



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
Facultad de Ingeniería
Coordinación de Investigación y Posgrado



“La Construcción de la Noción de Variable Mediante la Modelación”

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

PRESENTA:
DENISSE CAROLINA RIOS DE LA ROSA 15112010

DIRECTOR DE TESIS
M. C. PIERRE FRANCOIS BENOIT POIRIER

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS; OCTUBRE 2021.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE INGENIERÍA C-I



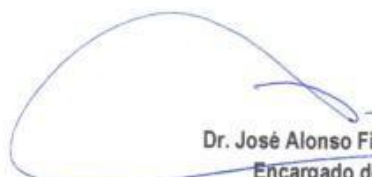
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.
A 11 de junio del 2021.
Oficio. F.I. 01/1793/2021

C. Denisse Carolina Ríos De La Rosa
Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.
Presente.

Por este medio comunico a usted, que se autoriza la impresión de su trabajo de tesis denominado: **"La construcción de la noción de variable mediante la modelación"**, para que pueda continuar con los trámites de titulación para la obtención del Grado de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"Por la Conciencia de la Necesidad de Servir"


Dr. José Alonso Figueroa Gallegos
Encargado de Dirección


~~C. c. p. Dra. Daisy Escobar Castillejos. Coordinadora de Investigación y Posgrado.
*Archivo Minutario
JAFG/DEC/acr*~~



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
SECRETARÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE DESARROLLO BIBLIOTECARIO



Código: FO-113-09-05
Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) Denisse Carolina Rios de la Rosa,
Autor (a) de la tesis bajo el título de "La Construcción de la Noción de Variable Mediante la Modelación"
presentada y aprobada en el año 2021 como requisito para obtener el título o grado de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, autorizo a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.
- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 28 días del mes de Octubre del año 2021.

Denisse Carolina Rios de la Rosa
Nombre y firma del Tesista o Tesistas

DEDICATORIA

A DIOS: Por ser el principio de todo y la fuente de la sabiduría; gracias Señor por abrirme las puertas a un logro más en mi vida y por darme las habilidades y las fuerzas necesarias para seguir adelante.

A MI ESPOSO: Tu ayuda ha sido fundamental. Gracias por tus palabras, paciencia y confianza; gracias amor por motivarme y brindarme el tiempo necesario para realizarme profesionalmente.

A MIS HIJAS: Regina y Carolina son el regalo más grande que Dios me ha dado y mi motor para seguir adelante. Gracias por la paciencia que me han tenido para poder concluir la tesis.

A MIS PADRES: Que siempre me han apoyado en cada etapa de mi vida; gracias por los consejos que me han dado haciéndome cada día mejor persona.

AL M. C. PIERRE FRANCOIS BENOIT POIRIER: Por su gran apoyo y confianza para la elaboración de esta tesis. Gracias por ser mi Director de Tesis, no me queda más que agradecerle

CONTENIDO

INTRODUCCION	7
CAPÍTULO 1. ASPECTOS PRELIMINARES	10
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	10
1.2 OBJETIVO GENERAL	11
1.3 OBJETIVOS PARTICULARES.....	12
1.4 JUSTIFICACION	12
1.5 ESTADO DEL ARTE.....	13
1.5.1 La noción de variable en los estudiantes	14
1.5.2 La construcción de la noción de variable	17
1.5.3 La modelación como práctica del proceso enseñanza-aprendizaje .	20
CAPITULO 2. MARCO TEORICO Y METODOLOGICO.....	24
2.1 PRACTICAS SOCIALES	24
2.1.1 La Modelación	25
2.2 TEORIA DE SITUACIONES	26
2.3 COMPETENCIAS DISCIPLINARES	28
2.3.1 Competencias disciplinares: Matemáticas.....	28
2.4 INGENIERIA DIDACTICA.....	30
CAPITULO 3. ANALISIS PRELIMINARES	33
3.1 ANALISIS EPISTEMOLOGICO.....	33
3.1.1 Etapa retorica.....	34
3.1.2 Etapa sincopada	36
3.1.3 Etapa simbólica.....	40
3.2 ANALISIS COGNITIVO	42
3.3 ANALISIS DIDACTICO	44
3.3.1 Revisión del programa de estudio 2011 de matemáticas de secundaria	45
3.3.2 Revisión del programa de desarrollo de competencias 2009 del nivel medio superior del estado.	55
CAPITULO 4. DISEÑO PARA EL AULA.....	62
4.1 ANALISIS A PRIORI	62
4.1.1 Situación Didáctica.....	63
4.1.2 Preguntas Exploratoria.....	67

4.1.3 Situación ExperimentalObjetivo:.....	68
4.1.4 Análisis de Casos de un Fenómeno SocialObjetivo	71
4.2 IMPLEMENTACIÓN DE LA SITUACIÓN DIDACTICA	73
4.2.1 Puesta en escena.....	73
4.2.2 Participantes	74
4.2.3 Dinámica	76
4.3 ANALISIS A POSTERIORI	76
4.3.1 Actividad de Inicio. Preguntas Exploratorias	76
4.3.2 Actividad de Desarrollo. Situación Experimental	80
4.3.3 ^a ctividad de Cierre. Análisis de Casos de un Fenómeno Social	84
CAPITULO 5. VALIDACIÓN	89
CONCLUSIONES	96
REFERENCIAS	99
BIBLIOGRAFÍA.....	102
ANEXOS.....	103

INTRODUCCION

“El concepto de variable es de fundamental importancia en el desarrollo y comprensión de cualquier rama de las matemáticas” (Ursini, Trigueros y Lozano, 2000).

Es por ello, que a lo largo de los años se han realizado diversos estudios de los procesos cognitivos que llevan a la construcción de la noción de variable, analizando las dificultades y los errores más comunes en los que incurren los educandos al intentar resolver problemas algebraicos en diferentes grados escolares.

Estos estudios han demostrado que la deficiencia en la noción de la variable es una causa importante para las múltiples dificultades que suelen tener los alumnos en los cursos de matemáticas en los distintos niveles de enseñanza media y superior.

En educación básica de primaria se introduce la noción de variable a través de la variación directamente proporcional, en el nivel de secundaria se prosigue el estudio de la noción a través de la variación directa e inversamente proporcional, principalmente por medio de tablas y graficas cartesianas, es en el nivel medio superior donde se trata con una definición formal de variable. En el nivel medio superior y superior las nociones de variable y función constituyen la base del Cálculo Diferencial e Integral y de toda la matemática superior.

Una de las competencias disciplinares matemáticas que el alumno del nivel medio superior debe de desarrollar es: “Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos,

geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales” (SEP, 2018)

Es por lo que esta investigación surge de la experiencia de análisis y estudio en educandos del nivel medio superior, al observar la deficiencia que tienen los estudiantes de la noción de variable, para ellos es difícil identificar en diversos contextos el concepto de variable, no interpretan sus significados y presentan diversos obstáculos cuando requieren trabajar con ellas.

Es por esta razón, que este trabajo rediseña una situación didáctica que mediante la modelación de fenómenos físicos y sociales favorezca a los alumnos de primer semestre del nivel medio superior a construir la noción de variable, apropiándose de las capacidades de interpretación, simbolización y manipulación de la variable.

El presente trabajo de investigación está dividido en cuatro capítulos.

El capítulo 1 aborda el planteamiento del problema, los objetivos establecidos, lo que se pretende a partir de la justificación planteada y el estado del arte que se toma en cuenta como directrices iniciales de la investigación.

El capítulo 2 establece las herramientas para realizar esta investigación. El marco teórico referido es la practicas sociales, la modelación, la teoría de situaciones didácticas y las competencias disciplinares de la Educación Media Superior, y la metodología utilizada es la ingeniería didáctica.

El capítulo 3 realiza un análisis epistemológico en cuanto a la noción de variable, un análisis de la dimensión didáctica y cognitiva en cuanto a la complejidad que existe en la enseñanza-aprendizaje para caracterizar como está constituido

este conocimiento de manera funcional en los estudiantes de primer semestre del nivel medio superior.

El capítulo 4 presenta el rediseño de la situación didáctica a implementar. Muestra las consideraciones de su diseño, un análisis a priori de la situación, la puesta en escena y el análisis de los resultados obtenidos en los educandos, así como la confrontación de los objetivos establecidos con los logros alcanzados.

Finalmente, se establece a manera de conclusión las razones del comportamiento observado en la aplicación de la situación didáctica.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS PRELIMINARES

En este capítulo se aborda la problemática que delimita la investigación, destacando la formación de los objetivos formulados a partir de lo encontrado en la revisión teórica

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los cursos propedéuticos impartidos en las Escuelas Preparatorias del Nivel Medio Superior en el estado de Chiapas, se implementan actividades diagnósticas con alumnos de nuevo ingreso. En base a estos diagnósticos se concluye que dichos alumnos presentan grandes dificultades en el desarrollo del pensamiento algebraico. Estas dificultades se asocian a la difícil comprensión de la noción de variable entre los educandos, lo cual conlleva a que los alumnos no construyan esta noción.

De acuerdo a las competencias disciplinares matemáticas que los alumnos de nivel medio superior (SEP, 2008) deben de desarrollar, la noción de variable proporciona la base para la modelación algebraica de una situación real, hipotética o formal y es necesario para el uso significativo de toda la matemática avanzada.

“Las variables se usan generalmente en textos escolares sin proporcionar actividades que puede servir como base en la cual la noción de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados” (Ursini, 1993). El aprendizaje de la noción de variable de los estudiantes de nivel medio superior conseguido a lo largo de su trayectoria escolar es poco significativo; son capaces de reconocer el papel que juega la variable en expresiones y problemas muy simples, pero un cambio en la complejidad de los mismos provoca generalizaciones inadecuadas y la búsqueda

de soluciones memorizadas o por inspección que no son acordes al nivel requerido para el estudio de matemáticas más avanzadas. Las estrategias de los estudiantes están dominadas por procedimientos que no han sido comprendidos, lo cual los deja anclados a un nivel de acción que se manifiesta, en la necesidad de hacer explícitos los pasos que siguen en el proceso mental de solución y usarlos como soporte para continuar, sin ser capaces de analizarlos, y detectar posibles errores.

Los problemas en la construcción de la noción de variable antes mencionados se van acarreado desde el nivel básico hasta el nivel superior; por lo que este proyecto de investigación se realizará en el nivel medio superior específicamente en la Escuela Preparatoria Rafael Pascacio Gamboa de la ciudad de Bochil, Chiapas, donde en base a diagnósticos realizados en los cursos propedéuticos en alumnos de nuevo ingreso se puede visualizar la deficiencia que tienen los estudiantes en la interpretación y manipulación de las variables y esto afecta en la construcción de conocimientos posteriores.

Surgen entonces las siguientes preguntas de investigación:

¿Cuál es el papel de la modelación en el proceso de la construcción de la variable?

¿Qué situación didáctica permitirá a los educandos desarrollar el proceso de la construcción de la noción de variable?

1.2 OBJETIVO GENERAL

Se indica a continuación el objetivo general del objeto de estudio.

Favorecer el proceso de construcción de la noción de variable mediante la modelación con alumnos del nivel medio superior

1.3 OBJETIVOS PARTICULARES

- Diseñar una situación didáctica que mediante la modelación permita a los alumnos la construcción de la noción de variable.
- Implementar la situación didáctica con alumnos de primer semestre del nivel medio superior.
- Analizar los resultados arrojados de la puesta en escena de la situación didáctica.
- Desarrollar las capacidades de interpretación, simbolización y manipulación de la variable en alumnos del nivel medio superior.

1.4 JUSTIFICACION

Los alumnos del nivel medio superior requieren de un entendimiento vasto de los conceptos del álgebra, en particular del concepto de variable, el cual es central en esta disciplina. Por lo tanto, de acuerdo a las competencias disciplinares matemáticas del nivel medio superior (SEP, 2008) se espera que los alumnos construyan e interpreten modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos algebraicos, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales; por lo que esto significa que es indispensable que tengan una noción de variable consolidada, que sean capaces de distinguir entre sus diferentes usos y lo puedan manejar de manera integrada, pero, a pesar de que en educación básica tienen una inducción a la noción, en el nivel medio superior se construyen concepciones equivocadas y estrategias de solución de problemas propias de estudiantes con menor escolaridad.

Es por ello que en la institución se desarrolla un proyecto a corto, mediano y largo plazo, denominado: Proyecto de intervención para el establecimiento de estrategias de aprendizaje de las competencias disciplinares básicas y extendidas de matemáticas y comunicación en la Escuela Preparatoria Rafael Pascasio Gamboa, con la finalidad de buscar las estrategias adecuadas para reforzar los conocimientos teóricos-prácticos que logren obtener un mayor grado de competencia en las habilidades matemáticas y comunicativas.

Una de estas estrategias implementadas, es el curso propedéutico donde se realiza una inducción a los jóvenes de primer semestre que provienen del nivel secundaria al nivel medio superior.

Este curso será el evento en el cual se implementará la situación didáctica diseñada en esta tesis y la cual ayudará a los jóvenes provenientes de secundaria a fortalecer el proceso de la construcción de la noción de variable. Con ello se pretende dar la atención a esa parte de la comunidad escolar que amerita el tratamiento y aplicación de las acciones específicas, en razón de lo mencionado con anterioridad, pretendiéndose superar la fase de retroalimentación en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje.

1.5 ESTADO DEL ARTE

Para elaborar el diseño de la situación didáctica que logre los objetivos de este trabajo es necesario proyectar un panorama que muestre el estado que guardan las investigaciones que se han realizado en esta dirección. Es por ello que se realizó el estudio de algunas investigaciones relacionadas al tema. El análisis de estas investigaciones se caracterizó por la identificación de los objetivos que guiaron

la investigación, las características con que fueron realizadas y los resultados obtenidos.

Los resultados obtenidos en estos trabajos de investigación hacen reflexionar, por qué el concepto de variable causa mucha confusión, no están siendo comprendidos por los estudiantes y como consecuencia de ello surgen interpretaciones que distan del conocimiento matemático aceptado. También nos muestran diversos panoramas del como la modelación puede ser implementada como una práctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los trabajos analizados se clasifican de la siguiente manera: la noción de variable en los estudiantes, la construcción de la noción de variable y la modelación como practica en el proceso enseñanza-aprendizaje.

1.5.1 La noción de variable en los estudiantes

Relacionados a la noción de variable Ursini, Trigueros y Lozano (2000) realizaron una investigación que tiene como objeto estudiar la interpretación, simbolización y manipulación que realizan los estudiantes de diferentes niveles (secundaria, preparatoria e inicio de universidad) respecto a la variable en sus distintos usos. Para ello se utilizó un cuestionario que se aplicó a 98 alumnos para explorar la capacidad de interpretar, manipular y simbolizar situaciones que implican los distintos usos del concepto de variable (incógnita, número general y relación funcional, arriba mencionados).

Cada uso de la variable está caracterizado por acciones específicas, en particular el uso de la variable en relación funcional se requiere reconocer la correspondencia entre cantidades y sus diferentes representaciones (gráfica, tabla,

problema verbal o expresión analítica); determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente y viceversa; reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación; determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra; expresar una relación funcional en sus distintas representaciones a partir de los datos de un problema.

Los resultados mostraron que si bien, los usos de la variable están presentes en los cursos de matemáticas, los estudiantes no adquieren la capacidad de interpretarlos, simbolizarlos y manipularlos de manera satisfactoria; lo que impide una comprensión del carácter multifacético de este concepto; por lo que una mala conceptualización de la variable puede ser causa importante para las múltiples dificultades que suelen tener los estudiantes en los cursos de matemáticas en los diferentes niveles escolares.

Un estudio exploratorio realizado en el centro del estado de Guerrero sobre las ideas asociadas a la variable con alumnos del nivel medio, medio superior y superior realizado por Vicario (2002), muestran la escasa presencia de la idea de variable concebida como magnitud, es decir asociada a una representación geométrica (longitud, área, volumen). Se tiene una concepción de variable asociada a las literales y afloran concepciones alternativas en el plano gráfico y conjuntista al plantear situaciones de variación; los estudiantes manifestaron dificultades en la comprensión de la noción de variable en los problemas que se les plantearon.

Los datos y evidencias mostradas por los investigadores indican, que la construcción de la idea de variable no es una tarea sencilla, pues surgen

dificultades, confusiones y concepciones alternativas que interfieren en ese proceso. Ante estas dificultades, es conveniente que los estudiantes comprendan este concepto, pues es pieza fundamental para la formación de nuevos conceptos como función, concepto importante en la matemática de la variación y el cambio. Se presume que, si los estudiantes construyen y se forman en la mente la comprensión de la noción de variable, serán más asequibles los nuevos conceptos asociados a esta noción.

La investigación de Fujii (2004) trata sobre las dificultades que los estudiantes tienen acerca de la comprensión del uso de expresiones simbólicas en la asignatura del álgebra en la escuela secundaria, para lo cual propone la creación de un puente entre los inicios del álgebra y la aritmética mediante el uso de expresiones numéricas generalizables. Para recabar información empírica el autor utiliza cuestionarios, entrevistas y registros de videograbaciones de estudiantes japoneses y estadounidenses.

La investigación está dividida en dos partes, en la primera se hace un análisis de los resultados de investigaciones sobre la comprensión de los símbolos literales por parte de los estudiantes, del cual se obtiene que muchos de los estudiantes de secundaria parecen tener una muy pobre comprensión de lo que los símbolos literales denotan y cómo pueden ser tratados en expresiones matemáticas. Al respecto el autor ha estado desarrollando un conjunto de problemas del conflicto cognitivo, donde el conflicto cognitivo es considerado como una herramienta para investigar y evaluar la profundidad y calidad de la comprensión de los estudiantes. En la segunda parte, un intento es realizado para mostrar como el currículum de la

escuela primaria puede ofrecer mejores oportunidades a los niños para pensar algebraicamente, el autor argumenta que el problema que se enfrenta acerca de la dificultad de la comprensión de la variable, pudiera ser más relacionado al currículum que a algún supuesto nivel cognitivo, además se presenta una aproximación para introducir el pensamiento algebraico en el currículum de la escuela primaria y secundaria usando expresiones numéricas generalizables basadas en un concepto de cuasi-variable.

1.5.2 La construcción de la noción de variable

Gómez (2005) en el artículo “La construcción social de la noción de variable” tiene como propósito estudiar el cómo se construye la noción de variable desde un punto variacional. Donde la variable no es un objeto aislado, sino que está se desarrolla de la relación entre dos o más variables.

Es de importancia señalar que este trabajo se desarrolla en el nivel medio superior-superior. Realizan el estudio de la variable desde diferentes dimensiones: la epistemológica, la cognitiva, la didáctica y la sociocultural, para poder tener elementos que permitan determinar qué procesos favorecen la construcción de esta noción y asimismo realizar su caracterización.

Es por ello que mencionan que la construcción social del conocimiento se produce con la actividad humana y en particular la construcción del conocimiento matemático con la actividad matemática que se realiza en distintas instituciones de la sociedad.

La construcción social del conocimiento en situación escolar se produce mediante las interacciones entre profesor y alumnos, experimentando,

especulando, compartiendo, confrontando, argumentando, convenciendo, rechazando, validando, debatiendo, negociando, consensando, etc. utilizando el lenguaje como medio de comunicación.

Para realizar esta investigación será necesario utilizar el análisis documental donde se analizará la noción de variable desde diferentes dimensiones: la epistemológica, la cognitiva, la didáctica y la sociocultural. Por lo que en esta investigación se plantea:

- Realizar un análisis de la información documental sobre la construcción social de la noción de variable.
- Considerar los resultados de las investigaciones que se han realizado al respecto.
- Aplicar métodos cuantitativos y cualitativos durante el desarrollo de esta investigación.
- Diseñar y llevar a cabo observaciones y experimentos sobre la construcción de esta noción.

Por otra parte, Gómez (2012) refleja el interés en la construcción de la noción de variable y no en la noción de variable como símbolo. Teniendo como pregunta de investigación ¿cómo se construye la noción de variable en niños pequeños y qué procesos favorecen su construcción? De esta pregunta de investigación se desprende como objetivo de investigación, identificar los procesos que se ponen en juego en la construcción de la noción de variable en niños pequeños.

Este trabajo se basa en la teoría APOE y parten de la hipótesis de que la construcción de la noción de variable no es un proceso aislado o independiente,

sino que la noción de variable emerge de la relación al menos de dos entidades cambiantes donde en la mayoría de los casos una de ellas es el tiempo.

Diseñaron situaciones experimentales que tuvieron como marcos fenómenos covariacionales como el descenso y ascenso del volumen de un líquido respecto al tiempo, volumen constante de un líquido respecto al tiempo, el alargamiento del resorte de una balanza producido por el peso de objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes. Se utilizó el método clínico en la puesta en escena de los experimentos. Este método nos permite mediante el estudio de casos, observar, preguntar y analizar las acciones físicas o mentales que realiza un individuo ante una situación problemática y de estas acciones, deducir cómo el individuo se comporta ante un fenómeno, permitiéndonos identificar los procesos de razonamiento que intervienen en la construcción de la noción de variable en niños pequeños.

Los resultados obtenidos concluyen que la construcción de la noción de variable en niños pequeños está asociada a la centración, la causalidad y la seriación.

Una de las investigaciones donde se realiza una propuesta didáctica es el de González (2012) ese trabajo surge de la experiencia en la escuela con los estudiantes de Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Rural La Granja de Bogotá Colombia, ahí observa que existen serias dificultades para comprender y comunicar en lenguaje simbólico. Teniendo en cuenta que uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza del álgebra es que el niño logre comunicar en lenguaje algebraico relaciones, regularidades y procesos en forma general y el

uso del lenguaje simbólico; la asimilación y comunicación que debería existir entre el lenguaje natural y simbólico, está asociado a la aplicación fórmulas y algoritmos mas no a la comprensión de las mismas. Como consecuencia de esto, no hay significado en el lenguaje simbólico, sino por el contrario se ha convertido en una búsqueda de algoritmos entre letras.

En su investigación plantea una propuesta didáctica que centra su desarrollo en potenciar en los estudiantes los diferentes usos e interpretaciones de la variable a través de procesos de generalización en contextos geométricos y numéricos, propiciando el análisis sobre sus propias concepciones y razonamiento.

Su trabajo se basa fundamentalmente de un análisis epistemológico. El estudio que hace de la historia de lenguaje simbólico y del significado de variable le permite comprender las dificultades a las que se enfrentan los niños al iniciar el curso de álgebra cuando no se ha tenido una sólida comprensión del lenguaje simbólico. Ella concluye que la historia revela que ese paso no se da en uno solo instante, sino por el contrario diferentes situaciones motivaron la construcción de dicho lenguaje, así mismo el significado de variable se consolida tras cambios en su simbología y en el contexto. El conocimiento de la historia de la matemática y de la construcción de conceptos a lo largo del tiempo, se constituye en un saber fundamental para aquel el docente que busque reflexionar sobre su práctica pedagógica y enriquecer su formación disciplinar.

1.5.3 La modelación como práctica del proceso enseñanza-aprendizaje

Dentro de las investigaciones de modelación se encuentra la de Arrieta

(2003) que describe a la modelación como prácticas sociales de matematización en el aula. Por lo que muestra un trabajo que está en la línea de investigación que trata sobre el estudio de las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento.

Para Arrieta y Diaz (2015) el conocimiento matemático es visto como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades. Sostiene que el aprendizaje es una actividad humana situada en contextos sociales donde los actores ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad, las mismas prácticas, su entorno, sus realidades, sus herramientas y su identidad.

La evidencia que los humanos construyen conocimiento a través de las interacciones entre ellos y con el entorno; es decir en su actuar por el mundo. Es por ello que propone a los actores diseños donde ejercen prácticas sociales de modelación particulares donde construyen lo lineal y lo cuadrático como herramientas para intervenir en sus comunidades.

Los resultados de la investigación proporcionan elementos para el desarrollo de la perspectiva teórica llamada socioepistemología y muestra evidencias que la sustentan. Y por otro lado aporta elementos para incorporarlos en el quehacer cotidiano en el aula.

Por su parte Cordero (2004) menciona que una de las creencias frecuentes en las prácticas de enseñanza de la matemática consiste en que la modelación es una aplicación de la matemática. Lo que conlleva, primero, a enseñar matemáticas y después, a buscar la aplicación de tal conocimiento. Contrariamente a tal idea, en

su artículo explica que la modelación es una construcción del conocimiento matemático. Sin embargo, este hecho no ha compuesto un eje didáctico que norme el currículo escolar. Ejemplifica cómo es que el uso de las gráficas que se suele incorporar a las prácticas de enseñar y aprender matemáticas es un tipo de modelación.

Se menciona que el hecho de que la graficación pueda llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón deseable, significa que la graficación es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. Es en sí misma una modelación, pero modelación no significa una “herramienta didáctica” que ayuda o facilita a construir el concepto de función, sino es una actividad que trasciende y se resignifica, que transforma al objeto en cuestión. Tal práctica es la que se tendrá que desarrollar en el sistema educativo y no así, como se ha pretendido, fallidamente, hasta ahora, desarrollar el concepto de función con ayuda de varias herramientas, por ejemplo, la modelación.

En otra investigación Cordero (2005) estudia el reconocimiento de la modelación como una actividad necesaria para la reconstrucción de significados matemáticos. Se presenta un ejemplo de la modelación gráfica para resignificar la parábola y los modelos gráficos que se han identificado en el trabajo con situaciones de movimiento. Se discute la importancia de la identificación de categorías, como la modelación-graficación, para estudiar la introducción del saber matemático en el sistema didáctico.

En otra investigación Rodríguez (2008) se centra en el aprendizaje y la enseñanza de la modelación en las clases de Física y Matemáticas en la escuela

secundaria en Francia. Los nuevos programas implementados en 2002 para estas dos clases enfatizan el papel de los objetos matemáticos como herramienta de modelado de otras ciencias. El análisis de los libros de texto utilizados comúnmente en las clases de Física y Matemáticas, ayudó a caracterizar el enfoque de modelación que se supone se enseña en ese grado. En ellos se destacan la incorporación del tema de modelación en referencia a un enfoque más académico.

El establecimiento de una situación experimental diseñado con tareas inusuales (fuera de contrato) para los estudiantes en la clase de último año identifica la influencia ejercida por praxeologías existentes en estas clases con los estudiantes. Pero esto también ha puesto de relieve el papel de modelo de "pseudo-concreto" de la situación real de salida y el modelo físico construido por los estudiantes en sus métodos de modelización.

La influencia de las intervenciones externas para ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades, y el papel de la retroalimentación de una tarea a otra, también se encuentran entre los resultados que se discuten en este estudio. El tipo de modelo que se enseña en el aula de Física y Matemáticas tiene una desviación significativa del enfoque de modelado practicada por expertos. Las dificultades relacionadas con la aplicación de este enfoque aplicado se destacan en este trabajo.

CAPITULO 2. MARCO TEORICO Y METODOLOGICO

El marco teórico sobre lo cual se apoya esta investigación es las Practicas Sociales y la Modelación, así como también la Teoría de Situaciones desarrollada por Guy Brousseau (1986), así como el enfoque por competencias de educación media superior propuesto por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2008).

La metodología a utilizar es la Ingeniería Didáctica, tomando en cuenta lo descrito en ellos para las actividades que se incorporara en la secuencia didáctica.

2.1 PRACTICASⁱ SOCIALES

La práctica social, es el punto de partida de la construcción de nuevas ideas y propuestas, entendida como un segmento de experiencias a través de las cuales se piensa lograr un producto deseable para cambiar una situación social determinada. A través de las prácticas sociales el hombre da sentido a los problemas fundamentales de la ciencia, sometiéndolos a las complejas relaciones entre ellos y su entorno.

Existen dos maneras en las que se manifiesta la actividad práctica: una es la acción de la naturaleza y, la otra, las prácticas sociales que los seres humanos ejercen sobre el conocimiento. Las acciones deliberadas del hombre sobre el conocimiento determinan cambios en el contenido de los objetos, los cuales merecen un estudio a través de ciertas condiciones.

La socioepistemología surge como línea de investigación en México a finales del siglo pasado con los trabajos que en esa dirección realizaron investigadores del área del nivel superior del Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav del IPN. En su origen, la socioepistemología aparece como un eje

fundamental de investigación del “pensamiento y lenguaje variacional”, en la que el énfasis de ese acercamiento teórico se pone en la importancia que se da a las “prácticas sociales”, las cuales adquieren sentido dentro de la “matemática de la variación y del cambio” en los sistemas educativos.

Bajo la perspectiva de la socioepistemología, en una primera instancia se ha pretendido colocar a los sujetos en situación de aprendizaje, creándoles herramientas a través de argumentos contenidos en el álgebra básica y el estudio de curvas que involucren procesos que permitan la adquisición de lenguajes gráficos que faciliten la transferencia entre diversos campos conceptuales, virtualmente ajenos en la enseñanza tradicional, estableciéndose con ello isomorfismos operativos entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. La idea surge a partir de que, en el análisis matemático, algunos estudiantes logran procesos algorítmicos con los conceptos fundamentales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión

2.1.1 La Modelación

Se caracteriza a la modelación como una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra. La diversidad, tanto de las entidades que intervienen en la articulación como de la naturaleza de la intervención, hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades.

La práctica de modelación permite tender puentes entre lo que se hace en la escuela y lo que se hace en comunidades no escolares. En esta práctica el modelo no existe independiente de la actividad humana, se manifiesta como modelo en

tanto se usa para intervenir en otra entidad que, a partir de este momento, es lo modelado. Si bien la interacción con la entidad a modelar es necesaria, la suficiencia se logra con la intervención sobre ella, a partir de la actividad con el modelo. Es en esta intervención que se establece el acto de modelar. La articulación de diferentes modelos con el fenómeno, da lugar a redes de modelos que potencian la actividad humana para la intervención.

2.2 TEORIA DE SITUACIONES

Con esta teoría, se estudian y modelan fenómenos didácticos que ocurren cuando un profesor se propone enseñar una noción, un teorema o un procedimiento a sus estudiantes.

La Teoría de Situaciones está sustentada en una concepción constructivista del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (1986) de esta manera:

“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.”

De lo anterior, Brousseau sostiene que el sujeto (alumno) aprende por la adaptación al medio en el que interactúa.

Se considera que la “situación” es la interacción entre el sujeto y el medio que determina a un conocimiento, esto puede ocurrir mediante conocimientos anteriores ya determinados, o bien mediante la construcción de nuevos conocimientos por parte del objeto (Brousseau, 2007); entendiendo como medio

cualquier recurso como pueden ser: libros, materiales, juegos, etc. que permita enseñar un conocimiento.

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrecieran al alumno la posibilidad de construir el conocimiento dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego.

La situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado. Esta intención no desaparece en la situación o fase a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo en base a sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución.

Para una situación didáctica determinada se identifica el estado inicial y el conjunto de los diversos estados posibles, entre los que se encuentra el estado final que corresponde a la solución del problema involucrado en la situación. Se hacen explícitas las reglas que permiten pasar de un estado a otro. La situación se describe, entonces, en términos de las decisiones que los alumnos pueden tomar en cada momento y de las diferentes estrategias que pueden adoptar para llegar al estado final.

Otro factor que facilita el aspecto de las situaciones didácticas es su clasificación. Se distinguen, entre las situaciones que se producen para su estudio

experimental, cuatro tipos cuya secuencia en los procesos didácticos que organizan es la siguiente:

1. Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico.
2. Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones entre alumnos.
3. Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o a varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen.
4. Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer convenciones sociales.

2.3 COMPETENCIAS DISCIPLINARES

Otros conceptos que forman parte del marco teórico de esta propuesta son las competencias disciplinares que a continuación se plantean, las cuales buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico en los estudiantes como lo establece la RIEMS (Reforma Integral de la Educación Media Superior).

Las competencias disciplinares son las nociones que expresan conocimientos, habilidades y actitudes que consideran los mínimos necesarios de cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen de manera eficaz en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida.

2.3.1 Competencias disciplinares: Matemáticas.

Las competencias disciplinares del campo de las matemáticas son aquellas que tienen como finalidad formar a los estudiantes con la capacidad de interpretar

el entorno que los rodea matemáticamente hablando, bajo la resolución de problemas aritméticos y algebraicos, geometría plana, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencias e integral; incluyendo también, conceptos básicos de estadística y probabilidad.

- 1.- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2.- Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- 3.- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4.- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- 5.- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- 6.- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- 7.- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
- 8.- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

2.4 INGENIERIA DIDACTICA

Esta metodología por la cual se optó está referida al método de investigación de corte cualitativo en la que según Artigue (1995) se realiza:

“una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas con los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo”

En comparación con otras metodologías, la ingeniería didáctica se apoya en la experimentación en clases y se encuentra ubicada en el registro de estudios de casos y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, tal como lo describe Artigue. Su sustento teórico proviene de la teoría de la transposición didáctica y de la teoría de las situaciones didácticas.

Artigue (1995, p. 40) distingue tres dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

1. **Dimensión epistemológica:** asociada a las características del saber puesto en funcionamiento, es decir al conocimiento mismo.
2. **Dimensión cognitiva:** asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza, es decir, se refiere a la manera en cómo los alumnos conceptualizan el conocimiento.

3. **Dimensión didáctica:** asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza, en donde se involucra: el profesor, los libros de texto, el método de enseñanza, todos estos llamados elementos didácticos.

Esta metodología está integrada por un conjunto de fases o etapas que permiten la sistematización de la misma. Las fases de esta metodología a las que nos referimos son las siguientes:

1. **Análisis preliminares.** Está compuesto por un conjunto de análisis a saber: el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan la evolución, el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva y los objetivos de la investigación.
2. **Concepción y el análisis a priori.** Implica la consideración de los análisis previos asociados al objeto de estudio y al problema de investigación que se plantea, para concebir en la estructuración, forma y dimensión de la situación didáctica a diseñar, así como las variables involucradas, de los medios o herramientas a incorporar para el logro de los objetivos.
3. **Realización didáctica.** Es la puesta en marcha de la situación didáctica diseñada, en ésta se explicará las condiciones en las que se llevó a la práctica, el lugar, el curso curricular, los alumnos, la duración, los momentos, la organización, la dinámica que se siguió, etcétera.

4. **Análisis a posteriori.** Está constituido por el registro de las observaciones durante la realización didáctica.
5. **Validación.** Esta es de carácter interno, consistente del análisis a priori y el análisis a posteriori.

CAPITULO 3. ANALISIS PRELIMINARES

Este trabajo de investigación se apoya en la Ingeniería Didáctica como metodología, la cual permitirá rediseñar una secuencia didáctica, tomando en cuenta cada una de las cinco fases de esta metodología. A continuación, se presenta la primera fase que se refiere a los análisis preliminares, donde se realiza el análisis epistemológico, cognitivo y didáctico de la noción de variable en alumnos del nivel medio superior.

3.1 ANALISIS EPISTEMOLOGICO

Es importante realizar el análisis del cómo se construyen los conocimientos de variable a lo largo de la historia.

Es por ello que, la epistemología nos proporciona elementos para analizar cómo nace y se desarrolla el concepto de variable dando un paso obligado por los principales lugares y momentos históricos en el desarrollo del álgebra. El origen y desarrollo de la noción de variable como símbolo está asociado al desarrollo histórico del álgebra.

Según Nesselman (1842) la construcción de la notación algebraica se concibió en tres etapas: la etapa retórica, la del álgebra sincopada y la del álgebra simbólica.

A continuación, se muestra una esquematización basada en el trabajo de investigación de González (2012), de cada una de las etapas antes mencionadas, los elementos que disponen para el avance en matemáticas haciendo un recorrido histórico, destacando sus principales exponentes, aportes y limitantes, su contexto motivacional y el uso simbólico para la variable.

3.1.1 Etapa retórica

La etapa retórica o también conocida como etapa verbal se desarrolló entre los años 2000 – 250 a.C aproximadamente, donde las matemáticas surgen junto con la necesidad de comunicarse. Se caracterizó por el uso de una descripción en lenguaje ordinario para resolver problemas de tipo particular y careció del uso de símbolos o signos especiales para representar incógnitas. Los problemas son planteados con palabras y sus soluciones también eran verbalizadas. Esta forma de abordar los problemas, es aplicada a situaciones particulares y no en una forma generalizada.

Babilonios (2000 a.C). Las principales actividades que realizaban en su entorno eran: La construcción de canales, presas y sistema de riego para los cultivos, cuentas diarias, contratos, préstamos de interés simple compuesto, acertijos numéricos.

Sus principales aportaciones son:

- Plantean y resuelven problemas de manera verbal.
- Manipulan la incógnita sin usar símbolos especiales.
- Tipo de Ecuaciones: cuadráticas; método de resolución: completar el cuadrado
- Pioneros en el sistema de medición del tiempo al introducir el sistema sexagesimal y lo hacen dividiendo el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.
- Problemas que se reducen a la solución de ecuaciones cuadráticas.

- Aceptan aproximaciones de números irracionales como soluciones de sus ecuaciones

Egipcios (1700 a.C). Su contexto motivacional era predecir las inundaciones y solucionar el desbordamiento del río Nilo que causaba que los lindes de los campos se borraran. Además de resolver problemas del estado y de los templos, medir áreas de campos para cobro de impuestos, construcción de tumbas pues creían en la inmortalidad, los problemas de la vida diaria, tales como la distribución del pan, granos necesarios para producir cierta cantidad de cerveza, cálculo de volumen de graneros etc.

Sus principales aportaciones son:

- Plantean y resuelven problemas, de manera verbal.
- Dominio en el manejo de fracciones empleaban la unidad como numerador.
- Plantean y resuelven ecuaciones del tipo $ax^2=b$, usando el método de la falsa y doble falsa posición.
- Logran calcular la longitud del año solar, a través de sus observaciones astronómicas

Griegos (600-300 a.C) Periodo clásico. Algunas de las principales actividades de su contexto son: necesidad de medir, el inquirir por la naturaleza del número.

Sus principales aportaciones son:

- EUCLIDES: Expresa la matemática en lenguaje verbal y lenguaje geométrico.

- Relación estrecha entre geometría y aritmética, lo que llamaría Zeuthen álgebra geométrica que se encuentra consignada en los libros I y IV de los elementos de Euclides.
- Establecen relaciones entre números y sus propiedades.
- Resuelven ecuaciones lineales y cuadráticas por métodos geométricos.

Chinos (1200-250 a.C). Su contexto motivacional es: problemas en el calendario, cálculos astronómicos en los negocios, en la medida de las tierras, en la arquitectura, en los archivos gubernamentales y en los impuestos.

Sus principales aportaciones son:

- Solución de ecuaciones de primer y segundo grado. Método de solución con simple falsa posición.
- Admiten los números negativos, aunque no los aceptan como soluciones de ecuaciones.
- Números racionales positivos. Reconocen algunos irracionales.
- Concepto de proporcionalidad directa.

3.1.2 Etapa sincopada

La etapa del álgebra sincopada se desarrolló aproximadamente entre los años 250 a.C - 1500 d.C. Los conocimientos en aritmética se amplían, debido a que la actividad comercial aumenta, los cálculos astronómicos son más complejos e involucran muchas más variables que representaban cantidades desconocidas, surge la necesidad de abreviar el lenguaje en matemáticas que era una herramienta indispensable en el planteamiento y solución de problemas que conducían a diversos tipos de ecuaciones y esto da lugar al Lenguaje sincopado que lleva a

introducir por primera vez abreviaturas usando letras para las incógnitas y sus potencias, en una combinación del lenguaje retórico con abreviaturas, aún en esta fase predominan los cálculos en lenguaje natural.

Griegos (330 a.C- 600 d.C) Periodo alejandrino o helenístico. Su contexto motivacional es: la comprensión del mundo físico ya que se consideraba que la matemática era la clave para entender los fenómenos naturales. Buscar soluciones exactas, positivas y racionales a ecuaciones determinadas e indeterminadas. Se interesó por los acertijos numéricos.

Las principales aportaciones fueron Diofanto (250 d.C) y son:

- Se reconoce en él la figura griega más prominente de la época Alejandrina con respecto al álgebra.
- Introduce por primera vez abreviaturas, usa letras griegas para las incógnitas y sus potencias.
- Trabaja ecuaciones de tipos lineales, cuadráticas y cúbicas. Ecuaciones determinadas e indeterminadas.
- Números racionales e irracionales cuadráticos positivos.
- El tipo de álgebra de Diofanto se suele llamar álgebra "numerosa" o "numeral", ya que los coeficientes de las ecuaciones siempre son conocidos.
- Creador del análisis Diofántico.

Hindúes (200-1200). Su contexto motivacional era: los cálculos astronómicos. Cálculo de áreas y volúmenes. Las ecuaciones lineales y cuadráticas, determinadas o indeterminadas; las medidas; las progresiones

aritméticas y geométricas; y numerosos problemas de naturaleza geométrica y algebraica.

El más grande de los matemáticos hindúes fue BRAHMAGUPTA y sus principales aportaciones son:

- Mejoran la notación simbólica creada por Diofanto.
- Introduce el cero como número
- Números racionales e irracionales cuadráticos. Números negativos.
- Tipos de ecuaciones: lineales, cuadráticas, determinadas e indeterminadas, algunas ecuaciones cúbicas y cuárticas
- Resuelven ecuaciones usando la regla de la falsa posición y el método de completar cuadrado.
- Admiten los coeficientes negativos y en algunos casos las raíces negativas.

Árabes (800-1300). En el Siglo VII los árabes invaden India y otras comunidades islámicas y los sistemas matemáticos indios pasan a ser estudiados y adoptados por ellos. Le dieron el nombre de “Al- Jabr” que significa „la unión de las partes sueltas”, puesto que Al significa ‘La’ y Jabr significa ‘reunión’. Los árabes mejoraron las artes y las ciencias que imperaban en las tierras que invadieron durante su gran Jihad

Sus principales aportaciones son:

- Contribuyen con el nombre de álgebra, proveniente de la palabra “aljabr” que al parecer significa “restauración” o “complementación” y

“muqabalah” probablemente “reducción o compensación” o también según Klein significa “restauración” “componedor de huesos”

- AL-KHOWARIZMI (780-840) Regresión con respecto a Diofanto. Es un álgebra completamente retórica con una semejanza al estilo de los babilónicos y egipcios.
- Solución de ecuaciones indeterminadas de segundo y tercer grado. Las cuadráticas las justifican con procesos geométricos.

Europa. Las condiciones económicas y sociales de la época, se disponen para recibir a los grandes algebristas del Renacimiento. La circulación de las aritméticas impresas, la difusión de la Summa de Pacioli, ofrecen condiciones de bases científicas para el desarrollo de la matemática.

Las principales aportaciones de la edad media son:

- Leonardo Pisano (1170-1250) (Fibonacci). Introduce el sistema de numeración indo- arábigo usado actualmente. Introduce el cero en Europa.
- Nicolas Chuquet (1455 a 1488). En su obra Triparti, trata: los números, las raíces y la “regla de los primeros”. Da un paso decidido en algebra al considerar los números negativos y en usar exponentes e incluir el cero como exponente.
- Pacioli (1445-1514) Siglo XVI. Números negativos racionales e irracionales cuadráticos. Ecuaciones cubicas y cuarticas en su libro Summa, además de conectar la matemática con aplicaciones prácticas.

- Cardano (1501-1576). Resolución de la ecuación cúbica (y cuartica también) escrita en el Ars Magna. Números irracionales. Números negativos no aceptados como coeficientes y raíces de ecuaciones, llamándolos “ficticios”.
- Bombelli (1526-1572). Transforma el lenguaje algebraico. Introduce símbolos especiales para representar la incógnita y sus potencias y relaciones de uso frecuente. Introduce segmentos negativos y áreas negativas o nulas. Argumenta combinando con instrumentos Euclides y algebraicos. Analiza la naturaleza y multiplicidad de las raíces. Resuelve ecuaciones de los primeros cuatro grados y su resolución a través de fórmulas.

3.1.3 Etapa simbólica

La etapa del algebra simbólica se desarrolló aproximadamente del año 1500 d.C en adelante, surgen nuevas necesidades en matemáticas a lo largo de la historia y como consecuencia de ello el lenguaje simbólico. Esta etapa se inicia por la introducción de símbolos literales por parte de Vieta en 1591 lo que origina un cambio en las formas de expresar cantidades desconocidas y dadas. Esto hace posible transformar las soluciones generales a expresiones y usar el álgebra como herramienta para demostrar reglas que gobiernan las relaciones numéricas. Puig & Rojano (2004) mencionan que lo fundamental en el desarrollo del álgebra, no es la mera existencia de letras para representar cantidades o de signos extraños a un lenguaje común para representar operaciones, sino el hecho de que uno puede operar con un sistema de signos sin tener que recurrir a traducirlo a un lenguaje común.

François Viète (1540- 1603), Francés. Europa es sacudida por influencias revolucionarias, cambios políticos tras incesantes guerras; acontecimientos que alteran drásticamente las perspectivas intelectuales y con ello la actividad matemática.

Sus principales aportaciones son:

- Viète se da cuenta que la incógnita no necesita ser un número o un segmento geométrico. Inicia la generalización a la expresión algebraica.
- Escribe las magnitudes conocidas “parámetros” como consonantes (B, D, etc.) y las magnitudes desconocidas “incógnitas” como vocales.
- Propuso un nuevo enfoque de la resolución de la cúbica.
- Facilitó el estudio de ecuaciones de grado 2, 3 y 4.
- Distingue algunas relaciones entre las raíces y coeficientes de una ecuación algebraica.
- Concibe la matemática como una forma de razonamiento

3.2 ANALISIS COGNITIVO

Desarrollo cognitivo es “el conjunto de transformaciones que se producen en las características y capacidades del pensamiento en el transcurso de la vida, especialmente durante el periodo del desarrollo, y por el cual aumentan los conocimientos y habilidades para percibir, pensar, comprender y manejarse en la realidad” (Rafael, 1994)

En la psicología cognitiva se encuentran normas del desarrollo del conocimiento de los estudiantes que se vinculan con sus desarrollos en matemáticas y en particular con el álgebra. Diversos psicólogos y pedagogos renombrados, han demostrado que el conocimiento se construye y que hay un camino en el desarrollo del pensamiento de la persona, marcados por unas etapas o estadios.

Para Piaget, estos estadios no están sujetos a la edad, ya que presentan características en el desarrollo del pensamiento que van cambiando gradualmente en un tiempo determinado integrándose a nuevas formas de estructuras del pensamiento. Piaget distingue cuatro estadios del desarrollo cognitivo cada uno cualitativamente diferente.

- I. Estadio Sensoriomotor Se desarrolla desde el momento de nacer hasta los dos primeros años de vida, el niño no es capaz de representar sus acciones, hay ausencia operacional de símbolos, carencia en el dominio del lenguaje, es más una etapa de desarrollo sensorial.
- II. Estadio Preoperacional (2 a 7 años): Se desarrolla una representación significativa ya sea a través del lenguaje, imágenes mentales, juegos simbólicos. Sin embargo, razonar lógicamente es bastante limitado.

- III. Estadio de Operaciones concretas (7 a 11 años): Mejora su capacidad de pensamiento lógico sin embargo está limitado a cosas concretas en lugar de ideas, distingue propiedades de los objetos (número, cantidad) a través de los cambios de otras propiedades. Es capaz de retener mentalmente dos o más variables cuando estudia los objetos.
- IV. Estadio de operaciones formales de 11 a los 15 años, su pensamiento va más allá de lo concreto, su nivel lógico se fortalece, piensa teóricamente sobre las consecuencias de los cambios y sucesos. Analiza, conjetura acerca de las combinaciones de las variables en un problema. Se va consolidando el pensamiento variacional.

Para el aprendizaje de la matemática hay unos aspectos relacionados que se desprenden de estos estadios y que fueron analizados por Collís (1982), que señala un camino del estadio operacional concreto al estadio operacional formal en el siguiente orden:

1. Preoperatorio (4 a 6 años)
2. Temprano de operaciones concretas (7 a 9 años)
3. Final de operaciones concretas (10 a 12 años)
4. De generalización concreta (13 a 15 años)
5. De operaciones formales (16 años en adelante).

Lo que podría esperarse en cada estadio respecto al aprendizaje en matemáticas sería que cada etapa propicie y fundamente el desarrollo del pensamiento abstracto, de generalización y simbolización para el inicio de la enseñanza del álgebra que viene dándose alrededor de los 12 a 15 años de edad cuando el niño cursa el tercer grado de secundaria.

Cuando los alumnos se encuentren en nivel medio superior (16 años en adelante) se pretende que los jóvenes se encuentran en el paso de estadio de generalización concreta y de operaciones formales donde esta estructura se hace más compleja abriendo paso a trabajar en un sistema formal abstracto que indicaría que tiene un desarrollo de pensamiento formal, luego su pensamiento está preparado y dispuesto para apreciar las relaciones, expresiones y abstracciones en el álgebra.

3.3 ANALISIS DIDACTICO

Esta etapa trata brevemente de la manera en cómo está marcada la transición de la enseñanza de la noción de variable en el plan y programa de estudios de la SEP (2011) de educación básica de secundaria al plan y programa de estudios de la SECH (2009) del nivel medio superior.

En este trabajo de investigación se analiza el Plan y Programa de Estudios de Educación Básica de Secundaria del 2011 (SEP, 2011), ya que es el que utilizó en la mayoría de las secundarias en el estado de Chiapas y es hasta en este ciclo escolar 2021-2022 que retoman el Plan y Programa de Estudios de Educación Básica del 2017.

Es por ello que, en una manera resumida podemos analizar que en el nivel de primaria se introduce la noción de variable a través de la variación directamente proporcional, en el nivel secundaria se prosigue el estudio de la noción a través de la variación directa e inversamente proporcional principalmente por medio de tablas y graficas cartesianas, es en el bachillerato donde se trata con una definición explícita de variable. En el nivel medio superior el concepto de variable constituye la base del Cálculo Diferencial e Integral y de toda la matemática superior.

3.3.1 Revisión del programa de estudio 2011 de matemáticas

desecundaria

Los propósitos del estudio de las matemáticas en estudiantes de educación básica, de acuerdo al Plan y Programa de Estudios 2011 de la Educación Básica de Secundaria (SEP, 2011) es que:

- Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.
- Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución. - Muestren disposición para el estudio de la matemática y para el trabajo autónomo y colaborativo

Y de acuerdo al tema en estudio, en la Educación Secundaria se espera que los alumnos:

- Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones.
- Emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas de diferentes tipos, para comunicar información que responda a preguntas planteadas por ellos mismos u otros.
- Elijan la forma de organización y representación (tabular o gráfica) más adecuada para comunicar información matemática.
- Identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente,

y calculen valores faltantes y porcentajes utilizando números naturales y fraccionarios como factores de proporcionalidad.

El programa de estudio para secundaria, se encuentra organizado en tres ejes temáticos:

- 1) Sentido numérico y pensamiento algebraico
- 2) Forma, espacio y medida
- 3) Manejo de la información

El primer eje engloba todo lo relacionado con las operaciones de la aritmética y el álgebra, mientras que el segundo eje nombrado Forma, Espacio y Medida, está destinado a dirigir al alumno al conocimiento de la Geometría. El eje de Manejo de la Información incorpora temas referentes a la proporcionalidad y funciones, así como temas que se encuentran en el estudio de la probabilidad y la estadística.

Cada programa destinado a cada etapa o año escolar: primero, segundo o tercer grado de secundaria, se encuentra divididos en cinco bloques y estos a la vez, organizados en cada uno de los ejes anteriores y que se subdividen en temas que contienen objetivos específicos, o bien aprendizajes esperados como lo llama el Programa (SEP, 2011). Estos aprendizajes señalan, de manera sintética, los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio de varios contenidos, incluido o no en el bloque en cuestión

Primer Grado de Secundaria

Para el análisis de los tres años escolares de secundaria, nos enfocaremos en el eje temático: Sentido número y pensamiento algebraico.

Es en primer grado de secundaria donde los educandos tienen el primer acercamiento a la noción de variable de manera implícita, ya que como se muestra en la Figura 1, en el Bloque I empiezan a realizar sucesiones que implica identificar

en un lenguaje común (etapa retórica) cuales son los datos que intervienen y determinar una expresión de manera general que modele el comportamiento de la sucesión. También, empiezan a incluir literales como números generales en las fórmulas geométricas.

Posteriormente, en el Bloque III comienzan con la resolución de problemas que empleen ecuaciones lineales (Figura 2)

Figura 1

Extracto del Programa de Estudios de Secundaria 2011 para el primer grado

Bloque I

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Convierte números fraccionarios a decimales y viceversa. • Conoce y utiliza las convenciones para representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica. • Representa sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada y viceversa.	NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN • Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa. • Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. PROBLEMAS ADITIVOS • Resolución y planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones. PATRONES Y ECUACIONES • Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común. Formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica, de números y de figuras. • Explicación del significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los que es posible operar.	FIGURAS Y CUERPOS • Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría. • Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES • Resolución de problemas de reparto proporcional. NOCIONES DE PROBABILIDAD • Identificación y práctica de juegos de azar sencillos y registro de los resultados. Elección de estrategias en función del análisis de resultados posibles.

Figura 2

Extracto del Programa de Estudios de Secundaria 2011 para el primer grado

Bloque III

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
- Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con fracciones y números decimales. - Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$, donde a, b y c son números naturales y/o decimales. - Resuelve problemas que impliquen el cálculo de cualquiera de las variables de las fórmulas para calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares. Explica la relación que existe entre el perímetro y el área de las figuras.	PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS - Resolución de problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional. - Resolución de problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional. PATRONES Y ECUACIONES - Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios.	FIGURAS Y CUERPOS - Construcción de polígonos regulares a partir de distintas informaciones (medida de un lado, del ángulo interno, ángulo central). Análisis de la relación entre los elementos de la circunferencia y el polígono inscrito en ella. MEDIDA - Resolución de problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de polígonos regulares.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES - Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas. NOCIONES DE PROBABILIDAD - Anticipación de resultados de una experiencia aleatoria, su verificación al realizar el experimento y su registro en una tabla de frecuencias. ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS - Lectura y comunicación de información mediante el uso de tablas de frecuencia absoluta y relativa.

Segundo Grado de Secundaria

Es en el eje manejo de la información en donde es abordado nuestro tema en estudio, que de acuerdo al Programa de estudios de Secundaria 2011 para el segundo grado los alumnos tienen como primer acercamiento de forma explícita al tema de algebra, en el segundo grado, en el bloque III, dentro de este eje (Figura 3)

Figura 3

Extracto del Programa de estudios de Secundaria 2011 para el segundo grado

Bloque III

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con expresiones algebraicas. • Justifica la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o polígono y utiliza esta propiedad en la resolución de problemas. • Resuelve problemas que implican usar la relación entre unidades cúbicas y unidades de capacidad. • Lee y comunica información mediante histogramas y gráficas poligonales.	PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS • Resolución de cálculos numéricos que implican usar la jerarquía de las operaciones y los paréntesis, si fuera necesario, en problemas y cálculos con números enteros, decimales y fraccionarios. • Resolución de problemas multiplicativos que impliquen el uso de expresiones algebraicas, a excepción de la división entre polinomios.	FIGURAS Y CUERPOS • Formulación de una regla que permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono. • Análisis y explicitación de las características de los polígonos que permiten cubrir el plano. MEDIDA • Relación entre el decímetro cúbico y el litro. Deducción de otras equivalencias entre unidades de volumen y capacidad para líquidos y otros materiales. Equivalencia entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y algunas unidades socialmente conocidas, como barril, quilates, quintales, etcétera.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES • Representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación. ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS • Búsqueda, organización y presentación de información en histogramas o en gráficas poligonales (de series de tiempo o de frecuencia), según el caso y análisis de la información que proporcionan. • Análisis de propiedades de la media y mediana.

Este primer acercamiento es de la forma algebraica y la manera en que es presentado el tema de función lineal es como una relación proporcional, en donde se pretende que los alumnos comprendan que la relación que existe entre las variables x y y siempre guarda una proporción, y que dicha proporción se ve afectado por la constante k . Aquí se trata de que el alumno empiece a comprender la función de forma analítica, realizando su respectiva operación, que en este caso se simplifica a una multiplicación. Tal vez el mayor propósito es acercar al alumno al concepto de función como una relación funcional.

En el Bloque IV, se pretende que el conocimiento adquirido por las actividades anteriores se vea reflejado por el análisis e interpretación de datos de

una gráfica que representa a una función lineal, como la relación proporcional entre las dos variables, dependiente e independiente; conceptos con los que el alumno empezará a familiarizarse o eso creemos que debería ocurrir en este bloque, ya que la representación gráfica es presentada en el plano cartesiano y que de acuerdo a los aprendizajes esperados: el alumno identifica, interpreta y expresa relaciones de proporcionalidad directa o inversa, en forma algebraica y gráficamente (Figura 4).

Figura 4

Extracto del Programa de estudios de Secundaria 2011 para el segundo grado

Bloque IV

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
- Representa sucesiones de números enteros a partir de una regla dada y viceversa. - Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: $ax + b = cx + d$, donde los coeficientes son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos. - Identifica, interpreta y expresa relaciones de proporcionalidad directa o inversa, algebraicamente o mediante tablas y gráficas. - Resuelve problemas que impliquen calcular, interpretar y explicitar las propiedades de la media y la mediana.	PATRONES Y ECUACIONES - Construcción de sucesiones de números enteros a partir de las reglas algebraicas que las definen. Obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética de números enteros. - Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma: $ax + b = cx + d$ y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos.	MEDIDA Caracterización de ángulos inscritos y centrales en un círculo, y análisis de sus relaciones.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES - Análisis de las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano. - Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal entre dos conjuntos de cantidades. Representación de la variación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: $y = ax + b$. ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS - Resolución de situaciones de medias ponderadas.

En este bloque el concepto de función es presentado en tres formas: como expresión algebraica, como una gráfica y como una tabla. Para que sea presentado gráficamente, el bloque da por hecho de que los alumnos realizan la tabulación de los valores, en donde observaran la relación que existe entre las variables de la ecuación, esperando de que los alumnos puedan comprender mejor la definición de una función, en donde cada valor de la variable independiente corresponde un valor a la variable dependiente.

Es en este mismo bloque en donde los alumnos comienzan a expresar las funciones lineales de la forma $y=mx+b$ por ende, empezaran a observar el efecto de las gráficas debido a los parámetros m y b .

El análisis de las gráficas de las funciones que marca el Bloque IV, no se limitan a fenómenos propios de las matemáticas, sino que, además, como tema transversal a otras materias, se incorporan problemas de la Física, la Biología, economía, etc.

El bloque V tiene el siguiente esquema que se muestra en la siguiente figura (Figura 5).

Figura 5

Extracto del Programa de estudios de Secundaria 2011 para el segundo grado

Bloque V

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Resuelve problemas que impliquen el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. • Construye figuras simétricas respecto de un eje e identifica las propiedades de la figura original que se conservan. • Resuelve problemas que impliquen determinar la medida de diversos elementos del círculo, como: ángulos inscritos y centrales, arcos de una circunferencia, sectores y coronas circulares. • Explica la relación que existe entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica.	PATRONES Y ECUACIONES • Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2×2 con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución). • Representación gráfica de un sistema de ecuaciones 2×2 con coeficientes enteros. Reconocimiento del punto de intersección de sus gráficas como la solución del sistema.	FIGURAS Y CUERPOS • Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos. MEDIDA • Cálculo de la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES • Lectura y construcción de gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos. • Análisis de los efectos al cambiar los parámetros de la función $y = mx + b$, en la gráfica correspondiente. NOCIONES DE PROBABILIDAD • Comparación de las gráficas de dos distribuciones (frecuencial y teórica) al realizar muchas veces un experimento aleatorio.

En este bloque, como podemos observar, marca que los alumnos se darán a la tarea de ser ellos quienes construyan las gráficas de las funciones lineales, a partir de datos iniciales. La construcción misma de la función de la forma $y = mx + b$ implica que los alumnos observen y comprendan los efectos que originan la pendiente m y la ordenada al origen b en una gráfica.

Tercer Grado de Secundaria

En este grado se continúa tratando el tema de función lineal, en los bloques I y III. En primer bloque se estudia las gráficas de las funciones, analizando su comportamiento y argumentado si se trata de una relación de proporcionalidad (Figura 6).

En el bloque III, se procede a leer o a construir gráficas de funciones lineales, aplicadas a situaciones o fenómenos relacionados al movimiento, como bien puede ser el cambio de velocidad de un móvil a transcurrir el tiempo, siendo este una de las actividades que con mayor frecuencia se aborda en el aula (Figura 7)

Figura 6

Extracto del Programa de estudios de Secundaria 2011 para el tercer grado.

Bloque I

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	Ejes		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	PATRONES Y ECUACIONES • Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	FIGURAS Y CUERPOS • Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades. • Expliación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES • Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad. • Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.
			NOCIONES DE PROBABILIDAD • Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes. ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS • Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

Figura 7

Extracto del Programa de estudios de Secundaria 2011 para el tercer grado.

Bloque III

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	Ejes		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado. • Resuelve problemas de congruencia y semejanza que impliquen utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	PATRONES Y ECUACIONES • Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	FIGURAS Y CUERPOS • Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas. • Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. • Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES • Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos. • Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.
			NOCIONES DE PROBABILIDAD • Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Es en el Bloque IV en donde las funciones lineales son estudiadas a mayor detalle. En este bloque, los parámetros m y b de la función $y = mx + b$ son observados como los elementos más importantes para la identificación de una gráfica con su respectiva ecuación. Aquí la pendiente m es presentada como la razón de cambio, misma definición que ayudara a los alumnos a comprender en niveles educativos posteriores, desde el punto de vista trigonométrico.

Es importante señalar que es en este bloque en donde los alumnos empiezan a relacionar la inclinación de la recta con la pendiente, es decir, comprenderán que la pendiente determina la inclinación de la recta, tratando de comparar la expresión algebraica con su respectiva gráfica. Tal conocimiento será comprendido y ajustado

mediante ejercicios en donde se modelan situaciones o fenómenos de relaciones lineales (Figura 8)

Figura 8

Extracto del Programa de estudios de Secundaria 2011 para el tercer grado.

Bloque IV

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	Ejes		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. • Resuelve problemas que impliquen el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. • Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.	PATRONES Y ECUACIONES • Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	FIGURAS Y CUERPOS • Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES • Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.
		MEDIDAS • Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. • Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. • Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS • Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

3.3.2 Revisión del programa de desarrollo de competencias 2009 del nivel medio superior del estado.

Esta revisión se centrará en el primer semestre del nivel medio superior ya que lo que se persigue con este análisis didáctico es el estudio de la transición del proceso enseñanza-aprendizaje de la noción de variable de secundaria a nivel medio superior.

La asignatura de Matemáticas I permite al estudiante utilizar distintos procedimientos algebraicos para representar relaciones entre magnitudes constantes y variables, para resolver problemas, por ejemplo, de variación de proporcional la como determinación de tiempos de trabajo en equipos de producción en línea, durabilidad de raciones alimenticias en una población, ventajas comparativas de ofertas de productos en almacenes; o bien, resolver problemas concernientes al uso óptimo de palancas para mover objetos pesados, mezclas de productos para obtener otro con un precio intermedio, obtención de costos unitarios de dos o tres mercancías; comparación del ritmo de producción de artículos; obtención de valores mínimos o máximos en relación con la producción, el costo o la ganancia por la venta de algún producto, etc.

El nivel medio superior está basado en el enfoque de competencias por lo que es necesario definir las competencias genéricas y disciplinares en las cuales se basara para el desarrollo de la unidad de aprendizaje (Figura 9)

Figura 9

Programa para el desarrollo de competencias 2009, Matemáticas I

Desarrollo de la Unidad de Enseñanza-Aprendizaje

NOMBRE DE LA ASIGNATURA	MATEMÁTICAS I
PROPÓSITO:	Analiza, construye, representa y aplica las proposiciones mediante el uso de las operaciones lógicas y los tipos de razonamientos por medio de la aplicación de la teoría de conjuntos para su correcta interpretación y emplearlas en métodos lógicos para resolver problemas
COMPETENCIAS GENÉRICAS:	• Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. • Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
COMPETENCIAS DISCIPLINARES	• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques • Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variación, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

Esta asignatura está organizada en once bloques de conocimiento, con el objeto de facilitar la formulación y/o resolución de situaciones o problemas de manera integral en cada uno, y de garantizar el desarrollo gradual y sucesivo de distintos conocimientos, habilidades, valores y actitudes, en el estudiante.

En el bloque VII es donde se define a la variable de manera explícita. El alumno tiene como resultado de aprendizaje la traducción de enunciados del lenguaje común al lenguaje algebraico en la vida diaria. El alumno describe las características de las expresiones algebraicas en problemas prácticos (Figura 10).

Figura 10

Programa para el desarrollo de competencias 2009, Matemáticas

UNIDAD DE COMPETENCIAS	EVALUACIÓN POR COMPETENCIAS			
	EVIDENCIAS			
	DESEMPEÑOS	CONOCIMIENTOS	ACTITUDES Y VALORES	PRODUCTO
VII EXPRESIÓN ALGEBRAICA	• Construye expresiones algebraicas utilizando expresiones del lenguaje común. • Construye expresiones algebraicas enteras y fraccionarias • Construye modelos matemáticos polinomiales que representan situaciones reales. • Jerarquiza los polinomios en orden ascendente y descendente.	• Reseña históricamente la evolución del algebra. • Identifica los elementos de una expresión algebraica. • Clasifica los coeficientes enteros y fraccionarios. • Clasifica las expresiones algebraicas con respecto al número de términos. • Clasifica los polinomios en función al grado relativo.	• Socializa las aplicaciones prácticas de las expresiones algebraicas. • Socializa la construcción de expresiones algebraicas enteras y fraccionarias.	• Listado de los modelos algebraicos contruidos y socializados.

Es en el bloque VIII y IX donde se realizan operaciones con expresiones algebraicas. En el bloque VIII se realizan las operaciones sencillas de suma, resta y multiplicación (Figura 11) y en el bloque IX los productos notables más complejos. Como resultado de aprendizaje el alumno identifica y desarrolla los distintos tipos de productos notables de expresiones algebraicas relacionadas en situaciones de su entorno (Figura 12)

Figura 11

Programa para el desarrollo de competencias 2009, Matemáticas I

UNIDAD DE COMPETENCIAS	EVALUACIÓN POR COMPETENCIAS			
	EVIDENCIAS			
	DESEMPEÑOS	CONOCIMIENTOS	ACTITUDES Y VALORES	PRODUCTO
VIII OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.	• Aplica las propiedades de la igualdad en expresiones algebraicas • Realiza las operaciones de suma y resta de expresiones algebraicas. • Realiza las operaciones de multiplicación y división de expresiones algebraicas	• Reconoce las propiedades de la igualdad en las expresiones algebraicas • Identifica las propiedades de la igualdad en las expresiones algebraicas • Identifica el procedimiento algebraico para la reducción de términos semejantes en las expresiones algebraicas • Identifica el procedimiento algebraico para la operación de multiplicación y división	• Participa en la elaboración de trabajos. • Socializa los trabajos elaborados por sus compañeros. • Discute de manera respetuosa y analiza los puntos de vista sobre los trabajos. • Entrega de trabajos en tiempo y forma adecuada según los lineamientos que se propongan	• Presentación de ejercicios y problemas prácticos desarrollados.

Figura 12*Programa para el desarrollo de competencias 2009, Matemáticas I*

UNIDAD DE COMPETENCIAS	EVALUACIÓN POR COMPETENCIAS			
	EVIDENCIAS			
	DESEMPEÑOS	CONOCIMIENTOS	ACTITUDES Y VALORES	PRODUCTO
IX PRODUCTOS NOTABLES.	• Aplica el proceso de multiplicación por medio de productos notables mediante ejemplos ilustrativos (esquemas). • Desarrolla el proceso de los productos notables en las expresiones algebraicas • A partir de la potencia de binomios, desarrolla la regla del binomio de Newton y el triángulo de Pascal de una serie de ejercicios propuestos. • Elabora cuadro sinópticos de ejercicios desarrollando productos notables	• A partir de la multiplicación de binomios deduce las reglas de los productos notables mediante ejemplos ilustrativos (esquemas). • Identifica y clasifica los productos notables de una serie de expresiones algebraicas • Identifica el procedimiento para desarrollar el binomio de Newton y el triángulo de Pascal.	• Participa en la elaboración de trabajos. • Socializa los trabajos elaborados. • Discute de manera respetuosa y analiza los puntos de vista sobre los trabajos. • Entrega de trabajos en tiempo y forma adecuada según los lineamientos que se propongan	• Lamina de la deducción de productos notables y de potencia de binomios. • Ejercicios sobre productos notables y potencia de binomios aplicados. • Cuadro sinóptico de ejercicios relacionados con los productos notables.

Los alumnos empiezan a utilizar métodos de factorización con expresiones algebraicas en el bloque X. Los resultados de aprendizaje de este bloque son el de identificar y clasificar las expresiones algebraicas según el número de términos y resolver problemas de factorización de diferentes expresiones algebraicas (Figura 13).

Figura 13*Programa para el desarrollo de competencias 2009, Matemáticas I*

UNIDAD DE COMPETENCIAS	EVALUACIÓN POR COMPETENCIAS			
	EVIDENCIAS			
	DESEMPEÑOS	CONOCIMIENTOS	ACTITUDES Y VALORES	PRODUCTO
X FACTORIZACIÓN.	• Construye modelos para identificar el concepto de términos semejantes. • Construye algoritmos o procedimientos para resolución de factorización de diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, suma de cubos, cuadrado perfecto y cubo perfecto. • Opera factorización con monomios. • Opera ejemplos de polinomios que contengan factores comunes. • Opera factorización de polinomios por agrupación de términos: cuadrado perfecto. • Construye un algoritmo o procedimiento para la factorización del trinomio • Opera ejemplos de completar trinomios cuadrados. • Construye un modelo de solución de problemas de polinomios aplicando la división sintética.	• Identifica el concepto de términos semejantes • Identifica los conceptos de diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado, suma de cubos, cuadrado perfecto y cubo perfecto. • Enumera dos ejemplos de diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado, suma de cubos, cuadrado perfecto y cubo perfecto. • Enlista ejemplos por equipos de trabajo, con solución de factorización de dos cuadrados perfectos y de la diferencia de cubos perfectos. • Identifica la diferencia de trinomio cuadrado perfecto y el trinomio cuadrado en general.	• Socializa los diferentes modelos de términos semejantes. • Socializa los ejemplos de diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado, suma • Compara los diferentes casos de factorización. • Socializa el procedimiento para factorización de la diferencia de dos cuadrados perfectos. • Socializa el procedimiento para factorización de la diferencia de cubos • Socializa la solución de ejemplos de trinomios cuadrados perfectos. • Socializa el procedimiento para completar trinomios cuadrados. • Socializa la solución de problemas de polinomios aplicando la división sintética	• Modelos Matemáticos • Presentación escrita de Algoritmos o procedimientos innovadores. • Proyectos de aplicación práctica. • Ejemplos de cada tipo de expresión algebraica. • Lista por equipo de ejemplos correspondientes a la solución de factorización • Cuadro sinóptico de la fundamentación de los diferentes casos de factorización.

Como podemos analizar en el primer semestre del nivel medio superior se enfatiza la construcción del concepto de variable. Utilizando métodos y

procedimientos establecidos para la resolución de problemas con expresiones algebraicas.

Aunque la mayoría de los resultados esperados puntualizan la transición del lenguaje verbal a expresiones algebraicas en la solución de problemas de la vida diaria, al momento de implementar las actividades de aprendizaje se llega a los procesos tradicionales de la solución de una serie ejercicios. Lo que no fortalece la comprensión de la noción de variable.

CAPITULO 4. DISEÑO PARA EL AULA

En este trabajo de investigación se realiza el rediseño de una situación didáctica para el aula, en donde mediante la modelación de una situación experimental se favorecerá la construcción de la noción de variable; por ello a continuación se presentará el análisis a priori, la puesta en escena de la situación didáctica, la observación y recolección de datos, finalizando con la validación de la situación didáctica.

4.1 ANALISIS A PRIORI

Para Trigueros (2009) la modelación “enfatisa la construcción, por parte de los alumnos, de sistemas conceptuales o modelos cuando trabajan con una situación en contexto que favorece el proceso de matematización” (p. 79).

Cordero (2004) considera a la modelación como una herramienta didáctica que ayudará al estudiante a construir un objeto matemático a través del recorrido de sus diferentes representaciones (tablas, graficas, ecuaciones y formulas). Esto significa que para que los alumnos de primer semestre del nivel medio superior construyan la noción de variable necesitan una situación didáctica que desarrolle las diferentes representaciones de una práctica en contexto.

Es por ello, que para el rediseño de esta situación didáctica se escogen actividades en las que se desarrollan fenómenos físicos y sociales, de tal manera que con estas actividades se pueda romper la conceptualización tradicional del discurso matemático escolar y se redirija a la construcción del conocimiento matemático de la noción de variable que provenga de la actividad humana.

La situación didáctica consta de tres acciones estratégicas que se realizan en dos sesiones: la primera sesión de dos horas y media y la segunda sesión de una hora.

Estas actividades fueron seleccionadas después de realizar un análisis del contexto en el que se implementarían y del trabajo de investigación de Gómez (2008). Al ser alumnos de primer semestre del nivel medio superior se optó por desarrollar una modelación lineal.

En estas actividades se observan las conductas, expresiones, y razonamientos de los jóvenes acerca de la noción de variable, de ahí se obtiene fundamentos que permiten exponer si los estudiantes, mediante la modelación de los fenómenos, logran construir esta noción matemática y alcanzan las competencias disciplinares matemáticas establecidas, al apropiarse de las capacidades de interpretación, simbolización y manipulación de la variable.

Es por ello que las estrategias didácticas que a continuación se describen están proyectadas en diversos ambientes como: una diagnóstico en base a preguntas exploratorias, una situación experimental de un fenómeno físico y una actividad final de análisis de casos de un fenómeno social.

4.1.1 Situación Didáctica

La situación didáctica se implementa como parte de las actividades académicas de primer semestre del nivel medio superior, es por ello que se utiliza el formato oficial de Planeación Didáctica que la Coordinación Académica de Educación Media Superior [CAEMS] proporciona (CAEMS, s.f.) en la cual se establece la secuencia de aprendizaje y dentro de ella la situación didáctica rediseñada.

AMBIENTE DE APRENDIZAJE	
SECUENCIA DE APRENDIZAJE	
PROPÓSITO Favorecer el proceso de construcción de la noción de variable mediante la modelación con alumnos del nivel medio superior	
COMPETENCIAS GENÉRICAS	Piensa crítica y reflexivamente 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. Atributos: • Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. • Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos. • Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez. • Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas. • Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS, EXTENDIDAS O PROFESIONALES BÁSICAS	1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
EJE PROBLEMATIZADOR	¿Qué herramientas permiten a los alumnos fortalecer el proceso de construcción de la noción de variable?

ESTRATEGIA DIDÁCTICA	ACCIONES ESTRATÉGICAS		SABERES A DESARROLLAR (CONCEPTOS HABILIDADES, ACTITUDES Y VALORES) DEL CAMPO DISCIPLINAR
Construcción de la variable mediante la modelación	APERTURA Preguntas Exploratorias - Indagar los conocimientos previos de variable y modelo matemático, a través de preguntas. - Anotar en la hoja de actividades las respuestas de cada pregunta.		Conceptos - Variable - Modelo matemático Habilidades - Capacidad de síntesis. Actitudes y Valores - Respeto - Tolerancia
	RECURSOS DIDÁCTICOS	ESCENARIOS	TIEMPO
	Lápiz Hoja de actividades	Aula	30 min.
	ACCIONES ESTRATÉGICAS		SABERES A DESARROLLAR (CONCEPTOS HABILIDADES, ACTITUDES Y VALORES) DEL CAMPO DISCIPLINAR
	DESARROLLO Situación Experimental - Realizar la situación experimental en equipos, del tiempo de efervescencia de una pastilla en refresco de soda en coordinación con el facilitador de la actividad. - Anotar las observaciones de la situación experimental en la hoja de actividades. - Realizar las actividades propuestas para desarrollar el modelo matemático de la situación experimental. - Emitir conclusiones en plenaria de la situación experimental y el desarrollo del modelo matemático.		Conceptos - Variable - Modelo matemático - Gráficas Habilidades - Capacidad de análisis. Actitudes y Valores - Respeto - Tolerancia - Trabajo colaborativo
	RECURSOS DIDÁCTICOS	ESCENARIOS	TIEMPO
	Lápiz Hoja de actividades Calculadora 3 vasos desechables 3 pastillas efervescentes Refresco de soda Cronometro Regla	Espacios físicos del plantel	2 horas

Construcción de la variable mediante la modelación	ACCIONES ESTRATÉGICAS		SABERES A DESARROLLAR (CONCEPTOS HABILIDADES, ACTITUDES Y VALORES) DEL CAMPO DISCIPLINAR
	CIERRE Análisis de Casos de un Fenómeno Social. - Identificar en equipos el fenómeno social propuesto en la hoja de actividades, en base a la actividad previa. - Observar y analizar el fenómeno social para relacionarlo a partir de la ruta establecida en la actividad anterior con los actores involucrados. - Realizar las actividades propuestas para desarrollar el modelo matemático del fenómeno social. - Emitir conclusiones en plenaria de la actividad y el desarrollo del modelo matemático. - Socializar los logros alcanzados en las dos actividades.		Conceptos - Variable - Modelo matemático - Gráficas Habilidades - Capacidad de análisis. Actitudes y Valores - Respeto - Tolerancia - Honestidad - Trabajo colaborativo
	RECURSOS DIDÁCTICOS	ESCENARIOS	TIEMPO
	Lápiz Hoja de actividades Calculadora Regla	Aula	1 hora

4.1.2 Preguntas Exploratorias

Objetivo:

Identificar los conocimientos previos de la noción de variable y modelo matemático.

Esta acción estratégica es de apertura, ya que se les pide a los educandos que de forma individual respondan las preguntas detonantes y de esta manera identifican los conocimientos que preceden de la noción de variable y de modelo matemático.

Actividad Implementada

ACTIVIDAD I

Nombre del alumno: _____ Semestre: _____

Cuestionario

I. Responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es para ti el término variable?

2. ¿Cuáles son los usos que le puede dar a una variable?

3. ¿Qué es para ti un modelo matemático?

4. ¿Cuáles son los usos que le puedes dar a un modelo matemático?

4.1.3 Situación Experimental

Objetivo:

- Analizar el fenómeno de cambio del tiempo en que se deshace una pastilla efervescente con respecto a la cantidad de soda.
- Determinar la variable.
- Determinar la variación en el experimento
- Modelar matemáticamente la situación experimental.
- Construir una expresión algebraica que modele la situación experimental.

Esta acción estratégica de desarrollo se realiza en equipos de 4 personas, por el número de alumnos que asistieron en el día, y se les solicita una participación proactiva y trabajo en equipo de manera colaborativa. Por lo que se nombró un representante del equipo que es el que moderaría la situación experimental, otro integrante realizaría el experimento, otro tomaría el tiempo con el cronometro y otro realizaría las anotaciones.

Primeramente, se les pide a los educandos que observen detenidamente lo que va a suceder en los tres casos de la situación experimental: el tiempo de efervescencia de la pastilla en el primer vaso con una cucharada de soda, en el segundo vaso con dos cucharadas de soda y en el tercer vaso con tres cucharadas de soda.

El encargado de registrar los datos del tiempo con un cronometro, lo realiza desde que la pastilla efervescente cae al refresco de soda hasta que se desintegra por completo. Esto se repite en los tres casos, antes mencionados.

Una vez realizado el experimento en los tres casos, se tabulará los datos obtenidos del registro de tiempo.

El educando analizará magnitudes físicas y graficará los datos registrados. Analizará e identificará las variables involucradas en la situación experimental, así como analizará los comportamientos de las mismas.

Para posteriormente encontrar un modelo matemático que le permita describir o predecir lo que pasará en determinada situación.

Actividad Implementada

ACTIVIDAD II

Integrantes del equipo: _____ Semestre: _____

Materiales

3 vasos desechables

1 refresco de soda

1 cuchara Medidora

3 pastillas efervescentes

1 cronometro

Hojas cuadriculadas

Regla

Instrucciones

1. Forma equipo de acuerdo al número de integrantes que se te indique.
2. En el primer vaso coloca una taza medidora de refresco de soda.
3. Coloca una pastilla efervescente en el vaso y con el cronometro toma el tiempo en el que la pastilla se deshace, anota los datos observados.
4. En el segundo vaso coloca dos tazas medidoras de refresco de soda y repite el paso número 3.

5. En el tercer vaso coloca tres tazas medidoras de refresco de soda y repite el paso número 3.
6. ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?
7. En base a lo analizado de las magnitudes físicas que intervienen y lo observado en la situación experimental, anota la información en la tabla de datos siguiente.

8. En la hoja cuadrículada representa gráficamente las magnitudes observadas.
9. ¿Qué sucede mientras se coloca más refresco de soda en los vasos? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?
10. Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, ¿Qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes?
11. Con lo observado en la gráfica, construye una expresión algebraica que modele la situación experimental.
12. Determina el tiempo en el que la pastilla se va a deshacer si el vaso está lleno con 9 tazas medidoras.
13. Determina el tiempo en el que la pastilla se va a deshacer si el vaso está lleno con 24 tazas medidoras.

4.1.4 Análisis de Casos de un Fenómeno Social

Objetivo

- Analizar el fenómeno de cambio del sueldo por día, dependiendo de la ganancia obtenida por número de artículos vendidos.
- Determinar la variable.
- Determinar la variación en el fenómeno.
- Modelar matemáticamente el fenómeno social.
- Construir una expresión algebraica que modele el análisis de casos.

Esta acción estratégica de cierre se realiza en los mismos equipos de 4 personas que se formaron en la situación experimental, por lo que nuevamente se les solicito una participación proactiva y trabajo en equipo de manera colaborativa.

En esta acción se les proporciona la actividad y se les da el tiempo de una hora para que la realicen sin apoyo, ni guía del facilitador de la actividad. El facilitador de la actividad, observa las conductas, expresiones y razonamiento de los educandos durante el análisis del caso.

Primeramente, el educando analiza el fenómeno social del salario diario que se obtiene del salario mínimo más las comisiones diarias.

Identifica las variables y la variación en el caso, registrando a través de una tabla los datos obtenidos, para posteriormente desarrollar una gráfica que muestre el comportamiento del fenómeno.

Posteriormente de analizar el comportamiento, el educando desarrolla un modelo matemático que le permita describir o predecir lo que pasará en determinada situación.

Actividad Implementada**ACTIVIDAD III**

Integrantes del equipo: _____ Semestre: _____

- I. Analiza el siguiente caso y realiza las actividades que posteriormente se plantean.

La compañía para la que trabajas te paga un sueldo fijo que corresponde al salario mínimo por día, más \$20 de comisión por cada artículo que vendas. Imagina que el primer día vendes 1 artículo, el segundo 3, el tercero 5 y así sucesivamente.

1. Identifica cuales serían las magnitudes que varían en el problema.
2. ¿Cuánto se le pagaría el primer y segundo día?
3. Completa en una tabla el salario diario obtenido durante 6 días.
4. Representa gráficamente las magnitudes observadas
5. Escribe la expresión que utilizaste para obtener el salario del 5 y 6 día.
6. De acuerdo a lo escrito anteriormente, ¿cuál sería el cambio que tendría la expresión si no supiera cuantos artículos vendo cada día?
7. Con lo observado, construye una expresión algebraica que modele la relación de las magnitudes que varían en el problema.
8. ¿Cuánto ganarías al finalizar el mes? (considerando 30 días para el mes).

4.2 IMPLEMENTACIÓN DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

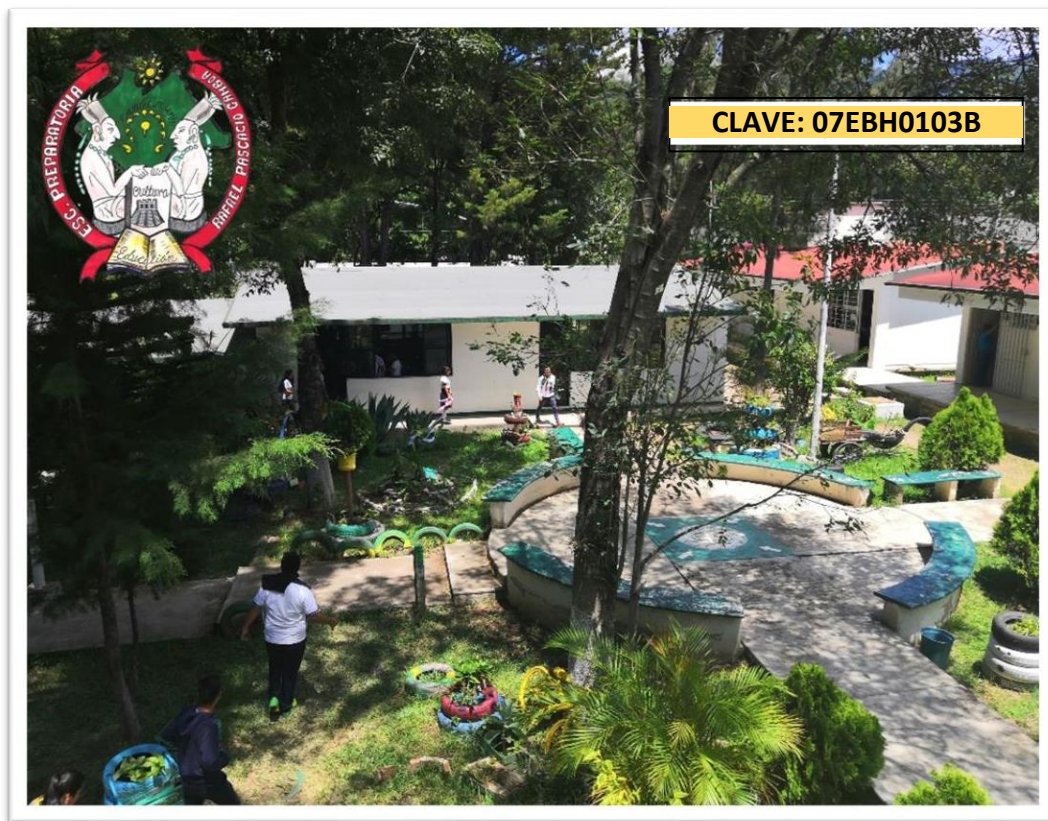
La implementación de la situación rediseñada está compuesta de tres aspectos: la puesta en escena, los participantes y la dinámica para llevar a cabo la situación. A continuación, se da una explicación de cada uno de estos aspectos.

4.2.1 Puesta en escena

La situación didáctica se implementó en la Escuela Preparatoria Rafael Pascacio Gamboa ubicada en la ciudad de Bochil, Chiapas. Las acciones estratégicas fueron realizadas en el espacio físico del aula en el plantel (Figura 14).

Figura 14

Lugar de la Puesta en Escena



4.2.2 Participantes

Los participantes que actúan en esta implementación son educandos que cursan el primer semestre de preparatoria ya que se pretende favorecer la construcción de la noción de variable, para que puedan ser la base del desarrollo del pensamiento algebraico durante toda su trayectoria académica en el nivel medio superior.

Son un total de 18 participantes con diferentes niveles de aprovechamiento, quienes realizaron las preguntas exploratorias de manera individual (Figura 15) y en equipo de 4 integrantes la situación experimental y el análisis de casos (Figura 16 y 17).

Figura 15

Actividad de Preguntas Exploratorias



Figura 16

Actividad de Situación Experimental



Figura 17

Actividad de Análisis de Casos de un Fenómeno Social



4.2.3 Dinámica

Antes de iniciar la situación didáctica se les explicó a los educandos en lo que consistía la situación didáctica y de cuantas sesiones constaría. Se les comentó que la situación era una estrategia didáctica que consistía de tres acciones estratégicas y que estas se les proporcionarían cuando empezara cada sesión.

Se organizaron a los integrantes del equipo, designándoles una función a cada uno en la situación experimental, para que de esta manera realizaran un trabajo colaborativo.

Asimismo, se estuvo en todo momento al pendiente de cualquier reacción, comentario o sugerencia de los alumnos, cuando éstos se encuentren resolviendo las actividades; puesto que todo detalle o aspecto que se vaya desarrollando será importante para los análisis posteriores.

4.3 ANALISIS A POSTERIORI

Los resultados obtenidos de la implementación de las tres actividades son los siguientes:

4.3.1 Actividad de Inicio. Preguntas Exploratorias

Las cuatro preguntas se realizaron de manera individual a los 18 educandos. Las preguntas exploratorias se presentaron como una acción inicial diagnóstico de los conocimientos que le preceden de la noción de variable y modelo matemático. Las respuestas se presentan en las Tablas 1, 2, 3 y 4:

Tabla 1*Pregunta No. 1. ¿Qué es para ti el término de variable?*

No. ALUMNO	RESPUESTAS
1.	Diferentes tipos de cosas.
2.	Son cosas diferentes.
3.	Son cosas diferentes o que son distintas.
4.	Puede ser como un segundo resultado de una operación.
5.	Es un conjunto de varios números o personas.
6.	Puede ser un término de números o variables.
7.	Dos cantidades o número diferentes que se utilizan en problemas (x o y).
8.	La variable de cualquier número es 0. Algo semejante o parecido a otra cosa.
9.	Similitud de números. Diferentes formas de algún objeto, modelo o cosa. Alternativos o segundas opciones.
10.	Varios, algo distinto o muchas cosas, pero que tenga similitud a eso mismo o ese algo.
11.	Números o actividades diferentes.
12.	Hacer algún ejercicio o una actividad tomando diferentes puntos de vista o diversas actividades.
13.	La palabra variable tiene el termino de muchos modelos por ejemplo los colores tienen varios.
14.	Es donde hay un grupo de personas o cualquier otra cosa pero que sea bastante.
15.	Son los conocimientos que nos dan a conocer sobre las operaciones de la materia para comprender mejor las actividades.
16.	Un tipo de problemas en las matemáticas.
17.	Algo que se reparte en algún aspecto o forma.
18.	No respondió.

Tabla 2*Pregunta No. 2. ¿Cuáles son los usos que le puede dar a una variable?*

No. ALUMNO	RESPUESTAS
1.	Leer, escribir.
2.	Como para comparar cosas.
3.	Para decir algo que es diferente o que puede variar el resultado.
4.	Por si no estás seguro en el resultado pones 2.
5.	En cuestión numérica se puede utilizar en varias fracciones.

6.	Puede ser los números que existen entre ellos.
7.	Resolver problemas matemáticos.
8.	Para cualquier tipo de operación matemática (suma, resta, multiplicación, división).
9.	Para operaciones matemáticas, físicas y químicas. Para uso cotidiano. Para alternativas (cualquier cosa).
10.	Matemáticas - Operaciones. Vida Cotidiana – Refiriéndose a cosas, objetos o la palabra.
11.	Pues aprender sobre ellos, variarlas por ser diferentes.
12.	Para hacer una mejor comprensión de algo o algún tema.
13.	Los usos que se pueden dar son distinguirse entre varias cosas.
14.	Un uso adecuado para los demás y ser mejores.
15.	Para que nos facilite un poco las actividades y para comprender mejor las cosas.
16.	En las matemáticas.
17.	Repartir o dar algo en algún aspecto.
18.	No respondió.

Tabla 3

Pregunta No. 3. ¿Qué es para ti un modelo matemático?

No. ALUMNO	RESPUESTAS
1.	Números, operaciones.
2.	Son tipos de actividades.
3.	Son tipos de actividades que pueden resolverse.
4.	Es como un ejemplo a seguir para poder resolver ejercicios matemáticos.
5.	Una secuencia de números.
6.	Tipo de modelos que existen de un número entre sí.
7.	Un ejemplo de cómo se resuelve algo o como se desarrolla.
8.	Alguna representación o forma de ilustrar un concepto matemático.
9.	Podría ser algún gráfico de números. Alguna investigación o análisis (matemático).
10.	Una estructura de operaciones, de códigos, etc.
11.	Es una materia de buscar la lógica del tema y aprender sobre ellos.
12.	Es una forma más práctica de trabajo.
13.	Es como los ejercicios que vamos aprendiendo cada semestre, que son variables.
14.	Es donde hay muchas cosas que no conocemos y le podríamos decir que todo eso se está modelando.

15.	Son aquellos que se resuelve un problema matemático o las operaciones de una actividad.
16.	Representar algo matemático.
17.	Alguna figura sobre algún tema sobre matemáticas.
18.	No respondió.

Tabla 4

Pregunta No. 4. ¿Cuáles son los usos que le puedes dar a un modelo matemático?

No. ALUMNO	RESPUESTAS
1.	El resolver y entender.
2.	Para sacar resultados de una operación.
3.	Para dar clases o poner un ejemplo de algo.
4.	Para poder realizar a base de esos otros problemas.
5.	Fracciones en general.
6.	El número que existen de un modelo matemáticos y los números que se da y los que se divide.
7.	Analizarlo para poder comprender un tema en específico.
8.	Representar, demostrar, enseñar y aprender algún concepto matemático.
9.	En operaciones, en inventos, en la medicina, en algún uso cotidiano.
10.	Creo que principalmente algo que contenga matemáticas o números.
11.	Sacar resultados grandes, me ayuda a resolver problemas con ciertas cantidades y es de mucha ayuda para mí.
12.	Para realizar actividades con mayor facilidad y más practica y eficaz.
13.	Se pueden dar los usos en empresas, hospitales y tiendas o ya sea en la vida cotidiana.
14.	Que sea algo más adecuado para poder entenderlos mejor y que con eso se nos facilite el aprendizaje.
15.	Para que se nos facilite un poco y saber a resolver más rápido de lo que nos dan.
16.	En la vida diaria.
17.	Saber más sobre algún tema o materia.
18.	No respondió.

Al analizar las respuestas de las cuatro preguntas exploratorias podemos mencionar lo siguiente:

- En la pregunta 1 y 2 se identifica que los 18 educandos tienen una escasa noción de variable y de los usos que esta tenga.
- Tres educandos tienen una ligera conceptualización de lo que es un modelo matemático y los usos que este tiene.

4.3.2 Actividad de Desarrollo. Situación Experimental

18 educandos que se presentaron ese día, por lo que se realizaron un total de cuatro equipos, dos equipos de cuatro personas mí y dos equipos de cinco personas. A continuación, en la Tabla 5, se muestran las respuestas de las preguntas claves de la situación experimental para la construcción de la noción de variable mediante el modelo matemático.

Tabla 5
Respuestas de situación experimental

<i>EQUIPO</i>	RESPUESTA
	¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?
1	Tiempo y variedad de líquido. Reacciona a cada diferente cantidad de líquido.
2	Entre más líquido, más espuma, se deshace más rápido y depende del tiempo y el líquido.
3	La soda, ya que vamos aumentando la cantidad
4	Vaso (cucharadas) y tiempo

<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> Anotar la información la tabla de datos
1	Anotan los datos de manera correcta.
2	Anotan los datos de manera correcta.
3	Anotan los datos de manera correcta.
4	Anotan los datos de manera correcta.
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> Graficar las magnitudes
1	No realizaron la gráfica.
2	Realizan la gráfica y les da una recta. (Eje X Tiempo, Eje Y Cantidad).
3	Realizan la gráfica y les da una recta. (Eje X Cantidad, Eje Y Tiempo).
4	Realizan la gráfica y les da una línea un poco curvada, por la aproximación de la experimentación. (Eje X Cucharadas, Eje Y Tiempo).
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> ¿Qué sucede mientras se coloca más refresco de soda en los vasos? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?
1	La pastilla se disuelve mucho más rápido cuando tiene mucho más líquido.
2	Aumenta el 50% de espuma y se deshace, y el tiempo depende de la cantidad.
3	La pastilla se disuelve más rápido, entre más soda se le agregue más rápido desaparece la pastilla.
4	Aumenta su tamaño y disminuye el tiempo en el que la pastilla se deshace. Tiempo y cantidad varían y el tiempo depende de la cantidad

<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> ¿Qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes?
1	Que todo no se disuelve de la misma manera.
2	Que el tiempo depende de la cantidad.
3	Que la pastilla depende la cantidad de soda que se le agregue.
4	El tiempo vario de la cantidad de líquido que se ponga.
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> Construye una expresión algebraica que modele la situación experimental
1	Disminuye el tiempo entre más cantidad de líquido.
2	Magnitud – tiempo = tiempo final
3	La cantidad se presentaría con y y el tiempo con x $y(x-23) = x$
4	$y=0.08(x-1)-2.14$
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> Determina el tiempo en el que la pastilla se va a deshacer si el vaso está lleno con 9 tazas medidoras.
1	1 minuto. (obtienen los datos al tanteo).
2	No lo obtienen.
3	No lo obtienen.
4	1.5 min y lo obtienen a la expresión algebraica que construyeron.
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> Determina el tiempo en el que la pastilla se va a deshacer si el vaso está lleno con 24 tazas medidoras.
1	23 segundos. (obtienen los datos al tanteo).
2	No lo obtienen.
3	No lo obtienen.

4	0.3 min y lo obtienen de la expresión algebraica que construyeron.
---	--

Los datos de la experimentación varían debido a que el tamaño de las cucharas que se utilizaron cambia en cada equipo.

La participación proactiva y colaborativa fue más compleja en los equipos de cinco personas, ya que al distribuirse las funciones: representante del equipo, el que realizaba la experimentación, el que tomaba los registros del cronometro y el que realizaba las anotaciones, quedaba un educando de observador el cual se sumó con dificultad a la realización de la actividad.

Al realizar la situación experimental, se les complica seguir el orden de las instrucciones, ya que las saltean, realizando las que para ellos son más fáciles de realizar. Esto provocó que no pudieran realizar la modelación de la situación y así encontrar la expresión algebraica. Por lo que se les asesoro para seguir el orden de las instrucciones.

De acuerdo a las respuestas dadas se puede deducir lo siguiente:

- Los cuatro equipos identificaron las variables como magnitudes físicas en la situación experimental.
- Los cuatro equipos anotaron correctamente los datos en una tabla.
- Tres equipos realizaron la gráfica de la situación experimental de manera correcta.
- Los cuatro equipos lograron identificar el comportamiento de las variables en la situación experimental. De manera verbal expresaron

que variable era la dependiente y cual la independiente: el tiempo de deshacerse la pastilla dependía de la cantidad de soda en el vaso.

- En la hoja de actividades no se solicitaba de manera directa, encontrar la variación del fenómeno, pero al momento de implementar la estrategia y observando las dificultades que presentaban los equipos, se hizo pertinente preguntárselos de manera verbal y a partir de que lo identificaran seguir realizando la modelación.
- Al finalizar la actividad, solo un equipo pudo encontrar la expresión algebraica que modela la situación experimental y así poder predecir el tiempo en deshacerse la pastilla con n número de cucharadas de soda.

4.3.3 Actividad de Cierre. Análisis de Casos de un Fenómeno Social

Para realizar esta acción estratégica se repitieron los equipos de la situación experimental. Los resultados se presentan en la Tabla 6.

Tabla 6

Respuestas de Análisis de Casos

<i>EQUIPO</i>	RESPUESTA
	Identifica cuales serían las magnitudes que varían en el problema.
1	El precio y la cantidad de artículos
2	No identifica
3	No identifica
4	Cantidad y tiempo

<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> ¿Cuánto se le pagaría el primer y segundo día?
1	a) $1 \left[\frac{x}{30} + (20 \cdot y) \right] = x + 20$ b) $2 \left[\frac{x}{30} + (20 \cdot y) \right] = x + 60$ Salario mínimo = x
2	En el primer día el sueldo aumento 20 pesos y el segundo día aumento 40 pesos
3	Día 1 = 120 Día 2 = 160
4	Z (Salario comisión) y las comisiones Y (Salario de un día) + 60 = z
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> Completa en una tabla el salario diario obtenido durante 6 días.
1	Anotan los datos de manera correcta en la tabla, aumentando los 20 pesos por articulo vendido.
2	Anotan la comisión que va cambiando por día: Día 1 20, Día 2 40, Día 3 60, Día 4 80, Día 5 100, Día 6 120
3	Anotan los datos de manera correcta en la tabla, aumentando los 20 pesos por articulo vendido. Consideran como salario mínimo diario de \$100
4	Anotan los datos de manera correcta en la tabla, aumentando los 20 pesos por articulo vendido.
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> Grafica las magnitudes
1	No realizan la gráfica
2	Realizan la gráfica de manera correcta, obteniendo una línea. Toman al Eje X el número de artículo que aumenta por día y el Eje Y la comisión que va aumentando por el número de artículos

3	Realizan la gráfica tomando en cuenta Eje X el número de artículos y el Eje Y el día. Conforme va vendiendo más artículos aumenta el sueldo
4	Realizan la gráfica de manera correcta, obteniendo una línea.
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> Escribe la expresión que utilizaste para obtener el salario del 5 y 6 día.
1	a) $5 \left[\frac{x}{30} + (20 \cdot y) \right] = Resp.$ b) $6 \left[\frac{x}{30} + (20 \cdot y) \right] = Resp.$ Salario mínimo = x
2	140 y 180
3	Por día le paga \$100, por artículo
4	$Y \text{ (Salario de un día)} + \overbrace{x (20)}^{180} = Z \text{ (salario comisión)}$ $Y \text{ (Salario de un día)} + \overbrace{x (20)}^{220} = Z \text{ (salario comisión)}$
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> ¿Cuál sería el cambio que tendría la expresión si no supiera cuantos artículos vendo cada día?
1	Sumar 2 artículos a los artículos que se vendieron el día anterior.
2	$X + X = X$
3	No respondieron
4	$Y + X (20) = Z$
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> Construye una expresión algebraica que modele la relación de las magnitudes que varían en el problema.
1	No respondieron
2	Artículo x 20 = X

3	No respondieron
4	$Y+X(20) = Z$
<i>EQUIPO</i>	<i>RESPUESTA</i> ¿Cuánto ganarías al finalizar el mes?
1	$X+(20.y) = X + 600$
2	600
3	3000
4	$Y(30) +(X)(20) =Z$

Esta actividad la realizaron en los equipos establecidos en la acción anterior, y la resolvieron solos, sin la guía del facilitador de la actividad.

Con los resultados descritos podemos identificar que:

- Los equipos no identificaron a las variables de manera escrita, pero en su dialogo con los integrantes del equipo si reconocen las cantidades que varían en el caso.
- Dos equipos lograron encontrar el salario en el día 1 y 2. Uno de ellos colocó la incógnita en el salario mínimo (porque no sabían) y el otro le dio valor de \$100 pesos al salario mínimo.
- Los cuatro equipos anotaron los datos correctamente en una tabla.
- Tres equipos realizaron la gráfica del fenómeno social de manera correcta.
- Aunque en la tabla colocan los datos correctamente, solo un equipo escribe la expresión que utilizaron para obtener el salario de 5 y 6 día. Se puede ver que se confunden, ya que no se solicita la expresión algebraica, si no lo que ellos hicieron para encontrar los datos.

- Un equipo identifica el cambio que tendría que tener la expresión si no se supiera cuantos artículos se venden en el día. Pero se observa que la variación no la consideran en la expresión.
- Por lo tanto, ningún equipo encuentra la expresión algebraica correcta que modele la relación de las magnitudes que varían en el problema.
- Solo un equipo escribe la expresión algebraica para encontrar cuanto ganaría en un mes, pero la variable X que es la que indica el número de artículos que corresponden a ese día, no está definida el cómo se obtiene.

CAPITULO 5. VALIDACIÓN

La validación se lleva a cabo al confrontar los objetivos esperados que se elaboraron en el análisis a priori y los resultados obtenidos en el análisis a posteriori. Los resultados se presentan en las siguientes Tablas que contienen esta confrontación para una lectura más cómoda.

CONFRONTACIÓN DE ANALISIS A PRIORI – ANALISIS A POSTERIORI	
Actividad De Inicio: Preguntas Exploratorias	
Análisis a priori	Análisis a posteriori
Objetivo: Identificar los conocimientos previos de la noción de variable y modelo matemático.	Resultados: - En la pregunta 1 y 2 se identifica que los 18 educandos tienen una escasa noción de variable y de los usos que esta tenga. - Tres educandos tienen una ligera conceptualización de lo que es un modelo matemático y los usos que este tiene.
CONFRONTACIÓN Los resultados de las preguntas exploratorias sugieren que los educandos de primer semestre del nivel medio superior, no tienen una conceptualización de la variable, ni de los usos que esta tiene. Así también, carecen en su mayoría de la conceptualización de modelo matemático y de sus usos.	

CONFRONTACIÓN DE ANALISIS A PRIORI – ANALISIS A POSTERIORI	
Actividad De Desarrollo: Situación experimental	
Análisis a priori	Análisis a posteriori
Objetivo: • Analizar el fenómeno de cambio del tiempo en que se deshace una pastilla efervescente con respecto a la cantidad de soda. • Determinar la variable. • Determinar la variación en el experimento • Modelar matemáticamente la situación experimental. • Construir una expresión algebraica que modele la situación experimental.	Resultados: • Los cuatro equipos identificaron las variables como magnitudes físicas en la situación experimental. • Los cuatro equipos anotaron correctamente los datos en una tabla. • Tres equipos realizaron la gráfica de la situación experimental de manera correcta. • Los cuatro equipos lograron identificar el comportamiento de las variables en la situación experimental. De manera verbal expresaron que variable era la dependiente y cual la independiente: el tiempo de deshacerse la pastilla dependía de la cantidad de soda en el vaso. • En la hoja de actividades no se solicitaba de manera directa,

	encontrar la variación del fenómeno, pero al momento de implementar la estrategia y observando las dificultades que presentaban los equipos, se hizo pertinente preguntárselos de manera verbal y a partir de que lo identificaran seguir realizando la modelación. • Al finalizar la actividad, solo un equipo pudo encontrar la expresión algebraica que modela la situación experimental y así poder predecir el tiempo en deshacerse la pastilla con n número de cucharadas de soda.
CONFRONTACIÓN Los educandos analizaron la situación experimental mediante la modelación del fenómeno. De esta manera, determinaron las variables involucradas, la variación de la situación experimental y modelaron el fenómeno a través de tablas y graficas.	

Determinaron mediante una palabra que lo identificara, a las magnitudes que intervienen en el fenómeno (variables) y a su variación de manera verbal.

La mayoría de los equipos modelaron la situación mediante tabla y gráficas, con la orientación y guía del facilitador, pero se identifica un área de oportunidad en la habilidad para sistematizar datos y representar en gráficas.

Mediante estas acciones, un equipo logró construir una expresión algebraica que modelara el fenómeno y así definir las variables que intervienen e interpretar su comportamiento. Esto significa que lograron alcanzar la etapa sincopada de la epistemología de la noción de variable.

Los otros equipos no lograron hacer la transición de lo verbal a lo simbólico, lo que nos indica que los educandos se encuentran en la etapa retórica de la epistemología de la noción de variable. Es por esta razón que al no poder identificar la variable como símbolo los alumnos no construyeron el modelo del fenómeno mediante la expresión algebraica.

Estos resultados obtenidos sugieren que se pueden modificar las preguntas de la actividad implementada, de tal manera que se pueda ir guiando de una manera más precisa a los educandos para modelar la situación experimental y así puedan identificar fácilmente las variables como símbolo.

CONFRONTACIÓN DE ANALISIS A PRIORI – ANALISIS A POSTERIORI	
Actividad De Cierre: Análisis de Casos de un Fenómeno Social	
Análisis a priori	Análisis a posteriori
Objetivo: • Analizar el fenómeno de cambio del sueldo por día, dependiendo de la ganancia obtenida por número de artículos vendidos. • Determinar la variable. • Determinar la variación en el fenómeno. • Modelar matemáticamente el fenómeno social. • Construir una expresión algebraica que modele el análisis de casos.	• Los equipos no identificaron a las variables de manera escrita, pero en su dialogo con los integrantes del equipo si reconocen las cantidades que varían en el caso. • Dos equipos lograron encontrar el salario en el día 1 y 2. Uno de ellos coloco la incógnita en el salario mínimo (porque no sabían) y el otro le dio valor de \$100 pesos al salario mínimo. • Los cuatro equipos anotaron los datos correctamente en una tabla. • Tres equipos realizaron la gráfica del fenómeno social de manera correcta. • Aunque en la tabla colocan los datos correctamente, solo un equipo escribe la expresión que utilizaron para obtener el salario de 5 y 6 día. Se puede ver que se

	confunden, ya que no se solicita la expresión algebraica, si no lo que ellos hicieron para encontrar los datos. • Un equipo identifica el cambio que tendría que tener la expresión si no se supiera cuantos artículos se venden en el día. Pero se observa que la variación no la consideran en la expresión. • Por lo tanto, ningún equipo encuentra la expresión algebraica correcta que modele la relación de las magnitudes que varían en el problema. • Solo un equipo escribe la expresión algebraica para encontrar cuanto ganaría en un mes, pero la variable X que es la que indica el número de artículos que corresponden a ese día, no está definida el cómo se obtiene.
--	---

CONFRONTACIÓN

Los educandos analizaron el fenómeno social mediante su modelación, sin la guía o asesoría del facilitador. De esta manera, determinaron las variables involucradas, la variación del caso y modelaron el fenómeno a través de tablas y graficas.

Identificaron a las variables y a su variación solo de manera verbal; la mayoría de los equipos modelaron el fenómeno social mediante tablas y gráficas.

Mediante estas acciones, un equipo logró construir una expresión algebraica correcta, que modelara el fenómeno y así definir las variables que intervienen e interpretar su comportamiento. Y también, aunque desconocían el salario mínimo, construyeron una expresión algebraica que pudiera determinar el salario de 30 días más las comisiones correspondientes. Esto significa que lograron consolidarse en la etapa sincopada de la epistemología de la noción de variable.

Los otros equipos, aunque no lograron construir la expresión algebraica, alcanzaron un análisis profundo del fenómeno de manera verbal, el cómo empleaban a las variables mediante operaciones para poder obtener el sueldo de cada día.

No obstante, al no hacer la transición de lo verbal a lo simbólico, esto nos indica que los educandos se encuentran en la etapa retórica de la epistemología de la noción de variable. Es por esta razón que al no poder identificar la variable como símbolo los educandos no construyeron el modelo del fenómeno mediante la expresión algebraica.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos de la situación experimental y el análisis de caso de un fenómeno social nos demuestran como se construye la noción de variable mediante la modelación en alumnos del nivel medio superior, esto partiendo de las preguntas de investigación que se plantearon al inicio de este trabajo: ¿Cuál es el papel de la modelación en el proceso de la construcción de la variable? y ¿Qué situación didáctica permitirá a los educandos desarrollar el proceso de la construcción de la noción de variable?

La modelización traslada la situación, elemento o fenómeno en cuestión, a una forma más simple y manejable. Es aquí, donde se incorporan los diversos conocimientos matemáticos en sus diferentes campos para reflejar las propiedades generales de lo modelado. Y mediante esta incorporación de conocimientos matemáticos, los educandos consolidan o construyen nuevas nociones, en el caso de este trabajo de investigación se refiere a la noción de variable.

Cuando se logran construir modelos matemáticos, se alcanza a comprender todo fenómeno de cualquier naturaleza, se puede interpretarlo y hasta modificarlo. Para esto se requiere de una actitud dispuesta a observar, analizar y reflexionar ante cualquier situación y, además de ello tener conocimientos en el campo donde se realiza el proceso.

Para poder favorecer la construcción de la noción de variable mediante la modelación, se rediseño una situación didáctica con base al análisis realizado de investigaciones relacionadas a la problemática central de este trabajo, y de los cuales se retomaron dos investigaciones la de Gómez (2008) y González (2012).

En estas actividades se observan las conductas, expresiones, y razonamientos de los jóvenes, que, mediante la modelación de fenómenos físicos y sociales, tienen acerca de la comprensión y aplicación de la noción de variable.

Esto significa que, al modelar las situaciones presentadas, los estudiantes del nivel medio superior logran identificar en diversos contextos a la variable, interpretan su comportamiento y tienen menos dificultad al trabajar con ellas. Es por ello que la mayoría de los alumnos del nivel medio superior participantes en esta investigación logran apropiarse de las capacidades de identificación, interpretación y simbolización de la variable, pero algunos de ellos todavía presentan dificultades en la manipulación de la variable.

Con base a la epistemología analizada de la noción de variable, los educandos alcanzan la construcción en la etapa retórica y sincopada del álgebra, donde identifican de manera verbal las variables de cada actividad para posteriormente hacer la transición a modelos de tablas o gráficos donde utilizan una expresión abreviada utilizando en algunas situaciones palabras, letras o literales para representarlas. Pero presentan debilidades en la etapa simbólica al momento de construir un modelo mediante una expresión algebraica de las situaciones presentadas.

En función del análisis de los logros alcanzados, se puede concluir que el objetivo general “Favorecer el proceso de construcción de la noción de variable mediante la modelación con alumnos del nivel medio superior” es alcanzado en la mayoría de los estudiantes participantes en las actividades implementadas. Esto significa que se ha logrado un gran paso al incitar a los educandos a modelar

pequeñas practicas sociales y esto lleva hacia un nuevo y mejor entendimiento de los factores que nos rodean.

De esta manera este trabajo de investigación contribuye a desarrollar la competencia disciplinar matemática del nivel medio superior: “Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales” (SEP, 2008).

No obstante, es necesario realizar las modificaciones y experimentaciones necesarias de la situación didáctica rediseñada donde se presenten diferentes niveles de complejidad para que se logre alcanzar en su totalidad el objetivo esperado, así como también reiterar la indagación y rediseño de situaciones didácticas que mediante la modelación se consolide la noción de variable y se fortalezca el lenguaje simbólico donde el alumno pueda transformar las soluciones generales a modelos matemáticos mediante expresiones.

REFERENCIAS

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelización como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México, D.F.
- Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 18(1), 19-48
- Artigue, Michele (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Editorial Iberoamericana.
- Brousseau, G. (1993). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física: Trabajos de Matemática, No. 19.
- Collís, K. (1982). La matemática escolar y los estadios de desarrollo. *Infancia y Aprendizaje*. 40-74.
- Coordinación Académica de Educación Media Superior [CAEMS], (s.f.). *Formato de Planeación Didáctica 2021-2022*.
<https://drive.google.com/drive/folders/1v8mWTRB-6A2TV2Ux2slgTDT0tbons78M>
- Cordero, F. (2004). La modelación y la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa* 21 IPN. México.
- Cordero, F. (2005). Modelación en Matemática Educativa. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*. <https://core.ac.uk/download/pdf/33252629.pdf>

- Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problemsă is the concept of a variable so difficult for students to understand? *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA 1*, 49-63
- Gomez, E. (2008). *La construcción de la noción variable*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México, D.F
- González, E. (2012). *Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas* [Tesis de Maestría no publicada]. Universidad Nacional de Colombia.
- Nesselman, G. (1842). *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1*. Berlin: G. Reimer.
- Rafael, Aurelia (s.f). *Desarrollo cognitivo: Las Teorías de Piaget y Vygotsky*. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Secretaria de Educación de Chiapas [SECH], (2009). Programa para el Desarrollo de Competencias de Educación Media del Estado, Matemáticas I, Primer semestre.
- Secretaria de Educación Pública [SEP]. (2008). ACUERDO número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato. DIARIO OFICIAL, 6.

Secretaría de Educación Pública [SEP], (2011). Programa de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Distrito Federal, México.

Ursini, S. (1993). *Pupils' approaches to different characterizations of variable in Logo* [Tesis de Doctorado no publicada]. University of London.

Ursini, S., Trigueros, M. y Lozano, M. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática* 12(2), 27-48.

Vicario, M. (2002). *Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior* [Tesis de Maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero.

BIBLIOGRAFÍA

- Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S., y Quintero, R. (1996). Diseño De Un Cuestionario De Diagnóstico Acerca Del Manejo Del Concepto De Variable En El Álgebra. *Enseñanza de las Ciencias*, 351-363.
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.
- Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?. *Educación Matemática*, 18(3), 5-38.
- Ursini, S., & Trigueros, M. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matematica*. 12(2), 27-48.

ANEXOS

ACTIVIDAD I

Nombre del alumno: HECTOR ALEXANDER SALCHEZ L Semestre: 1

Cuestionario

I. Responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es para ti el término variable?
Hacer algún ejercicio o una actividad tomando diferentes puntos de vista o diversas actividades.
2. ¿Cuáles son los usos que le puede dar a una variable?
Para hacer una mejor comprensión de algo o algún tema.
3. ¿Qué es para ti un modelo matemático?
Es una forma más práctica de trabajo.
4. ¿Cuáles son los usos que le puedes dar a un modelo matemático?
Para realizar actividades con mayor facilidad y más práctica y eficaz.

ACTIVIDAD IIIntegrantes del equipo: * Julia Zenteno Semestre: _____Moisés Ruiz, Fernanda Salazar, Alondra Villatoro**Materiales**

3 vasos desechables
1 refresco de soda
1 cuchara Medidora
3 pastillas efervescentes
1 cronometro
Hojas cuadriculadas
Regla

Instrucciones

- ✓ 1. Forma equipo de acuerdo al número de integrantes que se te indique.
- ✓ 2. En el primer vaso coloca una taza medidora de refresco de soda.
- ✓ 3. Coloca una pastilla efervescente en el vaso y con el cronometro toma el tiempo en el que la pastilla se deshace, anota los datos observados.
- ✓ 4. En el segundo vaso coloca dos tazas medidoras de refresco de soda y repite el paso número 3.
- ✓ 5. En el tercer vaso coloca tres tazas medidoras de refresco de soda y repite el paso número 3.
- ✓ 6. ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?
- ✓ 7. En base a lo analizado de las magnitudes físicas que intervienen y lo observado en la situación experimental, anota la información en la tabla de datos siguiente.

y x
 $8 + 8$
 $y = 8(x) -$

(Cucharada) Vaso = x	1	2	3	4
Tiempo = y	2m-14-98	2m-03-96	7m-58-09	7-50

8. En la hoja cuadrículada representa gráficamente las magnitudes observadas.

9. ¿Qué sucede mientras se coloca más refresco de soda en los vasos? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?
 Aumenta Automáticamente y disminuye el tiempo en el que la pastilla se deshace. Tiempo y Cantidad varían y dependen.

10. Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, ¿Qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes?
 El tiempo varía de la cantidad de líquido que se Ponga.

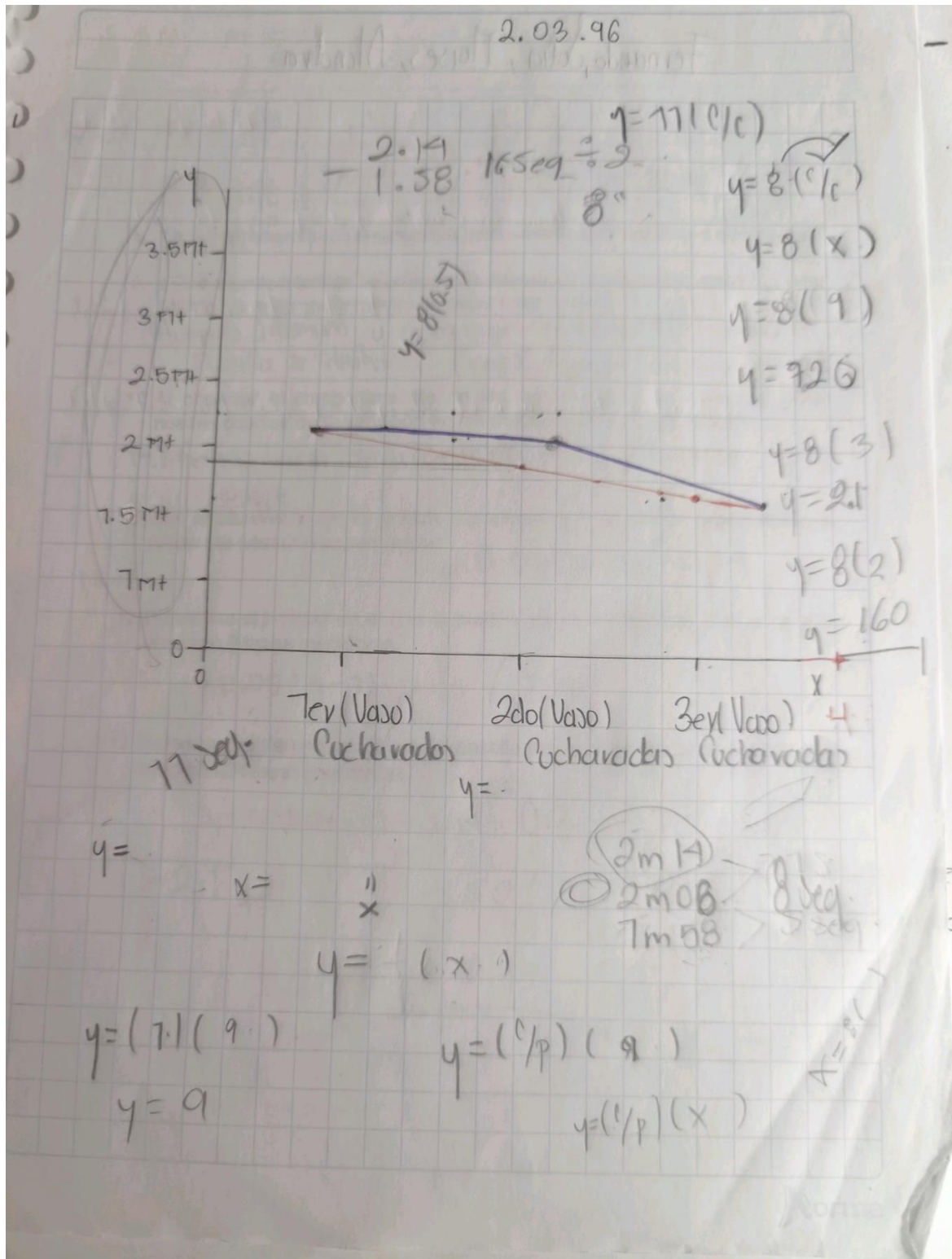
11. Con lo observado en la gráfica, construye una expresión algebraica que modele la situación experimental.
 $y = 0.08(x-1) - 2.14$

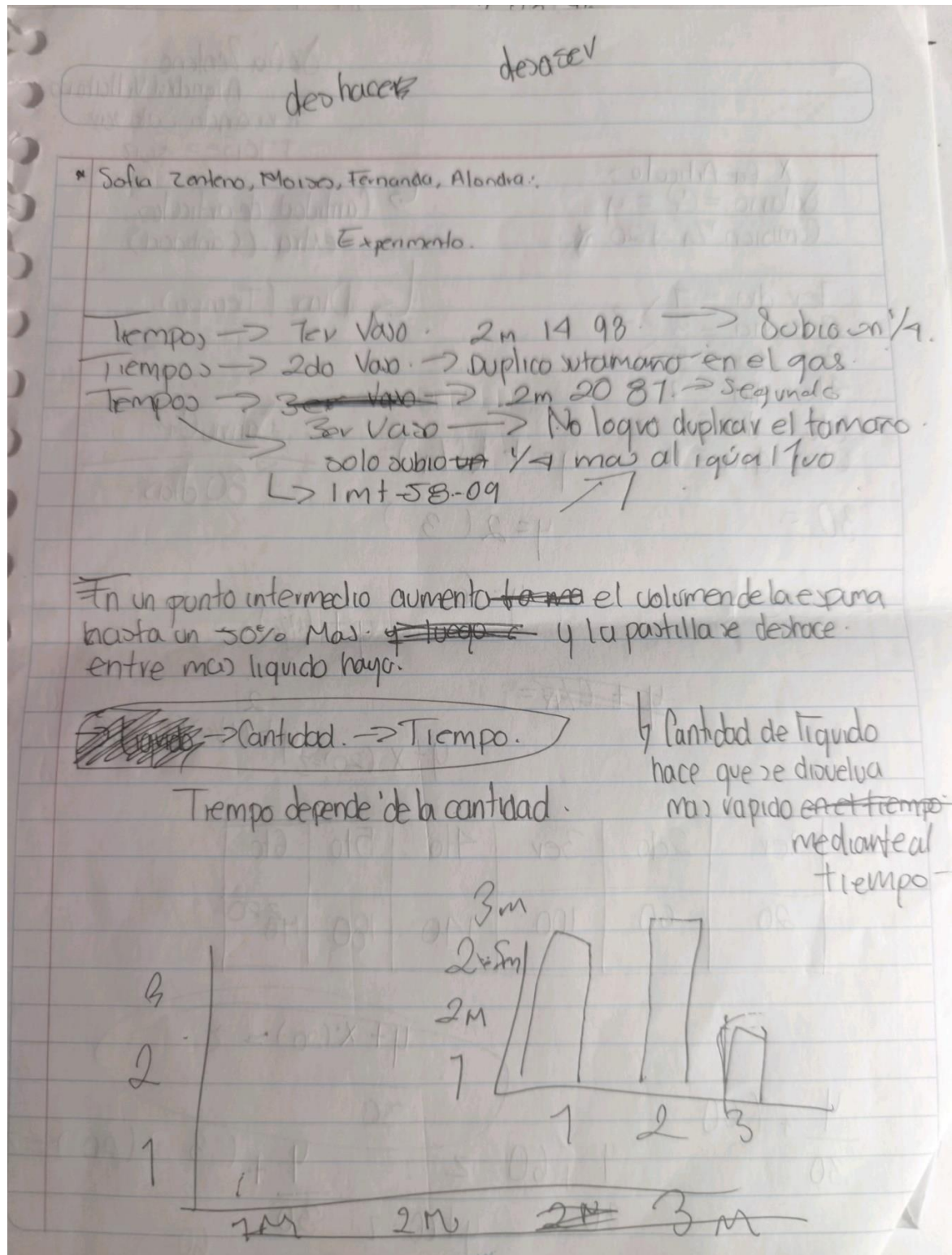
12. Determina el tiempo en el que la pastilla se va a deshacer si el vaso está lleno con 9 tazas medidoras.
 $y = 0.08(9-1) - 2.14 = 7.5$

13. Determina el tiempo en el que la pastilla se va a deshacer si el vaso está lleno con 24 tazas medidoras.
 $y = 0.08(24-1) - 2.14 = 0.3 \cdot 13.86$

$0.08(2-1) - 2.14$
 $y = 1m^5$
 $7.50(2) - 8 = 3$
 -5
 $2.14(x) - 8$
 $2.14(2) - 8$
 17.12
 $9.12 \cdot 2.86$

el tiempo depende de la cantidad





ACTIVIDAD III

Integrantes del equipo: Sofía Lencero, Alondra Villa - Semestre: _____

too, Moisés Ruiz y Fernanda Salazar

- I. Analiza el siguiente caso y realiza las actividades que posteriormente se plantean.

La compañía para la que trabajas te paga un sueldo fijo que corresponde al salario mínimo por día, más \$20 de comisión por cada artículo que vendas. Imagina que el primer día vendes 1 artículo, el segundo 3, el tercero 5 y así sucesivamente.

$Z = \text{Salario}$
 $\rightarrow \text{Comisión}(20)$
 $y = \text{Salario de un día}$

- ✓ 1. Identifica cuáles serían las magnitudes que varían en el problema.

$\rightarrow \text{Cantidad y tiempo}$

- ✓ 2. ¿Cuánto se le pagaría el primer y segundo día?

$Z \text{ y las comisiones } (60) \cdot (y + 60 = Z)$

- ✓ 3. Completa en una tabla el salario diario obtenido durante 6 días.

- ✓ 4. Representa gráficamente las magnitudes observadas

- ✓ 5. Escribe la expresión que utilizaste para obtener el salario del 5 y 6 día.

$y \text{ 5to día} = y + x(20) = Z$ $6\text{to día} = y + x(20) = Z$

- ✓ 6. De acuerdo a lo escrito anteriormente, ¿cuál sería el cambio que tendría la expresión si no supiera cuantos artículos vendo cada día?

$y + x(20) = Z$

7. Con lo observado, construye una expresión algebraica que modele la relación de las magnitudes que varían en el problema.

8. ¿Cuánto ganarías al finalizar el mes? (considerando 30 días para el mes).

~~$y + x(20) = Z$~~

$y(30) + (x)(20) = Z$

Jefia Zenteno
Alondra Villatoro
Fernanda Salazar
Tatiane Ruiz

X Articulos
Salario = CP = y
Comision P/A = \$20

↳ Cantidad de articulos extra. (Cantidad)

↳ Dias. (Tiempo)

7er dia = 1 > 2
2do dia = 3 > 2
3ro dia = 5 > 2
4to dia = 7 > 2
5to dia = 9 > 2
6to dia = 11

30 =

$y = + (C/A)$
 $y = 2(3)$
 $y = 6$

$y + (N/A)$
 $y + (N/A)(20) = Z$

~~$y + (C/A) =$~~

1er	2do	3er	4to	5to	6to
20	60	100	140	180	220

$y + x(20) = z$

$\frac{y}{30} + 60$

$\frac{y}{30} + 60 = z$

$y + 60 = z$

$60 = z - y$

$y + (3)(20) = z$

$60 =$

