetros de las ecuaciones del sistema lineal 3 x 2, con la intención que atraviese 2 puntos dados.	
<i>ANALISI A PRIORI</i>	<i>ANALISIS APOSTERIORI</i>
• Conocimientos y habilidades: En esta actividad se pretende guiar al alumno, a un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones en la actividad 7 se concluye el inicio de esta actividad. • Intención didáctica: Se le pide al alumno que modifiquen los parámetros de los rayos laser, y que se den cuenta que un sistema de ecuaciones lineales puede tener más de una solución. • Consideraciones previas: Se espera que el alumno llegue a encontrar el sistema de ecuaciones lineales que satisfacen a 2 puntos específicos con la modificación de parámetros.	

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 7	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide al estudiante responder cuantos virus puede eliminar el científico imaginando que los virus pueden ser manipulados en un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones.	
<i>ANALISI A PRIORI</i>	<i>ANALISIS APOSTERIORI</i>
• Conocimientos y habilidades: En esta actividad el alumno identificara la única manera en que un sistema de ecuación lineal tiene infinitas soluciones. • Intención didáctica: Se le pide al alumno visualizar el sistema de 3 ecuaciones lineales “encimadas” y responder cuantos virus el científico puede eliminar si se reproducen de manera infinita. • Consideraciones previas: Se espera que el alumno responda que de manera en que fueron colocado los rayos laser las 3 ecuaciones lineales en forma “encimadas” puede eliminar infinitos virus.	

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 8	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide al estudiante identificar de manera grafica. Que sistemas de ecuaciones tiene solución, cuales no tienen soluciones y cuales tienen infinitas soluciones.	
<i>ANALISI A PRIORI</i>	<i>ANALISIS APOSTERIORI</i>
• Conocimientos y habilidades: Con lo visto en las actividades anteriores el alumno podrá visualizar de manera grafica los diferentes tipos de ecuaciones lineales de acuerdo a su solución. • Intención didáctica: Se le pide al alumno identificar de manera grafica el tipo de solución que pertenece cada uno de los 6 sistemas de ecuaciones lineales dados. • Consideraciones previas: Con lo aprendido en las actividades anteriores el alumno puede colocar que tipo de solución tiene cada grafica sin ningún problema.	

4.3 Fase de experimentación

La implementación de la situación didáctica está compuesta de tres aspectos: la puesta en escena, las características de los estudiantes y la dinámica para llevar a cabo dicha situación. A continuación se da una explicación de cada uno de estos aspectos.

4.3.1 La puesta en escena

Por mejor comodidad este diseño se realizó en la casa de uno de los alumnos de la Telesecundaria “Belisario Domínguez Palencia”, ubicado en la ciudad de Tecpatan, Chiapas. Recabamos información a través de la observación y de videograbaciones de cada alumno. La dinámica se aplicó en una sesión de 77 minutos.

4.3.2 Los estudiantes

Los participantes fueron un total de dos alumnos del segundo año de dicha Telesecundaria. Los dos integrantes tienen 15 años de edad Fig. 1 puesta en escena, la cual ya habían abordado el tema de sistemas de ecuaciones lineales.

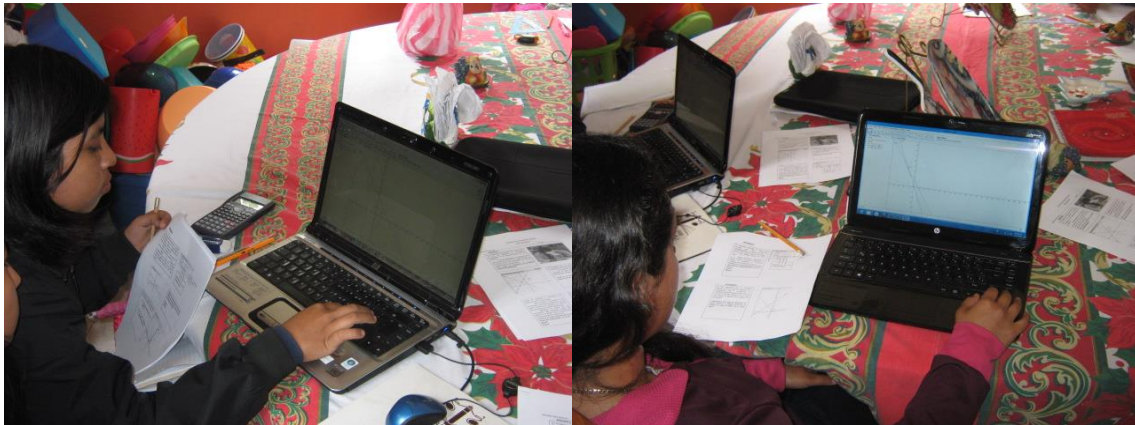


Fig. 1 puesta en escena

3.3.3 La dinámica

A los alumnos se les fue facilitado 2 laptops con el programa de GeoGebra instalado y con los ejercicios diseñados, se le dio una capacitación de 10 min del programa Geogebra y se les facilitó el material impreso comentándoles que la secuencia didáctica consistía de ocho actividades, también se les indicó que tenían 60 minutos para poder realizarlas y para un mejor análisis sería videograbados. Por asuntos personales una alumna se ausentó y no se terminaron las actividades por lo que se enfocó en una sola estudiante. Asimismo, el docente encargado de la aplicación de la secuencia, estuvo en

todo momento al pendiente de cualquier reacción, comentario o sugerencia de la alumna cuando estos se encontraban resolviendo las actividades; puesto que todo detalle o aspectos que se vaya desarrollando serán importantes para los análisis posteriores junto con la videograbación de pantalla con una duración de 77 minutos que se realizó en el transcurso del desarrollo de las actividades.

4.4 Fase de validación

La validación de la ingeniería se lleva a cabo al confrontar las hipótesis elaboradas en el análisis a priori y el análisis de resultados de la fase experimental (denominada análisis a posteriori) (Lezama, 2003). Para esta investigación hemos completado las tablas que se elaboraron en la etapa del diseño y ahora se complementa para la confrontación y una mejor lectura.

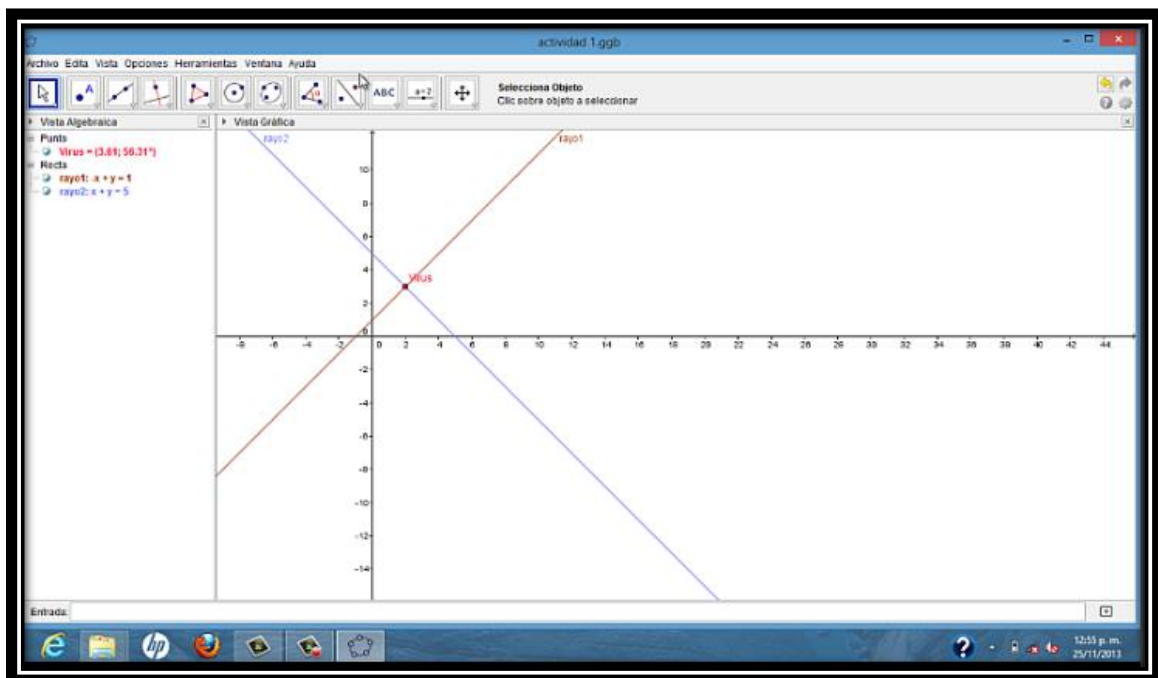
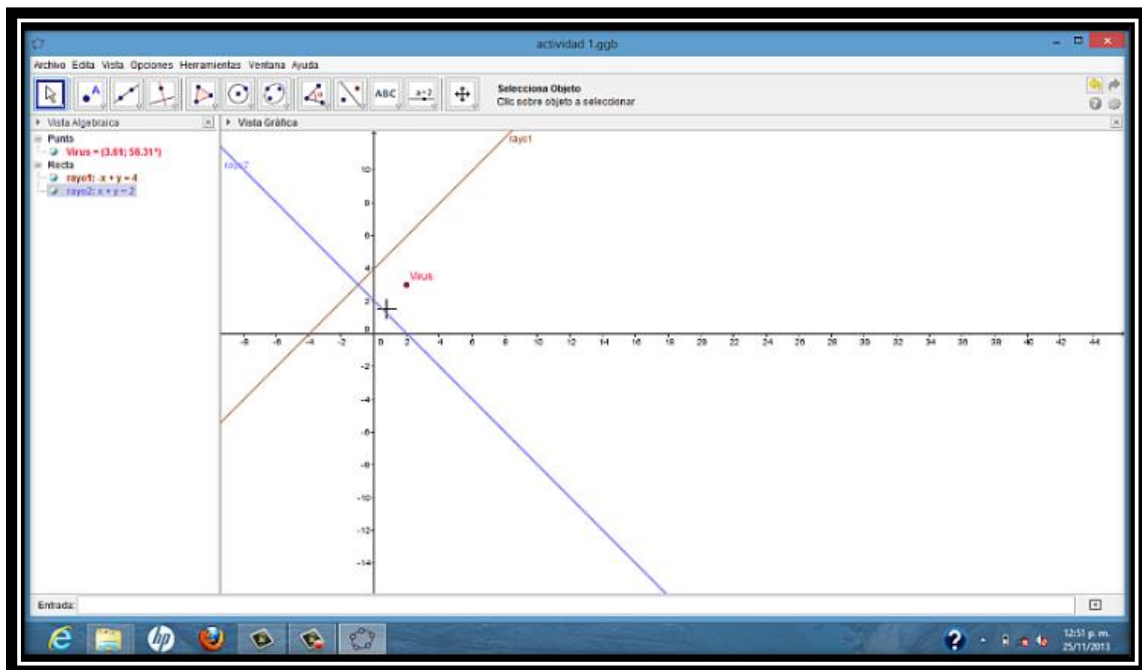
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 1	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
<i>Se les pide identificar el punto de intersección de un sistema de ecuaciones de forma gráfica, modificar parámetros de las constantes (K) para que el sistema tenga una solución deseada, observar la relación que existe entre los ejes de las abscisas y ordenada con la ecuaciones lineal al modificar su parámetro (K).</i>	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
• Conocimientos y habilidades: Resolver sistemas de ecuaciones líneas de por el método gráfico y manipular un sistema de ecuación lineal para la satisfacción de una solución deseada	Las alumnas no tuvieron ningún problema en modificar el parámetro k. En la recta 1 (rayo 1) la manipulación de parámetro k se

conociendo el comportamiento de la misma, con la modificación del parámetro (K). Intención didáctica: Antes de iniciar con la secuencia el profesor capacita de manera rápida al alumno de cómo modificar los parámetros de una ecuación lineal con el programa de <i>Geogebra</i>. Después se inicia con un texto donde el alumno se imagina en un laboratorio farmacéutico en el cual tiene que eliminar virus con un sistema de rayos laser. Dentro del texto se le pide realizar varias actividades con el <i>Geogebra</i> y responder 6 preguntas con respecto a la solución de un sistema de ecuación de, el sistema que satisface una solución y como se comporta la ecuación la modificar el parámetro (K). Consideraciones previas: Se espera que el alumno identifique la solución de un sistema de ecuación de manera grafica. Que modifique un sistema de ecuación de manera que la solución sea un punto deseado y visualicen el comportamiento de las ecuaciones	inicio de manera aleatoria con el numero 4 y le siguieron las siguientes modificaciones: -2,-2,0,-2,2,1 y después de varios intentos logran coincidir la recta con el punto de intercesión quedando como ecuación: $-x + y = 1$ En la recta 2 (rayo 2) la manipulación también se inicio de manera aleatoria con el numero 6 y en seguida el 5 el cual con eso la recta satisface el punto solución cabe mencionar que aun que llego a la ecuación deseado continuo con la modificación con -2 y posterior regreso 5 quedando como ecuación: $x + y = 5$ En la etapa de los cuestionamientos en la primera parte (rayo1) no se respondió acertadamente poniendo que a medida de el parámetro k aumente la recta en el eje de las ordenadas baja y en el eje de las abscisas se desplaza hacia la derecha
--	---

lineales con respecto a los ejes de las abscisas y ordenadas.	Pero en la etapa 2 (rayo 2) respondió acertadamente poniendo que a medida que el parámetro k aumente la recta en el eje de las ordenadas sube y en el eje de las abscisas se desplaza a la derecha.
---	---

Confrontación

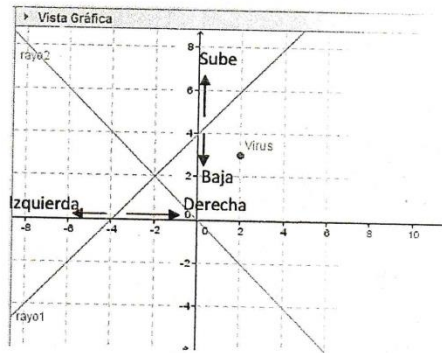
Se pudo observar que los alumnos ya saben lo que es un Sistema de ecuaciones lineales 2×2 y la modificación de parámetros predijeron que las rectas se modificarían. Se observó que en la recta 2 no tuvo complicación ya que en el segundo intento logro encontrar una ecuación deseada que satisface el punto solución pero siguió con la modificación posiblemente por la curiosidad por lo que después regreso a la ecuación que satisface el punto deseado. En el rayo 2 también utilizo números negativos en este caso fue uno de los primeros en ser utilizados por lo que la recta se desvió mucho del punto solución por lo que redujo el parámetro a -1 y después a 0 y aun no lograba encontrar el punto solución después regreso al -2 observo que la recta se alejó más por que empezó con los números positivos iniciando con el 2 y la recta se ubicó por arriba del punto solución. Por lo que disminuyó el parámetro a 1 y con esto se logro encontrar la ecuación deseada para el punto solución. En la etapa de los cuestionamientos se contestó de manera incorrecta la primera parte y correcta la segunda parte por lo que podemos concluir que a pesar de que la modificación de parámetros no fuera de manera sucesiva si se logro la visualización de la recta y predecir el comportamiento de la recta pero no con los ejes cartesianos ya que se enfocó en la recta en sí y no en las intersecciones con los ejes, esto se puede comprobar ya que en los cuestionamientos se contestó de manera incorrecta en uno de los apartados.



Que le pasa al "rayo 1" al aumentar los parámetros de la constante (K) con respecto:

A. En el eje y (sube, baja, no se mueve): *baja.*

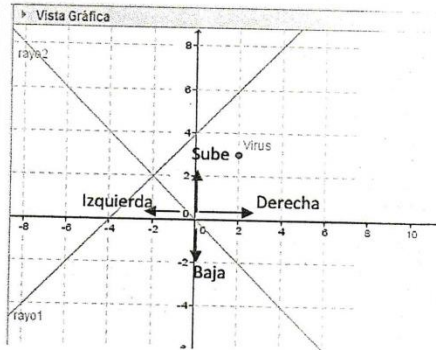
B. En el eje x (derecha o izquierda, no se mueve): *derecha.*



Que le pasa al "rayo 2" al aumentar los parámetros de la constante (K) con respecto:

A. En el eje y (sube, baja, no se mueve): *sube.*

B. En el eje x (derecha, izquierda, no se mueve): *derecha.*

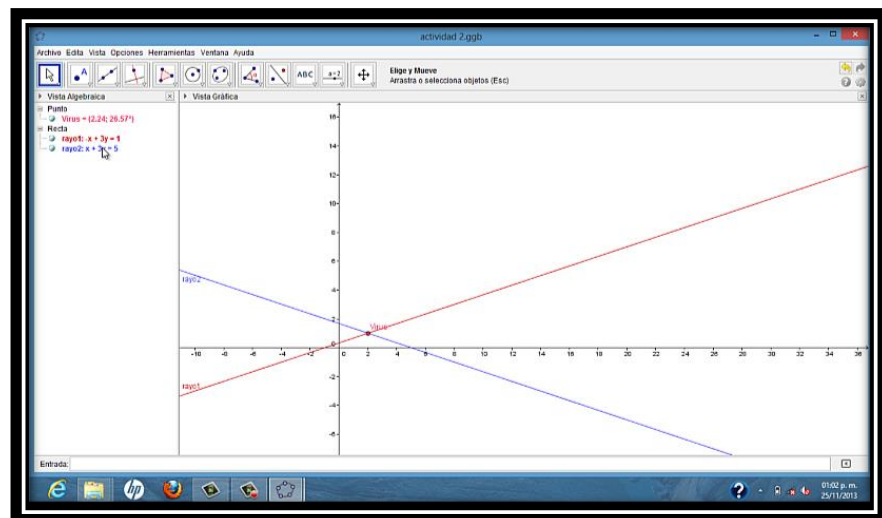
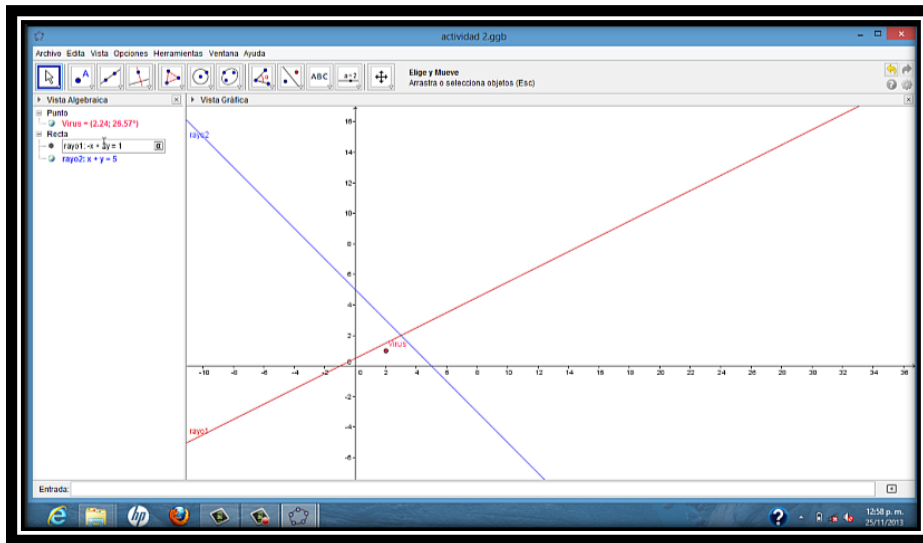


SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 2	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide modificar los parámetros de las (Y) en un sistema de ecuación lineal y que encuentren el sistema que satisface a la punto de solución establecido y <i>observar la relación que existe entre los ejes de las abscisas y ordenada con la ecuaciones lineal al modificar su parámetro (Y).</i>	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
Conocimientos y habilidades: Manipular un sistema de ecuación lineal para la satisfacción de una solución deseada conociendo el comportamiento de la misma, con la modificación del parámetro (Y) Intención didáctica: Se continua con la lectura donde el alumno se imagina en el laboratorio farmacéutico el cual continua eliminando virus con los rayos laser, pero esta vez modificando el parámetro de las (Y), se espera que responda las 3 preguntas sobre el nuevo sistema de ecuación lineal y el comportamiento des sistema al modificar el parámetro (Y). Consideraciones previas:	En esta actividad se pudo llegar al siguiente sistema de ecuaciones líneas que satisficieron en punto solución (2,1) las cuales quedaron de la siguiente manera: Ecuación 1 (rayo1); $-x + 3y = 1$ Ecuación 2 (rayo2): $x + 3y = 5$ Cabe mencionar que al igual que la actividad anterior llegaron a la solución después de realizar las siguientes modificaciones: Rayo 1 parámetro “y”: (21,-4,4,4.5,5,6,4) Rayo 2 parámetro “y”: (4,3) Sobre los cuestionamientos *que le pasa al rayo 1 en el eje de las ordenadas al aumentar el

Se espera que el alumno con la ayuda de la tecnología visualice y comprenda que sucede con las ecuaciones lineales al modificar el parámetro de las (Y) y con esto el alumno pueda manipular el sistema de ecuaciones para que tenga una solución deseada.	parámetro “y” contestaron acertadamente que la recta bajo por el eje de las ordenadas a medida que dicho parámetro aumenta. *que le para al rayo1 en eje de las abscisas al modificar el parámetro “y” se contesta erróneamente al poner que se desplaza a la derecha.
--	--

Confrontación

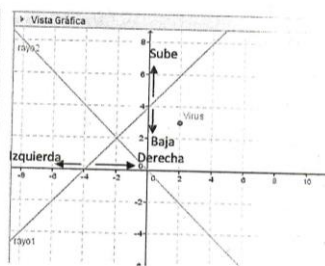
Se pudo apreciar que la alumna logro llegar al sistema solución como andaba prevista en las consideraciones previas. En el rayo uno se encontró con algunas dificultades al modificar el parámetro se inicio de manera aleatoria con los siguientes números 21,-4,4,4.5,5,6,3 cabe recalcar que en los intervalos de de 4 a 5 se utilizo numero decimales que a simple vista la recta no sufría ninguna modificación al ser mínimos la modificación de parámetros pero al introducir el numero 6 se percibió que la recta se alejo del punto solución por lo que después bajo el parámetro a 3 y así logro coincidir la recta con el punto solución logrando la predicción de la recta.



Que le pasa al "rayo 1" al aumentar los parámetros de las (Y) con respecto:

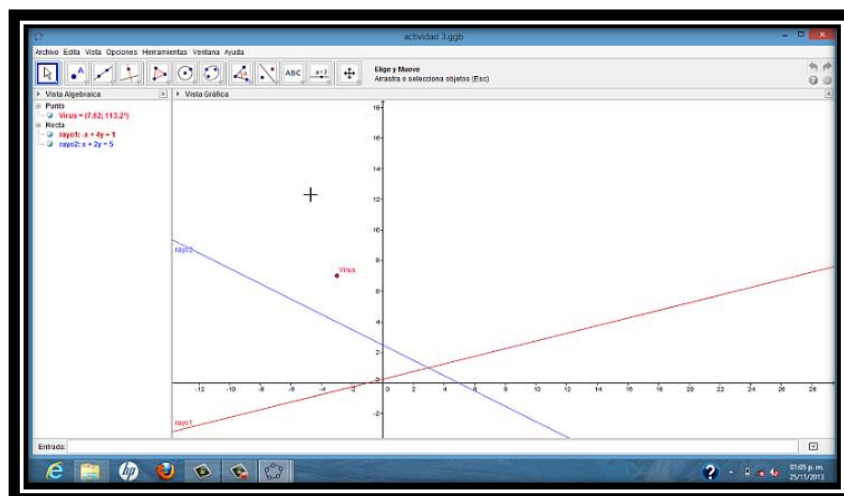
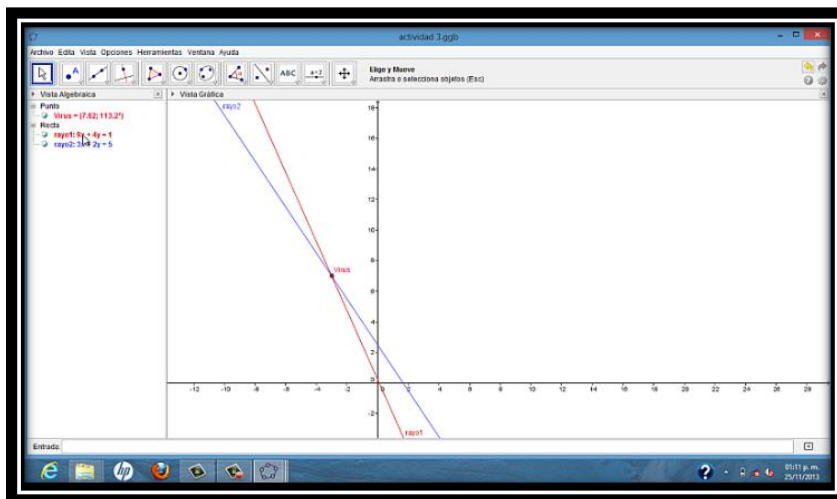
A. En el eje y (sube, baja, no se mueve): *baja.*

B. En el eje x (derecha o izquierda, no se mueve): *derecha.*



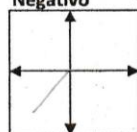
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 3	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide modificar los parámetros de las (X) en un sistema de ecuación lineal y que encuentren el sistema que satisface a la punto de solución establecido y <i>observar la relación que existe entre los ejes de las abscisas y ordenada con la ecuaciones lineal al modificar su parámetro (X).</i>	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
Conocimientos y habilidades: Manipular un sistema de ecuación lineal 2×2 para la satisfacción de una solución deseada conociendo el comportamiento de la misma, con la modificación del parámetro (X) Intención didáctica: Se continua con la lectura donde el alumno se imagina en el laboratorio farmacéutico el cual continua eliminando virus con los rayos laser, pero esta vez modificando el parámetro de las (X), se espera que responda las 3 preguntas sobre el nuevo sistema de ecuación lineal y el comportamiento des sistema al modificar el parámetro (X). Consideraciones previas: Se espera que el alumno con la ayuda de la tecnología visualice y comprenda que sucede con las ecuaciones lineales al modificar el parámetro de las (X) y con esto el alumno pueda manipular el sistema de ecuaciones para que tenga una solución deseada.	En esta actividad la dinámica fue similar al anterior, la modificación del parámetro “x” en ambas ecuaciones fue de manera aleatoria. Cabe mencionar al que modificar el parámetro “x” en la ecuación 1 por error se borro toda la ecuación pero se soluciono volviéndola a escribir después de que la ecuación 2 estuviera en el punto solución. En la ecuación 2 le acertaron de manera rápida al punto solución des pues de modificar su parámetros de x en “6, 5,3” para terminar con la ecuación $3x + 4y = 5$ que satisface al puntos solución (-1,4). En la ecuación 1 después de ser rescrita la ecuación empezaron a modificar el parámetro “x” con los siguientes números”- 4,4,3,7,7.5,6,10,9” para terminar con la ecuación $9x + 4y = 1$ que también satisface al punto solución (-1,4) que también satisface al punto solución En cuestión de las preguntas ¿Cómo es la recta cuando el parámetro x es negativo y como es cuando es positivo, se dibujo acertadamente
Confrontación	
En esta actividad la estudiante no tuvo mucha complicación ya que en el rayo 2. Modifico el parámetro con un numero aleatorio que fue “6” la recta se desplazo a la izquierda en el eje de las abscisas pasando por encima del punto solución por lo que después redujo al parámetro x en “5” y se acerco aun mas y con el numero “3” la recta paso por el virus. Con respecto a la ecuación 1	

donde la “x” era negativa, rápidamente empezaron a utilizar números positivos cambiando el parámetro “x” en “4” con esto el sentido de la pendiente giro con inclinación hacia la izquierda quedando la recta por debajo del punto solución, después se modifico a “3” cuyo la recta se alejo aun mas del punto solución, por lo que se percato que al disminuir el parámetros x esta se alejaría así que se inicio con valores mas grande como “7” que se acerco al punto solución después al “7.5” después al “10” en este momento la recta quedo por encima del punto solución por lo sé bajo al número “9” y con esto la recta paso por el punto solución. Por lo que podemos concluir que si se logro comprender que sucede cuando se modifica los parámetros de x en una recta y hacer de su manipulación más fácil y llegar al sistema deseado.

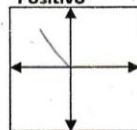


Dibuja la recta cuando el parámetro (X) es:

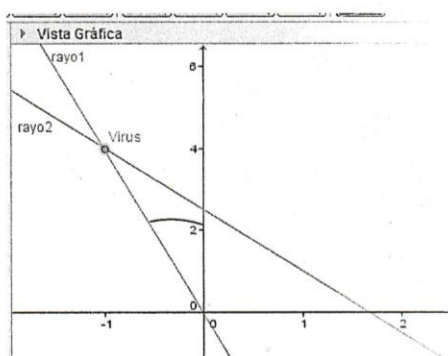
A. Negativo



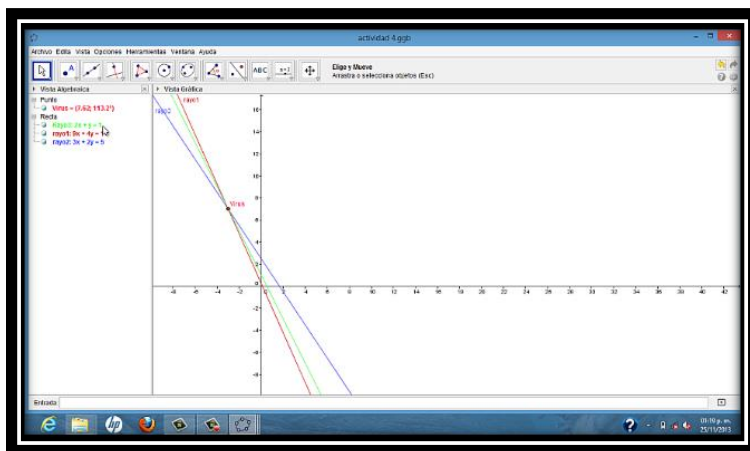
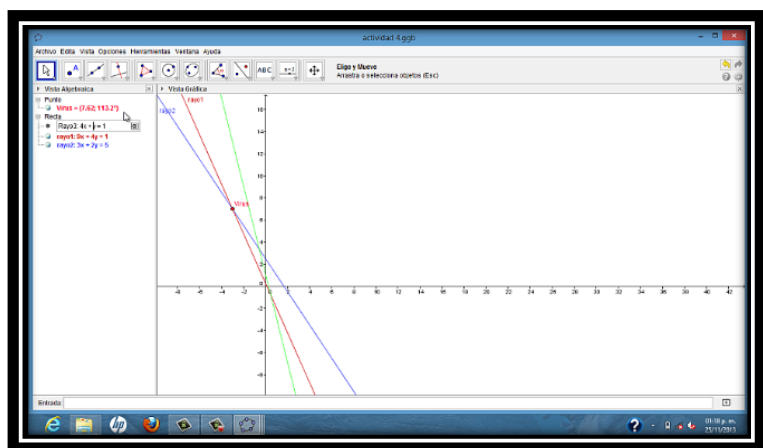
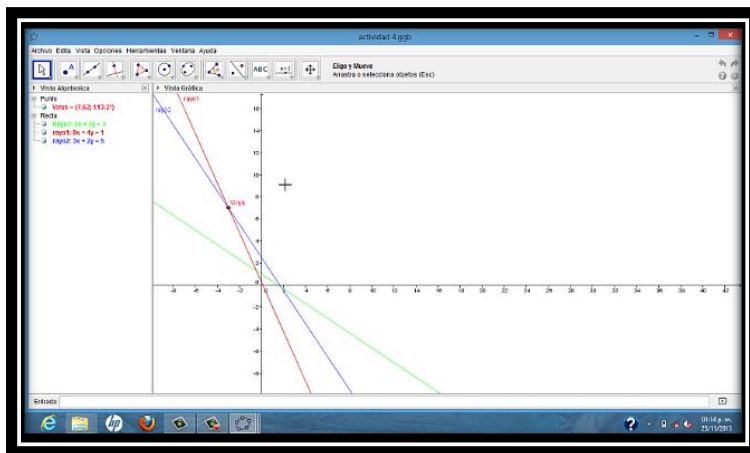
B. Positivo



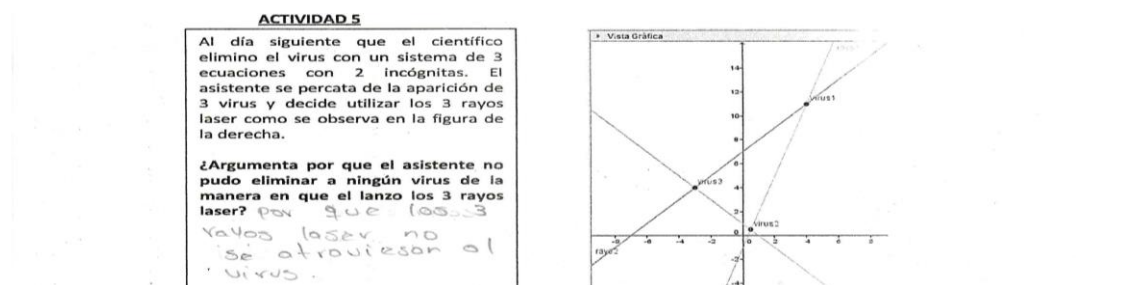
¿Cómo es el grado de inclinación cuando x aumenta, con respecto al eje y?



SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 4	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide al alumno modificar cualquiera de los parámetros de una ecuación lineal (X), (Y) y (K) y establecer un sistema de 3×2 que satisfagan a un punto deseado.	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS A POSTERIORI
Conocimientos y habilidades: Manipular completamente una ecuación lineal a través de la modificación de sus 3 parámetros (X) (Y) y (K) y trabajar el método gráfico con un sistema de ecuación de 3×2. Intención didáctica: Manipular una ecuación lineal con todos sus parámetros y formar una ecuación lineal de 3×2 que satisfagan a una solución específica. Consideraciones previas: Se espera que el alumno pueda conocer y manipular una ecuación lineal y llegue a conformar un sistema cuya solución sea una específica.	La alumna después de abrir el archivo de la actividad 4. Modificó únicamente los parámetros de la ecuación 3 (rayo 3). Al inicio puso todos los parámetros en unos es decir puso la ecuación $x+y=1$. Como no tocó el virus la siguiente modificación fue cambiar el valor de x a 7, después el valor x a 6 después x a 4 después y a 2 y por último realizó 2 modificaciones x a 2 y la de y a 1 Por lo que se acertó en el cuestionamiento de la actividad 4. Quedando como solución el siguiente sistema de ecuación lineal de 3×2 $9x+4y=1$ $3x+2y=5$ $2x+y=1$
Confrontación	
En esta actividad se esperaba que la alumna pudiera modificar una ecuación lineal (rayo 3) y llegar a la solución deseada. Lo que observamos en esta actividad es que pusieron los 3 parámetros "x", "y" y "k" en "1". Inició con el parámetro "x" al poner 7 la inclinación de la recta sobre pasó el punto solución por lo que intentó disminuir el mismo parámetro a 6 y 4. La disminución era mínima por lo que optó modificar el parámetro "y" a 2 y la ecuación se acercó por debajo del punto solución. Y por último modificó los parámetros "x" y "y" levemente dejándolos en "x" en 2 y "y" en 1. Por lo que concluimos que si tuvieron la predicción de las rectas al modificar los parámetros.	

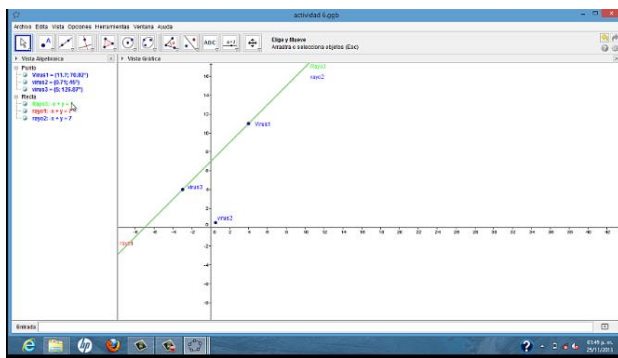
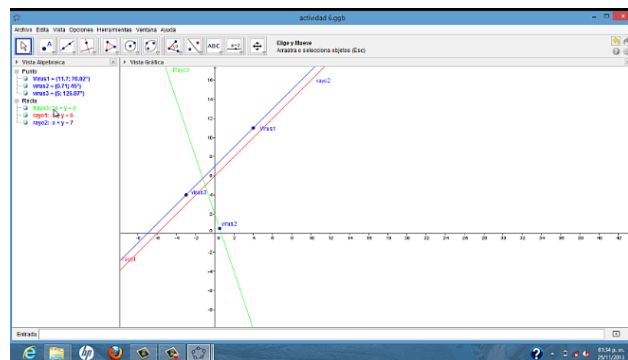
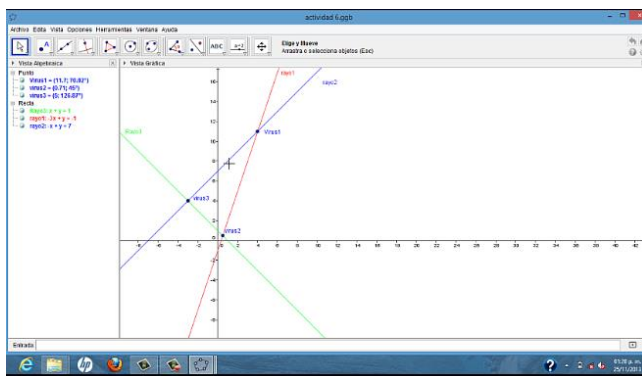


SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 5	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide observar un sistema de ecuación lineal de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas y argumentar por que dicho sistema no tiene solución.	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
Conocimientos y habilidades: Analizar un sistema de ecuación lineal de 3 ecuaciones con 2 incógnitas sin solución. Intención didáctica: Se le pide al alumno al alumno responder por que los virus no fueron eliminado en la forma en que el asistente lanzo los 3 rayos laser. Consideraciones previas: Se espera que el alumno pueda responder de manera acertada que dicho sistema de ecuación no tiene solución, para que tenga solución las 3 ecuaciones tiene que tener un punto en común.	En esta actividad la alumna respondió acradamente argumentando que no pudieron eliminar el virus por que se requería que los 3 rayos laser pasaran por el virus
Confrontación	
Con esta actividad se reafirmo que las se identifican un sistema de ecuaciones lineales sin solución ya que se argumento que para eliminar el virus los 3 rayos tiene que pasar por el virus haciendo énfasis que para que un sistema de ecuaciones lineales tenga una solución deben tener un punto en común en este caso sería el virus y solo 2 ecuaciones de 3 pasaba por ese punto reafirmando que dicha sistema no tiene solución.	

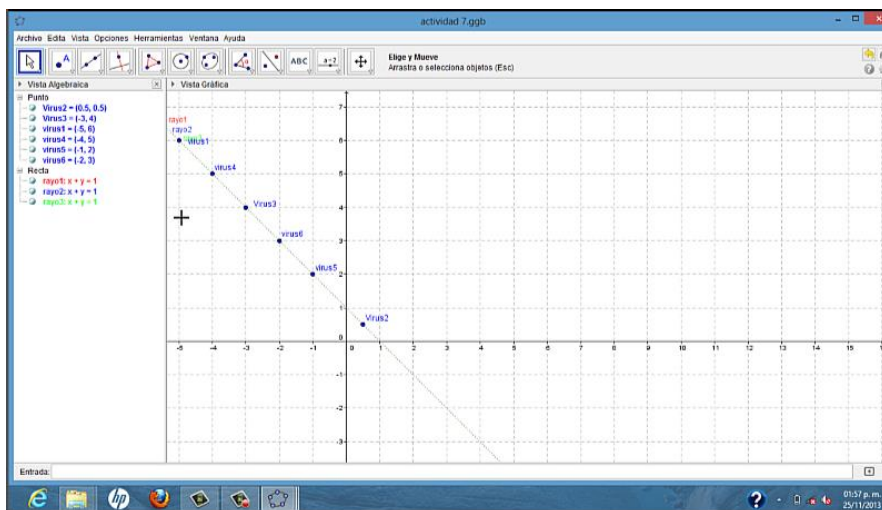
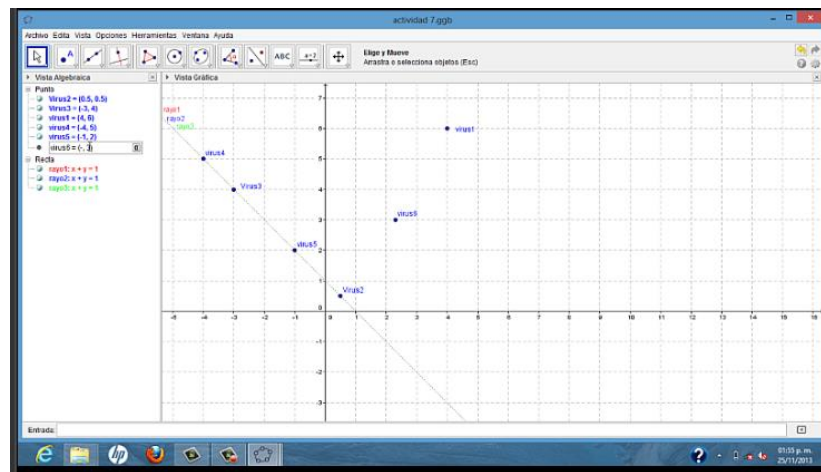
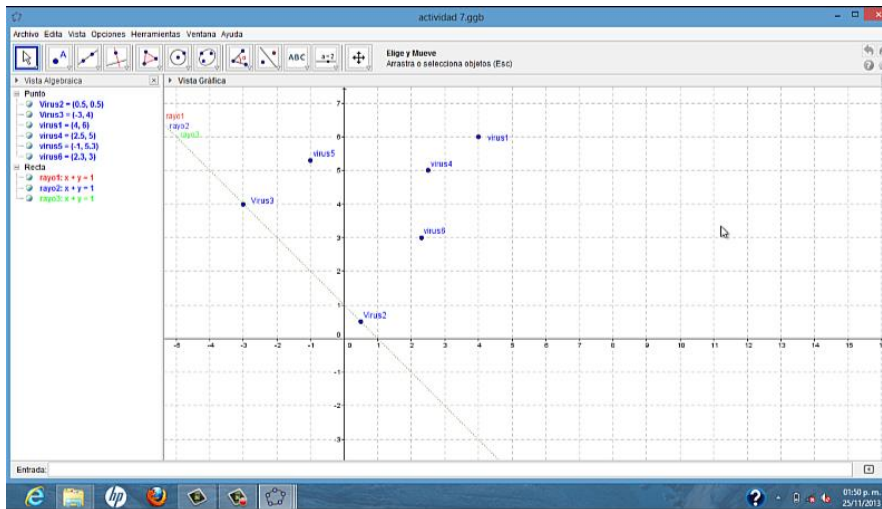


SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 6	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide al alumno que modifique los parámetros de las ecuaciones del sistema lineal 3×2 , con la intención que atravesase 2 puntos dados.	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
Conocimientos y habilidades: En esta actividad se pretende guiar al alumno, a un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones en la actividad 7 se concluye el inicio de esta actividad. Intención didáctica: Se le pide al alumno que modifiquen los parámetros de los rayos laser, y que se den cuenta que un sistema de ecuaciones lineales puede tener más de una solución. Consideraciones previas: Se espera que el alumno llegue a encontrar el sistema de ecuaciones lineales que satisfacen a 2 puntos específicos con la modificación de parámetros.	Continuando con la actividad la alumna Astrid empezó con la modificación del rayo 3 con el parámetro $k=-1$, posteriormente modifiko el rayo 1 con las siguientes variaciones $k=6$, $x=8$, $X=.2$, $x=-1$, $y=2$, $y=8$, $y=1$, $y=-1$, $y=1$. Regreso con el rayo 3. $K=2$ $x=3$ $x=5$ $x=-11$, $y=5$ continuo con el rayo 1: $x=9$, $x=11$, $x=-3$, $x=-5$. Después de varios intentos no logro coincidir ninguno de los 2 virus con los 3 rayos a excepción de rayo 2 la cual ya tenía a 2 virus en su trayectoria la cual no modifiko ningún parámetro, por lo que la alumna estaba optando en dejar inconclusa la actividad. Por lo que se le ayudo o con una reflexiono de cómo tenía que ser los rayos para que los 3 pasaran por los dos virus habiendo énfasis en los virus que coincidía con las del rayo 2
Confrontación	
En esta actividad se esperaba que la alumna dominara la predicción de la trayectoria de las ecuaciones con la modificación de parámetros. Se enfoco en la recta 2 con los virus 1 y 3 con lo que pretendía que las otras 2 rectas se encimaran arriba de esta para que el científico pudiera eliminar 2 virus. La cual inicio modificando la ecuación 3 con el parámetro k el cual solo se desplazó hacia abajo dejando los 2 virus fuera de la recta. Después se enfoco en la ecuación 1 con las modificación de parámetros "k" y "x". Al parámetro "k" se le puso el valor de 6 lo que aumento a la pendiente de la recta alejándose de los 2 virus. por lo que inicio con la modificación del parámetro "x" con los siguientes valores 8,5,-2,-1 cabe mencionar que con la modificación de "x" a -1 la recta 1 y 2 se volvieron paralelas a tener la siguiente sistema de ecuación de 2×2	

$-x + y = 6$
 $-x + y = 7$ hacemos énfasis en ese momento ya que fue lo más cercano de acertar en el sistema solución ya que solo tenía que cambiar el parámetro “k” de la ecuación 1 de “6” a “7” para que las dos rectas se encimaran y estuviera más cerca de la solución pero no fue así ya que continuo con la modificación del parámetro “y” de la misma ecuación observando que la manipulación de parámetros no le ayudo en predicción de los rayos. Antes de que abortara con la actividad se le hizo un cuestionamiento ¿cómo tiene que ser los rayos para que pasen en los puntos deseados (virus 1 y 3)? Su respuesta fue tiene que ser iguales por lo que inmediatamente modifiqué todos los parámetros de la ecuación 1 y 3 a los parámetros iguales a la ecuación 2. Por lo que llegué a la solución pero no con la ayuda de la modificación de parámetros.



SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 7	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide al estudiante responder cuantos virus puede eliminar el científico imaginando que los virus pueden ser manipulados en un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones.	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS APOSTERIORI
• Conocimientos y habilidades: En esta actividad el alumno identificara la única manera en que un sistema de ecuación lineal tiene infinitas soluciones. • Intención didáctica: Se le pide al alumno visualizar el sistema de 3 ecuaciones lineales “encimadas” y responder cuantos virus el científico puede eliminar si se reproducen de manera infinita. • Consideraciones previas: Se espera que el alumno responda que de manera en que fueron colocado los rayos laser las 3 ecuaciones lineales en forma “encimadas” puede eliminar infinitos virus.	En la penúltima actividad se inicio con la modificación del los puntos simulando el virus con los componentes (x, y) se inicio con la modificación del componente “y” teniendo de la siguiente manera virus 5: (-1,6), (-1,3) y (-1,2). Continuado con el virus 4 quedo de la siguiente forma: (2,6) (-4,6) el virus 6 fe de forma inmediato colocando (-2,3) el virus 1 también fue de forma inmediata modificando únicamente a (-5,4). Y sobre la pregunta de ¿cuántos virus se pueden eliminar y qué relación guarda con el sistema de las ecuaciones lineales? La respuesta fue de muchas veces
confrontación	
Analizando esta actividad nos pudimos percatar que al modificar los parámetros de un punto (x, y) la alumna predijo completamente donde se ubicaría los puntos. Puesto que al iniciar con el virus 5 (punto 5) se modifiko al parámetro “y” de 5 a 6 y el punto subió una unidad por el eje de las ordenadas por lo que empezó a disminuir a 3 y finalmente con 2, para que este virus estuviera sobre los 3 rayos laser. Continuando con el virus 4 la modificaciones fueron menos modifiko únicamente las x quedando (2,5) y luego las x quedando (-4,5) donde el virus se ponen en los 3 rayos laser. Continuando con el virus 6 modifiko inmediatamente al a la coordenada (-2,3) y el virus 1 a la coordenada (-5,6) quedando de esta menare todos los virus sobre los 3 rayos laser. Por lo que se reconoce que con esta actividad se logro la predicción de la ubicación de puntos modificando las coordenadas (x, y) y sobre la pregunte contesto acertadamente al decir que los 3 rayos laser al estar encimada puede eliminar una infinidad de virus.	



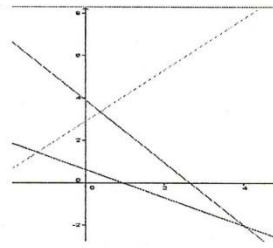
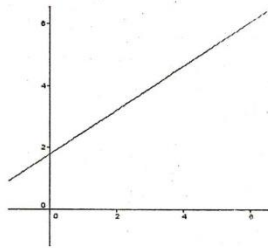
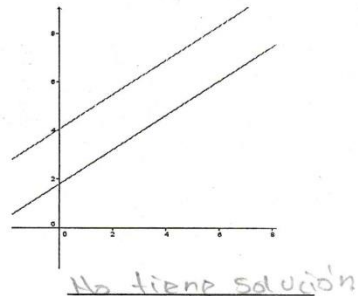
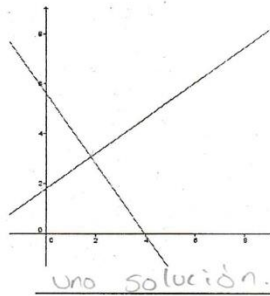
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
ACTIVIDAD 8	
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	
Se le pide al estudiante identificar de manera grafica. Que sistemas de ecuaciones tiene solución, cuales no tienen soluciones y cuales tienen infinitas soluciones.	
ANALISI A PRIORI	ANALISIS A POSTERIORI
Conocimientos y habilidades: Con lo visto en las actividades anteriores el alumno podrá visualizar de manera grafica los diferentes tipos de ecuaciones lineales de acuerdo a su solución. Intención didáctica: Se le pide al alumno identificar de manera grafica el tipo de solución que pertenece cada uno de los 6 sistemas de ecuaciones lineales dados. Consideraciones previas: Con lo aprendido en las actividades anteriores el alumno puede colocar que tipo de solución tiene cada grafica sin ningún problema.	En la última actividad la alumna ya estaba apresurada y aburrida por lo que contestó de manera rápida teniendo las siguientes respuestas: grafica 1: una solución grafica 2: no tiene solución grafica 3: una solución grafica 4: infinitas soluciones grafica 5: infinitas soluciones grafica 6: una solución
Confrontación	
En esta actividad respondió bien a las graficas 1, 2 y 6. Donde las graficas 1 y 6 SEL de 2×3 Y 3×3 cruzan por un solo punto contestando acertadamente que solo tiene una solución y la grafica 2 SEL de 2×3 donde los sistemas son de manera paralelos contestó acertadamente que no tiene solución ya que no cruzaron por ningún punto. En las graficas que no acertó fue en la grafica 3 donde eran 3 ecuaciones encimadas cuya respuesta fue que no tiene solución cabe mencionar que en la actividad 6 se le cuestionó que para que los 3 rayos pasaran por 2 puntos como tenían que hacer las ecuaciones por lo que contestó que iguales por lo que modifiqué las 3 ecuaciones con los mismos parámetros y respondió bien ya que de esa manera se puede eliminar mucho virus (solución infinita). La grafica 4 y 5 también contestó de manera errónea a ser una SEL 3×3 dos ecuaciones pasan por un mismo punto en 3 puntos diferentes por lo que un punto solo satisface a 2 de las 3 ecuaciones por lo que no tiene solución.	

ACTIVIDAD 8

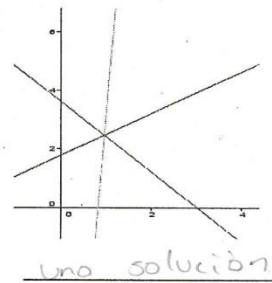
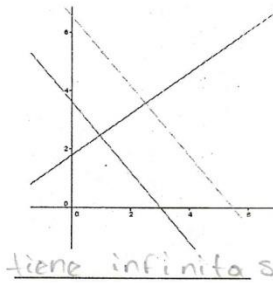
Como hemos confirmado en las actividades anteriores, un sistema de ecuaciones lineales solo puede caer en una de las siguientes categorías:

- a) No tiene solución
- b) Una solución
- c) Tiene infinita soluciones

Menciona cuantas soluciones tienen las siguientes graficas:



(Ecuaciones encimadas) una solución Tiene infinito soluciones



CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

5.1 Conclusiones Generales

Las conclusiones a las que hemos llegado con esta investigación en dar respuesta en parte a las preguntas de investigación que planteamos al inicio de este texto: ¿si la graficación y visualización pueden ser utilizados como una herramienta que permita la resignificación del método gráfico en los sistemas de ecuaciones lineales, apoyados en el uso de la tecnología?, ¿La visualización es una herramienta que nos permitiría construir argumentos sobre un sistema de ecuaciones y su posible solución? y ¿El uso de la tecnología favorece el aprendizaje significativo del concepto de sistema de ecuaciones lineales a partir de la variación de los parámetros de las ecuaciones del mismo?. Enseguida listamos las respuestas que hemos elaborado a partir de los resultados de investigación.

La graficación y visualización promueven la resignificación de conceptos matemáticos, de manera específica aquellos que tienen que ver con los sistemas de ecuaciones.

Los argumentos contruidos por los estudiantes, se basan en la variación de parámetros, los cuales permiten conceptualizar de manera adecuada a los sistemas de ecuaciones.

El uso de la tecnología favorece las repeticiones, lo anterior permite modificar los parámetros las veces que sea necesario, hasta llegar a lo que se les solicita.

La intención de este trabajo ha sido de mostrar cómo se puede hacer uso de las nuevas tecnologías dinámicas como es el GeoGebra donde el alumno pudo manipular los parámetros de un sistema de ecuación lineal para llegar a un punto solución privilegiando la visualización con la ayuda del programa Geogebra.

En capítulos anteriores mostramos la visualización y al lenguaje grafico como constructos teóricos de nuestra investigación. La visualización es una manera de conectarse con ideas mediante el sentido de la visión con el objetivo de estudiar, entender y emplear distintas maneras de resignificar los conceptos matemáticos.

La visualización acompañada con la tecnológica llegan a tener un desarrollo simbólico. Ya que una imagen puede ser un factor esencial para crear autoconocimiento con las evidencias visuales alcanzadas con un programas dinámico.

De acuerdo con el trabajo realizado por la estudiante observamos que en la mayoría de las actividades logro concluir al llegar al resultados pero no todas fueron como se esperaba (análisis a-priori), ya que en la mayoría su estrategia solución fue el método de “prueba y error” salvo en una actividad 7 donde observamos que logro la predicción de ubicar los puntos con la modificación de sus parámetros. Para lograr esto la estudiante visualizo y manipulo de buena manera la herramienta tecnológica proporcionada, por lo que estamos convencidos que con una mejor argumentación en las actividades se puede llegar a la predicción de las trayectorias de los sistemas de ecuaciones lineales.

En nuestra investigación proponemos una situación didáctica dentro del tema sistemas de ecuaciones lineales en un contexto sintético-geométrico propuesto por Sierpinska (2000, citada en Ochoviet, 2009) donde se propuso los SEL de forma grafica y la solución se llega con la visualización en la modificación de parámetros, logrando así que los estudiantes se apropien de un lenguaje grafico que les permita el tránsito entre contextos gráficos y algebraicos.

También vimos evidente que aun cando no había utilizado la programa Geogebra, no resulto ser un obstáculo para la resolución de sus actividades, por lo tanto, la matemática no debe de ver la tecnológica como un obstáculo en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Teniendo el programa Geogebra como una herramienta más para facilitar la visualización y generar procesos meta cognitivos en los estudiantes.

Como comentarios finales una de las aportaciones hechas por nuestra investigación da evidencia que a través de actividades involucrando el uso de la tecnología privilegiando la visualización podemos resinificar los sistemas de ecuaciones lineales con un contexto grafico apegado a la vida cotidiana y hacer del tema un poco más interesante y funcional en nuestra sociedad. Y por ultimo dejamos la posibilidad abierta para mejorar las actividades de esta investigación para enriquecer esta línea de investigación, cuyo objetivos consideramos haber cubiertos.

Bibliografía

- Andonegui, M. (2007). *Desarrollo del pensamiento matemático. Introducción al Algebra*. Caracas, Venezuela: Federación internacional de fe y alegría.
- Artigue, m. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática. La enseñanzade los principios del calculo: Problemas epistemologicos, cognitivos y didacticos*. Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Bell, E. (1985). *Historia de la matematica*. Mexico: Fondo de cultura economicá.
- Boyer, C. (2007). *Historia de la matematica*. Alianza.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemáticas, No. 19 (versión castellana 1993)*.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Biuenos Aires: Libros del Zorzal.
- Cantoral, R., & Montiel, G. (2003). *Visualización y Pensamiento Matemático*. Recuperado el 24 de Enero de 2013, de [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/\(Cantoral-Montiel2003\)-ALME16-.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(Cantoral-Montiel2003)-ALME16-.pdf)
- Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (2011). *En la vida diez, en la escuela cero*. Mexico, D.F: Siglo XXI Editores.
- Collette, J.-P. (1985). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.
- CONALITEG. (01 de julio de 2014). *Catalogo de Libros de Texto para Educacion Secundaria 2014-2015*. Recuperado el 01 de julio de 2014, de Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos: <http://libros.conaliteg.gob.mx/buscar.php>

- Cruz, E. (2008). *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el metodo de factorizacion en la solución de una ecuacion cuadratica*. CICATA-IPN, MEXICO.: Tesis de Maestria no Publicada.
- Cutz, B. (2005). *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuacion linea y su solucion*. CINVESTAV-IPN, MEXICO: Tesis de Maestria no Publicada.
- De Faria Campos, E. (2006). *Ingenieria Didáctica. Cuaderno de investigación y formacion en educación matemática*. Universidad de Costa Rica: Asociación de Matemática Educativa.
- Escareño, F. L. (2013). *Matemáticas 3*. Mexico, D.F.: Trillas.
- Estrada, C. J. (2013). *Planteamiento y resolucion de ecuaciones de primer grado de la forma $ax+b=cx+d$ a través de una secuencia didáctica*. Tuxtla Gutierrez, Chiapas, Mexico: Tesina no publicada.
- Fiorentini, D., Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). Contribución de volver a pensar...Algebraica Educación Primaria. *Pro-posiciones*, 78-91.
- Jean Piaget, R. G. (1982). *Psicogenesis e historia de la ciencia*. Mexico, D.F.: siglo veintiuno editores.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días*. Madrid: Aliaza Editorial, S.A.
- Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Cinvestav-IPN. MEXICO: Tesis de Doctorado.
- Luzardo, D., & Peña, A. (2006). *Algebra Lineal: con aplicaciones y latlab*. Recuperado el 03 de 04 de 2014, de <http://www.emis.de/journals/DM/vol14-2.htm>

- Montiel, G. (2008). *Naturaleza del Pensamiento Matemático. Notas de Clase*. México: CICATA.
- Mora, B. (2001). *Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. CINVESTAV-IPN, Mexico: Tesis de maestría no publicada.
- Ochoviet, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. CICATA-IPN, MEXICO: Tesis de doctorado no publicada.
- Orts, A. (2007). Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un estudio histórico. *SUMA* 56, 55-61.
- Pulpon, A. (Sin Referencia de Sin referencia de Sin referencia). *Historia del papiro de Rhind y similares*. Recuperado el 05 de Abril de 2014, de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf
- Ramírez, M. (1997). *El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas-verbales en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Cinvestav-INP, Mexico: Tesis de maestría no publicada.
- Rey, J. y. (1985). *Historia de las matemáticas*. Barcelona: Gedisa.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 57-66.
- Santillana Horizontes. (2012). *Matemáticas 2*. Mexico, D.F.: Santillana.
- Secretaría de Educación Pública. (2013). *programa de estudio bachillerato, Matemáticas 1*. MEXICO, DF: SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2013). *Programa de estudios de Bachillerato, Matemáticas 1*. MEXICO, D. F.

- Secretaría de Educación Pública. (2008). *Programa de estudio del Álgebra. Facultad de Ingeniería UNAM*. MEXICO, DF.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programa de estudio, Guía para el maestro (2011)*. Mexico, D.F.
- Secretaría de Educación Pública. (2011b). *Programa de estudio, Secundaria*. Mexico, DF.
- Segura, S. (Marzo de 2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*, 7(1), 49-78.
- SEP. (2011). *Programa de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. D.F.: Secretaría de Educación Pública.
- Terezinha Carraher, D. C. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. Mexico, DF: siglo veintiuno editores.
- Trigueros, M. L. (2012). *Matemáticas 2*. Mexico, D.F.: santillana.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2008). *Enseñanza del álgebra elemental una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Vergnaud, G. (2010). *El niño, las Matemáticas y la realidad*. México: Trillas.
- Zamar, A., Macoritto, A., Serrano, E., & Maduro, I. (2011). *Ecuaciones y funciones lineales y cuadráticas, sistema de ecuaciones*. Universidad Nacional de Salta: Facultad de ingeniería.

APÉNDICE

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON GEOGEBRA

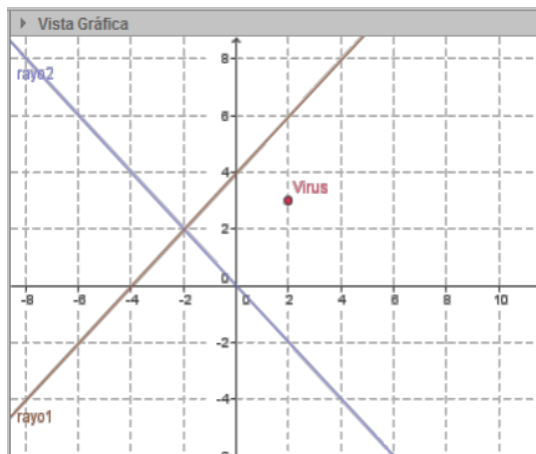
Nombre del alumno: _____ Grado: _____

Actividad 1

En el laboratorio farmacéutico Bayer S.A de C.V. Un científico se encuentra trabajando en el descubrimiento de un antídoto.

Inesperadamente el científico se percata de un virus en su experimento, y la única forma de eliminarlo es con la intersección de rayos laser.

*Ten sobre el escritorio la carpeta "secuencia didáctica"



El científico lanza 2 rayos laser, pero no logra hacer contacto con el virus.

En la parte izquierda se puede visualizar la vista grafica del sistema de ecuación lineal 2x2.

¿Cuál es el punto de intersección del sistema de los rayos laser?

Ayuda al científico a modificar la dirección de los rayos laser.

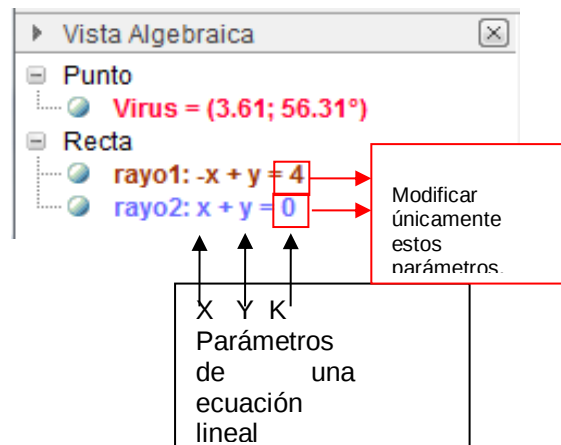
Abre archivo "actividad 1" de la carpeta "secuencia didáctica", en la parte derecha se visualiza el sistema de ecuación de manera algebraica.

Modifica la parte de las constantes (K) haciendo doble clic sobre la ecuación para direccionar la trayectoria de los rayos laser.

¿Cuál es el nuevo sistema de ecuación lineal que intersectan al virus?

Rayo1:

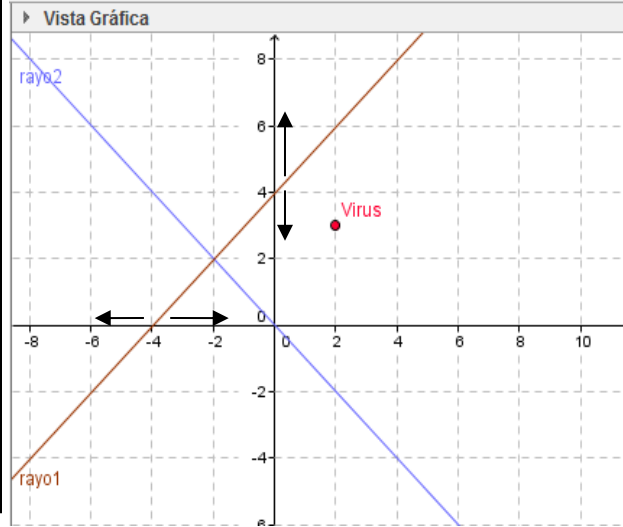
Rayo2:



Que le pasa al “rayo 1” al aumentar los parámetros de la constante (**K**) con respecto:

En el eje y (sube, baja, no se mueve):

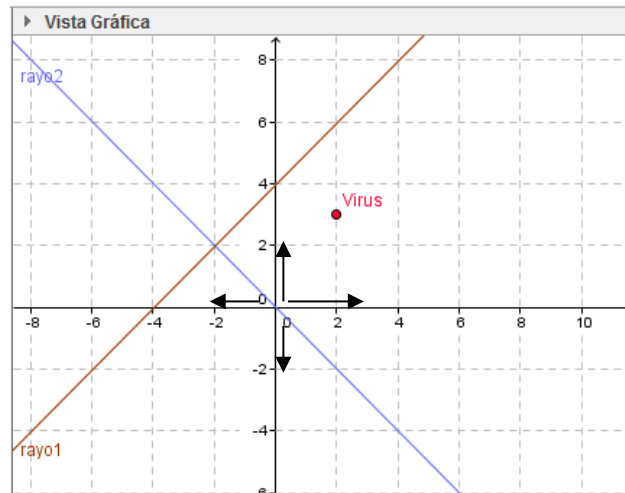
En el eje x (derecha o izquierda, no se mueve):



Que le pasa al “rayo 2” al aumentar los parámetros de la constante (**K**) con respecto:

A. En el eje y (sube, baja, no se mueve):

B. En el eje x (derecha, izquierda, no se mueve):



ACTIVIDAD 2

El virus resiste ser eliminado y cambia de ubicación, esta vez la computadora solo permite realizar modificaciones en los parámetros de las (Y).

Abre el archivo “actividad 2” de la carpeta “secuencia didáctica” Ayuda al científico modificando los parámetro de (Y) haciendo doble clic sobre la ecuación para modificar la dirección del rayo laser.

Vista Algebraica

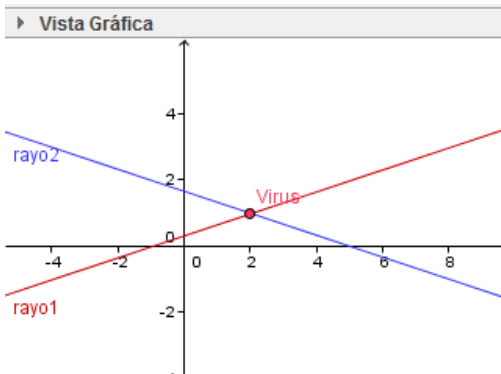
Punto
Virus = (2.24; 26.57°)

Recta
 rayo1: $-x + y = 1$
 rayo2: $x + y = 5$

Modificar únicamente estos parámetros ej: $2y$, $3y$, $-2y$, etc.

X Y K

Parámetros de una ecuación lineal



¿Cuál es el nuevo sistema de ecuación lineal que intersectan el punto donde se encuentra el virus?

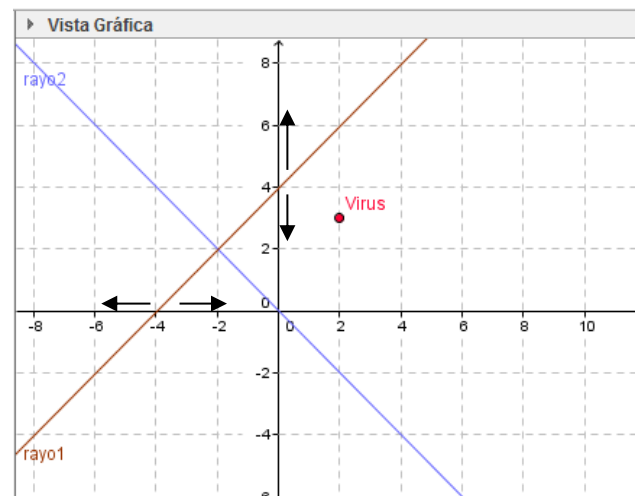
Rayo 1:

Rayo 2:

Que le pasa al “rayo 1” al aumentar los parámetros de las (Y) con respecto:

A. En el eje y (sube, baja, no se mueve):

B. En el eje x (derecha o izquierda, no se mueve):



ACTIVIDAD 3

El virus resiste a ser eliminado y cambia de ubicación, esta vez la computadora solo permite realizar modificaciones en los parámetros de las (X).

Abre el archivo “actividad 3” de la carpeta “secuencia didáctica”.

Ayuda al científico modificando los parámetros de (X) haciendo doble clic sobre la ecuación para modificar la dirección del rayo laser.

Vista Algebraica

Punto
... Virus = (7.62; 113.2°)

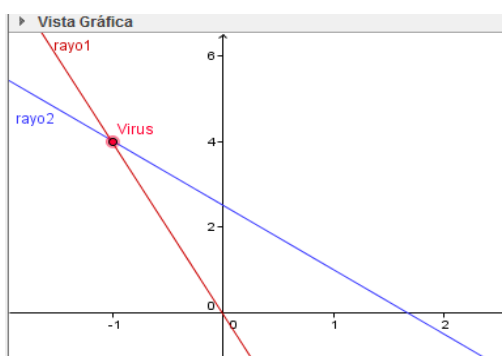
Recta
... rayo1: $-x + 4y = 1$
... rayo2: $x + 2y = 5$

Modificar únicamente estos parámetros ej: $2x$, $3x$, $-2x$, etc.

X Y K

↑ ↑ ↑

Parámetros de una ecuación lineal



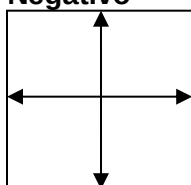
¿Cuál es el nuevo sistema de ecuación lineal que intersectan al virus?

Rayo1:

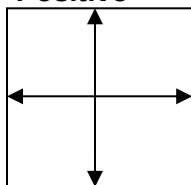
Rayo2:

Dibuja la recta cuando el parámetro (X) es:

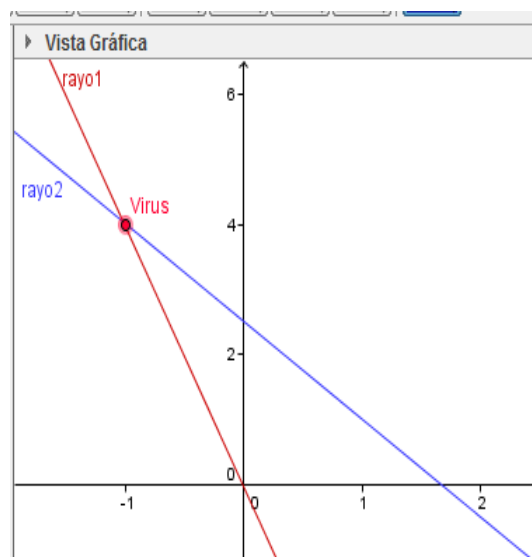
A. **Negativo**



B. **Positivo**



¿Cómo es el grado de inclinación cuando x aumenta, con respecto al eje y? _____



ACTIVIDAD 4

El científico estudia el virus y se percata que para eliminarlo completamente es necesario que un sistema de 3 rayos laser lo atraviesen.

Por lo que decide utilizar un tercer rayo.

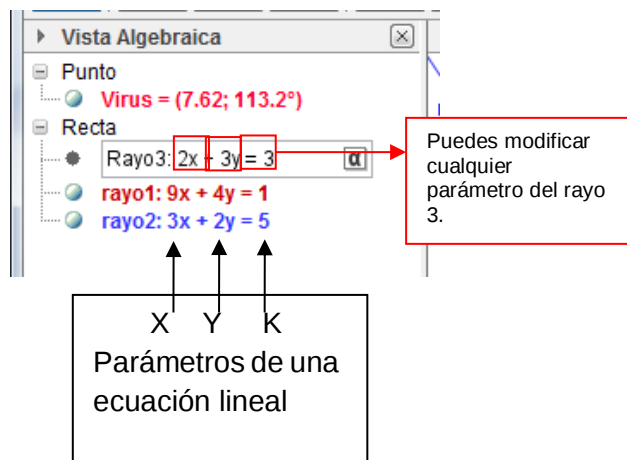
Abre el archivo “Actividad 4” de la carpeta “secuencia didáctica” y ayuda al científico a modificar cualquier parámetro del rayo 3.

¿Cuál es el nuevo sistema de ecuación que elimino completamente al virus?

Rayo1:

Rayo2:

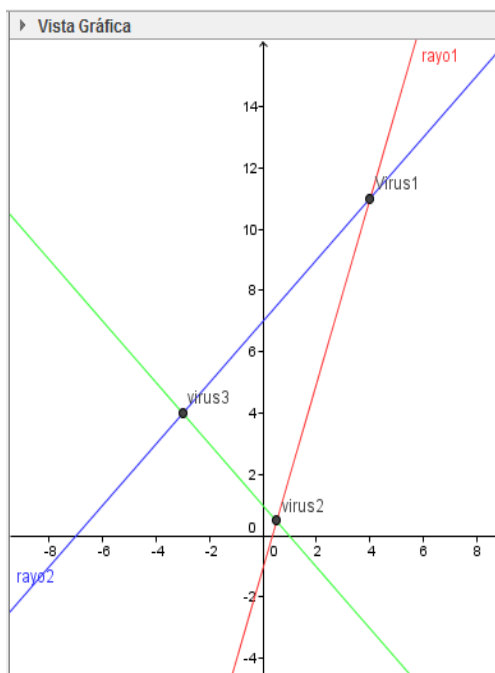
Rayo3:



ACTIVIDAD 5

Al día siguiente que el científico elimino el virus con un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. El asistente se percata de la aparición de 3 virus y decide utilizar los 3 rayos laser como se observa en la figura de la derecha.

¿Argumenta por que el asistente no pudo eliminar a ningún virus de la manera en que el lanzo los 3 rayos laser?



ACTIVIDAD 6

El científico decide eliminar 2 de los 3 virus que aparecieron para eso tiene que hacer que los 3 rayos laser pasen por 2 virus. Abre el archivo “actividad 6” y modifica los parámetros para que los 3 rayos laser pasen por 2 virus.

¿Cuál es el sistema de ecuación que elimina a 2 virus?

Rayo 1:

Puedes modificar cualquier parámetro de cualquier rayo

ACTIVIDAD 7

Una vez eliminado los virus 2 y 3, repentinamente aparecen 3 virus más y el científico logra descubrir las coordenadas de cada virus.

Abre el archivo “actividad 7”. Modifica las coordenadas de (X) y (Y) de cada virus para que puedan ser eliminado.

¿Cuáles son las coordenadas para que satisfagan a sistema de ecuación?

Virus 2: (.5, .5)

Virus 3: (4,6)

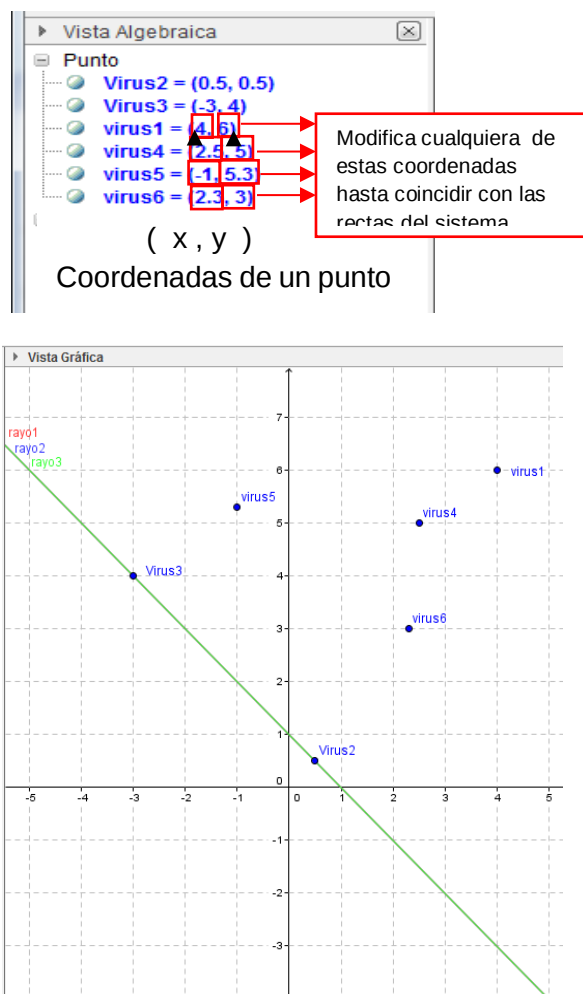
Virus 1:

Virus 4:

Virus 5:

Virus 6:

Imagínate que los virus se reproducen de manera infinita, ¿Cuántos virus puede el científico eliminar y qué relación guarda con el sistema de las ecuaciones lineales?_____

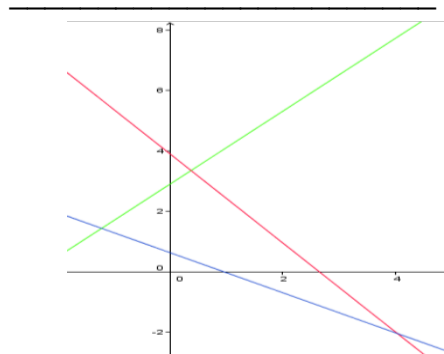
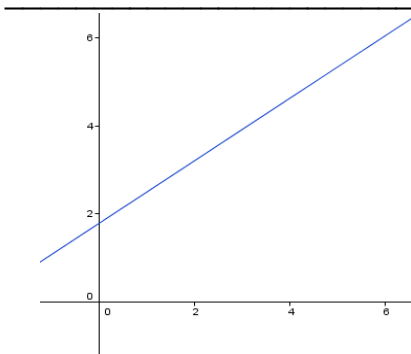
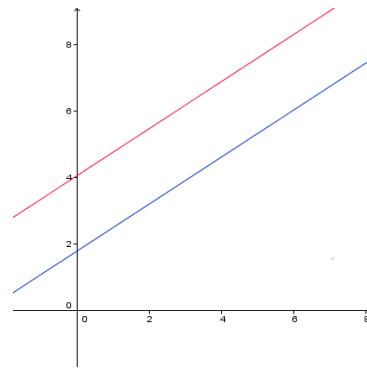
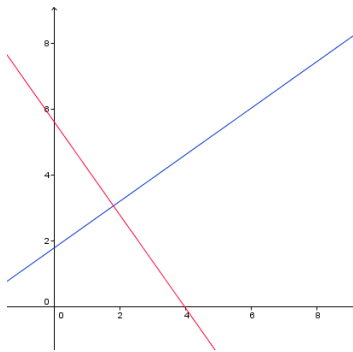


ACTIVIDAD 8

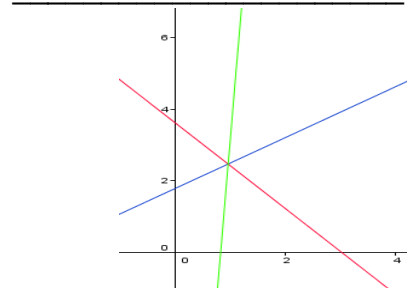
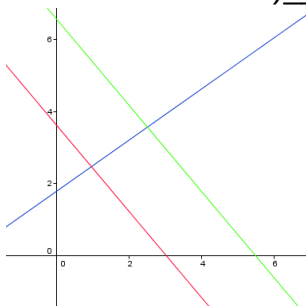
Como hemos confirmado en las actividades anteriores, un sistema de ecuaciones lineales solo puede caer en una de las siguientes categorías:

- a) *No tiene solución*
- b) *Una solución*
- c) *Tiene infinita soluciones*

En las siguientes graficas menciona a que categoría antes mencionada le corresponde



(Ecuaciones encimadas) _____



Puesta en escena



Figura 22 Astrid resolviendo actividades de la secuencia



Figura 23 Iris resolviendo actividades de la secuencia