UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE INGENIERÍA

CAMPUS I

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

DE LOS SECTORES CIRCULARES A LOS TESELADOS. UNA PROPUESTA DE ABORDAJE EN EL AULA

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA

MARÍA DEL ROSARIO LEÓN LÓPEZ PS920

DIRECTORA DE TESIS

DRA. ALMA ROSA PÉREZ TRUJILLO

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS

OCTUBRE DE 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE INGENIERÍA C-I

Tuxtla Gutiérrez; Chiapas.
A 28 de octubre del 2021
Oficio. FI. 01/2120/2021

C. Maria del Rosario León López
Maestria en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa
P r e s e n t e.

Por este medio comunico a usted, que se autoriza la impresión de su trabajo de tesis denominado: "De los sectores Circulares a los teselados. Una propuesta de abordaje en el aula", para que pueda continuar con los trámites de titulación para la obtención del Grado de la Maestria en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.
"Por la conciencia de la necesidad de servir"

Dr. José Alonso Figueroa Gallegos
Encargado de Dirección

AUTÓNOMA
DIRECCIÓN DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA

C. c. p. Dra. Daisy Escobar Castillejos. Coordinadora de Investigación y Posgrado. - F.I.
Archivo/Minutario.
JAFG/DEC/lcag*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
SECRETARÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE DESARROLLO BIBLIOTECARIO

Código: FO-113-09-05	
Revisión: 0	

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) Maria del Rosario León López,
Autor (a) de la tesis bajo el título de "De los sectores circulares a los teselados. Una propuesta de abordaje en el aula."

presentada y aprobada en el año 2021 como requisito para obtener el título o grado de Maestria en ciencias con especialidad en Matemática Educativa autorizo a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 28 días del mes de Octubre del año 2021.

Maria del Rosario León López
Nombre y firma del Tesista o Tesistas

Agradecimientos

A la Doctora Alma Rosa Pérez, por compartir sus conocimientos, su tiempo y su paciencia para la realización de este trabajo.

Al Maestro Cristóbal por los apoyos brindados en todo momento y su gran vocación para la enseñanza.

Al Doctor Hipólito, al Doctor German, al Doctor Miguel, al Maestro Pierre, y a mi muy estimado Maestro Trujillo, a todos por sus conocimientos compartidos durante la maestría.

No podía faltar Amanda, por la buena amistad que surgió de esta convivencia

Y a mis compañeros Alejandra, Evelia, Armando, Fernando, Freddy, Luis y Gustavo, por la gran amistad que surgió y el apoyo brindado hacia mi persona.

Dedicatoria

A Dios por su inmenso amor y nunca soltarme de su mano.

A Mario Enrique, por su amor, paciencia, y apoyo para concluir este trabajo.

A Charito, por todo tu amor, tu tiempo acompañándome durante las clases, por tu apoyo incondicional en todo momento.

A mis padres Tere y Abel por su amor, y apoyo en todo momento.

A mis ángeles en cielo, por ser la energía cósmica que me alimenta diariamente para no rendirme ante los retos de la vida. Avelina, Rosario y Manuel.

A mi hermano Marcos Abel, por todo su amor.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas de matemáticas en la secundaria, que a la mayoría de los alumnos le causa confusión, es el cálculo de áreas, este tema se enseña ampliamente en la educación primaria, esto se les dificulta cuando se trata de figuras compuestas y aún más cuando le agregamos sectores circulares o bordes redondeados. En este trabajo de investigación se propone usar un modelo geométrico no poligonal para calcular su área y pretende que los alumnos utilicen sus saberes previos para llegar al resultado construyendo su propio conocimiento. Esto se desarrollará con ayuda de una secuencia didáctica, donde partiendo de los sectores circulares, llegaremos a los teselados, como una propuesta para generar el movimiento de los saberes aprendidos en la vida escolar de los alumnos. Uno de los conceptos claves en esta investigación es la Geometría Euclidiana, que de acuerdo a Domínguez, Domínguez, García y Moreno (2016, p. 1) "está considerada como la disciplina más adecuada para desarrollar la capacidad de razonamiento del alumno y despertar su interés por las matemáticas en todos los niveles".

Según la definición, de geometría, es el estudio de las magnitudes y las características de las figuras que se encuentran en el espacio o en un plano. Euclidiano. En el siglo III antes de Cristo, Euclides propuso cinco postulados que permiten estudiar las propiedades de las formas regulares (líneas, triángulos, círculos, etc.) Así dio nacimiento a la geometría euclidiana. Esta es una de las ramas de las matemáticas que se ocupa del estudio de las propiedades de las distintas formas que se pueden lograr a partir de una combinación de puntos, ángulos, líneas y planos[1]. Cabañas (2005), en su artículo de la noción y conservación en el estudio del área, lo define como,

> El concepto de área está relacionado con la cuantificación de una superficie a la que se asocia una unidad de medida, expresada como unidad cuadrada.

---

[1] Fuente: Definición ABC. Fecha: 11/07/2017. Autor: Javier Navarro. https://www.definicionabc.com/ciencia/geometria-espacial.php

> La noción de área a su vez está relacionada a las de conservación, comparación y medida, mismas que pueden ser representadas a través de formas diversas, como: gráfica, numérica y simbólica. (Cabañas, 2005, p.457)

Se pueden calcular áreas de triángulos, cuadrados, pentágonos, trapecios, círculos, coronas, sectores circulares, elipses, etc., tanto de figuras regulares como irregulares., el área de sectores circulares, como su nombre lo indica es una parte de un círculo, el cual al poder puede tener diferentes medidas, esto al variar la abertura del ángulo central haciéndolo pequeño o mucho muy grande.

El ángulo central de un círculo es el ángulo que su vértice está en el centro de la circunferencia, y sus lados son dos radios. Esto no siempre es así, pues tenemos muchas veces que usar la imaginación y la intuición para reconocer la parte del sector circular del cual nos interesa conocer el área. Ya que la circunferencia la podemos dividir en innumerables cortes para formar sectores circulares de diferentes tamaños. Y también podemos formar figuras uniendo sectores circulares de diferente manera y en diferentes posiciones.

Cuando hablamos de polígonos regulares nos encontramos que son figuras planas formadas por tres o más de tres lados al igual que su número de ángulos interiores. Los ángulos interiores de un polígono son los que están formados por dos de sus lados, y medidos por la parte de adentro de la figura, esta abertura se va haciendo más grande conforme aumenta el número de lados del polígono.

En esta investigación se propone llegar de los sectores circulares a los teselados, como una opción para el cálculo de áreas, los teselados son sucesiones de figuras planas regulares que están unidas unas con otras no sobrepuestas, y no deben existir huecos entre ellas. Los teselados se van conformando con las transformaciones isométricas que se les aplica a los polígonos esto quiere decir, que el plano se va recubriendo por completo. v

Para llegar a estos arreglos de figuras planas que se junten sin dejar huecos, es necesario revisar cuáles de las figuras planas si cumplen las dos condiciones anteriores, y cuáles no; a las figuras que cubren el plano de forma completa se les llama teselas; los hexágonos que construyen las abejas por ejemplo es un teselado natural (ver figura 1) y cumple con los requisitos para ser llamado teselado.

Figura 1. Panal de abejas[2].

Es importante señalar que para establecer si los polígonos son susceptibles de ser empleados para formar teselados, es indispensable hacer un análisis de cada uno de ellos para seleccionar con cuáles si cumplen con las propiedades necesarias y cuáles no.

Las figuras más comunes que si cubren el plano en su totalidad son los cuadrados, rectángulos y hexágonos, un ejemplo simple que encontramos todos los días son los pisos de losetas cuadradas, si quisiéramos hacer un teselado de una sola figura; cuando ya son dos o más tipos de figuras entonces tendremos que usar un poco la imaginación de tal forma que la sucesión de figuras nos genere un teselado con las dos condiciones anteriormente mencionadas.

Una inquietud que surge al trabajar con los sectores circulares es que a los alumnos se les dificulta el cálculo del área de una superficie con bordes redondeados, y por lo general no logran visualizar el problema de una manera diferente. Por lo que si el sector circular proviene de un polígono regular es más fácil calcular el área de esa figura.

---

[2] Fuente: http://supercurioso.com/por-que-las-abejas-hacen-las-celdas-de-su-panal-en-forma-hexagonal/

Algunos aspectos que debemos tomar en cuenta para el cálculo de estas áreas es el conocimiento previo del alumno, si recuerda como calcular el área de un cuadrado y de un círculo, y también la ubicación espacial del alumno. Esta se refiere a la capacidad de establecer relaciones entre objetos o figuras geométricas en nuestro caso forma, espacio y medida. Y sobre todo la capacidad de razonar, para establecer las relaciones entre las secuencias de figuras, colores y cambio de posición de las figuras.

El quehacer diario de las matemáticas en el aula es crear situaciones problemas que potencialicen los conocimientos de los estudiantes, y dentro del campo de la geometría tenemos infinidad de habilidades y conocimientos que se pueden desarrollar de manera fácil, se puede trabajar sin necesidad de objetos de medición, es más, se puede empezar a abordar desde el doblado de papel para empezar a conocer los ejes de simetría.

La situación problema debe permitir al estudiante desplegar su actividad matemática a través del desarrollo explícito de una dialéctica entre la exploración y la sistematización. Esto implica que la situación problema debe tener, como parte de los elementos que la constituyen, dispositivos que permitan a los alumnos desarrollar, de manera autónoma, procesos de exploración tales como la formulación de hipótesis, su validación, y si es del caso, su reformulación. Este trabajo permite la elaboración conceptual de los objetos matemáticos presentes en la situación (sistematización), esto es, las situaciones problema deben permitir un camino que recree la actividad científica del matemático, en el ejercicio de su autonomía intelectual (Obando y Muñera, 2003. p. 186).

Todo lo mencionado anteriormente sirve como antecedente de la investigación que realizaremos, la cual se titula “De los sectores circulares a los teselados. Una propuesta de abordaje en el aula” y que llevaremos a cabo con alumnos de la escuela secundaria “José María Luis Mora” turno matutino, del segundo grado, grupo C, dicha institución está situada en la colonia Albania Alta de la ciudad de Tuxtla Gutiérrez Chiapas.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS PRELIMINARES

En este capítulo se aborda la problemática que se atiende en esta investigación, derivado de ella surgen las preguntas de investigación a las que se les ha dado respuesta y en consecuencia los objetivos que se persiguen en la misma.

1.1. Problemática

Dentro la experiencia profesional como profesora de matemáticas en secundaria, uno de los problemas al que nos enfrentamos diariamente es el poco interés que el adolescente demuestra hacia la adquisición de nuevos conocimientos o de conocimientos que ya tiene pero que le cuesta trabajo relacionarlos o enlazarlos para crear nuevos conocimientos, si es claro que esto no es en toda la población estudiantil, pero si en gran parte de su mayoría, encontramos casos en los que confunden la forma de calcular el perímetro con el área de algunas figuras, otras veces no recuerdan las fórmulas para encontrar el volumen de los cuerpos geométricos, y cuando a las figuras se les realiza alguna modificación, como cortarlas o cambiarlas de forma, esto les genera una dificultad para obtener el área.

La inquietud que nos lleva a realizar esta investigación es que los alumnos de segundo grado de secundaria, difícilmente logran calcular áreas de coronas, de sectores circulares, o de figuras compuestas, esto se debe a que el área de algunas superficies son de forma irregular y para obtener el área total se debe hacer el cálculo por partes, para después hacer la sumatoria total de las áreas y así obtener el área total deseada, en la vida real este problema se nos puede presentar cuando se intenta vender algún terreno que no posee una forma regular por mencionar un ejemplo. Por lo tanto, se pretende proporcionarle al alumno algunas herramientas que le puedan ayudar a visualizar algunos problemas desde otra perspectiva que le facilite la solución, la habilidad de pesar, razonar y construir su propio conocimiento en base a su experiencia. Además de que los alumnos comprendan la noción de conservación de área.

Considerando la problemática planteada, y por ello nos preguntamos, ¿Qué tipo de actividades favorece la construcción de conocimientos al trabajar con sectores circulares?, ¿Qué herramientas de cálculo de áreas generan los alumnos al formar teselados con sectores circulares extraídos de un polígono regular y qué nuevos significados del área descubrieron?, ésta última es a la que se le dio respuesta a lo largo de esta investigación.

Esta investigación se llevó a cabo con alumnos de segundo grado de secundaria, de manera particular con estudiantes de la secundaria "José María Luis Mora" turno matutino, está ubicado al lado norte poniente de la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, en la Avenida 20 de noviembre y calle San Juan, colonia Albania Alta. La mayor parte de los alumnos viven en zonas cercanas a la escuela, muchos de ellos en su mayoría caminan para llegar al plantel. El nivel socioeconómico de la población escolar es medio-bajo. La escuela tiene 15 aulas, pero falta mobiliario para la población total de alumnos. También cuenta con una pequeña biblioteca, una sala de cómputo equipada con 40 computadores, una cancha de básquetbol, una plaza cívica techada con un domo y un salón de danza y baños para alumnos.

1.2. Objetivos de la investigación

En este apartado presentamos los objetivos generales y específicos que se persiguen en la investigación.

OBJETIVO GENERAL

Favorecer el análisis y la construcción de áreas de polígonos que permiten cubrir el plano a través de los sectores circulares

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Promover el uso de conocimientos previos para calcular las áreas de los sectores circulares.

2. Analizar y explicitar las características de las áreas de los polígonos que permiten cubrir el plano.
3. Identificar y diseñar actividades que favorezcan la construcción del conocimiento de áreas sobre sectores circulares y su vinculación con la construcción de teselados.

1.3. Estado del arte

En relación con el tema que es de interés para nuestra investigación, hemos dividido este apartado en tres partes, las cuales se abordan a partir de investigaciones diferentes que tratan sobre el concepto de área, los ángulos y por último el tema de los teselados.

1.3.1. Sobre el área

Para este apartado hemos analizado las investigaciones de Corberán (1996) titulado *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. Es un trabajo de investigación de casi 6 años, en escuelas de todos los niveles para ver el grado de comprensión sobre el concepto de área que tienen los alumnos al finalizar los niveles básicos de educación, bachillerato, orientación universitaria, ciencias y letras, escuela del magisterio y finalmente en la facultad de matemáticas. El objetivo de esta tesis doctoral fue realizar un análisis didáctico del concepto de área, para ello se requirió seleccionar a la población de alumnos a los cuales se les aplicarían diversos test, adecuados a su grado de estudio. Los test consistieron en calcular áreas, perímetros, transformaciones geométricas, conservación de área, de diferentes figuras. Algunas de las conclusiones en la conservación de área las razonan mediante la observación, y otras más a través de cálculos numéricos, muchas veces erróneos y sin finalizar el planteamiento algebraico. A algunos estudiantes también se les entrevisto sobre el método que emplearían para calcular ese tipo de áreas a lo que algunos respondieron que, si les facilitaban las fórmulas, no tendrían inconveniente en hacerlo. Uno de los ejercicios es el cálculo del área de una superficie no poligonal, dibujada sobre un papel cuadriculado, la superficie está compuesta de un semicírculo y dos partes circulares. Como se ilustra en las figuras 2 y 3.

objetivo del problema	tipo de superficie	¿se proporciona el dibujo de la superficie?	tipo de papel sobre el que se da el dibujo	naturaleza del procedimiento que se requiere para su resolución	contexto en el que se plantea
cálculo del área de una superficie	no poligonal	sí	cuadriculado	numérico que se puede simplificar con uno geométrico	numérico

Figura 2. Etapa diagnostica análisis de superficies planas (Fuente: Corberán, 1996, p. 210).

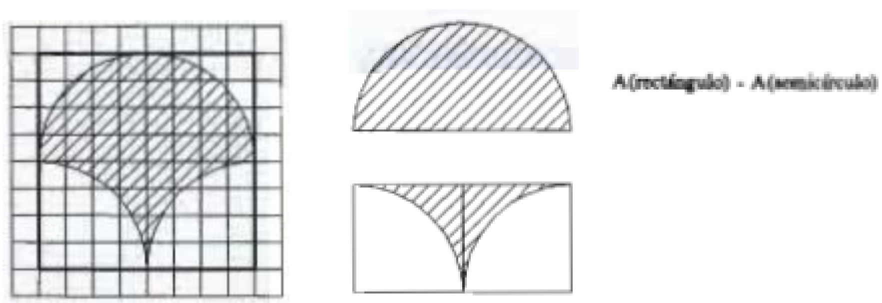


Figura 3. Etapa diagnostica (Fuente: Corberán, 1996, p. 210).

Para calcular el área los alumnos utilizaron diversos procedimientos, algunos los hicieron de manera geométrica, otros numéricamente, algunos no lograron llegar a un resultado satisfactorio. La conclusión menciona Corberán, si bien la formación matemática general, adquirida a lo largo de los cursos, indirectamente mejora el conocimiento que los alumnos poseen sobre el concepto de área. Esto además de que mejoran comprender las unidades de medida del área, de su conservación, entre otras.

Hace mención también que considera insatisfactorio el hecho que no comprendan que no existe dependencia alguna entre el área y el perímetro, en las fórmulas para calcular áreas y tampoco en el procedimiento geométrico. El objetivo general de esta tesis fue realizar un análisis didáctico del concepto de área de superficies planas al término de cada nivel educativo, desde educación básica hasta profesional.

Esta investigación observó el grado de comprensión del concepto de área mediante una evaluación al final de cada nivel escolar, para ello se diseñó una evaluación para cada tipo de alumnos. En estas evaluaciones se observaron los procedimientos y estrategias que emplearon los alumnos para la resolución de problemas. Así como los errores que cometieron.

Como objetivo específico se plateo conocer la interpretación geométrica del área, la noción de conservación de área cuando sufre transformaciones y que tan familiarizado estaba el alumno con los procedimientos geométricos. El trabajo consistió básicamente en evaluar y agrupar los resultados para verificar el nivel de comprensión del concepto de área por número de alumnos y por procedimientos que ellos utilizaron.

Primero la elaboración del test, después la selección de los alumnos, aplicación de los test, corrección de los test, entrevistas, y análisis de los resultados. Se realizaron 33 actividades que constituyen la secuencia didáctica, algunas diseñadas para esta investigación y otras extraídas de libros de geometría, estas fueron presentadas en dos tipos de papel, unas sobre cuadriculado y otras sobre papel blanco, para intentar romper estereotipos habituales aprendidos, enseñados y usados en geometría. De todas las actividades solo tres de ellas se trabajaron de manera manipulable. Los test fueron aplicados a alumnos de enseñanza media, especialmente a los de segundo grado de bachillerato y en alumnos de 15 a 16 años de edad de otra institución educativa.

Se realizaron las actividades en horarios de clases, bajo la supervisión del maestro de matemáticas, el director y el responsable de la investigación. Esta tesis contiene a detalle todas las actividades que realizaron con los alumnos de los diferentes niveles con sus respectivos objetivos y observaciones, entre las cuales destaca la de si el alumno utiliza procedimientos geométricos para descomponer la superficie y luego compararla. Cada actividad tiene un grado de complejidad para su grado de aplicación.

En los ítems como los nombra en su trabajo de investigación, consideraron temas como la concepción del área, las unidades en que se expresa, la conservación, relación entre área y perímetro, relación entre área y forma, formulas, teorema de Pitágoras, transformaciones geométricas, entre otros.

Su investigación es bastante extensa por todos los test que se realizaron a diferentes estudiantes de los distintos grados académicos, teniendo como conclusión que la comprensión del concepto de área se refuerza conforme el grado de estudios se hace más avanzado, logrando que el alumno comprenda el concepto, aplique formulas, ya no se le olvide tanto colocar las unidades, además que logran comprender que el área de una superficie se conserva, aun cuando la recortar y formas otra figura. Y una familiarización con los procedimientos geométricos que hacen menos pesado los cálculos. (ya no puse que los alumnos en su mayoría comprenden que no existe relación alguna entre el área y el perímetro de una figura).

Lo que podría haber enriquecido esta investigación es haber incluido un poco más de ejercicios son secciones circulares en los diferentes estadios. Además de no proporcionarle al alumno un cuadricula, si no darle las instrucciones para que el propio alumno la construyera.

1.3.2. Sobre ángulos

En la tesis de maestría de Rosa Araceli Rotaeche Guerrero (2008), titulada *La construcción del concepto de ángulo en los estudiantes de secundaria*. Dice que, de acuerdo a investigaciones, los planes y programas educativos de nuestro país dejan a la deriva la construcción del concepto de ángulo en la educación básica, y es en secundaria donde la problemática es más notoria, ya que solo se maneja superficialmente, pues lo consideran un tema fácil y sencillo de comprender. Pero como no está bien cimentado desde la primaria, en segundo grado de secundaria en la materia de ciencias con énfasis en física, en el manejo de vectores, es donde se aprecia el pobre conocimiento adquirido sobre este tema.

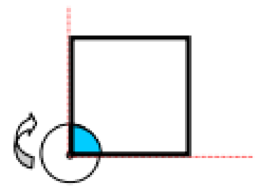
El objetivo general de este trabajo de investigación fue la de elaborar y diseñar una propuesta didáctica para el concepto de ángulo en estudiantes de secundaria en México. El objetivo especificó fue que los alumnos de secundaria, aprendan un nuevo concepto de ángulo. Usando material manipulable para que comprendan el concepto de ángulo.

Con el uso de figuras geométricas, logaron que el alumno relacionara fracciones del círculo con la medida de un ángulo, también lograron que los alumnos midieran ángulos tanto en sentido de las manecillas del reloj, como de en sentido contrario y que el alumno identificara en el transportador, lo que representa 1/360 de parte o giro.

Trabajaron con 34 alumnos de 13 años de primero de secundaria en una escuela particular. La secuencia didáctica constaba de 6 partes que se aplicaron en 4 sesiones de 45 minutos cada una, con ayuda de la maestra de matemáticas del grupo. Todas las actividades se iniciaron sin indicar al alumno el propósito de la sesión, de tal forma que el alumno propiamente lo descubriera poco a poco. Basados en una secuencia didáctica con actividades donde el alumno trabajara con objetos que se podían tocar y mover, y un listado de preguntas generadoras para que el alumno reflexionara su procedimiento.

Utilizo como metodología la teoría de situaciones didácticas. Y Mediante el diseño de una secuencia didáctica, donde los alumnos eran los responsables de su aprendizaje, organizaron actividades para que los alumnos interactuaran con material manipulable, este consistía en un cuadrado de cartón, tres micas circulares de diferentes tamaños, plumones y chinches. La intención era la de sobreponer una de las micas circulares sobre el cuadrado, fijado con la chinche como se muestra en la siguiente figura.

INSTRUCCIONES:
Coloca el centro del círculo 1 sobre uno de los vértices del cuadrado (utiliza una chinche para hacerlo). Con una regla traza una línea que salga del centro del círculo y coincida con uno de los lados del cuadrado. Realiza lo mismo sobre el otro lado del cuadrado que comparte el mismo vértice.
Sombrea en el círculo 1, el espacio que se encima en el cuadrado.



¿Qué parte del círculo es el que sombreaste?, ¿Cómo puedes comprobarlo?

Figura 4. Utilizando un cuadrado (Fuente: Rotaeche, 2008, p. 66)

Lo siguiente era colocar otro círculo más grande sobre el circulo pequeño, compartiendo el mismo centro clavado con la chinche, esto para que el alumno relacionara que el cuadrado es la cuarta parte del círculo, lo mismo se hizo con medio cuadrado que corresponde a 1/8 de vuelta, ósea 45°, la figuras que se entregaron a los alumnos fueron las mostradas en la siguiente figura:

Con esta secuencia, se pretende que el alumno descubra en estas cuatro figuras:

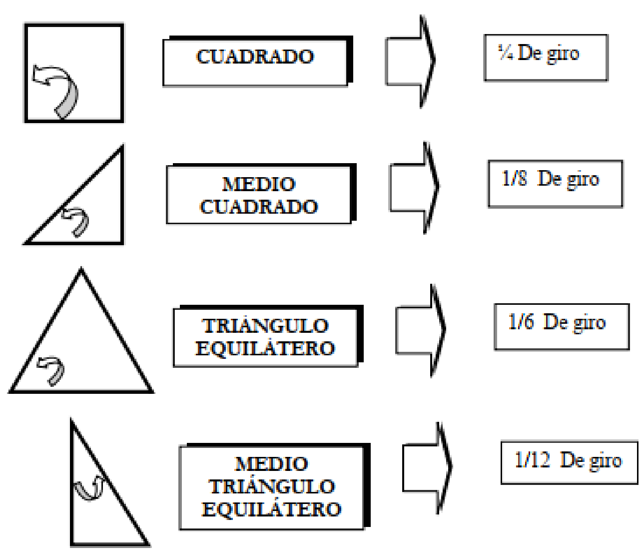


Figura 5. Figuras que se utilizaron para la comprensión del concepto de ángulo. (Fuente: Rotaeche, 2008, p. 74)

Rotaeche, menciona que para construir el concepto de ángulo el alumno debe de ser capaz de relacionar las facciones sombradas en el círculo, con el ángulo generado, y con las porciones cada vez más pequeñas que se generaran para llegar a la construcción del transportador.

Esta investigación desarrolló uno de los temas que se les complica a los estudiantes comprender, por lo que se puede concluir que, si se trabaja con materiales manejables, los conocimientos adquiridos son más significativos, puesto que sus estudiantes lograron apropiarse del concepto de ángulo, aunque en el principio no tenían claro a que conocimiento llegarían, pues algunos supusieron que era tema de fracciones. La misma autora indica que hizo falta trabajar con diversas figuras geométricas, resolución de problemas y el uso de la tecnología.

1.3.3. Sobre teselados

Hernández, A., (2014), *Transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados. Una propuesta sobe el uso de la tecnología en el aula.* Este trabajo de investigación tuvo como objetivo favorecer el aprendizaje con la construcción de teselados, usando tecnología. Los objetivos específicos fueron tres, el analizar los libros de texto en el tema de polígonos que permiten cubrir el plano, el uso de la calculadora ClassPad 300 para construir un teselado, y por último diseñar una secuencia didáctica que constaba de preguntas y uso de la calculadora como herramienta de aprendizaje.

Durante la investigación se observó que los alumnos ya tienen conocimientos previos sobre el tema, y resolvieron las preguntas sin dificultad e identificaron las figuras sin mayor dificultad las figuras geométricas que conforman un teselado al igual que el patrón de repetición, y se pudo comprobar que, usando el material didáctico adecuado y el uso de la calculadora, los alumnos construyen más conocimientos significativos que el aprendizaje tradicional. La investigación uso, la teoría de situaciones, y como marco teórico la ingeniería didáctica y las competencias para la educación básica de la Secretaría de educación.

La puesta en escena de la situación didáctica se llevó a cabo en una escuela particular en San Cristóbal de las Casas, Chiapas, en el aula de computación, con cuatro alumnos de segundo grado de secundaria de entre 13 y 14 años, los cuales todavía no habían visto el tema de polígonos en la escuela a donde asisten regularmente, para iniciar se les explicó en qué consistía el trabajo, y con que iban a trabajar, para el desarrollo de la actividad los alumnos contaron con 120 minutos, siempre con la presencia del profesor encargado de la aplicación.

A los niños se les hicieron seis preguntas, la primera era para saber si los alumnos sabían la medida de los ángulos interiores de algunos polígonos, después identificar con que figuras se puede cubrir un plano, la siguiente era sobre la identificación de los polígonos dentro de un teselado cuando se les mostraban tres tipos de teselados diferentes, la pregunta cuatro representaba un poco más de dificultad, pues le pedía al alumno que expresara si era factible crear mosaicos con pentágonos y rombos regulares, la quinta pregunta fue sobre las características que debe tener una determinada figura para que se pueda crear un mosaico. Y la última actividad era completar una tabla analizando un hexágono, heptágono, decágono y octadecágono, para ver si con estos sí se cubre el plano de manera regular.

Para el trabajo con la calculadora ClassPad 300, reprodujeron la llamada “pajarita nazarí”, empleado los conceptos de igualdad, traslación, giro y simetrías. Esta se realizó guiando a los alumnos paso por paso para la construcción de esta figura en la calculadora.

Con la realización de estas actividades, se comprobó que guiando al estudiante planeando las actividades correctamente, que incluyen una secuencia bien estructurada y de manera gradual, los alumnos utilizan sus saberes previos para crear nuevos conocimientos, con esto se demostró que el uso de material didáctico de la mano con la tecnología hace que el alumno comprenda de manera mejor la construcción de teselados con modelos geométricos construidos en el salón de clases.

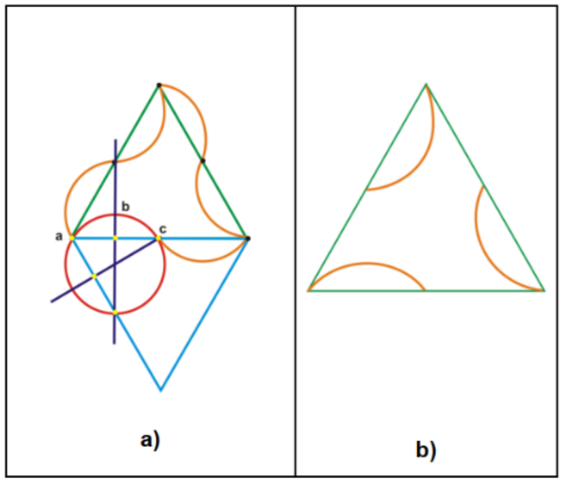


Figura 6. Construcción de la "pajarita de Nazarí" (Fuente: Hernández, 2014 p. 70)

La investigación se realizó con solamente cuatro alumnos de segundo de secundaria, y para hacer la puesta en escena se hizo en una escuela particular en San Cristóbal de las Casas Chiapas, el uso de la tecnología como herramienta de aprendizaje es de gran utilidad en el salón de clases, en mi opinión el uso de un software de geometría dinámica hubiese sido de mayor ayuda, pues en la computadora se visualizan colores, y tiene una pantalla más grande. Y con un número mayor de alumnos, ya que los problemas que actualmente tenemos en las escuelas de gobierno, son las aulas con sobrepoblación de alumnos.

Por otro lado, en la investigación de Herrera, Montes, Cruz y Vargas (2010)que tiene por título *Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte*, emplearon los teselados para que los alumnos expresaran sus aptitudes creativas de manera artística, mediante creación de teselados; los teselados son las representaciones geométricas que poseen algunos polígonos regulares e irregulares que nos permiten recubrir un plano sin dejar espacios entre ellos, esto les permitió crear una relación matemática entre el desarrollo cognitivo del alumno con una actividad sociocultural, teniendo en cuenta su importancia en el aula, sobre la didáctica de la geometría. Los teselados son una herramienta geométrica para que los estudiantes desarrollen su orientación espacial, razonamiento lógico y resolución de problemas). Por esta razón el objetivo de esta propuesta es resaltar la importancia del trabajo geométrico de una forma renovadora dentro del aula y de propiciar aprendizajes que les permita desarrollar la orientación espacial de los alumnos, mediante las traslaciones, rotaciones, simetrías, giros, en general diversas transformaciones geométricas, donde las propiedades de las figuras se conservan. La metodología les permitió fomentar la creatividad y la reflexión, pues los alumnos hicieron sus propias construcciones.

Retomamos también la investigación denominada *Patrones en mosaicos y Teselados desde Composiciones Geométricas* de Cadena, Vergel y Delgado (2018), en la cual se tuvo como objetivo de investigación cubrir espacios públicos a partir diseños geométricos artísticos, estudiando sus características, cualidades y propiedades. La investigación es “Geometrización de indicadores urbanos como herramienta didáctica para el desarrollo de competencias investigativas en estudiantes de arquitectura”. Los antecedentes de esta investigación hacen referencia a la historia de distintas culturas que atreves del arte recubrían espacios públicos, o construcciones que usaban teselados para adornarlos. La metodología fue de diseño geométrico basado en las técnicas de dibujo de teselas por el artista M. C. Escher como se muestra en la figura 7.

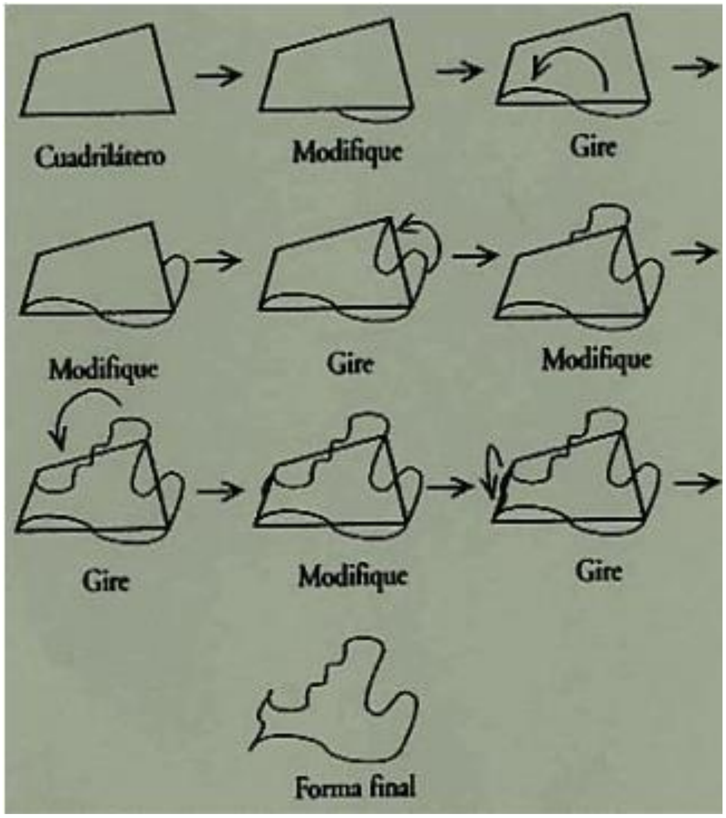


Figura 7. Teselados de Escher (Fuente: Cadena, Vergel, Delgado, 2017, p. 179)

Generan bocetos, a través de cortes circulares, y giros. Trabajan con figuras sencillas y superponen planos los cuales les llaman semillas, para ir haciendo compleja la figura, los bocetos se generan a partir de un patrón, las teselaciones no son simétricas, pero son una cantidad infinita de copias, unidas por la única condición que pueden unirse en vértices que tengan el mismo ángulo. Aplican traslaciones a los extremos de las figuras, deformando un objeto a partir de cuatro movimientos, como principio de conservación al deformar un objeto, como se muestra en figura 8.

Figura 8. Trasformaciones (Fuente: Cadena, Vergel, Delgado, 2017, p.180)

A las figuras se le hacen varios cortes y transformaciones geométricas, para finalmente obtener el diseño a partir de traslaciones de puntos para generar un mosaico en un plano. Como se muestra en la siguiente figura 9:

> A fin de obtener una figura geométrica asociada a la cultura de la región a partir del patrón diseñado, se procedió a cambiar la escena del dibujo y al mismo tiempo a moldear la figura geométrica para representar el mismo concepto de orgánico en la ensena de animales de granja en dos contextos basados en contrastes de color. Del diseño se presentaron dos piezas irregulares, pero complementarias en el plano, de tal manera que se intersecta en los puntos frontera. Las dos presentan escenas distintas, la primera inspirada en un amanecer, y la segunda en un anochecer,

generando así dos teselas para presentar el mosaico final (Cadena, Vergel y Delgado, 2018, p. 193).

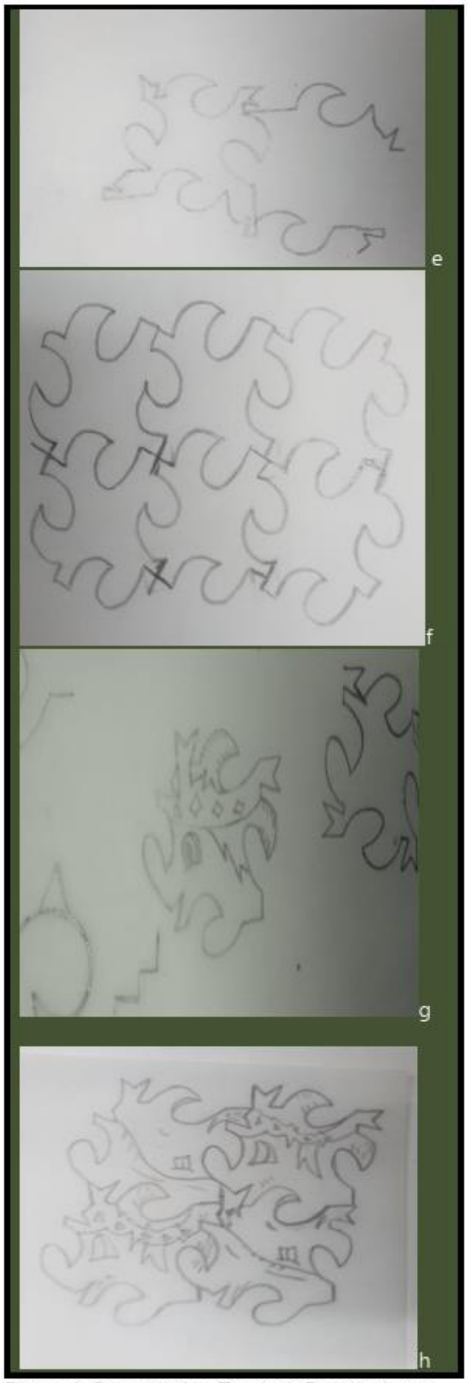


Figura 4. Construcción Tesela 1. Fuente: Autor

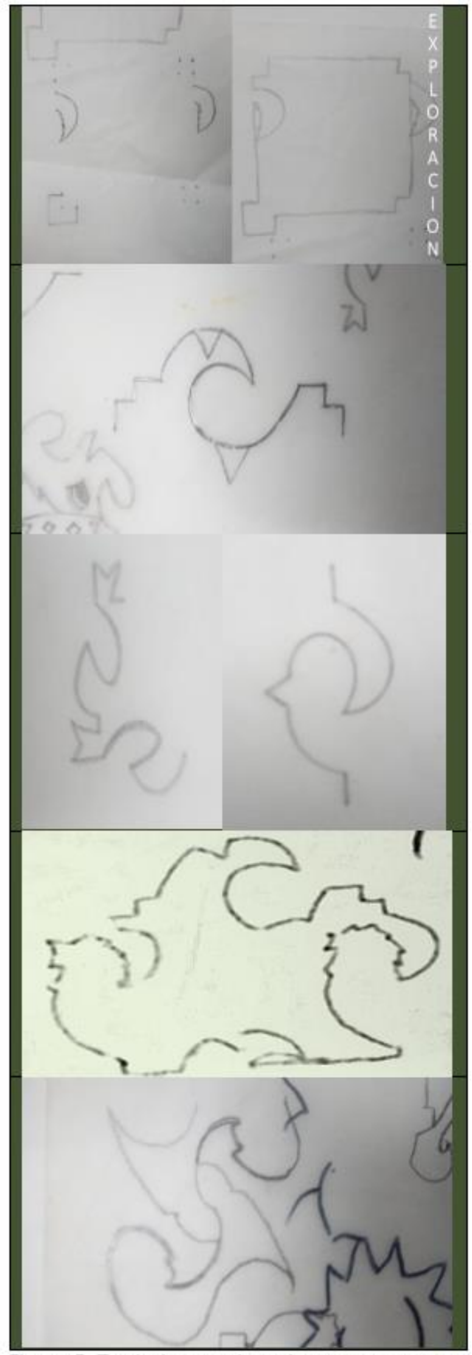


Figura 5. Traslaciones e Iteraciones para generar figura asociada al campo

Figura 9. Mosaico obtenido (Fuente: Cadena, Vergel y Delgado, 2017, p. 183).

El resultado lo presentan como un teselado irregular que generó una propuesta nueva de mosaico, con esta realizaran el proceso en 3D a escala en material de cartón, como podemos observar en la figura 10:

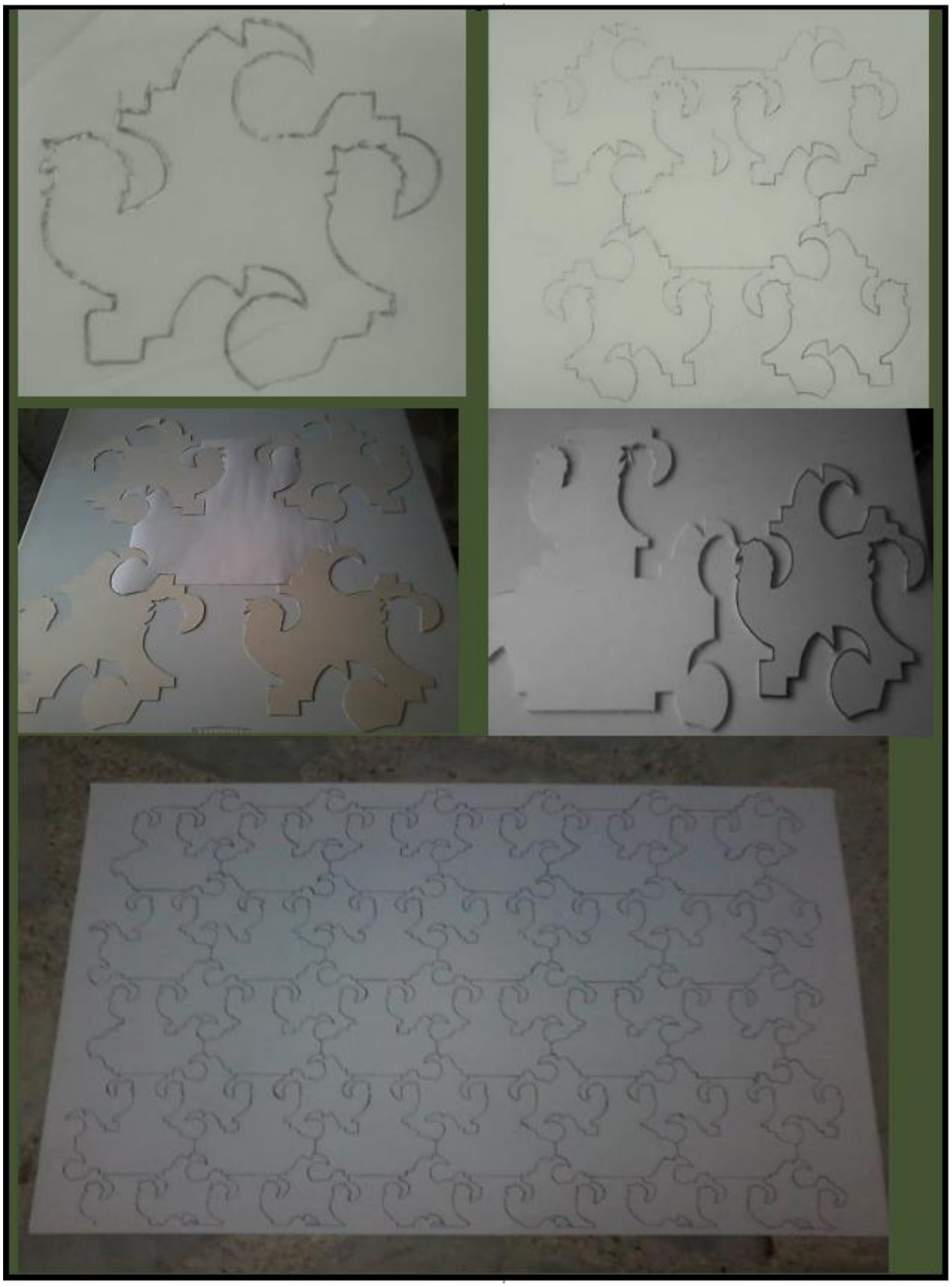


Figura 10. Mosaico irregular tridimensional. (Fuente: Cadena, Vergel, Delgado, 2017, p. 185).

La conclusión de este trabajo afirma que el diseño de un mosaico puede provenir de una gran diversidad de teselaciones siguiendo parámetros de diseño, y transformaciones geométricas como rotación, traslación, reflexión, etc. Y esto permite mostrar las habilidades y destrezas de quien lo realice. Este trabajo es realizado por estudiantes de arquitectura, los cuales ya poseen conocimientos avanzados de transformaciones geométricas, lo que permite resultados más complejos.

Los teselados desde la prespectiva de Escher son transformaciones que se le hacen a figuras geométicas regulares, y las transforma en irreguales, es algo parecido a lo que se planteó al diseñar las actividades con la que se trabajó con los alumnos con los que se realiza la investigación, se consideró en todo momento que ellos comprendieran que el área de una figura irregular es la misma que surgió despues de transformar una que en su forma original era regular.

En el siguente capitulo se presenta el marco teorico y la metodologia con que se llevó a cabo la investigación, y la dimención historico-epistemologica.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo presentamos la teoría que enmarcó la investigación que fue la Teoría de Situaciones Didácticas, así como la metodología empleada en la misma.

2.1. Aproximación a la Teoría de Situaciones Didácticas

De manera general la teoría de situaciones se define según Panizza (2003, p. 2) como "una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea". Esta teoría aparece como un medio para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, así como para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y los profesores.

Por lo anterior, esta investigación se abordará desde la Teoría de Situaciones Didácticas, Sadovsky (2005), nos refiere a Brousseau (1986, 1988 a, 1988 b, 1995, 1998, 1999) que describe el proceso de producción de conocimientos matemáticos en una clase a partir de dos tipos de interacciones básicas:

a) El modelo de Guy Brousseau describe el proceso de producción de conocimientos matemáticos en una clase, a partir de dos tipos de interacciones básicas: a) La interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre lo conocimientos matemáticos puestos en juego. b) La interacción del docente con el alumno a propósito de la interacción del alumno con la problemática matemática. A partir de ellos se postula la necesidad de un "*medio*" pensado y sostenido con una *intencionalidad didáctica*.

b) Las interacciones entre alumno y *medio* se describen a partir del concepto teórico de *situación adidáctica*, que modeliza una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno, de manera independiente de la mediación docente. El sujeto entra en interacción con una problemática haciendo unos de sus propios conocimientos, modificándolos, rechazándoos o produciendo otros nuevos, a partir de las interpretaciones que hace sobre os resultados de sus acciones (Sadovsky, 2005, p. 3).

El medio descrito en un concepto teórico de situación didáctica, modela una actividad para producir conocimiento en el alumno. Es por esta razón que la teoría de situaciones didácticas es la que se pretende usar para enmarcar esta investigación, para tratar de que el alumno al tener un problema en sus manos e intentar de resolverlo, haga uso de todos los recursos con los que ya cuenta para intentar construir nuevos conocimientos. Las fases en que estará dividida esta investigación será en primer lugar la selección del problema, seguido de una metodología para aplicarla en el salón de clases y por último una revisión de los datos obtenidos para su análisis y retroalimentación, durante esta investigación leeremos muy a menudo palabras claves como son, medio, situación, intención didáctica, contrato didáctico.

Está teoría es importante para nuestra investigación porque se orienta al diseño de situaciones didácticas para provocar la generación de conocimientos en el alumno. Ya que nos proponemos diseñar situaciones donde el alumno calcule áreas de sectores circulares utilizando procedimientos personales, y lo aproxime a un polígono de forma regular conocido para que el cálculo del área sea de manera más fácil.

Esta teoría nace de la necesidad de entender la relación enseñanza-aprendizaje sobre tópicos matemáticos que existe entre los maestros y los alumnos, de que métodos, tipos de problemas, juegos, ejercicios, es decir todo de lo que un profesor se vale para transmitir información nueva y que esta información se quede permanentemente o quizá el mayor tiempo posible en la memoria del alumno y con ello construya conocimiento. Es esta teoría entonces un canal que posibilita la comunicación entre los profesores y los investigadores.

A partir de la revisión teórica encontramos que, muchas veces se concibe a la enseñanza como parte de la relación que existe entre el sistema educativo y el alumno, que tiene como objetivo la transmisión de saberes en una relación didáctica, por lo consiguiente como una comunicación de informaciones (Brousseau, 1999), tal como se ve en el siguiente esquema (ver Fig. 11).

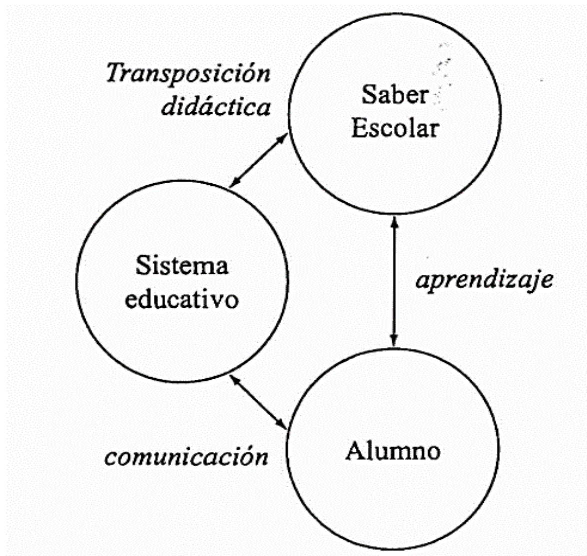


Figura 11. Relaciones entre el sistema educativo y el alumno (Fuente: Brosseau, 2007, p. 13)

El esquema anterior se asocia a la enseñanza en donde el profesor es el responsable de la organización de los saberes a enseñar mediante mensajes de los cuales el alumno toma ese conocimiento.

De acuerdo a Brousseau (1999) para los psicólogos es importante demostrar que el sujeto se adapta al medio de una manera natural, por los estímulos, en base a las experiencias personales del sujeto y el medio sociocultural en el que se desarrolla, esto se representa en la figura 12.

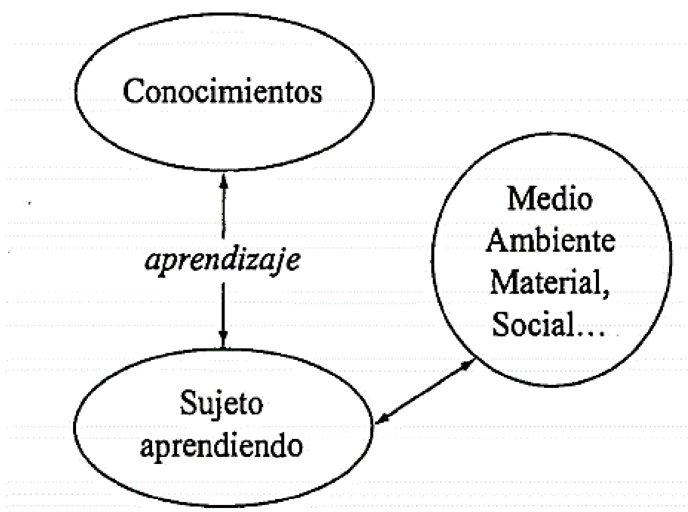


Figura 12. Adaptación al medio. (Fuente: Brosseau, 2000, p.7).

Existe otro esquema donde se relaciona los conocimientos del medio natural y social al que está adaptado el sujeto y el saber escolar con el sistema educativo-enseñanza-alumno como se ilustra en la Fig. 13, “Desde esta perspectiva, la enseñanza se convierte en una actividad que no puede. más que conciliar dos procesos, uno de *aculturación* y el otro de *adaptación independiente*” (Brosseau, 1999, p. 8).

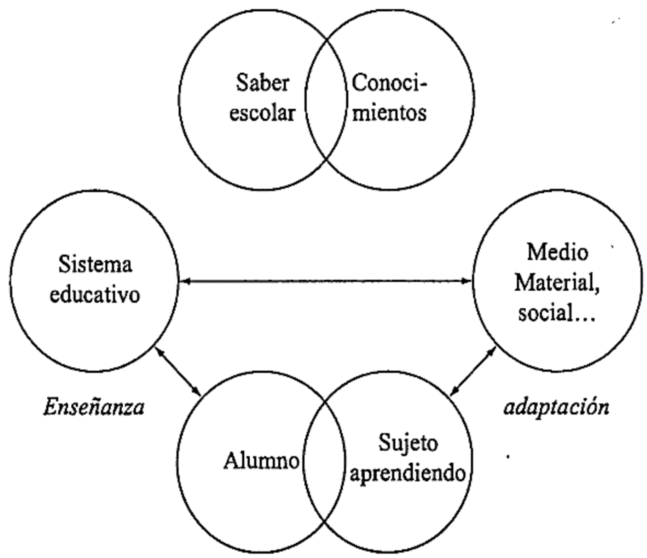


Figura 13. Esquema cuadripolar. (Fuente: Brosseau, 2000, p.8).

Los psicólogos siempre han influido en la enseñanza opinando que hay que rectificarla, o hay que tomarlos en cuenta, señalan que el niño debe ser el centro de las preocupaciones del maestro, ante la falta de medidas que tomen en cuenta lo dicho por esta disciplina, actúan de una manera crítica y correctiva. De acuerdo a Brousseau (1999), en los años 60.

> Se buscó construir un modelo del sujeto que aprende, del proceso de producción o de aprendizaje de conocimientos, o bien, de la estructura de los saberes. Para Skinner, la caja negra es el sujeto, […]. La cultura científica de Piaget le proporciona todos los conocimientos que necesita para concebir los dispositivos experimentales en los cuales el niño revela sus modos de pensamiento y para reconocer en sus comportamientos las estructuras y los conocimientos matemáticos de su elección. Afortiori, si las modalidades de la influencia del medio sociocultural sobre los aprendizajes de los alumnos son tomados en cuenta y estudiados por Vigotski, el estudio del medio, en sí mismo, da lugar a otro campo, ideológico o científico (Bousseau, 1999, p. 9).

En los sesenta Brosseau observo el trabajo de Pierre Greco y Piaget, el primero trabajaba con dispositivos para evidenciar el pensamiento matemático del niño, y Piaget identificaba el desarrollo del pensamiento y los comportamientos de los niños. Brosseau se dedicó a extender estos trabajos estudiando los dispositivos y sus relaciones con determinado conocimiento. Dependiendo de la necesidad de un conocimiento determinado.

> Por otra parte, como cada noción apela a todo un conjunto de problemas y de ejercicios que le son específicos, podía pensarse que esta vía de investigación tenía una oportunidad más o menos nula para aportar información sobre la adquisición de saberes un poco generales. En esta perspectiva, son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. La caja negra es, entonces, el medio (Brosseau 1999, p. 9).

Dentro de la disciplina de la Didáctica de las matemáticas de la escuela francesa, Brousseau desarrolló la teoría de situaciones. Está es sustentada en una concepción constructivista -en el sentido piagetiano- del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (1986) es que el aprendizaje es el producto de la adaptación del alumno a un medio.

Para que el alumno aprendiera los profesores ideaban problemas para provocar nuevos saberes matemáticos, Brosseau pensaba que eso limitaba al alumno como receptor y al maestro como transmisor. “El mismo camino conduce entonces a considerar al medio como un sistema autónomo, antagonista del sujeto, y es de aquél del que conviene hacer un modelo en tanto una especie de autómata” (Brosseau 2000, p. 10).

El objetivo de la teoría de situaciones didácticas es la investigación de los diferentes modelos con los que trabajan los maestros, con el fin de que el alumno tenga un aprendizaje significativo. Busca, estudia, observa, propone, como se crean los conocimientos matemáticos en el alumno y de las condiciones para que estos los reproduzcan no solo en el ámbito escolar, sino en lo largo de su vida.

El diseño de una situación en específico es que el alumno obtenga un aprendizaje matemático significativo con respecto a un tema en especial, a la situación se le llama medio, pues sirve para hacer al alumno revise en sus conocimientos previos alguna estrategia capaz de resolver el nuevo problema, y si no llega a reaccionar, la situación didáctica se puede rediseñar para llegar al conocimiento que se pretende. Brosseau señala que son los propios alumnos que revelan si el medio funciona, y este es considerado como un sistema.

Se vale de los conocimientos previos de los alumnos, y de las situaciones, de la resolución de problemas, de la organización de sus conocimientos, de la adquisición de conocimientos nuevos. También de materiales didácticos, como pueden ser cuadernos, hojas, ábacos, cuentas, etc. Todo con el fin de que el alumno retenga el nuevo conocimiento. Llamamos situación didáctica a los modelos del que se sirve el maestro para que el alumno aprenda, como lo describe Brousseau en el libro de situaciones didácticas.

> una situación es un modelo de interacción de un sujeto y un medio determinado. El recurso de que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable es una gama de decisiones que dependen del uso de un conocimiento preciso. Consideramos el medio como un subsistema autónomo, antagonista del sujeto. (Brosseau, 2007 p.17)

En los setenta, no consideraban el rol del maestro, estas situaciones se diseñan por medio de la ingeniería didáctica. Cuando el docente diseña y manipula el entorno del alumno se llama situación matemática, pues la intención es provocar una actividad matemática en los alumnos, sin que el profesor intervenga. Así que solo se designará el termino de situación didáctica a las actividades que involucren al alumno y al maestro.

Una situación didáctica diseñada para adquirir conocimiento tiene como dispositivo de aprendizaje un medio, que es material didáctico, problemas, juegos, etc., y cuando esta funciona efectivamente, entonces se produce la enseñanza, y evoluciona cuando el cuándo el alumno se identifica con ella en ese proceso de aprendizaje puede estar o no presente la figura del profesor.

Para que un alumno interactúe con el medio, sus acciones reflejan sus conocimientos en tres momentos de intercambio de información, el primero es de manera informal con acciones y decisiones no codificadas, el segundo es ya con información codificada, mensajes claros, y el tercero es un intercambio de ideas de las cuales el alumno tiene la certeza de estar en lo correcto. En la teoría de situaciones las reacciones de los alumnos son las que nos revelan las características de las situaciones.

Se le llama *situación de acción*, cuando el alumno reacciona con el medio según sus propios conocimientos previos y es capaz de tomar decisiones para luego formular una retroalimentación que le generara conocimientos. A esto le sigue la *situación formulación*, es donde el alumno es capaz de traducir el conocimiento implícito y reconocerlo para comunicarlo en su lenguaje, esto pone en juego conocimientos lingüísticos como la sintaxis y el vocabulario. Cuando la situación acción y formulación son corregidas o adecuadas de manera emperica o con apoyo, se produce en el alumno una movilización de conocimientos que convierten al alumno en un proponente, puesto que tiene saberes establecidos y puede con otros compañeros confrontar saberes establecidos, pedir demostraciones etc. Pero es necesario llegar a una *situación de institucionalización*, para determinar los conocimientos y estos permanezcan contextualizados y no desaparezcan en los recuerdos. Brosseau señala que la acción y luego la formulación, la validación cultural y la institucionalización parecen construir un orden razonable para la construcción de saberes. las situaciones se elaboran para que el sujeto se apropie de un conocimiento y eso le permite evolucionar con nuevas preguntas y respuestas, a esto se le llama dialéctica.

Encontramos dos tipos de situaciones, las situaciones Didácticas y las a-didácticas, aunque las dos tienen el mismo fin, se presentan en al sujeto de manera diferente. La *situación didáctica*, Es una situación diseñada y construida con la única intención de que el alumno adquiera un conocimiento determinado. Describiendo las actividades del profesor y del alumno. Sí lo consideramos como un dispositivo para que el alumno adquiera nuevos conocimientos, este dispositivo tendrá la ayuda de un medio el cual puede ser físicas, como papeles, lápices, dados, juegos, etc. Todo esto con la finalidad de que el alumno reaccione al medio y entonces cree sus propios razonamientos para tomar decisiones de actuar y resolver el problema, y por lo tanto modifique su información con ayuda de los conocimientos anteriores.

Para ofrecerle al alumno la posibilidad de que construya su conocimiento, se diseñan las situaciones didácticas y esta ocupa un papel central en la organización de la enseñanza Brosseau señala que se convierte en “la ciencia de las condiciones de difusión y apropiación de los conocimientos matemáticos útiles a los hombres ya sus instituciones”. Cuando se modifican los conocimientos de los alumnos y se refleja en su vocabulario, su argumentación, etc., entonces se sabe que la interacción se volvió didáctica. Varias obras se basan en un triángulo donde se representa el profesor, el alumno y el saber cómo se ilustra en la figura 14.

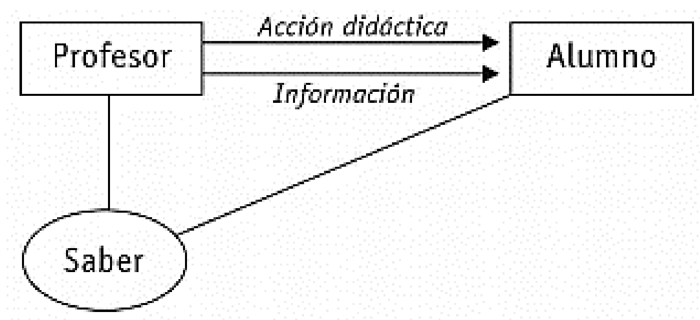


Figura 14. Triangulo Profesor-Alumno-Saber (Fuente: Brosseau, G., 1999 p. 50).

En este esquema solo se visualiza la acción del profesor y no muestra las relaciones del alumno con el medio, con los conocimientos previos del alumno o con su razonamiento lógico. Por esta razón se plantea otro esquema donde aparece la relación que existe entre el alumno con el medio. La figura 15 hace la relación.

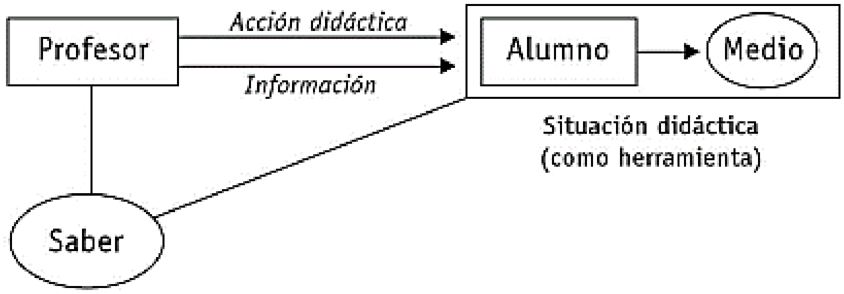


Figura 15. Medio adidáctico (Fuente: Brosseau, G., 1999 p. 50).

La finalidad de la comunicación adidáctica es que el alumno tenga un instrumento de control sobre el medio. Se le llama modelo implícito de acción, esto le da al sujeto un nivel de conciencia de sus conocimientos sobre la situación, por lo que puede poner en práctica lo aprendido e interactuar socialmente para comunicar sus saberes. Los saberes son los instrumentos de organización de los conocimientos, La comprensión es cuando el sujeto moviliza sus saberes para comunicarlos y tomar decisiones. El sentido puede descomponerse en dos sentidos didácticos, uno es el componente semántico, relacionado con las situaciones y el componente sintáctica que está relacionado con las acciones y no con la teoría.

La actuación del maestro es fundamental para regular los procesos de adquisición de conocimientos de los alumnos, el alumno puede aprender según su medio, por lo que los conocimientos adquiridos previamente se convierten en un medio adidáctico.

Brosseau en 1986 introdujo una nueva noción en la teoría de situaciones; *la estructura del medio.* Identifica que le profesor asume dos posiciones, una la de preparar su clase y la otra la de enseñar. Mientras que observo que en los alumnos pueden adoptar cinco posiciones diferentes. Como se ilustra en la siguiente figura.

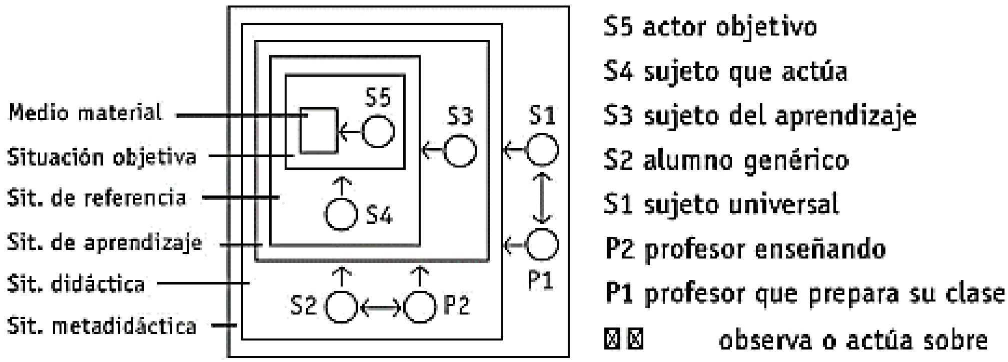


Figura 16. La estructura del medio (Fuente: Brosseau, G., 1997 p. 53).

Todas estas relaciones del sujeto con el medio implican diferentes niveles de conocimientos, conceptos, vocabularios, y saberes diferentes.

La *situación adidáctica*, es cuando el maestro a través de un medio claramente diseñado, para provocar que el alumno por sí mismo reaccione, reflexione y por consiguiente evolucione en su conocimiento, en este tipo de situación el profesor no intervine para que el alumno se apropie del problema y por lo consiguiente del conocimiento. Un conocimiento que el alumno será capaz de usar en situaciones escolares posteriores y en contextos no escolares.

2.2. La ingeniería didáctica como metodología de la investigación

La metodología que seguiremos en esta investigación será la ingeniería didáctica Michele Artigue (1995) nos dice que esta metodología se caracteriza por experimentar en las “realizaciones didácticas” de las clases, observa y analiza las secuencias de enseñanza. De aquí se divide en dos niveles, el de la micro-ingeniería, y el de la macro-ingeniería.

Las investigaciones de la micro-ingeniería, permiten localizar la complejidad de los fenómenos de una clase asociados con las duraciones entre la enseñanza y el aprendizaje. Mientas que la macro-ingeniería es a un nivel global.

> La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimien8tos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. (Artigue, 1995, p.35)

Es decir que el maestro con sus conocimientos y su experiencia puede elaborar una estrategia para que su alumno aprenda determinado conocimiento matemático que se desea. Pero en la puesta en marcha de esa clase, van a aparecer ciertos problemas u observaciones que no estaban contempladas de inicio, por lo que la ingeniería didáctica le permitirá reorganizar esa de estrategia de manera ordenada. Artigue (1998, p. 40) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.
- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema enseñanza.

La investigación que realizamos fue con alumnos se segundo de secundaria, está situada este trabajo en el nivel básico, por lo que se optó por usar la ingeniería didáctica como metodología de la investigación, puesto que se puede partir de problemas detectados por los maestros en el quehacer diario docente, y hacer entonces a la ingeniería didáctica un instrumento para mejorar el aprendizaje y la enseñanza en las aulas. Artigue (1995) señala que la ingeniería didáctica se caracteriza por la experimentación en clase y por el registro que se hace.

> las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995, p. 37).

Para elaborar el diseño de la secuencia didáctica nos apoyamos en las cuatro fases de la ingeniería didáctica (ver figura 17):

- La fase 1 de análisis preliminar
- La fase 2 de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería.
- La fase 3 de experimentación
- La fase 4 de análisis *a posteriori* y evaluación.

Figura 17.Fases de la Ingeniería Didáctica (Fuente: Pérez, 2015, s.p.)

El análisis preliminar se basa según Artigue (1995) en los análisis epistemológicos, análisis de enseñanza tradicional, análisis de la concepción de los estudiantes tomando en consideración sus dificultades y obstáculos, y todo lo anterior se puede englobar en una investigación teniendo en cuenta los objetivos específicos.

La primera fase es la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas donde se centra la teoría constructivista de que el alumno adquiere sus conocimientos a través de un medio, en la segunda fase el investigador tiene en sus manos la decisión de actuar sobre las variables que a él le perezcan necesarias, aparecen entonces dos variables, las macro-didácticas (globales) y las micro-didácticas (locales), Ambas variables pueden ser generales o bien dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza (Artigue 1995).

La tercera fase es la parte de la investigación donde se selecciona a estudiantes con los que se llevará a cabo la experimentación, así le llamaremos a esta fase. Aquí entra en contacto el investigador-profesor-observador-estudiantes. Y entra en juego el contrato didáctico, los instrumentos de investigación, y el registro de las observaciones entre otros. Se recomienda hacer un análisis a posteriori local, con la finalidad de corregir algunas fallas detectadas.

La cuarta fase es la de Análisis *a posteriori* y evaluación, es la recolección de los datos que se surgieron a lo largo de toda la experimentación, como son las observaciones a los estudiantes, entrevistas, cuestionarios, etc. Todos estos datos son la validación o la refutación de la hipótesis formulada al principio de la investigación.

La elección de esta metodología es a nuestro parecer la que más se apega al tipo de investigación, puesto que se pretende realizarla con alumnos de segundo grado de secundaria, mediante la puesta en marcha de una secuencia didáctica diseñada para la comprensión del cálculo de áreas de sectores circulares.

Comenzamos mostrando los diferentes análisis de la primera fase que forman parte de nuestra investigación.

2.2.1. Análisis Preliminar

Dentro de la investigación de la ingeniería didáctica esta primera fase también contempla otras dentro de ella, estas se mencionan a continuación. (Artigue, 1995, p. 38.)

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la relación didáctica efectiva
- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

Los análisis preliminares no poseen las mismas exigencias que una investigación cuyo objetivo sea la construcción de un conocimiento en el campo conceptual. Un excelente ejercicio de didáctica puede ser el identificar, en un trabajo específico, las dimensiones privilegiadas y tratar de buscarles su significación didáctica a posteriori. (Artigue, 1995, p. 39.)

2.2.1.1. Dimensión histórica-epistemológica

En nuestro caso esta dimensión se abordó desde una revisión histórica sobre la matemática, mostramos en un primer momento la concepción y evolución de la geometría y tratamiento sobre el concepto de área específicamente, para después dar paso a los teselados.

Las matemáticas han estado presentes desde la creación del universo, pero los humanos la empezaron a crear de la manera que la conocemos desde que usaron el razonamiento para resolver problemas cotidianos, en aquel entonces desde el reparto proporcional en la caza de animales, usar los dedos para contar, hasta la delimitación de áreas de cultivo. De las civilizaciones de que se tiene conocimiento en utilizar matemáticas fueron la egipcia y la babilónica.

Las tablillas de arcilla son la principal fuente de información sobre la matemática babilónica, en estas se escribían mientras estaban frescas y se secaban al sol o en hornos. Estas tablillas tienen dos periodos, uno data del 2000 a.C. y el segundo va del 600 a.C. al 300 a.C.

El acadio era el leguaje y la escritura utilizada en las tablillas, este lenguaje consistía en una o más silabas según Morris Kline (año) cada sílaba venía representada por un grupo de signos que se reducían esencialmente a pequeños segmentos rectilíneos. Los acadios utilizaban para escribir un prisma de sección triangular, que apoyaban sobre la tablilla en una posición inclinada, produciendo así unas señales en forma de «cuña» orientadas en distintas direcciones. Esta escritura recibió más tarde el nombre de «cuneiforme», de la palabra latina *cuneus*, que significa «cuña». La aritmética alcanzó su más alto grado de desarrollo en la civilización babilónica durante el período acadio. Los números naturales se escribían de la manera siguiente:

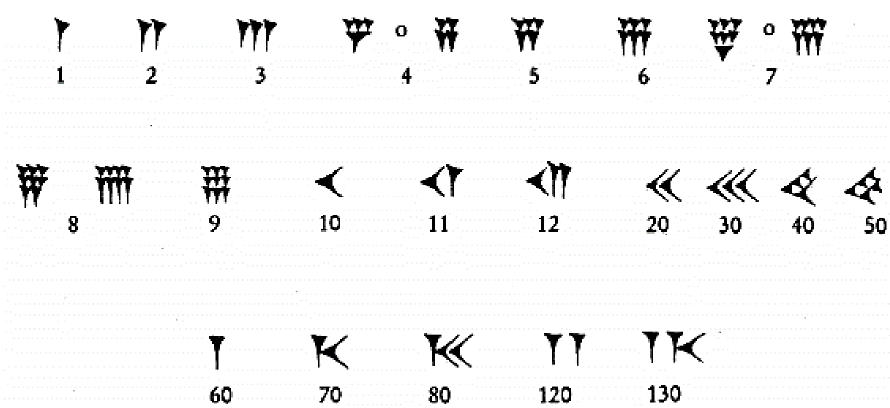


Figura 18. Los números naturales babilónicos. (Fuente: Morris K. 1972 p.21)

El sistema babilónico tiene como el principio la notación posicional y la base 60. Aunque no poseían un símbolo para indicar ausencia de alguna unidad. También utilizaron fracciones, también disponían de tablas de raíces cuadradas y cúbicas, y resolvieron ecuaciones, sistemas de ecuaciones hasta de 5 incógnitas.

En la geometría, no tuvieron mayor aportación, la división de sus terrenos o los ladrillos necesarios para alguna construcción lo resolvían algebraicamente. Kline (1972) describe que los cálculos de áreas y volúmenes se daban siguiendo ciertas reglas o fórmulas; sin embargo, las figuras que ilustran los problemas geométricos aparecen dibujadas toscamente y las fórmulas utilizadas a menudo son incorrectas. En los cálculos babilónicos de áreas, por ejemplo, no puede decirse con seguridad si los triángulos son rectángulos o si los cuadriláteros son cuadrados y, por lo tanto, si las fórmulas aplicadas son correctas o no para las figuras en cuestión. Sin embargo, ya se conocían la relación pitagórica, la semejanza de triángulos y la proporcionalidad de los lados correspondientes en triángulos semejantes. Algunas construcciones grandes requerían de ciertos cálculos como se describe a continuación.

> La construcción de canales, presas y otros proyectos de riego exigía cálculos, y el uso de ladrillos planteaba numerosos problemas numéricos y geométricos. Otros cálculos útiles eran los de volúmenes de graneros y edificios, y los de áreas de campos. La estrecha relación entre la matemática babilónica y los problemas prácticos aparece tipificada en lo siguiente: se trata de excavar un canal de sección trapezoidal y de dimensiones dadas. Se conoce también lo que puede cavar un hombre en un día, así como la suma del número de hombres empleados y los días que han de trabajar. El problema consiste en calcular el número de hombres y el número de días de trabajo. (Kline, 1972, p.30)

En los últimos siglos anteriores a la era cristiana la astronomía babilónica dio origen a la división del círculo en 360 grados, usando la base 60 para dividir el grado y el minuto, el astrónomo Ptolomeo (siglo II d.C.) siguió a los babilónicos en esta práctica.

Los antiguos egipcios desarrollaron grandes habilidades matemáticas, propios sistemas de escrituras, símbolos numéricos jeroglíficos, construyeron pirámides que vemos hasta nuestros días; los documentos matemáticos más importantes que aún se conservan son dos papiros, el de Moscú y el de Rhind. Este último también se le conoce como el papiro de Ahmes y comienza con el texto siguiente, “Cálculo Exacto para Entrar en Conocimiento de Todas las Cosas existentes y de Todos los Oscuros Secretos y Misterios” (Kleane, M,. 1972, p. 37). Estos dos papiros contienen problemas matemáticos, que probablemente se utilizaron con un fin pedagógico.

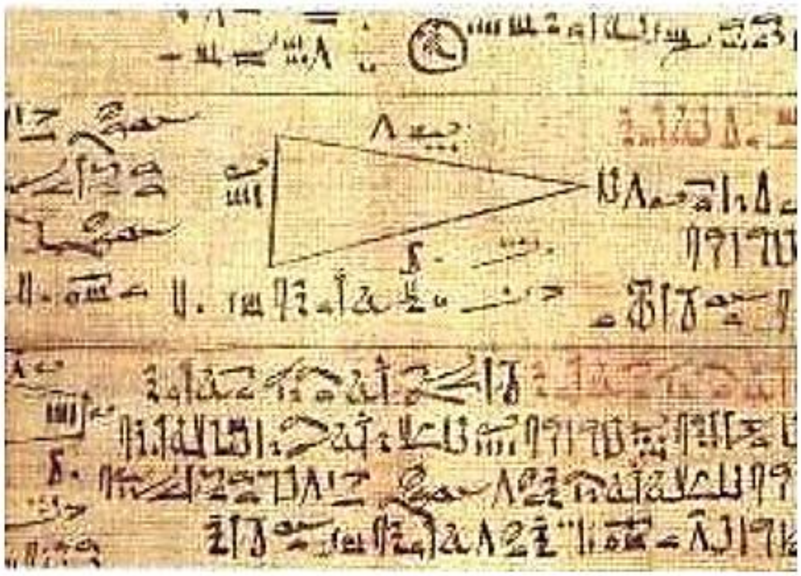


Figura 19. Papiro de Rhind - Problema de cálculo del área del triángulo. (Alcaraz, 2006, p 122)

Los egipcios utilizaron simbología jeroglífica y escritura hierática para su aritmética que esencialmente fue de sumas y restas al combinar o cancelar diferentes símbolos. Los papiros contienen problemas con una incógnita, parecido a las ecuaciones lineales de nuestra época. También contienen problemas de progresiones aritméticas y geométricas. El álgebra les permitía resolver problemas de áreas, volúmenes y algunas situaciones geométricas.

> Heródoto nos dice que la geometría egipcia tuvo su origen en la necesidad que provocaba la crecida anual del Nilo de volver a trazar las lindes de los terrenos cultivados por los agricultores. Sin embargo, los babilonios desarrollaron una geometría parecida sin tal necesidad. Los egipcios disponían de recetas para el cálculo de áreas de rectángulos, triángulos y trapezoides; en el caso del área de un triángulo, aunque multiplicaban un número por la mitad de otro, no podemos estar seguros de que el método sea correcto, porque no tenemos la seguridad de que las palabras utilizadas representen las longitudes de la base y la altura o simplemente dos lados. Además, las figuras están tan mal dibujadas en los papiros que a veces no se puede saber exactamente qué área o volumen se está calculando. (Kline, 1972, p. 41).

Para el cálculo del área del círculo utilizaron una sorprendente formula donde decía que el área era igual a elevar al cuadrado de ocho veces el diámetro dividido entre nueve. Por lo que se supone utilizar el valor de π igual a 3.1605.

La civilización china es otra de las más antiguas y el surgimiento de las matemáticas en esa civilización es algo difícil de responder, pues surgieron muchas leyendas sobre ese tema. En su libro sobre los ancestros que es un libro perdido pero que se encuentran registro de la existencia de este por otros manuscritos donde hacen referencia a él, se encuentra la leyenda del emperador Amarillo, al cual se le atribuye un reinado de 100 años del 2698 al 2598 a.C. Este emperador ordeno a varios de sus súbditos que cada uno realizara una actividad, como la de observar las estrellas, el sol, la luna, y que a uno de ellos le encargó crear la aritmética. Esto último algo muy difícil de creer pues no se le puede atribuir eso a una sola persona. También existen leyendas que narran la utilización de quipus (es un juego de cuerdas anudadas para llevar la contabilidad, usado también por los incas) el sistema de nudos aparece en sus escritos antiguos.

Existe otra leyenda que trata sobre la invención la escuadra y el compás, ya que se encontraron grabados de personajes usando estos instrumentos, estos pertenecientes a la Dinastía Han, aproximadamente del siglo II d.C. En excavaciones se encontró arqueología china, algunos con diseños de animales y otros con figuras geométricas, formadas por combinaciones de líneas, triángulos, círculos y líneas curvas. Los chinos en la época de la dinastía Shang (siglos XVI–XI) contaban con una agricultura avanzada, y se han encontrado construcciones circulares y rectangulares que servían de almacenamiento para granos.

En sus sistemas de numeración encontrados, existen inscripciones realizadas en conchas de tortugas, huesos de animales, conchas, huesos, a este tipo de escritura se le denomina oracular, pues suponían que hablaban con los espíritus de sus ancestros. También se encontraron escrituras en alfarería, de estos restos encontrados se sabe que utilizaban una escritura de 5000 caracteres incluyendo números. Posterior a este tipo de escrituras apareció la denominada escritura de bronce, y la forma de sus números era casi igual a la actual. En la actualidad existen dos tipos más de números, que son los oficiales y los comerciales, siendo los oficiales los que se utilizan en los billetes de los bancos para evitar su falsificación.

En la antigua china realizaban cálculos que no implicaban el manejo de números escritos, estos se realizaban con unas varillas de contar, estas estaban hechas de bambú, y según el orden que ocupaban en el suelo, era el valor que representaba. Con estas varillas en la época cristiana, idearon como utilizarlas con números positivos y negativos. Se tienen registros de que realizaban operaciones básicas, aunque se supone que inventaron primero la suma y la resta. Aunque la multiplicación y la división la asocian a una rima denominada "Rima de los nueve nueves", que hoy en día son las tablas de multiplicar.

El "libro de las artes" fue escrito entre (475 – 221 a.C.) en él se encuentran técnicas de fabricación de objetos, embarcaciones, arcos, flechas, coches de caballos, y contiene datos sobre fracciones, ángulos y unidades de medida, como se observa en la figura 20, una son las unidades de medidas de los ángulos en pulgadas, y la otra es como realizaban los arcos para los nobles de la dinastía Zhōu (ver figura 21), en esa época se le daba mucha importancia al concepto de ángulo. En china con la llegada de la dinastía Qín se unificaron las unidades de medida.

Las unidades para medir ángulos que se encuentran en este libro son:

jŭ = 90°

xuān = 45° (= 1/2 jŭ)

zhú = $67^{\circ}\ 30'$ (= 1 1/2 xuān)

kē = $101^{\circ}\ 15'$ (= 1 1/2 zhú)

qíngzhé = $151^{\circ}\ 52'\ 30''$ (= 1 1/2 kē)

Figura 20. Unidades de medidas de ángulos. (Fuente: Algarra, Borges, García, Hernández, Hernández, 2004, p.13)

Hacer arcos para el emperador,
nueve arcos juntos forman una circunferencia.
Hacer arcos para los señores feudales,
siete arcos juntos forman una circunferencia.
Arcos para los oficiales del emperador,
cinco arcos juntos forman una circunferencia.
Arcos para los letrados,
tres arcos juntos forman una circunferencia.

Figura 21. Descripción de cómo se hacían los arcos para los nobles de la dinastía Zhōu

En el libro conocido como "cuatro capítulos de Mózí" fue escrito antes de la dinastía Qín y contiene conceptos y definiciones de lógica, física y matemáticas. En los conceptos de geometría se encuentran los de, misma altura, tres puntos alineados, circunferencia que es igual a un centro con una misma longitud, así como también los conceptos de punto, línea, sólido y nociones de suma y resta.

En la época de la dinastía Hán, se desarrollaron diversas áreas de la ciencia y la tecnología, el libro de astronomía "*El clásico de la aritmética del gnomon y las sendas circulares del cielo"* destaca por sus contenidos matemáticos y cálculos sobre técnicas para medir la tierra, y cuerpos celestes empleando el teorema de Gougu, (Pitágoras) y cálculos de fracciones. Uno de los científicos de esa época llamado Zhan Héng, propuso un tratado sobre circunferencias inscritas y circunscritas en un cuadrado, que se le diera a πel valor de raíz cuadrada de 10. Su trabajo está basado en cálculos teóricos.

El teorema de Gougu, conocido en occidente como teorema de Pitágoras, fue muy importante en esa época, el libro contiene ejemplos de mediciones de alturas, profundidades y distancias aplicadas al suelo, y solían ser bastante exactas. Ayudándose de una vara vertical de un reloj de sol, y la semejanza de triángulos, averiguaban la altura de un árbol.

Otra de las obras chinas importantes se encuentra el libro de “Nueve capítulos sobre el arte matemático” es un libro realizado en el siglo I d.C. de autor desconocido, es una recopilación de todos los trabajos que se habían realizado hasta entonces, en el capítulo I, el tema central es el cálculo de áreas y cálculo con fracciones. El capítulo IV trata sobre el área del cuadrado, volumen del cubo, raíces cuadradas y cúbicas.

Este libro es la evidencia de la sabiduría de la antigua china, llegando a utilizar fórmulas para el cálculo de área y volúmenes de figuras geométricas conocidas, como se muestra en la siguiente figura.

Rectángulo $A = ab$ donde a y b son los lados del rectángulo.

Triángulo $A = \frac{1}{2}bh$ donde b es la base del triángulo y h su altura.

Círculo $A = \frac{P}{2}\frac{D}{2}$ donde D es el diámetro del círculo y P su perímetro.

Figura 22. Fórmulas de áreas (Fuente: Algarra, Borges, García, Hernández, Hernández, 2004, p.23).

Uno de los matemáticos destacados fue Liú Hui, su descubrimiento más destacado fue la división del círculo, para encontrar el valor de pi, el usó polígonos inscritos para encontrarlo, llegó a calcular la longitud de un polígono regular de 96 lados y el área de otro de 192 lados, y encontrando el valor de $\pi = 3.141024$. y después de incrementar varias veces el número de lados de un polígono llegó a encontrar $\pi = 3.1416$. el utilizó el mismo concepto para calcular el área de figuras irregulares.

Todo lo descrito anteriormente nos sirve de preámbulo para abordar la historia de los teselados, la cual nos permite mostrar la importancia que tienen y como desde tiempos antiguos han sido utilizados en construcciones de edificaciones.

Partimos de considerar la definición de tesela, la cual de acuerdo a que menciona Hernández (2014, p. 27), “la palabra tesela (del latín, *tesella*) significa “*Cada una de las piezas cúbicas de mármol, piedra, barro cocido o cualquier otro material,* *con que los antiguos formaban los pavimentos de mosaico*”” y para Godino & Ruíz (2002, citados en Hernández, 2014, p. 27), desde un punto de vista matemático más general consideramos que una tesela es “cualquier curva cerrada simple, con su interior”. Un conjunto de teselas forma una teselación de una figura si dicha figura está completamente cubierta por las teselas sin solapamientos de puntos interiores de dichas figuras.

Regresando al uso de las teselas en las edificaciones, encontramos el caso de una ciudad histórica en España, llamada Alhambra, en la que los muros de sus castillos están adornados con figuras geométricas como herramientas de la arquitectura de ese lugar, por lo cual fue nombrada patrimonio de la humanidad en 1984.

Los mosaicos de esa ciudad fueron construidos durante el reinado de los sultanes nazaríes, de los años 1200 a 1400 aproximadamente, la construcción más significativa es el castillo rojo, “Oalat al-Amra”, que es donde se encuentran la mayor parte de mosaicos nazaríes. Estos mosaicos son construidos partiendo de la deformación de polígonos regulares, triángulos equiláteros y cuadrados principalmente.

La geometría es el principio rector del arte islámico, en el arte nazarí se pueden encontrar composiciones simples elaboradas de una o dos figuras y su constante repetición, y las composiciones complejas, que se generan con la rotación o traslación de la forma geométrica original como se observa en la figura 23.

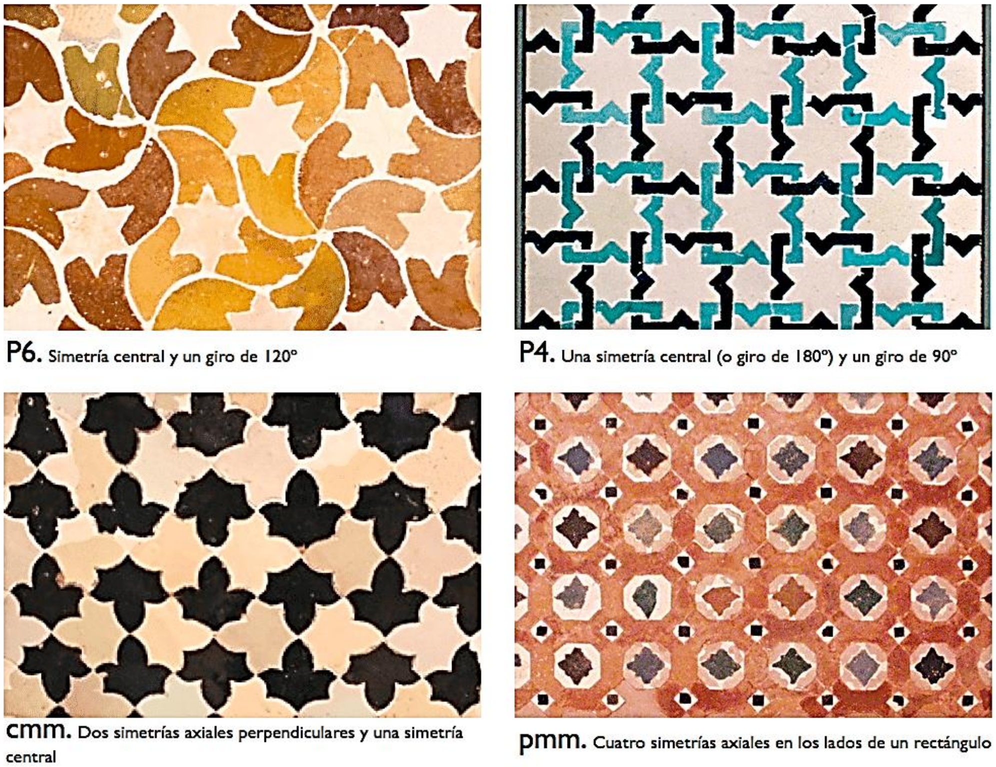


Figura 23. Ejemplos de composiciones complejas[3]

2.2.1.2. Dimensión cognitiva

En la construcción de esta dimensión se han considerado los aspectos psico-sociales de los alumnos que participaron en esta investigación, considerando las posturas teóricas de expertos en el tema.

Esta actividad se propone para el segundo grado de secundaria, la edad de los alumnos es entre los trece y catorce años, para esta edad lo niños ya se encuentran en la última de las cuatro etapas de la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget (1970), la propuesta del desarrollo cognoscitivo de Piaget nos dice que todos los niños pasan por cuatro etapas. En esta ocasión la investigación se centra en la última etapa es donde los niños encuentran soluciones lógicas, razonando y siguiendo un proceso. Piaget basó su investigación en la forma en

[3] Fuente: https://www.alhambra-patronato.es/geometria-matematica-alicatados

que los niños adquieren sus conocimientos y como lo desarrollan durante el paso del tiempo, de cómo piensan y solucionan problemas (ver Tabla 1).

Tabla 1. Etapas de la teoría del desarrollo cognoscitivo de Piaget.

Etapas del desarrollo	Edad	Característica
Sensoriomotora	De 0 a 2 años	Construye nuevas soluciones a problemas y el conocimiento de la permanencia de los objetos
Preoperacional	De 2 a 7 años	Representa objetos en imágenes en dibujos o pinturas, pronuncia algunas palabras y soluciona problemas
Operaciones Concretas	De 7 a 11 años	Capacidad de razonar la conservación de los objetos, realizan operaciones básicas mentales, seriación, clasificación y conservación.
Operaciones Formales	De 11 a 12 años en adelante	Cuenta con herramientas cognoscitivas, comprende relaciones conceptuales, operaciones de lógica posicional, formula hipótesis y las compara con hechos reales.

Fuente: Meece, 2000, pp.4-5.

Si se toma en cuenta la teoría de Vygotsky, nos dice que el conocimiento no se construye de forma individual, es decir que se va adquiriendo con las interacciones sociales entre las personas que rodean al niño y esto transforma su mentalidad a niveles superiores. Las dos teorías tienen diferencias entre sí, pero coinciden en la forma en que el niño debe construir mentalmente su conocimiento, para Vygotsky tiene mayor peso el aprendizaje desarrollado en un proceso social (ver Figura 24).

En consecuencia, se considerarán las dos teorías para el desarrollo esta investigación y para entender lo que el estudiante realiza a partir de la actividad propuesta, de acuerdo a la edad de los alumnos de segundo grado de secundaria, se encuentra que los alumnos en esa edad pueden realizar operaciones formales de manera reflexiva, pero además, aprende de sistemas abstractos del pensamiento que le permiten usar la lógica proposicional el razonamiento científico y el razonamiento proporcional, poniendo en juego a cada momento las relaciones sociales personales que ha establecido con sus pares y con el profesor a cargo.

Figura 24. Etapas del desarrollo cognoscitivo [4]

[4] Fuente: https://www.psycospirity.com/2019/04/desarrollo-cognitivo-teoria.html

2.2.1.3. Dimensión didáctica

En este apartado construimos la dimensión a partir del análisis de los planes programa de estudios establecido para el ciclo escolar en cuestión, de los libros de texto que se utilizan en segundo grado de secundaria y de la forma en que el tema es abordado en el aula.

a) Sobre los planes y programas de estudio

En los propósitos de los planes y programas del Estudio de las matemáticas para la educación básica se pretende que los alumnos desarrollen su forma de pensar, formulando procedimientos para resolver distintos problemas, además de poder explicarlos ya sea por operaciones o geométricamente. Esto les permite a ellos utilizar diferentes técnicas de resolver los problemas matemáticos.

> Uno de los propósitos en la educación secundaria señalado en los planes y programas de la secretaria de educación es que los alumnos justifiquen y usen las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de diferentes figuras y cuerpos, y expresen e interpreten medidas con distintos tipos de unidad (SEP, 2011 p.14)

De acuerdo a la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011a. p.17), los planes y programas los estándares están organizados en tres ejes temáticos:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
2. Forma espacio y medida
3. Manejo de la información

En el eje de Sentido numérico y pensamiento algebraico se manejan problemas de conversiones de fracciones a decimales, de mínimo común múltiplo, máximo común divisor, expresiones algebraicas, multiplicaciones y divisiones de monomios y polinomios, sucesiones de ecuaciones lineales y cuadráticas, además de la resolución de estas.

En el segundo eje que es Forma Espacio y Medida, este está subdivido en dos temas, uno de Figuras y cuerpos y el otro de Medida (ver Figura 25); los estándares para figuras y cuerpos son los siguientes, resolver problemas que impliquen la construcción de círculos, polígonos regulares, uso de la regla y compas, trazo de triángulos, mediatices, bisectrices, simetrías, rotaciones, traslaciones, congruencias y semejanzas de triángulos y polígonos.

El subtema de Medida contiene el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, también encontramos aquí mismo el cálculo de la medida de diversos elementos del círculo, como la circunferencia, superficie, ángulo central e inscrito, arcos de circunferencia, sectores y coronas circulares.

Bloque I

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Resuelve problemas que implican el uso de las leyes de los exponentes y de la notación científica. • Resuelve problemas que impliquen calcular el área y el perímetro del círculo. • Resuelve problemas que implican el cálculo de porcentajes o de cualquier término de la relación: Porcentaje = cantidad base × tasa. Inclusive problemas que requieren de procedimientos recursivos. • Compara cualitativamente la probabilidad de eventos simples.	**Problemas multiplicativos** • Resolución de multiplicaciones y divisiones con números enteros. • Cálculo de productos y cocientes de potencias enteras positivas de la misma base y potencias de una potencia. Significado de elevar un número natural a una potencia de exponente negativo.	**Figuras y cuerpos** • Identificación de relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Justificación de las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los triángulos y paralelogramos. • Construcción de triángulos con base en ciertos datos. Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones. **Medida** • Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.	**Proporcionalidad y funciones** • Resolución de problemas diversos relacionados con el porcentaje, como aplicar un porcentaje a una cantidad; determinar qué porcentaje representa una cantidad respecto a otra, y obtener una cantidad conociendo una parte de ella y el porcentaje que representa. • Resolución de problemas que impliquen el cálculo de interés compuesto, crecimiento poblacional u otros que requieran procedimientos recursivos. **Nociones de probabilidad** • Comparación de dos o más eventos a partir de sus resultados posibles, usando relaciones como:

Figura 25. Contenido bloque 1, segundo de secundaria (Fuente: SEP 2011)

Y Manejo de la información, lo subdividen en tres temas, proporcionalidad y funciones, nociones de probabilidad y análisis y representación de datos. En el tema de proporcionalidad y funciones se espera que el alumno resuelva problemas vinculados a proporcionalidad, escalas, porcentajes, interés simple y compuesto, expresiones algebraicas de relaciones lineales y cuadráticas, para el segundo tema de nociones de probabilidad, se enfoca en el análisis de los eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. Y para el tema de análisis y representación de datos, es leer y representar la información de diversos tipos de gráficas, y cálculo de desviación media y rango.

Para el programa de segundo grado encontramos el cálculo de áreas de figuras compuestas en el apartado 5 del bloque 1 de segundo grado. Este tema de figura compuestas se encuentra implícito en los siguientes dos temas que son los de interés. Se menciona, por su importancia los saberes previos que deben poseer los alumnos antes de llegar al cálculo de áreas de sectores circulares. El tema de teselados se encuentra en el bloque 3 apartado 4, aparece como Análisis y explicitación de las características de los polígonos que permiten cubrir el plano, como se muestra en la figura 26.

Bloque III

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con expresiones algebraicas. • Justifica la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o polígono y utiliza esta propiedad en la resolución de problemas.	Problemas multiplicativos • Resolución de cálculos numéricos que implican usar la jerarquía de las operaciones y los paréntesis, si fuera necesario, en problemas y cálculos con números enteros, decimales y fraccionarios. • Resolución de problemas multiplicativos que impliquen	Figuras y cuerpos • Formulación de una regla que permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono. • Análisis y explicitación de las características de los polígonos que permiten cubrir el plano.	Proporcionalidad y funciones • Representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación.

Figura 26. contenido bloque 3, segundo de secundaria (Fuente: SEP 2011)

Y el cálculo de áreas de sectores circulares se encuentra en el quinto bimestre de segundo grado (ver figura 27).

Bloque V

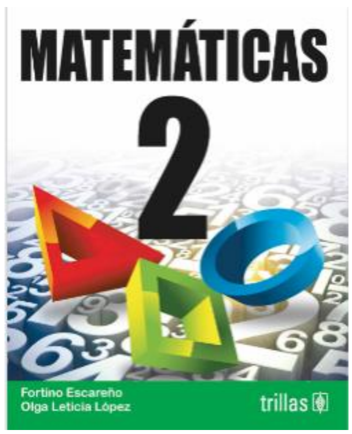
Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. • Construye figuras simétricas respecto de un eje e identifica las propiedades de la figura original que se conservan. • Resuelve problemas que implican determinar la medida de diversos elementos del círculo, como: ángulos inscritos y centrales, arcos de una circunferencia, sectores y coronas circulares.	Patrones y ecuaciones • Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2 × 2 con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución). • Representación gráfica de un sistema de ecuaciones 2 × 2 con coeficientes enteros. Reconocimiento del punto de intersección de sus gráficas como la solución del sistema.	Figuras y cuerpos • Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos. Medida • Cálculo de la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	Proporcionalidad y funciones • Lectura y construcción de gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos. • Análisis de los efectos al cambiar los parámetros de la función $y = mx + b$, en la gráfica correspondiente. Nociones de probabilidad • Comparación de las gráficas de dos distribuciones (frecuencial y teórica) al realizar muchas veces un experimento aleatorio.

Figura 27. Contenido bloque 5, segundo de secundaria (Fuente: SEP 2011)

b) Análisis de los libros de texto

En este apartado se analizarán algunos de los libros de texto que se utilizaron para abordar estos temas durante algunos ciclos pasados, y el actual. Cabe mencionar que los libros de texto son seleccionados por la academia de matemáticas del centro escolar. De manera general podemos decir que todos los libros de texto están organizados por bloques, cada bloque con sus tres ejes correspondientes, cada eje dividido de acuerdo a los planes y programas.

Libro de Texto Oficial para secundarias de Escareño, F., López, O., (2018), Matemáticas 2, 2do. Grado, Educación secundaria. México



En este libro de texto que se usa en este ciclo escolar 2018-2019, basado en el enfoque de la resolución de problemas, propone actividades que despierten el interés del alumno y lo hagan reflexionar, para emprender procesos de búsqueda y expresar la solución validando resultados. Con este fin la estructura del libro para cada actividad esta subdividida en tres momentos

1. Planteamiento del problema
2. Exploración y discusión
3. Actividades adicionales

El tema de teselados se encuentra en el bloque tres, páginas de la 148 a la 150 contenido 20, con el título, Recubrimiento de planos. Lo aborda desde el planteamiento del siguiente problema. ¿Es posible cubrir un piso colocando repetidamente un mismo tipo de triángulo del mismo tamaño? Y después de plantear la pregunta, pasa a la exploración y discusión, aquí muestra a los alumnos algunas imágenes de teselados y les pregunta ¿Cuánto suman los ángulos en cada punto de unión?

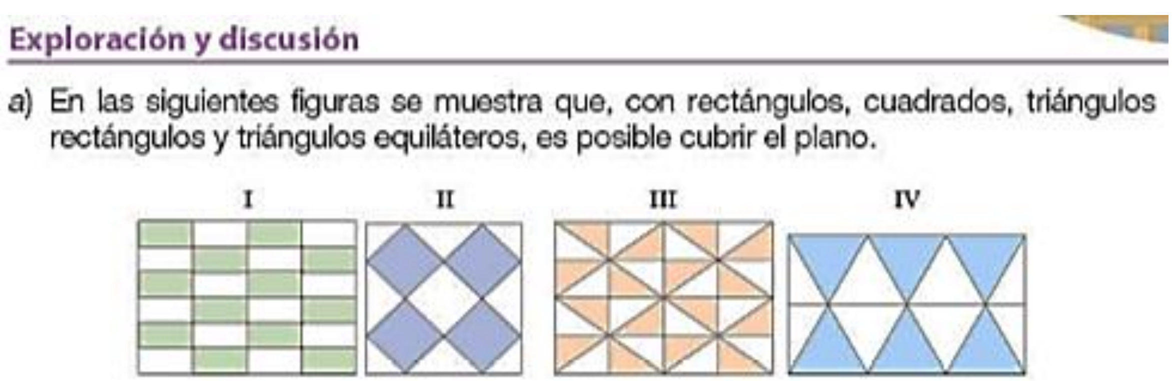
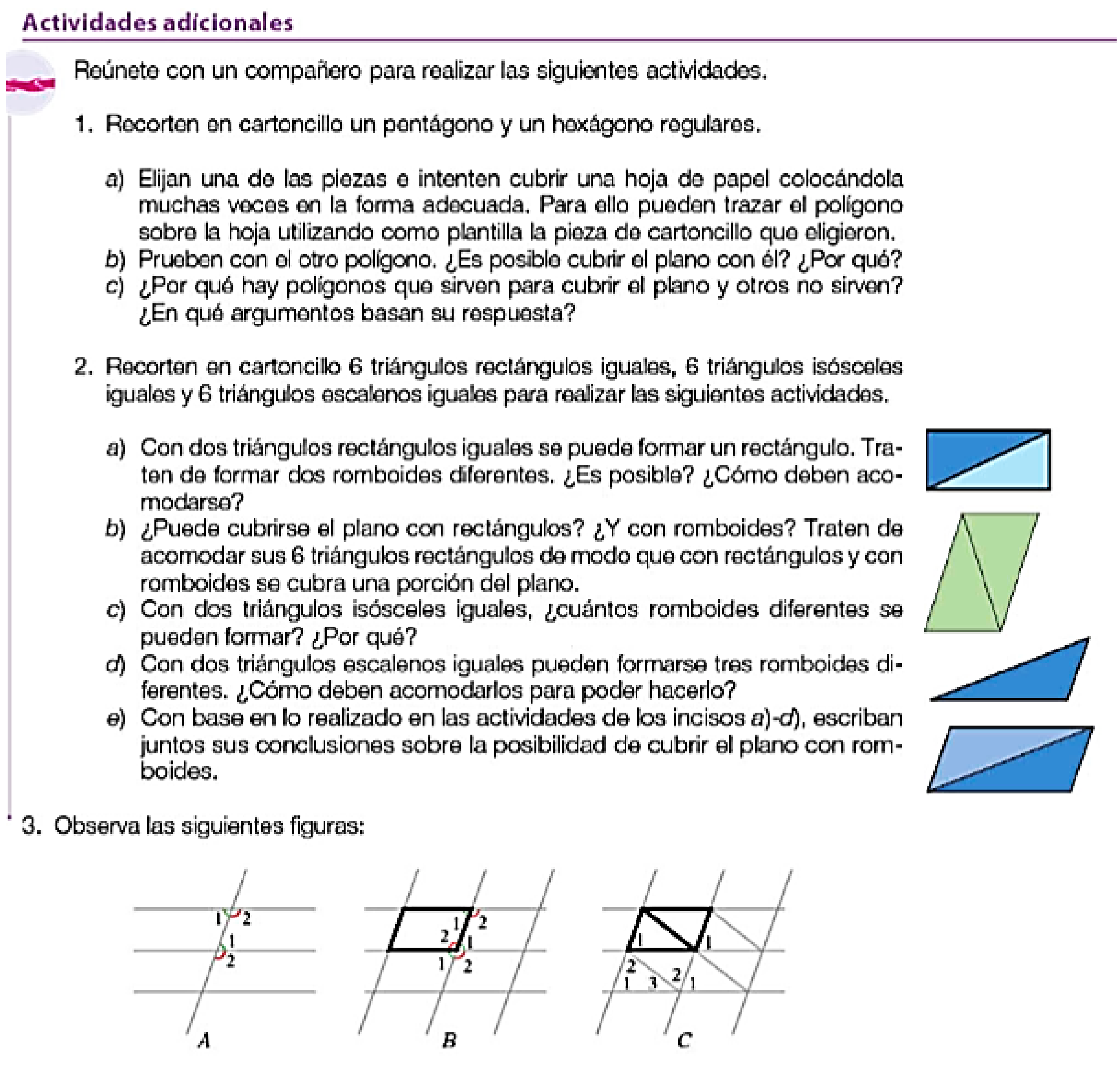


Figura 28. Algunas representaciones con polígonos. (Fuente: Escareño y López 2018, p. 149)

Continúa haciendo preguntas generadoras, para que el alumno comprenda que la sumatoria de los ángulos en las uniones es de 360°. Y después pasa a las actividades adicionales, donde se les pide a los alumnos cortar un rectángulo por una de sus diagonales y formar un paralelogramo y complementa la actividad con otra serie de preguntas como se muestra a continuación en la figura 29.

Como actividades finales pide que rellenen un recuadro de tres columnas, donde hay que colocar el nombre del polígono, la suma de sus ángulos interiores y cuanto mide su ángulo central. Y para finalizar solo pide que, con la moderación del profesor, los alumnos expliquen en el grupo las condiciones necesarias que deben cumplir los polígonos, para cubrir un plano.


Actividades adicionales

Reúnete con un compañero para realizar las siguientes actividades.

1. Recorten en cartoncillo un pentágono y un hexágono regulares.

   a) Elijan una de las piezas e intenten cubrir una hoja de papel colocándola muchas veces en la forma adecuada. Para ello pueden trazar el polígono sobre la hoja utilizando como plantilla la pieza de cartoncillo que eligieron.
   b) Prueben con el otro polígono. ¿Es posible cubrir el plano con él? ¿Por qué?
   c) ¿Por qué hay polígonos que sirven para cubrir el plano y otros no sirven? ¿En qué argumentos basan su respuesta?

2. Recorten en cartoncillo 6 triángulos rectángulos iguales, 6 triángulos isósceles iguales y 6 triángulos escalenos iguales para realizar las siguientes actividades.

   a) Con dos triángulos rectángulos iguales se puede formar un rectángulo. Traten de formar dos romboides diferentes. ¿Es posible? ¿Cómo deben acomodarse?
   b) ¿Puede cubrirse el plano con rectángulos? ¿Y con romboides? Traten de acomodar sus 6 triángulos rectángulos de modo que con rectángulos y con romboides se cubra una porción del plano.
   c) Con dos triángulos isósceles iguales, ¿cuántos romboides diferentes se pueden formar? ¿Por qué?
   d) Con dos triángulos escalenos iguales pueden formarse tres romboides diferentes. ¿Cómo deben acomodarlos para poder hacerlo?
   e) Con base en lo realizado en las actividades de los incisos *a)*-*d)*, escriban juntos sus conclusiones sobre la posibilidad de cubrir el plano con romboides.

3. Observa las siguientes figuras:

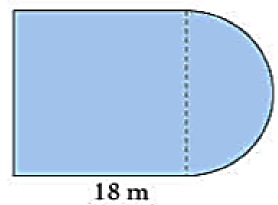
Figura 29. Ejercicio de cortar un rectángulo (Fuente: Escareño y López 2018, p. 150)

El tema de áreas de sectores circulares no está incluido en el bloque 5, se considera que no lo incluyeron ahí, porque puede incluirse en el bloque 1 como áreas de figuras compuestas. Y solo plantea dos ejercicios que incluyen partes semicirculares. Se encuentran en la página 46 y 47 del bloque 1. Como se muestra en las figuras 30 y 31.

Actividades adicionales

Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

1. Una alberca se representa mediante la figura que se muestra a la derecha. ¿Cuáles son las medidas de su perímetro y su área? ____



   a) ¿Qué figuras geométricas forman la alberca? ____

   b) ¿Qué procedimiento puede aplicarse para calcular su perímetro? ____

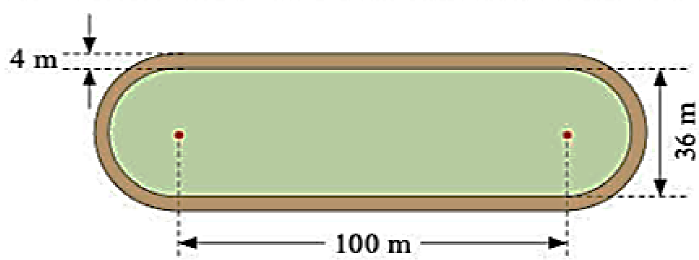
   c) ¿Y para calcular su área? ____

   d) ¿Cuánto miden el perímetro y el área de la alberca? ____

Figura 30. Ejercicio 1 (Fuente: Escareño y López 2018, p. 46)

Y el segundo ejemplo que muestra es el siguiente.

4. Una pista de carreras se representa mediante la siguiente figura:



Calculen el área de la pista y la distancia que recorre un corredor que da una vuelta por el centro de la pista.

a) ¿Cómo calculan el área de cada sección recta de la pista? ____

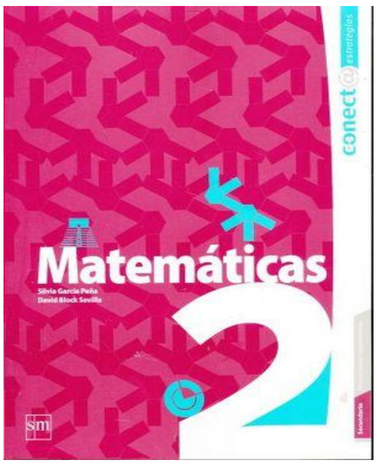
b) ¿Qué procedimiento pueden aplicar para calcular el área de cada sección semicircular de la pista? ____

c) ¿Cuál es el área de la pista? ____

Figura 31. Ejercicio 2 (Fuente: Escareño y López 2018, p. 47)

Las actividades planteadas en este primer bloque, se encuentran de una manera muy simple, donde sería necesario agregarle un poco de complejidad para que el alumno desarrolle sus competencias y capacidades que se requieren para el nivel de egreso de segundo de secundaria.

Libro de Texto Oficial para secundarias de Peña, S., Block, D., (2018), Matemáticas 2, 2do. Grado, Educación secundaria. México.



Este libro de texto se uso durante los tres años anteriores a este ciclo escolar, es un libro que tiene sus actividades enfocado a favorecer las competencias, poniendo en juego los saberes previos para que los alumnos puedan resolver los problemas. El libro esta organizado en cinco bloques, cada uno con los tres ejes tematicos como marca el programa de educación básica en secundarias. Todas las lecciones se encuentra una introducción a la secuencia, en un recuadro azul se muestran en donde se pueden usar lo conocimientos adquiridos, otro recuadro de conceptos, y uno más de reflexiones. Y estan diseñadas en tres momentos, inicio, desarrollo y cierre.

Para el tema de Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides. Se encuentra en la pagina 46, Bloque 1, secuencia 5, lección 15, titulado Diseños, y da comienzo con algunas preguntas para que el alumno razone de que manera podria resolver esos problemas. La actividad 1 es hacer la estimación necesaria para que se ocupe menos carton, estas figuras que propone el libro se encuentran trapecios, rectangulos, cuadrados, y arcos de circunferencia.como se observa en la figura 32.

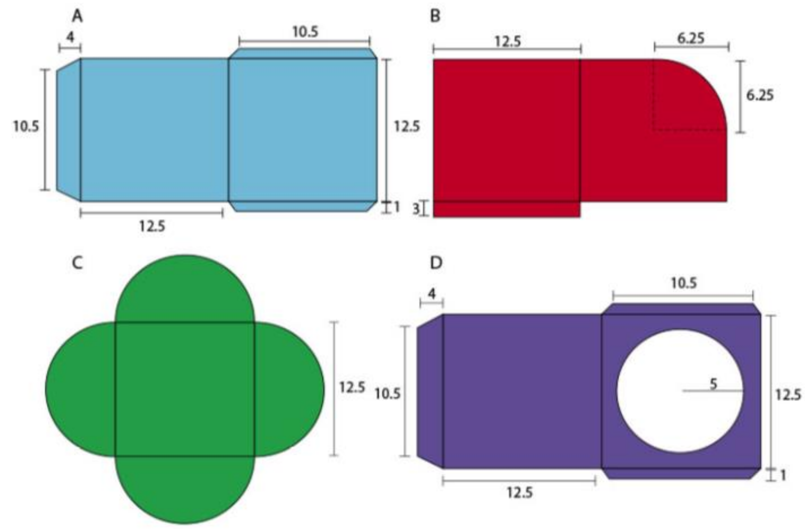


Figura 32. Áreas de figuras compuestas (Fuente: Peña y Block 2018, p. 46)

La actividad 2 es calcular el área de partes sombreadas, sin realizar oepraciones, estas inlcuyen sectores circulares, triangulos, y otras figuras que se muestran en la figura 33.

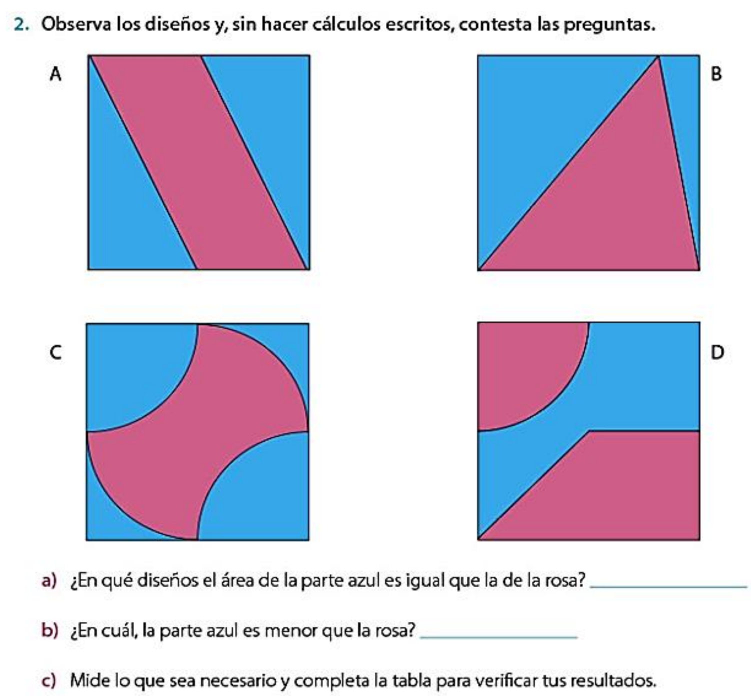


Figura 33. Áreas de partes sombreadas (Fuente: Peña y Block 2018, p. 47)

Para el tema de teselados, este se encuentra en la pagina 140, Bloque 3, secuencia 4, lección 54, titulado Mosaicos. Inicia de la misma manera de la lección anterior, con una serie de preguntas para inciar el tema, y despues propone un trabajo en equipo donde una fabrica de mosaicos con formas de figuras geométricas, tiene que cubrir una pared, usado un solo tipo de figura, con las condiciones que no queden huecos entre ellas y no queden sobrepuestas. Las figruas que propone son triangulo, cuadrado, pentagono, hexagono y octagono. Y pide que recorten las figuras en cartoncillo, para realizar la acividad. (ver figura 34)

Figura 34. Figuras para reproducir y formar teselados (Fuente: Peña y Block 2018, p. 140)

Posterior a eso, hay que completar la siguiente tabla (ver figura 35)

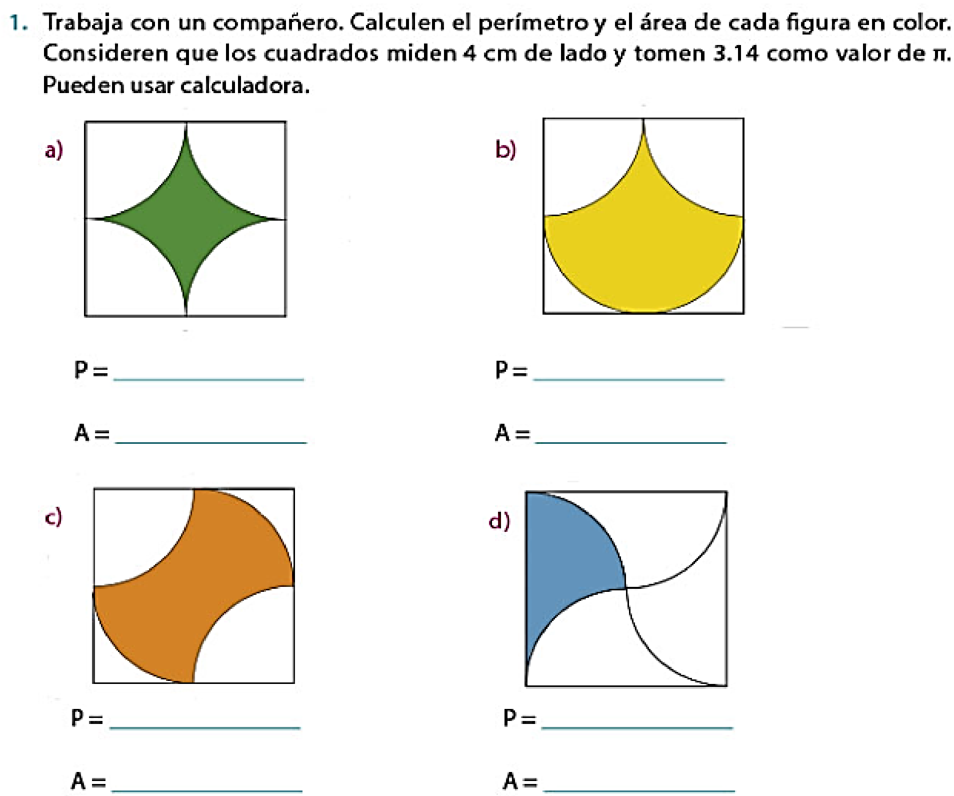
2. Completen la tabla.

Polígono	Medida del ángulo interior	¿La medida del ángulo interior divide exactamente a 360º?	¿Puede cubrir el plano?
Triángulo equilátero			
Cuadrado			
Pentágono regular			
Hexágono regular			
Octágono regular			

Figura 35.Tabla de ángulos interiores. (Fuente: Peña y Blok 2018, p. 140)

Luego pide observar diseños de algunos teselados, y analizar con que figuras se puede cubrir el plano sin dejar huecos. Como actividad complementaria en la pagina 164 muestra otros diseños de teselados y pide que diseñe un teselado. Estas actividades estan muy completas en este libro.

Para el tema de Cáculo de la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos., el área de sectores circulates y de la corona, se encuentra en la pagina 246, Bloque 5, secuencia 6, lección 99, titulada Diseños con circulos. Aquí se pide a los alumnos que calculen el perímetro y el área de las partes sombreadas como se muestra en la figura 36.


1. Trabaja con un compañero. Calculen el perímetro y el área de cada figura en color. Consideren que los cuadrados miden 4 cm de lado y tomen 3.14 como valor de π. Pueden usar calculadora.

a)

P = ____________

A = ____________

b)

P = ____________

A = ____________

c)

P = ____________

A = ____________

d)

P = ____________

A = ____________

Figura 36. Áreas de sectores circulares (Fuente: Peña y Block 2018, p. 246)

La actividad 2 ilustra unos hexagonos circunscritos en una circunferencia, y tienen partes sombreadas, a las cuales pide que se les calculen área y perimetro. Y finaliza con una actividad de calcular áreas de coronas y de sectores se coronas.

Estas actividades hacen felexionar al alumno ya sea que resulvan las actividades indivuales, en parejas o en equipos, tienen un grado de dificultad cada vez mayor para hacer conflictuar al alumno y este logre apropiarse del conocimiento.

El tercer libro que se presenta, se utilizo hace 4 ciclos escolares en el mismo centro escolar, Libro de Texto Oficial para secundarias de Castañeda, A., González, R., (2014), Retos matemáticos 2, 2do. Grado, Educación Secundaria. México.

Este libro se encuentra estructurado en 5 bloque, cada uno en tres ejes, tal como lo marcan los planes y programas, cada tema esta didivido en lecciones, todas ellas empiezan con una situación, despues una segunda lección que se llama un paso adelante, y una tercera lección que se llama profundiza. Ademas de traer orientaciones y uso de herramientas tecnologicas. Presenta tambien unos cuadros de información relevante del tema, y una actividad integradora que puede llevarse extraclase. Es un libro muy completo y con actividades adecuadas para el grado.

Para el tema de Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides. Se encuentra en la pagina 42, Bloque 1, lección 7, titulado Calculando áreas. La actividad inicia con un cuadrado dividido en colores, y son figuras geometricas conocidas, y en la lección 2 pide que calculen el área de una figura compuesta, que incluye semicircunferencias, como se muestra en la figura 37

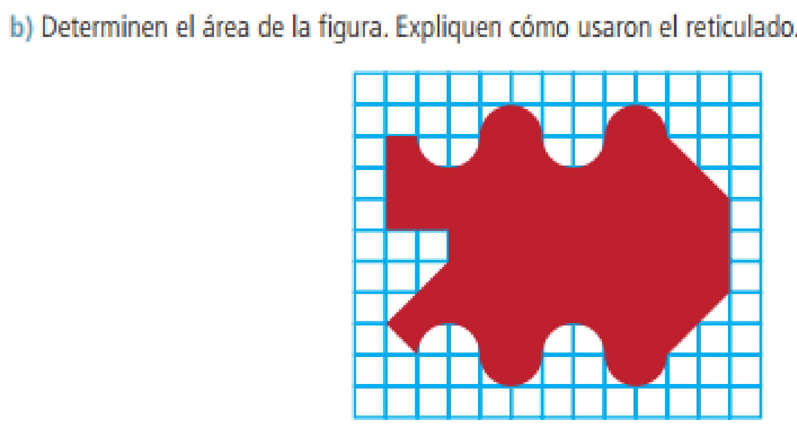


Figura 37. Áreas sobre cuadrículas (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 44)

En la pagina 134, Bloque 3, lección 34, titulado “Para cubrir el plano”, (teselados), inicia con un problema, dodne una persona quiere cubrir las paredes de su habitación con figuras geometricas, y para ello lo hizo trazando triangulos equilateros, como se muestra en la figura 38.

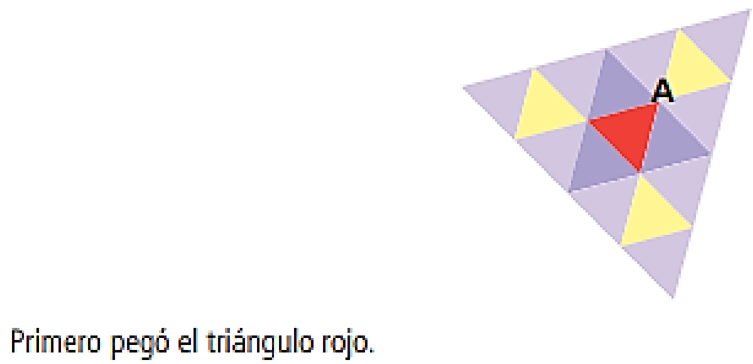


Figura 38. Ejercicio 1 de teselados (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 134)

Despues pregunta ¿cuantos triangulos coinciden en el punto A?, ¿Cuánto mide el ángulo interior de un triángulo equilatero? Y ¿Cuánto suman lo ángulos que coinciden en el punto A? Posteior a eso, la misma persona decide trazar cuadrados como se indica a continuacion en la figura 39.

Figura 39. Ejercicio 2 de teselados (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 134)

Aquí tambien pide constestar las mismas preguntas, y la ultima dice ¿consideran que pocdra cubrir totalmente la pared con cuadrados sin encimarlos ni dejar huecos?, esta se considera una pregunta generadora, pues la respuesta es el principio básico de los teselados.

A continuación dice que usando las figuras que se reprodujeron al final del tema anterior (suma de angulós interiores de cualquier polígono), estas se muestran a continuación en la figura número 40, con las cuales puede que recubran una superficie plana, y escribir en su cuaderno la justificación con cuales de los polígonos se pudo cubrir la superifice.

Figura 40. Figuras para analizar con cuales se puede cubrir un plano (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 135)

Para finalizar el tema en la parte de profundizar, da la respuesta la pregunta de la actividad 2 y muestra algunos ejemplos como se muestra en la figura siguiente número 41, despues de esto pide que recorten un triangulo y repoducirlo tres veces, y acomodarlos de tal manera que se pueda cubir un plano, tambien muestra un trapecio y pide lo mismo.

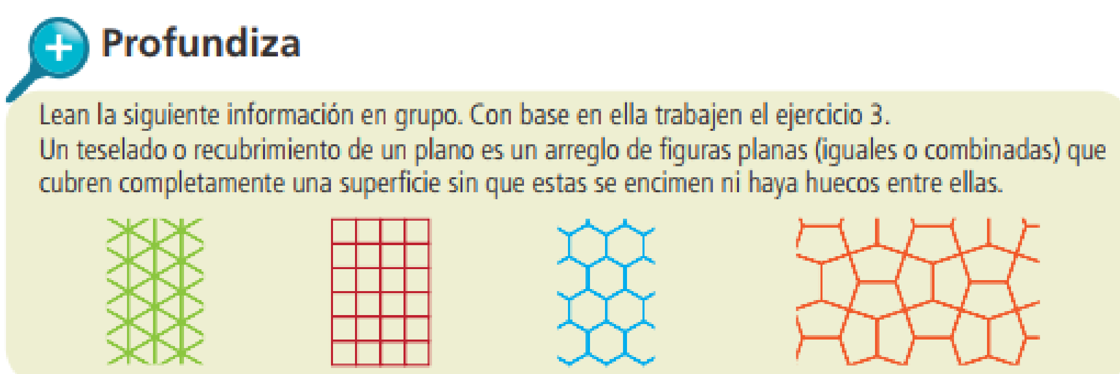
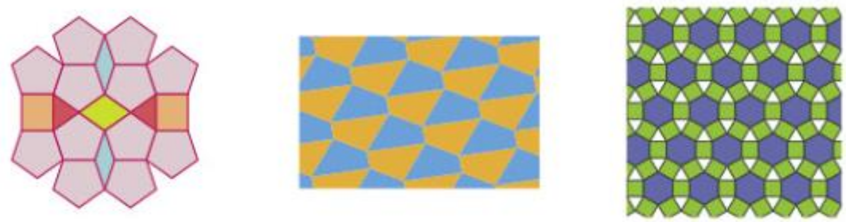


Figura 41. Ejemplos de teselas regulares (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 136)

Y para finalizar en la pagina 137 muestra teselasdos hechos con figuras regulares y en un recuadro de actividades adicionales muestra la figura 42 y pide resolver las preguntas.

a) Cubran mediante polígonos regulares e irregulares un segmento de plano y muéstrenlo al grupo; pueden tomar como ejemplos los que se muestran.



i) ¿Qué polígonos utilizaron? ____________

ii) Localicen un vértice en el que se unan varios polígonos. ¿Cuántos polígonos coinciden en ese vértice? ____________

iii) ¿Cuánto mide el ángulo interno de cada polígono que coincide en el vértice mencionado anteriormente? ____________

iv) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos que coinciden en el vértice? ____________

Figura 42. Actividades adicionales (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 137)

Este tema esta muy completo y muy bien explicado en este libro, lleva a los alumnos paso a paso para comprendrer como se forman lo teselados, hasta el punto que no solo utilza figuras regulares conocidas, sino que tambien propone retos como se muestra en la figura 43

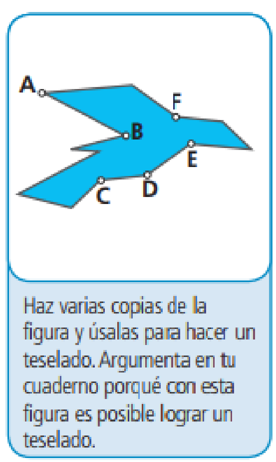


Figura 43. Ejemplo de reto (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 137)

Para el tema de calculo de la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circualresy de la corona. de que esta comprendido en la pagina 226 del bloque 5, lección 45 titulada “arreglo con pasteles”, como inicio es esta lección, dice que se prentende cocinar cun pastel en forma de trebol de cuatro hojas, y muestra una cuadricula dodne se encuentra dibujado el trebol (ver Figura 44)

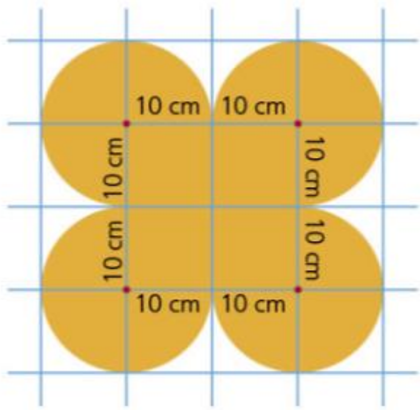


Figura 44. Ejercicio 1 de sectores circulares (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 226)

Y pregunta ¿Cuánto mide el área de la base del molde? Y pide explicar el procedimiento. En la siguiente lección, titulada un paso adelante, pide analizar dos circunferncias, una con un cuadrado inscrito y otra con uno circunscirto, (figura 45).

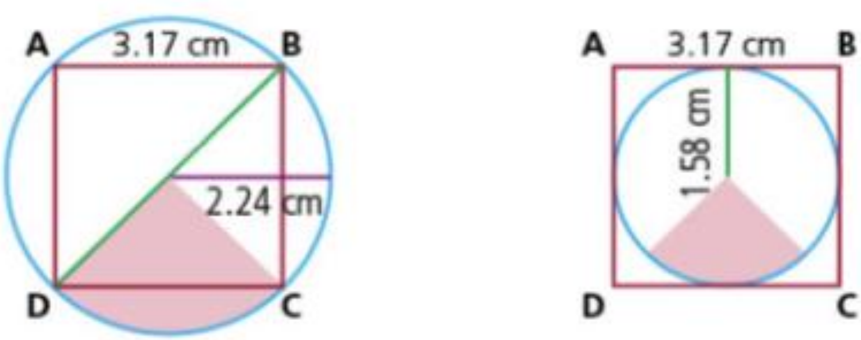


Figura 45. Ejercicios de sectores circulares (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 227)

De aquí se desprenden varias preguntas, algunas de estas son:

a) ¿Cuál es el área del cuadrado en ambas figuras?
b) ¿Cuáles son las áreas de los dos círculos?
c) ¿Cuál es el área de la superficie sombreada?

En el área de informacion relevante encontramos lo siguiente, figura 46.

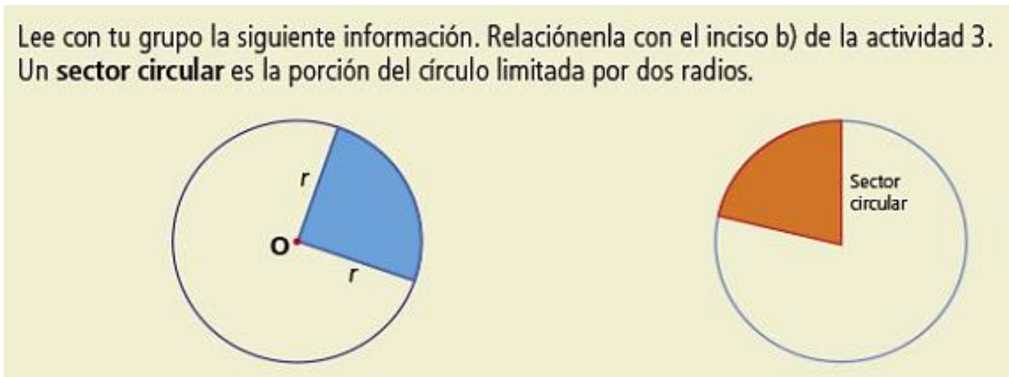
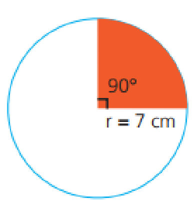

Lee con tu grupo la siguiente información. Relaciónenla con el inciso b) de la actividad 3.
Un **sector circular** es la porción del círculo limitada por dos radios.

Figura 46. Definición de sector circular (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 227)

En la página 228, en la lección de profundizar, muestra un procedimiento para calcular el área de un sector circular, el cual se pide que el alumno lo analice y después escriba en su cuaderno una conclusión. (figura 47)


a) Calculen el área del sector circular que está a la izquierda.

Un círculo tiene un ángulo central de 360° y el sector, un ángulo central de 90°. $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$; por lo tanto, 90° es $\frac{1}{4}$ de 360°, o el sector circular es $\frac{1}{4}$ del círculo.

La fórmula para calcular el área de un círculo es $A = \pi r^2$. Tenemos entonces lo siguiente.

$$A = \pi(7)^2, \quad \text{con } \pi \approx 3.14, \quad A = (3.14)(49), \quad A = 153.86 \text{ cm}^2$$

Pero como el sector circular es una cuarta parte del círculo entonces el área anterior se divide entre 4 o se multiplica por $\frac{1}{4}$. Por lo tanto, el área del sector circular es 153.86(0.25) = 38.465 cm².

Figura 47. Procedimiento para calcular el área de un sector circular (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 228)

Después de esto aparece un recuadro donde nos dan una formula para calcular el área de cualquier sector circular (figura 48)

Lee en grupo la siguiente información. Expresen sus dudas respecto al método que se presenta y resuélvanlas con ayuda del profesor.
Para calcular el **área de un sector circular** se aplica la siguiente fórmula, donde α es la medida del ángulo central cuya área del sector circular se requiere saber.

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$

Figura 48. Fórmula para área de sector circular. (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 228)

Y después pide calcular el área del sector circular sombreado. Usen la información del recuadro anterior.como se muestra en la figura 49.

5. Trabaja en pareja. Calculen el área del sector circular sombreado. Usen la información del recuadro anterior.

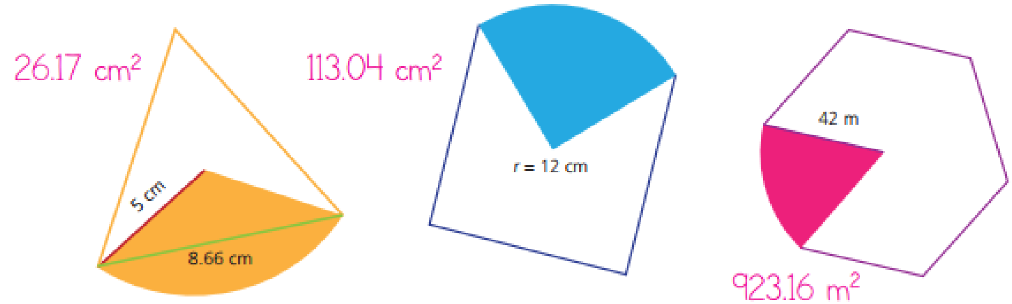


Figura 49. Ejercicios de áreas de sectores circulares. (Fuente: Castañeda y González 2014, p. 228)

Este libro posee un contenido amplio sobre el área de sectores circulares, y la forma en que hace que el alumno se adentre en el tema, es de forma gradual, despues de estos ultimos dibujos, siguen las áreas de sectores circulares de coronas, donde el procedimiento se hace más complicado para un alumno se segundo de secundaria.

c) Abordaje en el aula

Las matemáticas se enseñan desde edades muy tempranas la mayoría de las veces se comienza aprendiendo a reconocer figuras geométricas como el círculo, triangulo y cuadrado, en la primaria se enseña a calcular el perímetro y áreas de diversas figuras geométricas, se retoma el cálculo de áreas en la educación secundaria, es de suma importancia que los alumnos aprendan a estimar, medir y calcular áreas de figuras geométricas, aquí en el nivel secundaria es cuando el cálculo de áreas empiezan a complicarse, ellos estaban acostumbrados a calcular el área total de una figura geométrica regular, y se les dificulta aún más cuando el área ya no es total o cuando se trata fracciones de un círculo, figuras compuestas o irregulares.

En secundaria particularmente en el segundo grado, se comienza planteándoles problemas sobre una cabra atada con una cuerda a la esquina de un terreno cuadrado, en el cual hay que calcular área en que puede pastar la cabra, se comienza la actividad con preguntas generadoras, como ¿cuál es la trayectoria del movimiento de la cabra?, ¿existe alguna relación entre la medida de un ángulo del cuadrado y el movimiento de la cabra?, ¿Qué parte de la circunferencia comprende el sector circular?, el planteamiento y la metodología se diseñó con problemas que despierten el interés en los alumnos, que los invite a la reflexión y a la búsqueda de diferentes formas de resolver los problemas, argumentando su procedimiento y su resultado.

2.2.2 Competencias desde la SEP

El programa de Estudios 2011 de la Educación Básica en nuestro país, está basado en el desarrollo de competencias, con esto se espera formar seres humanos capaces de razonar, argumentar y actuar de manera autónoma ante las dificultades que se le presenten a lo largo de la vida. Estas están definidas como el saber hacer, saber ser y saber actuar. Además de los estándares curriculares que son estándares internacionales de conocimientos adquiridos durante su estadio por la educación básica, y supuestamente comprobables mediante evaluaciones internacionales que dan a conocer el avance de los aprendizajes esperados por materia de los estudiantes. (SEP, 2011, p.29).

“Los saberes adquiridos durante la etapa escolar deben ser puestos en práctica cuando en la vida real al alumno se le presente un problema, y él pueda visualizarlo y actuar de la mejor manera posible y encontrar la solución a la situación”. (SEP, 2011, pp. 38-39) las competencias que aquí se presentan deberán desarrollarse en los tres niveles de educación Básica y a lo largo de la vida, procurando que se proporcionen oportunidades y experiencias de aprendizaje significativas para todos los estudiantes.

La competencia para *el aprendizaje* es despertar el interés en el alumno por aprender a aprender, saber comunicarse en su lengua, tener habilidad para leer, además de las digitales, la competencia para el *manejo de la información* es que el alumno se apropie de la información, identificando, evaluando y organizando y comunicar de forma ética. La competencia para el *manejo de situaciones* se refiere a que el alumno actúe de manera autónoma a lo largo de su vida, asumiendo riesgos y consecuencias de sus actos, y tomar las mejores decisiones para afrontar los cambios. La competencia para *la convivencia* requiere ser asertivo, colaborar, acordar, negociar, reconocer y valorar la diversidad cultural. Para el desarrollo de la competencia para *la vida en sociedad*, requiere que el alumno decida y actúe de acuerdo a sus valores y las reglas sociales y culturales, en favor de la libertad, respeto, y una conciencia permanente a la humanidad.

2.2.3. Competencia matemática

Las competencias que maneja la secretaria de Educación, son englobadas en cuatro competencias importantes a desarrollar durante la educación básica y que se observan en la figura 50:

Figura 50. Competencias matemáticas (fuente: Elaboración propia)

Estas competencias están definidas como se indica a continuación:

- Resolver problemas de manera autónoma, esto es que el alumno, identifique, razone, plantee soluciones y resuelva problemas con uno o varios métodos reconociendo cual es el mejor para llegar al resultado deseado.
- Comunicar información matemática, se refiere a que el alumno interprete la información en un problema o fenómeno y lo exprese de manera clara y específica para su representación y solución correspondiente.
- Validar procedimientos y resultados, implica que el alumno posea la confianza necesaria para justificar sus procedimientos con los cuales llegó a la solución del problema. Realizando una demostración formal.
- Manejar técnicas eficientemente, es cuando el alumno aplica eficientemente los procedimientos, cálculos y técnicas para la solución de un problema eligiendo y usando las operaciones para resolverlo adecuadamente.

Toda la formación matemática que posean los alumnos, se reflejará en su actuar diario al enfrentarse a los problemas de la vida cotidiana, donde pondrán en práctica sus conocimientos y habilidades, de ahí la importancia de hacer matemáticas, hacerlas de manera que al alumno le parezcan atractivas y romper el paradigma de que matemáticas es aburrida y que es la materia más difícil de la escuela.

2.2.3.1 Competencia matemática en el cálculo de áreas de figuras compuestas y conservación de área.

Las competencias matemáticas de una persona es la capacidad que tiene para razonar, analizar y resolver situaciones o problemas, además de saber comunicar su procedimiento utilizado y el resultado obtenido utilizando sus recursos personales. En la educación primaria, puede ser de manera empírica, en secundaria deben movilizar sus saberes para visualizar las posibles soluciones de una situación, poner en práctica sus conocimientos para estructurarlos y argumentar un resultado.

Las competencias que se manejan en el programa de estudios 2011 para la educación secundaria son cuatro. La primera es *Resolver problemas de manera autónoma*, esto es que el alumno identifica las diferentes formas de resolver un problema utilizando uno o varios procedimientos en el cálculo de áreas de figuras compuestas o seccionadas, la segunda es *Comunicar información matemática*, implica la posibilidad de que el alumno nos presente diversas formas de representar la situación y establezcan nexos entre cada una de ellas, exponiendo claramente sus ideas encontradas en el cálculo de áreas de sectores circulares o de figuras compuestas. La tercera es *Validar procedimientos y resultados*, esta es la demostración formal de como ellos llegaron al resultado, y por último la de *Manejar técnicas eficientemente*, aquí entra el empleo de las operaciones adecuadas, atajos, estimaciones que el alumno usa eficientemente en todos sus procedimientos.

CAPITULO 3. DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

La teoría de situaciones es un medio que nos ofrece la oportunidad de explorar, comprender y adaptar los saberes matemáticos tanto de los profesores como la forma en la que los alumnos la asimilan, en un contexto determinado esta es la razón por la cual esta parte del trabajo se apoyó en las etapas de la ingeniera Didáctica como metodología de investigación, aquí se expondrá de manera explícita el diseño, la puesta en escena y el análisis de resultados de una secuencia didáctica para alumnos de entre 13 y 14 años de segundo grado de secundaria sobre los teselados y como nos facilita el cálculo de áreas de sectores circulares.

3.1 Fase de la planeación

En la Fase de planeación del diseño de una situación didáctica es muy importante considerar las tres dimensiones, 1) la histórico-epistemológica que es sobre la construcción del conocimiento, 2) la dimensión cognitiva, que se refiere a la etapa en la que se encuentran los alumnos según su edad y por último 3) la dimensión didáctica referente a la enseñanza, libros, programas, etc. Estas dimensiones ya se trataron en el capítulo anterior.

3.2 Fase de Diseño

La fase del diseño es la construcción de la secuencia didáctica, aquí entran en juego el conjunto de ideas, teorías y suposiciones sobre el actuar y reaccionar de los alumnos, para cada situación didáctica que será el medio que le proporcione al profesor la información suficiente para decidir sobre el proceso a seguir para que el alumno construya su propio conocimiento.

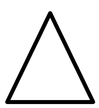
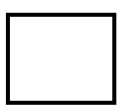
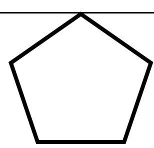
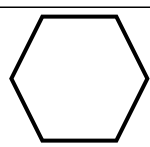
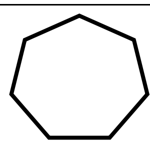
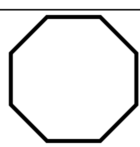
La secuencia didáctica que se diseñó para esta investigación consta de cuatro actividades, con ejercicios que nos guíen de manera correcta hacia un aprendizaje significativo con respecto a las trasformaciones que puede sufrir una figura regular al convertirla en una irregular y seguir conservando su área.

a) ACTIVIDAD 1

En esta primera actividad se forman equipos cuatro personas, se les dan las instrucciones de manera verbal, esta consiste en decirles que tienen que completar la siguiente tabla, cabe mencionar que previo a esta actividad ya los alumnos habían construido las figuras geométricas regulares y medido los ángulos interiores de cada una, haciendo la sumatoria correspondiente en cada una.

Actividad1

- *Ayuda a terminar la siguiente tabla de valores*

Figura	Nombre	Suma de ángulos interiores	Medida de un ángulo interior
	Triángulo		
			
		540°	
			
			
			135°

- Del conjunto de figuras anteriores, selecciona dos o tres mayores a cuatro lados, con la cual sea posible cubrir un plano sin dejar espacios.
- ¿Cuáles serían las características que tendrían que tener las figuras, para cubrir en su totalidad un plano?

b) ACTIVIDAD 2

Para la actividad 2 se les pide a los alumnos construir un teselado con la figura que ellos seleccionaron en la actividad anterior, esto con la finalidad de que ellos reflexionen sobre su decisión tomada con respecto a la figura, si seleccionaron la correcta o tendrán que cambiar de figura, para poder cubrir el plano sin dejar espacios entre ellas.

Actividad 2

1. Utilizando dos o tres figuras, de las que seleccionaste en la actividad anterior, y siguiendo un mismo patrón geométrico (sucesión) crea un teselado en una hoja blanca.

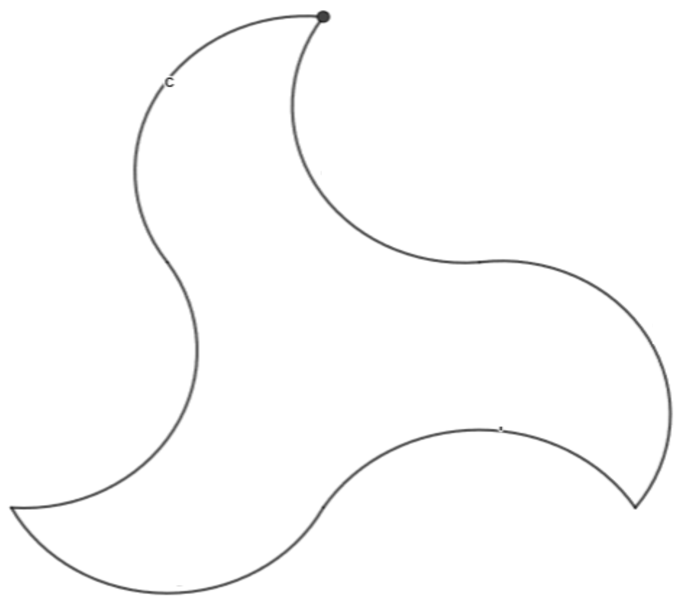
   Condiciones.
   - ✓ No deben existir espacios entre figura y figura
   - ✓ El tamaño inicial que elijas será el que conservaras durante todo el plano

c) ACTIVIDAD 3

Para esta tercera actividad se forman equipos de 5 personas se les presenta a los jóvenes una figura irregular, este ejercicio consiste en formar un teselado con la pajarita de Nazarí, para lo cual se les anexa una hoja para colorear y recortar y con ese material construir un teselado tan grande como ellos quisieran, posterior a esto se les pide que intenten calcular el área de la pajarita de Nazarí

Actividad 3

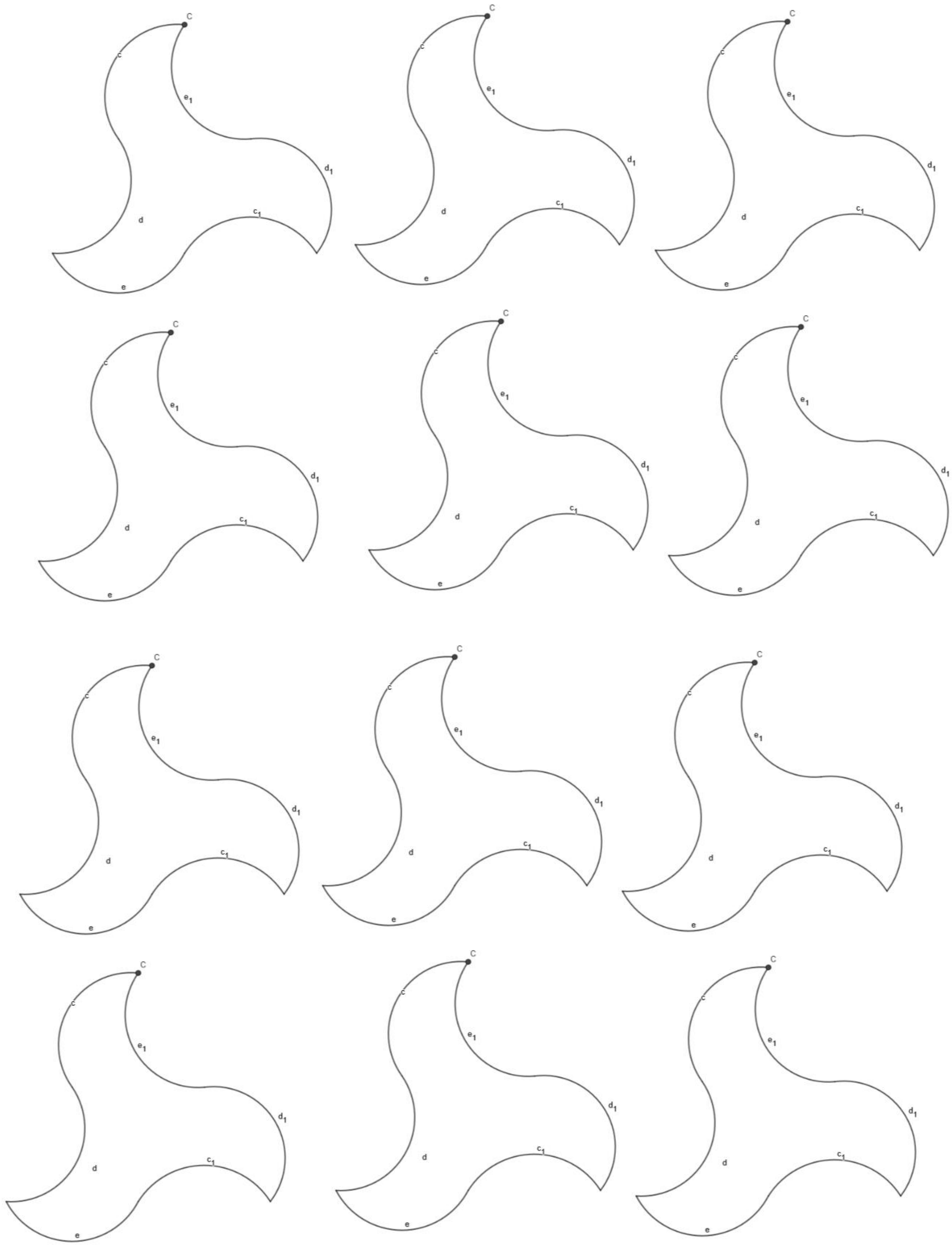
- Dentro de los teselados, también podemos encontrar teselados formados por figuras irregulares. Como la llamada pajarita Nazarí



1. Reúnanse en equipos de 5 personas
2. cada uno cortará el material proporcionado en la página 2
3. junten sus figuras recortadas y formen un teselado
4. ¿De qué manera se podrías calcular el área de una pajarita de Nazarí?
5. ¿A partir de que figura se obtiene la pajarita de nazarí?

Página 2

Actividad 3



d) ACTIVIDAD 4

Para esta actividad forman equipos con los que trabajaron la actividad anterior, y estando en equipos trabajaran solo con un compañero, con el cual calcularan el área y el perímetro de los sectores circulares sombreados que aparecen en cada cuadro que se les presenta, para esto, los alumnos tendrán que justificar su resultado valiéndose de todos los procedimientos conocidos.

Actividad 4

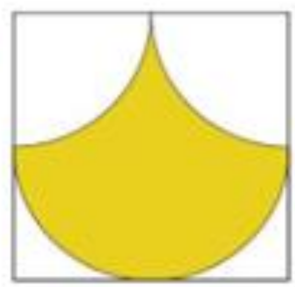
1. Trabaja con un compañero. Calculen el perímetro y el área de cada parte sombreada, consideren que los cuadrados miden 4cm de lado y tomen 3.1416 como valor de pi. (no usar calculadora)

a)

P = ____________

A = ____________

b)



P = ____________

A = ____________

c)

P = ____________

A = ____________

d)

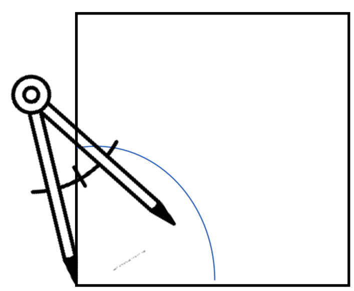
P = ____________

A = ____________

e) ACTIVIDAD 5

Para esta actividad de cierre, se les dieron indicaciones a los alumnos que trabajaran de forma individual pero sentados con los mismos integrantes de su equipo, la instrucción es crear un jarrón mediante sectores circulares con un papel cuadrado, después se les pide que calculen el área del jarrón, y con actividad final formar un teselado gigante en el piso con los jarrones formados. Se espera que al forman el teselado ellos logren ver que se forma el cuadrado nuevamente al juntar los jarrones.

1. En una hoja tamaño carta traza el cuadrado de mayor área posible
2. Recorta el cuadrado
3. Traza las diagonales de ese cuadrado
4. Traza los ejes de simetría que tiene el cuadrado
5. Con ayuda del compás traza un segmento circular, apoyándote desde una esquina del cuadrado hasta el eje de simetría. (como se muestra en la figura)



6. Realiza el mismo trazo en 3 de las esquinas del cuadrado
7. Recorta los segmentos circulares
8. Rotando las partes recortadas, une las piezas con cinta adhesiva y forma un jarrón
9. ¿De qué manera podrías calcular el área de esa figura?
10. ¿Será posible formar un teselado con esa figura?

3.3. Fase de Experimentación

La fase de experimentación consiste en implementar con los alumnos la situación didáctica diseñada. Teniendo en consideración la puesta en escena, las características de los alumnos, y el tipo de dinámica a implementar para llevar a la práctica la situación didáctica.

3.3.1 La puesta en escena

La puesta en escena se realizó en la Escuela Secundaria José María Luis Mora, turno matutino, ubicada en avenida 20 de noviembre y calle san Juan, sin número, de esta ciudad Tuxtla Gutiérrez Chiapas, en el salón del segundo grado grupo “C”, durante el proceso se les tomo fotos y videos a los alumnos realizando cada una de las actividades, que se llevaron a cabo durante una semana en su horario de clases, cada sesión de 50 min.

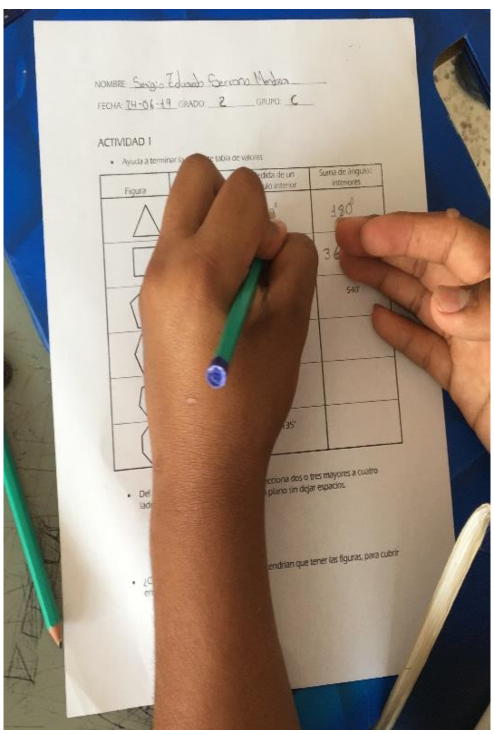
3.3.2 Los estudiantes

El total de participantes para esta situación didáctica fueron los 39 alumnos del segundo grado grupo “C” matriculados en esa escuela, subdivididos en equipos de 5 personas, como se muestra en la siguiente figura. Los estudiantes se encuentran en entre las edades de 13 y 14 años, el tema de cálculo de áreas ya era conocido por ellos, aunque no de partes sombreadas o de figuras irregulares, el tema de teselados si fue nuevo para ellos.

Figura 51. Alumnos de entre 13 y 14 años trabajando en equipo

3.3.3 La dinámica

A los alumnos se les indicó desde una semana antes que se comenzaría un tema nuevo la siguiente semana, el cual tenían que desarrollar de manera responsable, justificar todos sus procedimientos y trabajar de forma limpia y ordenada, ya que consistía un trabajo de investigación donde se registraran sus procedimientos y decisiones en cada una de las actividades, además se les tomaran fotos y videos de ser necesario. Las actividades se realizarán en el salón de clases durante los cinco módulos de cincuenta minutos cada uno correspondientes a su clase de matemáticas. Como docente encargada del grupo se les presentó cada una de las actividades al principio de cada módulo, se les dieron las instrucciones necesarias para comenzar se estuvo al pendiente de cualquier duda o comentario durante cada uno de los módulos.



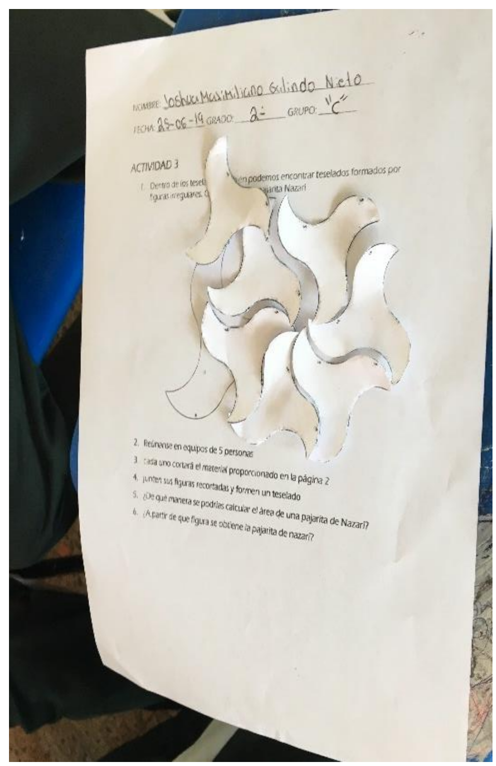


Figura 52. Actividades puestas en escena

3.4 Fase de validación

Esta fase es donde se agrupan y analizan los resultados obtenidos en la experimentación, al confrontar las hipótesis del análisis a priori con los resultados reales. Para cada una de las actividades se elaboró una tabla con la finalidad de facilitar la interpretación de cada una de ellas.

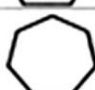
CONFRONTACIÓN ANÁLISIS *A PRIORI – A POSTERIORI*	
Actividad 1	**Descripción de la actividad**
Consiste en completar una tabla de figuras regulares donde hace referencia a la medida de los ángulos interiores y a la sumatoria total de los mismos. Además de seleccionar una figura para cubrir un plano sin dejar huecos entre ellas.	
Análisis a *priori*	
• **Conocimientos y habilidades:** Reconocer las características de los diferentes polígonos regulares que permiten cubrir un plano. • **Intensiones didácticas**: Que los alumnos con los conocimientos previos completen la tabla calculando cuanto mide cada ángulo interior de las figuras propuestas en la actividad. • **Consideraciones previas:** Es probable que sea necesario recordarles algunos conceptos generales sobre ángulos para completar la tabla, se espera que los alumnos utilicen la fórmula de la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono es decir, 180 (n-2), o en su defecto que subdividan la figura en triángulos como se les había enseñado con anterioridad, de ser necesario se apoyará a los alumnos con preguntas generadoras , por ejemplo, ¿cuál es la relación entre el número de lados del polígono y el número de triángulos que	

se forman? ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier triángulo?
Análisis a *posteriori*
En esta primera actividad se organiza al grupo en equipos de cinco personas, y se les entrega a los alumnos una hoja tamaño carta de manera individual donde la actividad propuesta es que ellos completen una tabla donde pide el nombre del polígono trazado, la medida de un ángulo interior, y la suma de los ángulos interiores de cada uno y posteriormente hay que contestar dos preguntas, una donde después de analizar las figuras, ellos seleccionarían una o dos figuras mayores a cuatro lados, con la cual se cubriera un plano sin dejar huecos, y en la segunda pregunta les pide que mencionen las características que deben tener esas figuras para cubrir el plano. Para el desarrollo de esta actividad se requiere que el alumno posea los conocimientos básicos de las figuras geométricas, algo de redacción para plasmar sus ideas y razonamiento lógico-matemático. Del total de alumnos, cinco no lograron terminar la actividad, uno de ellos no posee la habilidad para redactar sus ideas, se le dificulta escribir de forma rápida, otro de esos alumnos, solo copio el resultado, y los restantes de ese grupo de cinco alumnos presentan deficiencias de conocimientos previos, desde grados académicos anteriores. Diecisiete alumnos completaron la tabla, la mayoría respondió que el plano se cubría en su totalidad con hexágonos, y pensaron que también con heptágonos y pentágonos, y no contestaron con claridad la segunda pregunta, tenían la idea, pero no lograron describir de manera clara sus conclusiones, mientras que los catorce restantes si lograron describir que la suma de los ángulos debe ser 360° cuando se juntan los vértices de las figuras.

Confrontación
Se esperaba que la mayoría de los alumnos lograran terminar la actividad sin ninguna dificultad, ya que previo a esta actividad se había trabajado con los ángulos interiores de las figuras geométricas más conocidas. Sin embargo, se detectaron algunas deficiencias en los conocimientos previos de los alumnos, como el de un alumno cometió el error de colocar el signo de porcentaje en vez del de grados en la tabla de los ángulos, y uno más escribió un cero más en el ángulo interior de un hexágono. En este grado académico que cursan no se esperan ese tipo de errores, además de la mala ortografía que son la mayoría de los alumnos. Con lo que respecta a las preguntas, en la pregunta uno que era la de seleccionar dos o más figuras mayores de cuatro lados que pudieran cubrir el plano, dos alumnos incluyeron el cuadrado en su respuesta, lo que indica que no comprendieron la pregunta, y varios más incluyeron el heptágono, esto no se suponía que pasaría, puesto que esta figura a pesar de forma regular, la medida de su ángulo interior no da la oportunidad de llegar a los 360° que desean para formar el teselado, con respecto a la pregunta dos, se encontraron deficiencias en los alumnos para plasmaran sus ideas de forma explícita y concreta, de esto podríamos decir que la mayoría de los alumnos comprendió el tema, razonaron correctamente y utilizaron sus conocimientos previos sobre ángulos y figuras geométricas. Pero presentan debilidades en argumentar sus pensamientos.

ACTIVIDAD 1

- Ayuda a terminar la siguiente tabla de valores

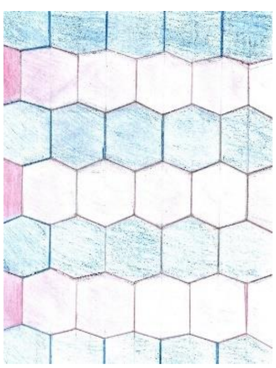
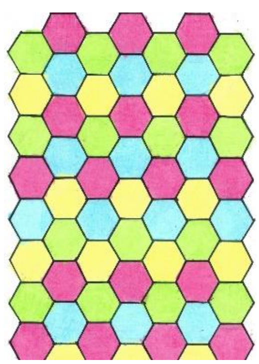
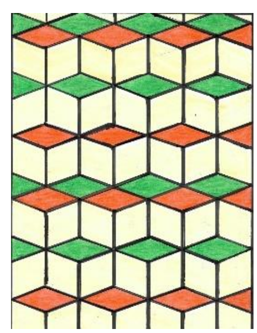
Figura	Nombre	Medida de un ángulo interior	Suma de ángulos interiores
	Triángulo	60°	180°
	cuadrado	90°	360°
	Pentágono	108°	540°
	Hexágono	120°	720°
	Heptágono	128	900°
	octágono	135°	1080°

- Del conjunto de figuras anteriores, selecciona dos o tres mayores a cuatro lados, con la cual sea posible cubrir un plano sin dejar espacios.

Pentágono y hexágono

- ¿Cuáles serían las características que tendrían que tener las figuras, para cubrir en su totalidad un plano?
  - Que sean mismas figuras
  - Que sean figuras regulares
  - Seguir un patrón

CONFRONTACIÓN ANÁLISIS *A PRIORI – A POSTERIORI*	
Actividad 2	**Descripción de la actividad**
Consiste en realizar un teselado en un octavo de lámina de papel cascaron con las figuras seleccionadas en la actividad anterior.	
Análisis a *priori*	
Conocimientos y habilidades: Conocer las características de los polígonos que permiten cubrir el plano y realizar recubrimientos del plano. **Intensiones didácticas:** Análisis y explicitación de las características de los polígonos que permiten cubrir el plano. **Consideraciones previas:** Es probable que los alumnos coincidan en el trazo del hexágono para cubrir el plano, ya que se les solicitó la realización de teselado con un polígono regular, Es necesario organizar al grupo con anterioridad para que cuente con los materiales requeridos en el momento de la clase (papel cascaron, regla, transportador, colores, plumones, crayones, tijeras, etc.). Mientras que los alumnos hacen sus trazos conviene insistir en que se trata de polígonos regulares (todos sus ángulos son iguales e irregulares (no tienen todos sus lados y ángulos iguales) y durante la confrontación es importante plantear las siguientes preguntas: ¿Cómo se pasa de una pieza a una pieza contigua a través de uno de los lados? ¿Por qué un cuadrilátero cualquiera (convexo) siempre permite cubrir el plano? Se espera que los alumnos se den cuenta de la propiedad de la rotación y de la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero.	

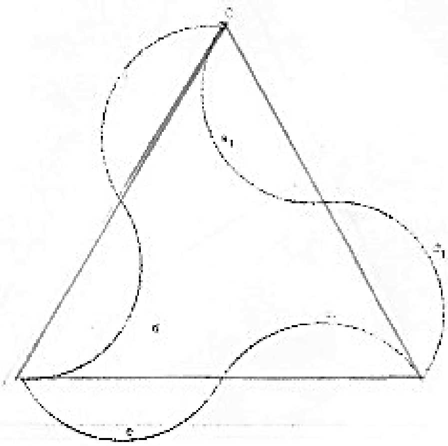
Análisis a *posteriori*
Los alumnos realizaron los teselados en un papel cascaron tamaño carta, utilizando colores, y juego geométrico, de los cuales ocho trabajos estaban incompletos, mal pintados, algunos utilizaron el círculo, y no respetaron un patrón de colores, nueve alumnos entregaron teselados, con trazos de figuras regulares en su mayoría hexágonos y romboides, y seis alumnos realizaron la actividad de manera correcta.
Confrontación
Esta actividad la mayoría de los alumnos utilizó hexágonos, utilizaron la creatividad y la combinación de colores a su conveniencia, algunos utilizaron cuadriláteros para formar los teselados, esta actividad permitió que los alumnos reflexionaran sobre su respuesta de la actividad anterior, sobre cubrir el plano con heptágonos. Algunos combinaron dos figuras, hexágonos con rombos, y un trabajo fue elaborado con octágonos y rombos, otros utilizaron solamente cuadriláteros.
  

CONFRONTACIÓN ANÁLISIS *A PRIORI – A POSTERIORI*	
Actividad 3	**Descripción de la actividad**
Consiste en formar un teselado con una figura irregular, como lo es la pajarita de Nazarí, y calcular el área de dicha figura	
Análisis a *priori*	
• **Conocimientos y habilidades:** Conocer las características de los polígonos que permiten cubrir el plano y realizar recubrimientos del plano. • **Intensiones didácticas:** Análisis y explicitación de las características de los polígonos que permiten cubrir el plano. • **Consideraciones previas:** Es probable que a los alumnos les surjan muchísimas dudas sobre el cálculo del área de esta figura, por lo cual se les da la instrucción que pueden realizar los trazos que consideren necesarios para calcular el área de dicha figura, para esta actividad los alumnos se reunieron en equipos de 5 personas para que se ayudaran entre ellos a recortar los moldes de la pajarita, colorearlos, y pegarlos en una hoja para formar un teselado.	
Análisis a *posteriori*	
En esta actividad a los alumnos se les dificulto un poco encontrar una figura regular que les ayudara a calcular el área de la pajarita de Nazarí, seis equipos trazaron un triángulo sobre la pajarita, y calcularon el área sin ninguna dificultad, un solo equipo no logro encontrar la figura regular, pero ellos trazaron pequeños rectángulos sobre la figura y calcularon el área de los rectángulos, y después realizaron una sumatoria de áreas. La segunda parte de esta actividad consistió en formar un teselado con la pajarita, todos los equipos lograron formar el teselado, aunque algunos no terminaron todas	

las piezas que les fueron repartidas, ya que tenían que recortar, pintar, armar y pegar.
Confrontación
En esta actividad se había contemplado usar un solo módulo de clases, pero el tiempo fue insuficiente por lo laborioso que fue el cortar, colorear y formar un teselado con la pajarita de Nazarí, por lo que se utilizaron dos clases para concluir esta actividad. Los alumnos al observar la figura que se les presentó en esta actividad al principio les causo muchas incógnitas, no lograban comprender como esa figura surgió de una figura regular, por lo que se les indicó que siguieran observando y que realizaran los trazos necesarios sus hojas, algunos comenzaron trazando círculos, pero estos se cruzaban en el centro y no era fácil calcular el área, otros trazaron triángulos dentro de la figura, y tardaron un poco tiempo en descubrir que la figura se deriva de un triángulo, un equipo realizó un procedimiento interesante, ya que trazaron rectángulos iguales pequeños sobre toda la figura y después realizaron la sumatoria de todas esas áreas, llegando a un resultado aproximado al resultado correcto, para ser alumnos de secundaria, se podría decir que en ellos está el conocimiento matemático innato del cálculo integral de nuestros días, dos de los equipos lograron encontrar que la pajarita de Nazarí se obtiene de un triángulo regular.

ACTIVIDAD 3

1. Dentro de los teselados, también podemos encontrar teselados formados por figuras irregulares. Como la llamada pajarita Nazarí



$A = \frac{b \times h}{2}$

$A = \frac{7 \times 7}{2}$

$A = \frac{42}{2}$

$A = 21 cm^2$

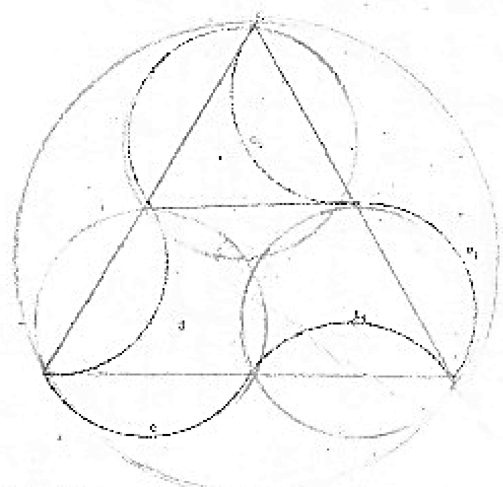
2. Reúnanse en equipos de 5 personas
3. cada uno cortará el material proporcionado en la página 2
4. junten sus figuras recortadas y formen un teselado
5. ¿De qué manera se podrías calcular el área de una pajarita de Nazarí?
6. ¿A partir de que figura se obtiene la pajarita de nazarí?

5:) Buscando que figura o formo se va a realizar además de un patron.

6º A partir del triangulo

ACTIVIDAD 3

1. Dentro de los teselados, también podemos encontrar teselados formados por figuras irregulares. Como la llamada pajarita Nazarí



2. Reúnanse en equipos de 5 personas
3. Cada uno cortará el material proporcionado en la página 2
4. Junten sus figuras recortadas y formen un teselado
5. ¿De qué manera se podrías calcular el área de una pajarita de Nazarí?
6. ¿A partir de que figura se obtiene la pajarita de nazarí?

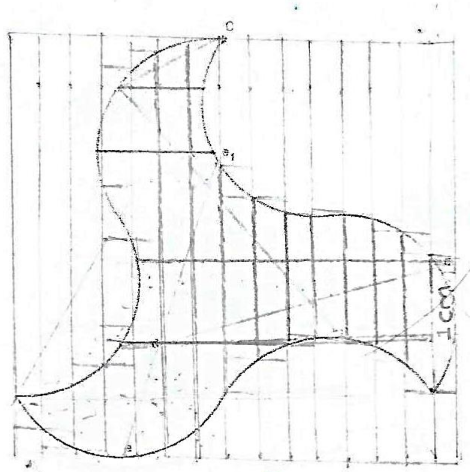
5.- $\frac{B \times h}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$

6.- apartir de los triangulos y medios circulos

FECHA: 25/06/19 GRADO: 2 GRUPO: C

ACTIVIDAD 3

1. Dentro de los teselados, también podemos encontrar teselados formados por figuras irregulares. Como la llamada pajarita Nazarí



7 cm
+ 2.7 cm
1.5 cm
2.8 cm
0.8 cm
14.8 cm

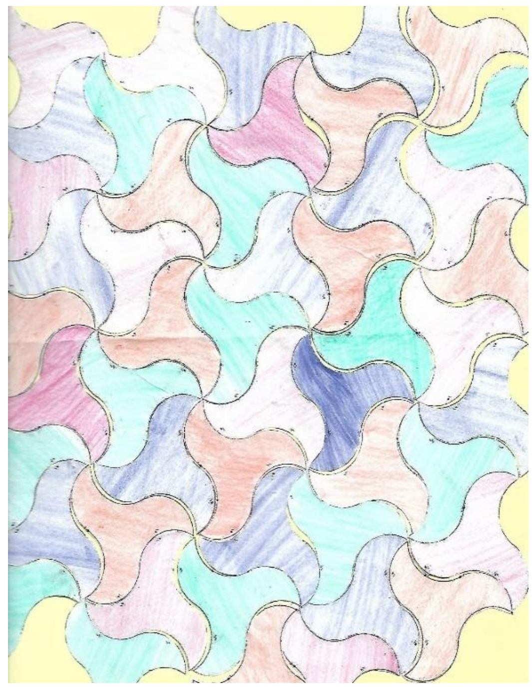
(área de circlángulo) + área restante =

13.75

$$\frac{14.8 + 12.1}{2} = \frac{26.9}{2} =$$

2. Reúnanse en equipos de 5 personas
3. cada uno cortará el material proporcionado en la página 2
4. junten sus figuras recortadas y formen un teselado
5. ¿De qué manera se podrías calcular el área de una pajarita de Nazarí? Por el método de trazo rectángulos a la figura de Nazarí, Sumando el área de circlángulo más el área restante y dividirlo entre dos.
6. ¿A partir de que figura se obtiene la pajarita de nazarí?
De un triángulo

Área de la figura: 13.4
(Aproximado)



CONFRONTACIÓN ANÁLISIS *A PRIORI – A POSTERIORI*	
Actividad 4	**Descripción de la actividad**
Este ejercicio consiste en calcular áreas de figuras sombreadas correspondientes a sectores circulares contenidas en un cuadrado, esta actividad fue seleccionada de uno de los libros de texto Libro de Texto Oficial para secundarias de Peña, S., Block, D., (2018), Matemáticas 2, 2do. Grado, Educación secundaria. México	
Análisis a *priori*	
Conocimientos y habilidades: Estimar y calcular el área de sectores circulares. Calcular datos desconocidos relacionados con fórmulas del área del cuadrado y del círculo. Establecer relaciones entre áreas. **Intensiones didácticas:** Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el uso de sus conocimientos respecto al ángulo inscrito y centrales en un círculo, para calcular áreas de sectores circulares y longitud de arcos. **Consideraciones previas:** Es probable que a los alumnos supongan una diferencia entre el área del cuadrado y la del círculo. Es importante propiciar en el alumno el análisis del proceso de resolución que siguieron, en base a los procedimientos utilizados y así favorecer la reflexión.	
Análisis a *posteriori*	
Se les entrego a los alumnos la actividad 4, que consiste en el cálculo de áreas de sectores circulares, encerradas dentro de un cuadrado, para esta actividad se requiere que los alumnos al menos realicen a mano operaciones básicas con punto decimal, reflexionen sobre las figuras presentadas, y elaboren sus	

conclusiones. Del total del grupo, ocho alumnos no logaron terminar la actividad, algunos duplicaron los datos de otros compañeros, pues no presentan operaciones en la hoja de la actividad, esto muestra las limitaciones que tienen los alumnos al realizar operaciones básicas y poca reflexión. Trece alumnos lograron calcular las áreas, aunque presentaron dificultades para en encontrar el perímetro de la figura, estos alumnos si poseen los conocimientos necesarios de las operaciones básicas, aunque no lograron visualizar la figura oculta en las partes sombreadas. Ocho los alumnos presentaron dificultad en justificar sus procedimientos, y los cinco restantes contestaron correctamente bien, realizando operaciones y procedimientos específicos propios de este tipo de ejercicios.
Confrontación
A pesar de las dificultades de algunos alumnos para la realización de esta actividad, la mayoría de los alumnos lograron sin mayor dificultad la forma de calcular el área sombreada, identificaron que se trataba se sectores circulares encerrados en cuadrados de la misma medida, por lo que calculaban el área total del círculo y el área del cuadrado. Para el primer ejercicio solo restaron el área del círculo al área del cuadrado, ellos justificaron su respuesta describiendo su procedimiento. Para el segundo ejercicio los integrantes de un equipo relacionaron que el área calada en la primera figura era la mitad de esa figura más la mitad del círculo, lo que no se les complicó para calcular la parte sombreada, para el tercer ejercicio, para el tercer ejercicio identificaron que se trataba de la mitad del círculo, por lo que solo la dividieron a la mitad. Y para el último ejercicio comprendieron que se trataba de una cuarta parte del círculo. Para el cálculo del perímetro de cada una de las figuras siguieron el mismo procedimiento, las operaciones las realizaron a mano sobre la misma hoja de los ejercicios. Del total de alumnos, dos equipos no realizaron las operaciones a mano y aunque lograron identificar de que partes del círculo se trataba, no recordaron las fórmulas para realizar el cálculo correspondiente.

ACTIVIDAD 4

1. Trabaja con un compañero. Calculen el perímetro y el área de cada parte sombreada, consideren que los cuadrados miden 4cm de lado y tomen 3.1416 como valor de pi. (no usar calculadora)

Para calcular el área de esta figura se tiene que sacar el área del cuadrado menos el área restante = área de la figura

a) 

P= 12.5664 cm²

A= 3.4336 cm²

En la figura se puede observar un circulo, como área restante, si sacamos el área del circulo y a 16 le restamos esa cantidad nos da el resultado.

b) 

En esta figura se divide en dos el área del circulo y se suma la mitad del área de la figura a).

P= 12.5664 cm²

A= 8 cm²

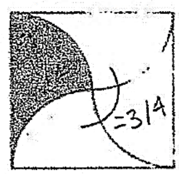
Para calcular el área es mas sencillo sacar el área restante y al área del cuadrado restarle esa cantidad.

c) 

Se aprecia la mitad del circulo + la mitad del área de la figura a) = área total

P= 12.5664 cm

A= 8 cm²

d) 

Esta figura está dividida en 4 lados iguales, entonces la parte sombreada es 1/4

$\frac{1}{4}$ de 16 = 4

P= 6.2832 cm²

A= 4 cm²

$\frac{16}{4} = 4$ cm

a) 16

$$3.1416 \times 4 = 12.5664$$

$$16 - 8 = 8$$

$$6.2832 + 1.7168 = 8.0000$$

$$3.4336 \div 2 = 1.7168$$

$$16.0000 - 12.5664 = 03.4336$$

$$12.5664 \div 4 = 3.1416$$

$$3.1416 \times 2 = 6.2832$$

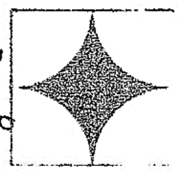
$$12.5664 \div 2 = 6.2832$$

$$6.2832 + 1.7168 = 8.0000$$

ACTIVIDAD 4

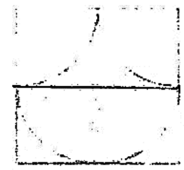
1. Trabaja con un compañero. Calculen el perímetro y el área de cada parte sombreada, consideren que los cuadrados miden 4cm de lado y tomen 3.1416 como valor de pi. (no usar calculadora)

Para calcular el area de esta figura se tiene que sacar el area del cuadrado menor y el area restante

a) 

P=12.5664 cm²

A= 3.4336 cm²

b) 

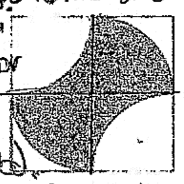
En esta figura se divide en dos el area del circulo y se suma la mitad del area de la figura.

P= 12.5664 cm²

A= 8 cm²

En la figura se puede observar un circulo como area restante se sacamos del circulo y le restamos lo nos da el resultado.

Para calcular el area es mas sencillo sacar el area restante y al area del cuadrado restarle esa cantidad se aprecia la mitad del circulo + la mitad del area de la figura.

c) 

P= 12.5664 cm²

A= 8 cm²

d) 

La parte de color negro dedujimos que era una cuarta parte del entero, por lo cual se dividio 12.5664 entre 2

P= 6.2832 cm²

A= 4 cm²

$\frac{16}{4} = 4$ cm

a) 16

$3.1416 \times 4 = 12.5664$

$16.0000 - 12.5664 = 03.4336$

$12.5664 \div 4 = 3.1416$

-16, 8, 8

$3.1416 \times 2 = 6.2832$

$12.5664 \div 2 = 6.2832$

$6.2832 + 1.7168 = 8.0000$

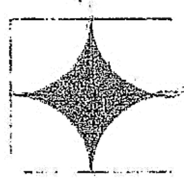
$3.4336 \div 2 = 1.7168$

66

ACTIVIDAD 4

1. Trabaja con un compañero. Calculen el perímetro y el área de cada parte sombreada, consideren que los cuadrados miden 4cm de lado y tomen 3.1416 como valor de pi. (no usar calculadora)

a)



P= 38.8672

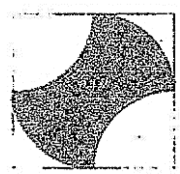
A= 9.7168

b)

P= 8Cm

A= 13 Cm

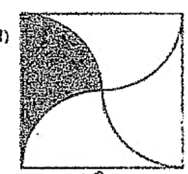
c)



P= 12,512

A= 8Cm

d)

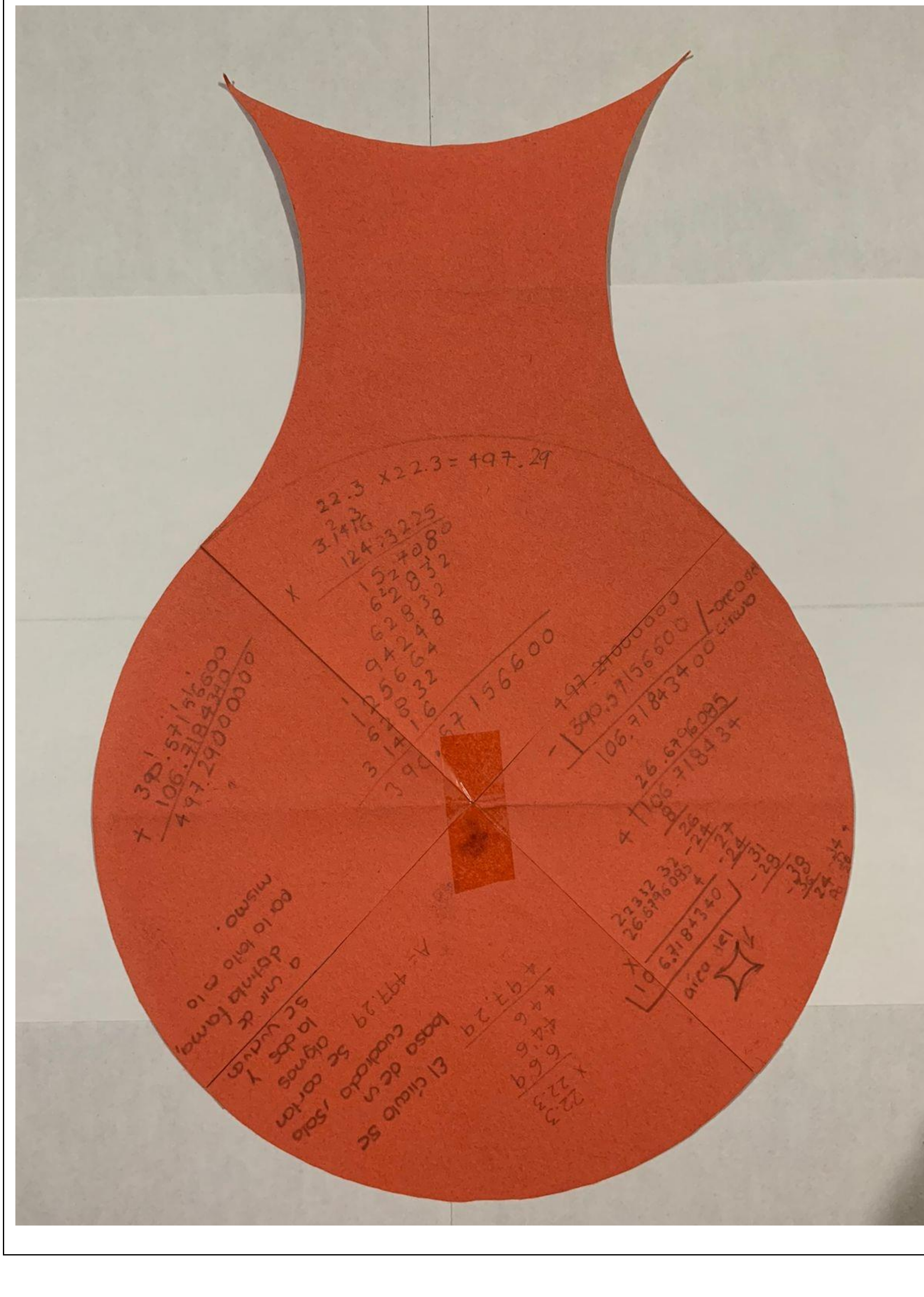


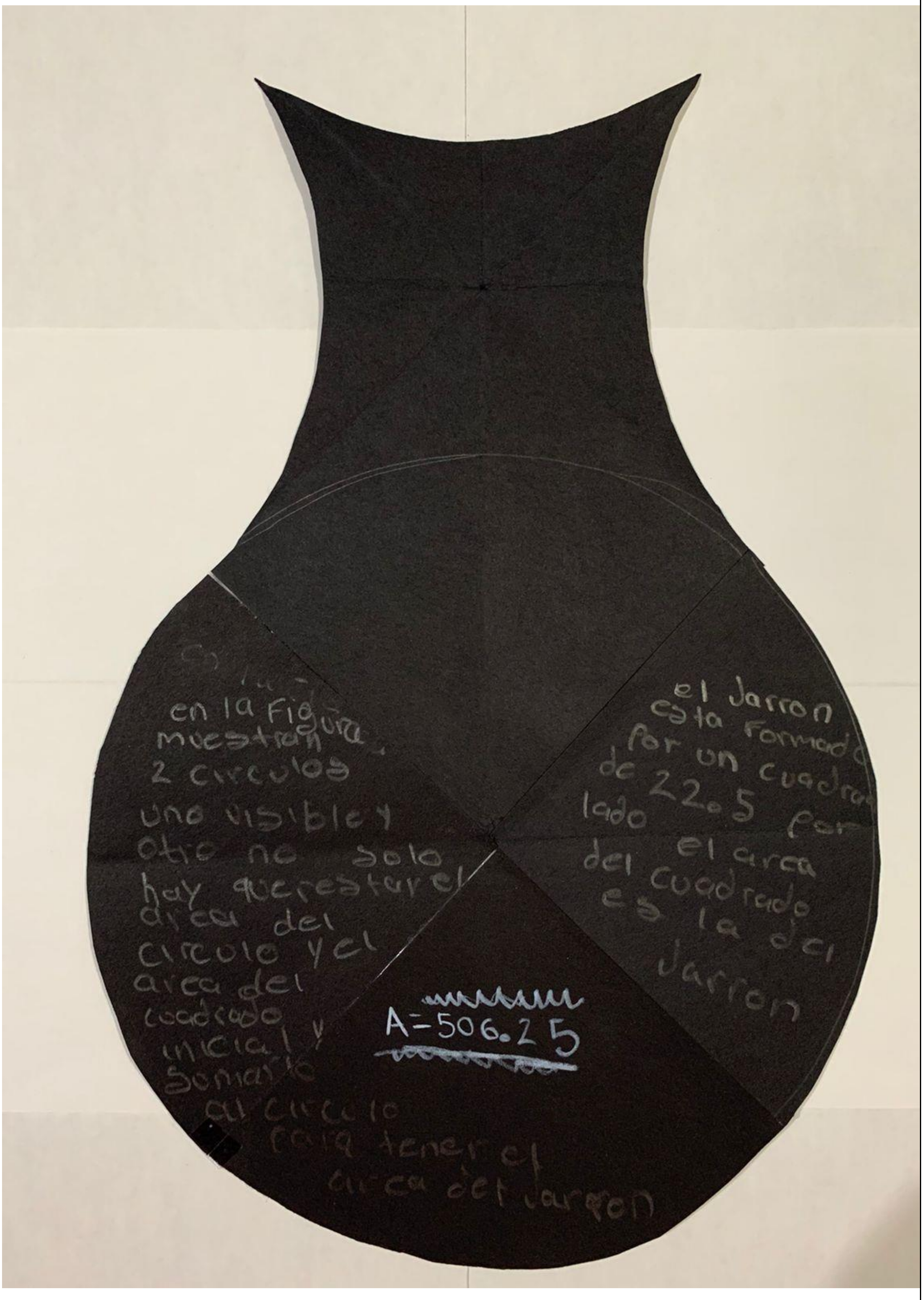
P= 12 Cm

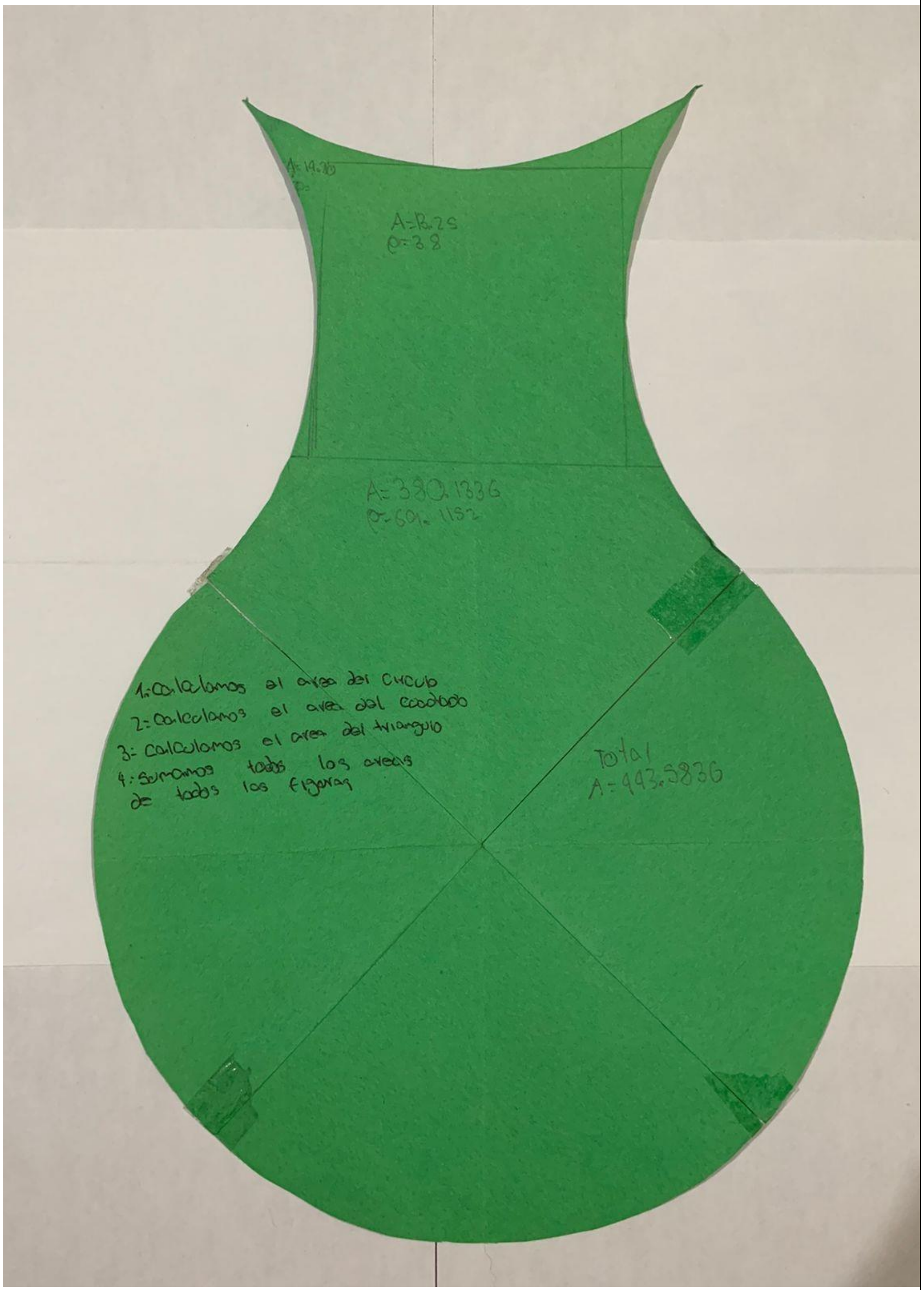
A= 4 Cm

CONFRONTACIÓN ANÁLISIS *A PRIORI – A POSTERIORI*	
Actividad 5	**Descripción de la actividad**
Consiste en trazar cuartas partes de circunferencia, en tres vértices del cuadrado, teniendo estos como centro del círculo. Para después rotar y unir las partes formando un jarrón al cual hay que calcularle el área. (sector circular y conservación de área).	
Análisis a *priori*	
• **Conocimientos y habilidades:** Estimar y calcular el área de sectores circulares. Calcular datos desconocidos relacionados con fórmulas del área del cuadrado y del círculo. Establecer relaciones de conservación de área. • **Intensiones didácticas:** Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el uso de sus conocimientos respecto al cálculo de áreas de sectores circulares y longitud de arcos. • **Consideraciones previas:** Es probable que a los alumnos supongan una diferencia entre el área del cuadrado y la del jarrón. Es importante propiciar en el alumno el análisis del proceso de resolución que siguió, con base en los procedimientos utilizados por los alumnos, y así favorecer la reflexión.	
Análisis a *posteriori*	
A los alumnos se les proporcionó una hoja tamaño carta de colores diferentes por equipos, a ella se le realizaron trazos de cuartas partes de circunferencia en tres de sus vértices del cuadrado, teniendo como centro de circunferencia el vértice, después se recortaron las piezas y se rotaron de tal forma que al unirlas se formara un jarrón posterior a eso, se les solicitó que le calcularan el área de esa nueva figura. Para esta actividad fue necesario que los alumnos	

recordaran las fórmulas para calcular el área del círculo y del cuadrado, y también que realizaran operaciones básicas con punto decimal. Además de utilizar la reflexión y la comunicación con sus compañeros de equipo para llegar al cálculo del área del jarrón. Seis alumnos no lograron concretar el área del jarrón, no reflexionaron sobre como ellos mismos lo formaron. Algunos de ellos repitieron el procedimiento desde el inicio y solo un alumno no logró comprender que el área del jarrón es igual al área del cuadrado. El resto del grupo logro llegar a la conclusión de que el área del jarrón es la misma que el área del cuadrado, para lo cual realizaron trazos sobre el jarrón, trazando dentro figuras como triángulos, rombos y cuartos de circunferencia, otros alumnos argumentaron que el área del jarrón era igual a la del cuadrado, pues solo se habían formado piezas y acomodado de forma diferente y finalmente se comprobó, cuando unieron sus jarrones para formar un teselado con figuras irregulares, en este caso, el jarrón.
Confrontación
Se suponía que con todos los ejercicios anteriores la mayoría de los alumnos no tendrían dificultades para encontrar el área del jarrón, sin embargo, se observaron algunas dificultades en alumnos que no lograban comprender que el área del jarrón es igual al área del cuadrado del cual se formó, con los jarrones armados, se comenzaron a juntar las piezas en el suelo del salón, para formar un teselado grande, y con las piezas unidas se formaba claramente el cuadrado del cual se originó el jarrón, cuando los alumnos lograron identificarlo, aclararon sus dudas sobre la conservación de área de esta figura.




en la Figura muestran 2 circulos uno visible y otro no solo hay que restar el area del circulo y el area del cuadrado inicial y sumarlo al circulo para tener el area del jarron
el Jarron esta Formado por un cuadrado de 22.5 por lado el area del cuadrado es la del Jarron
A=506.25


A=14.20
A=13.25
P=38
A=380.1336
P=69.1152
1:Calculamos el area del circulo
2:Calculamos el area del cuadrado
3:Calculamos el area del triangulo
4:Sumamos todos los areas de todos los figuras
Total
A=443.5836

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo de investigación fue darle una respuesta contundente a la pregunta principal, ¿Qué herramientas de cálculo de áreas generan los alumnos al formar teselados con sectores circulares extraídos de un polígono regular y qué nuevos significados del área descubrieron?, con base en los recursos didácticos con los que se contaban en su momento, los planes y programas, libros de texto, los diseños de las secuencias didácticas con actividades graduales y atractivas para guiar al alumno de una manera sistemática de lo más simple a algo más complejo, para recuperar y construir nuevos conocimientos además de la parte principal que fue el trabajo que se realizó con alumnos en el salón de clases. El cálculo de áreas se enseña en educación básica en la primaria, y cuando el alumno llega a secundaria se encuentra con figuras compuestas, irregulares o fraccionadas, a las cuales hay que calcularles la superficie, se encontró en esta investigación algunas observaciones como las siguientes.

- La mayoría de los alumnos reconoce los nombres de las figuras regulares y recordaron como calcular la medida de un ángulo interior de estas, al igual que hacer la sumatoria de ángulos interiores.
- A pocos alumnos se les dificultó identificar las figuras con las cuales se pueden cubrir planos sin dejar espacios entre ellas.
- Los teselados les resulto una actividad muy atractiva y fascinante, pues en el momento de estar trazando sus figuras anteriormente seleccionadas, los que eligieron las correctas no tuvieron problema alguno, sin embargo, los alumnos que escogieron figuras como el heptágono y el octágono, a la hora de trazarlos comprendieron que no se podían juntar por las medidas de sus ángulos interiores, lo que les llevó a cambiar de figura para realizar correctamente la actividad.
- Los alumnos de secundaria no tienen problemas en calcular áreas de figuras regulares, pues recordaban con facilidad las fórmulas aprendidas en la primaria.

- En cuestión de figuras con partes circulares se les dificulto un poco, pues suelen confundir las fórmulas para calcular el perímetro y el área de un círculo.
- Con la actividad de la formar un teselado con la pajarita de Nazarí no se tuvieron problemas, solo se utilizó un mayor tiempo.
- Con el cálculo del área de la pajarita de Nazarí, un equipo utilizó un procedimiento interesante, fue el de trazar rectángulos pequeños dentro de la figura y posterior a eso calcular el área de cada rectángulo y hacer una sumatoria total, lo que nos recuerda el área bajo la curva.
- Con el cálculo de área sombreadas formadas por sectores circulares la mayoría de los alumnos no tuvieron problemas en calcularla, se observó que se apoyaron de sus conocimientos previos y en el razonamiento lógico.
- Con la última actividad que fue la de formar un jarrón partiendo de un cuadrado, algunos alumnos comprendieron rápidamente el concepto de conservación de área, y concluyeron que si se calculaba el área del cuadrado era la misma que la del jarrón, sin embargo, lo alumnos que no comprendían eso, argumentaban que la figura se hacía más grande, por lo que no podía tener la misma área que el cuadrado, y para calcular el área procedieron a dividirla en un círculo, un cuadrado y triángulos, llegando estos a un área aproximada a la del cuadrado.
- Con la construcción del teselado con jarrones que se hizo en el piso del salón los alumnos lograron comprender y despejar dudas sobre la conservación de área entre el jarrón y el cuadrado.

Se propuso como un recurso el formar un teselado, para visualizar la figura regular de la cual provine una irregular, y ese sea un método más práctico para que el alumno calcule sin problemas el área de la figura irregular, cabe mencionar que no aplica para todas, pero si a algunas que puedan cumplir con este requisito.

BIBLIOGRAFÍA

Algarra, M. Borges, C., García, I., Hernández, V. y Hernández, B. (2004). *Las matemáticas chinas.* The MacTutor History of Mathematics archive. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

Alonso, J. (1991). *Motivación y aprendizaje en el aula: Cómo enseñar a pensar*. Madrid: Santillana.

Araujo, M., García, S., García, J., López, O. y Rosainz, V. (2013). M*atemáticas 1 Telesecundaria,* Volúmenes I y II, México: SEP.

Arenas, M., (2012). Pro*puesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas*. Tesis no publicada. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Artigue, M., Douady, R, Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1992) *Psicología Educativa: Un punto de vista educativo.* (Reimpresión de la traducción de Pineda. Título original: Educational psychology: a cognitive view). México: Trillas.

Ayala. C. L., Santiuste, V. y Barriguete, C. (1993). *Interpretación de la tarea y estrategias de aprendizaje: Influencia de las intenciones atribuidas al profesor*. En J. A. Beltrán, L. Pérez, E. González, R. González y D. Vence, Líneas actuales en la intervención psicopedagógica. I: Aprendizaje y contenidos del currículum. Madrid: SYSTECO.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las Matemática.* Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (1999). Educación y didáctica de las matemáticas. Educación matemática, 12(1), 5-38.

Cabañas, M. (2011). El *papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis no publicada. Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México.

Cadena, M., Vergel, M. y Delgado, A. (2017). *Patrones en mosaicos Y Teselados desde Composiciones Geométricas*, Tesis no publicada. Universidad Francisco De Paula Santander, Colombia.

Castañeda, A. González, R. (2014)*, Retos matemáticos 2, 2do. Grado*, Libro de Texto Oficial para secundarias de Educación Secundaria. Editorial SM de ediciones S.A. de C.V. México.

Corberán R. (1996) *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. Tesis no publicada. Universidad de Valencia, Valencia, España

De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* 1(2), 1-9.

Domínguez, I.; Domínguez, I.; García, E. y Moreno, G. (2016). *Introducción a las teselaciones: experiencia de un taller*. Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1, pp. 609-617.

Escareño, F. López, O. (2018), *Matemáticas 2, 2do. Grado,* Libro de Texto Oficial para secundarias de Educación secundaria. Editorial Trillas, México.

Hawking, S., (2010). *Dios creo los números, Los descubrimientos matemáticos que cambiaron las histori*a, (7ª. 2016) (vol. 1). España: EGEDSA.

Hernández, A. (2014). *Transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados. Una propuesta sobre el uso de la tecnología en el aula.* Tesis no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas, Chiapas, México.

Herrera V., Montes Y., Cruz A y Vargas A. (2010). *Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte.* Encuentro Colombiano de Matemática Educativa 11, 422-430

Meece, J., (2000) *Desarrollo del niño y el adolescente*, Guía 2015 Docentes en Servicio.

Morris, K. (1992). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días 1, Madrid, Editorial Alianza.

Obando Zapata, G., & Múnera Córdoba, J. J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Revista Educación y Pedagogía, 15(35), 185-199.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza, (Comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (pp. 59-71). Buenos Aires: Paidós.

Peña, S. Block, D. (2018), Matemáticas 2, 2do. Grado, Libro de Texto Oficial para secundarias de Educación secundaria. Editorial SM de ediciones S.A. de C.V. México.

Pérez, A., (2015) *Elementos constitutivos en el planteamiento de la investigación en Matemática Educativa.* Diapositivas de la conferencia plenaria dictada en el 1er. Congreso Internacional de Matemática Educativa en 2015

Pérez, S., (2014). *Una aproximación a las operaciones algebraicas desde la geometría.* Tesina no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas, Chiapas, México.

Rotaeche, A. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada Y Tecnología Avanzada, México.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para educación matemática, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Secretaría de Educación Púbica (2011). *Planes y Programas de Educación Secundaria*. *Libro para, el Maestro y Libro para el Niño, Área de Matemáticas, de 2º y 3º grado, México*.

Secretaría de Educación Púbica (2011). *Planes y Programas de Educación Secundaria*. *Guía para el Maestro, Matemáticas, México*.

Sierpinska, A y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827-876).

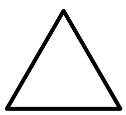
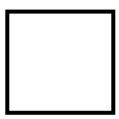
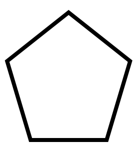
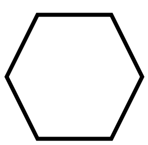
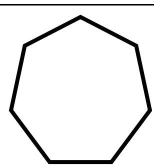
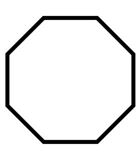
ANEXOS

En este aparatado hemos colocado la secuencia didáctica completa.

A. Secuencia Didáctica

ACTIVIDAD 1

- Ayuda a terminar la siguiente tabla de valores

Figura	Nombre	Medida de un ángulo interior	Suma de ángulos interiores
	Triángulo		
			
			540°
			
			
		135°	

- Del conjunto de figuras anteriores, selecciona dos o tres mayores a cuatro lados, con la cual sea posible cubrir un plano sin dejar espacios.

- ¿Cuáles serían las características que tendrían que tener las figuras, para cubrir en su totalidad un plano?

ACTIVIDAD 2

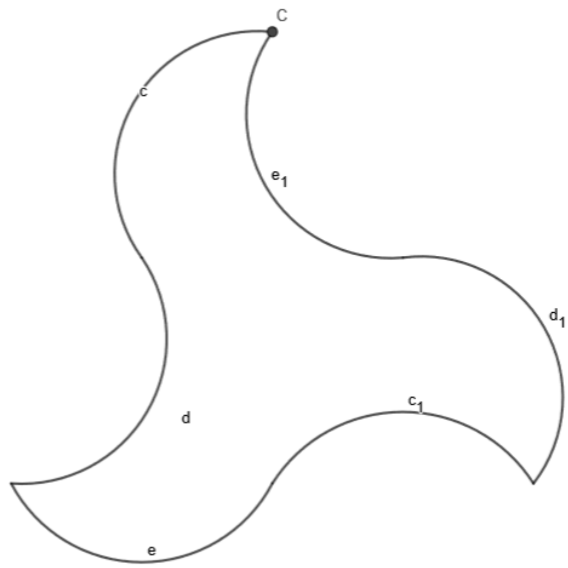
1. Utilizando dos o tres figuras, de las que seleccionaste en la actividad anterior, y siguiendo un mismo patrón geométrico (sucesión) crea un teselado en 1/8 de papel cascaron.

   Condiciones.

   - ✓ No deben existir espacios entre figura y figura
   - ✓ El tamaño inicial que elijas será el que conservaras durante todo el plano

ACTIVIDAD 3

- Dentro de los teselados, también podemos encontrar teselados formados por figuras irregulares. Como la llamada pajarita Nazarí



1. Reúnanse en equipos de 5 personas
2. cada uno cortará el material proporcionado en la página 2
3. junten sus figuras recortadas y formen un teselado
4. ¿De qué manera se podrías calcular el área de una pajarita de Nazarí?
5. ¿A partir de que figura se obtiene la pajarita de nazarí?

ACTIVIDAD 4

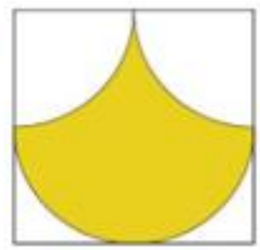
1. Trabaja con un compañero. Calculen el perímetro y el área de cada parte sombreada, consideren que los cuadrados miden 4cm de lado y tomen 3.1416 como valor de pi. (no usar calculadora)

a)

P = ______________

A = ______________

b)



P = ______________

A = ______________

c)

P = ______________

A = ______________

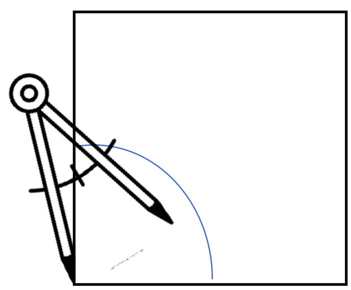
d)

P = ______________

A = ______________

ACTIVIDAD 5

1. En una hoja tamaño carta traza el cuadrado de mayor área posible
2. Recorta el cuadrado
3. Traza las diagonales de ese cuadrado
4. Traza los ejes de simetría que tiene el cuadrado
5. Con ayuda del compás traza un segmento circular, apoyándote desde una esquina del cuadrado hasta el eje de simetría. (como se muestra en la figura)



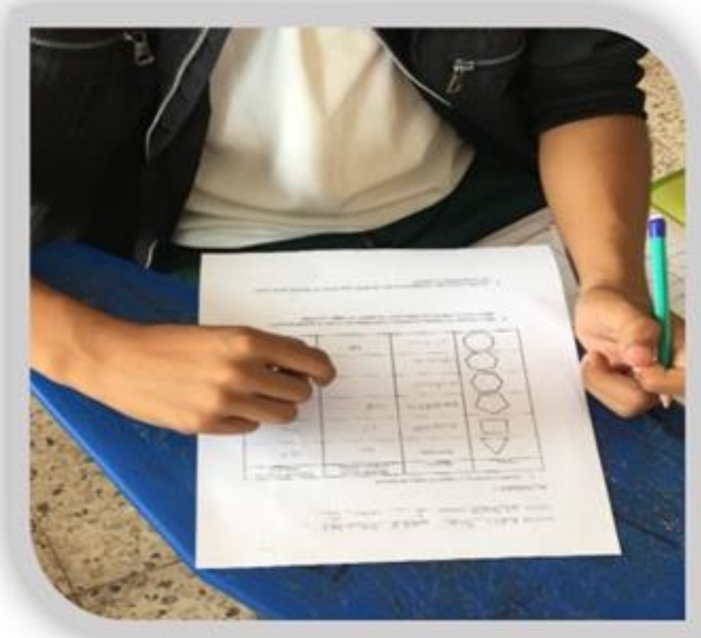
1. Realiza el mismo trazo en 3 de las esquinas del cuadrado
2. Recorta los segmentos circulares
3. Rotando las partes recortadas, une las piezas con cinta adhesiva y forma un jarrón
4. ¿De qué manera podrías calcular el área de esa figura?
5. ¿Será posible formar un teselado con esa figura?

B. Puestas en escena

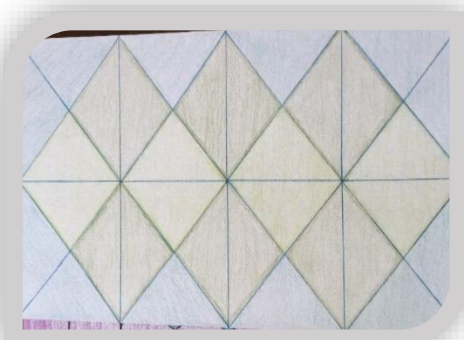
En las siguientes imágenes se observa el trabajo en el aula con los alumnos, el desarrollo de la puesta en escena de las secuencias didácticas diseñadas para esta investigación.

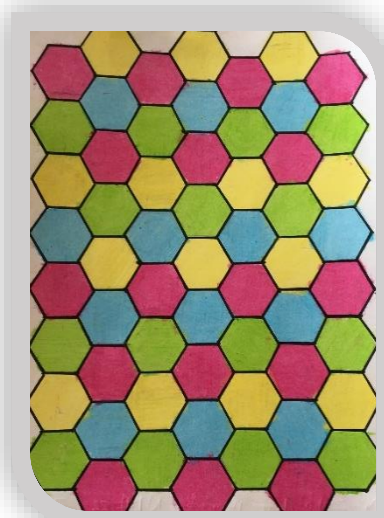
1) Organización de los equipos para las actividades

2) *Alumnos trabajando en la primera actividad*

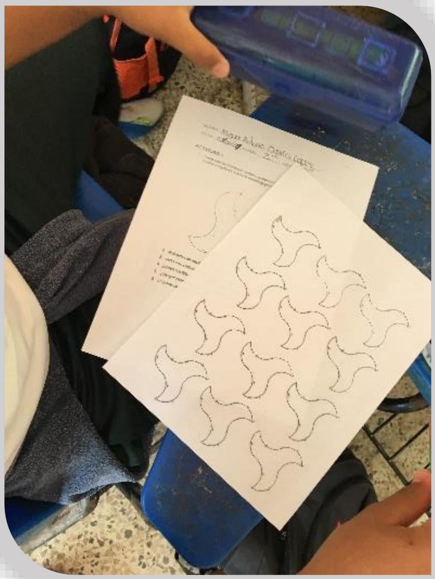


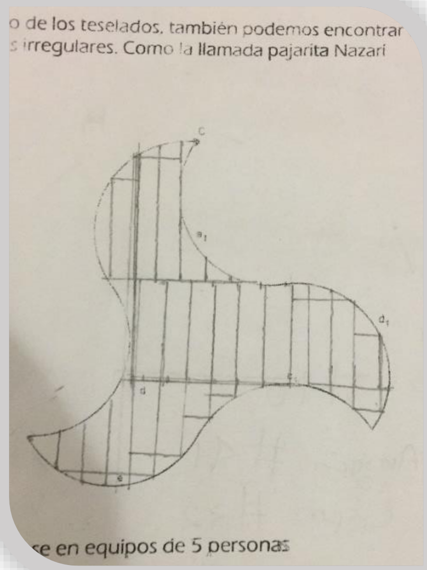
3) Desarrollo de la segunda actividad, los teselados. Algunas de las actividades entregadas por los alumnos.

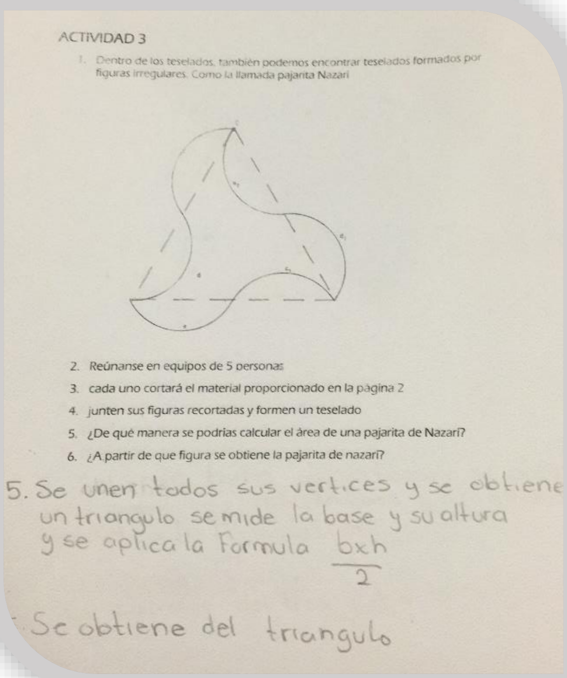




4) Desarrollo de la actividad 3, Calcular el área de la pajarita de Nazarí





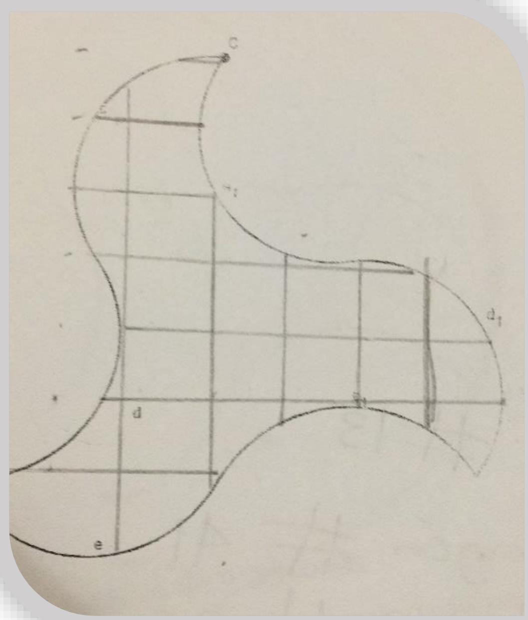

ACTIVIDAD 3

1. Dentro de los teselados, también podemos encontrar teselados formados por figuras irregulares. Como la llamada pajarita Nazarí

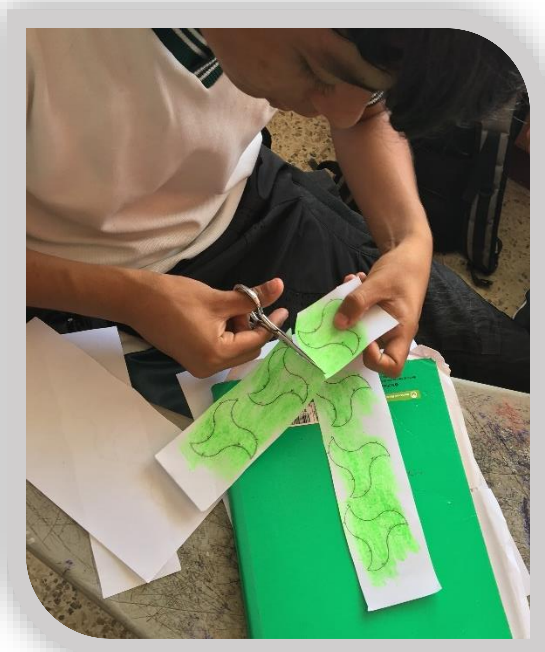
2. Reúnanse en equipos de 5 personas
3. cada uno cortará el material proporcionado en la página 2
4. junten sus figuras recortadas y formen un teselado
5. ¿De qué manera se podrías calcular el área de una pajarita de Nazarí?
6. ¿A partir de que figura se obtiene la pajarita de nazarí?

5. Se unen todos sus vertices y se obtiene un triangulo se mide la base y su altura y se aplica la Formula $\frac{b \times h}{2}$

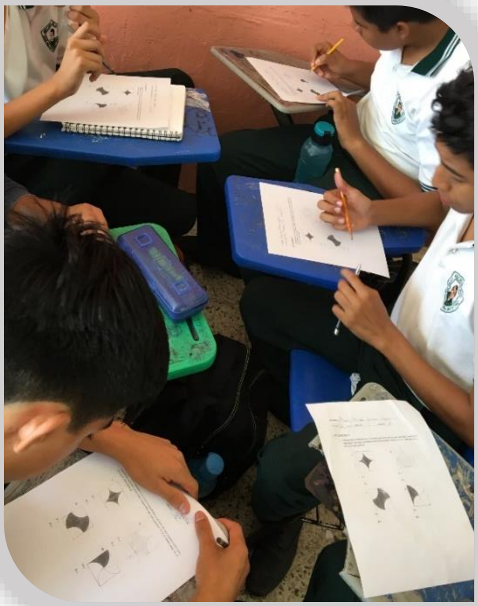
Se obtiene del triangulo

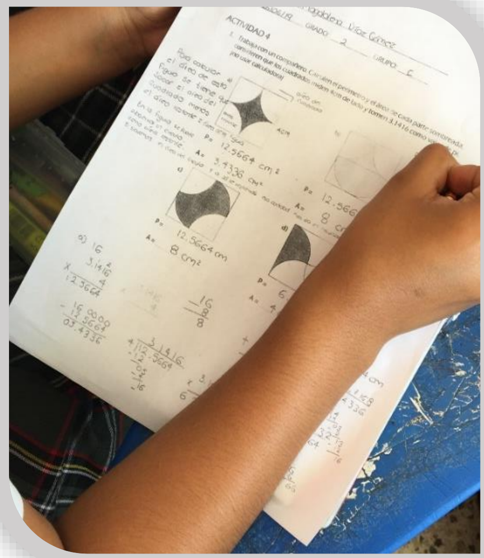


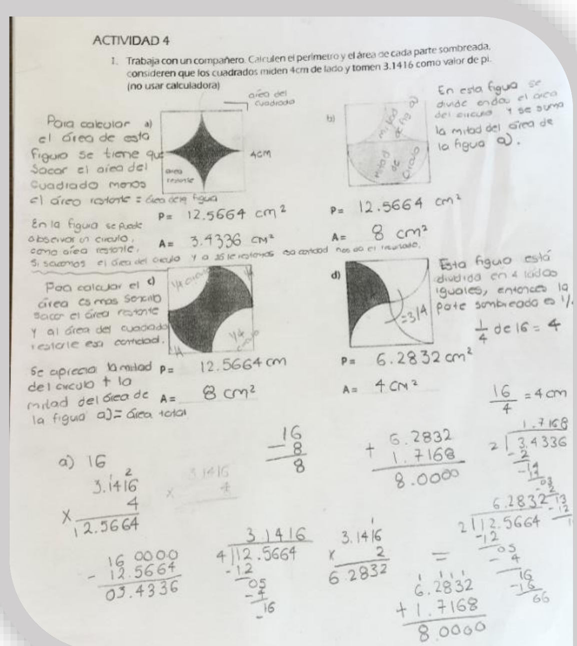
Alumnos iluminando y recortando las siluetas de la pajarita de nazarí para formar el teselado con ella.



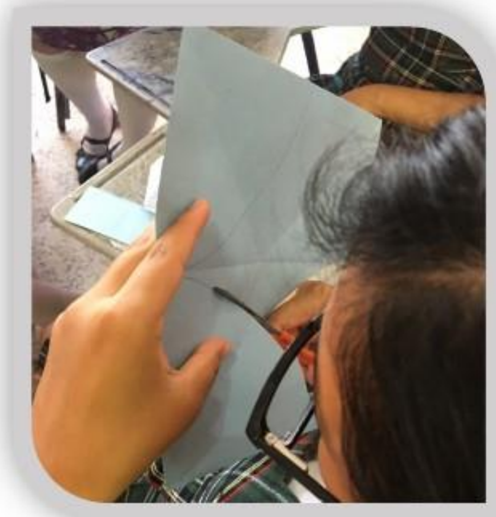
5) Desarrollo de la actividad 4



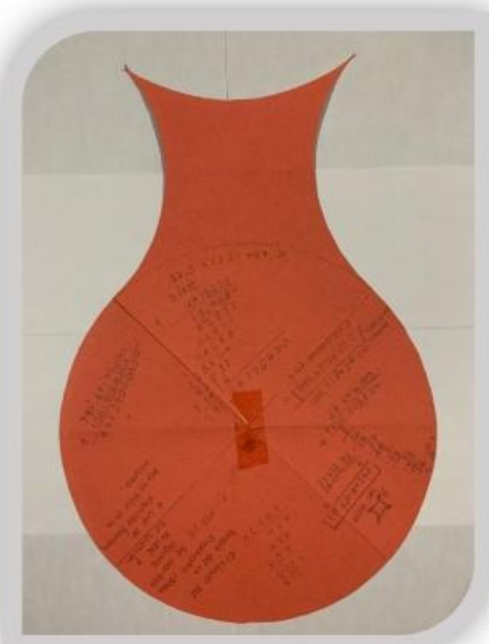


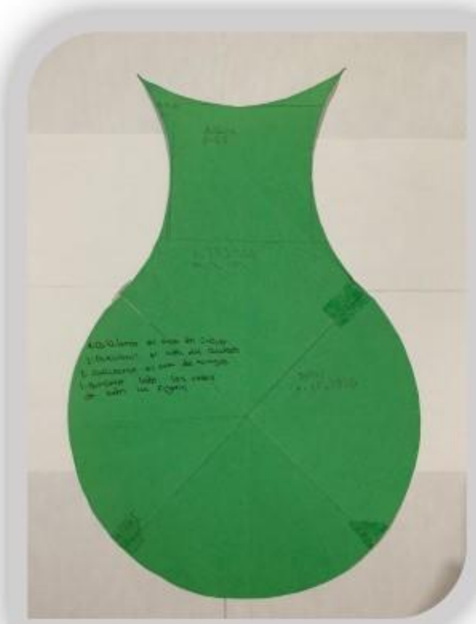


6) Desarrollo de la actividad 5, doblando, recortando y formando el jarrón.



7) *Alumnos trabajando en equipo para formar el jarrón y calcular el área.*





8) Teselados formado por jarrones