UNIVERSIDAD AUTóNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE INGENIERíA
CAMPUS I

Diseño de una secuencia didáctica, para la resignificación de los máximos y mínimos relativos

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

por

JORGE ÁLVAREZ HERNÁNDEZ 12112001

Director

DR. MIGUEL SOLÍS ESQUINCA

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; noviembre de 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE INGENIERÍA C-I

Tuxtla Gutiérrez; Chiapas.
A 10 de enero del 2021
Oficio. FI. 01/030/2021.

Ing. Jorge Álvarez Hernández
Estudiante de la Maestría en Ciencias
con Especialidad en Matemática Educativa
(PEOGAP)
Presente.

Por este medio comunico a usted, que se autoriza la impresión de su trabajo de tesis denominado: "Diseño de una secuencia didáctica, para la resignificación de los máximos y mínimos relativos", para que pueda continuar con los trámites de titulación para la obtención del Grado de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.
"Por la conciencia de la necesidad de servir"

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

Dr. José Alonso Figueroa Gallegos
Encargado de Dirección

DIRECCIÓN DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA

C. c. p. Dra. Daisy Escobar Castillejos. Coordinadora de Investigación y Posgrado. - F.I.
Archivo Minutario.
DEC/aclr*

Tels. (961) 617-80-00 ext. 1560, (961) 615-03-22. www.ingenieria.unach.mx
Boulevard Belisario Domínguez, Km 1081, Sin Número. Terán Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. C.P. 29050. www.unach.mx

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
SECRETARÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE DESARROLLO BIBLIOTECARIO

Código: FO-113-09-05	
Revisión: 0	

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) Jorge Álvarez Hernández,
Autor (a) de la tesis bajo el título de "Diseño de una secuencia Didáctica para la Resignificación de los Máximos y Mínimos Relativos,"
presentada y aprobada en el año 2021 como requisito para obtener el título o grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa autorizo a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 12 días del mes de enero del año 2022.

Jorge Álvarez Hernández
Nombre y firma del Tesista o Tesistas

AGRADECIMIENTOS

A mis padres y hermanos.

Al Dr. Miguel Solís Esquinca.

A los profesores del programa de maestría:
Mtro. Cristóbal Cruz Ruiz
Dr. Hipólito Hernández Pérez
Dra. Alma Rosa Pérez Trujillo

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En esta investigación se presentan las ideas subyacentes a los conceptos de máximos y mínimos relativos. Los cuales por primera vez son tratados en el discurso matemático escolar del nivel medio superior como problemas de aplicación de la derivada, en la asignatura denominado cálculo diferencial. Pues numerosas investigaciones muestran la conceptualización limitada por parte de los estudiantes cuando se les pide argumentar sobre dichos conceptos, así mismo, varias investigaciones nos muestran que estos conceptos son puntos claves para representar de forma gráfica la derivada de una función o las derivadas sucesivas, pues la definición de derivada está construida desde el análisis de un punto de la función. Por ello es importante resignificar los conceptos en cuestión que impliquen un aprendizaje significativo para los estudiantes. De esta forma nos hemos planteado como objetivo de investigación diseñar una secuencia didáctica para estudiantes del nivel medio superior, que favorezca la resignificación de los conceptos máximos y mínimos relativos.

El desarrollo de esta investigación se realizó a través de la ingeniería didáctica como metodología de investigación el cual consta de cuatro fases: Análisis preliminar, diseño de la situación didáctica y su análisis *a priori*, experimentación y, el análisis *a posteriori* y validación. De los cuales solo se abordaron las dos primeras, debido al problema por la pandemia por coronavirus, que ha generado la suspensión de clases presenciales en el país. Lo que no permitió que podamos poner en escena la secuencia didáctica diseñada.

Durante la revisión histórica encontramos varias ideas intuitivas subyacentes a la idea de máximo y mínimo relativo, los cuales consideramos importantes para el diseño de la secuencia didáctica, para darle al estudiante la posibilidad de ser protagonista de la construcción del conocimiento, en este caso el concepto de máximo y mínimo relativo como problemas situacionales que motivan las estrategias o herramientas de análisis, desde lo intuitivo hasta lo sofisticado como es la derivada. Sin embargo, en este trabajo se ha planteado la resignificación de los conceptos de máximos y mínimos relativos sin el concepto de derivada, el cual es posible gracias a los trabajos de argumentación geométrica-analítica de las curvas realizadas por L´Hospital. Dichos argumentos permiten caracterizar los conceptos en cuestión, los cuales hemos adaptado en un contexto numérico variacional, ya que la historia nos muestra que la tabulación numérica es una de las representaciones semióticas que anteceden al rigor matemático.

Para el diseño de la secuencia didáctica también se retomó una de las estrategias variacionales del Pensamiento y Lenguaje Variacional: el de comparación y seriación que esperamos permita a los estudiantes comparar estados y finalmente pueda caracterizar los máximos y mínimos desde los argumentos de L´Hospital.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

1.1 Problemática

El cálculo a través de los siglos se ha venido perfeccionando por el interés de dar una mejor explicación a los conceptos matemáticos, desde una visión puramente científica, el cual ha logrado una sofisticación y abstracción de las ideas, lejos de una visión didáctica que permita a los estudiantes apropiarse de los conocimientos u objetos matemáticos de aprendizajes planteados en el currículo escolar. Así, en el discurso matemático escolar los temas de máximos y mínimos relativos son reducidos a problemas de aplicación de la derivada. En donde se privilegian los criterios de primera y segunda derivada como algoritmos que permiten determinar un valor extremo en una función. En este sentido la historiadora Grabiner (1983), menciona un claro ejemplo del alcance del cálculo abordado desde el rigor. El cual nos muestra un entendimiento superficial por parte de los estudiantes al explicar los valores extremos desde los criterios de primera y segunda derivada.

> Hace algunos años, mientras enseñaba historia de las matemáticas, pedí a mis alumnos que leyeran una discusión sobre máxima y mínima del matemático del siglo XVII, Pierre Fermat. Para comenzar la discusión, les pregunté: "¿Podrían definir un máximo relativo?" Me dijeron que era un lugar donde la derivada era cero. "Si es así", le pregunté, "¿cuál es la definición de un mínimo relativo?" Me dijeron, ese es un lugar donde la derivada es cero. "Bueno, en ese caso", le pregunté, "¿cuál es la diferencia entre un máximo y un mínimo?" Respondieron que en el caso de un máximo, la segunda derivada es negativa. (p. 195)

Lo anterior, nos muestra argumentos reducidos a la simple aplicación de los algoritmos, más allá de su significado y su esencia. Pues no son considerados problemas fundamentales que dieron origen al cálculo diferencial infinitesimal. Sin embargo, en Sarmiento (2008), se menciona a la optimización como uno de los cuatros problemas científicos y matemáticos que permitieron el desarrollo del cálculo:

- Encontrar la tangente a una curva en un punto.
- Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
- Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
- Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante. Recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período de tiempo conocido. (pp.46-47)

Por consiguiente el Centro de Estudios de Bachillerato 6/3 (CEBACH) “Profesor Eliseo Mellanes Castellanos” ubicado en la cabecera municipal de Tecpatán Mezcalapa, Chipas. No está exento de tal enseñanza tradicional fundada en el rigor matemático. En él se imparte la enseñanza del cálculo en los últimos semestres, dividido en dos materias: cálculo diferencial, que se imparte en el quinto semestre y cálculo integral que se imparte en el sexto semestre. Cabe aclarar que nuestro interés redunda en la primera materia (cálculo diferencial) y en específico los conceptos de máximos y mínimos relativos, como nuestro objeto de investigación. Debido que en el programa de estudio del cálculo diferencial de la institución antes mencionada, se puede observar la importancia de la enseñanza-aprendizaje de los máximos y mínimos, ya que aparecen como objetos de aprendizaje en el tercer bloque del programa.

Son introducidos dichos conceptos mediante problemas de optimización, a través de tablas y gráficas, sin la mínima intención de explorar ideas varacionales. En estas prácticas de tabulación-graficación es evidente determinar un máximo o un mínimo de forma visual, observando en la tabla la mayor o menor magnitud de la variable dependiente de la función y en la gráfica el punto más alto es un máximo y el punto más bajo es un mínimo, “el cual suele ser visto más como un recurso de comunicación visual, que como un recurso para la genuina construcción de conocimiento matemático” (Cantoral, 2013, p.21). El cual no provee de un aprendizaje significativo pues no se exploran las ideas de variación y cambio, el cual creemos necesario realizarlo ya que en una tabla numérica y en una gráfica se pueden explorar las ideas que subyacen implícitamente y obtener información de aquello que define su comportamiento. Por eso nos interesamos en un estudio de resignificación para lograr un aprendizaje significativo y un entendimiento del porque en un preciso punto es máximo o mínimo.

Posteriormente se propone calcular máximos y mínimos de funciones algebraicas, utilizando el criterio de la primera y segunda derivada; Sin embargo, es aquí, que las intuiciones iniciales sobre variación han quedado muy lejos, escondiéndose en ella el pensamiento variacional que llevo a establecer tal método. Dolores (2007) lo sitúa en un periodo denominado; consolidación de la derivada, donde este es considerado “como un concepto abstracto definido en términos del límite e inserto en una estructura coherente determinada por el rigor matemático” (p, 17). Métodos puramente algebraicos que no subestimamos, ya que es un leguaje que permitió la operatividad del cálculo como un lenguaje universal (diferencial e integral operaciones inversas). Sin embargo entendemos que tales métodos no son favorables cuando se pretende iniciar en el estudio del cálculo diferencial, más aun cuando se pretende trabajar con estudiantes del nivel medio superior.

En la presente investigación nos centramos en buscar las ideas que subyacen a los máximos y mínimos relativos, que puedan ser elementos para diseñar una secuencia didáctica que nos permita significar dichos conceptos matemáticos. En consecuencia nos planteamos las siguientes preguntas: ¿Cómo resignificar los conceptos de máximo y mínimo relativo? ¿Es imprescindible el concepto de derivada para resignificar los valores extremos de una función? Y ¿Cuáles son los significados que emergen en los estudiantes y como los argumentan?

1.2 Objetivos

A continuación describimos nuestro objetivo general y específico, para poder encauzar nuestra investigación hacia la búsqueda de información referente a ello y que nos sirvan como faros en el devenir de la investigación.

1.2.1 General

Diseñar una secuencia didáctica para estudiantes del nivel medio superior, que favorezca la resignificación de los conceptos máximos y mínimos relativo.

1.2.2 Específicos

- Realizar un recuento histórico sobre los máximos y mínimos relativos
- Revisar el programa de estudio del CEBACH y los libros que utilizan para la enseñanza aprendizaje de los valores extremos.
- Indagar como el pensamiento y lenguaje variacional puede intervenir en la secuencia didáctica

1.3 Estado del arte

En el marco de la disciplina de la matemática educativa, existe una gran cantidad de trabajos de investigación sobre la derivada que van desde la búsqueda de concepciones, errores que los estudiantes presentan, hasta propuestas y diseños didácticos. En este apartado revisaremos algunos de ellos que nos permitan organizar un estado del arte con respecto a los conceptos de máximos y mínimos.

Finalmente describiremos en el sub-apartado 1.4 como fundamentan las siguientes investigaciones a nuestro trabajo. Entre los más importantes, con relación a nuestra problemática son los siguientes:

1.3.1 Derivadas Sucesivas

Valero (2000), realizó una investigación que antes fue trabajado por González (1999), con el objetivo de comprobar, a través de la puesta en escena de una situación didáctica específica, de que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de una población de estudiantes del CBTis 164, sólo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas. Por el que retoma las interrogantes planteadas en el trabajo de González:

¿La noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes sólo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas?

¿Los estudiantes estarían en mejores condiciones de apropiarse de los procedimientos y de los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral cuando estén en condiciones de desarrollar estrategias variacionales tanto desde el punto de vista de su pensamiento como de las diversas formas que tome su representación?

En su trabajo Identifica las variables siguientes:

- Variable Independiente 1: Noción de derivada sucesiva.
- Variable Independiente 2: Tratamiento articulado entre la función y sus derivadas.
- Variable dependiente: Noción estable de derivada.

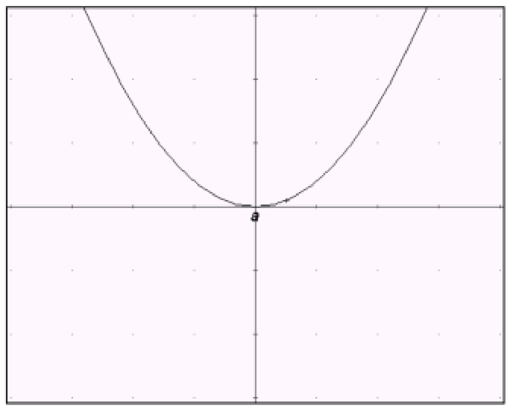
Hace mención que en el curso de Cálculo Diferencial, temas tales como razón de cambio, velocidad, aceleración, máximos y mínimos aparecen hasta el final del programa. Cuando estos en realidad son los fenómenos que capturan las distintas facetas de la naturaleza del concepto, es decir, estas nociones están directamente relacionadas con la noción de derivada, pues son propias de ella y no pueden separarse.

Previo a la aplicación de la secuencia didáctica de derivada sucesiva, realizó un curso preparatorio que contemplaba el abordaje del concepto de función, el concepto de derivada y de las derivadas sucesivas.

Introducción a la función derivada.
Tenemos la gráfica siguiente (figura 1). Queremos obtener una nueva gráfica a partir de la anterior que cumpla con los siguientes requisitos:

- Si la gráfica es creciente, la nueva tendrá valores positivos
- Si la gráfica es decreciente, la nueva tendrá valores negativos

Figura 1. *Gráfica de una función cuadrática*

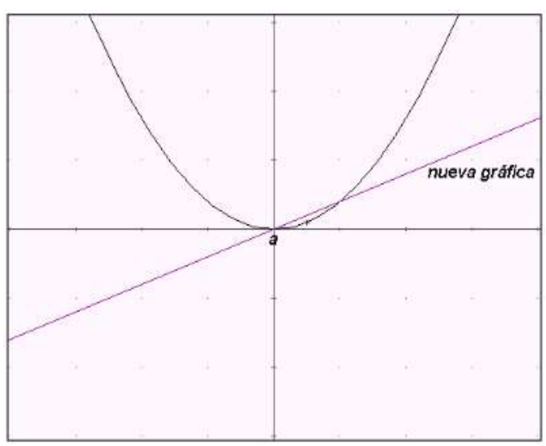


Nota. La figura muestra una gráfica decreciente y creciente. Fuente: Valero (2000).

Para la determinación de nuestra nueva gráfica nos conviene identificar los puntos más importantes de la gráfica de partida, sus puntos máximos, mínimos y puntos de inflexión.

La nueva función, cumpliendo con los dos requisitos establecidos inicialmente, podría quedar como sigue (figura 2):

Figura 2. *Gráfica de una función cuadrática y lineal*



Fuente: Valero (200).

De lo anterior, reitera que la introducción a la función derivada que se presentó a los estudiantes, fue básicamente gráfica y se expresó en términos de crecimientos y decrecimientos de una función no apareciendo el concepto de límite, ni el cociente diferencial, ni el concepto de pendiente de la tangente y, si bien se manejó el concepto de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo, éstos no se relacionaron en absoluto con la segunda derivada de la función.

La situación didáctica fue aplicada en una población de 20 estudiantes del CBTis 164 del área de ciencias físico-matemáticas. Del que como resultado expone que la estabilización de la noción de derivada solo pudo lograrse parcialmente ya que decidieron eliminar el problema de la tercera derivada el que, desde un principio, rebasó en mucho la capacidad de respuesta de la población, quienes con considerable esfuerzo pudieron enfrentar los problemas correspondientes a segunda derivada. El registro grafico dio buenos resultados, cuando se dispuso de una visión global de la función, no así en cuanto al análisis local. También los alumnos mostraron incapacidad al evaluar la derivada en un registro numérico y apareció el teorema factual como obstáculo. Por lo anterior refuerza el trabajo de González (1999), que la noción de derivada se construye sólo si se transita entre las variaciones sucesivas, es decir, cuando puede establecerse un uso simultáneo entre la función y sus derivadas.

Del mismo modo Cardona (2009), realiza un estudio basado en una situación didáctica de resignificación que con anterioridad se ha aplicado y reportado en los trabajos de Gonzáles (1999) y Valero (2000). Con el fin de probar si los resultados que se produjeron en esos estudios, pueden ser reproducidos al aplicar la misma actividad en un nuevo contexto (alumnos del sexto semestre de bachillerato) o bien con el objetivo de comprobar, a través de la puesta en escena de una situación didáctica específica, de que la noción de derivada se estabiliza en el estudiante, sólo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas consistentemente.

Afirma que su trabajo pertenece a la rama de situaciones didácticas de resignificación porque se trata a la derivada desde una perspectiva no tradicional, con el que se pretende, que el estudiante se apropie de la noción de derivada desde una perspectiva de las derivadas sucesivas, es decir, donde , por ejemplo, el registro gráfico es vital para darle otro significado a la derivada, donde las raíces de la primera derivada se vean como los máximos y/o mínimos relativos de la segunda derivada, además donde el papel de los crecimientos y/o decrecimientos de la función sean relacionados con los signos de su primera, segunda y n-ésima derivada, pudiendo ocurrir lo anterior en diferentes contextos de representación.

Igualmente hace mención que en un contexto gráfico, existen puntos clave (como los máximos, mínimos y de inflexión) que son útiles en la determinación de las relaciones entre la función y sus derivadas. Y que estos más la información de los crecimientos/decrecimientos relacionando a la función con los signos de la derivada, pueden aplicarse para la determinación de las derivadas de orden superior.

Unas de las aportaciones de su trabajo son el refinamiento de las definiciones de los términos siguientes:

- Estabilización de la noción de derivada.
- Aparición de la noción de derivada sucesiva.
- Tratamiento articulado entre la función y sus derivadas consistentemente.

Debido a que esos términos aparecen de forma implícita en las investigaciones de Gonzáles (1999) y Valero (2000), es decir, no se dice explícitamente en que consiste cada una de ellas. Por el que los define de la siguiente manera:

Estabilización de la noción de derivada. Se dice que la estabilización de la noción de derivada, como una organización de las derivadas sucesivas, se ha dado en una persona cuando ésta, al enfrentar un problema matemático, hace un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas *consistentemente*, sin importar el contexto de representación en que se le presente. Cuando el estudiante representa y manipula la función y sus derivadas como estrategia de solución, de manera *frecuente*, decimos que es *consistente.*

Aparición de la noción de derivada sucesiva. La noción de derivada sucesiva aparece en el estudiante en el momento que éste comprende que los crecimientos o decrecimientos de una función están ligados con los signos de las derivadas de orden superior, esto puede ocurrir en un contexto de representación cualquiera (numérico, gráfico, etc.).

Tratamiento articulado entre la función y sus derivadas. Cuando se habla de tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, puede que éste se presente de manera consistente, aunque esto no siempre sucede.

Con tratamiento articulado entre la función y sus derivadas quiero decir que, el estudiante tiene la capacidad para representar y manipular a una función particular y sus derivadas en diferentes contextos de representación (algebraico, numérico, verbal, gráfico, gestual, etc.) como medio o estrategia para la solución de problemas matemáticos. Una forma particular de manifestar esta capacidad se da cuando el estudiante identifica el signo de la derivada sucesiva en función del comportamiento creciente o decreciente de su antecesora, por ejemplo, si $f'(x) > 0$ corresponde a que $f(x)$ es creciente, si $f'(x) < 0$ es que $f(x)$ decrece, para la segunda derivada cuando es positiva se tienen que $f'(x)$ crece y si la segunda derivada es negativa es que $f'(x)$ decrece, para el caso de $f'''(x) > 0$ se da que $f''(x)$ es creciente, y viceversa si $f'''(x) < 0$ se tiene $f''(x)$ decreciente.

Cuando el estudiante emplea esta representación y manipulación de la función y sus derivadas como estrategia de solución, de manera frecuente, es entonces que podemos hablar de consistencia. Entonces decimos que se trata de un tratamiento articulado *consistente* entre la función y sus derivadas.

Dentro de la recién mencionada definición de tratamiento articulado se menciona el concepto de problema matemático. El ejercicio matemático se caracteriza por hacer uso de algoritmos, mnemotecnias, y fórmulas preestablecidas (como, $y = kx$ el resultado es k). El problema matemático quiero expresar que no hay algoritmos directos para resolverlo y la solución no es tan directa como en el ejercicio matemático. Para el problema matemático el estudiante debe crear sus estrategias de solución en función de su conocimiento matemático.

Los términos anteriores definidos por él autor, los utiliza como una especie de lentes para el análisis de los resultados que se han obtenido de manera empírica. También, describe los diferentes contextos de representación que los alumnos pudieran utilizar para argumentar sus resultados durante la puesta en escena. Los siguientes:

Gráfico: Cuando el estudiante realiza dibujos, esbozos de la función y sus derivadas, expresando aspectos de la relación entre los signos de las derivadas sucesivas y de *f*, por ejemplo, puede expresar con un signo + donde la derivada es positiva, o por el contrario con un signo – donde la derivada es negativa. Además hace uso de algunas relaciones como: los extremos relativos y el punto de inflexión de la función con los ceros y máximos o mínimos de la derivada, esto se puede extrapolar a las derivadas de órdenes mayores a 1.

Verbal: Se da cuando el estudiante se expresa mediante palabras en términos de crecimientos/ decrecimientos de la función y los signos de las derivadas primera, segunda, tercera, n-ésimas y algunos puntos clave, por ejemplo los ceros de la primera derivada son máximos o mínimos de *f*, también se puede tratar de diferenciar entre tipos de crecimientos de funciones. El estudiante se puede apoyar de gráficos para extraer la información que relacione *f* y sus derivadas.

Algebraico: quiero decir que el estudiante presenta fórmulas matemáticas *f(x)* para dar solución de los problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando el estudiante obtiene alguna derivada y la expresa de la forma *f´(x)*, *f ´´*(*x)*, etc.

Gestual: Cuando el estudiante hace uso de ademanes o movimientos corporales como forma de comunicación de un saber matemático, por ejemplo para describir la forma una parábola en el aire, otro ejemplo sería hacer uso de los dedos para esbozar en alguna superficie la curva y encontrar un punto dado.

Numérico: Hace referencia a la utilización de números y sus operaciones para dar respuesta a los problemas matemáticos, aquí pueden hacerse uso de tabulaciones, cálculos aritméticos, etc.

El resultado de la comprobación experimental es que sólo en ocasiones se llega al tratamiento articulado por parte del estudiante Y, para dos estudiantes W y Z a lo sumo se llega a la aparición de la noción de derivada sucesiva, y por último en el estudiante X no aparece la noción de derivada sucesiva, también se presentan algunos obstáculos que probablemente no dejan acceder a la estabilización de la derivada.

Castañeda (2004), presenta un análisis socioepistemológico al proceso de formulación del discurso didáctico de la idea de punto de inflexión. El cual tiene sus antecedentes en los trabajos de Valero, (2000); González, (1999) en los que se manifiesta la importancia del estudio de la derivada, a través de situaciones que favorezcan un tránsito entre los distintos órdenes. En tal sentido declara que el punto de inflexión se convierte en un objeto organizador de este tránsito, al igual que otras ideas matemáticas como las de máximo y mínimo.

En su investigación incorpora un estudio de la didáctica de antaño, recuperando la información matemática de los primeros libros de texto (para difusión del saber). Por ello el autor examina el tratamiento del punto de inflexión a través del análisis de tres referentes documentales, publicados en distintos lugares y distintas épocas, a fin de identificar los usos de este conocimiento, las características que le definen y otorgan identidad así como los procedimientos de difusión que utilizan los autores para compartir esta idea a un colectivo más amplio.

Como fuente primaria, menciona los trabajos del Marqués de L'Hospital y de María de Agnesi; publicados en 1696 y 1748 respectivamente. Estas obras, lo considera como la génesis de los libros modernos de cálculo debido a su intencionalidad didáctica y a la incorporación de estrategias para movilizar al lector durante la lectura. Menciona también que son los primeros que plantearon un tratamiento de la matemática desde la perspectiva de quien quiere estudiar por primera vez este campo de saber y necesita un documento organizado.

Castañeda (2004), realiza el análisis epistemológico a la obra *Analyse des infiniment petits* del Marqués de L'Hospital, publicada en 1696 y expone que L'Hospital organizó su libro en capítulos de tal forma que las ideas aparecieran presentadas de una manera progresiva.

- *I. Donde se dan las reglas del cálculo de las diferencias*
- *II. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las tangentes de todos los tipos de líneas curvas.*
- *III. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y las menores, a lo que se reducen los problemas De Maximis & minimis*
- *IV. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de inflexión y de retorno.*
- *V. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las evolutas*
- *VI. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las causticas por reflexión*
- *VII. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las causticas por refracción*
- *VIII. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las líneas curvas que tocan una infinidad de líneas de posición dada rectas o curvas.*
- *IX. Solución de algunos problemas que dependen de los métodos anteriores*
- *X. Nueva manera de servirse del cálculo de las diferencias en las curvas geométricas, donde se deduce el método de los Sres. Descartes y Hudde.*

De lo anterior se puede apreciar en el tercer capítulo de la obra de L'Hospital, que trata sobre los máximos y mínimos. El cual hemos retomado para nuestra investigación y lo mencionaremos en el apartado “sobre la componente histórica-epistemológica” del presente trabajo.

1.3.2 La Variación de la Subtangente con Tecnología

Pérez (2008), realizó un trabajo de investigación con el objetivo de proponer una vinculación entre las investigaciones socioepistemológicas sobre el Cálculo y Precálculo de los últimos tiempos y el quehacer cotidiano del profesor, favoreciendo el uso inteligente de la tecnología. Con el fin de dar respuesta a los objetivos que se plantean para los estudiantes de Cálculo de nivel medio y superior.

Por consiguiente, propone un conjunto de diseños didácticos que promuevan la Resignificación de distintos tópicos matemáticos provenientes del Cálculo y Precálculo, a través del uso inteligente de la tecnología, tomando en cuenta investigaciones de corte socioepistemológico.
Los siguientes:

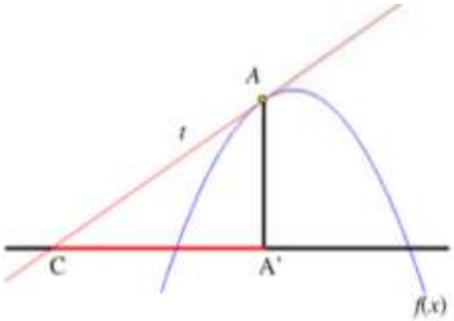
1. Comportamiento de las curvas a través de la subtangente.
2. Área bajo la curva.
3. La visualización en los criterios de semejanza.

De lo anterior nos interesa el primer diseño, debido que en ello se trabajan los conceptos de máximo y mínimo. Conceptos centrales de nuestra investigación. El primer diseño lo construyó con base en la caracterización geométrica-analítica de las curvas analizadas por L´Hospital y Agnesi, que fue descrita por Castañeda (2004a) en la que la variación de la ordenada determina un cambio de magnitud en la subtangente. Utilizando el pizarrón y software matemático (Cabri Geometre o Geometer´s Sketchpad) como herramientas tecnológicas. Con el que pretende que el Cálculo se vea como aquello que estudia los fenómenos de variación y cambio. Por ello propone el establecimiento de un vínculo entre la magnitud de la subtangente y el comportamiento de las curvas dadas. Es decir, pretende caracterizar un máximo, mínimo o punto de inflexión de una función a través la variación de la subtangente. Propone también que la variación de la abscisa determina nuevas magnitudes de las subtangentes. Esta relación puede expresarse a través de una relación funcional en la que la idea de máximo o mínimo aporta elementos para la caracterización del punto de inflexión.

A continuación mencionamos una parte del diseño didáctico, ya que hacen alusión al aprendizaje de los máximos y mínimos.

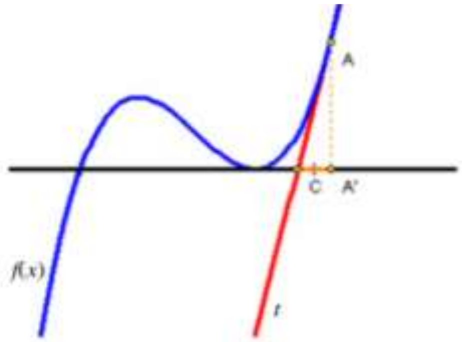
Subtangente: En la siguientes gráficas (figura 3 y 4) se puede observar un trozo de una curva llamada f(x), además de una tangente t a la curva f(x) en el punto A. Llamamos subtangente en A, al segmento CA’.

Figura 3. *Trazo de la Subtangente a una Curva de Segundo grado*



Fuente: Pérez (2008).

Figura 4. *Trazo de la Subtangente a una Curva de Tercer Grado*

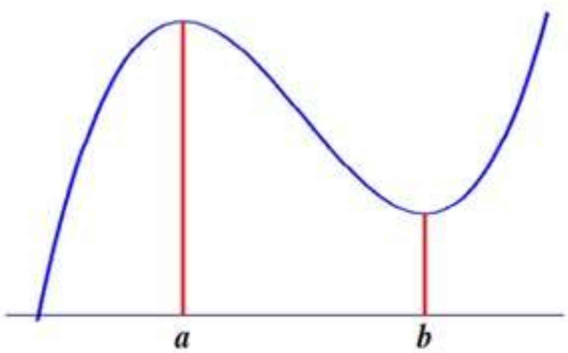


Fuente: Pérez (2008)

Pregunta 3.- Describe qué está pasando en la curva cuándo el valor de la subtangente es el más grande.

Pregunta 8.- Cómo es el valor de la subtangente en *a* y *b* de la siguiente curva (figura 5).

Figura 5. *Ordenada Máxima y Mínima en una Curva de Tercer Grado*



Fuente: Pérez (2008).

Pregunta 9.- Analiza el siguiente enunciado, argumentando su validez a partir de las reflexiones anteriores. "En esta gráfica existe un punto donde se cumple que la subtangente es la mayor o menor magnitud de entre todas las subtangentes posibles".

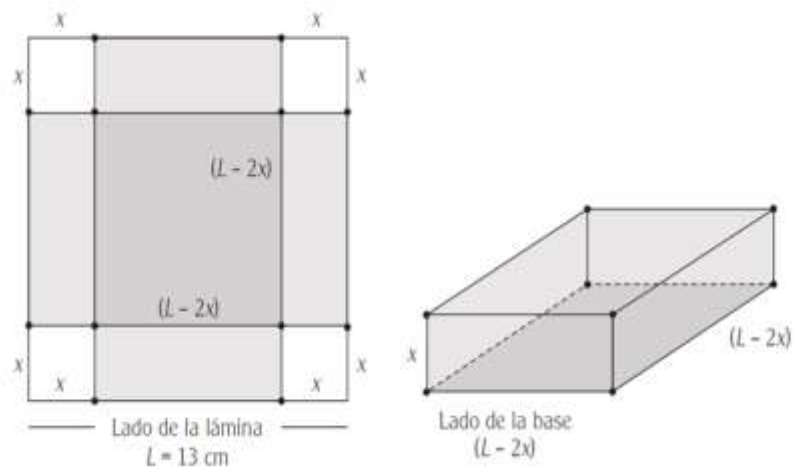
1.3.3 Interpretaciones Erróneas Sobre Máximos y Mínimos

Moreno y Cuevas (2004). Presentan un estudio exploratorio, en el que realizaron diversas mediciones con estudiantes de maestría y de ingeniería, y también con profesores de los niveles medio superior y superior. Con el propósito de mostrar que, debido a una interpretación errónea que los estudiantes hacen sobre el tema de máximos y mínimos, cuando se les propone resolver problemas no rutinarios proporcionan respuestas inverosímiles; es decir, respuestas que contradicen la solución intuitiva del problema planteado e imposibles de llevar a cabo.

Por el que se diseñaron problemas, a fin de detectar dificultades que los estudiantes tienen sobre la comprensión de los conceptos de máximos y mínimos. En el primer problema la función que modelará la situación planteada posee un máximo que se localiza en un punto crítico y cuyo máximo es posible calcular mediante el criterio de la segunda derivada. En el segundo problema, la función tiene un máximo que se ubica en un extremo de su dominio de definición, en donde el criterio de la segunda derivada no operará.

Problema 1
Determinar las dimensiones de los cuadrados de las esquinas que se deben cortar de una lámina cuadrada de 13 cm de lado para construir una caja de base cuadrada sin tapa, que tenga volumen máximo (véase la figura 6).

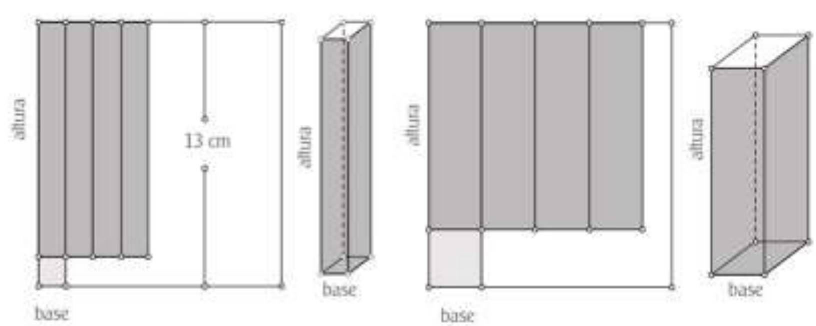
Figura 6. *Caja que se Construye con la Lámina de la Izquierda*



Fuente: Moreno y Cuevas (2004).

Problema 2
Determinar el volumen máximo que se puede obtener al construir una caja de base cuadrada sin tapa, con una lámina cuadrada de 13 cm de lado, donde la base esté formada por una esquina de la lámina (véase la figura 7).

Figura 7. *Construcción de una Caja*



Fuente: Moreno y Cuevas (2004).

Para resolver este problema se les proporcionó una hoja de actividades con los siguientes apartados:

1) Simbolice las variables que intervienen en el problema.
2) Plantee la función volumen.
3) Determine el dominio de la función volumen.
4) Elabore una tabla de valores para *x* y *V* (*x*) (tabulación).
5) Con los valores de la tabla, elabore una gráfica de la función volumen.
6) Dé la interpretación de la tabla y de la gráfica, proporcione un valor aproximado para el volumen máximo.
7) Resuelva el problema mediante el cálculo diferencial.

Concluye que los resultados obtenidos ponen de manifiesto una interpretación errónea de los conceptos de máximos y mínimos, al aplicar el criterio de la segunda derivada sin reflexionar en la solución obtenida y al no considerar como información relevante que el dominio de la función es cerrado, cuestión importante al definir los máximos y mínimos de una función continua, acotada y diferenciable en su dominio. Ya que la mayoría, tanto de profesores como de estudiantes, consideran que el máximo o mínimo de una función sólo se puede encontrar a través del criterio de la segunda derivada; de no ser posible la aplicación de este criterio, entonces concluyen, erróneamente, que el problema no tiene solución o que la función no tiene máximo.

1.3.4 Intuición Optimizadora

Malaspina (2008). Realizó una investigación sobre la intuición y el rigor en las matemáticas; en particular en la resolución de problemas de optimización. Investigación con aporte teórico y práctico; en lo teórico hace un estudio sobre la intuición, en específico sobre lo que él llama intuición optimizadora; y respecto a lo práctico, hace propuestas concretas con fundamento matemático y didáctico para la inclusión de problemas de optimización en la educación básica, de modo que desde la niñez se estimule una intuición optimizadora sin descuidar el rigor, como parte de una formación científica integral.

Por ello aclara que un *problema de optimización* es todo problema en el cual el objetivo fundamental es obtener un valor máximo o un valor mínimo de alguna variable. Lo anterior desde un nivel intuitivo y muy general de referencia a los problemas de optimización, ya que explica que la optimización está muy presente en la vida cotidiana, en la naturaleza, en la tecnología, en las ciencias naturales, en las ciencias sociales y obviamente en la matemática misma. Es decir entonces que él ve lo óptimo no solo en la matemática.

Concibe a la intuición optimizadora como un proceso cognitivo que permite comprender una situación-problema de búsqueda de lo óptimo entre alternativas explícitas o implícitas; o que permite obtener una solución óptima, o próxima a ella, sin el apoyo manifiesto de recursos formales.

Por ello expone que hay razones para suponer que existe y que esta tiene su origen, básicamente, en dos tipos de experiencias cotidianas:

El primer tipo de experiencias tiene que ver con el hecho de que en la vida cotidiana, con frecuencia estamos afrontando muchos problemas de optimización; por ejemplo, buscamos el mejor camino para ir de un lugar a otro, (no necesariamente el más corto), tratamos de hacer la mejor elección al hacer una compra, buscamos la mejor ubicación cuando vamos a un cine o a un teatro, tratamos de enseñar lo mejor posible, escogemos al mejor candidato (o al menos malo) en una elección. Evidentemente, en ninguno de estos casos usamos matemática formalizada para encontrar lo que nos proponemos, pues afrontamos los problemas con los criterios que nos dan la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente encontremos la solución óptima. Este tipo de situaciones conllevan una racionalidad optimizadora que busca encontrar la mejor solución a la situación. Este tipo de experiencias está relacionado con expresiones populares como la ley del mínimo esfuerzo.

El segundo tipo de experiencias están relacionadas con el hecho de que somos sujetos que experimentamos sobre nosotros mismos cómo, con el paso del tiempo, ciertas características vitales (por ejemplo, la fortaleza física, la salud, etc.) van variando y pasan por momentos críticos (máximos o mínimos).

1.4 Orientación de Nuestra Investigación.

En este apartado describimos como las investigaciones antes descritas contribuyen a nuestra investigación además que nos permiten ver la dirección que debe tomar el presente trabajo.

González (1999), Valero (2000), Cardona (2009) y Castañeda (2004). Estos investigadores realizaron sus investigaciones bajo la tesis formulada dentro del programa de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional, orientada a la didáctica del cálculo la cual sostiene que *la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva.*

En Valero (2000) y Cardona (2009) se menciona que antes de poner en escena la secuencia didáctica sobre derivadas sucesivas, realizó un curso introductorio a la función derivada, para que los alumnos pudieran afrontar la secuencia propuesta. En el que indica que si tenemos una gráfica y queremos obtener una nueva gráfica a partir de la anterior debe cumplir con los siguientes requisitos:

- Si la gráfica es creciente, la nueva tendrá valores positivos
- Si la gráfica es decreciente, la nueva tendrá valores negativos

Nuestro trabajo de investigación pretende que los alumnos se apropien de estas ideas, pero de manera que los estudiantes puedan comprender o más bien relacionar los comportamientos de una función con los signos de sus primeras diferencias al someterlos mediante una secuencia didáctica en el que se traten problemas de máximos y mínimos. Es así que pretendemos trabajar con alumnos del nivel medio superior, los que se encuentran en un primer contacto con el estudio del cálculo.

Con respecto a las definiciones que Cardona (2009) expone en su trabajo de los términos siguientes:

- Estabilización de la noción de derivada.
- Aparición de la noción de derivada sucesiva.
- Tratamiento articulado entre la función y sus derivadas consistentemente.

Podemos ver que en ellas son muy importantes los comportamientos de la función y los signos de sus diferencias. En cuanto a los máximos, mínimos y punto de inflexión, los menciona como puntos claves. Valero (2000) los llama como los puntos más importantes de una gráfica útil como referente para encontrar la gráfica derivada. Además menciona que las ideas de máximos y mínimos son nociones que están directamente relacionadas con la noción de derivada, pues son propias de ella y no pueden separarse.

Castañeda (2004), declara que los máximos y mínimos y el punto de inflexión se convierten en un objeto organizador de las derivadas sucesivas. Cabe aclarar entonces que nuestra investigación pretende hacer un acercamiento variacional a los máximos y mínimos a través de problemas de optimización.

El trabajo de Moreno y cuevas (2004), nos permitió delimitar o acotar nuestra investigación, debido que demuestran, que también hay problemas de máximos y mínimos que no se resuelven con el cálculo diferencial. Por ello podemos decir que nuestra investigación está orientada a los máximos y mínimos como puntos críticos en una función.
En nuestra investigación, la intuición optimizadora propuesta por Malaspina (2008) la podríamos ver a través de la forma en cómo el estudiante se apropia a través del trabajo con la secuencia didáctica que hemos diseñado del conocimiento en cuestión, en nuestro caso de los máximos y mínimos de una función.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

La teoría en la que fundamentamos nuestra investigación es la teoría de situaciones didácticas, que nos servirá como un lente para visualizar o enmarcar nuestro problema de investigación, encauzándonos hacia el objetivo planteado, apegándonos a los procesos didácticos que ella nos facilita; la de acción, formulación, validación e institucionalización, para el diseño de una secuencia didáctica. En consecuencia, la ingeniería didáctica será nuestra metodología de investigación.

2.1 Teoría de Situaciones

Esta teoría dio inicio en Francia en los años 70 por Guy Brousseau, en un momento en que la visión dominante sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática era una visión cognitiva, fuertemente influenciada por la epistemología piagetiana. Guy Brousseau, desarrolla su teoría de las situaciones didácticas reformulando ciertas ideas generadas por Piaget. Considera que un individuo aprende en la medida que construye o resignifica un concepto, incorporándolo a su estructura cognitiva. La teoría de situaciones didácticas propuso un enfoque innovador; “el de una construcción que permite comprender las interacciones sociales entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden” (Fregona, 2007, pp. 7-8).

Figura 8. *Sistema Didáctico*

Fuente: Cruz (2008).

Chevallard et al (1997). Expresan que Brousseau parte de un modelo general del conocimiento matemático para construir su teoría, el cual lo resumen de la siguiente manera:

> Saber matemáticas no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, es ocuparse de problemas en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones. Una buena reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática exige que éste intervenga en la actividad matemática, lo cual significa que formule enunciados y pruebe

> proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad. (pp. 213-214)

En nuestra investigación el saber a enseñar corresponde a la noción de máximo y mínimo que interactúa en el sistema didáctico (saber a enseñar, profesor y alumno). La teoría de situaciones didácticas expone que el sujeto necesita construir por sí mismo sus conocimientos mediante un proceso adaptativo similar al que realizaron los productores originales de los conocimientos que se quiere enseñar. Por lo tanto, considera que el significado de una noción no puede dársele a un alumno, sino que es él quien debe construirlo a partir de un conjunto de problemas en donde tal noción se ve involucrada. En tal sentido esta teoría favorece nuestra investigación que busca acercar a los alumnos a los máximos y mínimos relativos desde una perspectiva variacional donde los estudiantes interactúen y descubran las ideas subyacentes a tales conceptos. Para lograr esto se diseñara actividades con el objetivo de que el alumno descubra por sí mismo el conocimiento propuesto.

Por ello es de suma importancia los conocimientos previos de los estudiantes para que una noción sea aprendida y que estos se logren vincular con los conocimientos nuevos y así puedan ser incorporados a la estructura cognitiva de los estudiantes y pueda ser utilizable.

> Una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción... Brousseau (1983) citado en (Cruz, 2008, p. 24)

Brousseau (1986), explica como aprenden las personas ideas matemáticas al exponer lo siguiente:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas que son la prueba del aprendizaje. (pp. 48-49)

La idea anterior será considerada al realizar nuestro diseño de secuencia didáctica, ya que es necesario darles a los alumnos problemas que le generen conflictos y se vean motivados a encontrar la solución utilizando su conocimiento previo y descubriendo el nuevo conocimiento.

Por ello se le debe presentar a los alumnos un problema con cierto contenido didáctico, que le pueda interesar y que además este en juego el conocimiento por adquirir. Es decir delegar la responsabilidad de una situación aprendizaje a los alumnos, el cual es conocido dentro de la Teoría de las situaciones didácticas como devolución. “Devolución es el acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctica) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de tal transferencia" Brousseau (1988, p. 325) citado en Cruz (2008).

Esta teoría es fundamental dentro de la Ingeniería Didáctica, ya que nos permite diseñar secuencias de clase. Por ello aremos uso de ella para el diseño de nuestra secuencia didáctica.

2.1.1 Tipos de Situaciones A-didácticas

Existen diferentes tipos de situaciones a-didácticas, según Brousseau; que inducen a los alumnos a transitar por diversas etapas propias de la actividad matemática: la acción, la formulación y la validación, así como la de institucionalización que quedó definida tiempo después.

La clasificación de situaciones didácticas que retomaremos, es la presentada por Cantoral et al. (2000), los cuales corresponden a cuatro tipos siguientes:

1. Situación de acción: En las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

2. Situación de formulación: Cuyo objetivo es la comunicación en información entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

3. Situación de validación: En las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de lo que dicen es cierto; hay que explicar que necesariamente debe ser así.

4. Situación de institucionalización: destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. (p. 43).

Cabe aclarar que las situaciones didácticas a las que se refiere Cantoral, son a las situaciones mejor conocidas como a-didácticas, donde el profesor esta como espectador con el papel de investigador. Con respecto a la situación de Institucionalización. En ella se produce el reconocimiento del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del profesor, lo cual es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico.

2.1.2 Contrato Didáctico

Brousseau plantea la Situaciones Didácticas como una forma para "modelar" el proceso de enseñanza-aprendizaje, el cual se puede ver como un juego en donde juegan al menos dos jugadores, en el cual el docente y el estudiante han definido o establecido reglas y acciones implícitas. Es decir uno de los jugadores es el profesor, que busca que el otro jugador, el alumno, se apropie o responsabilice de una situación adidáctica. Este primer paso es la denominada devolución del problema.

El Contrato Didáctico se refiere a la consigna establecida entre profesor y alumno, como el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente.

El término contrato es derivado de las interacciones entre docente y el alumno, que en el aula están muy marcadas, ya que cada uno de los jugadores espera de la otra cierta respuesta sobre un conocimiento específico. Debido que las prácticas cotidianas llevan a los estudiantes a determinar que está permitido y que no es posible, sobre un conocimiento matemático. Lo que genera, que el alumno elaboren un conjunto de norma que manejen su actuar.

2.2 Pensamiento y Lenguaje Variacional

En este trabajo de investigación se toman algunas ideas matemáticas que han sido generadas y utilizadas en la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV); el cual es una línea de investigación insertada en la aproximación socioepistemológica, que estudia las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos. De lo anterior, retomamos el término variacional (ver el siguiente esquema) que utilizaremos para el diseño de nuestra secuencia didáctica, es decir, no buscamos explorar si los estudiantes utilizan argumentos o estrategias variacionales, sino inducir a que utilicen las ideas variacionales que esta línea de investigación nos provee y que sea a través del uso de estas, que los alumnos logren caracterizar un máximo y un mínimo relativo. En este sentido esperamos que la estrategia variacional les permita a los estudiantes generar ideas características sobre los conceptos antes mencionados. Cantoral et al. (2000), respecto al Pensamiento y Lenguaje Variacional expresan lo siguiente:

> Estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida. Hace énfasis en los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando estructuras y lenguales variacionales. (p.185)

Al respecto Cantoral et al. (2005), señalan que el término cambio se entiende como una modificación de estado y la variación como cuantificación de dicho cambio.

$$\underbrace{\underbrace{\text{Incremento}}_{\text{Diferencia o Variación}} = \underbrace{\text{valor final} - \text{valor inicial}}_{\text{Cambio}}}_{\text{Variacional}}$$

Cantoral (2013a), nos muestra que en nuestros discursos comunicativos empleamos sistemáticamente el pensamiento y lenguaje variacional al comparar estados, por ejemplo, al comparar la temperatura, utilizamos los vocablos: frío, tibio y caliente, correspondientes respectivamente con $E1$, $E2$ y $E3$. Consecuentemente para identificar estados intermedios ($E2$) y poder dar variabilidad al proceso tratando con estados y posiciones intermedias, utilizamos adverbios de cantidad como: muy, mucho, bastante, poco, demasiado, más, menos, tan, tanto… Así la escala crece, muy caliente, más fría, bastante tibia,… tendremos que algo caliente puede estar aún “más caliente”, y se dice está muy caliente”; algo “por debajo” de frío es muy frío. No tan caliente es “apenas caliente” o “casi caliente” o de plano tibio. Los rangos en el estado de la carne se conocen como “jugosa, a punto y cocida”, a continuación se adverbian con muy cocida, casi a punto, entre cocida y a punto, etc. Las alturas de las personas se distinguen entre bajo, medio y alto; las posiciones de cercanía relativas: cerca, aquí y lejos. Estos son algunos ejemplos que presenta el autor, para demostrar el empleo del pensamiento y lenguaje variacional en la vida cotidiana.

Con lo anterior además de mostrarnos el uso del pensamiento y lenguaje variacional en la vida cotidiana, también nos demuestra las limitaciones sobre la interpretación de las variaciones de orden superior. Al respecto el autor indica que las comparaciones del tipo “tres estados”, caracterizan a nuestras habituales formas discursivas, culturalmente aceptadas para una comunicación social. Como el ejemplo anterior mencionado frío, tibio y caliente.

Así mismo, Solís (1993) distingue tres estados de variación: la intuitiva, la representativa y la modelación. La primera se refiere sobre la capacidad intuitiva de las personas ya que desde el habla cotidiana se pueden oír predicciones respecto al estado inicial y final de un fenómeno de variación, por ejemplo una piedra que se suelta desde cierta altura, esta cae y si un volumen de agua es calentado, este hierve. La segunda se da cuando las personas pueden hacer representaciones de la variación, estas representaciones pueden ser verbales, gráficas o simbólicas y la tercera aparece cuando, además de operar con los símbolos se es capaz de establecer leyes que rigen el fenómeno de variación, o bien, modelar el fenómeno para hacerlo predecible.

2.2.1 Estrategias Variacionales

Caballero y Cantoral (2012) mencionan que la forma particular de razonar y actuar ante *situaciones variacionales* se le conocen como *estrategias variacionales.* Siendo algunos ejemplos de ellos, la:

> Comparación: Asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y su variación.
>
> Seriación: Se relaciona con la comparación, ya que está asociada con la acción de analizar entre estados sucesivos y establecer relaciones entre ellos, pero se diferencia que en se analizan varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos, como puede ser hallar una relación funcional dada una tabla, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o relaciones entre variables.
>
> Predicción: Asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. A diferencia de la Seriación, la Predicción no busca encontrar en si una relación, sino que se postula un nuevo estado usualmente a mediano o largo plazo, siendo este estado local, en el sentido de que corresponde a un momento o valor determinado. No obstante, hallar esa relación puede ser una forma de encontrar ese nuevo estado, por lo que la Seriación puede ser parte de la predicción.
>
> Estimación: Conociendo el comportamiento de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados a corto plazo de manera global, a diferencia de la Predicción, donde los estados propuestos son locales. Por ejemplo, se usa en el análisis del crecimiento de poblaciones para saber si crecerá o disminuirá, en tanto que la Predicción puede servir para decir hasta que punto crecerá, o la población dentro de un tiempo específico. (p. 1202)

En consecuencia para nuestra investigación utilizaremos en el diseño de la secuencia didáctica la estrategia variacional de comparación, al solicitarles a los estudiantes que realicen las diferencias en las tablas numéricas considerando valores de la función en dos puntos vecinos. Con el objetivo de que consigan analizar y finalmente caracterizar a los máximos y mínimos; Es decir, utilizaremos a la diferencia o variación (estrategia de comparación) como herramienta de análisis del cálculo.

2.4 Ingeniería Didáctica

Según Artigue (1995) el término Ingeniería Didáctica, surge a principio de los años ochenta del siglo pasado, dentro de la didáctica francesa de la matemática. El nombre se debe a una comparación con el trabajo de un Ingeniero, pues además de tomar en cuenta resultados científicos, debe tomar decisiones y controlar los distintos componentes del proceso enseñanza-aprendizaje.

> Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable al trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo. Al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (pp.33-34)

También menciona, que la ingeniería didáctica desarrollada específicamente en el área de la educación matemática, tiene una doble función. "Ella llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica" (p.36).

Es decir que, el término de Ingeniería didáctica, es utilizada en dos sentidos dentro de la matemática educativa: como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza-aprendizaje. Por ello será de gran utilidad para el presenta trabajo, pues lo ocuparemos en ambos sentidos, debido que nuestro interés es buscar algunos investigaciones que traten sobre cómo se desarrollaron los máximos y mínimos, para así posteriormente crear el diseño de nuestra secuencia didáctica.

Según Douady (1995), el terminó Ingeniería Didáctica designa un conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y manipuladas debidamente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje de un conocimiento en un grupo de alumnos en particular. Así también es a la vez, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo a la dinámica de la clase.

2.4.1 Fases de la Ingeniería Didáctica.

Como metodología de investigación consta de cuatro fases:

- ✓ Análisis preliminar.
- ✓ Diseño de la situación didáctica y su análisis *a priori*.
- ✓ Experimentación.
- ✓ Análisis *a posteriori* y validación.

Artigue (1995) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

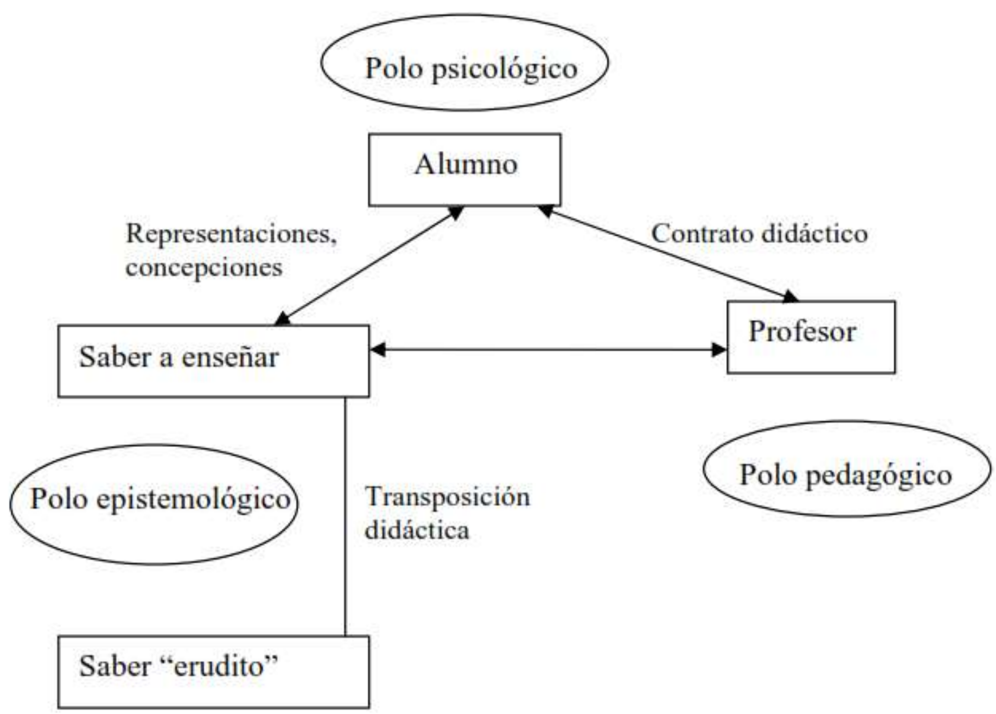
- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.

- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.

- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Por tanto esta clasificación armoniza con nuestro objeto de estudio, la tríada: alumno-profesor-saber. Así tenemos el siguiente esquema (figura 9) representativo del funcionamiento del sistema didáctico.

Figura 9. *Funcionamiento del Sistema Didáctico.*



Fuente: Cruz (2008).

Cabe mencionar que el sustento teórico de la ingeniería didáctica proviene de la teoría de situaciones didácticas y la teoría de la transposición didáctica, que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto.

En el análisis preliminar, luego de establecer los objetivos específicos de la investigación, se analizan y determinan, desde una aproximación sistémica, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos.
Para ello, se debe tomar en cuenta:

El conocimiento matemático que se desarrolla en la escuela así como su devenir en saber, esto en la denominada componente epistemológica.

Las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y los obstáculos que deben enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego por la secuencia implementada, en la llamada componente cognitiva.

La enseñanza tradicional y sus efectos, es decir, cómo vive el contenido matemático al seno de la escuela, dentro de la componente didáctica.

Análisis a priori y diseño de la situación didáctica. En esta fase de la Ingeniería Didáctica se eligen las variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. También en esta instancia se establecen las hipótesis de trabajo, es decir qué se espera de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, qué avances se consideran dentro de las expectativas, qué errores se perciben persistentes, qué mecanismos se prevé serán utilizados, en fin, todo lo inherente a las hipótesis de trabajo y expectativas del investigador. Es, en consecuencia, una fase prescriptiva como predictiva.

Una vez determinadas las variables didácticas y establecido el objetivo, es decir, caracterizado el obstáculo que se desea confrontar, se pasa al diseño de la situación didáctica en sí misma, la cual debe crear un modo propicio para que el alumno acepte la “invitación” al juego, se sienta desafiado a apropiarse del saber puesto sobre la mesa.

Experimentación. En esta etapa se procede a la “puesta en escena” de la situación diseñada, es decir, se le implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Los medios de perpetuar los sucesos que se desarrollen, para su posterior análisis quedan bajo la responsabilidad y elección del investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

El análisis a posteriori consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuanto se desvían los resultados de lo que se esperaba. De esta confrontación entre los análisis a priori y a posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma. Esta validación, a diferencia de otros acercamientos tales como los de carácter cuantitativo para los cuales el éxito se mide en tanto el grupo experimental logra mejores resultados que el grupo de control, es decir, entre los resultados externos a la situación planteada en sí misma, en la Ingeniería Didáctica, la validación es interna, pues se confrontan dos fases de la misma, lo esperado y lo que se obtuvo en realidad, entre las conjeturas y expectativas que fueron explicitadas en el análisis a priori y los resultados analizados y categorizados en el análisis a posteriori.

De las consideraciones realizadas, y del hecho que la validación de una Ingeniería Didáctica surge de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, se deducen dos aspectos relevantes de ésta, el estricto control que debe ejercerse en la experimentación y la precisión del análisis preliminar.

CAPÍTULO 3. DISEÑO PARA EL AULA

Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada, y finalmente, definida.
Grabiner (1983)

3.1 Sobre la Componente Histórica-Epistemológica

El calcular máximos y mínimos (optimizar), es de suma importancia e inherente a la vida diaria del ser humano en busca de optimizar sus recursos materiales y tiempos; por mencionar algunos. Decimos inherente ya que siempre utilizamos nuestros sentidos para distinguir entre lo mejor y lo peor, lo barato y caro, etc. es tal la importancia en el existir de la humanidad, que desde la antigüedad existe una leyenda según la cual la princesa Dido; personaje mítico de Fenicia, considerada fundadora de Cartago, cuando llegó en el siglo IX antes de Cristo a lo que actualmente es Túnez, y quiso comprar tierras para establecerse con su pueblo, sólo se le permitió hacerlo en una extensión tal que pudiera ser encerrada por una inmensa cuerda. Es claro que la princesa y los fenicios, tuvieron que resolver un problema isoperimétrico: determinar la región de máxima área posible, encerrada por la cuerda (el perímetro dado). La solución intuitiva es una región circular, cuya circunferencia es de longitud igual a la de la cuerda; sin embargo la solución formal no es simple y fue escrita después de varios siglos.

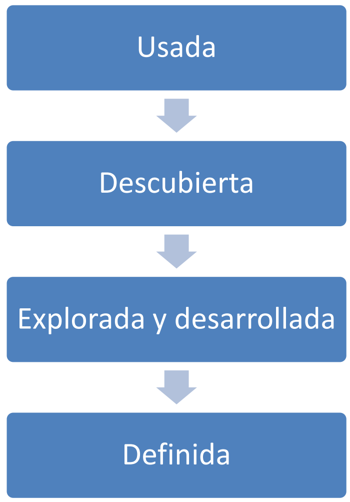
3.1.1 Problemas que Dieron Origen al Cálculo Infinitesimal

Numerosas investigaciones históricas mencionan que los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico. En este sentido menciónanos los siguientes problemas en el que; los máximos y mínimos aparecen como uno de los problemas que motivó el desarrollo del cálculo infinitesimal.

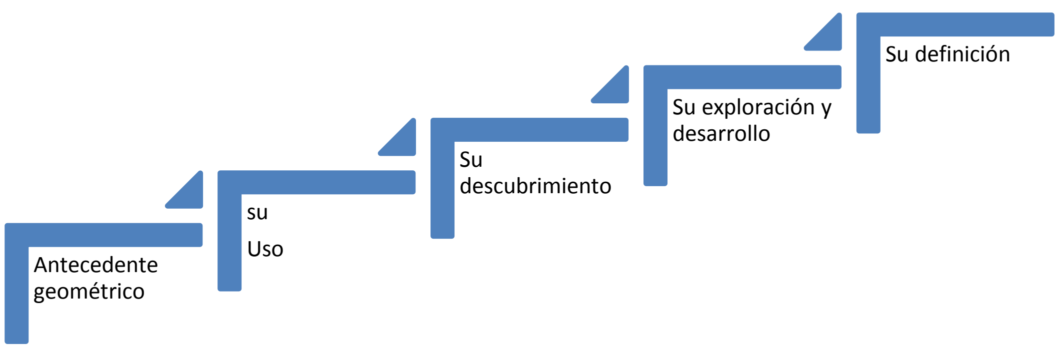
1. Encontrar la tangente a una curva en un punto.
2. Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
3. Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
4. Encontrar la velocidad y la aceleración de un cuerpo en cualquier instante.

Por ello en la construcción y análisis de este apartado Histórico-epistemológico pretendemos rastrear a la medida de lo posible y exponer a cada uno de los personajes que abordo dicho problema. Pero antes nos permitimos presentar a Dolores (2007) quien nos muestra dos vertientes del cálculo diferencial, uno geométrico y el otro mecánico; lo geométrico que incorpora las nociones básicas de la línea de trabajo iniciada por los griegos de la antigüedad, continuada por Descartes, Fermat, Barrow (entre otros) y culminada por Leibniz como cociente de diferenciales. En cuanto a lo mecánico debido al particular interés, el estudio de los fenómenos de la variación. Esta fue la línea de trabajo iniciada por Galileo, continuada principalmente por Torricelli, Roverbal y culminada por Newton como velocidad instantánea. Es así que el autor distingue tres periodos en el desarrollo histórico del concepto de derivada: antecedente geométrico, periodo embrionario y de consolidación.

El presente análisis Histórico-epistemológico lo hemos enmarcado en las cuatro fases del desarrollo del concepto de derivada, presentado por Grabiner (1983) que expresa “Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada, y finalmente, definida” (p, 195).



Cuando la autora nos dice que la derivada primero fue usada, se refiere al problema abordado por Fermat; sin embargo en este trabajo reconocemos la fase geométrica que incorpora las nociones básicas de la línea de trabajo iniciada por los griegos de la antigüedad, mencionado por Dolores (2007), debido que en esa época acaecían los problemas isoperimétricos. Es así, que en nuestro trabajo intentamos presentar los máximos y mínimos como uno de los problemas propio de la derivada, en las siguientes fases: un antecedente geométrico, su uso, su descubrimiento, su exploración y desarrollo, y su definición. .

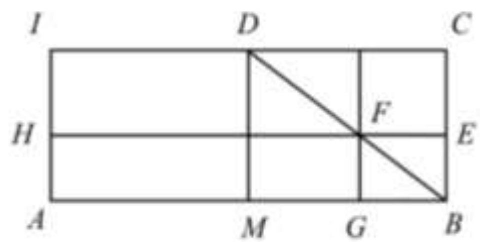


3.1.2 Antecedente Geométrico (problemas de los isoperimétricos)

El problema de calcular máximos y mínimos ha sido presentado desde la época de los griegos en sus trabajos de geometría, siendo uno de esos trabajos el de Euclides, quién presenta en sus Elementos proposición 27 del libro VI (figura 10); que la mitad de la recta fija un límite superior para las áreas de ciertos paralelogramos y es justo allí donde se encuentra el paralelogramo mayor. Proposición enunciada de la siguiente forma, retomado de Jiménez (2010):

> De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramos semejantes y situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el paralelogramo mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto. (p. 198)

Figura 10. *Proposición VI.27*



Fuente: Jiménez (2010).

De la figura anterior que ilustra la proposición, destacamos dos rectángulos particulares:

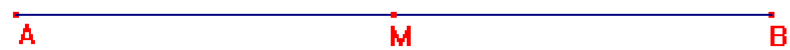
AMDI: Rectángulo deficiente respecto a la recta AB, cuyo defecto es el propio rectángulo MBCD. Ambos rectángulos son semejantes y situados de manera semejante; de hecho, son congruentes.

AGFH: (Aceptando que F está en la diagonal BD de DMBC.) Rectángulo deficiente respecto a la recta AB cuyo defecto es GBEF, el cual –por la proposición VI.24 – es semejante y situado de manera semejante a MBCD.

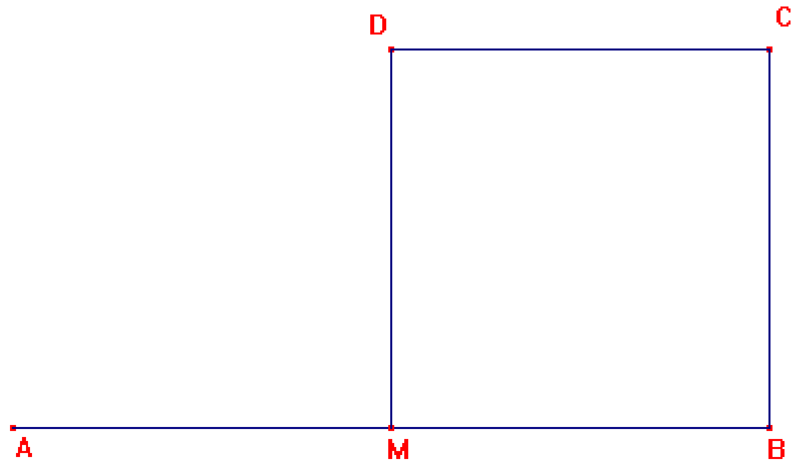
Pues bien, la proposición VI.27 afirma que de los dos rectángulos anteriores el primero (AMDI) siempre es mayor por estar aplicado a la mitad de la recta y es semejante a su defecto.

Bajo esta proposición nos permitimos demostrar con la ayuda de Cabri-Géométre; que de todos los rectángulos de igual perímetro, el cuadrado es el de área máxima. Cabe mencionar que una de las características de todas las demostraciones que realizaban los griegos, es la, no existencia de números involucrados en el discurso; la demostración se hacía a través del reacomodo de las piezas geométricas, casi como un rompecabezas, es decir, como un juego de comparación de figuras geométricas, ya que la interpretación algebraica es *a posteriori*. Gracias a la tecnología, nosotros intentaremos demostrar con el punto M variable en sentido algebraico, utilizando números para que sea visible el lado de los paralelogramos y se pueda apreciar así, el valor del área que cambia sin cambiar el perímetro.

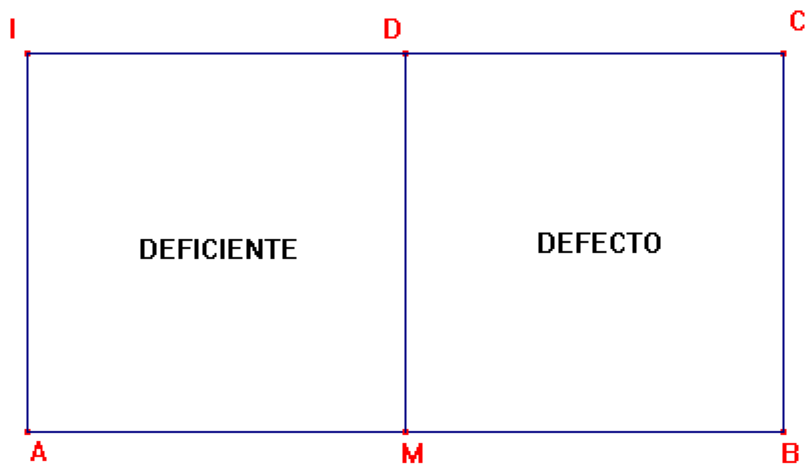
Sea el segmento AB de longitud 10 cm, dividida por el punto M justo a la mitad de la recta (5cm).



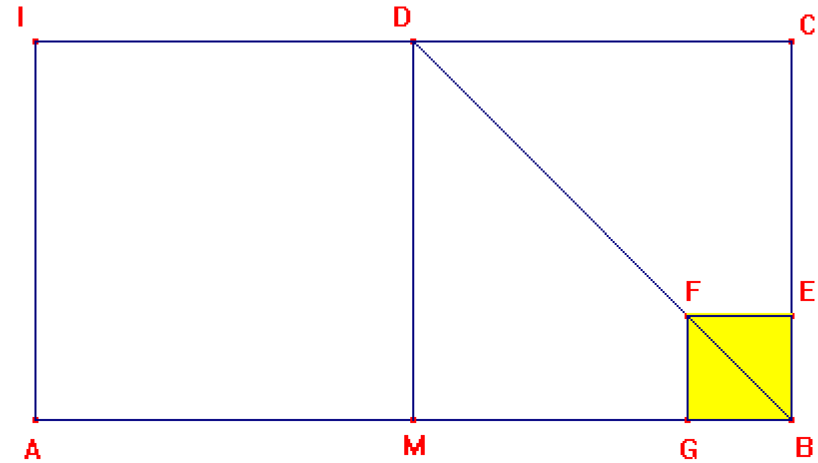
Sobre MB se traza un rectángulo MBCD de lados iguales (cuadrado de lado 5 cm) y



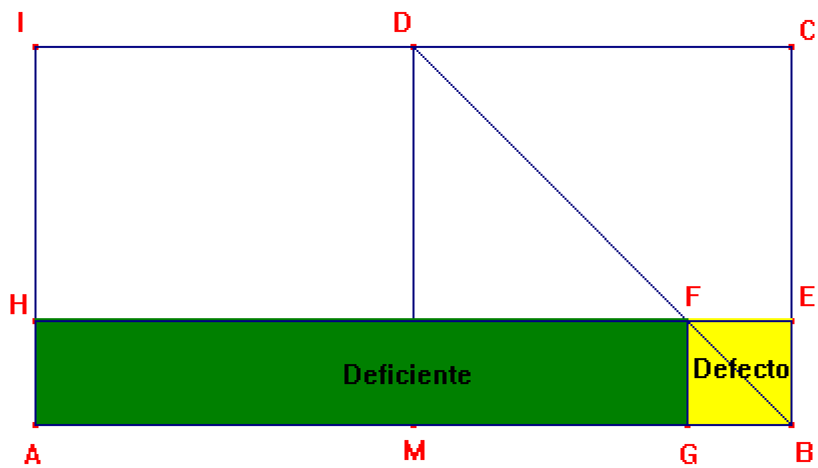
Su lado DC se prolonga hasta I, que es el punto donde coincide con la paralela DC por A. En este sentido el paralelogramo AMDI es deficiente respecto a la recta AB y su defecto es el paralelogramo MBCD.



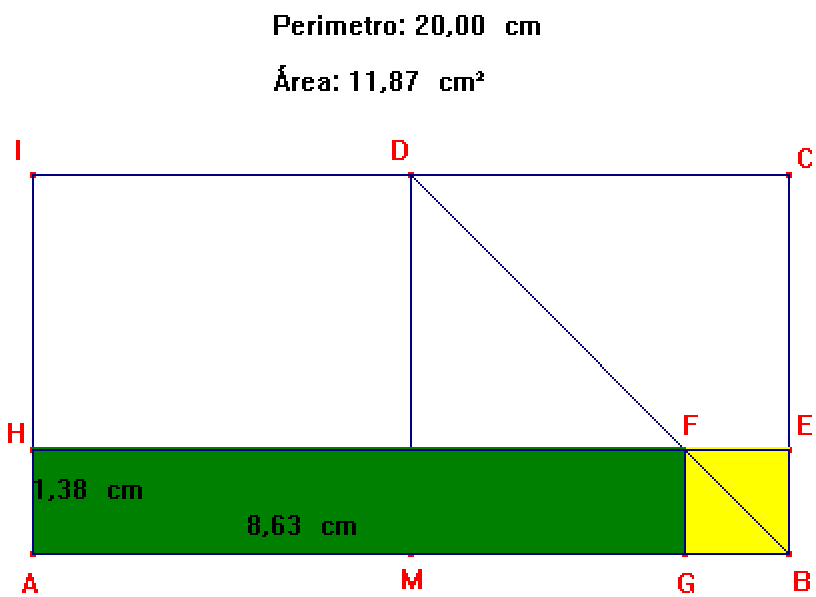
Ahora sobre la recta AB coloquemos un punto variable G y sobre GB construyamos el rectángulo GBEF con el punto F sobre la diagonal DB para que cumpla con el requerimiento de la proposición de ser semejante y situado de manera semejante a MBCD.



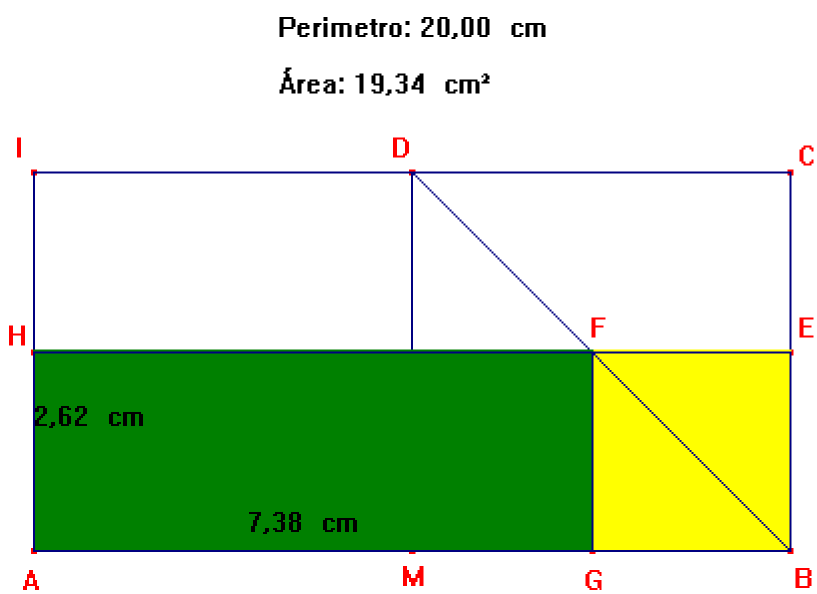
Que al prolongar su lado FE o EF hasta H, que es el punto donde coincide con la paralela FE por A, ahora el paralelogramo AGFH es deficiente respecto a la recta AB y su defecto es el paralelogramo GBEF.



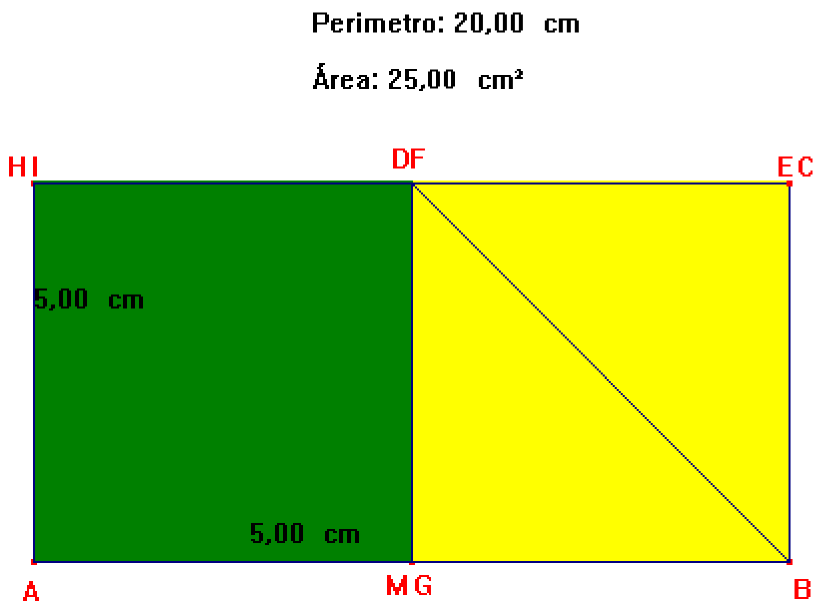
En una primera cuantificación al mover G, tenemos:



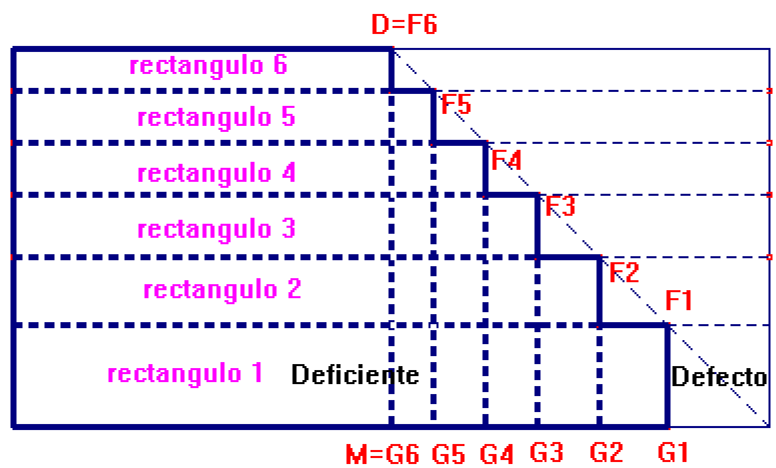
Si seguimos moviendo G, nos damos cuenta que la magnitud del área con respecto a la primera cuantificación, este cambia y la magnitud del perímetro no cambia.



Si seguimos moviendo G hasta que coincida con el punto M, nos podemos fijar que la magnitud del área cambió y la magnitud del perímetro se conservó constante.



Por lo tanto podemos decir que de todos los rectángulos AMDI de igual perímetro, el de área máxima es el cuadro, aplicado a la mitad (punto M) de la recta AB.



De forma visual podemos determinar que de los 6 rectángulos con unos de sus lados G1F1, G2F2, G3F3, G4F4, G5F5, G6F6=MD; el de área máxima es el de lado G6F6 que coincide con el punto medio M de la recta y es un cuadrado.

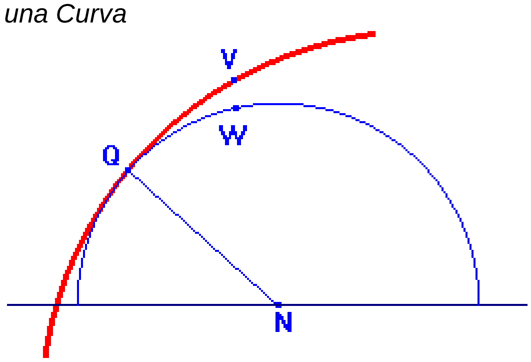
Apolonio de Perga (262-200 a. C)

En Arcos et al. (2007), encontramos que Apolonio fue un astrónomo de talento y escribió sobre una gran variedad de temas matemáticos, su fama procede esencialmente de sus *Secciones cónicas* en donde el método utilizado está mucho más próximo a los métodos de la geometría analítica actual que a los puramente geométricos. En el libro V de las Cónicas expresa lo siguiente:

> …trata de normales a las cónicas vistas como rectas máximas y mínimas, trazadas desde un punto particular a la curva; también da una serie de proposiciones trabajadas con los más puros métodos geométricos, y los cuales, de hecho, llevan automáticamente a la determinación de la evoluta para cada una de las tres cónicas; es decir, las ecuaciones cartesianas de las evolutas pueden ser fácilmente deducidas de los resultados obtenidos por Apolonio… (p, 83)

Podemos ver gráficamente (figura 11) la relación entre la normal a una curva y la existencia de una mínima distancia, desde algún punto al punto de contacto en la siguiente figura. Supóngase que Q es un punto de la curva (una parábola en este caso) y que QN es la normal correspondiente. Si trazamos hora la circunferencia con centro en N y radio QN, entonces se observara lo siguiente:

Figura 11. *La Relación Entre la Normal y una Curva*



Fuente: Arcos et al. (2007).

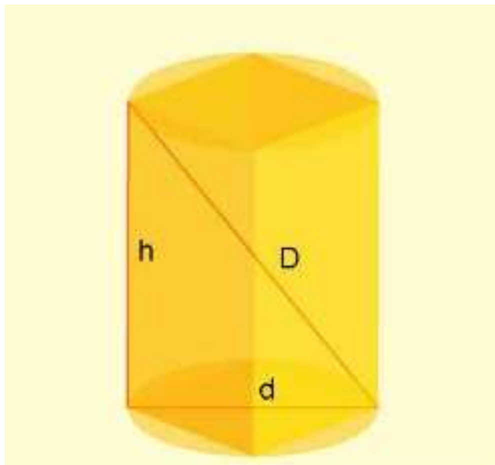
Si a partir del punto de contacto Q, un punto se mueve sobre la circunferencia, por ejemplo, hasta W, su distancia, respecto de N, permanecerá constante, sin embargo, si se mueve sobre la curva, hasta V, por ejemplo, se alejará de N, ya que V está fuera de la circunferencia, de manera que, considerando la porción de la curva, alrededor de Q, resulta que Q es, precisamente, el punto de la curva más cercano a N.

Cabe esperar que este tipo de razonamiento estuviera presente en la mente de Apolonio, permitiendo relacionar, en el caso de las cónicas, las rectas normales con distancias mínimas, adelantándose así, casi dos milenios a Fermat.

Kepler (1571-1630)

En 1615 Kepler publicó un libro titulado *Nova stereometria doliorum vinariorum (*Nueva Geometría sólida de las barricas de vino*)*; en Matemáticas Visuales (2021) encontramos, que en dicho libro se analiza la forma de los barriles que con menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos) tuviera mayor volumen (pudieran albergar más cantidad de vino). Kepler simplifica el problema de los barriles, estudiándolos como cilindros y posteriormente como prisma (ver figura 12).

Figura 12. *Prisma Inscrito Dentro de un Cilindro*



Fuente: Matemáticas Visuales (2021).

Por ello se plantea las siguientes preguntas: Dada una diagonal *D* fija, ¿cuál es el mayor cilindro que tiene *D* como diagonal? ¿Cuál es la razón entre el diámetro de la base y la altura de ese cilindro? Kepler trata de comprender cómo cambia el volumen de los cilindros al considerar diferentes alturas. Notamos que al ser *D* fijo todos estos cilindros están inscritos en una esfera con *D* como diámetro. Para abordar este problema, Kepler estudia un caso particular y hace unos cálculos que resume en una tabla (figura 13).

Figura 13. *Tabla Utilizada por Kepler*

Hoc pacto si fuerit

Altitudo	Basis diameter	Erit corpus columnæ
1	20—	399
2	20--	794
3	20-+	1173
4	20+-	1536
5	19-+	1875
6	19-+	2184
7	19--	2457
8	18-+	2688
9	18--	2871
10	17-+	3000
11	17—	3069
Sub se-	midupla	3080
12	16.	3072
13	15-+	3003
14	14-+	2856
Æqu-	ales	2828
15	13-+	2625
16	12.	2364
17	11--	1887
18	8—	1368
19	6-+.	741
20	0.	0

Fuente: Matemáticas Visuales (2021).

La primera columna se refiere a las diferentes alturas del cilindro, la segunda columna a los valores del diámetro de la base del cilindro y la tercera columna al volumen del prisma.

Luego enuncia dos teoremas:

Teorema IV. De todos los paralelepípedos rectángulos de base cuadrada inscritos en una esfera, el de mayor volumen es el cubo

Teorema V. De todos los cilindros con la misma diagonal, el mayor y más voluminoso es aquel en el que la razón del diámetro de la base y su altura es la raíz cuadrada de dos.

Finalmente expresa una conclusión donde se puede apreciar que Kepler es consciente que cerca del valor máximo el volumen cambia muy poco. Retomado de Matemáticas Visuales (2021), Kepler expresa la conclusión siguiente:

> A partir de aquí está claro que, los constructores de barriles de Austria, guiados por el sentido común y geométrico, cuando hacen un barril, toman el radio de la base un tercio la longitud de la duela. Cuando se hace esto, el cilindro que construimos mentalmente entre las dos bases está formado por dos mitades, cada una de las cuales está próxima a las condiciones del teorema V y tendrá, por lo tanto, una capacidad máxima incluso si nos desviamos un poco de las reglas exactas cuando se construye el tonel, porque los valores próximos al óptimo cambian la capacidad muy poco... Eso es así porque cerca de un máximo los decrecimientos por ambos lados al principio son solo imperceptibles. (p. 1)

3.1.3 Primero la Derivada Fue Utilizada

Cuando Grabiner (1983) dice que la derivada primero fue usada, se refiere al método creado por Fermat para calcular máximos y mínimos; sin embargo, respecto al objeto matemático (máximo y mínimo) que nos atañe encontramos que en 1531 Tartaglia afronto un problema de cómo se debía inclinar el cañón si se quería que la bala alcanzara la máxima distancia posible. Publicó su resultado en *Nova scienzia*, en la que considera las trayectorias constituidas por un tramo recto inicial, orientado como en eje del cañón, seguido por un tramo cóncavo y finalmente por un tramo rectilíneo vertical; y con un razonamiento algo tosco obtiene un resultado correcto: que la inclinación sobre el horizonte de la pieza que produce el máximo alcance es de 45°.

Además de haber mencionado a Tartaglia. En este subapartado, nos centramos en el método de Fermat y las reglas de Hudde, debido que en sus trabajos se aprecian una aproximación previa a la derivada para resolver problemas de máximos y mínimos.

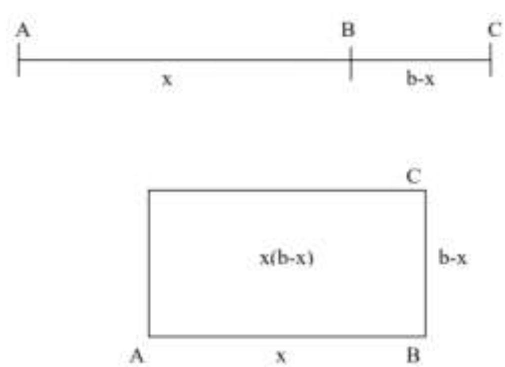
El método de Fermat (1601-1665)

Pierre de Fermat a quien Lagrange, Laplace y Tennery, entre otros denominaron inventor del cálculo. Debido que en el año de 1637 publicó una memoria titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (Método para investigar máximos y mínimos). Se trata de un procedimiento puramente algorítmico-algebraico desprovisto de todo fundamento demostrativo, en el cual Fermat introduce la técnica de *adigualdad,* que había sido empleada por Diofanto en la Escuela de Alejandría. Dicha técnica permite ignorar o suprimir aquellos términos que aún contengan la cantidad ε, que finalmente posibilita la determinación de un máximo.

Para ilustrar su método, Fermat eligió el problema de la división del segmento, el cual se enuncia a continuación: Dado un segmento, hallar el punto sobre él de tal suerte que el rectángulo que tiene por lados los dos segmentos que el punto determina sea de área máxima.

Se retoma el ejemplo que Cantoral y Farfán (2004) exponen sobre el problema mencionado por Fermat:

> "Sea AC el segmento dado, en la siguiente figura, de longitud b, y sea B un punto dado sobre AC. Tomemos como x a la longitud del segmento AB, así que el segmento BC tiene por longitud $b-x$. De lo anterior el rectángulo formado (rectángulo construido sobre AB) tiene área $x(b-x)$.



Luego entonces se debe maximizar la expresión anterior. Para ello considera un punto adicional B´ sobre AC de forma que la longitud AB sea un poco distinta de x, es decir x + ε, y por lo tanto el segmento B´C tendrá una longitud b-(x + ε) = b-x - ε.

El nuevo rectángulo así construido será AB´C, con área $(x+\varepsilon)(b-x-\varepsilon)$. Fermat argumenta que si el punto B hace que el área sea máxima, entonces el valor del área determinada por B´ será prácticamente igual al área determinada por B, a partir de lo cual se obtiene:

$$x(b-x) \approx (x+\varepsilon)(b-x-\varepsilon) \text{ y de ahí } 0 \approx \varepsilon\, b - 2\,\varepsilon\, x - \varepsilon^2.$$

Con respecto a la expresión anterior, Fermat dice que se cumplirá la igualdad cuando $\varepsilon = 0$ y, por lo tanto, $b = 2x$, de lo cual concluye que el rectángulo es un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$.

Analizando en perspectiva lo que hizo Fermat se tiene: si B es un punto máximo (o bien de mínimo) entonces, cuando ε se hace infinitamente pequeño, los valores de la función (en este caso el área del rectángulo construido) en x y en $x+\varepsilon$ van a ser muy cercanos, esto es; tomando a f como la función tratada, tenemos

$$\text{si } \varepsilon \approx 0, \text{ entonces } f(x+\varepsilon) \approx f(x)$$

y de ahí

$$f(x+\varepsilon) - f(x) \approx 0$$

que al dividir por ε obtuvo

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \approx 0$$

Y concluye que la igualdad la tendrá cuando $\varepsilon = 0$. Así que Fermat dice que B es el punto Máximo (o mínimo), entonces $f'(x) = 0$, de acuerdo con una notación moderna, cuando $\varepsilon \to 0$.” (pp. 70-71)

Pino-Fan et al. (2011), expresan que Fermat desarrolla su método en base a las obras de los antiguos griegos:

Con base en las obras fundamentales de la antigüedad clásica griega (los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, las obras de Arquímedes, la *Aritmética* de Diofanto, la *Colección matemática* de Pappus, etc.), así como en la teoría de ecuaciones de Viète (en particular en el método de la *Syncrisis* de su *Arte analítica*), Fermat desarrolla los primeros métodos generales, en la historia de las matemáticas, para la determinación de extremos… que posteriormente aplica a la determinación de las normales y tangentes. (p.160)

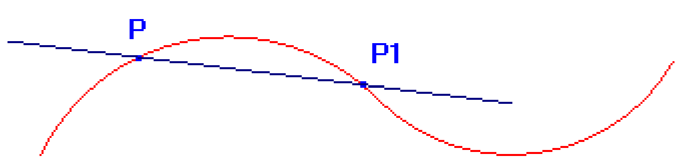
Por ello, no resulta sorprendente que el ejemplo anterior de la división del segmento tenga un símil con la proposición VI.27 de Euclides antes tratado, debido que dicha proposición reconoce que el rectángulo de área máxima se encuentra a la mitad del segmento y que además es un cuadrado.

A pesar de que dicho método fue escrito sin demostración, su aplicación se extendió a la solución de problemas de otros campos, como la determinación de los centros de gravedad de diferentes figuras geométricas, la óptica y a la construcción de la tangente a una curva en un punto dado de la misma.

Pérez (2008a) señala que en la misma memoria antes mencionada, Fermat aplica su método para máximos y mínimos en el cálculo de tangentes. Por el que Descartes hizo una dura crítica de esta forma de proceder. Para responder a estas críticas, Fermat desarrolló, en una memoria de 1638, un procedimiento bastante general para calcular tangentes, bajo la siguiente idea:

Supongamos un punto P sobre la curva (figura 14) por el que deseamos trazar una tangente. Indiquemos por P_1 a un punto cercano a él, sobre la misma curva, a la derecha o a la izquierda de P y trazamos una recta secante que pasa por esos dos puntos P Y P1. Fermat se dio cuenta que cuando el punto P1 se aproxima al punto P, ya sea por la derecha o por la izquierda, la secante P1P se movía hacia la posición tangente.

Figura 14. *Recta Secante a una Curva*



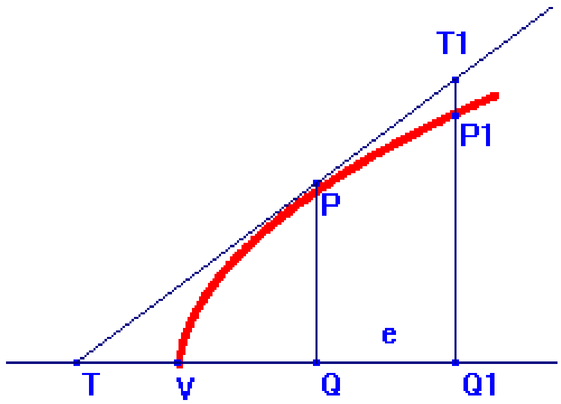
Fuente: Cruse y Lehman (1982).

Claro que esta idea, por sí misma no es útil, pero combinada con la geometría analítica, proporciona un método muy innovador que, con notación actual, se puede resumir de la siguiente forma. Sea $P = (x, y)$ un punto de una curva $f(x, y) = 0$ y sea $P1 = (x + e, y1)$ otro punto de la curva próximo a P como en la figura (ver figura 15).

Llamemos $b = TQ$, la subtangente en P.

Teniendo en cuenta que $PQ = y$, la igualdad de los triángulos semejantes TQP y TQ1P1 se escribe como

Figura 15. *La Subtangente a una Curva*



Fuente. Pérez (2008a).

$$T1Q1 = \frac{y(b+e)}{b}$$

Como $T1Q1$ es casi igual a $P1Q1 = y1$, Fermat escribe

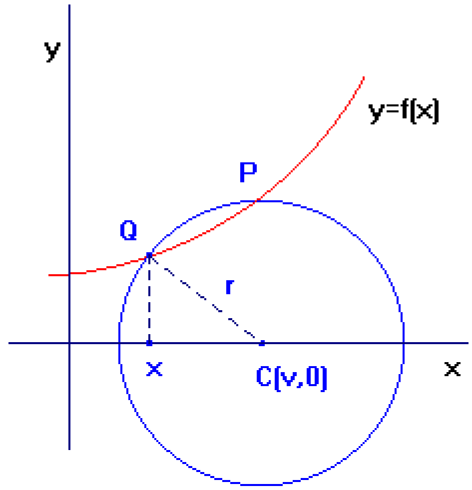
$$f\left((x+e), \frac{y(b+e)}{b}\right) \approx 0$$

y a esta *adigualdad* le aplica su método para máximos y mínimos.

Es así que el método para el cálculo de valores máximos o mínimos y la técnica para el cálculo de tangentes fueron muy novedosas, que "la relación entre ambos tipos de problemas acabo siendo bien entendida: los valores extremos se obtenían en los puntos donde la pendiente de la tangente se anulaba" (Pérez, 2008a, p. 314). En consecuencia, se pudo apreciar que el método de Fermat implica la idea de raíz doble. En este contexto Descartes en 1637, publicó su método para la determinación de tangentes y normales. En el que se aprecia también la idea de raíces dobles cuando se iguala P y Q, el cual Dolores (2007) le llama punto de doble contacto. Veamos la descripción siguiente retomada de este autor:

Se considera una curva $f(x)$ y un circulo con centro C(v,0) y radio r=CQ, como se ilustra en la figura (ver figura 16), en general una curva y un círculo pueden cortarse en dos puntos, digamos P y Q, sin embargo si CQ es la normal a la curva en Q entonces P=Q y por tanto Q puede ser un punto doble de contacto entre la curva y el círculo.

Figura 16. *Curva Secante a un Círculo*



Fuente: Dolores (2007).

Como ya Fermat y Descartes habían puesto en evidencia, la búsqueda de "raíces dobles" de un polinomio para el trazado de rectas tangentes y normales; por ello, Hudde se interesó en buscar un método que permitiera calcular dichas raíces. En consecuencia, enunció dos reglas muy importantes que le permitieron calcular un máximo o mínimo fundado en la idea de raíces dobles.

La regla de Hudde (1629-1704)

En 1658, Hudde contribuyó al desarrollo del análisis matemático con el descubrimiento de dos reglas en las que las ecuaciones polinómicas ordinarias son transformadas para obtener cantidades máximas y mínimas. Es importante subrayar que en esa época no se habla de funciones, ni de dominios, ni de máximos o mínimos relativos. Para entonces Fermat había hecho ver que los máximos y mínimos de una curva $y = f(x)$ estaban asociados a las raíces dobles de la ecuación $f(x) = M$, donde M sería el máximo o mínimo alcanzado. Por eso Hudde pudo tomar como punto de partida de su investigación la determinación de las raíces dobles de la ecuación:

$$F(x) = f(x) - M = 0$$

La primera regla estrictamente algebraica, que enuncia es:

Si en una ecuación dos raíces son iguales y, si se multiplica por una progresión aritmética cualquiera, a saber el primer término por el primer término de la progresión, el segundo por el segundo término de la progresión, y así sucesivamente: Yo digo que la ecuación que se obtiene mediante la suma de estos productos tendrá una raíz en común con la ecuación inicial.

Demostración

Sea el siguiente polinomio

$$F(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

Con $3/2$ como raíz doble

Para su transformación, multiplicamos con la siguiente progresión aritmética

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \dots$$

Denominamos $F^*(x)$ al polinomio resultante o transformado.

El resultado en este caso será

$$\begin{aligned} F^*(x) &= 4(a+2b)x^2 - 12(a+b)x + 9(a) \\ &= a(4x^2 - 12x + 9) + bx(8x - 12) \\ &= a(x-3/2)^2 + bx(x-3/2) \end{aligned}$$

Podemos ver que el sumando de $F^*(x)$ tiene como factor $(x-3/2)$ y, por tanto, $3/2$ como raíz. Cumpliéndose así, la primera regla de Hudde.

Explorando, cómo es el polinomio resultante $F^*(x)$, y sobre todo qué relación guarda con el inicial $F(x)$. Retomando el polinomio del ejemplo anterior, tenemos lo siguiente:

$$F(x) = 4x2 - 12x + 9$$

$$\begin{gathered} F^*(x) = 4(a+2b)x2 - 12(a+b)x + 9(a) \\ = a\underbrace{(4x2 - 12x + 9)}_{F(x)} + bx\underbrace{(8x - 12)}_{F'(x)} = aF(x) + bxF'(x) \end{gathered}$$

De esta última igualdad aparece un segundo polinomio $F'(x)$, que de acuerdo con nuestros conocimientos de derivación actual reconocemos que es la derivada del primero $F(x)$. “Por eso, aunque la transformación operada en el polinomio no nos da exactamente su derivada, podemos estimar que lo obtenido no se aleja en exceso de ella” (Marín, 2007, pp. 64-65)
Si realizamos la transformación tomando como base la progresión aritmética natural

$$0,1,2,3, \dots, n-1, n$$

Es decir con $a = 0$ y $b = 1$, resulta la igualdad siguiente

$$F^*(x) = xF'(x)$$

Una vez analizado la primera regla, procedemos a examinar cómo Hudde aplicó dicha regla a la obtención de las cantidades máximas y mínimas. Recordando que, según Fermat, estas cantidades aparecerían siempre como raíces dobles de la ecuación $F(x) = f(x) - M = 0$, donde M es el máximo. Sin embargo, la primera regla de Hudde muestra que dichas cantidades se puede localizar como raíces simples de un polinomio $F^*(x)$, desde luego que esta condición es necesaria y no suficiente para que las raíces ahí obtenidas sean dobles en $F(x)$; por ello, enuncia la siguiente regla de cálculo:

Cualquier cantidad algebraica, considerada máximo o mínimo, se hace igual a z; ordenada la ecuación se multiplica por una progresión aritmética del modo en que se ha dicho: y el producto será una ecuación que tiene una raíz común con la precedente.

La cantidad algebraica, que hoy denominamos función, $f(x)$ la igualamos a z. A partir de ahí Hudde aplica la primera regla a $f(x) - z = 0$ y toma directamente la progresión aritmética natural y obtiene la transformada. Obteniendo así la ecuación $xf'(x) = 0$ del que prescinde sin mayor comentario de la raíz nula y se aplica al cálculo de las restantes. Por ello Collette (1986) expresa que esta segunda regla "…es casi equivalente a nuestra regla moderna que afirma que si $p(a)$ es un extremo relativo de una función polinómica p, entonces $p'(a) = 0$." Y en cuanto a la primera regla dice lo siguiente: "…corresponde, *grosso modo*, al teorema que enuncia que si r es una raíz doble de $p(x) = 0$, entonces r es también raíz de $p'(x) = 0$" (p. 71).

También es importante mencionar que una amplia exposición de la norma de Hudde fue dada en una carta que escribió el 21 de noviembre de 1659, que no se publicó en la época, pero se publicó en la polémica que Newton y Leibniz tuvieron sobre quién merece el título de descubridor del cálculo. Es decir, la carta de Hudde fue publicada como parte de las pruebas, ya que Newton se refiere a la regla Hudde muchas veces. Leibniz también estudió manuscritos de Hudde e informó del hallazgo de excelentes resultados. En consecuencia dichos manuscritos tuvieron una importante influencia en la introducción del cálculo de Leibniz.

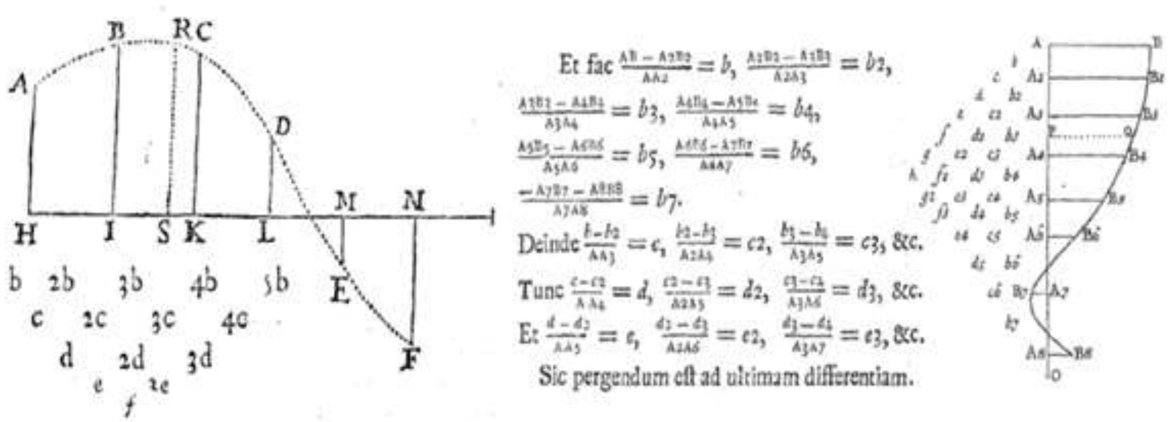
3.1.4 La derivada Fue Descubierta

El cálculo diferencial, con los significativos aportes de Newton y Leibinitz en el siglo XVII, tratan de manera sistemática los problemas de máximos y mínimos de funciones continuas de una y de varias variables. Dichos aportes (métodos) con un enfoque infinitesimal, entendido o explicado como: fluxiones para Newton y cociente de diferencial para Leibniz. Cabe mencionar que en este subapartado queremos enfatizar que las ideas de *diferencias* subyacen a dichos métodos y en consecuencia al concepto de derivada.

Isaac Newton (1642-1727)
La diferencia es un concepto que subyace al concepto de derivada y además ha aparecido constantemente durante la génesis del cálculo como una herramienta de análisis. En Cantoral, R., Sánchez, M., y Molina, J.G. (2007) encontramos que en los trabajos astronómicos de Newton del año 1687 aparece por primera vez un método de interpolación que posteriormente se publica en el año 1711 bajo el nombre de *Methodus Differentialis*. Lo que atrae la atención de los autores es que la estructura de su funcionamiento de dicho método, está basada en la idea de diferencia.

El *Methodus Differentialis* es un método aritmético de interpolación. En éste se considera un conjunto finito de puntos en un plano *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, etc., a partir de los cuales se trazan los segmentos de recta *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM* y *FN*. Estos segmentos son perpendiculares a otro segmento de recta *HN* (ver figura 17).

Figura 17. *Methodus Differentialis*



Nota. Escrito original de Isaac Newton que ilustra el uso de la *diferencia* como herramienta de análisis de la variación. Fuente: Sánchez y Molina (2006).

El objetivo principal de este método es encontrar la longitud o altura correspondiente a algún punto desconocido, que se encuentre en alguna posición intermedia, entre los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. En la figura 17 esta longitud desconocida se representa con el segmento *SR*. Evidentemente estas longitudes podrían actualmente interpretarse como los valores de las ordenadas correspondientes a los valores H, I, K, L, M y N en el dominio de una función.

Como se verá, el método hace uso de diferencias aritméticas y cocientes de éstas. Estos cocientes de diferencias se encuentran representados a continuación con las expresiones que incluyen las letras minúsculas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*. Los cocientes se encuentran definidos de la siguiente manera:

$$b = \frac{AH - BI}{HI}, 2b = \frac{BI - CK}{IK}, 3b = \frac{CK - DL}{KL}, 4b = \frac{DL - ME}{LE} etc.$$

$$c = \frac{b - 2b}{HK}, 2c = \frac{2b - 3b}{IL}, 3c = \frac{3b - 4b}{KM}, etc.$$

$$d = \frac{c - 2c}{HL}, 2d = \frac{2c - 3c}{IM}, etc.$$

$$e = \frac{d - 2d}{HM}$$

Cantoral (2013) reconoce que a partir del análisis del diagrama (figura 17) que muestra la posición de un cometa, surgen las ideas para la constitución del cálculo y que además que este puede ser la base de una situación de aprendizaje. También menciona que "…*los principios nacientes de las cantidades finitas* dieron lugar al origen del cálculo…" (p.107).

En 1736 se publicó el *Methodus fluxionum et serierum infinitorum,* en el que Newton considera cantidades variables que van fluyendo con el tiempo, a las que llama *fluentes* y a las razones de cambio instantáneas de las fluentes los llama *fluxiones*, que son las derivadas respecto al tiempo de las fluentes. Newton representaba a las primeras por letras x, y, z,… y a las segundas por letras punteadas $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$,…Los incrementos de las fluentes x, y, z,…, los representa por medio de las correspondientes fluxiones en la forma $\dot{x}\boldsymbol{o}$, $\dot{y}\boldsymbol{o}$, $\dot{z}\boldsymbol{o}$,…, y los llama *momentos*, donde ***o*** es entendido como un incremento infinitesimal de tiempo. Newton aplica los resultados sobre fluentes y fluxiones a la resolución de multitud de problemas, como: la determinación de tangentes, máximos y mínimos, áreas y superficies, curvaturas, longitudes de arcos, centros de gravedad etc., con respecto a los problemas de máximos y mínimos, escribe:

> Cuando una cantidad es la más grande o la más pequeña, en ese momento su fluir ni crece ni decrece: si creciera, eso probaría que era menor y que lo que sigue sería más grande que lo que ahora es, y recíprocamente pasaría si decreciera. Así, calcúlese su fluxión como se ha explicado en el problema 1 e iguálese a cero.

Del enunciado anterior cuando Newton dice que en un máximo o un mínimo el fluir no crece ni decrece, entendemos que se refiere a la diferencia, debido que justo en ese punto la diferencia es igual a cero, por ello finalmente indica explícitamente que se calcule la fluxión igualándose a cero la ecuación. Debido que por la regla de Hudde y el método de Fermat. Newton sabía que el máximo o el mínimo se localizan igualando a cero la ecuación derivada o donde la pendiente es cero.

Leibniz (1646-1716)

Leibniz abordó *situaciones-problemas* sobre máximos y mínimos, tangentes y puntos de inflexión; esto se evidencia claramente en el título de su obra *"Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales), en la cual introduce por primera vez la expresión *cálculo diferencial* y proporciona las fórmulas, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión.

Pérez (2008a) menciona que en las matemáticas de Leibniz son importantes los estudios sobre sucesiones numéricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas. Dada una sucesión de números:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

Podemos formar la sucesión de sus diferencias primeras:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - a_1, b_3 = a_3 - a_2, b_4 = a_4 - a_3, \dots, b_n = a_n - a_{n-1}, \dots$$

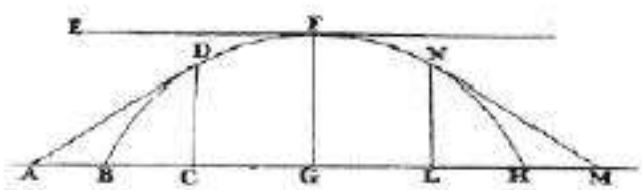
Leibniz se había dado cuenta de la relación:

$$B_1 + b_2 + b_3 + \cdots + \ b_n = a_n$$

Lo que indica que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra. Esta sencilla idea, cuando se lleva al campo de la geometría, conduce al concepto central del cálculo de Leibniz que es el de "diferencial", el cual tuvo para él diferentes significados en distintas épocas.

En Castañeda (2006) encontramos que Leibniz hace una amplia descripción del comportamiento infinitesimal, en el que caracteriza al máximo por un mismo argumento geométrico, usando dos diferentes criterios. El primero, a través de la comparación de estados, donde precisa que el máximo queda determinado por la línea GF. El segundo, a través de una condición geométrica, explica que la tangente sobre la curva en el punto máximo es paralela al eje de las abscisas (ver figura 18).

Figura 18. *Tangente y Ordenada a una Curva*



Fuente: Castañeda (2006).

3.1.5 Exploración y Desarrollo de la Derivada

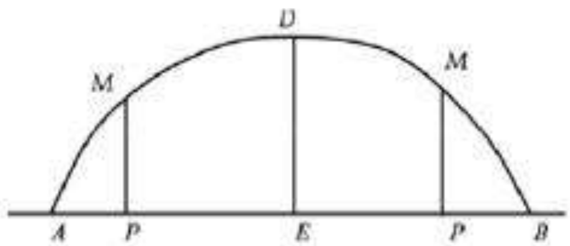
L´Hospital (1661-1704)

De acuerdo al trabajo de Castañeda (2004) las obras de L'Hospital y Agnesi; publicados en 1696 y 1748 respectivamente. Son los primeros que plantearon un tratamiento de la matemática (el Cálculo) desde la perspectiva de quien quiere estudiar por primera vez este campo de saber y necesita un documento organizado.

La sección III, del libro de L'Hospital titulada Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y las menores, a lo que se reducen los problemas de máximos y mínimos, revela un interés geométrico por hallar las ordenadas que cumplan con esta propiedad, podemos distinguir de sus argumentaciones al menos tres aproximaciones distintas, que nos muestra el significado que se le asociaba a la noción de máximo o mínimo de una curva. Así los siguientes argumentos de L'Hospital son retomados del trabajo de Castañeda (2006).

La primera argumentación está basada en la noción de tamaño. Centra su propiedad en discriminar, entre un conjunto de ordenadas, la que cumpla con la característica de ser la más grande o más pequeña. L'Hospital explica (ver figura 19): Sea MDM una línea curva cuyas ordenadas PM, ED y PM sean paralelas entre sí, tal que al incrementarse continuamente la abscisa AP, la ordenada PM crece también hasta cierto punto E, después del cual disminuye. Entonces, la línea ED será denominada la mayor o la menor ordenad.

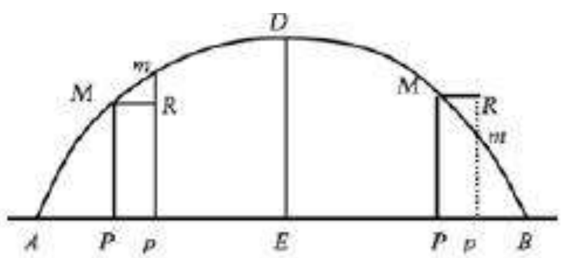
Figura 19. *Ordenadas a una Curva*



Fuente: Castañeda (2004).

La segunda se fundamenta en identificar el signo de las diferencias, en una región muy cercana al máximo. Si al crecer AP PM también crece, es evidente que su diferencia Rm será positiva con relación a la de AP y que, por lo contrario, cuando PM disminuya al crecer la abscisa AP, su diferencia será negativa (figura 20).

Figura 20. *Signos de las Diferencias*



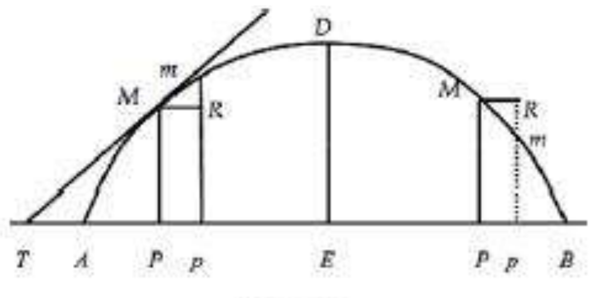
Fuente: Castañeda (2004).

Afirma L'Hospital que una diferencia no puede convertirse de positiva a negativa si no se hace pasar por cero, o por infinito. De esta manera, el máximo es nombrado como un punto por el que las diferencias cambian de signo.

El tercer argumento se sustenta en observar la posición relativa que guarda la subtangente y la tangente, a medida que se consideran nuevos puntos en la curva. El máximo se alcanza cuando la tangente se vuelve horizontal y paralela a la subtangente; de manera análoga, esto pasa con el mínimo.

L'Hospital explica: supóngase una tangente en el punto *M,* y su respectiva subtangente *PT* (figura 21).

Figura 21. *Tangente y Subtangente a una Curva*



Fuente: Castañeda (2004).

Si la subtangente *PT* aumenta [hacia la izquierda] a medida *que MP* se acerca a *DE,* es claro que cuando se construya la tangente en el punto *D,* la subtangente tiene una magnitud infinita. De esta forma, cuando *AP* rebasa a *AE,* la subtangente *PT* se vuelve negativa de positiva, o al contrario.

También menciona Castañeda (2006), que en el capítulo tercero del libro de Maria Agnesi, que lleva como título "Donde se estudia el método para el cálculo de máximos y mínimos", se distinguen cuatro caracterizaciones sobre estas ideas. La primera hace un reconocimiento de lo variacional; en la segunda aparece nuevamente la idea presentada por L'Hospital sobre el comportamiento de la subtangente; la tercera está referida a una propiedad de las diferencias, y la cuarta realiza una puntualización sobre una propiedad analítica.

3.1.6 La Derivada Definida

Dolores (2007) menciona que las bases de la teoría de límites fueron dados por Cauchy en 1820. Denomina este periodo como de consolidación de la derivada en donde dicho concepto es definido en términos de límite.

Arcos (2007), menciona que Lagrange escribió su teoría de las funciones analíticas, donde en el capítulo V se dedica a los valores máximos y mínimos de funciones en una variable. En los que se puede apreciar de acuerdo a los textos actuales como el criterio de la segunda derivada.

Si a es un número crítico de la función, es decir si $f'(a) = 0$, la ecuación se reduce a:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots$$

Así pues, haciendo h suficientemente pequeña, es decir, colocando x suficientemente cerca de a, el signo de la serie será el del término de orden dos, signo que, a su vez, es el de $f''(a)$. Por lo tanto, si $f''(a) < 0$, el signo de la serie y, por lo tanto el de $f(a+h) - f(a)$, será negativo, lo que querrá decir que, suficientemente cerca de a, $f(a+h) > f(a)$, lo que significa que la función tiene un máximo relativo en $x = a$.

Análogamente se concluye que, si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces la función tiene un mínimo relativo en $x = a$.

En Pérez (2008a), encontramos los siguientes teoremas muy útiles en el análisis del cálculo para determinar máximos y mínimos relativos en una función.

Teorema de Weierstrass. Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

Teorema de Rolle. Sea $f: [a, b] \to R$ una función continua en (a,b), derivable en (a, b) y verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

3.1.7 Implicación Didáctica

El haber hecho este pequeño recorrido histórico, nos ha permitido ver que el discurso sobre el que se construyó el cálculo infinitesimal, desde los griegos con soluciones a los problemas isoperimétricos; Kepler nos muestra el uso de tabulación y que además cerca de un máximo los cambios de los volúmenes son muy pequeños; Fermat con su método algebraico de adigualdad y muy interesante la idea de raíz doble que posteriormente llevaron a Hudde crear reglas basados en la raíz doble para calcular máximos y mínimos; las ideas de Newton sobre fluentes y fluxiones, de cómo ante una mayor cantidad el fluir no crece ni decrece. También es importante enfatizar sobre las diferencias finitas en las diferentes etapas de desarrollo del cálculo hasta ser extrapolado a la idea de diferencia infinitesimal.

Los argumentos de L'Hospital que fueron presentados con fines de divulgación del cálculo nos parecieron muy interesantes, porque involucra las ideas de comparación y la importancia de los signos de las diferencias, ya que afirma que una diferencia no puede convertirse de positiva a negativa si no se hace pasar por cero. En este sentido, de acuerdo con Dolores (2007), que expresa con respectos a las ideas intuitivas que dieron origen al cálculo "…vale la pena entonces explorar acercamientos didácticos menos rigurosos y más intuitivos…, …recuperar de ella las ideas, estrategias y procedimientos claves que contribuyeron a su formación" (p. 18). Por ello en este trabajo de investigación retomaremos los dos primeros argumentos de L'Hospital para el diseño de la secuencia didáctica. Si bien L'Hospital expone sus argumentos desde ideas gráficas e infinitesimales, nosotros lo trataremos de forma aritmética y con números finitos.

3.2 Componente Cognitiva

En diferentes investigaciones que hemos revisado se les pregunta a los estudiantes donde la derivada es mayor o menor, lo cual implica que el estudiante entienda el signo de la derivada y los comportamientos: crecimiento y decrecimiento. Por esta razón, es muy importante que el alumno entienda estas ideas ya que nos permiten caracterizar a los máximos y mínimos.

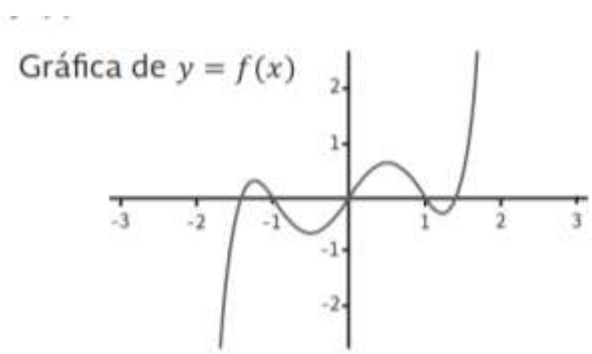
Cantoral (2013a) señala "Los estudiantes del bachillerato e incluso del nivel universitario, muestran que después de cursar una o más asignaturas relativas al Cálculo diferencial e integral, no logran una comprensión satisfactoria de los conceptos e ideas más relevantes". Creemos que se debe a que la derivada no posee significado propio y así también los máximos y mínimos, lo cual origina una serie de dificultades u obstáculos didácticas considerables. De ahí que los estudiantes utilicen argumentos nemotécnicos o memorísticos que no implican estrategias propiamente variacionales. Nos referimos a lo que encontramos en Cantoral (2013a) que los estudiantes utilizan argumentos nemotécnicos para dar respuestas a las preguntas siguientes:

Pregunta 1. Marca sobre la gráfica de la función f, que aparece en seguida, la porción que consideres cumple con la condición $f(x) > 0$.

Pregunta 2. Marca sobre la gráfica de la función f, la porción que consideres cumple con la condición $f'(x) > 0$.

Pregunta 3. Marca sobre la gráfica de la función f, que aparece enseguida, la porción que consideres cumple con la condición $f''(x) > 0$.

Pregunta 4. Marca sobre la gráfica de la función f, que aparece enseguida, la porción que consideres cumple con la condición $f'''(x) > 0$.



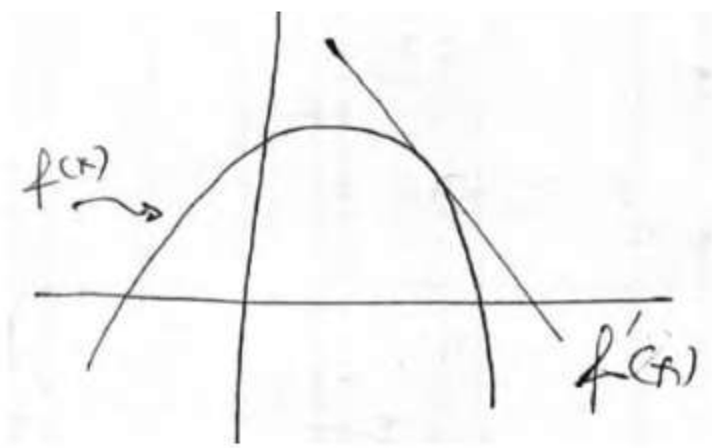
Para esta investigación nos interesan los hallazgos del análisis de la segunda y tercera pregunta. No obstante estamos consiente que de acuerdo con González (1999) la enseñanza de la derivada no resultará suficiente con dotarle de significado a la primera derivada. Esto con relación a la hipótesis que sostuvo sobre derivadas sucesivas.

Con respecto a los hallazgos de la segunda pregunta que trata sobre $f'(x) > 0$ El autor reporta que los estudiantes, en esta oportunidad, confunden con frecuencia el signo de la derivada con el de la función, o en otro caso, recuerdan que las pendientes de las tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, de modo que se tendrá para pendientes positivas correspondientes derivadas positivas. Y cuando se les pregunta respecto $f''(x) > 0$ el recurso dominante en las respuestas de los alumnos resulta ser la memoria. Puesto que ellos suelen recordar que la segunda derivada positiva se corresponde con la concavidad hacia arriba, en tanto que la concavidad hacia abajo está asociada con la segunda derivada negativa. Por ello, es usual entre los alumnos que utilicen un símil nemotécnico de una cubeta llena de agua "es cóncava hacia arriba entonces retienen más agua, si lo es hacia abajo retendrá menos agua, de hecho tirará el agua". Evidentemente este método no parece implicar estrategias propiamente variacionales.

Otro referente importante lo encontramos en Castañeda (2004), que desarrolla su trabajo bajo la hipótesis que sostiene que una definición nos acerca a una proximidad del concepto, pero evidentemente, no nos puede expresar la totalidad de su significado. Es decir entonces que se deben ampliar nuestro repertorio de registros o contextos de representación para entender un conocimiento desde diferentes aristas.

Al respecto presenta que en un grupo de profesores de matemáticas de nivel medio superior (bachillerato técnico), se les preguntó ¿qué es la derivada? Invariablemente de que la mayoría respondiera que la derivada es la pendiente de una recta tangente. Lo que llamó la atención fue el siguiente grafico que presento un profesor, en el que se puede observar que la interpretación de *derivada* está asociada con la recta tangente a un punto. Expresa el autor que la recta no podría ser la derivada de la curva, de serlo así, tendría su raíz en el lugar en el que la curva alcanza el máximo.

Figura 22. *Recta Tangente a una Curva*



Fuente: Castañeda (2004).

Es así entonces que la idea de máximo, mínimo y punto de inflexión nos conducen a la derivada de una función. Hemos mencionado que algunos investigadores en *derivadas sucesivas* le denominan puntos clave o puntos importantes para determinar la función derivada, un tanto similar son las ideas que existen en las aulas que de acuerdo a los criterios para calcular máximos y mínimos, los alumnos se han memorizado que "existe un máximo donde la derivada es cero" o "hay que igualar a cero la primera derivada" estas frases reducen y simplifican el alcance en cuanto a aprendizaje se refiere de las idea de máximos y mínimos.

Por ello cabe mencionar a Grabiner (1983) que en una sesión escolar preguntó a sus estudiantes ¿podrían definir un máximo relativo? A lo que respondieron que es un lugar donde la derivada es cero; acto seguido ¿Cuál es la definición de un mínimo relativo? Una vez más respondieron que es el lugar donde la derivada es cero, por lo que mejor les preguntó ¿Cuál es la diferencia entre un máximo y un mínimo? A lo que respondieron que en un máximo, la segunda derivada es negativa. Entendemos que las respuestas dadas por los estudiantes es producto del discurso matemático escolar basado en definiciones y teoremas y no desde ideas variacionales.

Moreno y Cuevas (2004) reportan; que tanto profesores como alumnos entienden que para determinar un máximo o un mínimo de una función se requiere que la derivada sea cero en esos puntos. Es decir que privilegian los criterios de la derivada, lo cual los lleva a resultados erróneos cuando se les presenta problemas de máximos y mínimos con dominios cerrados en los que no se aplican los criterios; sin embargo al aplicar el criterio de la segunda derivada sin reflexionar en la solución obtenida y al no considerar como información relevante que el dominio de la función es cerrado, concluyen erróneamente, que el problema no tiene solución o que la función no tiene máximo.

3.3 Componente Didáctica

"Nada tiene lugar en el mundo cuyo significado no esté de alguna forma relacionado con algo de máximos y mínimos".
Leonard Euler

En este apartado se hace el análisis de los libros de textos, el análisis del programa de estudios y también se hace mención sobre el abordaje o tratamiento del tema de máximos y mínimos en el aula. Por ello, para el análisis de libros, sólo se eligieron algunos de los que utiliza el profesor como fuente de consulta para impartir la materia de cálculo diferencial.

3.3.1 Análisis del Programa de Estudio

El programa de estudios revisado es el actual publicado en el año 2018 por la Dirección General del Bachillerato. El cual indica, que integra elementos tales como los aprendizajes claves, contenidos específicos y aprendizajes esperados, que atienden al Nuevo Modelo Educativo para la educación obligatoria.

La asignatura de Calculo diferencial I, corresponde al quinto semestre como una de las asignaturas del Componente de Formación Propedéutica del Bachillerato General, que tiene la finalidad de brindar herramientas y conocimientos básicos para que los estudiantes puedan continuar con estudios de nivel superior. A continuación se menciona el propósito general de la asignatura, en ella podemos apreciar los problemas de optimización como aplicación de la derivada:

> Tiene como propósito general el desarrollo de habilidades características del pensamiento lógico-matemático, por medio del uso de los procedimientos para derivar y su aplicación en problemas de optimización que le permitan predecir situaciones reales, formales y/o hipotéticas de su contexto, logrando entender he interpretar los resultados en diversos ámbitos colaborando a desarrollar su capacidad de razonamiento así como de su toma de decisiones. (p. 7)

Este programa está integrado por tres bloques de aprendizaje. El bloque uno se refiere a la solución de límites; el segundo bloque trata de derivadas y el tercer bloque a aplicación de la derivada.

Bloque I: Límites

Bloque II: La derivada

Bloque III: Aplicaciones de la derivada

Es en el tercer bloque donde aparecen los conceptos de máximos y mínimos, como se puede ver en la siguiente tabla:

CLAVE CG	CLAVE CDE	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes esperados
CG 4.1 CG 5.1 CG 7.3 CG 8.3	CDEM 1 CDEM 2 CDEM 3 CDEM 4	Máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función. Optimización. Velocidad, aceleración y rapidez de un móvil. Regla de L'Hôpital.	Interpreta gráficamente los máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función. Reconoce los criterios de primera y segunda derivada para obtener los máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función. Asocia distintas variables para generar modelos matemáticos. Interpreta la primera derivada de la posición como la velocidad y la segunda derivada de la posición como la aceleración.	Muestra disposición al trabajo metódico y organizado. Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Expresa ideas y conceptos favoreciendo su creatividad. Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.	Esboza de manera metódica y organizada la gráfica de una función a partir del cálculo de sus máximos, mínimos y puntos de inflexión para representar situaciones reales y/o hipotéticas de su entorno. Resuelve de forma creativa problemas de optimización, aplicando los criterios de máximos y mínimos que le permitan la construcción de modelos que representen situaciones reales y/o hipotéticas de su contexto. Aplica las reglas de derivación para calcular la velocidad y aceleración de un móvil a partir de su posición en situaciones de su entorno, afrontando la frustración como parte de un proceso de aprendizaje.

Podemos apreciar que en la columna denominada conocimientos aparecen los conceptos máximos, mínimos y puntos de inflexión; en habilidades menciona que los estudiantes interpretan gráficamente los conceptos antes mencionado y que además reconocen los criterios de primera y segunda derivada para calcularlos. En aprendizajes esperados indica que el estudiante debe saber representar las gráficas de las funciones a partir de los cálculos obtenidos aplicando los criterios de máximos y mínimos.

Una consideración importante es que el programa de estudios hace hincapié en la utilidad del conocimiento en la resolución de problemas, le da importancia a la aplicación. También presenta un enfoque constructivista, ya que se puede observar que hace diferencia entre conocimientos y aprendizaje esperado, es decir actividad que realizara el profesor y las que realizará el alumno.

Con respecto a las derivadas de orden superior o derivas sucesivas, estos aparecen en el segundo bloque, más no indica cual es el aprendizaje esperado al respecto o de cómo los máximos, mínimos y punto de inflexión son importantes en la derivada de orden superior. Como se pudo apreciar los máximos y mínimos son vistos como problema de aplicación de la derivada, abordados desde los criterios de primera y segunda derivada.

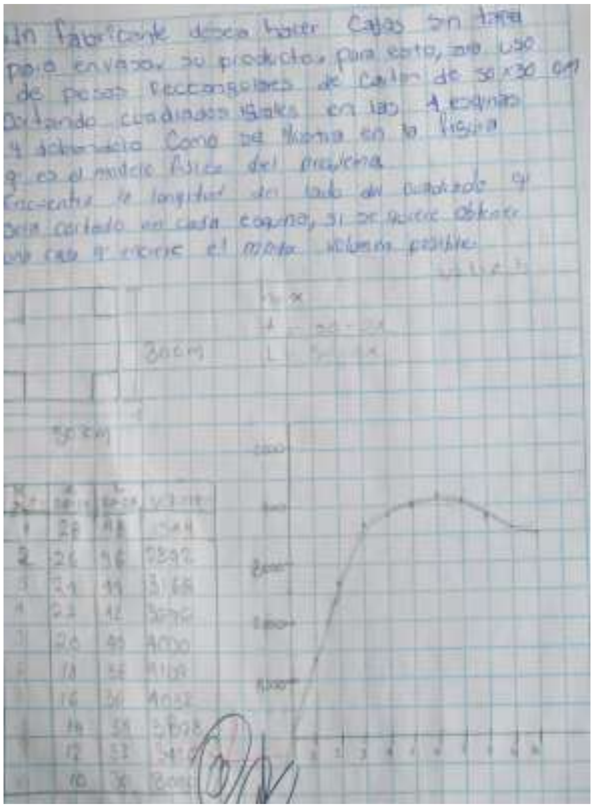
3.3.2 Currículum en Acción

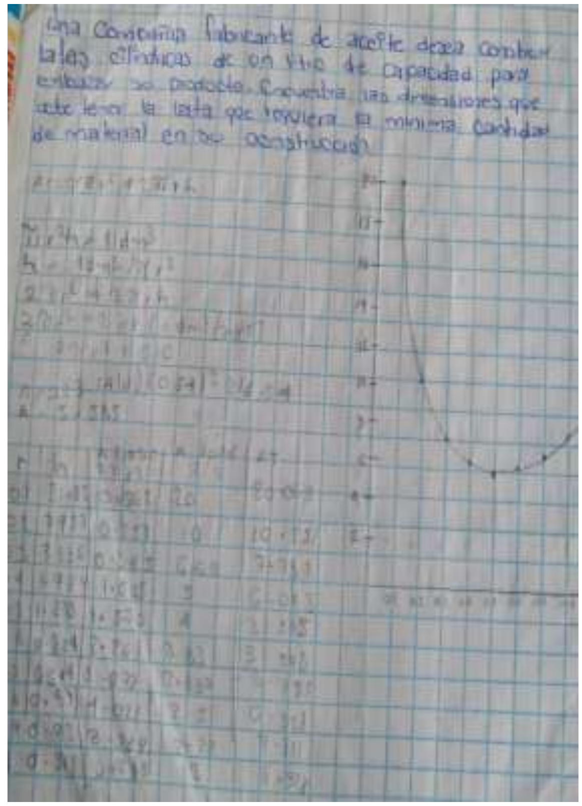
Los temas de máximos y mínimos, acorde con el primer bloque del programa antes presentado, el cual indica un acercamiento a máximos y mínimos. En un ambiente escolar es abordado con la intención de “mostrarle al alumno la aplicación de la derivada” (en opinión del profesor), es decir, que para ellos existen dos contextos: uno netamente matemática y otro de aplicación, el primero según deberá construirse intramatematicamente; en este caso la derivada, que luego se aplicara a problemas reales. En este sentido creemos que la introducción de problemas sobre máximos y mínimos desde el primer día de clases es para anticiparles a los estudiantes que toda la construcción matemática algorítmica que posteriormente aprenderá tendrá aplicación en ciertos problemas; quizá esto es para evitar que los alumnos hagan preguntas típicas como ¿para qué sirve esto qué estoy aprendiendo?. Es así que al presentar los máximos y mínimos de esta forma, sólo se está reduciendo a problemas de aplicación, el cual le resta valor histórico que estos problemas tienen como ya diferentes investigaciones han reportado que estos son unos de los problemas que dieron origen al cálculo.

Como ya mencionamos anteriormente, los máximos y mínimos son introducidos desde el primer día de clases bajo el concepto de optimización, el cual consiste en una enseñanza expositiva por parte del profesor que plantea un problema y lo resuelve deduciendo la función, luego realiza el llenado de una tabla para finalmente pasar los datos de esta a una gráfica y señalar en la tabla y en la gráfica el máximo o mínimo, con esto termina todo, no hay preguntas ni argumentos variacionales. Sin embargo después de esto, se cree que el alumno ya sabe calcular máximo y mínimo porque luego se les plantea problemas de optimización para que lo resuelvan solos.

A continuación presentamos algunos problemas de optimización resueltos en el aula por los estudiantes, en atención al primer bloque del programa de estudio. Problemas resueltos de forma numérica mediante tabulación-graficación.

Como puede verse, los alumnos tienen que llenar la tabla y luego realizar el punteo para construir la gráfica, en el que señalan el máximo y el mínimo. Por tanto consideramos que esta práctica no favorece la concepción de ideas variacionales, ya que La tabulación-graficación presentado, es lo mismo como en secundaria cuando nos enseñan a utilizar el plano cartesiano, la única diferencia es que desde principio se indica que debe buscar el valor máximo o mínimo. No existen preguntas sobre la situación problema y tampoco se aprecia un tratamiento variacional. En consecuencia esta forma de enseñanza induce a conductas imitativas, carente de significados que no permiten explotar las ideas variacionales que subyacen a los máximos y mínimos.

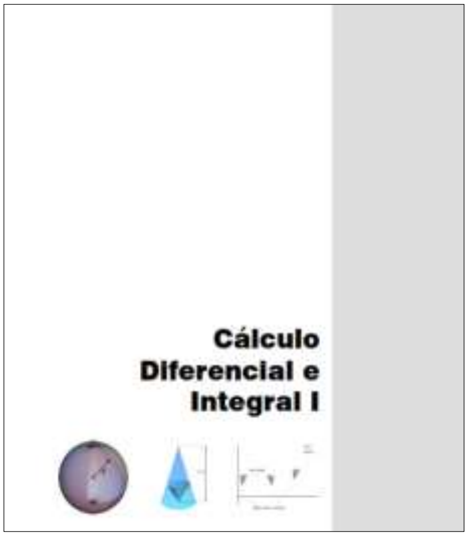




Casi a finales del semestre se enseñan de forma extensa los temas de máximos y mínimos y “a veces no alcanza el tiempo para abordarlos” (en palabras del profesor). Que para el cálculo de máximos y mínimos relativos, se privilegian los criterios de la primera y la segunda derivada.

3.3.3 Análisis de Libros de Texto

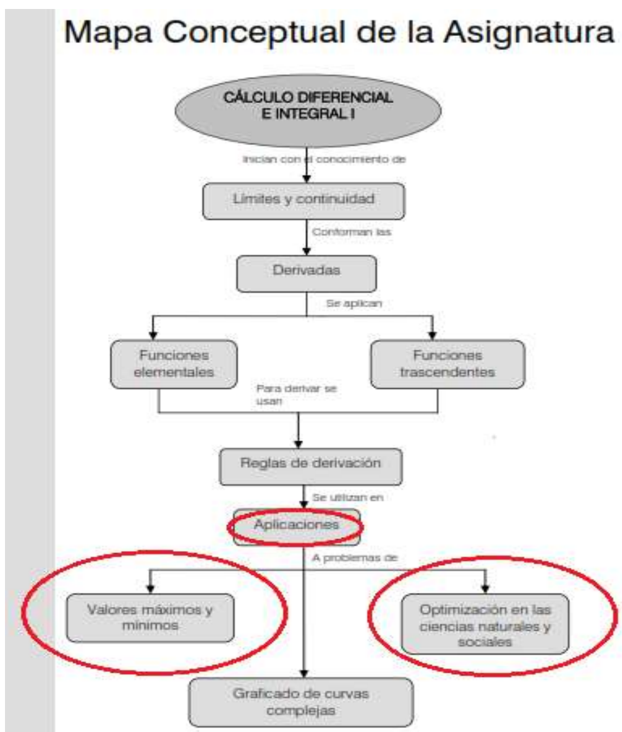
Los siguientes libros revisados son los utilizados por él docente para impartir la asignatura de cálculo diferencial. Con respecto a nuestra investigación nos interesa revisar como es presentado el tema de máximos y mínimos relativos y el lugar que éste ocupa en cuanto a contenido temático. También revisaremos los temas de las derivadas de orden superior o derivadas sucesivas, con el fin de indagar si estos son tratados a través de los máximos y mínimos.



a) Notas previas

El primer libro a revisar es denominado “Calculo diferencial e integral I” diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, para el V Semestre de bachillerato. Ubicada curricularmente como una asignatura propedéutica y se relaciona con todas las asignaturas del Grupo Físico-Matemático y del Económico-Administrativo.

b) Ubicación



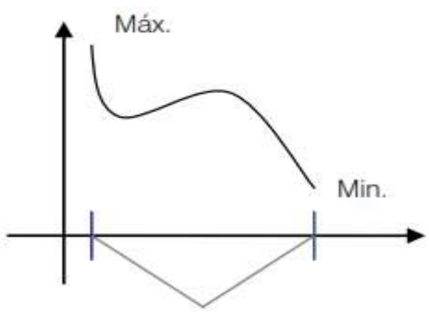
En el mapa conceptual de la asignatura muestra claramente la clasificación de los temas, en el que los máximos y mínimos aparecen en la última unidad del libro, después de haber tratados los límites y derivadas. Dicho tema se encuentra clasificado en el apartado de aplicaciones, el cual se refiere a la derivada aplicada al cálculo de máximos y mínimos; no obstante, se puede apreciar la subdivisión del apartado aplicaciones en: 1) valores máximos y mínimos 2) optimización en las ciencias naturales y sociales; en el primero los máximos y mínimos relativos son presentados a través de definiciones y teoremas, y en el segundo se aplican estas definiciones y teoremas a problemas reales.

c) Perspectiva de los máximos y mínimos relativos

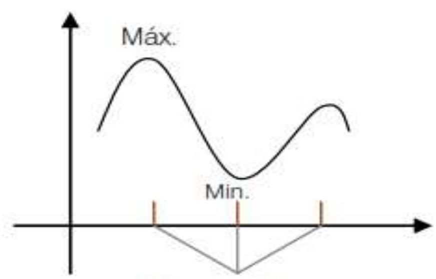
La unidad III del libro, titulado "valores máximos y mínimos relativos y sus aplicaciones", menciona que en esta unidad se verá cómo utilizar la derivada para resolver problemas de la vida diaria y describe el objetivo de la siguiente forma:

El alumno: Calculará los valores máximos y mínimos relativos de una función mediante la aplicación de los criterios de la primera y segunda derivada, analizando los intervalos donde la función es creciente o decreciente, cóncava o convexa e identificando la existencia de puntos de inflexión, para su graficado y solución de problemas de optimización y aproximación, mostrando una actitud reflexiva y de cooperación.

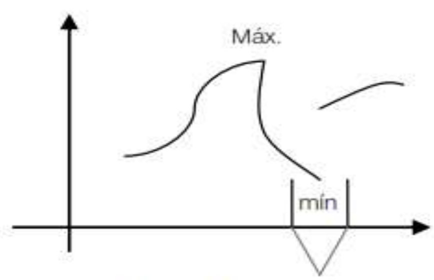
En un primer momento se presenta la definición y el teorema de existencia de máximo y mínimo, luego el teorema de punto crítico y por último se da el teorema del criterio de la primera derivada. El autor presenta en graficas los diferentes puntos críticos que existen: los puntos frontera, los puntos singulares y los puntos estacionarios, este último, no es más que los máximos y mínimos relativos, que para su análisis el autor presenta el criterio de la primera derivada, que exponemos a continuación.



Puntos frontera



Puntos estacionarios



Puntos singulares.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS:

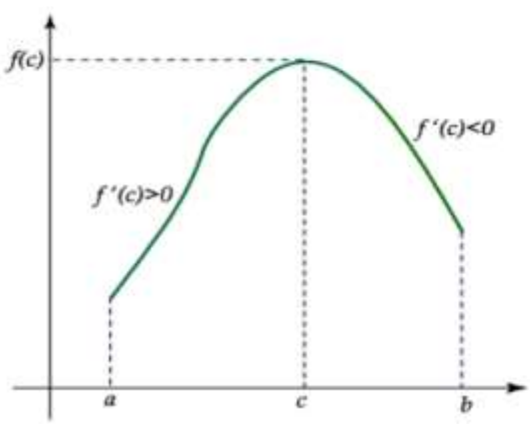
Sea f una función continua sobre un intervalo abierto (a, b) que contenga al punto crítico c.

(i) Si $f'(x) > 0$ para toda x del intervalo (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x del intervalo (c, b), entonces $f(c)$ es **un máximo local** (o relativo) de f. (es decir: si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c).

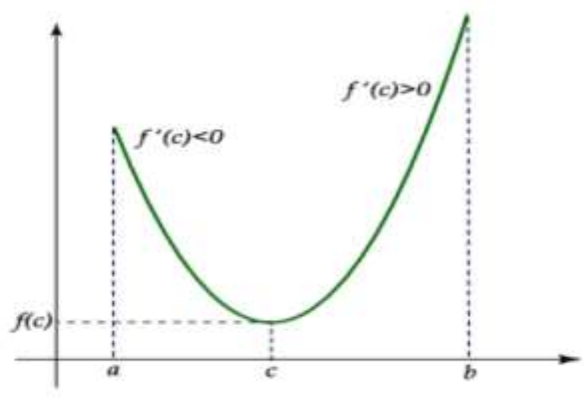
(ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x del intervalo (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x del intervalo (c, b), entonces $f(c)$ es **un mínimo local** (o relativo) de f. (es decir: si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c).

(iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados de c, entonces $f(c)$ **no es un extremo local** de f.

Para ejemplificar el criterio de la primera derivada, presenta los siguientes gráficos en el que se aprecian los intervalos donde la derivada es mayor ($f'(x) > 0$) y menor ($f'(x) < 0$) que cero.



Máximo relativo en $x = c$

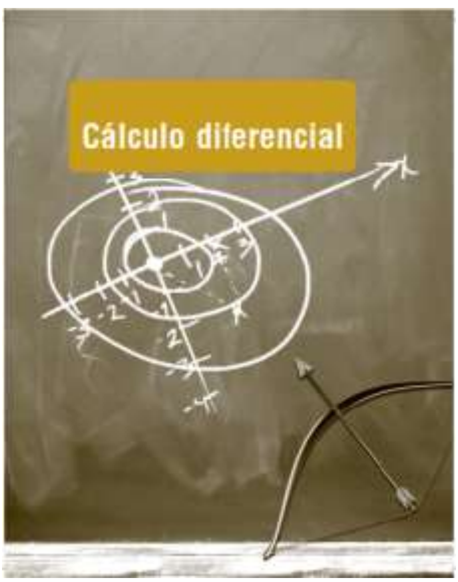


Mínimo relativo en $x = c$

Luego presenta el criterio de la segunda derivada mencionando que algunas veces es más fácil de aplicar que el primer criterio de la derivada. Sin embargo podemos ver que el criterio de la segunda derivada implica una derivada de orden superior, que por sí misma o por el simple hecho de volver a derivar involucra los máximos y mínimos relativos, claro que la segunda derivada en este libro es entendida como volver a derivar algorítmicamente, en un sentido iterativo. Decimos que involucra los máximos y mínimos relativos, ya que en una función derivada el punto de inflexión, los máximos y mínimos son objetos organizadores de la derivada sucesiva o de orden superior, de acuerdo con Castañeda (2004).

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA:
Sean f' y f'' dos funciones que existen para cada punto, en un intervalo abierto (a,b) que contenga a c. Supóngase que $f'(x)=0$.
(i) $f''(x)<0$, $f(c)$ **es un máximo local de** f.
(ii) $f''(x)>0$, $f(c)$ **es un mínimo local de** f.

Las derivadas de orden superior o derivadas sucesivas no son tratadas en este libro, quizás se deba a la prioridad, que le da a la primera derivada en un punto, debido que en distintas ocasiones hace mención “calcular la derivada de las siguientes funciones utilizando la definición formal de derivada” como bien sabemos esta definición está determinada sobre la derivada en un punto. No así sobre la función derivada.



a) Notas previas

El siguiente libro a revisar “cálculo diferencial” editado por la Dirección de Colegio de Bachilleres del Estado de Yucatán. Es elaborado atendiendo el plan de estudio de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS).

b) Ubicación

En este libro aparecen los máximos y mínimos en:

- La sesión dos del bloque I, denominado “Modelos matemáticos: un acercamiento a máximos y mínimos” y,
- En el bloque IV, denominado “Calculas e interpretas máximos y mínimos aplicados a problemas de optimización”

El contenido temático del bloque es:

Sesión 1: Valores máximos y mínimos de funciones
Sesión 2: Criterios para cálculo de máximos y mínimos
Sesión 3: Aplicaciones de máximos y mínimos

c) Perspectiva de los máximos y mínimos relativos

En la sesión dos del bloque I, se centra en la construcción de los modelos matemáticos. Según el autor corresponde a un enfoque de aplicación previa e informal del Cálculo Diferencial, para observar los modelos matemáticos que resuelven problemas reales. En este caso utiliza como ejemplos los problemas de optimización con la intención de mostrarle al estudiante que existen problemáticas reales que requieren de una solución más rigurosa que el llamado “tanteo y error”.

Es así que en varias ocasiones indica que es en el IV bloque que se trataran con más detenimiento los problemas de máximos y mínimos.

Y cuando incursionamos en el bloque IV encontramos que:

En la sesión 1 define los máximos y mínimos relativos, luego menciona el teorema de extremo relativo, luego define el punto crítico, luego presenta la definición y teorema de máximo y mínimo absoluto, luego presenta la definición y teorema de las funciones crecientes y decrecientes.

En la sesión 2 presenta el teorema del criterio de la primera derivada; define y presenta el teorema de concavidad; presenta el teorema de punto de inflexión y finalmente presenta el teorema del criterio de la segunda derivada.

Que para la aplicación del criterio de la primera derivada presenta el siguiente proceso y menciona que “la mejor manera de aprender este proceso es mediante ejemplos y la práctica asidua” lo cual induce al estudiante a desarrollar habilidades memorísticas.

Para encontrar los valores máximo o mínimo de una función $f(x)$ que junto con su primera derivada, es continua, se procede con:

1. Hallar los puntos críticos, es decir, los valores c que $f'(c) = 0$.
2. Representar los intervalos en que el eje X se divide por los puntos críticos.
3. Observar el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos generados.
4. Entonces para *x* crecientes:

I. *f* tiene un máximo que vale $f(c)$ si f' cambia de + a – alrededor del punto crítico *c*.

II. *f* tiene un mínimo que vale $f(c)$ si f' cambia de – a + alrededor del punto crítico *c*.

Para la aplicación del criterio de segunda derivada, presenta el siguiente proceso:

> Para encontrar los valores máximo o mínimo de una función $f(x)$ que junto con la segunda derivada, es continúa, se procede con:
>
> 1. Hallar los puntos críticos, es decir los valores c que $f'(c)=0$
> 2. Entonces para cada punto crítico c:
>
> I. f tiene un máximo que vale $f(c)$ si $f''(c)<0$.
>
> II. f tiene un mínimo que vale $f(c)$ si $f''(c)>0$.

En la sesión 3 presenta problemas reales, que primero hay que determinar la función que modela el problema y luego aplica los teoremas que ha tratado con anterioridad, por ejemplo los criterios de primera y segunda derivada.

Respecto a las derivadas de orden superior o derivadas sucesivas; aparece de forma breve en el bloque III, dentro de la sesión “teoremas de derivación de funciones algebraicas”. Son presentados en sentido iterativo de derivar una y otra vez utilizando los teoremas de derivación. Al respecto exponemos la explicación que da el autor sobre derivadas de orden superior.

Si la función $y = f(x)$ tiene derivada, la denotamos y la llamaremos la primera derivada de f. Es decir, es posible que exista más de una derivada en una misma función. Entonces, si la función obtenida f' es diferenciable, podemos obtener la derivada de f' que se llamará la segunda derivada de f. Ésta la denotaremos por f'' (se lee *f* biprima). En caso de que f'' sea diferenciable podemos calcular la tercera derivada de f, es decir f'''. (p.104)

3.3.4 Reflexión Sobre el Análisis de la Componente Didáctica

El análisis realizado nos ha permitido evidenciar un limitado tratamiento de los máximos y mínimos relativos, que aparecen al final del libro después de estudiar límites y derivadas, como problemas de aplicación (problemas de optimización), el cual se reduce a aplicar definiciones y teoremas finamente terminados. En cuanto a las derivadas de orden superior o derivadas sucesivas, sólo en el segundo libro son tratados de manera breve, bajo la idea de iteración y no de variaciones sucesivas. En consecuencia los máximos y mínimos pasan desapercibidos en las derivadas de orden superior, que deberían estudiarse, ya que para obtener una función derivada el punto de inflexión, máximos y mínimos son propiamente fundamentales, invariablemente de la necesidad de optimizar como son presentados en un ambiente escolar.

Al consultar estos libros de textos, nos dimos cuenta que la estructura de los contenidos del programa y la forma como se aborda el desarrollo de los mismos, tienen estrecha relación, ya que en el programa de estudio los máximos y mínimos son clasificado al final del programa como problemas de aplicación y del mismo modo aparecen en los libros, en el que primeramente se abordan temas como límites y derivadas que finalmente son aplicados a los máximos y mínimos relativos a través de los criterios de la primera y segunda derivada. Criterios construidos o comprobados a partir de otros teoremas como son: teorema del punto crítico, el teorema del Roll y el teorema del valor medio.

3.4 Diseño de la secuencia didáctica y análisis *a priori*

En este apartado se presentará el prediseño de la secuencia didáctica y el análisis *a priori* de la misma. El cual consiste en tres actividades, donde se espera que los alumnos logren resignificar al saber a enseñar. Las actividades consisten en caracterizar a los máximos y mínimos relativos en contextos numéricos, haciendo uso para su análisis, la tabla numérica y las diferencias aritméticas, los cuales de acuerdo a lo investigado son representaciones semióticas que dieron origen al cálculo infinitesimal. Por ello describimos de acuerdo con lo investigado en Arcos (2010), lo que entendemos por diferencia, diferencial y derivada. Pues bien, son todas ellas afines; sin embargo su significación y esencia tiene diferencias significativas entre sí.

3.4.1 ¿Qué es diferencia, diferencial y derivada?

En el discurso matemático escolar tradicional, la derivada es definida en un contexto analítico, una función f es derivable en un punto x si existe:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De esta forma es aplicada a problemas de optimización. Sin embargo, la derivada en sus inicios fue considerado como: velocidad instantánea en el cálculo de Newton y como cociente de diferenciales en el cálculo de Leibniz: el concepto de velocidad instantánea o razón de cambio instantánea es esencialmente lo mismo que el concepto de derivada, el cual resulta de considerar un momento dado y otro infinitamente próximo al primero (en el instante siguiente), de manera que será la razón entre los cambios instantáneos de la posición y el tiempo. De igual forma, el cociente de diferenciales es esencialmente lo mismo que el concepto de derivada, el cual resulta de un cociente de cantidades infinitamente pequeñas llamadas infinitesimales.

$$\frac{dy}{dx}$$

La diferencia denota incrementos finitos $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y el diferencial incrementos infinitesimales dx, dy, dz; en este sentido cuando hablamos de diferencia nos referimos a valores finitos de la función en dos puntos vecinos y para los diferenciales los valores de la función son infinitesimales, es decir, es el resultado de considerar un momento dado y otro infinitamente próximo al primero. De forma breve la esencia de estos conceptos matemáticos surge en los trabajos de Leibniz, quien se inspiró sobre las sucesiones de sumas y diferencias de números en un contexto discreto, que luego las generalizó al contexto continuo de ahí los diferenciales.

No obstante, en la enseñanza tradicional la derivada se centra en términos de límite, tal vez, por ello, deja de lado ciertos marcos de referencia donde pudiera resignificarse la matemática. Al respecto Cantoral (2019) señala:

> En la enseñanza, no será la Derivada el concepto a introducir en primera instancia, sino la noción de comparación y predicción como las prácticas que le signifiquen. Ambas actividades tienen prácticas asociadas, comparar, restar, medir, conmensurar, anticipar, estimar, aproximar o predecir. (p, 113)

Por ello, en el diseño de esta secuencia didáctica se aplicara la estrategia variacional de comparación en un contexto numérico, donde aplicaremos la idea de diferencia aritmética a dos de los argumentos de L'Hospital; el de la noción de tamaño y el de identificar el signo de las diferencias. Enfatizamos que L'Hospital entiende las diferencias como infinitesimales. Nosotros lo utilizaremos de forma finita con pretensión a extrapolarlo a la idea de diferencial.

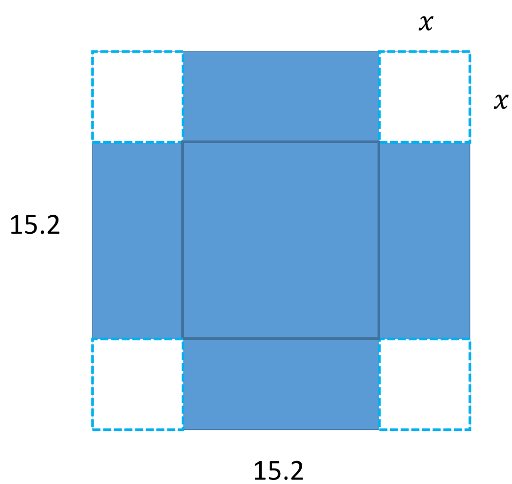
La estrategia variacional de comparación, es una estrategia asociada a la acción de establecer diferencias entre estados; he aquí, que nos vemos obligado a explicar lo que entendemos por el concepto de diferencia, ya que también hemos mencionado que la diferencia es una herramienta de análisis del cálculo; En la presente investigación retomamos y entendemos la idea de diferencia expresado en Sánchez y Molina (2006), como un concepto matemático que fungió para determinar la variación entre dos estados consecutivos E_1 y E_2, es decir, el residuo de la sustracción E_2-E_1. Argumentan que “el concepto de diferencia, además de subyacer al concepto matemático de derivada, puede ser de utilidad para estudiar desde un contexto numérico algunas ideas propias del cálculo diferencial” (p, 741). De esta forma recomienda en análisis de la variación del movimiento en contextos numéricos y el manejo de objetos aritméticos, como a continuación se describe:

> Con base en el rastreo histórico de las ideas que dieron origen al concepto de derivada, se puede argumentar que un primer acercamiento al estudio del cálculo diferencial debería incluir un análisis de la variación del movimiento y quizá de otros fenómenos. Este análisis podría desarrollarse en un contexto numérico, porque la historia muestra que es la forma natural en que se desarrolló; y además el manejo de objetos aritméticos puede ser una base intuitiva que fomente el entendimiento de estos conceptos en los estudiantes. (p. 744)

3.4.2 Prediseño de la secuencia didáctica

Actividad 1

Un fabricante desea hacer cajas sin tapa, ocupando piezas cuadradas de cartón de 15.2 x 15.2 cm. Cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas. Como se ilustra en la figura:



Volumen = largo x ancho x alto

Por lo tanto,

La función que modela cualquier volumen de la caja es:

$$V(x) = 4x^3 - 60.8x^2 + 231.04x$$

De lo anterior te invito a que localices el volumen máximo en las tablas siguientes y que explores las ideas que caracterizan a un máximo analizando las tablas y respondiendo las preguntas indicadas.

Las tablas numéricas que analizaras; se construyeron con tres diferentes incrementos en x:

La tabla I con incremento de 1 centímetro en x, La tabla II con incremento de 0.1 centímetro en x, La tabla III con incremento de 0.01 centímetro en x.

Primer ejercicio

1.- Completa la tabla Calculando las diferencias de volumen (V2-V1,…).

TABLA I; x con incremento de un centímetro.

x (cm)	Volumen (cm^3)	Diferencia de volumen (cm^3)
1	174.24	
2	250.88	
3	253.92	
4	207.36	
5	135.20	
6	61.44	
7	10.08	

2.- Localice el volumen máximo y responda lo siguiente:

¿Cómo se comportan las magnitudes de los volúmenes anteriores al máximo?

¿Cómo se comportan las magnitudes de los volúmenes posteriores al máximo?

3.- Localice la diferencia del volumen máximo y responda lo siguiente:

¿Cómo son los signos de las diferencias anteriores al máximo?

¿Cómo son los signos de las diferencias posteriores al máximo?

4.- ¿Existe alguna relación entre el comportamiento del volumen y los signos de su diferencia? Explique.

Segundo ejercicio

1.- Completa la tabla Calculando las diferencias de volumen (V2-V1,…).

TABLA II; x con incremento de 0.1 centímetro.

x (cm)	Volumen (cm^3)	Diferencia de volumen (cm^3)
2	250.88	
2.1	254.10	
2.2	256.61	
2.3	258.43	
2.4	259.58	
2.5	260.10	
2.6	260.00	
2.7	259.31	
2.8	258.05	
2.9	256.24	
3	253.92	
3.1	251.10	
3.2	247.81	
3.3	244.07	
3.4	239.90	
3.5	235.34	
3.6	230.40	
3.7	225.11	
3.8	219.49	
3.9	213.56	
4	207.36	

2.- Localice el volumen máximo y responda lo siguiente:

a) ¿El volumen máximo es el mismo que en la tabla I? (si) (no) ¿Por qué?

b) ¿Cómo se comportan las magnitudes de los volúmenes anteriores al máximo?

c) ¿Cómo se comportan las magnitudes de los volúmenes posteriores al máximo?

3.- Localice la diferencia del volumen máximo y responda lo siguiente:

a) ¿Cómo son los signos de las diferencias anteriores al máximo?

b) ¿Cómo son los signos de las diferencias posteriores al máximo?

4.- ¿Existe alguna relación entre el comportamiento del volumen y los signos de su diferencia? Explique.

Tercer ejercicio

1.- Completa la tabla Calculando las diferencias de volumen (V2-V1,…).

TABLA III; x con incremento de 0.01 centímetro.

x (cm)	Volumen (cm^3)	Diferencia de volumen (cm^3)
2.4	259.584	
2.41	259.664	
2.42	259.738	
2.43	259.805	
2.44	259.866	
2.45	259.921	
2.46	259.969	
2.47	260.011	
2.48	260.047	
2.49	260.077	
2.5	260.100	
2.51	260.117	
2.52	260.129	
2.53	260.134	
2.54	260.133	
2.55	260.126	
2.56	260.112	
2.57	260.093	
2.58	260.068	
2.59	260.037	
2.6	260.000	

2.- Localice el volumen máximo y responda lo siguiente:

a) ¿El volumen máximo es el mismo que en la tabla II? (si) (no) ¿Por qué?

b) ¿Cómo se comportan las magnitudes de los volúmenes anteriores al máximo?

c) ¿Cómo se comportan las magnitudes de los volúmenes posteriores al máximo?

3.- Localice la diferencia del volumen máximo y responda lo siguiente:

a) ¿Cómo son los signos de las diferencias anteriores al máximo?

b) ¿Cómo son los signos de las diferencias posteriores al máximo?

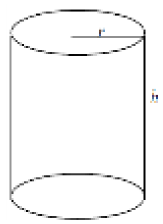
4.- ¿Existe alguna relación entre el comportamiento del volumen y los signos de su diferencia? Explique.

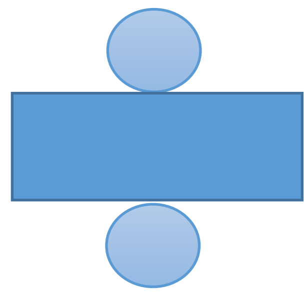
Análisis *a priori* de la actividad 1

CONFRONTACIÓN ANÁLISIS *A PRIORI* Y *A POSTERIORI*	
ACTIVIDAD 1	
Descripción de la actividad (ejercicio 1)	
Se le proporciona al estudiante hojas impresas sobre la introducción al problema de la actividad y los tres ejercicios que contiene una tabla numérica cada uno con valores en *x* de 1, 0.1 y .0.01 centímetro, respectivamente. Se le solicita que el estudiante calcule las diferencias de volúmenes.	
Análisis *a priori*	Análisis *a posteriori*
➢ Conocimientos y habilidades: Caracterizar las ideas subyacentes al cálculo de un valor máximo de una función dada en un dominio determinado. ➢ Intenciones didácticas: La función que modela los diferentes volúmenes, su máximo no es un número entero. Para que los estudiantes tengan la inquietud de pensar en cuál podría ser el valor exacto del volumen máximo, debido que cada vez que se toma un valor para x más pequeño, pues el volumen máximo cambia. Que los estudiantes se fijen en los comportamientos crecientes y decrecientes de los volúmenes dados; se percaten que al realizar las diferencias se obtienen como resultado cantidades con signos positivos y negativos. ➢ Consideraciones previas: Se espera que los estudiantes comprendan los comportamientos creciente y decreciente de los volúmenes y lo asocien con los signos de sus diferencias. Y de que las diferencias o incrementos alrededor del volumen máximo son cada vez más pequeños.	

Actividad 2

Una compañía usa latas de forma cilíndrica para envasar chocolate en polvo, pero quiere saber las dimensiones que minimiza el costo de la lata, es decir el área MÍNIMA de hoja lata que se debe emplear en cada bote, sabiendo que el volumen de cada bote es de 909.2 cm^3.





El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

El área exterior del cilindro es:

$$A = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h$$

Obtenemos h en función de r, y nos queda; $h = \frac{909.2}{\pi r^2}$

Al sustituir h en $A = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h$; obtenemos la siguiente función que nos modela cualquier área del cilindro.

$$A(x) = 2\pi r^2 + 2(\frac{909.2}{x})$$

En este problema x representa el Radio del cilindro.

De lo anterior te invito a que localices el área mínima en las tablas siguientes y que explores las ideas que caracterizan a un mínimo analizando las tablas y respondiendo las preguntas indicadas.

Las tablas numéricas que analizaras; se construyeron con tres diferentes incrementos en x:

La tabla I con incremento de 1 centímetro en x,

La tabla II con incremento de 0.1 centímetro en x,

La tabla III con incremento de 0.01 centímetro en x.

Primer ejercicio

1.- Completa la tabla Calculando las diferencias de áreas (A2-A1,…).

TABLA I; x con incremento de un centímetro.

x (cm)	área (cm^2)	Diferencia de área (cm^2)
1	1824.68	
2	934.33	
3	662.68	
4	555.13	
5	520.76	
6	529.26	
7	567.65	
8	629.42	
9	710.98	
10	810.16	

2.- Localice el área mínima y responda lo siguiente:

a) ¿Cómo se comportan las magnitudes de las áreas anteriores al mínimo?

b) ¿Cómo se comportan las magnitudes de las áreas posteriores al mínimo?

3.- Localice la diferencia del área mínimo y responda lo siguiente:

a) ¿Cómo son los signos de las diferencias anteriores al mínimo?
b) ¿Cómo son los signos de las diferencias posteriores al mínimo?

4.- ¿Existe alguna relación entre el comportamiento del área y los signos de su diferencia? Explique.

Segundo ejercicio

1.- Completa la tabla Calculando las diferencias de áreas (A2-A1,…).

TABLA II; x con incremento de 0.1 centímetro.

x (cm)	área (cm^2)	Diferencia de área (cm^2)
4	555.131	
4.1	549.133	
4.2	543.788	
4.3	539.060	
4.4	534.915	
4.5	531.324	
4.6	528.257	
4.7	525.690	
4.8	523.598	
4.9	521.962	
5	520.760	
5.1	519.975	
5.2	519.590	
5.3	519.589	
5.4	519.959	
5.5	520.685	
5.6	521.755	
5.7	523.159	
5.8	524.884	
5.9	526.922	
6	529.262	

2.- Localice el área mínima y responda lo siguiente:

a) ¿El área mínima es el mismo que en la tabla I? (si) (no) ¿Por qué?

b) ¿Cómo se comportan las magnitudes de las áreas anteriores al mínimo?

c) ¿Cómo se comportan las magnitudes de las áreas posteriores al mínimo?

3.- Localice la diferencia del área mínimo y responda lo siguiente:

a) ¿Cómo son los signos de las diferencias anteriores al mínimo?

b) ¿Cómo son los signos de las diferencias posteriores al mínimo?

4.- ¿Existe alguna diferencia entre el comportamiento del área y los signos de su diferencia? Explique.

Tercer ejercicio

1.- Completa la tabla Calculando las diferencias de áreas (A2-A1,…).

TABLA III; x con incremento de 0.01 centímetro.

x (cm)	área (cm^2)	Diferencia de área (cm^2)
5.2	519.590	
5.21	519.573	
5.22	519.560	
5.23	519.550	
5.24	519.544	
5.25	519.543	
5.26	519.544	
5.27	519.550	
5.28	519.560	
5.29	519.573	
5.3	519.589	
5.31	519.610	
5.32	519.634	
5.33	519.662	
5.34	519.694	
5.35	519.729	
5.36	519.768	
5.37	519.810	
5.38	519.856	
5.39	519.906	
5.4	519.959	

2.- Localice el área mínima y responda lo siguiente:

a) ¿El área mínima es el mismo que en la tabla II? (si) (no) ¿Por qué?

b) ¿Cómo se comportan las magnitudes de las áreas anteriores al mínimo?

c) ¿Cómo se comportan las magnitudes de las áreas posteriores al mínimo?

3.- Localice la diferencia del área mínimo y responda lo siguiente:

a) ¿Cómo son los signos de las diferencias anteriores al mínimo?

b) ¿Cómo son los signos de las diferencias posteriores al mínimo?

4.- ¿Existe alguna relación entre el comportamiento del área y los signos de su diferencia? Explique.

Análisis *a priori* de la actividad 2

<table>
<tr><td colspan="2">CONFRONTACIÓN ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTIVIDAD 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción de la actividad</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se le proporciona al estudiante hojas impresas sobre la introducción al problema de la actividad y los tres ejercicios que contiene una tabla numérica cada uno con valores en x de 1, 0.1 y .0.01 centímetro, respectivamente. Se le solicita que el estudiante calcule las diferencias de las áreas.</td></tr>
<tr><td>Análisis a priori</td><td>Análisis a posteriori</td></tr>
<tr><td>➢ Conocimientos y habilidades:
Caracterizar las ideas subyacentes al cálculo de un valor mínimo de una función dada en un dominio determinado.

➢ Intenciones didácticas:
La función que modela las áreas, su valor mínimo no es un número entero; para que los estudiantes tengan la inquietud de pensar en cuál podría ser el valor exacto del área mínima, debido que cada vez que se toma un valor para x más pequeño, pues el área mínimo cambia.

Que los estudiantes se fijen en los comportamientos crecientes y decrecientes de las áreas; que se percaten que al realizar las diferencias se obtienen como resultado cantidades con signos negativos y positivos.

➢ Consideraciones previas:
Se espera que los estudiantes comprendan los comportamientos creciente y decreciente de los volúmenes y lo asocien con los signos de sus diferencias. Y de que las diferencias o incrementos alrededor del volumen máximo son cada vez más pequeños.</td><td></td></tr>
</table>

Actividad 3

Una vez que has trabajado con las dos actividades anteriores; ahora describa las ideas exploradas en cada una de las actividades, respondiendo las siguientes preguntas.

1.- Como te habrás dado cuenta el máximo o mínimo de la misma función cambia en cada tabla (tabla I, II, III.), por ello, argumenta o bosqueja como podríamos obtener el Máximo o el Mínimo exacto, para cada caso.

a) Compara la diferencia del máximo de la tabla I, II, III. ¿Cada vez es más grande o pequeña?, ¿si cada vez tomáramos incrementos en x más pequeños que pasaría con la diferencia de volumen máximo?
b) Compara la diferencia del mínimo de la tabla I, II, III. ¿Cada vez es más grande o pequeña?, ¿si cada vez tomáramos incrementos en x más pequeños que pasaría con la diferencia del área mínima?

2.- Explique ¿Por qué los signos de las diferencias cambian de Positivo a Negativo y de Negativo a Positivo?

c) Explique, qué ideas consideras caracterizan a un Máximo.

d) Explique, qué ideas consideras caracterizan a un Mínimo.

Análisis *a priori* de la activad 3

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">ACTIVIDAD 3</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Descripción de la actividad</td></tr>
<tr><td colspan="2">Una vez los estudiantes hayan respondido las dos actividades antes descrita, se prosigue con la tercera actividad; por el que se le proporciona al estudiante una hoja impresa con preguntas respecto a las dos actividades anteriores.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Análisis a priori</td></tr>
<tr><td>➢ Conocimientos y habilidades:
Caracterizar las ideas subyacentes al cálculo de un valor máximo y mínimo de una función dada en un dominio determinado.

➢ Intenciones didácticas:
La confrontación de las dos actividades antes resueltas, con el fin de reforzar las ideas adquiridas, el cual les permita establecer, que para un máximo los signos se encuentran en un orden de positivo a negativo y que para un mínimo los signos pasan de negativo a positivo; además puedan explicar el porqué de los cambios de los signos y finalmente logren explicar que la diferencia de un máximo o mínimo tiende a cero.

Consideraciones previas:
Se espera que el alumno logre explicar las relaciones que existen entre los crecimientos y decrecimientos y los signos de sus diferencias; es decir que para un máximo sus diferencias pasan de positivo a negativo y para un mínimo sus diferencias pasan de negativo a positivo, y que los cambios de signos y el orden que le corresponde a cada uno, son debido a que las diferencias de un máximo decrecen y las diferencias de un mínimo crecen y también logren explicar que la diferencia correspondiente a un máximo o un mínimo tiende a cero.

Se espera también surja en el estudiante la idea infinitesimal de tomar cada vez intervalos más pequeños o que pueda establecer que la cantidad máxima o mínima se encuentra cuando la diferencia es igual a cero.</td><td align="center" valign="top">Análisis a posteriori</td></tr>
</table>

CONCLUSIONES

A través de esta investigación hemos desarrollado unos de los temas de enseñanza-aprendizaje del nivel medio superior: los máximos y mínimos relativos. Los cuales son abordados en el aula desde los criterios de la primera y segunda derivada. Donde los estudiantes aplican dichos criterios establecidos desde el rigor matemático, sin comprender las ideas intuitivas subyacentes que dieron origen a dichos conceptos; de forma trivial llegan a responder que un punto crítico de una función es cuando la derivada es cero. De ahí, cabe cuestionar también qué es la derivada y porque en dicho punto es cero; diferentes investigaciones han reportado las dificultades que tienen los estudiantes al definir o conceptualizar la derivada. De esta forma entendemos que los máximos y mínimos relativos no son conceptos triviales que pueden ser reducidos a su definición analítica cuando se trata de resignificar o apropiarse cognitivamente del concepto.

Con respecto a los objetivos específicos planteados; el de realizar una revisión histórica de los conceptos de máximos y mínimos relativos, el cual mencionaremos algunos que consideramos más importante y que fueron de utilidad en el diseño de la secuencia didáctica. Encontramos que los problemas de optimización han sido tratados de los griegos, los cuales buscaron resolver varios problemas isoperimétricos, así como los planteamientos de Kleper desde la geometría y el uso de tablas numéricas para determinar el volumen máximo de un barril de vino al darse cuenta que cerca del volumen máximo las diferencias de volumen son muy pequeñas.

Luego el método de Fermat desde un aspecto geométrico y algebraico, que muestran el uso de la subtangente y la tangente como herramienta de cálculo en la optimización, que de manera implícita mostraron la idea de raíz doble, que en el punto máximo una recta secante se convierte en recta tangente con pendiente cero; de ahí que Hudde buscará establecer dos reglas para calcular máximo y mínimo desde las ideas de raíz doble. La idea de diferencia es subyacente al cálculo de Newton como herramienta de análisis del movimiento y su teoría de las fluentes y fluxiones, el cual aplicado a los máximos y mínimos nos dice que ante una cantidad grande o pequeña su fluir no crece ni decrece por ello su fluxión quedaría determinada igualándolo a cero. También en el cálculo de Leibniz subyacen las ideas de diferencias aritméticas que posteriormente lo trasciende a un sentido infinitesimal. En cuanto a los máximos y mínimos lo explica desde la comparación de estados de las ordenadas, el máximo estará donde la ordenada sea la más grande y que en ese punto la tangente será paralela con la abscisa.

En la etapa de exploración y desarrollo del cálculo encontramos los argumentos de L'Hospital, quien se plantea la difusión de dicho conocimiento, los cuales podrían pensarse como los primeros libros de texto para comenzar en el aprendizaje del cálculo; con respecto a los máximos y mínimos son presentados de forma gráfica donde expone tres argumentos: la noción de tamaños de la ordenada, la identificación de los signos de las diferencias y la observación del comportamiento de la subtangente y la tangente. Es importante mencionar la afirmación que hace sobre el segundo argumento de que una diferencia no puede convertirse de positiva a negativa si no se hace pasar por cero, o por infinito. Finalmente encontramos varios teoremas planteados desde el rigor matemático para el cálculo de máximos y mínimos. Como el teorema de Weierstrass, teorema de Rolle y el teorema del valor medio.

Respecto al segundo objetivo específico; indagar en el programa de estudios y libros de texto que se utilizan en el CEBACH. Encontramos, que los conceptos de máximos y mínimos relativos son propuestos desde el programa de estudios y los libros de textos como problemas de aplicación de la derivada a través de los criterios de la primera y segunda derivada, donde el tema de límites es el objeto de aprendizaje desde el inicio de la asignatura de cálculo diferencial. En el tercer objetivo específico, sobre buscar como el Pensamiento y Lenguaje Variacional puede implicar en el diseño de la secuencia didáctica; encontramos las estrategias variacionales siguientes: comparación, seriación, cuantificación, predicción. De los cuales los dos primeros fueron retomados para el diseño de la secuencia didáctica, la comparación nos permite establecer diferencias entre estados y la seriación nos permite analizar varios estados y establecer relaciones entre ellos.

Así, hemos realizado una investigación documental, debido que se logró atender las dos primeras fases de la ingeniería didáctica, el análisis preliminar y, el diseño de la situación didáctica y su análisis *a priori*, toda vez, que por la circunstancia actual por la pandemia generado por el Covid-19, la escuela donde se pretendía realizar la fase de experimentación se encuentra laborando de forma virtual. Pues la secuencia didáctica se diseñó para aplicarlo de forma presencial donde el investigador pueda observar el desarrollo de la misma. No obstante, estas dos primeras fases nos permiten a manera de conclusión poder dar respuestas a algunas de las preguntas de investigación planteadas al inicio de este escrito. Los cuales son:

¿Cómo resignificar los conceptos de máximo y mínimo relativo? ¿Es imprescindible el concepto de derivada para resignificar los valores extremos de una función? Y ¿Cuáles son los significados que emergen en los estudiantes y como los argumentan?

La resignificación de los máximos y mínimos relativos son unos de los conceptos de gran relevancia debido que dichos conceptos, son problemas (optimización) que dieron origen a la derivada. En este sentido en un ambiente de enseñanza aprendizaje, consideramos un obstáculo al aprendizaje al tratarlos como problemas de aplicación, pues creemos son necesarios estos problemas para iniciarse en el estudio de la asignatura de cálculo diferencial, debido que la historia nos ha mostrado que el problema de máximos y mínimos es inherente al desarrollo de la derivada. Por ello en el diseño de la secuencia didáctica hemos considerado algunos elementos subyacentes, como son: la diferencia aritmética, la comparación, la variación y los signos de las diferencias.

Con respecto a la segunda pregunta planteada; no es necesario utilizar el concepto de derivada para resignificar los conceptos de máximos y mínimos relativos. Puesto que el concepto de derivada, podría decir, es el culmen de lo finamente establecido desde el rigor matemático.

La tercera pregunta queda abierta, ya que no se realizó la fase de experimentación de la secuencia didáctica.

SUGERENCIAS

En esta sección se describen algunas sugerencias derivados del proceso del desarrollo de la investigación. Debido que como bien se ha mencionado que por la pandemia por Covid-19 el objetivo de la investigación no se logró como se había planteado, el de aplicar la secuencia didáctica a los estudiantes del nivel medio superior y analizar las respuestas que ellos emitieran. Sin embargo, no fue posible porque la escuela donde se pretendía aplicar la secuencia didáctica se encontraba laborando a distancia, pues la secuencia didáctica se diseñó para ser abordada de forma presencial. Por ello no fue posible presentar en esta investigación los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica.

De lo anterior una de las sugerencias para continuar con la investigación sería aplicar la secuencia didáctica de forma presencial a los estudiantes del nivel medio superior que cursan la asignatura de cálculo diferencial.

La secuencia didáctica diseñada podría trabajarse con el programa Excel. Lo que facilitaría a los estudiantes que puedan explorar con valores cada vez más pequeños de x.

La secuencia didáctica podría aplicarse a estudiantes del nivel medio superior que aún no llevan la asignatura de cálculo diferencial. Para ver como ellos explican los cambios de signos de las diferencias y lo pequeño de la diferencia cerca de un máximo y un mínimo. Por ejemplo, en los temas de función cuadrática, donde a los estudiantes se les pide calcular el vértice de una parábola, dicho vértice puede ser un máximo o un mínimo. También en la asignatura de física en el tema de movimientos en dos dimensiones, cuando se les pide a los estudiantes que calculen la altura máxima que alcanza un objeto al ser lanzado de forma vertical o parabólica oblicuo.

REFERENCIAS

Arcos, I. (2010). *Cálculo infinitesimal para bachillerato*. Kali.

Arcos, J. I., Guerrero, M. L., Sepúlveda, A. García, J. R. (2007). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Editorial Kali.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *7*(2), 33-115. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26*(1), 1195-1203. http://www.etnomatematica.org/memorias/ALME_26.pdf

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*[Archivo PDF]. http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/6586/1/images/desarrollo_del_pensamiento_y_leng_v_smc_baja.pdf

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber, pensamiento y lenguaje variacional*. gedisa.

Cantoral, R. (2013a). Teoria Socioepistemológica de la Matemática Educativa. gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* Thomson.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* Editorial trillas. https://www.researchgate.net/profile/Rosa-Farfan/publication/261363590_Desarrollo_del_pensamiento_matematico/links/58e2b14baca2722505d16462/Desarrollo-del-pensamiento-matematico.pdf

Cantoral, R., Molina, J.G. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18(), 463-468. https://core.ac.uk/download/pdf/33252473.pdf

Cantoral, R., Sánchez, M. y Molina, J. (2007). Aspectos numéricos y gráficos de la derivada de orden superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*(1), pp. 554-559. https://www.clame.org.mx/documentos/alme20.pdf

Cardona, R. (2009). *Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada.* [Tesis de maestría, Cicata-IPN]. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2009/cardona_2009.pdf

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN]. https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/286/APOLO%20CASTANEDA%20ALONSO.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y Maria G. Agnesi. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2), pp. 253-265. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000200005

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas*. Biblioteca del normalista. http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/174473/1/0037_970-18-1739-7_Matmaticas_Chevallard.pdf

Collette, J. (1986). *Historia de las matemáticas II*. Siglo veintiuno.

Cruse, A. y Lehman, M. (1982). *Lecciones de cálculo 1 introducción a la derivada*. Fondo Educativo Interamericano.

Cruz, E. (2008). *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática*. [Tesis de Maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN]. https://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11470/1/PROME_M_20081100_002.PDF

Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. (2010). *Calculo diferencial e integral I[Archivo PDF]. https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/fp5s-caldifeintegral1.pdf*

Dirección de Colegio de Bachilleres del Estado de Yucatán. (2011). *Cálculo diferencial[Archivo PDF].*

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. Díaz de Santos, S.A.

Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento*. Editorial Iberoamérica. http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Fregona, D. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires. Libros del zorzal. http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F204043%2Fmod_resource%2Fcontent%2F2%2F287885313-Guy-Brousseau-Iniciacion-al-estudio-de-la-teoria-de-las-situaciones-didacticas-pdf.pdf

Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*. *56*(4), 195-206. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Allendoerfer/1984/0025570x.di021131.02p02223.pdf

Jiménez, D. (2010). El problema del área en los elementos de Euclides. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 17*(2), p. 179-207. https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol17/BAMV_XVII-2_p179-207.pdf

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. [Tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica del Perú]. https://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2012/05/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf

Marín, Á. (2007). Las reglas nos guían hacia los conceptos. *SUMA. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, 55 (1), pp. 61-66. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/55/SUMA_55.pdf

Matemáticas Visuales (17 de noviembre de 2021). *Kepler: el volumen de un barril de vino. Otra mirada*. http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/kepler/keplerbarrel2.html

Moreno, S. y Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, *16*(2), 93-104. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516205

Pérez, A. (2008). *Una vinculación de la matemática escolar y la investigación a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Chiapas].

Pérez, F. J. (2008a). *Calculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf

Pino-Fan, L. R., Díaz, J y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matematica Pesquisa*, *13*(1), pp. 142-178. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/Pino-Fan_Mat_Pesquisa%202011.pdf

Sánchez, M. y Molina, J. G. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,19*(1), p. 739-744. https://www.clame.org.mx/documentos/alme19.pdf

Sarmiento, E. (2008). *Estudio epistemológico de la derivada a través de los enfoques local y global*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Chiapas]

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2018). *Programa de Estudio de Cálculo Diferencial I*[Archivo PDF]. https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/CFP/5to-Semestre/Calculo-Diferencial.pdf

Solís, M. (1993). *Estudio de la noción de variación en contextos físicos: el fenómeno de la propagación del calor*. [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN].

Valero, M. (2000). *La derivada como organización de las derivadas sucesivas.* [Tesis de maestría, Universidad Virtual del ITESM].