



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN
FÍSICA Y MATEMÁTICAS



“ESQUEMAS DE
APROXIMACIÓN EN LA
TEORÍA DE AUBRY-MATHER
DISCRETA”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

LIC. LUIS EDUARDO MAZA CRUZ X130076

DIRECTOR DE TESIS:

DR. BORIS ASDRUBAL PERCINO FIGUEROA

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS.

NOVIEMBRE 2021.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
CONTROL ESCOLAR POSGRADO



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
26 de Octubre de 2021
Oficio No. FCFM/0404/21

Dr. Boris Asdrubal Percino Figueroa
Directora de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"ESQUEMAS DE APROXIMACIÓN EN LA TEORÍA DE AUBRY-MATHER DISCRETA"

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestro en Ciencias Matemáticas del Lic. Luis Eduardo Maza Cruz con matrícula escolar X130076.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

"Por la conciencia de la necesidad de servir"

Dra. Karen Salomé Caballero

Directora



**DIRECCIÓN
FCFM**

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
CP. Juan Manuel Aguilar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
KSCM/jmag



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
SECRETARÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE DESARROLLO BIBLIOTECARIO



Código: FO-113-09-05
Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) Luis Eduardo Maza Cruz,
Autor (a) de la tesis bajo el título de "Esquemas de aproximación en la teoría
de Aubry-Mather discreta"

presentada y aprobada en el año 20 21 como requisito para obtener el título o grado de Maestro en Ciencias Matemáticas, autorizo a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.
- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 5 días del mes de noviembre del año 20 21.

Luis Eduardo Maza Cruz

Nombre y firma del Tesista o Tesistas

Agradecimientos

Para empezar quiero agradecer enormemente a mi asesor el Dr. Boris por ser una excelente persona y gran ser humano y también gracias por su esfuerzo, dedicación y consejos (tanto en lo académico como en lo personal) así como por su infinita paciencia hacía a mi (en especial durante la pandemia), por ayudarme a crecer, por inculcarme disciplina, así como responsabilidad. Le estaré siempre muy agradecido.

Por otra parte, agradezco al jurado, Dra Eddaly Guerra, Dr. Armando Mendoza, Dr. Saúl Campos y Dr. Aldo Merino, por la revisión, corrección y sus valiosos comentarios que hicieron para mejorar este trabajo de tesis.

Quiero agradecer a mi madre Maria y mi padre Ricardo, a ellos les debo la vida y les estaré eternamente agradecido. A mi hermano César por ser mi amigo y un excelente chef.

No podía faltar Araceli por su amor, paciencia y confianza durante esta etapa académica. Muchas gracias por estar ahí cuando te necesitaba, tu apoyo y de mis sobrinos fue indispensable, ellos se convirtieron en mi mayor motivación.

También quiero agradecer a todos los profesores de la FCFM. En especial, al Dr. Eli Roblero porque gracias a él aprendí el significado de disciplina, espero algún día ser igual dedicado como él lo es. A la Dra. Eddaly Guerra por motivarme a mejorar cada día y por sus excelentes clases. Al Dr. Saúl Campos por ser excelente profesor. Al Dr. Armando Mendoza por motivarme a cambiarme de carrera. Al Dr. Sergio Guzman por involucrarme en las olimpiadas. Al Dr. Hugo Villanueva por darme ánimos cuando mis fuerzas flaqueaban.

Gracias también a los amigos de la facultad. En especial a los amigos que hice gracias a la pandemia. A mis compañeros de generación en la maestría en matemáticas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por otorgarme el apoyo que ha hecho ésto posible.

Finalmente, gracias a ti amigo(a) lector(a) por interesarte en leer este trabajo, espero te pueda servir de ayuda.

*A mis padres, hermano, Araceli, Dra. Eddaly y Dr. Boris
gracias a todos ellos por su infinita paciencia.*

Índice general

Introducción	IV
1. Preliminares de la Teoría de Aubry-Mather	1
1.1. El problema de Mather	1
1.2. Medidas Minimizantes	3
1.3. Soluciones de viscosidad	5
2. El problema discreto de Aubry-Mather	9
2.1. Dualidad	9
2.2. Solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi discreta	14
2.3. Principio de programación dinámica discreto	22
3. Convergencia del modelo discreto de Aubry-Mather	31
3.1. Interacciones de corto alcance.	31
3.2. El semi-grupo de Lax-Oleinik discreto.	41
3.3. Esquema de aproximación.	58
4. Conclusión	65
Bibliografía	67

Introducción

El principio de mínima acción de mecánica clásica asegura que las trayectorias o curvas que minimizan la energía de un sistema mecánico son los puntos críticos de la siguiente acción,

$$\int_0^T L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt$$

El problema anterior se puede dualizar y traducir a buscar medidas que minimicen la acción promedio. Esta versión dual es conocida como el problema de Aubry-Mather la cual se desarrolla en sistemas continuos sin embargo nosotros vivimos, hasta ahora, en un mundo discreto en el sentido que nuestros computadoras u ordenadores solo pueden manejar una cantidad finita de datos.

Debido a lo anterior este trabajo de tesis tiene un objetivo doble. El primero consiste trabajar en la versión continua del problema de Aubry-Mather y de aquí obtener una versión discreta. El segundo objetivo es, ahora dada la versión discreta, mostrar un esquema de aproximación que derive en la versión continua del problema.

En el capítulo uno daremos una pequeña introducción, muy básica, de la teoría de Aubry-Mather. En particular daremos resultados y conceptos importantes de esta teoría que nos ayudarán a entender los capítulos subsecuentes. Además, enunciamos algunos resultados que relacionan la teoría de Aubry-Mather con la teorías de soluciones de viscosidad. El lector interesado en la versión continua de este problema puede consultar [4], o bien, [5].

En el capítulo dos, a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi continua (HJC), enunciamos un posible análogo discreto de esta ecuación la cual es llamada la ecuación de Hamilton-Jacobi discreta (HJD). En este capítulo se analizan la existencia y unicidad de las soluciones de (HJD). Por último, usando la teoría de sub-diferencial y super-diferencial se obtiene las ecuaciones de Hamilton discretas.

El tercer capítulo exponen la convergencia del modelo discreto de Aubry-Mather para ello se definen las interacciones de corto alcance las cuales generalizan el concepto de acción

minimizante en el contexto discreto. Posteriormente se definen el semi-grupo de Lax-Oleinik y soluciones KAM débil ambos conceptos en su versión discreta, usando esta herramienta se enuncia y demuestra el esquema de aproximación.

Por último, en el cuarto capítulo se realiza el análisis de los resultados obtenidos en esta tesis así como el trabajo a futuro que se puede seguir realizando.

La mayor parte de este trabajo de tesis se basó en los artículos [10] y [6].

Capítulo 1

Preliminares de la Teoría de Aubry-Mather

En este primer capítulo vamos a enunciar la teoría necesaria para poder entender los capítulos subsecuentes. Estos resultados enunciados así como sus demostraciones pueden ser consultados en [1].

1.1. El problema de Mather

A lo largo de esta trabajo denotaremos al toro d -dimensional como $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$.

1.1 Definición. Un **lagrangiano** $L(x, v)$, $L : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, es un funcional lineal continuo. Diremos que un lagrangiano L es de **Tonelli** si cumple que es suave en ambas variables, periódico en x , estrictamente convexo en la velocidad v y es coercitivo, esto es,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \inf_{x \in \mathbb{T}^d} \frac{L(x, v)}{\|v\|} = +\infty.$$

1.1. EL PROBLEMA DE MATHER

De nuestros cursos de cálculo podemos recordar que el hecho que L es estrictamente convexo en la definición anterior es equivalente a que $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v)$ es positivo definido al verlo como forma cuadrática. La condición de coercitividad de L se puede reescribir como el hecho que L es **superlineal** sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$, esto es, dado $C \subset \mathbb{R}$ compacto y $K \geq 0$ entonces existe una constante $C(K) > -\infty$ tal que $L(x, v) \geq K||v|| - C(K)$ para todo $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$.

El principio de mínima acción de mecánica clásica asegura que las trayectorias $\mathbf{x}(t)$ de un sistema mecánico son punto críticos de la acción

$$\int_0^T L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt. \quad (1.1)$$

traducido al lenguaje de cálculo de variaciones tenemos que estos puntos críticos son las soluciones a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} D_v L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - D_x L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0. \quad (1.2)$$

Ahora, consideremos a $\mathbf{x}(t)$ una trayectoria en $\mathbb{T}^d$. Definamos la medida $\mu_{\mathbf{x}}^T$ sobre $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ de la siguiente manera:

$$\langle \psi, \mu_{\mathbf{x}}^T \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt,$$

donde ψ está en el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ con soporte compacto. Si la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ es globalmente Lipschitz, la familia $\{\mu_{\mathbf{x}}^T\}_{T>0}$ tiene soporte contenido en un conjunto C compacto fijo esto implica que $\{\mu_{\mathbf{x}}^T\}$ es compacto con la topología débil-*. De lo anterior, se tiene que existe una medida $\mu_{\mathbf{x}}$ en $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ de manera que las medidas $\mu_{\mathbf{x}}^T \rightarrow \mu_{\mathbf{x}}$ en la topología débil-*. Luego, la medida $\mu_{\mathbf{x}}$ cumple que

$$\langle \psi, \mu_{\mathbf{x}} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt.$$

En particular, si consideremos a la función $\psi(x, v) = v \cdot \nabla \varphi(x)$ donde $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^d)$, entonces por el teorema fundamental del cálculo y del hecho que φ es acotada obtenemos que

$$\langle \varphi, \mu_{\mathbf{x}} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \varphi(x) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\mathbf{x}(T)) - \varphi(\mathbf{x}(0))}{T} = 0.$$

1.2 Definición. Sea $\gamma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\inf \frac{\gamma(v)}{1+|v|} > 0$ y además $\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{\gamma(v)}{1+|v|} = \infty$. Una medida μ sobre $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ es llamada **admisibile** si $\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \gamma(v) d\mu < \infty$.

Una medida μ admisible en $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ se dice **holonómica** si para todo $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^d)$ se cumple

$$\int_0^T v \cdot \nabla \varphi(x) \, d\mu = 0. \quad (1.3)$$

El **problema de Mather** consiste en minimizar la siguiente acción

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L(x, v) \, d\mu(x, v). \quad (1.4)$$

sobre el conjunto de todas las medidas de probabilidad $\mu(x, v)$ holonómicas.

1.2. Medidas Minimizantes

Recordemos que si L es un lagrangiano de Tonelli entonces, por la hipótesis de coercitividad, se tiene que L alcanza su mínimo global. Así podemos suponer sin pérdida de generalidad que $L \geq 1$ después de sumar una constante de ser necesario.

Consideremos a $\gamma(v) = \inf_{x \in \mathbb{T}^d} L(x, v)$ y definamos al conjunto $\mathcal{M}$ como sigue

$$\mathcal{M} := \left\{ \mu : \|\mu\| = \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \gamma(v) \, d|\mu| < \infty \right\},$$

donde μ es una medida signada en $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$. La variación total $|\mu|$ de la medida μ está definida por

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones de borelianos $\{E_i\}$ de E .

Definamos también el conjunto C_0^γ como el conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ hacia $\mathbb{R}$ que satisfacen:

$$\|\phi\|_\gamma = \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \left| \frac{\phi}{\gamma} \right| < \infty \quad , \quad \lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{\phi(x, v)}{\gamma(v)} = 0.$$

De lo anterior tenemos el siguiente teorema.

1.3 Teorema. (De representación de Riesz) Sea $\mu \in \mathcal{M}$, definamos la función $F_\mu : C_0^\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ como $F_\mu(f) = \int f \, d\mu$ entonces $F_\mu \in (C_0^\gamma)^*$ (espacio dual) y el mapeo $\mu \mapsto F_\mu$ es una isometría de $\mathcal{M}$ sobre $(C_0^\gamma)^*$.

Por el teorema de representación de Riesz se sigue que el espacio $\mathcal{M}$ es el dual del conjunto $C_0^\gamma(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$. Notemos que dada una sucesión (μ_n) acotada, ésta converge débilmente módulo una subsucesión, es decir, existe una medida μ tal que para toda $\phi \in C_0^\gamma$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi \, d\mu_n \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi \, d\mu.$$

Observemos que $1 \in C_0^\gamma$ luego si cada μ_n es una medida de probabilidad entonces μ también será una medida de probabilidad.

1.4 Teorema. *Existe una medida de probabilidad holonómica μ en $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ la cual minimiza la ecuación (1.4).*

Una medida que satisface el teorema anterior es llamada **medida minimizante**. Una propiedad importante que cumplen las medidas minimizantes es la siguiente.

1.5 Teorema. *Sea μ una medida minimizante entonces el soporte de μ está contenido en la cerradura de la gráfica de una función medible, esto es, existe una función medible $\mathbf{v} : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que soporte $\mu \subset \overline{\{(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d : v := \mathbf{v}(x)\}}$.*

Vamos a considerar E un espacio vectorial topológico convexo con espacio dual E' . A la pariación dual entre E y E' será denotada como $(\cdot, \cdot)$.

1.6 Definición. *Sea $h : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ una función convexa. La transformada de Legendre-Fenchel $h^* : E' \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ de la aplicación h está definido como*

$$h^*(y) := \sup_{x \in E} \left((x, y) - h(x) \right), \quad \text{para } y \in E'.$$

De manera similar a la definición anterior tenemos que si $g : E \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ es cóncava se define

$$g^*(y) = \inf_{x \in E} \left((x, y) - g(x) \right).$$

Una descripción más detallada del concepto anterior se puede encontrar en [6].

1.7 Teorema. (*Fenchel-Legendre-Rockafellar*) Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo sobre $\mathbb{R}$ con dual E' . Sea $h : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$ una función convexa y $g : E' \rightarrow [-\infty, +\infty)$ una función cóncava. Luego si f , o bien, g es continua y existe un punto x_0 tal que h y g son finitos entonces

$$\min_{y \in E'} [h^*(y) - g^*(y)] = \sup_{x \in E} [g(x) - h(x)].$$

1.3. Soluciones de viscosidad

Las soluciones de viscosidad y la teoría de Aubry-Mather tienen una relación muy estrecha es por ello que daremos algunos resultados básicos de las soluciones de viscosidad.

1.8 Definición. Sea $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Una función u acotada y uniformemente continua es **una solución de viscosidad** de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$F(Du, u, x) = 0, \tag{1.5}$$

si para cualquier función $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ y un punto x_0 máximo (respectivamente mínimo) local de la función $u - \varphi$ se cumple que

$$F(D\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \leq 0 \text{ (respectivamente } \geq 0). \tag{1.6}$$

De aquí en adelante denotaremos al conjunto de curvas globalmente Lipschitz como $\mathcal{C}(L)$. Consideremos a $\alpha > 0$, luego el problema de control óptimo de horizonte infinito con descuento consiste en minimizar el siguiente funcional

$$u_\alpha(x) = \inf \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{\alpha s} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) ds : \mathbf{x} \in \mathcal{C}(L), \mathbf{x}(0) = x \right\}. \tag{1.7}$$

La función u_α es llamada **la función valor** del problema de horizonte infinito con descuento. Ahora, dado $T \in \mathbb{R}$ tenemos el problema de valor inicial el cual, para $t \geq -T$, consiste en

minimizar

$$V(x, t) = \inf \left\{ \int_{-T}^t L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) ds + \psi(\mathbf{x}(-T)) : \mathbf{x} \in \mathcal{C}(L), \mathbf{x}(t) = x \right\}. \quad (1.8)$$

Usando las propiedades de semigrupos del flujo de una ecuación diferencial tenemos el siguiente resultado.

1.9 Proposición. *Para $\alpha > 0$ las funciones u_α y V satisfacen el principio de programación dinámica, esto es, para $T > 0$*

$$u_\alpha(x) = \inf_{\mathbf{x}:\mathbf{x}(0)=x} \left(\int_{-T}^0 e^{\alpha s} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) ds + e^{-\alpha T} u_\alpha(\mathbf{x}(-T)) \right) \quad (1.9)$$

$$V(x, t) = \inf_{\mathbf{x}:\mathbf{x}(t)=x} \left(\int_{-\tilde{t}}^t L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt + V(\mathbf{x}(-\tilde{t}), -\tilde{t}) \right) \quad (1.10)$$

donde $\mathbf{x}$ es una curva globalmente Lipschitz y se cumple para todo $-T \leq -\tilde{t} \leq t$.

Una observación importante que se da por la compacidad de $\mathbb{T}^d$ y la continuidad de L es que el ínfimo de hecho es mínimo en la proposición anterior.

Definimos ahora el hamiltoniano asociado al lagrangiano L como

$$H(p, x) = \sup_{v \in \mathbb{R}^d} \{p \cdot v - L(x, v)\}. \quad (1.11)$$

Algunas de las propiedades de H son el hecho que es suave en ambas variables, periódico en x , estrictamente convexo en la velocidad v y es coercitivo.

La siguiente proposición nos dice como se relaciona la solución clásica de la ecuación de Hamilton-Jacobi con valores iniciales y la función u_α .

1.10 Proposición. *Sea φ una función de clase C^2 y acotada. Consideremos $\alpha \geq 0$ y denotemos por $\Phi(x, t)$ la única solución clásica de la ecuación de Hamilton-Jacobi no autónoma*

$$\Phi_t + \alpha \Phi + H(D_x \Phi, x) = 0 \quad (1.12)$$

en el intervalo $[-T, 0]$, con condiciones iniciales $\Phi(x, -T) = \varphi(x)$. Esta solución existe para tiempos T suficientemente pequeños entonces para todo $t \geq -T$ se cumple que

$$e^{\alpha t} \Phi(x, t) = \inf_{\mathbf{x}:\mathbf{x}(t)=x} \left(\int_{-T}^t e^{\alpha s} L(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds + e^{-\alpha T} \varphi(\mathbf{x}(-T)) \right).$$

Las funciones u_α y V son soluciones de viscosidad como se enuncia en el siguiente teorema.

1.11 Teorema. *Sea u_α la función valor del problema de horizonte infinito con descuento (1.7) entonces u_α es una solución de viscosidad de la ecuación*

$$\alpha u_\alpha + H(Du_\alpha, x) = 0.$$

De manera similar, sea V la solución al problema de valor inicial (1.8) entonces V es una solución de viscosidad de la siguiente ecuación

$$V_t + H(D_x V, x) = 0.$$

En los siguiente teoremas mencionaremos algunas de las propiedades más relevantes que cumple u_α vista como solución de viscosidad.

1.12 Teorema. *Sea u_α una solución de viscosidad de la ecuación*

$$\alpha u_\alpha + H(Du_\alpha, x) = 0,$$

entonces αu_α es uniformemente acotada y u_α es Lipschitz, uniformemente en α .

Un resultado importante en la teoría de soluciones de viscosidad es el teorema de estabilidad el cual presentamos a continuación.

1.13 Teorema. *(De estabilidad para soluciones de viscosidad) Supongamos que para $\alpha > 0$ la función u^α es una solución de viscosidad para $H^\alpha(u, Du, x) = 0$. Además, supongamos que $H^\alpha \rightarrow H$ de manera uniforme sobre conjuntos compactos y que $u^\alpha \rightarrow u$ uniformemente cuando $\alpha \rightarrow 0$, entonces u es solución de viscosidad para la ecuación $H(u, Du, x) = 0$.*

Con el resultado anterior es posible construir una solución de viscosidad a la ecuación de Hamilton-Jacobi estacionaria

$$H(Du, x) = C. \tag{1.13}$$

1.14 Teorema. *(Lions, Papanicolao, Varadhan) Existe un único número $\overline{H} = C$ y una función $u(x)$, $\mathbb{Z}^d$ periódica en x , que es solución (1.13) en el sentido de viscosidad. Más aún, u es Lipschitz y cuya constante no depende de u .*

Este magnífico resultado se puede encontrar en el artículo no publicado [8]. Los resultados mostrados en este capítulo serán de ayuda para comprender el trabajo desarrollado en el capítulo siguiente.

Capítulo 2

El problema discreto de Aubry-Mather

El concepto de dualidad es muy útil en problemas de minimización ya que, bajo las condiciones adecuadas, por el teorema de representación de Riesz uno puede trabajar entre el espacio original y dual a voluntad buscando el espacio que presente menos barreras para resolver el problema de minimización. La mayoría de los resultados expuestos en este capítulo se encuentran en [6].

2.1. Dualidad

Consideremos un lagrangiano de Tonelli $L(x, v) : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. A lo largo de este capítulo vamos a buscar medidas de probabilidad positivas $\mu(x, v)$ sobre $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$, $\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} d\mu = 1$, que sean invariantes bajo la aplicación $x \mapsto x + v$, esto es, todas las medidas μ que para cada una de las funciones continuas $w : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ se cumplen que

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [w(x + v) - w(x)] d\mu = 0,$$

además estas medidas $\mu(x, v)$ minimizan la acción promedio

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L(x, v) d\mu.$$

El problema anterior es un problema de programación lineal en un espacio de medidas por lo que admite una versión dual. Notemos que este problema es una versión modificada del problema de Mather el cual le llamaremos **el problema discreto de Aubry-Mather**.

2.1 Definición. Sea M un espacio de medible y μ una medida sobre E . Decimos que la medida μ es:

- **regularmente interior** si $\mu(M) = \sup\{\mu(K) : K \subset M, K \text{ es compacto}\}.$
- **regularmente exterior** si $\mu(M) = \inf\{\mu(U) : M \subset U, U \text{ es abierto}\}.$
- **de Radon** si es una medida de Borel, regular exterior en todos los borelianos, regularmente interior en los abiertos y la medida de los conjuntos compactos es finita.

Consideremos los dos conjuntos siguientes

$$\mathcal{C} := \{\phi \in C(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) : \phi(x, v) = \varphi(x + v) - \varphi(x) \text{ para algún } \varphi \in C(\mathbb{T}^d)\},$$

$$C_*^0 := \left\{ \phi \in C^0(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) : \lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{\phi(x, v)}{|v|} = 0 \right\}$$

tenemos que por el teorema de representación de Riesz (1.3) el dual de C_*^0 es el conjunto de medidas signadas sobre $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ dado como

$$\mathcal{M} = \left\{ \mu : \mu \text{ es de Radon y } \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |v| d|\mu| < \infty \right\}.$$

Definamos $h_1 : C_*^0 \longrightarrow (-\infty, \infty]$ dado de la siguiente manera

$$h_1(\phi) = \sup_{(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [-\phi(x, v) - L(x, v)].$$

La aplicación h_1 es convexa en C_*^0 . De manera similar, definamos $h_2 : \mathcal{C} \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ como

$$h_2(\phi) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \phi \in \mathcal{C}, \\ -\infty & , \text{ si } \phi \notin \mathcal{C}, \end{cases}$$

no es difícil ver que esta aplicación es cóncava.

Queremos relacionar los conjunto $\mathcal{C}$ y C_*^0 a su respectivo dual, así pues definamos los siguientes conjuntos de medidas

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [\varphi(x+v) - \varphi(x)] d\mu = 0, \forall \varphi \in C(\mathbb{T}^d) \right\},$$

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \mu \geq 0 \text{ y } \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} d\mu = 1 \right\}.$$

De acuerdo a la notación previa tenemos el siguiente resultado.

2.2 Proposición.

$$h_1^*(\mu) = \begin{cases} \int L d\mu, & \text{si } \mu \in \mathcal{M}_1 \\ +\infty, & \text{si } \mu \notin \mathcal{M}_1. \end{cases} \quad y \quad h_2^*(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in \mathcal{M}_0 \\ -\infty, & \text{si } \mu \notin \mathcal{M}_0. \end{cases}$$

Demostración:

Primero calculemos el dual de h_1 , recordemos que

$$h_1^*(\mu) = \sup_{\phi \in C_*^0} \left[- \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi d\mu - h_1(\phi) \right] = \sup_{\phi \in C_*^0} \left[- \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi d\mu - \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [-\phi(x,v) - L(x,v)] \right].$$

Si μ es no positivo entonces podemos elegir una sucesión de funciones no negativas $\phi_n \in C_*^0$ tales que:

$$- \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi_n d\mu \longrightarrow +\infty$$

luego como $L \geq 0$ se tiene que $-\phi_n - L \leq 0$ y de aquí que

$$h_1(\phi_n) = \sup[-\phi_n - L] \leq 0$$

de lo anterior se sigue que

$$- \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi_n d\mu - \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [-\phi_n(x,v) - L(x,v)] \geq - \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi_n d\mu$$

lo cual implica que

$$h_1^*(\mu) = \sup_{\phi \in C_*^0} \left[- \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi d\mu - \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [-\phi(x,v) - L(x,v)] \right] \geq \sup_{\phi_n \in C_*^0} \left[- \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi_n d\mu \right]$$

2.1. DUALIDAD

haciendo $n \rightarrow +\infty$ se sigue que $h_1^*(\mu) = +\infty$.

Ahora, si $\mu \geq 0$ entonces afirmamos que se cumple que

$$h_1^*(\mu) \geq \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L d\mu + \sup_{\psi \in C_*^0} \left[\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi d\mu - \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi \right]. \quad (2.1)$$

En efecto, consideremos una sucesión L_n en C_*^0 que converge de manera puntual a L . Observamos que toda función $\phi \in C_*^0$ se puede escribir como $\phi = -L_n - \psi$ para alguna $\psi \in C_*^0$, esto ya que podemos elegir a $\psi = \phi + L_n$, y de aquí que

$$\begin{aligned} \sup_{\phi \in C_*^0} \left[- \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi d\mu - h_1(\phi) \right] &= \sup_{\psi \in C_*^0} \left[\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L_n d\mu + \psi d\mu - h_1(-L_n - \psi) \right] \\ &= \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L_n + \sup_{\psi \in C_*^0} \left[\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi d\mu - h_1(-L_n - \psi) \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

ahora como L_n es una sucesión creciente se sigue que $L_n - L \leq 0$ luego

$$h_1(-L_n - \psi) = \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [L_n + \psi - L] \leq \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [\psi]$$

de lo anterior y usando la ecuación (2.2) se tiene que

$$h_1^*(\mu) = \sup_{\phi \in C_*^0} \left[- \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi d\mu - h_1(\phi) \right] \geq \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L_n d\mu + \sup_{\psi \in C_*^0} \left[\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi d\mu - \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi \right]$$

haciendo tender n a infinito y usando el teorema de la convergencia monótona se prueba nuestra afirmación.

Ahora, supongamos que $\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} d\mu \neq 1$ entonces eligiendo $\psi = \alpha \in \mathbb{R}$ constante obtenemos que

$$\sup_{\psi \in C_*^0} \left[\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi d\mu - \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi \right] \geq \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \alpha d\mu - \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \alpha = \alpha \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} d\mu - 1 \right)$$

haciendo tender α a $\pm\infty$ se tiene que

$$\sup_{\psi \in C_*^0} \left[\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi d\mu - \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi \right] \geq +\infty.$$

lo cual implica que

$$h_1^*(\mu) \geq \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L d\mu + \sup_{\psi \in C_*^0} \left[\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi d\mu - \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi \right] \geq +\infty.$$

En caso contrario, si $\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} d\mu = 1$ entonces

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} (-\phi - L) d\mu \leq \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} (-\phi - L) \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} d\mu = \sup_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} (-\phi - L) = h_1(\phi).$$

Por lo tanto, para todo $\phi \in C_*^0$ se sigue que

$$-\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi \, d\mu - h_1(\phi) \leq \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L \, d\mu$$

lo cual implica que $h_1^*(\mu) \leq \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L \, d\mu$. Para la otra desigualdad basta tomar $\psi = 0$ en la ecuación (2.1) y por tanto se tiene que

$$h_1^*(\mu) = \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L \, d\mu .$$

Para calcular h_2^* observemos que si $\mu \notin \mathcal{M}_0$ entonces existe $\hat{\phi} \in \mathcal{C}$ tal que

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \hat{\phi} \, d\mu \neq 0$$

luego para $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\inf_{\phi \in \mathcal{C}} \left[-\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi \, d\mu \right] \leq -\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \alpha \hat{\phi} \, d\mu$$

de aquí que, haciendo $\alpha \rightarrow \pm\infty$, obtenemos

$$h_2^*(\mu) = \inf_{\phi \in \mathcal{C}} \left[-\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi \, d\mu \right] \leq \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \left[-\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \alpha \hat{\phi} \, d\mu \right] = -\infty$$

luego si $\mu \in \mathcal{M}_1$ entonces para $\phi \in \mathcal{C}$ se tiene que existe $\psi \in C(\mathbb{T}^d)$ tal que $\phi(x, v) = \psi(x + v) - \psi(x)$ y de aquí que

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \phi \, d\mu = \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi(x) - \psi(x + v) \, d\mu = 0$$

lo anterior implica que $h_2^*(\mu) = 0$, lo cual concluye la prueba.

□

Al ser h_1 continuo se tiene que el resultado anterior junto con el teorema de Fenchel-Rockafellar nos da el siguiente resultado.

2.3 Teorema.

$$-\inf_{\mu \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L \, d\mu = \inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^d)} \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [\psi(x) - \psi(x + v) - L(x, v)].$$

Demostración:

Por el teorema de Rockafellar tenemos que

$$\sup_{x \in E} [h_2(x) - h_1(x)] = \inf_{y \in E'} [h_1^*(y) - h_2^*(y)],$$

donde $E = \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1$ lo cual implica que $E^* = \mathcal{C}$. Luego, si $\mu \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1$ se cumple, por la proposición (2.2), que

$$h_1^*(\mu) = \int L \, d\mu \quad , \quad h_2^*(\mu) = 0 \quad .$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \inf_{\mu \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1} \left[\int L \, d\mu - 0 \right] &= \sup_{\phi \in \mathcal{C}} \left[0 - \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} (-\phi(x,v) - L(x,v)) \right] \\ &= - \inf_{\phi \in \mathcal{C}} \left[\sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} (-\phi(x,v) - L(x,v)) \right] \end{aligned}$$

Como $\phi \in \mathcal{C}$ luego existe $\psi \in C(\mathbb{T}^d)$ tal que $\phi(x,v) = \psi(x+v) - \psi(x)$ así

$$- \inf_{\mu \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1} \int L \, d\mu = \inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^d)} \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} (\psi(x) - \psi(x+v) - L(x,v))$$

□

2.2. Solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi discreta

La ecuación de Hamilton-Jacobi continua esta dado como

$$\sup_{v \in \mathbb{T}^d} [-v D_x u - L(x,v)] = H(D_x u, x) = \overline{H}.$$

un posible análogo discreto de está ecuación sería el siguiente:

$$\sup_{v \in \mathbb{T}^d} [u(x) - u(x+v) - L(x,v)] = \overline{H}. \quad (2.3)$$

En esta sección vamos a discutir la existencia de soluciones de esta última ecuación, la cual llamaremos **la ecuación de Hamilton-Jacobi discreta**, tratando de extender las técnicas del caso continuo al discreto.

Primero, vamos a tratar de construir una solución de la ecuación (2.3). Así, definamos un operador T^α que actúa sobre funciones periódicas acotadas de la siguiente manera

$$T^\alpha u(x) = e^{-\alpha} \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u(x+v) + L(x,v)] \quad , \quad x \in \mathbb{T}^d$$

para $\alpha > 0$. Vamos a buscar los puntos fijos u^α de T^α , para ello observemos que si u, w son funciones acotadas y periódicas,

$$\begin{aligned}
 \|T^\alpha u - T^\alpha w\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{T}^d} |T^\alpha u(x) - T^\alpha w(x)| \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{T}^d} |e^{-\alpha} \inf_{v \in \mathbb{R}^d} u(x+v) + L(x, v) - e^{-\alpha} \inf_{v \in \mathbb{R}^d} w(x+v) - L(x, v)| \\
 &= e^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{T}^d} | \inf_{v \in \mathbb{R}^d} u(x+v) - \inf_{v \in \mathbb{R}^d} w(x+v) | \\
 &= e^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{T}^d} | \inf_{v \in \mathbb{R}^d} (u(x+v) - w(x+v)) | \\
 &\leq e^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{T}^d} |u(x) - w(x)| = e^{-\alpha} \|u - w\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Luego, como $\alpha > 0$, se sigue que T^α es una contracción estricta y al ser el espacio de las funciones acotadas un espacio de Banach se sigue del teorema de punto fijo de Banach que T^α posee un único punto fijo, digamos u_0 . Recordemos que una de las hipótesis de capítulo 1 es que $L \geq 1$. Afirmamos que el punto fijo u^α es no-negativo, es decir, $u^\alpha(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{T}^d$. En efecto, si w es una función no negativa luego, como la función exponencial y el langrangiano son ambos no negativos, se tiene que

$$T^\alpha w(x) = e^{-\alpha} \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [w(x+v) + L(x, v)] \geq 0$$

lo anterior nos dice que T^α envía funciones no negativas en funciones no negativas. En particular, se cumple para u^α y se sigue la afirmación.

Una propiedad importante que cumple el operador T^α es el hecho de ser semiconcava, concepto que definimos a continuación junto con el concepto de semiconvexo.

2.4 Definición. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua:

- La función f se dice **semiconcava** siempre que exista una constante C tal que

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) \leq C|y|^2.$$

- Decimos que f es **semiconvexa** si existe una constante C tal que

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) \geq C|y|^2.$$

El siguiente teorema nos dice el porque la semiconcavidad es una propiedad de gran relevancia para el operador T^α .

2.5 Lema. $T^\alpha u$ es uniformemente semiconcava (con respecto a α) y por tanto, al ser periódica, Lipschitz.

Demostración:

Queremos ver $T^\alpha u$ es concava sin importar la elección del punto $x \in \mathbb{T}^d$. Sea v^* el punto donde se alcanza el ínfimo para u tal que

$$T^\alpha u(x) = e^{-\alpha}[u(x + v^*) + L(x, v^*)] \quad (2.4)$$

de lo anterior, para todo $v \in \mathbb{R}^d$, se cumple que

$$T^\alpha u(x) \leq e^{-\alpha}[u(x + y + v) + L(x, v)].$$

En particular, se cumple si evaluamos u en el punto $x + y$ y $v = v^* - y$, esto es,

$$T^\alpha u(x + y) \leq e^{-\alpha}[u(x + v^*) + L(x + y, v^* - y)]. \quad (2.5)$$

De manera análoga se obtiene que

$$T^\alpha u(x - y) \leq e^{-\alpha}[u(x + v^*) + L(x - y, v^* + y)]. \quad (2.6)$$

Por otro lado, haciendo la expansión en series de Taylor (de orden dos) del lagrangiano $L(x, v^* + y)$ alrededor del punto (x, v^*) obtenemos

$$L(x, v^* + y) = L(x, v^*) + (0, y)^T DL(x, v^*) + (0, y)^T D^2 L(x, v^*)(0, y) + R(y^2) \quad (2.7)$$

donde $DL(x, v^* + y)$ denota el gradiente de L evaluado en el punto (x, v^*) , $D^2 L(x, v^*)$ es la matriz hessiana y $R(y^2)$ es el residuo de la serie de Taylor. De manera análoga obtenemos

$$L(x, v^* - y) = L(x, v^*) - (0, y)^T DL(x, v^*) + (0, y)^T D^2 L(x, v^*)(0, y) - R(y^2) \quad (2.8)$$

sumando las ecuaciones (2.7) y (2.8) se sigue que

$$L(x, v^* + y) + L(x, v^* - y) = 2L(x, v^*) + 2(0, y)^T D^2 L(x, v^*)(0, y)$$

recordemos que el hessiano se puede ver como una forma bilineal luego

$$\begin{aligned} L(x, v^* + y) + L(x, v^* - y) - 2L(x, v^*) &\leq 2|(0, y)^T D^2 L(x, v^*)(0, y)| \\ &\leq 2|D^2 L(x, v^*)| \cdot |y|^2 \end{aligned}$$

al tomar $C := 2|D^2L(x, v^*)|$ la desigualdad anterior queda reescrita como

$$L(x, v^* + y) + L(x, v^* - y) - 2L(x, v^*) \leq C|y|^2. \quad (2.9)$$

Ahora, multiplicamos por -2 la ecuación (2.4) entonces

$$-2T^\alpha u(x) = -2e^{-\alpha}[u(x + v^*) + L(x, v^*)] \quad (2.10)$$

Ahora, sumando las ecuaciones (2.5), (2.6), (2.10) y usando el hecho que $e^{-\alpha} \leq 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} T^\alpha u(x + y) - 2T^\alpha u(x) + T^\alpha u(x + y) &\leq -2e^{-\alpha}[u(x + v^*) + L(x, v^*)] \\ &\quad + e^{-\alpha}[u(x + v^*) + L(x + y, v^* - y)] \\ &\quad + e^{-\alpha}[u(x + v^*) + L(x - y, v^* + y)] \\ &\leq -2u(x + v^*) - 2L(x, v^*) \\ &\quad + u(x + v^*) + L(x + y, v^* - y) \\ &\quad + u(x + v^*) + L(x - y, v^* + y) \\ &= -2L(x, v^*) + L(x + y, v^* - y) + L(x - y, v^* + y). \end{aligned}$$

De lo anterior y usando la desigualdad (2.9) se concluye que

$$T^\alpha u(x + y) - 2T^\alpha u(x) + T^\alpha u(x + y) \leq C|y|^2$$

lo anterior nos dice que el operador T^α es semiconcavo de manera uniforme. La última afirmación se sigue del hecho que para funciones periódicas, semiconcavidad implica Lipschitz continuidad.

□

Recordemos que por hipótesis el lagrangiano L cumple ser positivo y además por el hecho de ser una función continua y la variable x esta sobre un compacto se tiene que $L(x, 0)$ esta acotado. Estas cotas sobre el lagrangiano son de utilidad al momento de buscar cotas para el punto fijo del operador T^α .

2.6 Lema. *Suponga que u^α es el punto fijo de T^α y que además $0 \leq L(x, 0) \leq C$ entonces tenemos la siguiente cota*

$$\|u^\alpha\|_\infty \leq \frac{C}{1 - e^{-\alpha}}.$$

Demostración:

Como u^α es punto fijo de T^α se sigue que

$$\begin{aligned} u^\alpha(x) &= T^\alpha u^\alpha(x) = e^{-\alpha} \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u^\alpha(x+v) + L(x, v)] \\ &\leq e^{-\alpha} [u^\alpha(x+v) + L(x, v)], \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

En particular, se cumple para $v = 0$, es decir,

$$u^\alpha(x) \leq e^{-\alpha} [u^\alpha(x) + L(x, 0)] = e^{-\alpha} u^\alpha(x) + e^{-\alpha} L(x, 0)$$

ahora, como $0 \leq L(x, 0) \leq C$ y $e^{-\alpha} \leq 1$ obtenemos que

$$u^\alpha(x) \leq e^{-\alpha} u^\alpha(x) + e^{-\alpha} L(x, 0) \leq e^{-\alpha} u^\alpha(x) + C$$

lo cual implica que $u^\alpha(x)(1 - e^{-\alpha}) \leq C$ tomando supremo sobre x se sigue que

$$\|u^\alpha\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha(x) \leq \frac{C}{1 - e^{-\alpha}}.$$

□

El siguiente teorema es el análogo, para esta versión discreta, del teorema de estabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi en sistemas continuos.

2.7 Teorema. *Existe una función periódica semiconcava u tal que, a través de alguna sub-
sucesión, $u^\alpha - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha \rightarrow u$. Más aún, existe un número $\bar{H}$ tal que*

$$(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha \rightarrow \bar{H}.$$

Además, u satisface la ecuación (2.3), esto es,

$$u(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u(x+v) + L(x, v) + \bar{H}].$$

Demostración:

Como u^α es punto fijo se sigue que $T^\alpha u^\alpha = u^\alpha$ luego del lema (2.5) se tiene que

$$\|u^\alpha - u^\beta\|_\infty = \|T^\alpha u^\alpha - T^\beta u^\beta\|_\infty \leq M|\alpha - \beta| \tag{2.11}$$

lo cual implica que u^α es uniformemente Lipschitz en α y de aquí que $u^\alpha - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha$ es uniformemente Lipschitz (al ser $\min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha$ constante), con respecto a α , y consecuentemente acotada por la periodicidad, se tiene que esta sucesión converge uniformemente, posiblemente mediante una subsucesión, a un límite u .

Primero notemos, usando el lema (2.6), que $(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha$ esta acotada

$$\|(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha\|_\infty \leq (1 - e^{-\alpha}) \|u^\alpha\|_\infty \leq (1 - e^{-\alpha}) \frac{C}{1 - e^{-\alpha}} = C.$$

Además, afirmamos que $(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha$ cumple que es Lipschitz y cuya constante de Lipschitz que tiende a cero, sean $\alpha, \beta > 0$ y $x \in \mathbb{T}^d$ luego

$$\begin{aligned} |(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha - (1 - e^{-\beta}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\beta| &= (1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha(x) - (1 - e^{-\beta}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\beta(x) \\ &\leq \min_{x \in \mathbb{T}^d} [(1 - e^{-\alpha}) u^\alpha(x) - (1 - e^{-\beta}) u^\beta(x)] \end{aligned}$$

supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha \leq \beta$ entonces $e^{-\beta} \leq e^{-\alpha}$ lo cual implica que $1 - e^{-\alpha} \leq 1 - e^{-\beta}$ luego, usando la ecuación (2.11), se obtiene que

$$\begin{aligned} |(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha - (1 - e^{-\beta}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\beta| &\leq \min_{x \in \mathbb{T}^d} [(1 - e^{-\alpha}) u^\alpha(x) - (1 - e^{-\beta}) u^\beta(x)] \\ &\leq (1 - e^{-\beta}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} [u^\alpha(x) - u^\beta(x)] \\ &\leq (1 - e^{-\beta}) [u^\alpha(x) - u^\beta(x)] \\ &\leq (1 - e^{-\beta}) M |\alpha - \beta|. \end{aligned}$$

Por tanto, al tomar supremo, $(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha$ es Lipschitz. De lo anterior se tiene que, mediante una subsucesión, $(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha$ converge a una constante definida por $\bar{H}$. Para verificar que se satisface la ecuación (2.3) notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} u^\alpha(x) - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha &= T^\alpha u^\alpha - e^{-\alpha} \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + e^{-\alpha} \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha \\ &= -(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + T^\alpha u^\alpha \\ &= -(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u^\alpha(x + v) + L(x, v)] \\ &= -(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u^\alpha(x + v) - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + L(x, v)] \\ &= -(1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u^\alpha(x + v) - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + L(x, v)] , \end{aligned}$$

de la igualdad anterior tomamos el límite cuando α tiende a cero, esto es,

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(u^\alpha(x) - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha \right) \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(- (1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u^\alpha(x+v) - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + L(x, v)] \right) \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} - (1 - e^{-\alpha}) \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u^\alpha(x+v) - \min_{x \in \mathbb{T}^d} u^\alpha + L(x, v)] \right) \\
 &= \bar{H} + \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u(x+v) + L(x, v)] .
 \end{aligned}$$

de lo anterior obtenemos que $u(x) = \bar{H} + \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u(x+v) + L(x, v)]$.

□

Al igual que en el teorema de Lions-Papanicolao-Varadhan (1.14) se cumple la unicidad del número $\bar{H}$ como lo muestra la siguiente proposición.

2.8 Proposición. *El número $\bar{H}$ es único en el sentido que la ecuación la ecuación de Hamilton-Jacobi discreta (2.3) tiene solución de viscosidad.*

Demostración:

Supongamos (por contradicción) que existen $\bar{H}_1 > \bar{H}_2$ y sus respectivas funciones u_1, u_2 que satisfacen

$$u_i(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u_i(x+v) + L(x, v) + \bar{H}_i] \quad i = 1, 2,$$

en el sentido viscoso. Luego, es posible encontrar una sucesión de puntos (x_j, v_j) con $x_{j+1} = x_j + v_j$ y $1 \leq j \leq n$ tal que cumplan los siguientes:

$$u_1(x_1) = u_1(x_n + v_n) + \sum_{j=1}^n L(x_j, v_j) + \bar{H}_1 n, \quad (2.12)$$

$$u_2(x_1) \leq u_2(x_n + v_n) + \sum_{j=1}^n L(x_j, v_j) + \bar{H}_2 n, \quad (2.13)$$

restando la ecuación (2.12) a la ecuación (2.13) obtenemos que

$$u_2(x_1) - u_1(x) \leq u_2(x_n + v_n) - u_1(x_n + v_n) + n(\bar{H}_2 - \bar{H}_1)$$

o equivalentemente

$$u_2(x_1) - u_1(x_1) - u_2(x_n + v_n) + u_1(x_n + v_n) \leq n(\bar{H}_2 - \bar{H}_1)$$

como u_1 y u_2 son acotadas se sigue que $C \leq n(\bar{H}_2 - \bar{H}_1)$. Como supusimos que $\bar{H}_1 > \bar{H}_2$ se cumple que $\bar{H}_2 - \bar{H}_1 < 0$ lo cual implica que

$$C \leq n(\bar{H}_2 - \bar{H}_1) \longrightarrow -\infty$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, lo cual es una contradicción.

□

El siguiente teorema muestra la relación importante que cumple el número $\bar{H}$, obtenido en la ecuación (2.3), con el valor del ínfimo del teorema (2.3).

2.9 Teorema.

$$-\inf_{\mu \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L \, d\mu = \bar{H}.$$

Demostración:

Del teorema (2.3) tenemos que

$$-\inf_{\mu \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L \, d\mu = \inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^d)} \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [\psi(x) - \psi(x+v) - L(x,v)].$$

De la definición de $\bar{H}$ se tiene que

$$\inf_{\phi \in C_*^0} \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [\phi(x) - \phi(x+v) - L(x,v)] \leq \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [u(x) - u(x+v) - L(x,v)] = \bar{H}.$$

Supongamos que ψ cumple

$$\sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [\psi(x) - \psi(x+v) - L(x,v)] < \bar{H}$$

entonces se debe tener que para todo x ,

$$\psi(x) < \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [\psi(x+v) + L(x,v) + \bar{H}] - \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que la diferencia funciones $\psi - u$ tiene un máximo absoluto en algún punto x_0 , esto ya que tanto ψ y u son funciones con dominio $\mathbb{T}^d$ (compacto) y con codominio a los reales. Para x_0 se cumple que

$$u(x_0) = u(x_0 + v_0) + L(x_0, v_0) + \bar{H}.$$

Además, se cumple que

$$\psi(x_0) \leq \psi(x_0 + v_0) + L(x_0, v_0) + \bar{H} - \varepsilon.$$

Restando las dos ecuaciones anteriores se sigue que

$$\psi(x_0) - u(x_0) \leq \psi(x_0 + v_0) - u(x_0 + v_0) - \varepsilon$$

pero esto contradice el hecho que x_0 es máximo absoluto de la función $\psi - u$. Por lo tanto, se debe cumplir

$$\inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^d)} \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} [\psi(x) - \psi(x+v) - L(x,v)] = \bar{H}.$$

Se concluye que $-\inf_{\mu \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1} \int_{\Omega} L \, d\mu = \bar{H}.$

□

2.3. Principio de programación dinámica discreto

Vamos a estudiar el principio de programación dinámica en tiempo discreto y las ecuaciones de Euler discretas para la ecuación de Hamilton-Jacobi discreta. Vamos a dar unas definiciones previas las cuales se pueden consultar con mayor detalle en [7].

Consideremos Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$. Asociemos a una función $u \in C(\Omega)$ y $x \in \Omega$ los siguientes conjuntos

$$D^+u(x) := \left\{ p \in \mathbb{R}^d : \limsup_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \frac{u(y) - u(x) - p \cdot (y - x)}{|x - y|} \leq 0 \right\},$$

$$D^-u(x) := \left\{ p \in \mathbb{R}^d : \liminf_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \frac{u(y) - u(x) - p \cdot (y - x)}{|x - y|} \geq 0 \right\}.$$

Estos conjuntos son llamados de manera respectiva, el **super-diferencial** y **sub-diferencial** (o semidiferenciales) de u en x . El siguiente lema nos describe los conjuntos $D^+u(x)$, $D^-u(x)$ en términos de las funciones de prueba.

2.10 Lema. *Sea $u \in C(\Omega)$ entonces*

- a) $p \in D^+u(x)$ si y sólo si existe $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $D\varphi(x) = p$ y $u - \varphi$ tiene un máximo local en x .

b) $p \in D^-u(x)$ si y sólo si existe $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $D\varphi(x) = p$ y $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x .

Demostración:

a) Sea $p \in D^+u(x)$ entonces para algún $\delta > 0$,

$$u(y) \leq u(x) + p \cdot \sigma(|y - x|)|y - x| \quad \forall y \in B(x, \delta),$$

donde σ es una función creciente en $[0, +\infty)$ tal que $\sigma(0) = 0$. Ahora, definamos la función β como sigue

$$\beta(r) = \int_0^r \sigma(t) dt$$

Ahora notemos que si evaluamos $\beta(0) = 0$ y si derivamos β , del teorema fundamental del cálculo, obtenemos que $\beta'(r) = \sigma(r)$ luego $\beta'(0) = \sigma(0) = 0$ y además se cumple que $\beta(2r) \geq \sigma(r)r$ lo cual implica que la función φ , definida por

$$\varphi(y) = u(x) + p \cdot (y - x) + \beta(2|y - x|)$$

es de clase $C^1(\mathbb{R}^d)$ y $D\varphi(x) = p$. Más aún, para $y \in B(x, \delta)$ se cumple que

$$(u - \varphi)(y) \leq \sigma(|y - x|)|y - x| - \beta(2|y - x|) \leq 0 = (u - \varphi)(x).$$

Para el regreso notemos que

$$u(y) - u(x) - D\varphi(x) \cdot (y - x) \leq \varphi(y) - \varphi(x) - D\varphi(x) \cdot (y - x)$$

para $y \in B(x, \delta)$ y por tanto la prueba esta completa.

b) Notemos que $D^-u(x) = -(D^+(-u)(x))$ luego aplicando el inciso a) aplicado a la función $-u$ obtenemos b).

□

Algunas propiedades que necesitaremos del sub-diferencial y super-diferencial son las siguientes. Recordemos que estamos denotando a la derivada total por D .

2.11 Lema. Sea $u \in C(\Omega)$ y $x \in \Omega$ entonces

a) $D^+u(x)$ y $D^-u(x)$ son subconjuntos convexos cerrados (pueden ser vacíos) de $\mathbb{R}^d$.

2.3. PRINCIPIO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA DISCRETO

b) Si u es diferenciable en x entonces $\{Du(x)\} = D^+u(x) = D^-u(x)$.

c) Si para algún x los dos conjuntos $D^+u(x)$ y $D^-u(x)$ son no vacíos entonces

$$D^+u(x) = D^-u(x) = \{Du(x)\} .$$

Demostración:

a) Probemos que $D^+u(x)$ es convexo. Si $D^+u(x) = \emptyset$ pues no tenemos nada que hacer. Supongamos que $D^+u(x) \neq \emptyset$, sean $a, b \in D^+u(x)$ y $0 \leq t \leq 1$ luego tenemos que

$$\begin{aligned} & u(y) - u(x) - [(1-t)a + tb] \cdot (y-x) \\ &= [(1-t) + t]u(y) - [(1-t) + t]u(x) - [(1-t)a + tb] \cdot (y-x) \\ &= (1-t)[u(y) - u(x) - a \cdot (y-x)] + t[u(y) - u(x) - b \cdot (y-x)] \end{aligned}$$

dividiendo la expresión $u(y) - u(x) - [(1-t)a + tb] \cdot (y-x)$ entre $|y-x|$ y luego calculando $\limsup$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \limsup_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \frac{u(y) - u(x) - [(1-t)a + tb] \cdot (y-x)}{|y-x|} \\ &= \limsup_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \frac{(1-t)[u(y) - u(x) - a \cdot (y-x)] + t[u(y) - u(x) - b \cdot (y-x)]}{|y-x|} \\ &= (1-t) \limsup_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \frac{u(y) - u(x) - a \cdot (y-x)}{|y-x|} + t \limsup_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \frac{u(y) - u(x) - b \cdot (y-x)}{|y-x|} \leq 0 \end{aligned}$$

lo anterior implica que $(1-t)a + tb \in D^+u(x)$, es decir, $D^+u(x)$ es convexo. De manera analoga se prueba que $D^-u(x)$ es convexo.

Para probar que $D^+u(x)$ es cerrado consideremos una sucesión $p_n \rightarrow p$ tal que $p_n \in D^+u(x)$ para todo n y supongamos (por contradicción) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(y_n) - u(x) - p \cdot (y_n - x)}{|y_n - x|} = \alpha > 0 \quad (2.14)$$

para una sucesión $y_n \rightarrow x$. Para k suficientemente largo tenemos que $|p_k - p| \leq \frac{\alpha}{2}$ entonces sumando y restando $p_k \cdot (y_n - x)/|y_n - x|$ a la ecuación (2.14) obtenemos la

siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(y_n) - u(x) - p \cdot (y_n - x)}{|y_n - x|} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(y_n) - u(x) - p \cdot (y_n - x) + p_k \cdot (y_n - x) - p_k \cdot (y_n - x)}{|y_n - x|} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(y_n) - u(x) - p_k \cdot (y_n - x) + (p_k - p) \cdot (y_n - x)}{|y_n - x|} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(y_n) - u(x) - p_k \cdot (y_n - x) + |p_k - p| \cdot |y_n - x|}{|y_n - x|}
 \end{aligned}$$

luego como $|p_k - p| \leq \frac{\alpha}{2}$ obtenemos

$$\alpha \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u(y_n) - u(x) - p_k \cdot (y_n - x)}{|y_n - x|} + \frac{\alpha}{2}$$

y de lo anterior obtenemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u(y_n) - u(x) - p_k \cdot (y_n - x)}{|y_n - x|} \geq \frac{\alpha}{2},$$

lo cual contradice que $p_k \in D^+u(x)$.

b) Primero observemos que para cualquier $x, y \in \Omega$ y $p, q \in \mathbb{R}^d$ tenemos que

$$(p - q) \cdot \frac{y - x}{|y - x|} = \frac{u(y) - u(x) - q \cdot (y - x)}{|y - x|} - \frac{u(y) - u(x) - p \cdot (y - x)}{|y - x|}. \quad (2.15)$$

Ahora, sea n un número natural. Definamos $y_n := x + (1/n)(p - q)$ y tomemos $y = y_n$ en la ecuación (2.15) luego

$$|p - q| = \frac{u(y_n) - u(x) - q \cdot (y_n - x)}{|y_n - x|} - \frac{u(y_n) - u(x) - p \cdot (y_n - x)}{|y_n - x|}$$

por definición de $\limsup$ y $\liminf$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 |p - q| &\leq \limsup_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \frac{u(y) - u(x) - q \cdot (y - x)}{|y - x|} \\
 &\quad - \liminf_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \frac{u(y) - u(x) - p \cdot (y - x)}{|y - x|} \leq 0
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si u es diferenciable en x entonces $D^+u(x) \cap D^-u(x) \neq \emptyset$ ya que ambos conjuntos contienen al conjunto $Du(x)$. En este caso $D^+u(x)$ y $D^-u(x)$ se reduce a conjunto unipuntuales como consecuencia de la ecuación (2.16).

- c) Si para algún x se tiene que $D^+u(x) \neq \emptyset$, $D^-u(x) \neq \emptyset$ entonces por la ecuación (2.16) $D^+u(x) = D^-u(x)$ es unipuntual. Lo anterior implica que u es diferenciable en x con $\{Du(x)\} = D^+u(x) = D^-u(x)$.

□

En el siguiente teorema vamos a hacer uso de algunas de las propiedades enunciadas del super-diferencial, sub-diferencial y el hecho que L es suave en ambas entradas.

2.12 Teorema. *Sea u una solución continua de la ecuación*

$$u(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u(x+v) + L(x, v) + \bar{H}]. \quad (2.17)$$

entonces se cumplen los siguientes:

- 1.- *Para cada x existe un óptimo $v(x)$ (posiblemente no único) tal que*

$$u(x) = u(x + v(x)) + L(x, v(x)) + \bar{H}.$$

- 2.- *Se tiene que u es diferenciable en $x + v(x)$, y además*

$$D_x u(x + v(x)) + D_v L(x, v(x)) = 0. \quad (2.18)$$

- 3.- *Si u es diferenciable en x entonces*

$$D_x u(x) = D_x L(x, v(x)) - D_v L(x, v(x)). \quad (2.19)$$

Demostración:

- 1.- Sea $x_0 \in \mathbb{T}^d$ fijo. Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u(x_0 + v) + L(x_0, v) + \bar{H}] = \inf_{v \in \bar{B}(0, \delta)} [u(x_0 + v) + L(x_0, v) + \bar{H}]. \quad (2.20)$$

En efecto, observemos que como L tiende a infinito cuando $\|v\|$ tiende a infinito podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u(x_0 + v) + L(x_0, v) + \bar{H} > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, ya que podemos sumarle una constante adecuada al lagrangiano. Más aún, podemos suponer que $u(x_0) = \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u(x_0 + v) + L(x_0, v) + \bar{H}] > 0$. Ahora, del hecho que L es superlineal y u es acotado, se sigue que si $\|v\| \rightarrow +\infty$ entonces

$$u(x_0 + v) + L(x_0, v) + \bar{H} \rightarrow +\infty,$$

esto es, dado $K > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|v\| > \delta$ entonces $u(x_0 + v) + L(x_0, v) + \bar{H} > K$. Ahora, sea $v_0 \in \mathbb{R}^d$ fijo luego tomando $K = u(x_0 + v_0) + L(x_0, v_0) + \bar{H} > 0$ se tiene que existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} u(x_0 + v) + L(x_0, v) + \bar{H} &> K = u(x_0 + v_0) + L(x_0, v_0) + \bar{H} \\ &\geq \inf_{w \in \mathbb{R}^d} [u(x_0 + w) + L(x_0, w) + \bar{H}] \end{aligned}$$

siempre que $\|v\| > \delta$. De manera equivalente lo anterior se puede reescribir como

$$u(x_0 + v) + L(x_0, v) + \bar{H} \leq \inf_{w \in \mathbb{R}^d} [u(x_0 + w) + L(x_0, w) + \bar{H}] \quad (2.21)$$

si $\|v\| \leq \delta$, o bien, $v \in \bar{B}(0, \delta)$. Tomando ínfimo en (2.21) sobre $\bar{B}(0, \delta)$ obtenemos

$$\inf_{w \in \bar{B}(0, \delta)} [u(x_0 + w) + L(x_0, w) + \bar{H}] \leq \inf_{w \in \mathbb{R}^d} [u(x_0 + w) + L(x_0, w) + \bar{H}] \quad (2.22)$$

Para la otra desigualdad, notemos que $\bar{B}(0, \delta) \subset \mathbb{R}^d$ luego

$$\inf_{w \in \mathbb{R}^d} [u(x_0 + w) + L(x_0, w) + \bar{H}] \leq \inf_{w \in \bar{B}(0, \delta)} [u(x_0 + w) + L(x_0, w) + \bar{H}]. \quad (2.23)$$

De las desigualdades (2.22) y (2.23) se sigue la afirmación.

Ahora, como por hipótesis u es continua y además sabemos que $\bar{B}(0, \delta)$ es compacto se sigue que existe $v(x_0) \in \mathbb{R}^d$ tal que $u(x_0) = u(x_0 + v(x_0)) + L(x_0, v(x_0)) + \bar{H}$ luego usando la igualdad (2.20) se obtiene lo deseado.

2.- Notemos que del inciso anterior se tiene que dado x se cumple que

$$\begin{aligned} u(x + y) &= \inf_{v \in \mathbb{R}^d} [u(x + y + v) + L(x + y, v) + \bar{H}] \\ &= u(x + y + v(x + y)) + L(x + y, v(x + y)) + \bar{H} \\ &\leq u(x + y + \hat{v}(x + y)) + L(x + y, \hat{v}(x + y)) + \bar{H} \end{aligned} \quad (2.24)$$

lo anterior se cumple para todo $\hat{v}(x) \in \mathbb{R}^d$, en particular, podemos tomar $\hat{v}(x + y) = v(x) - y$ y de aquí que

$$\begin{aligned} u(x + y) &\leq u(x + y + \hat{v}(x + y)) + L(x + y, \hat{v}(x + y)) + \bar{H} \\ &= u(x + v(x)) + L(x + y, v(x) - y) + \bar{H}. \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que

$$u(x + y) \leq u(x + v(x)) + L(x + y, v(x) - y) + \bar{H} \quad (2.25)$$

notemos que el lado derecho de la ecuación anterior es diferenciable en y , pues $L \in C^1$ y u no depende de y , lo cual implica, por el inciso b) del lema (2.11), que u tiene super-diferencial no vacío. Por otro lado, si en la ecuación (2.25) hacemos $y = 0$ obtenemos que para todo $\hat{v}(x) \in \mathbb{R}^d$ se cumple que

$$u(x) \leq u(x + y + \hat{v}(x + y)) + L(x + y, \hat{v}(x + y)) + \bar{H}.$$

En particular, podemos tomar $\hat{v}(x + y) = v(x) + y$ lo cual implica que

$$u(x) \leq u(x + v(x) + y) + L(x, v(x) + y) + \bar{H},$$

de la ecuación anterior se sigue que u tiene sub-diferencial no vacío en el punto $x + v(x)$. Como sub-diferencial y super-diferencial son ambos no vacíos se sigue del inciso c) del lema (2.11) que u es diferenciable en el punto $x + v(x)$.

Para probar la ecuación (2.18) observemos que de la desigualdad (2.25) se convierte en igualdad cuando $y = 0$ así derivando respecto a y y evaluando en $y = 0$ obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 0 = D_y u(x) \Big|_{y=0} &= D_y [u(x + v(x) + y) + L(x, v(x) + y) + \bar{H}] \Big|_{y=0} \\ &= D_x u(x + v(x) + y) \Big|_{y=0} + D_v L(x, v(x) + y) \Big|_{y=0} \\ &= D_x u(x + v(x)) + D_v L(x, v(x)). \end{aligned}$$

3.- Para probar ahora la ecuación (2.19) recordemos nuevamente que para $y = 0$ la desigualdad (2.25) es una igualdad entonces

$$\begin{aligned} D_x u(x) = D_y u(x + y) \Big|_{y=0} &= D_y [u(x + v(x)) + L(x + y, v(x) - y) + \bar{H}] \Big|_{y=0} \\ &= D_x L(x + y, v(x) - y) \Big|_{y=0} - D_v L(x + y, v(x) - y) \Big|_{y=0} \\ &= D_x L(x, v(x)) - D_v L(x, v(x)) \end{aligned}$$

Por tanto, $D_x L(x, v(x)) - D_v L(x, v(x)) = 0$.

□

Una consecuencia del teorema anterior es el siguiente corolario. Para ello, sea H , el hamiltoniano definido por

$$H(x, p) = \sup_{v \in \mathbb{R}^d} [-v \cdot p - L(x, v)]. \quad (2.26)$$

2.13 Corolario. (*Ecuaciones de Hamilton discretas*) Sean

$$p_n = D_x u(x_n) \quad , \quad x_{n+1} = x_n + v(x_n)$$

entonces se cumple que

$$\begin{cases} p_{n+1} - p_n = D_x H(x_n, p_{n+1}) \\ x_{n+1} - x_n = -D_p H(x_n, p_{n+1}) \end{cases}. \quad (2.27)$$

Demostración:

Para probar la primera ecuación notemos que usando el hecho que $x_{n+1} = x_n + v(x_n)$ y la ecuación (2.18) obtenemos

$$p_{n+1} = D_x u(x_{n+1}) = D_x u(x_n + v(x_n)) = -D_v L(x_n, v(x_n)).$$

Ahora de la ecuación (2.19) se tiene que

$$p_n = D_x u(x_n) = D_x L(x_n, v(x_n)) - D_v L(x_n, v(x_n))$$

restando estas dos últimas ecuaciones se sigue que

$$p_{n+1} - p_n = -D_v L(x_n, v(x_n)) - D_x L(x_n, v(x_n)) + D_v L(x_n, v(x_n)) = -D_x L(x_n, v(x_n)).$$

De la definición de hamiltoniano (2.26), tenemos que $D_x H(x, p) = -D_x L(x, v)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior se obtiene que

$$p_{n+1} - p_n = -D_x L(x_n, v(x_n)) = D_x H(x_n, p_{n+1}).$$

Para probar la otra ecuación derivamos respecto a p en la ecuación (2.26) entonces

$$D_p H(x, p) = -D_p (v \cdot p) = -v$$

2.3. PRINCIPIO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA DISCRETO

luego tomando las evaluaciones $x = x_n, p = p_{n+1}$ y $v = v(x_n)$ la ecuación anterior queda como $-D_p H(x_n, p_{n+1}) = v(x_n)$ luego por definición tenemos que $v(x_n) = x_{n+1} - x_n$ así

$$-D_p H(x_n, p_{n+1}) = v(x_n) = x_{n+1} - x_n.$$

□

Los resultados anteriormente expuestos en este capítulo dan en conjunto una discretización del problema (continuo) de Aubry-Mather, es importante recalcar que dicha discretización no es única. En el capítulo siguiente lo que haremos será tomar un problema discreto de Aubry-Mather y a partir de este reconstruir el caso continuo.

Capítulo 3

Convergencia del modelo discreto de Aubry-Mather

Los resultados aquí expuestos son extraídos de [10]. Vamos a considerar un hamiltoniano de Tonelli $H(x, p) : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotaremos por $L(x, v)$ al lagrangiano asociado a $H(x, p)$. Vamos a considerar la siguiente ecuación: la ecuación celda,

$$H(x, du(x)) = \bar{H} \tag{3.1}$$

donde $u(x)$ satisfacen la ecuación (3.1) en el sentido de viscosidad. Nuestro objetivo principal es describir un esquema de aproximación ergódica para la ecuación anterior. Notemos que (3.1) es una ecuación diferencial parcial degenerada de primer orden con dos incógnitas $(\bar{H}, u)$. La constante $\bar{H}$ es única y se denomina hamiltoniana efectiva. La función $u(x)$ es continua y periódica pero puede no ser única.

3.1. Interacciones de corto alcance.

A lo largo de este capítulo vamos a trabajar con dos aplicaciones, llamadas la acción discreta y la acción mínima. Las cuales definimos a continuación.

3.1 Definición.

- Definimos a $\mathcal{L}_\tau(x, y)$ como **la acción discreta** de L la cual esta dada por

$$\mathcal{L}_\tau(x, y) := \tau L\left(x, \frac{y-x}{\tau}\right), \quad \tau > 0. \quad (3.2)$$

- Dados $x, y \in \mathbb{R}^d$ se define **la acción mínima** $\mathcal{E}_\tau(x, y)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}_\tau := \inf \left\{ \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt : \gamma \in C^{ab}([0, \tau], \mathbb{R}^d), \gamma(0) = x, \gamma(\tau) = y \right\}. \quad (3.3)$$

la cual se toma sobre todo $\tau > 0$. En la ecuación (3.3), el ínfimo se alcanza mediante alguna curva C^2 por el teorema de Tonelli-Weierstrass.

Las dos interacciones anteriores $\mathcal{L}_\tau(x, y)$ y $\mathcal{E}_\tau(x, y)$ pertenecen a una clase de interacciones parametrizadas, llamadas interacciones de corto alcance, cuya definición formal es la siguiente.

3.2 Definición. Una familia paramétrica de funciones $E_\tau(x, y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ indexada por $\tau > 0$ es llamada **una interacción de corto alcance** si satisface las siguientes propiedades:

H1) $E_\tau(x, y)$ es continua en (x, y) para cada $\tau > 0$;

H2) $E_\tau(x, y)$ es periódica traslacional para cada $\tau > 0$;

$$E_\tau(x + k, y + k) = E_\tau(x, y), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \quad y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d;$$

H3) $E_\tau(x, y)$ es coercitivo para cada $\tau > 0$:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\|x-y\| \geq R} E_\tau(x, y) = +\infty;$$

H4) $E_\tau(x, y)$ es uniformemente acotada: para cada $R > 0$

$$\inf_{\tau \in (0, 1]} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\tau} E_\tau(x, y) > -\infty, \quad \sup_{\tau \in (0, 1]} \sup_{\|y-x\| \leq \tau R} \frac{1}{\tau} E_\tau(x, y) < +\infty;$$

H5) $E_\tau(x, y)$ es uniformemente superlineal:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\tau \in (0, 1]} \inf_{\|x-y\| \geq \tau R} \frac{E_\tau(x, y)}{\|x - y\|} = +\infty;$$

H6) E_τ es uniformemente Lipschitz: para cada $R > 0$, existe una constante $C(R) > 0$ tal que para cada $\tau \in (0, 1]$ y para cada $x, y, z \in \mathbb{R}^d$,

■ si $\|y - x\| \leq \tau R$ y $\|z - x\| \leq \tau R$ entonces

$$|E_\tau(x, z) - E_\tau(x, y)| \leq C(R) \|z - y\|,$$

■ si $\|z - x\| \leq \tau R$ y $\|z - y\| \leq \tau R$ entonces

$$|E_\tau(x, z) - E_\tau(y, z)| \leq C(R) \|y - x\|,$$

Nuestro siguiente objetivo será mostrar que, bajo las condiciones adecuadas, la acción discreta converge a la acción mínima. Más aún, daremos una cota que indique cual es la tasa de convergencia, pero antes enunciaremos dos lemas que nos ayudarán con este objetivo cuyas pruebas pueden ser consultados en [2].

3.3 Lema. (Compacidad a priori para minimizantes) Sea $H(x, p) : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ un hamiltoniano de Tonelli. Para cada $R > 0$ existe una constante $C(R) > 0$ tal que para cada $\tau > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$ satisfaciendo $\|y - x\| \leq \tau R$, y para cada minimizante $\gamma : [0, \tau] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfaciendo

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(\tau) = y, \quad \int_0^\tau L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds = \mathcal{E}_\tau(x, y),$$

tenemos que $\|\dot{\gamma}\| \leq C(R)$ y $\|\ddot{\gamma}\| \leq C(R)$.

3.4 Lema. (Minimizantes de Tonelli) Sea M una variedad conexa. Supongamos que $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ es un lagrangiano de clase C^1 convexo en las fibras, superlineal sobre cada

3.1. INTERACCIONES DE CORTO ALCANCE.

subconjunto compacto de M , e inferiormente acotado por una métrica riemanniana completa en M entonces, para cada $x, y \in M$, y cada $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, existe una curva absolutamente continua $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ con $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ que es un minimizante en $C^{ab}([a, b], M)$.

Con lo anterior tenemos la siguiente proposición.

3.5 Proposición. Sea $H : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltoniano de Tonelli y L el lagrangiano asociado a H ,

I) Las dos interacciones de corto alcance $(\mathcal{L}_\tau(x, y))_{\tau>0}$ y $(\mathcal{E}_\tau(x, y))_{\tau>0}$, definidas en (3.2) y (3.3), respectivamente, satisfacen las hipótesis (H1)-(H6).

II) Para cada $R > 0$, existe una constante $C(R) > 0$ tal que si $\tau \in (0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ satisface que $\|y - x\| \leq \tau R$, entonces

$$|\mathcal{E}_\tau(x, y) - \mathcal{L}_\tau(x, y)| \leq \tau^2 C(R).$$

Demostración:

Para I) vamos a probar primero las propiedades (H1) – (H6) para $\mathcal{L}_\tau$ y posteriormente para $\mathcal{E}_\tau$. Recordemos que dado $\tau > 0$, se define $\mathcal{L}_\tau(x, y) = \tau L\left(x, \frac{y - x}{\tau}\right)$.

H1) Como L es de clase C^2 , en particular, tenemos que L es continua se sigue, de la definición de $\mathcal{L}_\tau$ su continuidad.

H2) Sea $k \in \mathbb{Z}^d$ luego recordando que L es periódica, con periodo uno, en la primera entrada se tiene que

$$\mathcal{L}_\tau(x + k, y + k) = \tau L\left(x + k, \frac{y + k - x - k}{\tau}\right) = \tau L\left(x + k, \frac{y - x}{\tau}\right) = \mathcal{L}_\tau(x, y)$$

H3) Recordemos que L es superlineal, es decir, existe $K > 0$ y $C(K) > -\infty$ tal que $L(x, y) \geq K\|(x, y)\| + C(K)$. Luego, si $\|y - x\| \geq R$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\tau(x, y) &= \tau L\left(x, \frac{y-x}{\tau}\right) \geq \tau\left(K\left\|\left(x, \frac{y-x}{\tau}\right)\right\| + C(K)\right) \\ &\geq \tau\left(K\left\|\frac{y-x}{\tau}\right\| + C(K)\right) = K\|y-x\| + \tau C(K) \\ &\geq KR + \tau C(K). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Notemos que como $C(K) > -\infty$ y $K, R > 0$ se tiene que $KR + \tau C(K) > -\infty$. De lo anterior se tiene que

$$\inf_{\|y-x\| \geq R} \mathcal{L}_\tau(x, y) \geq KR + C(K)$$

tomando el límite cuando R tiende a infinito se sigue que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\|y-x\| \geq R} \mathcal{L}_\tau(x, y) = +\infty.$$

H4) Notemos que de la ecuación (3.4) tenemos que $\mathcal{L}_\tau(x, y) \geq KR + \tau C(K)$ luego

$$\frac{1}{\tau} \mathcal{L}_\tau(x, y) \geq \frac{KR}{\tau} + C(K) > -\infty,$$

de lo anterior se tiene que $\inf_{\tau \in (0,1]} \inf_{x,y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\tau} \mathcal{L}_\tau(x, y) > -\infty$. Probemos ahora que

$$\sup_{\tau \in (0,1]} \sup_{\|y-x\| \leq \tau R} \frac{1}{\tau} \mathcal{L}_\tau(x, y) < +\infty.$$

Notemos que

$$\frac{1}{\tau} \mathcal{L}_\tau(x, y) = L\left(x, \frac{y-x}{\tau}\right)$$

ahora, tenemos que existe $S > 0$ suficientemente grande tal que $\tau R < S$ luego $\|y-x\| \leq S$. Así L es continua sobre un compacto ($\|y-x\| \leq S$) se tiene que alcanza su máximo, esto es, $L\left(x, \frac{y-x}{\tau}\right) \leq M(S)$, para algún $M(S) > 0$. De aquí que

$$\sup_{\|y-x\| \leq \tau R} L\left(x, \frac{y-x}{\tau}\right) \leq M(S) < +\infty.$$

H5) Notemos que podemos hacer el siguiente cambio de variable $v = \frac{y-x}{\tau}$, o equivalentemente, $\tau v = y-x$ luego

$$\frac{\mathcal{L}_\tau(x, y)}{\|x-y\|} = \frac{\tau L\left(x, \frac{y-x}{\tau}\right)}{\|x-y\|} = \frac{\tau L(x, v)}{\tau\|v\|} = \frac{L(x, v)}{\|v\|}$$

por la superlinealidad de L se tiene que dado $K > 0$ existe $C(K) > -\infty$ tal que $L(x, v) \geq K\|v\| + C(K)$ luego

$$\frac{\mathcal{L}_\tau(x, y)}{\|x - y\|} = \frac{L(x, v)}{\|v\|} \geq K + \frac{C(K)}{\|v\|}.$$

De lo anterior podemos considerar dos casos: caso 1) $C(K) \geq 0$, o bien, caso 2) $C(K) < 0$. Para el caso 1) tenemos que $K + C(K)/\|v\| \geq K$ luego

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\tau \in (0, 1]} \inf_{\|x - y\| \geq \tau R} \frac{\mathcal{L}_\tau(x, y)}{\|x - y\|} \geq K.$$

Para el caso 2), observemos que $\tau\|v\| = \|x - y\| \geq \tau R$ lo cual implica que $\|v\| \geq R$, o equivalentemente, $\frac{1}{R} \geq \frac{1}{\|v\|}$ multiplicando por $C(K) < 0$ ambos lados de la desigualdad obtenemos que $\frac{C(K)}{R} \leq \frac{C(K)}{\|v\|}$ de esta manera la desigualdad anterior quedaría como

$$\frac{\mathcal{L}_\tau(x, y)}{\|x - y\|} \geq K + \frac{C(K)}{\|v\|} \geq K + \frac{C(K)}{R}$$

lo anterior implica que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\tau \in (0, 1]} \inf_{\|x - y\| \geq \tau R} \frac{\mathcal{L}_\tau(x, y)}{\|x - y\|} \geq K$$

luego en ambos casos como $K > 0$ se tomo arbitrario se sigue lo deseado.

H6) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ tales que $\|y - x\| \leq \tau R$ y $\|z - x\| \leq \tau R$ luego

$$|\mathcal{L}_\tau(x, z) - \mathcal{L}_\tau(x, y)| = \frac{1}{\tau} \left| L\left(x, \frac{z - x}{\tau}\right) - L\left(x, \frac{y - x}{\tau}\right) \right|$$

como $\|y - x\| \leq \tau R$ entonces la derivada total de L en el punto $(x, z - y)$ está acotada y así podemos aplicar el teorema de valor medio, esto es,

$$\begin{aligned} |L(x, z) - L(x, y)| &\leq |DL(x, z - y)| \cdot \|(x - x, z - y)\| \\ &= |DL(x, v - w)| \cdot \|z - y\| = C(R)\|v - w\| \end{aligned}$$

De manera análoga probamos el caso cuando $\|z - x\| \leq \tau R$ y $\|z - y\| \leq \tau R$. Así se cumple que $\mathcal{E}_\tau$ es uniformemente Lipschitz.

Ahora, probemos las propiedades (H1) – (H6) para $\mathcal{E}_\tau$ para ello recordemos que para todo $\tau > 0$ se define

$$\mathcal{E}_\tau = \inf \left\{ \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) : \gamma \in C^{ab}([0, \tau], \mathbb{R}^d), \gamma(0) = x, \gamma(\tau) = y \right\}$$

H1) Sea $\tau > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$. Para probar que $\mathcal{E}_\tau(x, y)$ es continuo vamos a demostrar que $\mathcal{E}_\tau(x, y)$ es continuo en cada entrada para ello consideremos la siguiente sucesión (y_n) en $\mathbb{R}^d$ la converge a $y \in \mathbb{R}^d$.

Notemos que para $R > 0$ suficientemente grande se tiene que $\|y - x\| \leq \tau R$ y $\|y_n - x\| \leq \tau R$ luego por el lema (3.4) se sigue que existe curva de clase C^2 minimizante $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^d$ absolutamente continua tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(\tau) = y$, esto es,

$$\mathcal{E}_\tau(x, y) = \int_0^\tau L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds$$

Definamos ahora la familia de curvas absolutamente continuas $\xi_n : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^d$ definidas como $\xi_n(s) = \gamma(s) + s \frac{y_n - y}{\tau}$ que une a x con y_n . Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\tau(x, y_n) - \mathcal{E}_\tau(x, y) &\leq \int_0^\tau L(\xi_n(s), \dot{\xi}_n(s)) \, ds - \int_0^\tau L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds \\ &= \int_0^\tau [L(\xi_n(s), \dot{\xi}_n(s)) - L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))] \, ds \\ &\leq \tau |DL(x, v)| \|\dot{\xi}_n(s) - \dot{\gamma}(s)\| \\ &= \tau |DL(x, v)| \left\| \dot{\gamma}_n(s) + \frac{y_n - y}{\tau} - \dot{\gamma}_n(s) \right\| \\ &= |DL(x, v)| \|y_n - y\| \end{aligned}$$

como y_n converge a y se sigue que $\mathcal{E}_\tau(x, y)$ es continua en la segunda entrada. De manera análoga obtenemos la continuidad para la primera entrada así $\mathcal{E}_\tau$ es continua.

H2) Sean $\tau > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$ y $k \in \mathbb{Z}^d$ luego existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $\|x - y\| \leq \tau R$ y $\|z - x\| \leq \tau R$ luego por el lema (3.4) existe una curva, de clase C^2 , $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^d$ absolutamente continua que une x con y tal que

$$\mathcal{E}_\tau(x, y) = \int_0^\tau L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds$$

Consideremos ahora la siguiente curva $\xi : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada como $\xi(s) = \gamma(s) + k$ notemos que $\xi(0) = x + k$ y $\xi(\tau) = y + k$ además $\dot{\xi} = \dot{\gamma}$. Ahora, usando que L es una periódica se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\tau(x + k, y + k) &\leq \int_0^\tau L(\xi(s), \dot{\xi}(s)) \, ds = \int_0^\tau L(\gamma(s) + k, \dot{\gamma}(s)) \, ds \\ &= \int_0^\tau L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds = \mathcal{E}_\tau(x, y) \end{aligned}$$

3.1. INTERACCIONES DE CORTO ALCANCE.

De manera análoga podemos probar que $\mathcal{E}_\tau(x, y) \leq \mathcal{E}_\tau(x+k, y+k)$ y por tanto $\mathcal{E}_\tau(x, y) = \mathcal{E}_\tau(x+k, y+k)$.

H3) Por la superlinealidad de L tenemos que dado $K > 0$ luego $L(x, v) \geq K\|v\| - C(K)$ para alguna constante $C(K) > 0$. Consideremos la curva $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^d$ que une a x con y definida como $\gamma(s) = x + s \frac{y-x}{\tau}$ luego

$$L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \geq K\|\dot{\gamma}(s)\| - C(K) = \frac{1}{\tau}K\|y-x\| - C(K)$$

de lo anterior se sigue que

$$\int_0^\tau L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \geq K\|y-x\| - \tau C(K)$$

ahora como $\|x-y\| \geq R$ se tiene que

$$\int_0^\tau L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \geq K\|y-x\| - \tau C(K) \geq KR - \tau C(K)$$

de lo anterior se sigue que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\|x-y\| \geq R} \mathcal{E}_\tau(x, y) = +\infty.$$

H4) Sea $\tau > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$ tales que $\|x-y\| \leq \tau R$. Notemos que la curva $\gamma(s) = x + s \frac{y-x}{\tau}$ es un camino que una a x con y . Luego, usando Hölder obtenemos que

$$\mathcal{E}_\tau(x, y) \leq \int_0^\tau L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds \leq \|L\|_\infty \int_0^\tau ds = \sup_{x \in \mathbb{R}^d, \|v\| \leq R} L(x, v) \cdot \tau.$$

Y de aquí que tenemos lo siguiente

$$\frac{1}{\tau} \mathcal{E}_\tau(x, y) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d, \|v\| \leq R} L(x, v)$$

luego calculando el supremo sobre el conjunto $\|y-x\| \leq \tau R$ se tiene que

$$\sup_{\tau > 0, \|y-x\| \leq \tau R} \frac{1}{\tau} \mathcal{E}_\tau(x, y) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d, \|v\| \leq R} L(x, v)$$

notemos que L es una función continua sobre el conjunto $\mathbb{T}^d \times \{\|v\| \leq R\}$ el cual es compacto por tanto L alcanza supremo, es decir, es finito lo cual implica

$$\sup_{\tau > 0, \|y-x\| \leq \tau R} \frac{1}{\tau} \mathcal{E}_\tau(x, y) < \infty.$$

Ahora para demostrar la otra ecuación, sea $\tau > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$. Por la superlinealidad de L tenemos que dado $K > 0$ luego $L(x, v) \geq K\|v\| - C(K)$ para alguna constante $C(K) > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau L(\gamma, \dot{\gamma}(s)) \, ds &\geq \int_0^\tau (K\|\dot{\gamma}\| - C(K)) \, ds \\ &= \int_0^\tau \left(\frac{1}{\tau} K\|y - x\| - C(K) \right) \, ds \\ &= K\|y - x\| - \tau C(K) \geq -\tau C \end{aligned}$$

lo anterior se cumple para todo camino absolutamente continuo que une a x con y de lo anterior se sigue que $\inf_{\tau > 0, x, y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\tau} \mathcal{E}_\tau(x, y) \geq -C > -\infty$.

H5) Por la superlinealidad de L tenemos que dado $K > 0$ luego $L(x, v) \geq K\|v\| - C(K)$ para alguna constante $C(K) > 0$. Consideremos la curva $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^d$ que une a x con y definida como $\gamma(s) = x + s \frac{y - x}{\tau}$ luego

$$L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \geq K\|\dot{\gamma}(s)\| - C(K) = K\|y - x\| - C(K)$$

integrando obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\tau L(\gamma, \dot{\gamma}(s)) \, ds &\geq \int_0^\tau (K\|\dot{\gamma}\| - C(K)) \, ds \\ &= \int_0^\tau \left(\frac{1}{\tau} K\|y - x\| - C(K) \right) \, ds \\ &= K\|y - x\| - \tau C(K) \end{aligned}$$

ahora dividiendo entre $\|x - y\|$ se sigue que

$$\frac{\int_0^\tau L(\gamma, \dot{\gamma}(s)) \, ds}{\|x - y\|} \geq \frac{K\|y - x\| - \tau C(K)}{\|x - y\|} = K - \frac{\tau C(K)}{\|x - y\|}$$

como $\|x - y\| \geq \tau R$ entonces $\frac{1}{R} \geq \frac{\tau}{\|x - y\|}$ y de aquí que $-\frac{1}{R} \leq -\frac{\tau}{\|x - y\|}$ luego la desigualdad anterior quedaría como

$$\frac{\int_0^\tau L(\gamma, \dot{\gamma}(s)) \, ds}{\|x - y\|} \geq K - \frac{\tau C(K)}{\|x - y\|} \geq K - \frac{C(K)}{R}.$$

De lo anterior obtenemos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\tau \in (0, 1]} \inf_{\|x - y\| \geq \tau R} \frac{\mathcal{E}_\tau(x, y)}{\|x - y\|} \geq K$$

al ser $K > 0$ arbitrario tenemos lo deseado.

H6) Sea $R > 0$ y $C(R)$ la constante dadas por el lema (3.3). Sea $\tau \in (0, 1]$ y $\|y - x\| \leq \tau R$. Sabemos que $\mathcal{E}_\tau(x, y)$ admite una curva de clase C^2 minimizante $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfaciendo $\gamma(0) = x$ y $\gamma(\tau) = y$, $\mathcal{E}_\tau(x, y) = \int_0^\tau L(\gamma, \dot{\gamma}) ds$, $\|\dot{\gamma}\| \leq C(R)$ y $\|\ddot{\gamma}\| \leq C(R)$. Definamos $V_0 = \dot{\gamma}(0)$ luego, usando el teorema del valor medio, tenemos

$$\|\gamma(s) - x\| = \|\gamma(s) - \gamma(0)\| \leq \|\dot{\gamma}(\zeta)\| (s - 0) \text{ para algún } \zeta \in (0, s)$$

recordemos que $\|\dot{\gamma}\| \leq C(R)$ y $s \leq \tau$ entonces

$$\|\gamma(s) - x\| \leq \|\dot{\gamma}(\zeta)\| s \leq \tau C(R). \quad (3.5)$$

Nuevamente por el teorema del valor medio tenemos lo siguiente

$$\|\dot{\gamma}(s) - V_0\| = \|\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(0)\| \leq \|\ddot{\gamma}(\bar{\zeta})\| (s - 0) \text{ para algún } \bar{\zeta} \in (0, s)$$

de nuevo se cumple que $\|\ddot{\gamma}\| \leq C(R)$ y que $s \leq \tau$ así la ecuación anterior queda como

$$\|\dot{\gamma}(s) - V_0\| \leq \|\ddot{\gamma}(\bar{\zeta})\| s \leq \tau C(R). \quad (3.6)$$

Probemos ahora que $\left\| \frac{y - x}{\tau} - V_0 \right\| \leq \tau C(R)$ para ello notemos lo siguiente, usando el teorema de valor medio para integrales,

$$y - x = \gamma(\tau) - \gamma(0) = \int_0^\tau \dot{\gamma}(s) ds = \tau \dot{\gamma}(\zeta) \text{ para algún } \zeta \in (0, \tau). \quad (3.7)$$

De lo anterior se sigue que

$$\left\| \frac{y - x}{\tau} - V_0 \right\| = \left\| \frac{\tau \dot{\gamma}(\zeta)}{\tau} - V_0 \right\| = \|\dot{\gamma}(\zeta) - V_0\|$$

luego aplicando la desigualdad (3.5) se tiene que

$$\left\| \frac{y - x}{\tau} - V_0 \right\| = \|\dot{\gamma}(\zeta) - V_0\| \leq \tau C(R). \quad (3.8)$$

Por último demostremos que $\left\| \dot{\gamma}(s) - \frac{y - x}{\tau} \right\| \leq 2\tau C(R)$. De la ecuación (3.7) se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \left\| \dot{\gamma}(s) - \frac{y - x}{\tau} \right\| &= \left\| \dot{\gamma}(s) - \frac{\tau \dot{\gamma}(\zeta)}{\tau} \right\| = \|\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(\zeta)\| \\ &= \|\dot{\gamma}(s) - V_0 + V_0 - \dot{\gamma}(\zeta)\| \leq \|\dot{\gamma}(s) - V_0\| + \|V_0 - \dot{\gamma}(\zeta)\| \end{aligned}$$

luego usando las ecuación (3.7) y(3.8) se obtiene que

$$\left\| \dot{\gamma}(s) - \frac{y-x}{\tau} \right\| \leq \|\dot{\gamma}(s) - V_0\| + \|V_0 - \dot{\gamma}(\zeta)\| \leq 2\tau C(R).$$

Por último, usando el teorema del valor medio para L ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_\tau(x, y) - \mathcal{L}_\tau(x, y)| &\leq \int_0^\tau \left| L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - L\left(x, \frac{y-x}{\tau}\right) \right| ds \\ &\leq \|DL\| \cdot \int_0^\tau \left(\|\gamma(s) - \gamma(0)\| + \left\| \dot{\gamma}(s) - \frac{y-x}{\tau} \right\| \right) ds \\ &\leq \|DL\| (\tau C(R) + 2\tau C(R)) \tau \leq \tau^2 \bar{C}(R) \end{aligned}$$

donde $\bar{C}(R) = 3 \sup_{x \in \mathbb{R}^d, \|v\| \leq R+C(R)} \|DL\| C(R)$. Por tanto, hemos probado que si $\|y - x\| \leq \tau R$ entonces

$$|\mathcal{E}_\tau(x, y) - \mathcal{L}_\tau(x, y)| \leq \tau^2 C(R).$$

□

A continuación definiremos el análogo discreto del semi-grupo de Lax-Oleinik.

3.2. El semi-grupo de Lax-Oleinik discreto.

3.6 Definición. Sea $(E_\tau(x, y))_{\tau>0}$ una interacción de corto alcance satisfaciendo (H1)–(H3) entonces

- Llamamos el operador discreto (retrospectivo) de Lax-Oleinik,

$$T_\tau[u](y) := \min_{x \in \mathbb{R}^d} u(x) + E_\tau(x, y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^d,$$

actuando en funciones periódicas continuas $u \in C^0(\mathbb{R}^d)$.

- Una función periódica continua u_τ es una solución KAM débil (retrospectiva) discreta para $E_\tau(x, y)$, si satisface

$$T_\tau[u_\tau] = u_\tau + \bar{E}_\tau, \quad \text{para algún } \bar{E}_\tau \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

3.2. EL SEMI-GRUPO DE LAX-OLEINIK DISCRETO.

Observemos que la familia uno-paramétrica de operadores $\{T_\tau\}_{\tau \geq 0}$ cumple ser un semi-grupo bajo la composición, es decir, dado $u \in C^0(\mathbb{R}^d)$ y $s, t \geq 0$ entonces se cumplen:

$$a) T_\tau[u] \in C^0(\mathbb{R}^d) \quad , \quad b) T_0[u] = u \quad , \quad c) T_{s+t}[u] = T_t(T_s[u]).$$

Para que la ecuación (3.9) tenga solución es necesario la existencia de la constante $\bar{E}_\tau$. La siguiente proposición enuncia la existencia de dicha constante, más aún, nos dice varias caracterizaciones de la misma. La demostración de este resultado se puede encontrar en [9].

3.7 Proposición. *Ecuaciones de Lax-Oleinik para interacciones de corto alcance*

Consideremos una interacción de corto alcance $(E_\tau(x, y))_{\tau > 0}$ satisfaciendo (H1) – (H3)

luego:

I) Para cada $\tau > 0$ existe un único escalar $\bar{E}_\tau$ tal que la ecuación $T_\tau[u_\tau] = u_\tau + \bar{E}_\tau$ admite una solución periódica u_τ .

II) $\bar{E}_\tau$ es llamado una **interacción efectiva** y puede ser calculado con alguna de las siguientes maneras

$$\begin{aligned} \bar{E}_\tau &= \sup_{u \in C^0(\mathbb{T}^d)} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} E_\tau(x, y) - [u(y) - u(x)] \\ &= \sup_{v \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} E_\tau(x, y) - [v(y) - v(x)] \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{z_0, \dots, z_k \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} E_\tau(z_i, z_{i+1}) . \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ denota el espacio de funciones acotadas.

La siguiente proposición muestra que al considerar una configuración o trayectoria minimizadora entonces los saltos $\|z_k - z_{k-1}\|$ son comparables a τ . Además, nos dice algunas de las propiedades que cumple el operador T_τ .

3.8 Proposición. *Compacidad a priori para interacciones de corto alcance*

Consideremos una interacción de corto alcance $(E_\tau(x, y))_{\tau > 0}$ satisfaciendo la hipótesis (H1)–(H6).

I) Existen constantes $C, R > 0$ tal que si $\tau \in (0, 1]$ y u_τ es una solución KAM débil de

$E_\tau(x, y)$ entonces se cumplen:

a) u_τ es Lipschitz y $Lip(u_\tau) \leq C$,

b) Para todo $y \in \mathbb{R}^d$, si $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u_\tau(x) + E_\tau(x, y)\}$ entonces $\|y - x\| \leq \tau R$.

II) Para cada función u Lipschitz periódica, $\lim_{\tau \rightarrow 0} T_\tau[u] = u$ uniformemente. Más precisamen-

te, para cada constante $k > 0$ existen constantes $R_k, C_k > 0$, tal que si u es una función Lipschitz tal que $Lip(u) \leq k$ y $\tau \in (0, 1]$ entonces

a) Para cada $y \in \mathbb{R}^d$, si $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + E_\tau(x, y)\}$ entonces $\|y - x\| \leq \tau R_k$,

b) $\|T_\tau[u] - u\|_\infty \leq \tau C_k$.

Demostración:

Para probar I), consideremos las siguientes constantes C y R definidas como:

$$\begin{aligned} C_1 &:= 2 \sup_{\tau \in (0, 1], \|y-x\| \leq \tau} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau}{\tau} \\ R &:= \inf \left\{ R > 1 : \inf_{\tau \in (0, 1], \|y-x\| > \tau R} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau}{\|y-x\|} > C_1 \right\} \\ C &:= \max \left(C_1, \sup_{\|y-x\|, \|z-x\| \leq \tau(R+1)} \frac{E_\tau(x, y) - E_\tau(x, z)}{\|z-y\|} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observemos que las constantes C_1, R y C son finitas por las propiedades (H4), (H5) y (H6), respectivamente. Probemos primero el inciso b).

b) Antes de probar este inciso vamos a demostrar el siguiente lema:

3.9 Lema. Si $\|y - x\| > \tau$ entonces $u_\tau(y) - u_\tau(x) \leq C_1 \|y - x\|$.

Como $\|y - x\| > \tau$ se tiene que existe un número natural $n \geq 2$ tal que se cumple que $(n-1)\tau < \|y - x\| \leq n\tau$. Afirmamos que $n\tau \leq 2\|y - x\|$, supongamos que ocurre

lo contrario, es decir, $n\tau > 2\|y - x\|$ luego como $\|y - x\| > (n - 1)\tau$ se tiene por transitividad que $n\tau > 2(n - 1)\tau$ y de aquí que

$$0 > 2(n - 1)\tau - n\tau = \tau[2(n - 1) - n] = \tau[2n - 2 - n] = \tau[n - 2]$$

como $\tau > 0$ se sigue que $n - 2 < 0$ pero esto es una contradicción pues $n \geq 2$ y por tanto $n\tau \leq 2\|y - x\|$. Ahora, consideremos $x_i = x + \frac{i}{n}(y - x)$ y recordemos que u_τ satisface la siguiente ecuación

$$u_\tau(y) + \bar{E}_\tau = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + E_\tau(x, y)\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d$$

donde $\bar{E}_\tau$ puede ser escrito de las siguientes maneras

$$\bar{E}_\tau = \sup_{u \in C^0(\mathbb{T}^d)} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} \{E_\tau(x, y) - [u(y) - u(x)]\}$$

$$\bar{E}_\tau = - \inf_{u \in C^0(\mathbb{T}^d)} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} \{[u(y) - u(x)] - E_\tau(x, y)\}$$

De esta manera u_τ está dada como

$$u_\tau(y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + E_\tau(x, y)\} - \bar{E}_\tau$$

así $u_\tau(x_{i+1}) \leq u(\bar{x}) + E_\tau(\bar{x}, x_{i+1}) - \bar{E}_\tau$. Si tomamos $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u_\tau(x) + E_\tau(x, y)\}$ se tiene que $u_\tau(x_i) = u(x) + E_\tau(x, x_i) - \bar{E}_\tau$ y de aquí que

$$\begin{aligned} u_\tau(x_{i+1}) - u_\tau(x_i) &\leq u(\bar{x}) + E_\tau(\bar{x}, x_{i+1}) - \bar{E}_\tau - u(x) - E_\tau(x, x_i) + \bar{E}_\tau \\ &= u(\bar{x}) + E_\tau(\bar{x}, x_{i+1}) - u(x) - E_\tau(x, x_i) \\ &= E_\tau(\bar{x}, x_{i+1}) + [u(\bar{x}) - u(x) - E_\tau(x, x_i)] \end{aligned}$$

como se cumple para toda $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ se sigue que

$$\begin{aligned} u_\tau(x_{i+1}) - u_\tau(x_i) &\leq E_\tau(\bar{x}, x_{i+1}) + [u(\bar{x}) - u(x) - E_\tau(x, \bar{x})] \\ &\leq E_\tau(\bar{x}, x_{i+1}) + \inf_{u \in C^0(\mathbb{T}^d)} \inf_{x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d} \{[u(\bar{x}) - u(x)] - E_\tau(x, \bar{x})\} \\ &= E_\tau(\bar{x}, x_{i+1}) - \bar{E}_\tau. \end{aligned}$$

En particular, se cumple para $\bar{x} = x_i$, esto es,

$$u_\tau(x_{i+1}) - u_\tau(x_i) \leq E_\tau(x_i, x_{i+1}) - \bar{E}_\tau. \quad (3.12)$$

Ahora, notemos que para $0 \leq i \leq n$ se cumple que

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x_i\| &= \left\| x + \frac{i+1}{n}(y-x) - x - \frac{i}{n}(y-x) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n}(y-x) \right\| = \frac{1}{n}\|y-x\| \leq \frac{1}{n}\tau n = \tau \end{aligned}$$

lo anterior nos dice que $\|x_{i+1} - x_i\| \leq \tau$ lo cual implica que

$$\sup_{\|x_{i+1} - x_i\| \leq \tau} E(x_{i+1}, E_i) \leq \sup_{\|y-x\| \leq \tau} E(x, y), \quad \forall i \in \overline{1, n}.$$

De lo anterior y de la ecuación (3.12) tenemos que

$$\begin{aligned} u_\tau(y) - u_\tau(x) &= u_\tau(x_n) - u_\tau(x_0) \\ &= u_\tau(x_n) - u_\tau(x_{n-1}) + u_\tau(x_{n-1}) - \cdots - u_\tau(x_1) + u_\tau(x_1) - u_\tau(x_0) \\ &\leq n \sup_{\|y-x\| \leq \tau} E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau \\ &= n\tau \sup_{\|y-x\| \leq \tau} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau}{\tau} \\ &\leq n\tau \sup_{\|y-x\| \leq \tau} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau}{\tau} \\ &\leq 2\|y-x\| \cdot \sup_{\|y-x\| \leq \tau} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau}{\tau} \\ &= C_1\|y-x\|. \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra el lema (3.9).

□

Probemos ahora el inciso b) para ello sea $y \in \mathbb{R}^d$ y consideremos a x un punto de calibración de $u_\tau(y)$, esto es, x satisface

$$u_\tau(y) - u_\tau(x) = E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau.$$

Elijamos $R > 1$ definido en (3.11). Afirmamos que $\|y-x\| \leq \tau R$, supongamos (por contradicción) que $\|y-x\| > \tau R$, por definición de (3.11) se cumple que $E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau > C_1\|y-x\|$. Por otro lado, como tomamos $R > 1$ tenemos que

$\|y-x\| > R\tau > \tau$ así se sigue del lema (3.9) que $u_\tau(y) - u_\tau(x) \leq C_1\|y-x\|$ luego como x es punto de calibración tenemos que

$$C_1\|y-x\| \geq u_\tau(y) - u_\tau(x) = E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau > C_1\|y-x\|$$

3.2. EL SEMI-GRUPO DE LAX-OLEINIK DISCRETO.

lo cual es una contradicción. Por tanto si x es punto de calibración se cumple que $\|y - x\| \leq \tau R$ para todo $y \in \mathbb{R}^d$. Para completar la prueba demostremos que si $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + E_\tau(x, y)\}$ entonces x es punto de calibración. Así, sea $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + E_\tau(x, y)\}$ entonces de este hecho y de la definición del operador T_τ se cumple que

$$u(x) + E_\tau(x, y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(w) + E_\tau(w, y)\} = u_\tau(y) + \bar{E}_\tau$$

lo anterior implica que $u_\tau(y) - u(x) = E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau$.

a) Sean $y, z \in \mathbb{R}^d$ luego tenemos dos opciones: $\|z - y\| > \tau$, o bien, $\|y - z\| \leq \tau$. Notemos que si $\|z - y\| > \tau$ luego por el lema (3.9) se tiene que $u_\tau(z) - u_\tau(y) \leq C_1 \|z - y\| \leq C \|z - y\|$ luego intercambiando de posiciones y y z se tiene que u_τ es Lipschitz y por la manera que se definió C se tiene que $Lip(u_\tau) \leq C$. Ahora, si $\|z - y\| \leq \tau$, consideremos un punto de calibración x para $u_\tau(y)$, esto es, $u_\tau(y) - u_\tau(x) = E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau$ luego, como $R > 1$, se tiene que $\|z - y\| \leq \tau R$, más aún,

$$\|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| \leq \tau R + \tau = \tau(R + 1).$$

De manera análoga a como probamos que $u_\tau(x_{i+1}) - u(x_i) \leq E_\tau(x_i, x_{i+1}) - \bar{E}_\tau$ se prueba que $u_\tau(z) - u_\tau(x) \leq E_\tau(x, z) - \bar{E}_\tau$. De lo anterior y usando (3.11) se sigue que

$$\begin{aligned} u_\tau(z) - u_\tau(y) &= (u_\tau(z) - u_\tau(x)) + (u_\tau(x) - u_\tau(y)) \\ &\leq E_\tau(x, z) - \bar{E}_\tau - E_\tau(x, y) + \bar{E}_\tau \\ &= E_\tau(x, z) - E_\tau(x, y) \leq C \|z - y\| \end{aligned}$$

De esta manera se tiene que $u_\tau(z) - u_\tau(y) \leq C \|z - y\|$. Permutando y y z en la prueba anterior se tiene que $Lip(u_\tau) \leq C$.

Probemos ahora el inciso II). Sea $k > 0$, consideremos $R_k > 0$ de la siguiente manera

$$R_k := \inf \left\{ R' > 1 : \inf_{\tau \in (0, 1], \|y - x\| > \tau R'} \frac{E_\tau(x, y) - E_\tau(y, y)}{\|y - x\|} > k \right\}.$$

Sean u una función Lipschitz periódica satisfaciendo $Lip(u) \leq k$ y y un punto en $\mathbb{R}^d$. Sea x un punto donde se alcanza el mínimo de $\min_x \{u(x) + E_\tau(x, y)\}$. Supongamos (por contradicción) que $\|y - x\| > \tau R_k$, de la definición de R_k tenemos que

$$E_\tau(x, y) - E_\tau(y, y) > k \|y - x\|,$$

por otro lado x es mínimo se tiene que $u(x)E_\tau(x, y) \leq u(y) + E_\tau(y, y)$ luego, usando el hecho que u es Lipschitz, se tiene que

$$k||y - x|| \geq u(y) - u(x) \geq E_\tau(x, y) - E_\tau(y, y)$$

pero esto es imposible por la manera que se tomó R_k . Por tanto, $||y - x|| \leq \tau R_k$. Por último, calculemos $||T_\tau[u] - u||_\infty$. Recordemos que $T_\tau[u](y) := \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + E_\tau(x, y)\}$ esto implica que $T_\tau[u](y) \leq u(w) + E(w, y)$ para todo $w \in \mathbb{R}^d$. En particular, se cumple para $w = y$, esto es, $T_\tau[u](y) \leq u(y) + E(y, y)$, o equivalentemente,

$$T_\tau[u](y) - u(y) \leq E(y, y).$$

dividiendo entre $\tau > 0$ y luego tomando supremos sobre τ se obtiene

$$\frac{1}{\tau}[T_\tau[u](y) - u(y)] \leq \sup_{\tau \in (0,1]} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\tau} E(y, y).$$

el doble supremo anterior es finito por la propiedad (H4) pues $||y - y|| \leq \tau R$. Por otro lado, si $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} [u(x) + E_\tau(x, y)]$ entonces $T_\tau[u](y) = u(x) + E_\tau(x, y)$. De lo anterior y usando el hecho que u es Lipschitz se tiene que

$$T_\tau[u](y) - u(y) = u(x) - u(y) + E_\tau(x, y) \geq -k||y - x|| + \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} E_\tau(x, y)$$

dividiendo la desigualdad anterior entre $\tau > 0$ y tomando ínfimo sobre τ , usando además que $||y - x|| \leq \tau R_k$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}[T_\tau[u](y) - u(y)] &\geq -k \frac{||y - x||}{\tau} + \inf_{\tau \in (0,1]} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\tau} E_\tau(x, y) \\ &\geq -k R_k + \inf_{\tau \in (0,1]} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\tau} E_\tau(x, y) \end{aligned}$$

el doble ínfimo anterior es finito por la propiedad (H4).

Ahora, considerando la siguiente constante

$$C_k := \max \left\{ \sup_{\tau \in (0,1]} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\tau} E(y, y), k R_k - \inf_{\tau \in (0,1]} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\tau} E_\tau(x, y) \right\}$$

obtemos que $|T_\tau[u](y) - u(y)| \leq \tau C_k$ para todo $y \in \mathbb{R}^d$, es decir,

$$||T_\tau[u] - u||_\infty \leq \tau C_k.$$

□

A continuación vamos a definir el concepto de convolución min-plus.

3.10 Definición.

- Llamamos *convolución min-plus de dos interacciones* $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, la interacción

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 := \inf_{z \in \mathbb{R}^d} [\mathcal{E}_1(x, z) + \mathcal{E}_2(z, y)] , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

- Una interacción de corto rango $(E_\tau(x, y))_{\tau > 0}$ se dice un *semi-grupo de convolución min-plus* si $E_{\tau+\sigma} = E_\tau \otimes E_\sigma$, para todo $\tau, \sigma > 0$.

3.11 Lema. Sea H un hamiltoniano de Tonelli. Se cumple que $(\mathcal{E}_\tau(x, y))_{\tau > 0}$ es un semi-grupo de convolución min-plus.

Demostración:

Sean $\tau, \sigma > 0$ y $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. Queremos demostrar que $\mathcal{E}_{\tau+\sigma}(x, y) = \min_{z \in \mathbb{R}^d} [\mathcal{E}_\tau(x, z) + \mathcal{E}_\sigma(z, y)]$. Tenemos que podemos encontrar $R > 0$, suficientemente grande, de manera que $\|y - x\| \leq \tau R$ y por el lema (3.4) se sigue que existe una curva $\gamma : [0, \tau + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^d$ absolutamente continua tal que $\gamma(0) = x$ con $\gamma(\tau + \sigma) = y$ y además

$$\mathcal{E}_\tau(x, y) = \int_0^{\tau+\sigma} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Definamos $f(t) = L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$, recordemos que dado una función integrable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces se cumple que $\int_a^b g(s) ds = \int_{a+c}^{b+c} g(s - c) ds$ y de aquí que

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau+\sigma} f(t) dt &= \int_0^\tau f(t) dt + \int_\tau^{\tau+\sigma} f(t) dt \\ &= \int_0^\tau f(t) dt + \int_0^\sigma f(t + \tau) dt \\ &= \int_0^\tau f(t) dt + \int_0^\sigma f(t + \tau) dt \end{aligned}$$

sustituyendo $f(t)$ en la ecuación anterior se obtiene

$$\int_0^{\tau+\sigma} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt + \int_0^\sigma L(\gamma(t+\tau), \dot{\gamma}(t+\tau)) dt \quad (3.13)$$

de la igualdad anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau+\sigma} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt &= \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt + \int_0^\sigma L(\gamma(t+\tau), \dot{\gamma}(t+\tau)) dt \\ &\geq \mathcal{E}_\sigma(x, \gamma(\tau)) + \mathcal{E}_\tau(\gamma(\tau), y) \\ &\geq \min_{z \in \mathbb{R}^d} \{ \mathcal{E}_\sigma(x, z) + \mathcal{E}_\tau(z, y) \} . \end{aligned}$$

lo anterior implica que $\mathcal{E}_{\tau+\sigma}(x, y) \geq \min_{z \in \mathbb{R}^d} \{ \mathcal{E}_\sigma(x, z) + \mathcal{E}_\tau(z, y) \}$.

Para el otro lado de la desigualdad, sea $z \in \mathbb{R}^d$ luego existe $R > 0$ suficientemente grande de tal manera que $\|y - z\| \leq \tau R$, $\|x - z\| \leq \tau R$ luego por el lema (3.4) existen curvas $\eta : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $\xi : [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^d$ absolutamente continuas de manera que η une a $\eta(0) = x$ con $\eta(\tau) = z$ y ξ une a $\xi(0) = z$ con $\xi(\sigma) = y$ y además

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\tau(x, z) &= \int_0^\tau L(\eta(t), \dot{\eta}(t)) dt \\ \mathcal{E}_\sigma(z, y) &= \int_0^\sigma L(\xi(t), \dot{\xi}(t)) dt \end{aligned}$$

Definamos ahora la siguiente curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} \eta(t) & , \quad 0 \leq t \leq \tau , \\ \xi(t - \tau) & , \quad \tau \leq t \leq \tau + \sigma \end{cases}$$

notemos que la curva $\gamma : [0, \tau + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una curva absolutamente continua y

$$\gamma(0) = \eta(0) = x \quad , \quad \gamma(\tau + \sigma) = \xi(\tau + \sigma - \sigma) = \xi(\sigma) = y,$$

es decir, γ une a x con y . Luego, usando la ecuación (3.13), se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\tau+\sigma}(x, y) &\leq \int_0^{\tau+\sigma} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \\ &= \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt + \int_0^\sigma L(\gamma(t+\tau), \dot{\gamma}(t+\tau)) dt \\ &= \int_0^\tau L(\eta(t), \dot{\eta}(t)) dt + \int_0^\sigma L(\xi(t), \dot{\xi}(t)) dt \\ &= \mathcal{E}_\tau(x, z) + \mathcal{E}_\sigma(z, y) \end{aligned}$$

de esta manera se tiene que $\min_{z \in \mathbb{R}^d} \{ \mathcal{E}_\sigma(x, z) + \mathcal{E}_\tau(z, y) \} \geq \mathcal{E}_{\tau+\sigma}$.

□

3.2. EL SEMI-GRUPO DE LAX-OLEINIK DISCRETO.

Del hecho que la acción mínima sea un semi-grupo de convolución min-plus nos ayuda a caraterizar a la constante $\bar{E}_\tau$. Las soluciones del operador de Lax-Oleinik discreto también cumplen propiedades de gran importancia que se desprenden del lema (3.11) como veremos en la siguiente proposición.

3.12 Proposición. *Sea $(E_\tau(x, y))_{\tau>0}$ una familia de interacciones de corto alcance que satisfacen (H1)–(H6). Supongamos que la interacción es un semi-grupo de convolución semi-plus.*

Consideremos la ecuación

$$T_\tau[u] = u + \tau \bar{E}_1, \quad \forall \tau > 0 \quad (3.14)$$

donde u es una función periódica (independiente de τ) de clase C^0 y $\bar{E}_1 \in \mathbb{R}$.

I) *Existe una función Lipschitz u periódica solución de la ecuación (3.14). Más aún, se tiene*

$$\text{que } \bar{E}_\tau = \tau \bar{E}_1 \text{ para todo } \tau > 0.$$

II) *Sea u_τ una solución discreta KAM débil de $E_\tau(x, y)$. Supongamos que u_{τ_i} converge de manera uniforme a u a lo largo de una subsucesión $\tau_i \rightarrow 0$ entonces u es una solución*

Lipschitz de (3.14).

$$\text{III)} \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \min_{x, y \in \mathbb{R}^d} E_\tau(x, y) = \bar{E}_1.$$

Demostración:

I) Vamos a probar este primer inciso para $\tau \in \mathbb{Q}$. Definamos

$$\bar{E}_\tau(M) := \min \left\{ \sum_{j=1}^M E_\tau(x_{j-1}, x_j) : x_j \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad \forall M \in \mathbb{Z}_+.$$

Para demostrar lo anterior primero mostremos que $\bar{E}_{N\tau} = N\bar{E}_\tau$ para cada entero positivo N y $\tau > 0$ NO necesariamente racional. Elegimos un entero $M > 0$,

$$(z_0, \dots, z_M) \in \arg \min \left\{ \sum_{i=1}^M E_{N\tau}(z_{i-1}, z_i) : z_i \in \mathbb{R}^d \right\},$$

luego por la convolución min-plus de $E_{N\tau}$, podemos elegir $(x_{i,0}, \dots, x_{i,N})$ tal que

$$E_{N\tau}(z_{i-1}, z_i) = \sum_{j=1}^N E_{\tau}(x_{i,j-1}, x_{i,j}) , \quad x_{i,0} = z_{i-1} \text{ y } x_{i,N} = z_i.$$

De lo anterior, usando el hecho que $\bar{E}_{\tau}(MN)$ es el mínimo de la sumas, se sigue

$$\bar{E}_{N\tau}(M) = \sum_{i=1}^M E_{N\tau}(z_{i-1}, z_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M E_{\tau}(x_{i,j-1}, x_{i,j}) \geq \bar{E}_{\tau}(MN).$$

luego dividiendo entre M y tomando el límite de $M \rightarrow +\infty$ se obtenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \min \left\{ \sum_{j=1}^M E_{\tau}(x_{j-1}, x_j) : x_j \in \mathbb{R}^d \right\} \\ & \geq \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \min \left\{ \sum_{j=1}^{MN} E_{\tau}(x_{j-1}, x_j) : x_j \in \mathbb{R}^d \right\} . \\ & \geq N \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \min \left\{ \sum_{j=1}^M E_{\tau}(x_{j-1}, x_j) : x_j \in \mathbb{R}^d \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Recordemos una de las maneras de obtener $\bar{E}_{\tau}$

$$\bar{E}_{\tau} = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{z_0, \dots, z_k \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} E_{\tau}(z_i, z_{i+1})$$

sustituyendo lo anterior en la desigualdad (3.15) se obtiene que $\bar{E}_{N\tau} \geq N\bar{E}_{\tau}$. Para probar la otra desigualdad elijamos

$$(x_0, \dots, x_{M-1}) \in \arg \min \left\{ \sum_{i=1}^{M-1} E_{\tau}(x_{i-1}, x_i) : x_i \in \mathbb{R}^d \right\},$$

y N vectores k_j con cordenadas enteras, esto es, $k_j \in \mathbb{Z}^d, j = 1, \dots, N$ tales que $k_0 = 0$

$$\| (x_0 + k_j) - (x_{M-1} + k_{j-1}) \| \leq 1.$$

Definamos una nueva cadena $(z_0, \dots, z_{MN})$ dada como sigue

$$z_{i-1+(j-1)M} := x_{i-1} + k_{j-1}M , \quad i = 1, \dots, M , \quad j = 1, \dots, N.$$

Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} z_{jM} &= z_{0+jM} = x_0 + k_jM \\ z_{M-1+(j-1)M} &= x_{M-1} + k_{j-1}M \end{aligned}$$

más aún, se cumple que $\|z_{jM} - z_{M-1+(j-1)M}\| = \|(x_0 + k_j M) - (x_{M-1} + k_{j-1} M)\| \leq 1$. Luego, como E_τ es invariante bajo translaciones en $\mathbb{Z}^d$, tenemos

$$\begin{aligned} N\bar{E}_\tau(M-1) &= N \sum_{i=1}^{M-1} E_\tau(z_{i-1+(j-1)M}, z_{i+(j-1)M}) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} E_\tau(z_{i-1+(j-1)M}, z_{i+(j-1)M}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por otro lado, tenemos que $\|z_{jM} - z_{M-1+(j-1)M}\| \leq 1$. En particular, se cumple para $j = 1$, esto es, $\|z_M - z_{M-1}\| \leq 1$ y usando que $N \geq 1$ se sigue que

$$\begin{aligned} E_\tau(z_{M-1}, z_M) &\leq \sup_{\|y-x\| \leq 1} E_\tau(x, y) \leq \sup_{\|y-x\| \leq 1} |E_\tau(x, y)| \\ &\leq N \sup_{\|y-x\| \leq 1} |E_\tau(x, y)|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

De esta manera tenemos de las ecuaciones (3.16) y (3.17) que

$$\begin{aligned} N\bar{E}_\tau(M-1) + N \sup_{\|y-x\| \leq 1} |E_\tau(x, y)| &\geq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-1} E_\tau(z_{i-1+(j-1)M}, z_{i+(j-1)M}) \\ &\quad + E_\tau(z_{M-1}, z_M) \\ &= \sum_{i=1}^M E_\tau(z_{i-1+(j-1)M}, z_{i+(j-1)M}), \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$N\bar{E}_\tau(M-1) \geq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M E_\tau(z_{i-1+(j-1)M}, z_{i+(j-1)M}) - N \sup_{\|y-x\| \leq 1} |E_\tau(x, y)|.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M E_\tau(z_{i-1+(j-1)M}, z_{i+(j-1)M}) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N E_\tau(z_{j-1+(i-1)N}, z_{j+(i-1)N}) \\ &\geq \sum_{i=1}^M E_{N\tau} \geq \bar{E}_{N\tau}(M) \end{aligned}$$

de lo anterior se sigue que

$$N\bar{E}_\tau(M-1) \geq \bar{E}_{N\tau}(M) - N \sup_{\|y-x\| \leq 1} |E_\tau(x, y)|$$

dividiendo entre M y tomando el límite cuando M tiende a $+\infty$ se obtiene

$$\begin{aligned} N\bar{E}_\tau &= N \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \bar{E}_\tau(M-1) \\ &\geq \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \bar{E}_{N\tau}(M) - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sup_{\|y-x\| \leq 1} |E_\tau(x, y)| = \bar{E}_{N\tau}. \end{aligned}$$

Por tanto $N\bar{E}_\tau = \bar{E}_{N\tau}$ para todo N entero positivo, o equivalentemente, $\bar{E}_\tau = \frac{1}{N} \bar{E}_{N\tau}$. Ahora probemos que si $\tau > 0$ es racional entonces se cumple que $\bar{E}_\tau = \tau \bar{E}_1$ para algún $\bar{E}_1 \in \mathbb{R}$. Sea $\tau = \frac{p}{q} > 0, q \neq 0$. Consideremos $\bar{E}_1 = \frac{1}{p^2} \bar{E}_{1/q^2}$ y de aquí que

$$\tau \bar{E}_1 = \frac{p}{q} \left(\frac{1}{p^2} \bar{E}_{1/q^2} \right) = \frac{1}{pq} \bar{E}_{1/q^2} = \bar{E}_{pq/q^2} = \bar{E}_{p/q} = \bar{E}_\tau.$$

Ahora, probemos para $\tau > 0$ no racional para ello usaremos el siguiente lema

3.13 Lema. *Sea C la constante dada por el inciso I) de la proposición (3.8) luego se*

cumple que $\sup_{\tau > 0} \|T_\tau[0] - \bar{E}_\tau\| \leq C$.

Demostración:

Sea $\tau > 0$ y N un entero positivo tal que $\tau/N \leq 1$. Sea $u_{\tau/N}$ una solución KAM débil de $T_{\tau/N}$ de tal manera que $\min u_{\tau/N} = 0$ (esto es posible ya que las funciones u son acotadas y además si a una solución KAM débil se le suma una constante es de nuevo una solución KAM débil). Afirmamos que dados $t, s \in (0, 1]$ se cumple que $T_{s+t} = T_s \circ T_t$, en efecto, sea $u \in C^0(\mathbb{R}^d)$ periódica luego, usando el hecho que $E_{s+t} = E_s \otimes E_t$, se tiene que

$$\begin{aligned} (T_s \circ T_t)[u](y) &= T_s[T_t[u]](y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ T_t[u](x) + E_s(x, y) \} \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ \min_{z \in \mathbb{R}^d} \{ u(z) + E_t(z, x) \} + E_s(x, y) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (T_s \circ T_t)[u](y) &= \min_{z \in \mathbb{R}^d} \left\{ \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(z) + E_t(z, x) + E_s(x, y)\} \right\} \\
 &= \min_{z \in \mathbb{R}^d} \left\{ u(z) + \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{E_t(z, x) + E_s(x, y)\} \right\} \\
 &= \min_{z \in \mathbb{R}^d} \left\{ u(z) + \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{E_t(z, x) + E_s(x, y)\} \right\} \\
 &= \min_{z \in \mathbb{R}^d} \left\{ u(z) + E_t \otimes E_s(z, y) \right\} \\
 &= \min_{z \in \mathbb{R}^d} \left\{ u(z) + E_{t+s}(z, y) \right\} = T_{t+s}[u](y)
 \end{aligned}$$

Por tanto, $T_{s+t} = T_s \circ T_t$. En particular, notemos que dado $N \in \mathbb{N}$ y $s \in (0, 1]$ se cumple que $T_{Ns} = (T_s)^N$, por inducción, para $N = 1$ es claro. Supongamos que se cumple para $N = n$, esto es, $T_{ns} = (T_s)^n$. Luego,

$$(T_s)^{n+1} = (T_s)^n(T_s) = T_{ns}(T_s) = T_{ns+s} = T_{s(n+1)}.$$

Por tanto, $T_{Ns} = (T_s)^N$. De lo anterior se sigue que $(T_{\tau/N})^N = T_{N\tau/N} = T_\tau$. Ahora, recordemos que $T_{\tau/N}[u_{\tau/N}] = u_{\tau/N} + \bar{E}_{\tau/N}$, luego

$$T_\tau[u_{\tau/N}] = (T_{\tau/N})^N[u_{\tau/N}] = u_{\tau/N} + N\bar{E}_{\tau/N} = u_{\tau/N} + \bar{E}_\tau.$$

Como $u_{\tau/N}(y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u_{\tau/N}(x) + E_\tau(x, y)\} - \bar{E}_{\tau/N}$ se sigue que

$$u_{\tau N}(y) \leq u_{\tau/N}(x) + E_\tau(x, y) - \bar{E}_{\tau/N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

En particular, se cumple para $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ tal que $u_{\tau/N}(\bar{x}) = \min u_{\tau/N} = 0$, es decir,

$$u_{\tau N}(y) \leq u_{\tau/N}(\bar{x}) + E_\tau(\bar{x}, y) - \bar{E}_{\tau/N} = E_\tau(\bar{x}, y) - \bar{E}_{\tau/N}$$

luego, por como $\tau/N \leq 1$ se sigue que $1 \leq \frac{1}{\tau/N}$ y de aquí que

$$\begin{aligned}
 u_{\tau N}(y) &\leq E_\tau(\bar{x}, y) - \bar{E}_{\tau/N} \leq \frac{E_\tau(\bar{x}, y) - \bar{E}_{\tau/N}}{\tau/N} \\
 &\leq \sup_{\tau/N \in (0, 1], \|y-x\| \leq \tau/N} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_{\tau/N}}{\tau/N}.
 \end{aligned}$$

De la manera que se definio C se tiene que

$$C \geq 2 \sup_{\tau/N \in (0, 1], \|y-x\| \leq \tau/N} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_{\tau/N}}{\tau/N}$$

se sigue de la desigualdad anterior que $\|u_{\tau/N}\|_\infty \leq C$. Y de aquí que, $(u_{\tau/N}(\bar{x}) = 0)$

$$\begin{aligned} T_\tau[0](y) &= \min_{w \in \mathbb{R}^d} \{0 + E_\tau(w, y)\} = \min_{w \in \mathbb{R}^d} \{u_{\tau/N}(\bar{x}) + E_\tau(w, y)\} \\ &\leq \min_{w \in \mathbb{R}^d} \{u_{\tau/N}(w) + E_\tau(w, y)\} = T_\tau[u_{\tau/N}](y) \\ &= u_{\tau/N}(y) + \bar{E}_{\tau/N} \leq C + \bar{E}_{\tau/N}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por otro lado, como $\min u_{\tau/N} = 0$ y $\|u_{\tau/N}\|_\infty \leq C$ implica que $0 \leq u_{\tau/N} \leq C$. Observamos que $u_{\tau/N} - C \leq 0$ de lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} T_\tau[0](y) &= \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{0 + E_\tau(x, y)\} \geq \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u_{\tau/N}(x) - C + E_\tau(x, y)\} \\ &= T_\tau[u_{\tau/N} - C](y) = u_{\tau/N}(y) - C + \bar{E}_\tau \geq -C + \bar{E}_\tau. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De (3.18) y (3.19) se concluye que $\|T_\tau[0] - \bar{E}_\tau\|_\infty \leq C$ para todo $\tau > 0$.

□

Continuemos con la prueba del inciso I) para el caso donde $\tau \notin \mathbb{Q}$. Sean $(p_i), (q_i) \subset \mathbb{N}$ sucesiones de manera que $q_i \rightarrow +\infty$ y $p_i < q_i\tau < p_i + 1$. Denotemos a $\sigma_i = p_i + 1 - q_i\tau$, luego $T_{p_i+1} = T_{\sigma_i+q_i\tau} = T_{\sigma_i} \circ T_{q_i\tau}$. Del lema (3.13) se tiene que $\|T_{q_i\tau}[0] - q_i\bar{E}_\tau\|_\infty \leq C$ y aplicando T_{σ_i} se obtiene que

$$\begin{aligned} T_{p_i+1}[0](y) - q_i\bar{E}_\tau &= T_{\sigma_i} \circ T_{q_i\tau}[0](y) - q_i\bar{E}_\tau = T_{\sigma_i}(T_{q_i\tau}[0](y)) - q_i\bar{E}_\tau \\ &= T_{\sigma_i} \left(\min_{x \in \mathbb{R}^d} \{0 + E_{q_i\tau}(x, y)\} \right) - q_i\bar{E}_\tau \\ &= \min_{z \in \mathbb{R}^d} \left\{ \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{0 + E_{q_i\tau}(x, y)\} + E_{\sigma_i}(z, y) \right\} - q_i\bar{E}_\tau \\ &= \min_{z \in \mathbb{R}^d} \left\{ \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{0 - q_i\bar{E}_\tau + E_{q_i\tau}(x, y)\} + E_{\sigma_i}(z, y) \right\} \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ (T_{q_i\tau}[0] - q_i\bar{E}_\tau)(y) + E_{\sigma_i}(z, y) \} \\ &\leq \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ C + E_{\sigma_i}(x, y) \} = C + \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ 0 + E_{\sigma_i}(z, y) \} \\ &= C + T_{\sigma_i}[0](y) \end{aligned}$$

lo anterior implica que

$$\|T_{p_i+1}[0] - q_i\bar{E}_\tau\|_\infty \leq C + \|T_{\sigma_i}[0]\|_\infty. \quad (3.20)$$

3.2. EL SEMI-GRUPO DE LAX-OLEINIK DISCRETO.

Por otro lado, de la prueba del caso racional de este inciso se tiene que

$$\|T_{p_i+1}[0] - (p_i + 1)\bar{E}_1\|_\infty = \|T_{p_i+1}[0] - \bar{E}_{p_i+1}\|_\infty \leq C$$

de esto último y usando la desigualdad (3.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \|(p_i + 1)\bar{E}_1 - q_i\bar{E}_\tau\|_\infty &= \|(p_i + 1)\bar{E}_1 + T_{p_i+1}[0] + T_{p_i+1}[0] - q_i\bar{E}_\tau\|_\infty \\ &\leq \|(p_i + 1)\bar{E}_1 + T_{p_i+1}[0]\|_\infty + \|T_{p_i+1}[0] - q_i\bar{E}_\tau\|_\infty \\ &\leq C + C + \|T_{\sigma_i}[0]\|_\infty \\ &\leq 2C + \sup_{\sigma \in (0,1]} \|T_\sigma[0]\|_\infty \end{aligned}$$

el inciso II b) de la proposición (3.8) implica que $\|T_\sigma[0]\|_\infty \leq \sigma C \leq C$. Luego, tomando $M := 3C > 0$ se sigue que $\|(p_i + 1)\bar{E}_1 - q_i\bar{E}_\tau\|_\infty \leq M$. Ahora, dividiendo entre q_i y tomando el limite cuando q_i tiende a infinito, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{q_i \rightarrow +\infty} \left\| \frac{(p_i + 1)\bar{E}_1 - \bar{E}_\tau}{q_i} \right\|_\infty &= \left\| \lim_{q_i \rightarrow +\infty} \frac{(p_i + 1)\bar{E}_1 - \bar{E}_\tau}{q_i} \right\|_\infty \\ &\leq \lim_{q_i \rightarrow +\infty} \frac{M}{q_i} = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Recordemos que $p_i < q_i\tau < p_i + 1$ luego de la segunda parte de la desigualdad tenemos que $\tau < \frac{p_i + 1}{q_i}$ lo cual implica que $\tau \leq \lim_{q_i \rightarrow +\infty} \frac{p_i + 1}{q_i}$. Por otro lado, sabemos que $p_i < q_i\tau$ luego $p_i + 1 < q_i\tau + 1$ y de aquí que

$$\lim_{q_i \rightarrow +\infty} \frac{p_i + 1}{q_i} \leq \tau + \lim_{q_i \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_i} = \tau$$

de las anteriores desigualdades se concluye que $\lim_{q_i \rightarrow +\infty} \frac{p_i + 1}{q_i} = \tau$. Sustituyendo lo anterior en la ecuación (3.21) se obtiene que

$$\|\tau\bar{E}_1 - \bar{E}_\tau\|_\infty = \left\| \lim_{q_i \rightarrow +\infty} \frac{(p_i + 1)\bar{E}_1 - \bar{E}_\tau}{q_i} \right\|_\infty \leq 0$$

Por tanto, se concluye que $\tau\bar{E}_1 = \bar{E}_\tau$.

II) De la proposición (3.8), se puede encontrar una constante $C > 0$ tal que toda solución KAM débil discreta u_τ satisface $Lip(u_\tau) \leq C$. Dado que u_τ más una constante es de nuevo solución KAM, podemos suponer que $\min(u_\tau) = 0$. Al tomar una subsucesión $\tau_i \rightarrow 0$, podemos suponer que $u_{\tau_i} \rightarrow u$ de manera uniforme. Además, de la segunda parte de la proposición (3.8) implica que $\|T_\sigma[v] - v\|_\infty \leq \sigma C$, para cada $\sigma \in (0, 1]$ y

cada función de Lipshitz v que satisfaga $Lip(v) \leq C$. Sea $t > 0$, luego existen enteros N_i tales que $N_i\tau_i \leq t < (N_i + 1)\tau_i$. Sea $\sigma_i = t - N_i\tau_i$ y recordemos que $T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] = u_{\tau_i} + \tau_i\bar{E}_1$ luego

$$T_{N_i\tau_i}[u_{\tau_i}] = (T_{\tau_i})^{N_i}[u_{\tau_i}] = u_{\tau_i} + N_i\tau_i\bar{E}_1$$

usando las propiedades de semi-grupo de (T_τ) se tiene

$$\begin{aligned} T_{t-N_i\tau_i}[u_{\tau_i}](y) + N_i\tau_i\bar{E}_1 &= T_t \circ T_{-N_i\tau_i}[u_{\tau_i}(y)] + N_i\tau_i\bar{E}_1 \\ &= T_t(T_{-N_i\tau_i}[u_{\tau_i}(y)]) + N_i\tau_i\bar{E}_1 \\ &= T_t((T_{\tau_i})^{-N_i}[u_{\tau_i}(y)]) + N_i\tau_i\bar{E}_1 \\ &= T_t(u_{\tau_i}(y) - N_i\tau_i\bar{E}_1) + N_i\tau_i\bar{E}_1 \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ u_{\tau_i}(x) - N_i\tau_i\bar{E}_1 + E_t(x, y) \} + N_i\tau_i\bar{E}_1 \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ u_{\tau_i}(x) + E_t(x, y) \} - N_i\tau_i\bar{E}_1 + N_i\tau_i\bar{E}_1 \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ u_{\tau_i}(x) + E_t(x, y) \} = T_t[u_{\tau_i}](y) \end{aligned}$$

de lo anterior se tiene que $T_t[u_{\tau_i}] = T_{t-N_i\tau_i}[u_{\tau_i}] + N_i\tau_i\bar{E}_1$. De lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \|T_t[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - t\bar{E}_1\|_\infty &= \|T_{t-N_i\tau_i}[u_{\tau_i}] + N_i\tau_i\bar{E}_1 - u_{\tau_i} - t\bar{E}_1\|_\infty \\ &\leq \|T_{t-N_i\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i}\|_\infty + \|N_i\tau_i\bar{E}_1 - t\bar{E}_1\|_\infty \\ &\leq \|T_{t-N_i\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i}\|_\infty + |N_i\tau_i - t| \cdot |\bar{E}_1| \\ &\leq \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i}\|_\infty + \sigma_i \cdot |\bar{E}_1| \end{aligned} \tag{3.22}$$

en resumen se tiene que $\|T_t[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - t\bar{E}_1\|_\infty \leq \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i}\|_\infty + \sigma_i \cdot |\bar{E}_1|$. Notemos que el primer término del lado derecho de la desigualdad cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i}\|_\infty &= \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - T_{\sigma_i}[u] + T_{\sigma_i}[u] - u_{\tau_i}\|_\infty \\ &\leq \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - T_{\sigma_i}[u]\|_\infty + \|T_{\sigma_i}[u] - u_{\tau_i}\|_\infty \\ &= \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - T_{\sigma_i}[u]\|_\infty + \|T_{\sigma_i}[u] - u + u - u_{\tau_i}\|_\infty \\ &= \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - T_{\sigma_i}[u]\|_\infty + \|T_{\sigma_i}[u] - u\|_\infty + \|u - u_{\tau_i}\|_\infty \end{aligned}$$

como T_{σ_i} es Lipschitz tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i}\|_\infty &\leq \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - T_{\sigma_i}[u]\|_\infty + \|T_{\sigma_i}[u] - u\|_\infty + \|u - u_{\tau_i}\|_\infty \\ &\leq \|u_{\tau_i} - u\|_\infty + \|T_{\sigma_i}[u] - u\|_\infty + \|u - u_{\tau_i}\|_\infty \end{aligned}$$

3.3. ESQUEMA DE APROXIMACIÓN.

sustituyendo lo anterior en la desigualdad (3.22) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|T_t[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - t\bar{E}_1\|_\infty &\leq \|T_{\sigma_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i}\|_\infty + \sigma_i \cdot |\bar{E}_1| \\ &\leq 2\|u_{\tau_i} - u\|_\infty + \|T_{\sigma_i}[u] - u\|_\infty + \sigma_i \cdot |\bar{E}_1| \end{aligned}$$

como $\sigma_i \rightarrow 0$, $u_{\tau_i} \rightarrow u$, $T_{\sigma_i}[u] \rightarrow u$ se concluye que $T_t[u] = u + t\bar{E}_1$.

III) Primero notemos que

$$T_t[0](y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{0 + E_t(x, y)\} = \min_{x \in \mathbb{R}^d} E_t(x, y)$$

lo cual implica que $\min_{y \in \mathbb{R}^d} T_t[0](y) = \min_{x, y \in \mathbb{R}^d} E_t(x, y)$. Ahora, como $\min u \leq u \leq \max u$, tenemos que

$$\begin{aligned} T_t[0](y) &= \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{0 + E_t(x, y)\} \leq \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(y) - \min u + E_t(x, y)\} \\ &= T_t[u - \min u](y) \end{aligned}$$

así $T_t[0] \leq T_t[u - \min u] = u + t\bar{E}_1 - \min u \leq \max u - \min u + t\bar{E}_1$. Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} T_t[0] &\geq T_t[u - \max u] = u + t\bar{E}_1 - \max u \\ &\geq \min u - \max u + t\bar{E}_1. \end{aligned}$$

En particular, $\|T_t[0] - t\bar{E}_1\|_\infty \leq \max u - \min u =: \text{osc}(u)$ dividiendo entre t y tomando el límite cuando t tiende a infinito se obtiene que

$$\left\| \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} T_t[0] - \bar{E}_1 \right\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{t} T_t[0] - \bar{E}_1 \right\| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{osc}(u)}{t} = 0$$

así $\lim_{t \rightarrow +\infty} \min_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{t} T_t[0] = \bar{E}_1$. El resultado se sigue del hecho que

$$\min_{y \in \mathbb{R}^d} T_t[0](y) = \min_{x, y \in \mathbb{R}^d} E_t(x, y).$$

□

3.3. Esquema de aproximación.

Resumimos en el siguiente teorema los resultados previos que hemos obtenido para cualquier interacción de corto alcance al caso particular de acciones discretas y mínimas. Vamos a denotar por un subíndice τ al operador de Lax-Oleinik discreta y por τ superíndice al operador de Lax-Oleinik continuo.

3.14 Teorema. (*Esquema de aproximación*) Sea $H(x, p) : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ un hamiltoniano de Tonelli y $L(x, v)$ su lagrangiano asociado. Consideremos las siguientes ecuaciones:

$$u_\tau(y) + \bar{\mathcal{L}}_\tau = T_\tau[u_\tau](y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u_\tau(x) + \mathcal{L}_\tau(x, y)\} , \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \forall \tau > 0, \quad (\text{E1})$$

$$u(y) - \tau \bar{H} = T^\tau[u](y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y)\} , \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \forall \tau > 0, \quad (\text{E2})$$

donde u_τ, u son funciones de clase C^0 periódicas. Luego,

I) existe un único $\bar{\mathcal{L}}_\tau$, tal que (E1) admite una solución u_τ . Más aún,

$$\bar{\mathcal{L}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{z_0, \dots, z_k \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{L}_\tau(z_i, z_{i+1}).$$

II) existe un único escalar $\bar{H}$ tal que (E2) admite una solución u . Más aún,

$$-\bar{H} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \min_{x, y \in \mathbb{R}^d} \mathcal{E}_\tau(x, y) .$$

III) existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\bar{\mathcal{L}}_\tau}{\tau} + \bar{H} \right| \leq C\tau , \quad \forall \tau \in (0, 1].$$

IV) existen constantes $C, R > 0$, tal que para cada $\tau \in (0, 1]$ y para cada solución $v = u_\tau$ de (E1), o bien, $v = u$ de (E2) ,

a) $\text{Lip}(v) \leq C$, en particular $\|v\|_\infty \leq C$ si $\min(v) = 0$,

b) para todo $y \in \mathbb{R}^d$, si $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{v(x) + E_\tau(x, y)\}$ entonces $\|y - x\| \leq \tau R$.

V) existe una subsucesión $\tau_i \longrightarrow 0$ y una sucesión u_{τ_i} solución de (E1), tal que $u_{\tau_i} \longrightarrow u$ de manera uniforme. Más aún, cada u es una solución de (E2).

3.3. ESQUEMA DE APROXIMACIÓN.

Demostración:

Recordemos que la acción discreta $\mathcal{L}_\tau(x, y)$ y la acción minimal $\mathcal{E}_\tau(x, y)$ son casos particulares de interacciones de corto alcance. Así el inciso I) se prueba en la proposición (3.7) y el inciso II) se demuestra en la proposición (3.12).

Probemos el inciso III). De la proposición (3.7) se tiene que

$$\bar{\mathcal{E}}_\tau = \sup_{u \in C^0(\mathbb{T}^n)} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} \{ \mathcal{E}_\tau(x, y) - [u(y) - u(x)] \}$$

por definición de (E2) tenemos que

$$\begin{aligned} -\bar{H} &= \frac{1}{\tau} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y) \} - u(y) \\ &= \frac{1}{\tau} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y) - u(y) \} \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$-\bar{H} = \frac{1}{\tau} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ \mathcal{E}_\tau(x, y) - [u(y) - u(x)] \}$$

luego al tomar supremo sobre las funciones $u \in C^0(\mathbb{T}^n)$ se obtiene que $\bar{\mathcal{E}}_\tau/\tau = -\bar{H}$. Así basta demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que $|\bar{\mathcal{E}}_\tau - \bar{\mathcal{L}}_\tau| \leq \tau^2 C$, para todo $\tau \in (0, 1]$. Sean u_τ una solución KAM débil de $\mathcal{E}_\tau(x, y)$ y $(x_{-k})_{k=0}^{+\infty}$ una configuración de calibradores para u_τ (recordemos que si x es calibrador entonces $x \in \arg \min$). De las proposiciones (3.8) y (3.5) se tienen que existen constantes $R > 0$ y $C > 0$, que no depende de τ , tales que $\|x_{-k} - x_{-k-1}\| \leq \tau R$, $\forall k \geq 0$ y $|\mathcal{E}_\tau(x, y) - \mathcal{L}_\tau(x, y)| \leq \tau^2 C$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ que satisfacen que $\|y - x\| \leq \tau R$. Ahora, recordemos al operador de Lax-Oleinik para la familia de la acción minimal $(\mathcal{E}_\tau)_{\tau>0}$, esto es, (ver (E2))

$$T_\tau[u](y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{ u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y) \}.$$

Una solución KAM débil de $\mathcal{E}_\tau(x, y)$ cumple que $T_\tau[u_\tau] = u_\tau + \bar{\mathcal{E}}_\tau$ y x es un punto de calibración de $u_\tau(y)$ si $u_\tau(y) - u_\tau(x) = \mathcal{E}_\tau(x, y) - \bar{\mathcal{E}}_\tau$, o equivalentemente

$$\mathcal{E}_\tau(x_{-k-1}, x_{-k}) = u_\tau(x_{-k}) - u_\tau(x_{-k-1}) + \bar{\mathcal{E}}_\tau. \quad (3.23)$$

Sabemos que $|\mathcal{E}_\tau(x, y) - \mathcal{L}_\tau(x, y)| \leq \tau^2 C$ o de manera equivalente

$$-\tau^2 C \leq \mathcal{E}_\tau(x, y) - \mathcal{L}_\tau(x, y) \leq \tau^2 C \quad (3.24)$$

del lado izquierdo de la desigualdad anterior se obtiene que $\mathcal{L}_\tau(x, y) - \mathcal{E}_\tau(x, y) \leq \tau^2 C$. En particular, al tomar $x = x_{-k}$, $y = x_{-k-1}$ se obtiene que $\mathcal{L}_\tau(x_{-k}, x_{-k-1}) \leq \mathcal{E}_\tau(x_{-k}, x_{-k-1}) + \tau^2 C$.

De lo anterior y usando la ecuación (3.23) tenemos la siguiente cadena de igualdades y desigualdades

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau(x_{-k-1}, x_{-k}) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_\tau(x_{-k}) - u_\tau(x_{-k-1}) + \bar{\mathcal{E}}_\tau + \tau^2 C \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_\tau(x_{-k}) - u_\tau(x_{-k-1}) \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\mathcal{E}}_\tau + \tau^2 C \\
 &= \frac{1}{n} \left(u_\tau(x_0) - u_\tau(x_{-n}) \right) + \frac{1}{n} \left(n \bar{\mathcal{E}}_\tau + n \tau^2 C \right) \\
 &\leq \frac{2}{n} \|u\|_\infty + \bar{\mathcal{E}}_\tau + \tau^2 C
 \end{aligned}$$

tomando el límite cuando n tiende a infinito y usando el inciso I) se obtiene

$$\bar{\mathcal{L}}_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau(x_{-k-1}, x_{-k}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \|u\|_\infty + \bar{\mathcal{E}}_\tau + \tau^2 C = \bar{\mathcal{E}}_\tau + \tau^2 C,$$

así $\bar{\mathcal{L}}_\tau - \bar{\mathcal{E}}_\tau \leq \tau^2 C$. Para la otra la desigualdad tomemos el lado derecho de (3.24) se obtiene que $\mathcal{E}_\tau(x_{-k}, x_{-k-1}) \leq \mathcal{L}_\tau(x_{-k}, x_{-k-1}) + \tau^2 C$, y de manera analoga al caso anterior se obtiene que $\bar{\mathcal{E}}_\tau - \bar{\mathcal{L}}_\tau \leq \tau^2 C$. Por tanto $|\bar{\mathcal{E}}_\tau - \bar{\mathcal{L}}_\tau| \leq \tau^2 C$.

Para el inciso IV) vamos a usar la proposición (3.8). El inciso b) se sigue de los incisos Ia) para $v = u_\tau$ y IIa) cuando $v = u$. Para mostrar el inciso a) recordemos que $\bar{\mathcal{E}}_\tau/\tau = -\bar{H}$ así vamos a considerar los siguientes

$$E_\tau(x, y) \in \{\mathcal{L}_\tau(x, y), \mathcal{E}_\tau(x, y)\} \quad , \quad \bar{E}_\tau \in \{-\bar{\mathcal{E}}_\tau, \bar{\mathcal{L}}_\tau\} ,$$

como $v \in \{u_\tau, u\}$ las ecuaciones (E1) y (E2) se pueden resumir como

$$v(y) + \bar{E}_\tau = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{v(x) + E_\tau(x, y)\}$$

o de manera equivalente, $v(y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{v(x) + E_\tau(x, y)\} - \bar{E}_\tau$ luego para todo $x \in \mathbb{R}^d$, usando que $\tau \in (0, 1]$, se cumple que

$$v(y) - v(x) \leq E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau \leq \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau}{\tau} \leq \sup_{\tau \in (0, 1], \|y-x\| \leq \tau} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau}{\tau} .$$

De la proposición (3.8) se tiene que C cumple que

$$2 \sup_{\tau \in (0, 1], \|y-x\| \leq \tau} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau}{\tau} \leq C$$

3.3. ESQUEMA DE APROXIMACIÓN.

luego esto implica que

$$v(y) - v(x) \leq \sup_{\tau \in (0,1], \|y-x\| \leq \tau} \frac{E_\tau(x, y) - \bar{E}_\tau}{\tau} \leq C$$

para toda $x \in \mathbb{R}^d$. En particular, se cumple para $x \in \arg \min v$, es decir, $v(y) \leq C$, al ser y arbitrario se concluye que $\|v\|_\infty \leq C$ donde $v = u_\tau$, o bien, $v = u$.

Por último demostremos el inciso V). Para ello, probaremos antes el siguiente lema

3.15 Lema. *Existe $C > 0$ constante tal que para $\tau > 0$ suficientemente pequeño y para cada solución KAM débil u_τ asociada a $\mathcal{L}_\tau$ se cumple que $\|T^\tau[u] - T_\tau[u]\|_\infty \leq \tau^2 C$.*

Demostración:

De la proposición (3.8) se tiene que existen constantes $R, C > 0$ tal que para cada $\tau > 0$ y para cada solución KAM débil discreta u se tiene que $Lip(u) \leq C$ y (suponiendo que $\min u = 0$) $\|u\|_\infty \leq C$. Más aún, se cumple que $\|T^\tau[u] - u\|_\infty \leq \tau C$, en efecto, recordemos que

$$T^\tau[u](x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y)\}$$

luego del inciso IIb) se sigue el resultado. De la misma proposición (3.8) se obtiene que

- Para todo $y \in \mathbb{R}^d, x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + \mathcal{L}_\tau(x, y)\}$ entonces $\|y - x\| \leq \tau R$.
- Para todo $y \in \mathbb{R}^d, x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y)\}$ entonces $\|y - x\| \leq \tau R$.

Además, para cada $x, y \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|y - x\| \leq \tau R$ se cumple que $\|\mathcal{E}_\tau(x, y) - \mathcal{L}_\tau(x, y)\| \leq \tau^2 C$. Luego, para $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + \mathcal{L}_\tau(x, y)\}$ se sigue de la desigualdad (3.24) que $\mathcal{E}_\tau(x, y) - \mathcal{L}_\tau(x, y) \leq \tau^2 C$ entonces

$$T^\tau[u](y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y)\} \leq u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y) \leq u(x) + \mathcal{L}_\tau(x, y) + \tau^2 C$$

tomando el mínimo sobre x se sigue que $T^\tau[u](y) \leq T_\tau[u](y) + \tau^2 C$. Por otro lado, si $x \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y)\}$ se tiene, nuevamente de la desigualdad (3.24), que $\mathcal{E}_\tau(x, y) \geq \mathcal{L}_\tau(x, y) - \tau^2 C$ y de aquí que

$$T^\tau[u](y) = u(x) + \mathcal{E}_\tau(x, y) \geq u(x) + \mathcal{L}_\tau(x, y) - \tau^2 C$$

nuevamente tomando el mínimo sobre x se obtiene $T^\tau[u](y) \geq T_\tau[u](y) - \tau^2 C$. Por tanto, se concluye que $\|T^\tau[u] - T_\tau[u]\|_\infty \leq \tau^2 C$.

□

Ahora como $Lip(u)$ es uniformemente acotada independiente de la elección de τ para alguna solución u KAM débil discreta para $\mathcal{L}_\tau$, del teorema del Arzela-Ascoli, podemos elegir una sucesión $\tau_i \rightarrow 0$ y una sucesión de soluciones KAM débiles discretas $\mathcal{L}_{\tau_i}$, de tal manera que $u_{\tau_i} \rightarrow u$ de manera uniforme para alguna función periódica u Lipschitz. Sean $t > 0$ fijo y N_i enteros tales que $N_i\tau_i \leq t < (N_i + 1)\tau_i$, luego obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} T^t[u](y) - T^{N_i\tau_i}[u_{\tau_i}](y) &= u(y) - t\bar{H} - \left(u_{\tau_i}(y) - N_i\tau_i\bar{H} \right) \\ &= \left(u(y) - (t - N_i\tau_i)\bar{H} \right) - u_{\tau_i}(y) = T^{t-N_i\tau_i}[u](y) - u_{\tau_i}(y) \end{aligned}$$

lo anterior implica que $\| T^t[u] - T^{N_i\tau_i}[u_{\tau_i}] \|_\infty = \| T^{t-N_i\tau_i}[u] - u_{\tau_i} \|_\infty$ así se sigue que

$$\begin{aligned} \| T^t[u] - T^{N_i\tau_i}[u_{\tau_i}] \|_\infty &= \| T^{t-N_i\tau_i}[u] - u_{\tau_i} \|_\infty \\ &= \| T^{t-N_i\tau_i}[u] - u + u - u_{\tau_i} \|_\infty \\ &\leq \| T^{t-N_i\tau_i}[u] - u \|_\infty + \| u - u_{\tau_i} \|_\infty \end{aligned} \quad (3.25)$$

Observemos que $\lim_{\tau_i \rightarrow 0} (t - N_i\tau_i) = 0$, recordemos que $N_i\tau_i \leq t < (N_i + 1)\tau_i$. De la desigualdad del lado izquierdo se tiene que $0 \leq N_i\tau_i - t$ luego $0 \leq \lim_{\tau_i \rightarrow 0} (N_i\tau_i - t)$. Por otro lado, de la segunda desigualdad se tiene que $t - N_i\tau_i < \tau_i$ así $\lim_{\tau_i \rightarrow 0} (N_i\tau_i - t) \leq \lim_{\tau_i \rightarrow 0} \tau_i = 0$. De ambas desigualdades se tiene que $(N_i\tau_i - t) \rightarrow 0$ lo cual implica que $\lim_{\tau_i \rightarrow 0} T^{N_i\tau_i - t}[u] = u$. De lo anterior y usando el hecho que u_{τ_i} converge a u de manera uniforme se concluye de la desigualdad (3.25) que $\| T^t[u] - T^{N_i\tau_i}[u_{\tau_i}] \|_\infty \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow +\infty$. Ahora, del lema (3.15) y del inciso III) se tiene, de manera respectiva, que

$$\| T^{\tau_i}[u_{\tau_i}] - T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] \|_\infty \leq \tau_i^2 C \quad \text{y} \quad |\bar{\mathcal{E}}_{\tau_i} - \bar{\mathcal{L}}_{\tau_i}| \leq \tau_i^2 C.$$

de las estimaciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \| T^{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 \|_\infty &= \| T^{\tau_i}[u_{\tau_i}] - T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] + T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 \|_\infty \\ &\leq \| T^{\tau_i}[u_{\tau_i}] - T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] \|_\infty \\ &\quad + \| T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 \|_\infty \end{aligned} \quad (3.26)$$

analicemos el segundo término de (3.26) para ello notemos que $T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] = u_{\tau_i} + \bar{\mathcal{L}}_{\tau_i}$ así

$$\begin{aligned} \| T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 \|_\infty &= \| T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i} \|_\infty \\ &= \| T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \bar{\mathcal{L}}_{\tau_i} + \bar{\mathcal{L}}_{\tau_i} - \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i} \|_\infty \\ &= \| \bar{\mathcal{L}}_{\tau_i} - \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i} \|_\infty = | \bar{\mathcal{L}}_{\tau_i} - \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i} | \end{aligned}$$

3.3. ESQUEMA DE APROXIMACIÓN.

sustituyendo esta igualdad en (3.26) obtenemos

$$\begin{aligned} \| T^{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 \|_{\infty} &\leq \| T^{\tau_i}[u_{\tau_i}] - T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] \|_{\infty} + \| T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 \|_{\infty} \\ &\leq \| T^{\tau_i}[u_{\tau_i}] - T_{\tau_i}[u_{\tau_i}] \|_{\infty} + |\bar{\mathcal{L}}_{\tau_i} - \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i}| \leq \tau^2 C + \tau^2 C = 2\tau^2 C \end{aligned}$$

de esta manera tenemos que $\| T^{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 \|_{\infty} \leq 2\tau^2 C$. Ahora, de la definición de T^{τ} se sigue que

$$T^{\tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 = u_{\tau_i} + \tau_i \bar{H} - u_{\tau_i} - \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i} = \tau_i \bar{H} - \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i}$$

lo cual implica que $|\tau_i \bar{H} - \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i}| \leq 2\tau^2 C$ y de aquí que (usando el hecho que $N_i \tau_i \leq t$)

$$\begin{aligned} T^{N_i \tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - N_i \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 &= u_{\tau_i} + N_i \tau_i \bar{H} - u_{\tau_i} - N_i \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i} \\ &= N_i \tau_i \bar{H} - N_i \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i} = N_i (\tau_i \bar{H} - \bar{\mathcal{E}}_{\tau_i}) \\ &\leq N_i 2\tau_i^2 C \leq 2t \tau_i C \end{aligned}$$

tomando supremo se tiene que $\| T^{N_i \tau_i}[u_{\tau_i}] - u_{\tau_i} - N_i \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 \|_{\infty} \leq N_i 2\tau_i^2 C \leq 2t \tau_i C$ si tomamos el límite cuando i tiende a infinito tenemos

$$\left\| \lim_{i \rightarrow +\infty} T^{N_i \tau_i}[u_{\tau_i}] - \lim_{i \rightarrow +\infty} (u_{\tau_i} + N_i \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1) \right\|_{\infty} \leq \lim_{i \rightarrow +\infty} 2t \tau_i C = 0 \quad (3.27)$$

anteriormente mostramos que $(N_i \tau_i - t) \rightarrow 0$, o equivalentemente, $N_i \tau_i \rightarrow t$. De lo anterior y recordando que $u_i \rightarrow u$, de manera uniforme, se tiene que

$$u_{\tau_i} + N_i \tau_i \bar{\mathcal{E}}_1 \rightarrow u + t \bar{\mathcal{E}}_1$$

así de la desigualdad (3.27) se obtiene que $T^t[u] = u + t \bar{\mathcal{E}}_1$, es decir, u es solución de (E2) y con esto concluimos la prueba de esta proposición.

□

El esquema de aproximación del teorema anterior básicamente nos dice que para poder encontrar una solución a la de Hamilton-Jacobi continua (E2) primero debemos encontrar el valor $\bar{\mathcal{L}}_{\tau}$ de la ecuación (E1) posteriormente podemos encontrar una solución KAM débil discreta u_{τ} , que depende de τ el cual lo podemos discretizar de manera que seamos capaces de extraer una subsucesión convergente de manera uniforme a una función u . Dicha u será la solución dada por la ecuación (E2). No siempre es posible calcular el valor $\bar{\mathcal{L}}_{\tau}$ de manera explícita (como veremos en el siguiente capítulo) pero si se puede acotar lo cual hace que el teorema (3.14) tenga dicho nombre bien merecido ya que podemos únicamente indicar cotas para poder aproximar a las soluciones de la ecuación (E2).

Capítulo 4

Conclusión

El teorema (3.14) es un método importante para poder encontrar soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi continua a partir de una ecuación de Hamilton-Jacobi discreta. Una posible aplicación de este esquema es al modelo de Frenkel-Kontorova (ver página 337 de [3]) el cuál responde a la siguiente pregunta:

¿Cuál es la configuración (curva) que minimiza la energía de N átomos que interactúan sobre una cadena unidimensional?

Para este modelo se ignora el movimiento transversal de los átomos, es decir, los átomos solo pueden moverse a lo largo de la cadena. El lagrangiano asociado a este sistema está dado como

$$L(x, v) = \frac{1}{2}||v||^2 - \langle P, v \rangle + K \left(1 - \cos(2\pi \langle N, x \rangle) \right)$$

donde $P \in \mathbb{R}^d$, $N \in \mathbb{Z}^d$ y $K \in \mathbb{R}$.

En términos de curvas $\gamma : [0, \tau] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tenemos que el lagrangiano se escribe de la siguiente manera

$$L(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2}||\dot{\gamma}(t)||^2 - \langle P, \dot{\gamma}(t) \rangle + K \left(1 - \cos(2\pi \langle N, \gamma(t) \rangle) \right)$$

Por otro lado, recordemos que $\mathcal{L}_\tau(x, y) = \tau L \left(x, \frac{y - x}{\tau} \right) \geq 0$ luego

$$\mathcal{L}_\tau(x, y) = \frac{1}{2\tau}||y - x||^2 - \langle P, y - x \rangle + \tau K \left(1 - \cos(2\pi \langle N, x \rangle) \right).$$

Queremos encontrar las soluciones de la siguiente ecuación

$$T_\tau[u_\tau](y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u_\tau(x) + \mathcal{L}_\tau(x, y)\} = u_\tau(y) + \bar{\mathcal{L}}_\tau.$$

Primero tenemos que calcular $\bar{\mathcal{L}}_\tau$, el cual esta dado como

$$\bar{\mathcal{L}}_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau(z_i, z_{i+1})$$

donde $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ es una configuración minimizante. Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, vamos a suponer que existe una configuración tal que $\|z_{i-1} - z_i\| < \varepsilon$ luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\tau(z_i, z_{i-1}) &= \frac{1}{2\tau} \|z_{i-1} - z_i\|^2 - \langle P, z_{i-1} - z_i \rangle + \tau K \left(1 - \cos(2\pi \langle N, z_i \rangle) \right) \\ &< \frac{\varepsilon^2}{2\tau} - \varepsilon P + \tau K \left(1 - \cos(2\pi \langle N, z_i \rangle) \right). \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau(z_i, z_{i-1}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2\tau} \|z_{i-1} - z_i\|^2 - \langle P, z_{i-1} - z_i \rangle \right. \\ &\quad \left. + \tau K \left(1 - \cos(2\pi \langle N, z_i \rangle) \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2\tau} \|z_{i-1} - z_i\|^2 + \|P\| \cdot \|z_i - z_{i-1}\| \right. \\ &\quad \left. + \tau K \left(1 - \cos(2\pi \langle N, z_i \rangle) \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{2\tau} + \|P\| \right) + \tau K \left(1 - \cos(2\pi \langle N, z_i \rangle) \right) \right] \\ &= \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{2\tau} + \|P\| \right) \frac{n-1}{n} + \frac{\tau K}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \cos(2\pi \langle N, z_i \rangle) \right). \end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau(z_i, z_{i-1}) \leq \frac{\tau K}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \cos(2\pi \langle N, z_i \rangle) \right).$$

Ahora, como $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ se sigue que $0 \leq 1 - \cos \theta \leq 2$ así la desigualdad anterior se

obtiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau(z_i, z_{i-1}) &\leq \frac{\tau K}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \cos(2\pi \langle N, z_i \rangle) \right) \\ &\leq \frac{\tau K}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 2 = \frac{2\tau K(n-1)}{n} \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene que

$$\bar{\mathcal{L}}_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau(z_i, z_{i-1}) \leq 2\tau K \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 2\tau K$$

Por tanto, obtenemos que $0 \leq \bar{\mathcal{L}}_\tau \leq 2\tau K$.

Después de este paso deberíamos poder encontrar una solución de la ecuación (E1) pero el problema es que la cota no es lo suficientemente fina para dar una solución de (E1), o bien, para dar una aproximación de la solución. En este contexto conjeturamos que la configuración que miniza la energía de N átomos se localicen sobre soluciones de un oscilador armónico. Sin embargo este proceso se extralimita del objetivo de esta tesis y queda planteado a un trabajo que seguiremos desarrollando a futuro.

Bibliografía

- [1] A. Biryuk y D. Gomes. An introduction to the Aubry-Mather theory. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences* 4, 1 (2010), 17–63.
- [2] A. Fathi. Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics Preliminary Version Number 10. https://www.math.u-bordeaux.fr/Fathi2008_01.
- [3] A. Scott. Encyclopedia of Nonlinear Science. *Routledge, New York*, 2005.
- [4] A. Sorrentino. Action-minimizing Methods in Hamiltonian Dynamics: An Introduction to Aubry-Mather Theory. *Princeton University Press*, 2015.
- [5] D. Gomes. Hamilton-Jacobi Equations, Viscosity Solutions and Asymptotics of Hamiltonian Systems. *Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal*, 1995.
- [6] D. Gomes. Viscosity solution methods and the discrete Aubry-Mather problem. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 13 (1) : 103-116.
- [7] M. Bardi y I. Capuzzo-Dolcetta Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. *Birkhäuser, New York*, 1997.
- [8] P. Lions, G. Papanicolao y S. Varadhan. Homogenization of Hamilton-Jacobi equations. <http://www.math.unipd.it/didattica/LPV87>.
- [9] R. Nussbaum. Convergence of iterates of a nonlinear operator arising in statistical mechanics. *Nonlinearity*, 4 :1223–40.
- [10] X. Su y P. Thieullen. Convergence of discrete Aubry–Mather model in the continuous limit. *Nonlinearity*, 31:2126-2156.
- [11] V. I. Arnol’d. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russ. Math. Surv.*, 18(5):9–36.