



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE CHIAPAS



FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS.

Vértice de tres gluones.

TESIS

Que para obtener el grado de maestro en Ciencias Físicas.

Presenta:

Jesús Alejandro Alfaro Gómez X160003.

Directora de tesis:

Dra. Karen Salomé Caballero Mora

Co-Directora de Tesis:

Dra. Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero.

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; Noviembre de 2024

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
28 de Octubre de 2024
Oficio No. FCFM/0490/24

Dra. Karen Salomé Caballero Mora
Directora de Tesis
Dra. Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero
Co-Directora de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

“Vértice de tres gluones”.

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestría en Ciencias Físicas del **Lic. Jesús Alejandro Alfaro Gómez** con matrícula escolar X160003.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente
“Por la conciencia de la necesidad de servir”



Dr. Orlando Díaz Hernández
Director

C. c. p. Dra. María del Rosario Soler Zapata, Secretaria Académica de la FCFM
Lic. Juan Manuel Aguiar Gámez, Encargado del Control Escolar Posgrado de la FCFM
Archivo ODH/jmag



MINUTA DE REUNIÓN DE TRABAJO PARA TRATAR ASUNTOS RELACIONADOS A LA DIRECCIÓN Y CO-DIRECCIÓN DE TESIS DE POSGRADO EN LA FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS (FCFM - UNACH).

En la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, siendo las 10:00 horas del día viernes 22 de noviembre del año 2024, reunidos en la Sala de Usos Múltiples ubicada en el edificio "A" de Ciudad Universitaria, los CC. Dr. Orlando Díaz Hernández, Director de la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas de la Universidad Autónoma de Chiapas, Dr. Ariel Flores Rosas, Coordinador de Investigación y Posgrado de la FCFM; Dr. Armando Felipe Mendoza Pérez, Representante de los Núcleos Académicos de los Programas de Posgrado ante el CIP; Dr. Víctor Iván Ruiz Pérez, Vocal Titular del Consejo Consultivo de Investigación y Posgrado de la FCFM; Dr. Roberto Arceo Reyes, Representante de los Cuerpos Académicos y Grupos Colegiados de Investigación en el CIP, Dr. Javier Sánchez Martínez, Representante de las Profesoras y Profesores con reconocimiento vigente en el ámbito de la Investigación Científica, Tecnológica, Humanística y de Innovación en el CIP y el Lic. Jesús Erick Pérez Pérez, Representante Estudiantil de Posgrado en el CIP.

ORDEL DEL DÍA

- 1.- Verificación de quorum.
- 2.- Bienvenida.
- 3.- Direcciones y Co-Direcciones de tesis.
- 4.- Cierre de la reunión.

1. Pase de lista y verificación de *quórum*.

Presenta: Dr. Orlando Díaz Hernández, Director de la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.

Resumen: Se verificó la asistencia de los integrantes del Comité de Investigación y Posgrado.

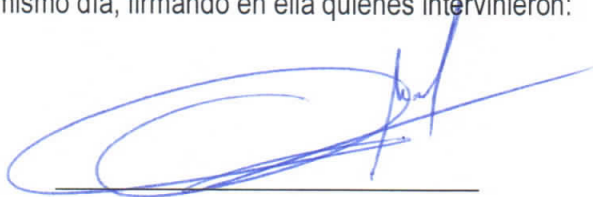
2. Bienvenida.

El Dr. Orlando Díaz Hernández, Director de la FCFM dio la Bienvenida a todos los presentes y plantea el objetivo de la reunión.

3. Direcciones y Co-Direcciones de Tesis.

3.1. Se acuerda que la Dra. Karen Salomé Caballero Mora sea designada como Directora de Tesis del Estudiante Lic. Jesús Alejandro Alfaro Gómez y como Co-Directora de Tesis a la Dra. Xiomara Gutiérrez Guerrero, por única ocasión y previa aceptación de la Dra. Karen Caballero y por sugerencia de la Dirección General de Investigación y Posgrado de la Universidad Autónoma de Chiapas.

Agotados los puntos de la reunión, se cierra la presente minuta de trabajo a las 10:30 horas del mismo día, firmando en ella quienes intervinieron:



Dr. Orlando Díaz Hernández.
Director de la Facultad de Ciencias en Física y
Matemáticas



Dr. Ariel Flores Rosas.
Coordinador de Investigación y Posgrado de la
FCFM



Dr. Armando Felipe Mendoza Pérez.
Representante de los Núcleos Académicos de los
Programas de Posgrado ante el CIP



Dr. Víctor Iván Ruiz Pérez.
Vocal Titular del Consejo Consultivo de
Investigación y Posgrado de la FCFM



Dr. Javier Sánchez Martínez.
Representante de las Profesoras y Profesores con
reconocimiento vigente en el ámbito de la
Investigación Científica, Tecnológica, Humanística
y de Innovación en el CIP



Dr. Roberto Arceo Reyes,
Representante de los Cuerpos Académicos y
Grupos Colegiados de Investigación en el CIP



Lic. Jesús Erick Pérez Pérez.
Representante Estudiantil de Posgrado en el CIP



Código: FO-113-05-05

Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

La alumna (s) o él alumno (s) Jesús Alejandro Alfaro Gómez, autora (s) o autor (es) de la tesis bajo el título de Vértice de tres Gluones presentada y aprobada en el año 2024 como requisito para obtener el título o grado de Maestro en Ciencias Físicas, autorizo licencia a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), para que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para su consulta, reproducción parcial y/o total, citando la fuente, que contribuya a la divulgación del conocimiento humanístico, científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.
- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 29 días del mes de Octubre del año 2024.

Jesús Alejandro Alfaro Gómez

Nombre y firma de la alumna (s) o él alumno (s)

Agradecimientos

Resulta innegable que el haber llegado hasta este punto no es algo que se pueda hacer en solitario, así pues me siento en la obligación de dar crédito a aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron a que alcanzara este punto en mi vida. Primeramente agradecer a la Dra Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero quien me enseñó a tratar con los temas que se incluyen en esta tesis y me dio las herramientas necesarias para internarme en el mundo de la física de partículas, apoyarme en todo sentido para asistir a escuelas y pláticas en las que pude aprender un poco mas sobre *QCD*, *QED*, o en general *QFT*, lamentando no poder designarla como directora de tesis por cuestiones administrativas de la universidad. A la Dra. Karen Salomé Caballero Mora, también asesora de esta tesis sin quien esto no sería posible ya que gracias a ella conocí la facultad y comencé a comprender de mejor manera el mundo de la física en general. Por último agradezco a mi familia, quien me apoyo desde un inicio, especialmente a mi madre (Domitila Gómez Ruiz) quien no me dio oportunidad de renunciar a los estudios y fue el único sostén de mi núcleo familiar. A mis tías (con especial énfasis en Reyneri Alfaro Mendez) que incentivaron mi curiosidad y por lo tanto mi amor por la ciencia. Mis abuelos que me enseñaron que todo se puede ver desde diferentes perspectivas y que la paciencia es de vital importancia en todo lo que hacemos.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen.	VII
1. Introducción	1
1.1. Matrices de Gell Mann.	3
1.2. Reglas de Feynman para QCD	3
1.3. Lagrangiano de QCD	5
1.3.1. Renormalización.	6
1.3.2. Campo fantasma de Faddev-Popov.	7
1.4. La integral de Camino	7
1.4.1. Formulación de la Mecánica Cuántica por la Integral de Camino.	7
1.4.2. Funcional Generadora.	10
1.4.3. Función Generadora para una Partícula Libre.	10
1.4.4. Función Generadora de 4 puntos.	12
1.5. La Ecuación de Schwinger-Dyson	13
2. Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE)	15
2.1. Planteamiento de las Ecuaciones de Scwinger-Dyson.	15
2.2. Identidades de Ward-Takahashi (WTI)	17
2.3. Forma Analítica del Propagador	17
2.3.1. Aproximación Quenched	18
2.4. Generación Dinámica de masas en QED3	20
2.5. Solución para cuatro dimensiones	23
2.5.1. Análisis de Bifurcaciones	27
3. Vértice quark-gluón	29
3.1. Vértice de Ball-Chiu	30
3.2. Identidades de Ward-Takahashi en QED	30
3.3. Vértice quark-gluón	31
3.3.1. Funciones de dos puntos.	33
3.3.2. Identidad de Ward-Slavnov-Taylor	34
3.3.3. Descomposición de vértice quark-gluón.	35
3.3.4. Resultados off-shell.	37
3.3.4.1. Resultados de la Parte Longitudinal del Vértice.	37
3.3.5. Casos Especiales.	38
3.3.5.1. Límite Simétrico.	38
3.3.5.2. Caso On-Shell.	47
3.3.5.3. Caso $p_3 = 0$	57

4. Vértice de Tres gluones	61
4.0.1. La Base de Davydychev	62
4.0.2. Base de Aguilar	63
4.0.3. Resultados Numéricos	65
5. Conclusiones	73
A. Integrales Maestras	75
A.1. sumas de las Γ 's.	76

Resumen.

Si bien el mecanismo de Higgs ha sido ampliamente aceptado para explicar el origen de la masa de las partículas elementales, este modelo no proporciona una explicación completa. Además del mecanismo de Higgs, la generación dinámica de masa, un fenómeno característico de la Cromodinámica Cuántica (QCD), juega un papel fundamental en la adquisición de masa por parte de las partículas. Esta generación de masa se produce debido a la capacidad de los gluones de interactuar entre sí. Dada la importancia de esta auto-interacción, el estudio del vértice de tres gluones es crucial. Sin embargo, cuando se intentan realizar cálculos más allá del nivel árbol, surgen dificultades significativas, como la complejidad de las integrales multidimensionales involucradas.

En este trabajo, se empleó la renormalización dimensional para obtener resultados sobre el comportamiento del vértice quark-gluón y, posteriormente, del vértice de tres gluones. Los resultados indican que la principal contribución a la generación dinámica de masa proviene de la parte no abeliana de los diagramas de Feynman. Asimismo, se realizaron cálculos en diferentes bases y normas, haciendo mención especial a las normas de Arbuzov y Yennie, para determinar cuál se ajusta mejor a las observaciones experimentales. Adicionalmente, estos cálculos se realizaron para diversas configuraciones de momentos que representan casos de especial interés.

Como parte de los resultados obtenidos en este trabajo presentamos la gráfica de la Figura 1.

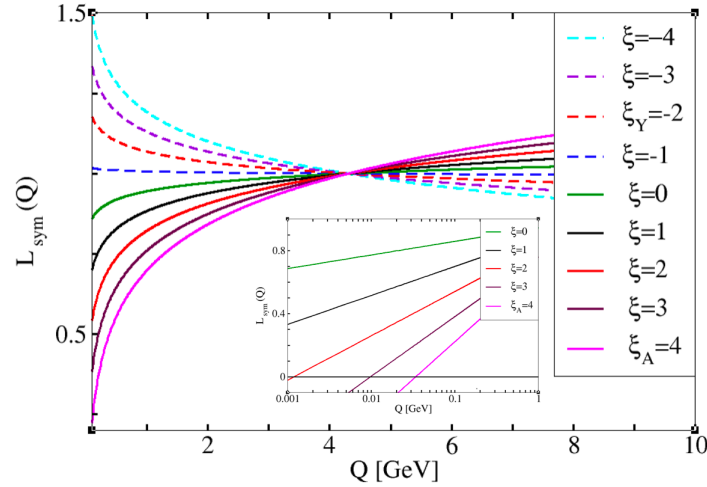


Figura 1: L_{sym} para diferentes normas. Extrajimos los resultados para las normas de Yennie y Arbuzov, $\xi = -2$ y $\xi = 4$, respectivamente. El requisito de renormalización implica que en $\mu = 4.3 \text{ GeV}$, todas las curvas son iguales a 1. En la parte inferior del gráfico, se muestra un acercamiento cerca de $Q = 0$.

Así mismo consideramos importante mencionar que de esta tesis se deriva un artículo aceptado para su publicación en la revista "few-body system".

Capítulo 1

Introducción

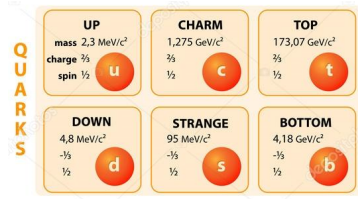


Figura 1.1: Quarks conocidos.

La Cromodinámica Cuántica (**QCD** por sus siglas en inglés), fue propuesta por David Politzer, Frank Wilczek y David Gross a comienzos de la década de los 70's como una teoría para describir los bariones, los mesones y las interacciones entre sus componentes. Esta teoría se basa en la idea propuesta por Murray Gell-Mann y George Zweig de que tanto hadrones como mesones están compuestos de otras partículas, los quarks. La Figura 1.1 muestra los quarks conocidos actualmente, así como sus propiedades más relevantes. Como se puede apreciar en dicha figura, los quarks colocados en la parte superior tienen una carga eléctrica de $2/3$ la carga del electrón, mientras que los quarks situados en la parte inferior poseen una carga de $-1/3$ en las mismas unidades. Vale la pena señalar que la masa que muestra la Figura 1.1 corresponde a la *masa corriente* de los quarks, esto es, la masa que posee un quark “libre”. Se hace la distinción entre masa corriente y masa constituyente, siendo esta última el valor efectivo de masa cuando los quarks forman bariones. La Figura 1.2 muestra los valores de la masa constituyente y corriente de los quarks.

A diferencia de las otras interacciones fundamentales, la interacción fuerte no decae con el cuadrado de la distancia. De hecho, aumenta enormemente con ella a pesar de ser una interacción de muy corto alcance. Esta característica da lugar a dos fenómenos muy interesantes: La primera es la libertad asintótica, por la cual dos o más quarks se comportan como partículas libres a altas energías y cortas distancias. El segundo se presenta cuando se tienen energías pequeñas o grandes distancias, donde los quarks presentan el confinamiento. Este fenómeno lleva a la particularidad de que si se suministra energía suficiente para separar el quark y el antiquark de un mesón resulta más rentable, en términos energéticos, la creación de un nuevo par quark-antiquark, entonces es imposible observar un solo quark aislado. Este fenómeno es resultado del incremento de la constante de acoplamiento a bajas energías, debido a esto, no se puede usar teoría de perturbaciones y los fenómenos se estudian con **QCD** no perturbativa (**npQCD**).

La energía necesaria para separar los quarks componentes de un barión está determinada por la constante de acoplamiento α . La relación entre α y el momento se muestra en la figura 1.3. Debido a que α depende del momento Q es conveniente extrapolar las mediciones a un valor de referencia, generalmente se utiliza la escala de energías correspondiente a la masa del bosón Z^0 ($M_{Z^0} = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$)^[1], siendo $\alpha_S(M_{Z^0}) = 0.1185 \pm 0.006$.

La explicación de la interacción fuerte se hace en términos de las características siguientes:

Quark	Masa Corriente	Masa Constituyente
u	2.8 MeV	300 MeV
c	1.6 GeV	1.6 GeV
t	180 GeV	180 GeV
d	5-15 MeV	300 MeV
s	100-300 MeV	500 MeV
b	4.1-4.5 MeV	5 GeV

Figura 1.2: Masa corriente y constituyente de los quarks conocidos.

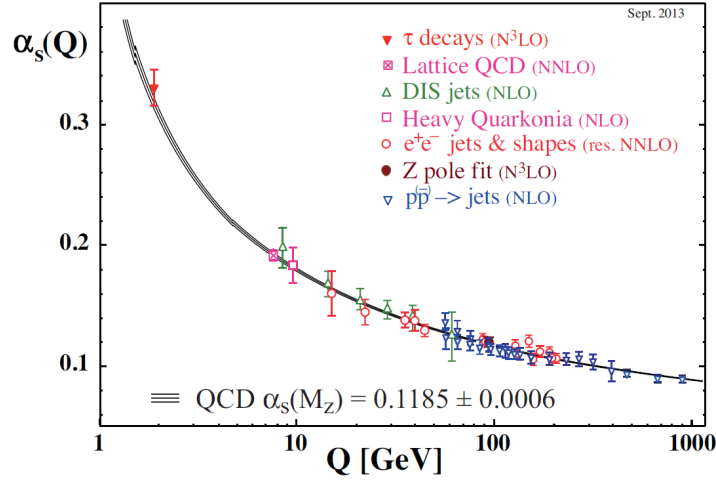


Figura 1.3: α como función del momento (Q).

- Los quarks y gluones son partículas fundamentales que componen los hadrones.
- Existen tres cargas de color (**Rojo**, **Azul** y **Verde**), cada una con su correspondiente anticolor (**Cian** o **Antirrojo**, **Amarillo** o **Antiazul** y **Magenta** o **Antiverde**)¹.
- La interacción fuerte es mediada por los gluones, de los cuales existen ocho tipos, cada uno correspondiente a una combinación de color y anticolor.
- La interacción fuerte es de corto alcance debido al fenómeno del confinamiento, que impide la existencia de quarks libres.

Debido a la existencia de las tres cargas, para representar un estado no basta con un espinor de Dirac; sino que también se requiere del color. Una representación matemática es:

$$\textcolor{red}{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \textcolor{blue}{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \textcolor{green}{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

donde $\textcolor{red}{r}$, $\textcolor{blue}{b}$ y $\textcolor{green}{g}$ representan los colores rojo, azul y verde, respectivamente. Dicho color suele cambiar en los vértices quark-gluon, quedándose este último con la diferencia de carga. Los ocho estados posibles de los gluones se representan como combinaciones de color y anticolor:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{\textcolor{red}{r}\bar{\textcolor{blue}{b}} + \textcolor{blue}{b}\bar{\textcolor{red}{r}}}{\sqrt{2}} & |5\rangle &= -i\frac{\textcolor{red}{r}\bar{\textcolor{green}{g}} - \textcolor{green}{g}\bar{\textcolor{red}{r}}}{\sqrt{2}} \\ |2\rangle &= -i\frac{\textcolor{red}{r}\bar{\textcolor{green}{g}} - \textcolor{green}{g}\bar{\textcolor{red}{r}}}{\sqrt{2}} & |6\rangle &= \frac{\textcolor{blue}{b}\bar{\textcolor{green}{g}} + \textcolor{green}{g}\bar{\textcolor{blue}{b}}}{\sqrt{2}} \\ |3\rangle &= \frac{\textcolor{red}{r}\bar{\textcolor{green}{g}} - \textcolor{green}{g}\bar{\textcolor{red}{r}}}{\sqrt{2}} & |7\rangle &= -i\frac{\textcolor{blue}{b}\bar{\textcolor{green}{g}} - \textcolor{green}{g}\bar{\textcolor{blue}{b}}}{\sqrt{2}} \\ |4\rangle &= \frac{\textcolor{red}{r}\bar{\textcolor{green}{g}} + \textcolor{green}{g}\bar{\textcolor{red}{r}}}{\sqrt{2}} & |8\rangle &= \frac{\textcolor{red}{r}\bar{\textcolor{green}{g}} + \textcolor{green}{g}\bar{\textcolor{red}{r}} - 2\textcolor{blue}{b}\bar{\textcolor{green}{g}}}{\sqrt{6}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹Estos nombres no representan colores reales del espectro electromagnético, son llamados así por analogía con la teoría del color. Pueden representarse de acuerdo a la ecuación (1.1)

$$|9\rangle = \frac{r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}}{\sqrt{3}}. \quad (1.3)$$

El estado de la ecuación (1.3) no corresponde a un estado físico de un gluon, ya que no es un autoestado del operador de carga de color.

1.1. Matrices de Gell Mann.

Las matrices de Gell Mann son los generadores infinitesimales del grupo $SU(3)$, cuya forma explícita es:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resulta evidente que las ocho matrices λ tiene una traza nula, además el conmutador de cualesquiera dos matrices λ es,

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{ab\gamma} \lambda^\gamma,$$

siendo las constantes $f^{ab\gamma}$ tensores antisimétricos denominados constantes de estructura, cuyos valores son,

$$f^{123} = 1 \quad (1.4)$$

$$f^{147} = -f^{367} = f^{345} = f^{257} = -f^{156} = f^{246} = \frac{1}{2} \quad (1.5)$$

$$f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.6)$$

1.2. Reglas de Feynman para QCD.

Las reglas de Feynman para **QCD** son muy similares a las reglas para **QED**, pero se cambian los propagadores de los bosones y se añade el término correspondiente a la interacción fuerte (el término de color se denota con la letra C). Estas reglas se utilizan para construir diagramas de Feynman, que son representaciones gráficas de los procesos físicos. Cada elemento del diagrama corresponde a un término en las reglas de Feynman. A continuación, se detalla de manera explícita el término que debe añadirse a la expresión matemática para cada parte del diagrama:

1. Para un quark entrante, se añade el término $U_\alpha^A(P)C$.
2. A un quark saliente le corresponde el término $\bar{U}_\alpha^a(P)C^\dagger$.
3. El propagador de los quarks es $\frac{1}{\not{P} - m}$.
4. El término correspondiente para un antiquark entrando es $\bar{V}_\alpha^A(P)C^\dagger$.
5. Cuando se tiene un antiquark saliente se agrega el término $V_\alpha^A(P)C$.

6. El término correspondiente al vértice quark-gluon es $-ig \left(\frac{\lambda_a}{2} \right)_{\beta\alpha} \gamma^\mu$.
7. Para los gluones entrantes, se añade el término $\varepsilon_\mu(k)$.
8. Si el gluon sale del diagrama, se agrega el término $\varepsilon^*(k)$.
9. El propagador del gluon es $i \left[g_{\mu\nu} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{\delta_{ab}}{k^2}$.
10. A los vértices de tres gluones les corresponde el término $-gf_{abc} [g_{\mu\nu}(p-q)_\sigma + g_{\nu\sigma}(q-r)_\mu + g_{\sigma\mu}(r-p)_\nu]$.
11. Para un vértice de cuatro gluones se agrega el término
$$-g^2 [f_{abc}f_{cde} (g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) + f_{ace}f_{bdc} (g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) + f_{adc}f_{cbe} (g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho})]$$
.

en la expresiones anteriores el término $g_{\mu\nu}$ corresponde a la métrica de Minkowski.

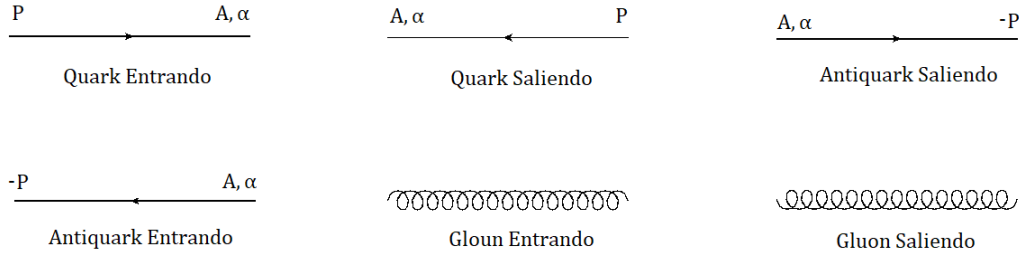


Figura 1.4: Partes de los diagramas de Feynman.

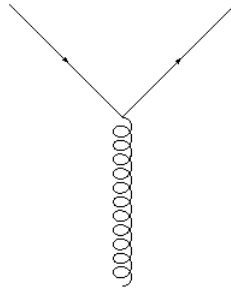


Figura 1.5: Vértice quark gluón

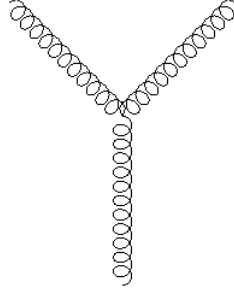


Figura 1.6: Vértice de tres gluones

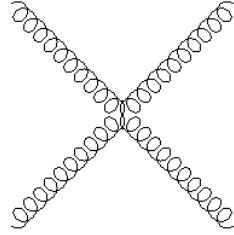


Figura 1.7: Vértice de 4 gluones

En la Figura 1.4 se muestran las partes de los diagramas de Feynman en **QCD**, mientras que las Figuras 1.5, 1.6 y 1.7 se muestran algunos de los posibles vértices que se pueden encontrar en **QCD**.

1.3. Lagrangiano de QCD

El lagrangiano de **QCD** está compuesto por la suma de los lagrangianos correspondientes a las diferentes formas de interacción de los quarks y gluones, es decir:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - (\partial^\mu \bar{\eta}_a)(\partial_\mu \eta_a) - gf_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)A_b^\mu \eta_c + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_\ell^j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j)\psi_\ell^j. \quad (1.7)$$

A continuación, se describen brevemente cada uno de sus términos:

1. El primer término contiene la dinámica de los campos de norma (gluones), su energía cinética y sus autointeracciones. Los campos son representados por A_μ^a , mientras que $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ es el tensor de fuerza del campo gluónico (g es el acoplamiento y $a = 1, \dots, 8$ es el índice de color). La presencia del término proporcional a g hace posible que existan interacciones entre 3 y 4 gluones.
2. El segundo término es el término que fija la norma, siendo ξ el parámetro covariante de norma.
3. Los campos η_a corresponden al campo fantasma de Faddeev-Popov. Debido a la naturaleza no abeliana de **QCD**, es necesario incluir este campo cuando se introduce el término de norma. Al final de esta sección se dará una breve explicación acerca este campo.
4. Los campos ψ_ℓ^j son los campos fermiónicos. N_f es el número de sabores y $\ell = 1, 2, 3$ es el color.
5. Por su parte, f_{abc} son las constantes de estructura completamente antisimétricas del grupo de norma de **QCD**.

6. El término D_μ Corresponde a la derivada covariante definida como $D_\mu \psi_l^j = \partial_\mu \psi_l^j - ig R_{lk}^a \psi_k^j A_\mu^a$, siendo $R^a = \frac{\lambda}{2}$.

1.3.1. Renormalización.

En **QCD** si tratamos de calcular algo más allá del nivel árbol, nos daremos cuenta de que aparecen divergencias. Afortunadamente **QCD** es una teoría renormalizable, es decir, podemos añadir contra términos a fin de eliminar estas divergencias de una manera consistente con la teoría. Esto se hace mediante una renormalización multiplicativa, la cuál es es una técnica que permite absorber estas divergencias en un conjunto finito de parámetros de la teoría, como la masa y la carga de las partículas. A la suma del Lagrangiano original más el Lagrangiano de contra términos le llamamos Lagrangiano desnudo y lo representamos como,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT},$$

con esto, el lagrangiano desnudo adquiere la forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & -\frac{1}{4} z_3 (\partial_\mu A_\mu^a - \partial_\nu A_\nu^a) (\partial^\mu A_\mu^a - \partial^\nu A_\nu^a) - \frac{1}{2} z_1 g f_{abc} (\partial_\mu A_\mu^a - \partial_\nu A_\nu^a) A_b^\nu A_c^\mu \\ & - \frac{1}{4} z_5 g^2 f_{abc} f_{ade} A_\nu^b A_\mu^c A_d^\nu A_e^\mu - \frac{1}{2\xi} z_6 (\partial_\mu A_\mu^a)^2 - \tilde{z}_3 (\partial^\mu \bar{\eta}_a) (\partial_\mu \eta_a) - \tilde{z}_1 g f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_a) A_b^\mu \eta_c \\ & + \sum_{j=1}^{N_f} \left(i z_{2Fj} \bar{\psi}_l^j \gamma^\mu \partial_\mu \psi_l^j + z_{1Fj} g \bar{\psi}_l^j \gamma^\mu R_{lk}^a \psi_k^j A_\mu^a - z_{4j} m_j \bar{\psi}_l^j \psi_l^j \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dado que la ecuación (1.8) hace referencia al lagrangiano desnudo, nos gustaría expresarlo en términos de cantidades desnudas. Definimos

$$\begin{aligned} A_{B\mu}^a &= z_3^{1/2} A_\mu^a, & \eta_B^a &= \tilde{z}_3^{1/2} \eta^a, & \psi_{Bj} &= z_{2Fj}^{1/2} \psi_j \\ g_B &= z_g g, & m_{Bj} &= z_{mj} m_j, & \xi_B &= z_\xi^{-1} \xi, \end{aligned}$$

en donde el subíndice B hace referencia a que se trata de la cantidad desnuda y las z 's son constantes de renormalización, el nombre que recibe cada una es el siguiente:

- z_3 : Constante de renormalización del campo del gluon.
- $\tilde{z}_3$: Constante de renormalización del campo fantasma.
- z_{2Fj} : Constante de renormalización del campo del quark.
- z_g : Constante de renormalización de la constante de acoplamiento.
- z_{mj} : Constante de renormalización de la masa del quark.
- z_ξ : Constante de renormalización del parámetro de norma.

A continuación, escribiremos el lagrangiano de la ecuación (1.8) en términos de las cantidades desnudas,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_{B\nu}^a - \partial_\nu A_{B\mu}^a) (\partial^\mu A_{Ba}^\nu - \partial^\nu A_{Ba}^\mu) - \frac{1}{2} \frac{z_1}{z_g z_3^{3/2}} g_B f_{abc} (\partial_\mu A_{B\nu}^a - \partial_\nu A_{B\mu}^a) A_{Bb}^\nu A_{Bc}^\mu \\ & - \frac{1}{4} \frac{z_5}{z_g^2 z_3^2} g_B^2 f_{abc} f_{ade} A_{B\nu}^b A_{B\mu}^c A_{Bd}^\nu A_{Be}^\mu - \frac{1}{2\xi_B} \frac{z_6}{z_\xi z_3} (\partial^\mu A_{B\mu}^a)^2 - (\partial^\mu \tilde{\eta}_{Ba}) (\partial_\mu \eta_{Ba}) \\ & - \frac{\tilde{z}_1}{z_g \tilde{z}_3^{1/2}} g_B f_{abc} (\partial_\mu \eta_{Ba}) A_{Bb}^\mu \eta_{Bc} + \\ & \sum_{j=1}^{N_f} \left(i \tilde{\psi}_{Bl}^j \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{Bl}^j + \frac{z_{1Fj}}{z_g z_{2Fj} z_3^{1/2}} g_B \tilde{\psi}_{Bl}^j R_{lk}^a \gamma^\mu \psi_{Bk}^j A_{B\mu}^a - \frac{z_{4Fj}}{z_{2Fj} z_{mj}} m_{Bj} \tilde{\psi}_{Bl}^j \psi_{Bl}^j \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Con la finalidad de conseguir una expresión similar a la ecuación (1.8), debemos asumir las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} z_1 &= z_g z_3^{3/2}, & z_5 &= z_g^2 z_3^2, & z_6 &= z_\xi z_3, \\ \tilde{z}_1 &= z_g \tilde{z}_3 z_3^{1/2}, & z_{1Fj} &= z_g z_{2Fj} z_3^{1/2}, & z_{4Fj} &= z_{2Fj} z_{mj}. \end{aligned}$$

Usando las relaciones anteriores podemos encontrar relaciones entre algunos cocientes,

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_3} = \frac{z_5}{z_1} = \frac{z_{1Fj}}{z_{2Fj}} = z_g z_3^{1/2}, \quad (1.10)$$

estas ecuaciones son generalizaciones no abelianas de las identidades de Ward-Takahashi y son conocidas como identidades de Slavnov-Taylor, estas garantizan la universalidad de la constante de acoplamiento.

1.3.2. Campo fantasma de Faddev-Popov.

La necesidad de introducir el campo fantasma de Faddev-Popov² surge del hecho de que las teorías cuánticas de campos (**QFT**) deben ser capaces de proporcionar soluciones únicas y no singulares. No obstante, en presencia de una simetría de gauge, el formalismo de la integral de caminos sobrecuenta los estados del campo relacionados mediante una transformación de gauge, lo que hace imposible seleccionar una solución de una serie de soluciones físicamente equivalentes sin caer en arbitrariedades.

El procedimiento de Faddev-Popov consiste en modificar la acción añadiendo campos adicionales que rompen la simetría de gauge; estos son los campos de Faddev-Popov. Es importante destacar que estos campos son una herramienta matemática y no representan ninguna partícula real. Un argumento que refuerza esta idea es que las partículas fantasma violan la estadística del espín. Por ejemplo, en **QCD**, los fantasmas son campos escalares complejos (de espín cero), pero anticonmutan como fermiones.

1.4. La integral de Camino

1.4.1. Formulación de la Mecánica Cuántica por la Integral de Camino.

En la formulación habitual de la mecánica cuántica, convertimos el momento (p) y la posición (q) en operadores que obedecen ciertas reglas de conmutación, lo que lleva a usar las matemáticas asociadas a los espacios de Hilbert. Por otro lado, la formulación de la integral de caminos se basa en definir la propagación de la función de onda $\psi(q, t)$ por medio de la amplitud de transición $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$. Conociendo la función de onda $\psi(q_i, t_i)$ en el tiempo t_i , podemos usar el principio de Huygens para encontrar la función de onda en el tiempo t_f ,

$$\psi(q_f, t_f) = \int K(q_f, t_f; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i. \quad (1.11)$$

De acuerdo con la interpretación usual de la mecánica cuántica, $|\psi(q_f, t_f)|^2$ es la amplitud de probabilidad de que la partícula se encuentre en q_f al tiempo t_f . Por lo tanto, $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ debe ser la amplitud de probabilidad de que ocurra una transición de q_i al tiempo t_i a q_f al tiempo t_f . Así, la probabilidad de observar la partícula en q_f al tiempo t_f es,

$$P(q_f, t_f; q_i, t_i) = |K(q_f, t_f; q_i, t_i)|^2. \quad (1.12)$$

² Acerca de las partículas fantasma, daremos una explicación breve y superficial, ya que solo se incluyen en el lagrangiano por completitud y no serán objeto de estudio en esta tesis.

Podemos dividir este proceso en dos partes, primero una transición de q_i al tiempo t_i hacia q al tiempo t y desde allí una transición hacia q_f al tiempo t_f , aplicando dos veces la ecuación (1.11) obtenemos,

$$\psi(q_f, t_f) = \int K(q_f, t_f; qt) K(qt; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i dq, \quad (1.13)$$

de las ecuaciones (1.11) y (1.13) llegamos a la relación,

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int K(q_f, t_f; qt) K(qt; q_i, t_i) dq, \quad (1.14)$$

en consecuencia la transición de (q_i, t_i) hacia (q_f, t_f) se puede interpretar como una transición de (q_i, t_i) hacia todos los posibles puntos intermedios (q, t) seguida de una transición de (q, t) hacia (q_f, t_f) . Antes de continuar por este camino notemos que de acuerdo a la formulación usual de la mecánica cuántica, la función de onda $\psi(q, t)$ es,

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi \rangle_S,$$

donde el vector de estado $|\psi\rangle_S$ en la representación de Schrödinger se relaciona con su equivalente en la representación de Heisenberg ($|\psi\rangle_H$) como,

$$|\psi\rangle_S = e^{-iHt} |\psi\rangle_H.$$

Definimos el vector,

$$|q, t\rangle = e^{-iHt} |q\rangle,$$

al cual llamaremos marco móvil. Con esto podemos escribir,

$$\psi(q, t) = \langle qt | \psi \rangle_H. \quad (1.15)$$

Por la completitud de los estados podemos escribir,

$$\langle q_f, t_f | \psi \rangle = \int \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \langle q_i, t_i | \psi \rangle dq_i, \quad (1.16)$$

sustituyendo la ecuación (1.15) en (1.16) tenemos,

$$\psi(q_f, t_f) = \int \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \psi(q_i, t_i) dq_i, \quad (1.17)$$

comparando las ecuaciones (1.11) y (1.17) notamos que se debe cumplir,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = K(q_f, t_f; q_i, t_i), \quad (1.18)$$

de modo que el propagador es una cantidad familiar de la formulación usual de la mecánica cuántica.

Ahora necesitamos reescribir $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$ como una integral de camino, para ello notemos,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | q_i \rangle, \quad (1.19)$$

consideramos una partición de tiempo en $n + 1$ intervalos de longitud,

$$\delta t = \frac{t}{n + 1},$$

con esto podemos reescribir la ecuación (1.19),

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^n dq_k \langle q_f | e^{-iH\delta t} | q_n \rangle \langle q_n | e^{-iH\delta t} | q_{n-1} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-iH\delta t} | q_i \rangle, \quad (1.20)$$

donde usamos la factorización de la exponencial y la propiedad de completez de los estados. Supongamos que el hamiltoniano es de la forma $H(p, q) = f(p) + V(q)$ y usemos la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, de este modo,

$$e^{-iH\delta t} = e^{-if(p)\delta t} e^{-iV(q)\delta t} e^{i[f(p), V(q)]\delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3)},$$

los términos cuadráticos y superiores de δt son despreciables, pues cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene $\delta t \rightarrow 0$, de este modo, el propagador para un segmento de la trayectoria es,

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1} | e^{-iH\delta t} | q_k \rangle &= \int dp_k \langle q_{k+1} | e^{-if(p)\delta t} | p_k \rangle \langle p_k | e^{-iV(q)\delta t} | q_k \rangle \\ &= \int dp_k e^{-if(p_k)\delta t} e^{-iV(q_k)\delta t} \langle q_{k+1} | p_k \rangle \langle p_k | q_k \rangle \\ &= \int \frac{dp_k}{2\pi} e^{-i(f(p_k) + V(q_k))\delta t} e^{ip_k(q_{k+1} - q_k)}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

en el límite de intervalos infinitesimales tenemos,

$$\langle q_{k+1} | e^{-iH\delta t} | q_k \rangle = \int \frac{dp_k}{2\pi} e^{-iH(p_k, \bar{q}_k)\delta t} e^{ip_k(q_{k+1} - q_k)}, \quad (1.22)$$

donde,

$$\bar{q}_k = \frac{q_{k+1} + q_k}{2},$$

de este modo la ecuación (1.20) se reescribe como,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{dp_0}{2\pi} \prod_{k=1}^n \frac{dp_k dq_k}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{j=0}^n \left[p_j \frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t} - H(p_j, \bar{q}_j) \right] \delta t \right\}, \quad (1.23)$$

donde $q_0 = q_i$ y $q_{n+1} = q_f$. Si consideramos que cuando $\delta t \rightarrow 0$,

$$p_j \frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t} \rightarrow p_j \dot{q}_j,$$

podemos escribir (1.23) de manera simbólica como,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q)) \right], \quad (1.24)$$

cada función $p(t)$, $q(t)$ define un camino en el espacio fase. Podemos reescribir la ecuación (1.24) como,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(p, q) \right], \quad (1.25)$$

donde,

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(p, q) = S(p, q),$$

y

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - H(p, q).$$

Cuando el hamiltoniano es de la forma $\frac{p^2}{2m} + V(q)$ podemos realizar la integración sobre p , y la ecuación (1.24) se puede reescribir como,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(q, \dot{q}) \right] = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp [iS[q(t), \dot{q}(t)]], \quad (1.26)$$

así pues, la amplitud de transición toma en cuenta todos los posibles caminos de q_i a q_f ponderados por $\exp [iS[q(t), \dot{q}(t)]]$.

1.4.2. Funcional Generadora.

Un funcional mapea funciones (por ejemplo, el campo clásico $\phi(x)$) a números complejos ($\mathbb{C}$),

$$\phi(x) \rightarrow S[\phi(x)] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x)).$$

Consideremos la funcional,

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\phi \exp \left[iS[\phi] + i \int d^4x J(x)\phi(x) \right], \quad (1.27)$$

dónde se agrego término $J(x)$ que representa una fuente externa. Podemos reescribir esto de la forma,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \left[1 + i \int d^4x J(x)\phi(x) + \frac{i^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \phi(x_1)\phi(x_2)J(x_1)J(x_2) + \dots \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} + i \int d^4x J(x) \int \mathcal{D}\phi \phi(x) e^{iS[\phi]} \\ &\quad + \frac{i^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)J(x_2) \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2) e^{iS[\phi]} + \dots, \end{aligned}$$

con lo que podemos escribir,

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n J(x_1) \dots J(x_n) G(x_1, \dots, x_n), \quad (1.28)$$

donde,

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0]} \left(\frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \right) \dots \left(\frac{\delta}{i\delta J(x_n)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}, \quad (1.29)$$

$Z[J]$ es llamada funcional generadora de las funciones de Green.

1.4.3. Función Generadora para una Partícula Libre.

Consideremos al lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [-\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi(p) = \frac{1}{2} [p^2 + m^2] \phi(p),$$

en este caso se tiene,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x [(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) + 2J\phi] \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x [(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) + 2J\phi(x)] \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [\phi(-p)(p^2 + m^2)\phi(p) - 2J(-p)\phi(p)] \right], \end{aligned}$$

podemos reescribir la integral dentro de la exponencial como,

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (p^2 + m^2) \left[\phi(-p)\phi(p) - \frac{2J(-p)\phi(p)}{p^2 + m^2} \right],$$

para ello sumamos el cero dado como,

$$\frac{J(p)J(-p)}{p^2 + m^2} - \frac{J(p)J(-p)}{p^2 + m^2},$$

de este modo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (p^2 + m^2) \left[\phi(-p)\phi(p) - \frac{2J(-p)\phi(p)}{p^2 + m^2} \right] &= \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (p^2 + m^2) \left\{ \left[\phi(-p) - \frac{J(-p)}{p^2 + m^2} \right] \right. \\
&\quad \left. * \left[\phi(p) - \frac{J(p)}{p^2 + m^2} \right] - \frac{J(p)J(-p)}{(p^2 + m^2)^2} \right\} \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (p^2 + m^2) \left\{ \tilde{\phi}(-p)\tilde{\phi}(p) - \frac{J(p)J(-p)}{(p^2 + m^2)^2} \right\},
\end{aligned}$$

donde,

$$\tilde{\phi}(-p) = \phi(-p) - \frac{J(-p)}{p^2 + m^2}, \quad (1.30)$$

$$\tilde{\phi}(p) = \phi(p) - \frac{J(p)}{p^2 + m^2}, \quad (1.31)$$

con esto, podemos reescribir $Z[J]$ como,

$$Z[J] = \int D[\phi] \exp \left[- \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + m^2}{2} \left(\tilde{\phi}(-p)\tilde{\phi}(p) - \frac{J(p)J(-p)}{(p^2 + m^2)^2} \right) \right], \quad (1.32)$$

de la expresión anterior, es fácil notar que,

$$Z_0 = Z[0] = \int D[\phi] \exp \left[- \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + m^2}{2} \tilde{\phi}(-p)\tilde{\phi}(p) \right], \quad (1.33)$$

con lo que podemos reescribir la ecuación (1.32),

$$Z[J] = Z_0 \exp \left[- \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{J(p)J(-p)}{(p^2 + m^2)^2} \right], \quad (1.34)$$

de este modo,

$$\begin{aligned}
\langle \phi(q)\phi(r) \rangle &= \frac{1}{Z_0} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-q)} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-r)} Z[J] \Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z_0} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-q)} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-r)} Z_0 \exp \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{J(p)J(-p)}{(p^2 + m^2)^2} \right] \\
&= (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-q)} \left[(2\pi)^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\delta}{i\delta J(-r)} \left(\frac{J(p)J(-p)}{(p^2 + m^2)^2} \right) \exp \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{J(p)J(-p)}{(p^2 + m^2)^2} \right] \right],
\end{aligned}$$

usando,

$$\frac{\delta J(x)}{i\delta J(y)} = \delta^4(x - y), \quad (1.35)$$

llegamos a la expresión,

$$\langle \phi(q)\phi(r) \rangle = (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-q)} \frac{2J(r)}{r^2 + m^2} \exp \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{J(p)J(-p)}{(p^2 + m^2)^2} \right]$$

1.4.4. Función Generadora de 4 puntos.

Si consideramos las interacciones, el lagrangiano es,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (1.36)$$

tomando esto en cuenta,

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int D\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi \right) \right] \\ &= Z_1 \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \frac{\delta^4}{i\delta(J(x))^4} \right], \end{aligned}$$

donde,

$$Z_1 = N \int D\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi \right) \right],$$

ahora consideramos que,

$$\begin{aligned} \int d^4x \frac{\delta^4}{i\delta J(x)^4} &= \int d^4x \left[\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1 \cdot x} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_1)} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2 \cdot x} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_2)} \right. \\ &\quad \left. \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3 \cdot x} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_3)} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} e^{ip_4 \cdot x} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_4)} \right], \end{aligned}$$

recordando que $\int d^4x e^{ip_2 \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^4(p_2)$, podemos reescribir,

$$\begin{aligned} \int d^4x \frac{\delta^4}{i\delta J(x)^4} &= \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_1)} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_2)} \\ &\quad (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_3)} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_4)}, \end{aligned}$$

ahora consideramos la expansión,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \frac{\delta^4}{i\delta J(x)^4} \right] Z_1 = Z_1 - \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \frac{\delta^4}{i\delta J(x)^4} Z_1 \\ &= Z_1 - \frac{\lambda}{4!} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_1)} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_2)} \\ &\quad (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_3)} (2\pi)^4 \frac{\delta}{i\delta J(-p_4)} Z_1, \end{aligned}$$

aplicando estas variaciones tenemos,

$$\begin{aligned}
Z[J] = & Z_1 - \frac{\lambda}{4!} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) (2\pi)^{16} \left[\frac{\delta(-p_2 + p_1) \delta(-p_4 + p_3)}{(p_1^2 m^2)(p_3^2 + m^2)} Z_1[J] + \right. \\
& + \frac{\delta(-p_2 + p_1)}{p_1^2 + m^2} \frac{J(-p_3)}{p_3^2 + m^2} \frac{J(-p_4)}{p_4^2 + m^2} Z_1[J] + \frac{\delta(-p_3 + p_1) \delta(-p_4 + p_2)}{(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)} Z_1[J] + \\
& + \frac{\delta(-p_3 + p_1) J(-p_2)}{(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)} \frac{J(-p_4)}{p_4^2 + m^2} Z_1[J] + \frac{\delta(-p_3 + p_2) \delta(-p_4 + p_1)}{(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)} Z_1[J] + \\
& + \frac{J(-p_1) \delta(-p_3 + p_2)}{p_1^2 + m^2} \frac{J(-p_4)}{p_4^2 + m^2} \frac{J(-p_3)}{p_3^2 + m^2} Z_1[J] + \frac{\delta(-p_4 + p_1) J(-p_2) J(-p_3)}{(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)(p_3^2 + m^2)} Z_1[J] + \\
& + \frac{J(-p_1) \delta(-p_4 + p_2) J(-p_3)}{(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)(p_3^2 + m^2)} Z_1[J] + \frac{J(-p_1) J(-p_2) \delta(-p_4 + p_3)}{(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)(p_3^2 + m^2)} Z_1[J] + \\
& \left. + \frac{J(-p_1) J(-p_2) J(-p_3) J(-p_4)}{(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)(p_3^2 + m^2)(p_4^2 + m^2)} Z_1[J] \right]. \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Podemos expresar esta ecuación mediante el uso de diagramas de la siguiente manera,

$$Z[J] = 3 \text{ (diagrama con 4 líneas horizontales)} + 6 \text{ (diagrama con 4 líneas horizontales)} + \text{(diagrama con 4 líneas diagonales)}$$

donde podemos hacer las siguientes correlaciones, el primer diagrama corresponde al primer, tercer y quinto término de la ecuación (1.37), el segundo diagrama corresponde a los términos 2, 4, 6, 7, 8 y 9, por último el diagrama final corresponde al décimo término de la ecuación (1.37)

1.5. La Ecuación de Schwinger-Dyson

Una de las principales ventajas del formalismo de la integral de camino es que las consideraciones de simetría son más evidentes. En particular, se vuelve evidente que las simetrías clásicas se preservan en la teoría cuántica, pero solamente si la medida de la integral de camino es invariante.

Para corroborar esto consideremos una teoría con campos arbitrarios (denominados en conjunto $\phi(x)$) definida por,

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp[i(S[\phi] + \phi J)], \tag{1.38}$$

y consideremos la transformación,

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon \Delta \phi(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{1.39}$$

queremos que la medida $\mathcal{D}\phi$ sea invariante, es decir, queremos que se cumpla,

$$\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\phi', \tag{1.40}$$

para que esto se cumpla es necesario que,

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi] + \phi J)} \\
&= \int \mathcal{D}\phi' e^{i(S[\phi'] + \phi' J)} \\
&= \int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi] + \phi J)} \left(1 + i \left(\frac{\delta S}{\delta \phi} + J \right) \Delta\phi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right),
\end{aligned}$$

por lo que,

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi] + \phi J)} \left[\frac{\delta S}{\delta \phi} \Delta\phi + J \Delta\phi \right] = \int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi] + \phi J)} \left[\int d^4y \left(\frac{\delta S}{\delta \phi(y)} + J(y) \right) \Delta\phi \right], \quad (1.41)$$

en el caso especial en que $\Delta\phi(y) = \delta^{(4)}(x - y)$ se cumple la condición (1.40) y la ecuación (1.41) se reduce a,

$$\int \mathcal{D}\phi \left[\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} + J(x) \right] e^{i(S[\phi] + \phi J)} = 0, \quad (1.42)$$

la ecuación (1.42) es la ecuación de Schwinger-Dyson. Esta expresión verifica que la ecuación de movimiento clásica,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} + J = 0,$$

se preserva en forma de una ecuación de operadores en la teoría cuántica.

Capítulo 2

Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE)

En este capítulo tendremos un primer acercamiento a las ecuaciones de Schwinger-Dyson, para lo cuál trabajaremos en el contexto de **QED3**, es decir **QED** en tres dimensiones (2 espaciales y una temporal). Esta primera aproximación sera de utilidad pues al igual que sucede en **QCD** se presenta el fenómeno de la generación dinámica de masa.

2.1. Planteamiento de las Ecuaciones de Scwinger-Dyson.

Las **SDE** son un conjunto de ecuaciones integrales acopladas que definen completamente una teoría cuántica de campos. Estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones de Euler-Lagrange de la mecánica clásica y su derivación es independiente de la constante de acoplamiento, por lo que son válidas tanto en **QCD** perturbativa (**pQCD**) como en **QCD** no perturbativa (**npQCD**). La expresión

$$S_F^\circ(P) = \frac{1}{\not{P} - m} \quad (2.1)$$

es una buena aproximación perturbativa al propagador fermiónico, sin embargo, si deseamos una aproximación mas precisa, debemos considerar todas las maneras en que dicha perturbación puede tener lugar. El propagador de la ecuación (2.1) es el propagador desnudo y lo denotamos como S_F° mientras que al propagador que contiene todas las correcciones es el propagador vestido y lo denotamos como S_F .

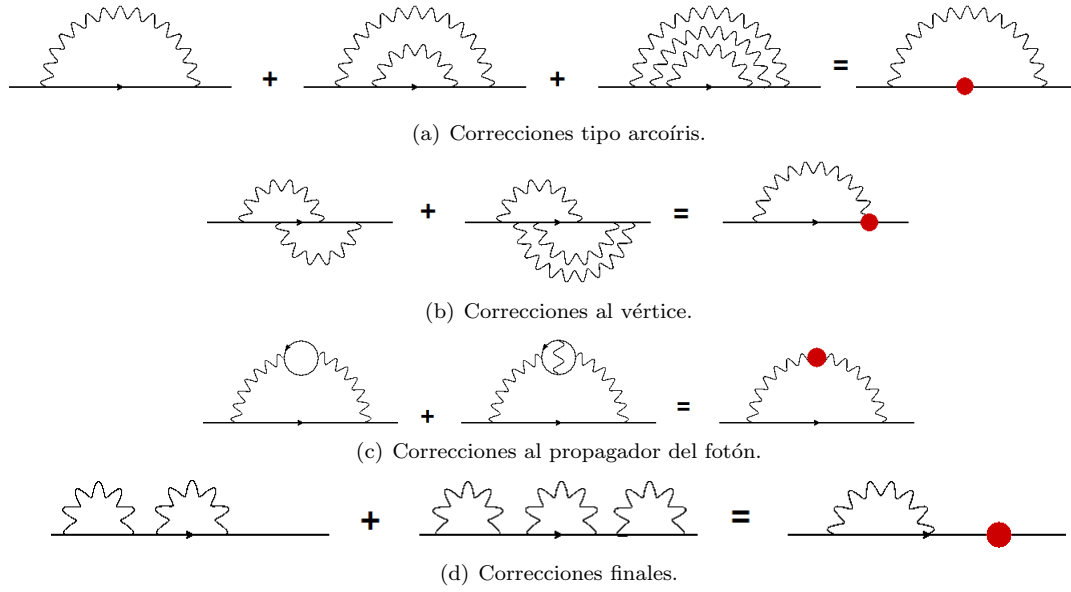
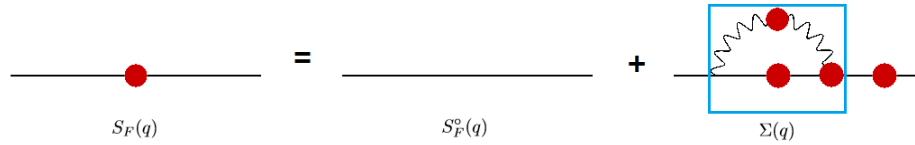


Figura 2.1: Tipos de correcciones al propagador fermiónico.

En las Figuras 2.1(a)-2.1(d) se muestran las correcciones al propagador fermiónico, al vértice, al propagador del fotón y las correcciones finales que consideran que las correcciones anteriores pueden ser requeridas nuevamente .

Figura 2.2: Propagador vestido (S_F).

A partir del diagrama de la Figura 2.2 podemos escribir

$$\begin{aligned}
 S_F(q) &= S_F^o(q) + S_F^o(q)\Sigma(q)S_F^o(q) + S_F^o(q)\Sigma(q)S_F^o(q)\Sigma(q)S_F^o(q) + \dots \\
 &= S_F^o(q) + S_F^o(q)\Sigma(q) [S_F^o(q)\Sigma(q)S_F^o(q) + S_F^o(q)\Sigma(q)S_F^o(q)\Sigma(q)S_F^o(q) + \dots] \\
 &= S_F^o(q) + S_F^o(q)\Sigma(q)S_F(q),
 \end{aligned}$$

si ahora multiplicamos por $S_F^{-1}(q)$ por la izquierda y por $S_F^{-1}(q)$ a la derecha se llega a la relación

$$S_F^{-1}(q) = S_F^{o-1}(q) - \Sigma(q) \quad (2.2)$$

o bien, en diagramas de Feynman



Debido a que esto representa un sistema con infinitas ecuaciones, nos resulta imposible determinar una solución exacta. Sin embargo, si hacemos un truncamiento adecuado podemos obtener una buena aproximación a la solución. La forma de elegir este truncamiento depende del fenómeno que estudiemos, o se encuentra en el régimen perturbativo o en el no perturbativo.

2.2. Identidades de Ward-Takahashi (WTI)

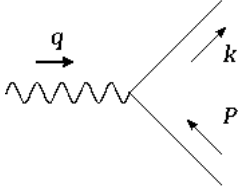


Figura 2.3: Vértice fotón-fermion a nivel árbol.

Una de las consecuencias de la invarianza de norma es que las funciones de Green obedecen las llamadas identidades de Ward-Takahashi (WTI) [2, 3, 4]. La identidad de WTI es uno de los requisitos para la restauración de la covarianza de norma de las observables físicas estudiados mediante la implementación de las **SDE**¹, además relacionan funciones de Green unas con otras, una de ellas relaciona al propagador fermiónico con el vértice fermión-boson

$$(k - P)_\mu \Gamma^\mu(k, P) = S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(P), \quad (2.3)$$

donde $\Gamma^\mu(k, P)$ es el vértice de interacción. Está identidad se satisface en todos los niveles de la teoría de perturbaciones. Por ejemplo, a nivel árbol, donde no se consideran correcciones al vértice ($\Gamma^\mu(k, P) = \gamma^\mu(k, P)$) el propagador es $S_F^{-1} = \not{P} - m$. Así el lado derecho de la ecuación (2.3) es

$$S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(P) = [\not{k} - m] - [\not{P} - m] = \not{k} - \not{P} = (k - P)_\mu \gamma^\mu, \quad (2.4)$$

además, como estamos evaluando a nivel árbol podemos escribir

$$S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(P) = q_\mu \Gamma^\mu,$$

que es precisamente la identidad de la ecuación (2.3). Como notaron Ball y Chiu [5], podemos descomponer el vértice no perturbativo completo en dos componentes: longitudinal y transversal. Las partes longitudinal y transversal satisfacen las siguientes propiedades,

$$\Gamma^\mu(k, P) = \Gamma_L^\mu(k, P) + \Gamma_T^\mu(k, P); \quad (2.5)$$

$$q_\mu \Gamma_L^\mu(k, P) = S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(P); \quad (2.6)$$

$$q_\mu \Gamma_T^\mu(k, P) = 0; \quad (2.7)$$

De la propiedad dos se obtiene,

$$\Gamma_L^\mu(k, P) = \frac{S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(P)}{q_\mu} = \frac{S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(P)}{(k - P)_\mu},$$

si tomamos $k \rightarrow P$ tenemos

$$\Gamma_L^\mu(k, k) = \frac{\partial}{\partial k_\mu} [S_F^{-1}(k)]$$

2.3. Forma Analítica del Propagador

En general, $S(P)$ puede depender de P^μ , γ^μ , k^μ , $g^{\mu\nu}$, P^2 , m^2 , etc, por lo que la forma más general de $S_F(P)$ es,

$$S_F(P) = A(P^2)\not{P} + B(P^2), \quad (2.8)$$

o de manera equivalente,

$$S_F(P) = \frac{F(P^2)}{\not{P} - M(P^2)}. \quad (2.9)$$

Para probar que las ecuaciones (2.8) y (2.9) son equivalentes, basta multiplicar y dividir la ecuación (2.9) por el conjugado del denominador de la fracción, esto es,

$$S_F(P) = \frac{F(P^2)}{\not{P} - M(P^2)} \cdot \frac{\not{P} + M(P^2)}{\not{P} + M(P^2)} = \underbrace{\frac{F(P^2)}{P^2 - M^2(P^2)}}_{A(P^2)} \not{P} + \underbrace{\frac{F(P^2)M(P^2)}{P^2 - M^2(P^2)}}_{B(P^2)} = A(P^2)\not{P} + B(P^2),$$

donde $F(P^2)$ es la constante de renormalización de la función de onda y $M(P^2)$ es la función de masa.

¹También existe un WTI para el propagador de fotones, sin embargo no es utilizada en esta tesis.

2.3.1. Aproximación Quenched

A partir del diagrama de Feynman de la Figura 2.4, podemos comenzar a realizar cálculos con la finalidad de determinar la constante de renormalización $F(P^2)$ y la función de masa $M(P^2)$ para dimensiones arbitrarias d . Para ello, se aplican las reglas de Feynman a cada diagrama, con lo que la ecuación a resolver es,

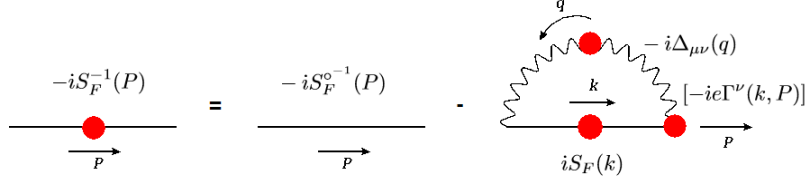


Figura 2.4: Propagador Vestido.

$$-iS_F^{-1}(P) = -iS_F^{\circ -1}(P) - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [-ie\gamma^\mu] [iS_F(k)] [-ie\Gamma^\nu(k, P)] [-i\Delta_{\mu\nu}(q)]. \quad (2.10)$$

Sin embargo resolver esta ecuación puede resultar sumamente difícil debido a las infinitas correcciones, por lo que la aproximación Quenched es útil como primer acercamiento a la solución. La idea principal de esta aproximación es suponer que las correcciones al propagador del fotón son muy pequeñas, esto es, supondremos que,

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}^0(q) = \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right].$$



Figura 2.5: Aproximación Quenched.

El propagador puede escribirse como:

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}^T(q) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \quad (2.11)$$

con $\Delta_{\mu\nu}^T(q) = \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}$. De manera similar a lo ocurrido para la parte transversal del vértice, se cumple que $q_\mu \Delta_{\mu\nu}^T(q) = 0$.

Con esto en mente se tiene que el propagador vestido del fotón se puede escribir como

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}^T(q) G(q^2) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \quad (2.12)$$

donde $G(q^2) = 1$ al orden más bajo.

Sustituyendo la ecuación (2.12) en la ecuación (2.10) se tiene que

$$\begin{aligned} S_F^{-1}(P) &= S_F^{\circ -1}(P) + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu \left[\Delta_{\mu\nu}^T + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right] \\ &= S_F^{\circ -1}(P) + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}^T + i\xi e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}. \end{aligned}$$

Ahora, en el último sumando podemos dividir Γ^ν de acuerdo a la ecuación (2.5) y usar las ecuaciones (2.6) y (3.1) para reescribir $S_F^{-1}(P)$ como

$$S_F^{-1}(P) = S_F^{\circ -1}(P) + ie^2 \underbrace{\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}^T}_{1} + i\xi e^2 \underbrace{\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \not{q} S_F(k) \frac{S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(P)}{q^4}}_{2}, \quad (2.13)$$

utilizando la aproximación de vértice desnudo, donde el vértice toma la forma,

$$\Gamma^\mu(k, P) = \gamma^\mu, \quad (2.14)$$

la integral 1 se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}^T &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \gamma^\nu \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \frac{\gamma_\mu}{q^2} - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q} S_F(k) \not{q}}{q^4}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la integral 2 de la ecuación (2.13) se puede reescribir como,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \not{q} S_F(k) \frac{S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(P)}{q^4} &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} S_F(k) S_F^{-1}(P) \\ &= - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} S_F(k) S_F^{-1}(P). \end{aligned}$$

así la ecuación (2.13) es equivalente a,

$$\begin{aligned} S_F^{-1}(P) &= S_F^{\circ -1}(P) + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \frac{\gamma_\mu}{q^2} - \\ &\quad - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q} S_F(k) \not{q}}{q^4} - ie^2 \xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} S_F(k) S_F^{-1}(P). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.9) y (2.1) en la ecuación (2.15)

$$\begin{aligned} \frac{\not{P} - M(P^2)}{F(P^2)} &= \not{P} - m + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \left[\frac{\not{k} + M(k^2)}{\not{k} + M(k^2)} \right] \frac{F(k^2)}{\not{k} - M(k^2)} \frac{\gamma^\mu}{q^2} - \\ &\quad - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} \left[\frac{\not{k} + M(k^2)}{\not{k} + M(k^2)} \right] \frac{F(k^2)}{\not{k} - M(k^2)} - \\ &\quad - ie^2 \xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} \left[\frac{\not{k} + M(k^2)}{\not{k} + M(k^2)} \right] \frac{F(k^2)}{F(P^2)} \frac{(\not{P} - M(P^2))}{(\not{k} - M(k^2))}, \end{aligned}$$

lo que nos lleva a la que denominaremos **ecuación principal**

$$\begin{aligned} \frac{\not{P} - M(P^2)}{F(P^2)} &= \not{P} - m + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu}{q^2} \frac{\not{k} + M(k^2)}{k^2 - M^2(k^2)} F(k^2) \gamma_\mu - \\ &\quad - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} \frac{(\not{k} + M(k^2))}{k^2 - M^2(k^2)} F(k^2) \not{q} - \\ &\quad - \frac{ie^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q}}{q^4} \frac{(\not{k} + M(k^2))}{k^2 - M^2(k^2)} F(k^2) \frac{(\not{P} - M(P^2))}{k^2 - M^2(k^2)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

multiplicando esta ecuación por $\not{P}$ se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{P^2 - \not{P}M(P^2)}{F(P^2)} &= P^2 - m\not{P} + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k^2)}{q^2} \frac{\not{P}\gamma^\mu (\not{k} + M(k^2)) F(k^2)\gamma_\mu}{k^2 - M^2(k^2)} \\ &\quad - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{P}\not{q} (\not{k} + M(k^2)) F(k^2)\not{q}}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))} \\ &\quad - \frac{ie^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{P}\not{q} (\not{k} + M(k^2)) F(k^2) (\not{P} - M(P^2))}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esta última expresión nos será de utilidad en secciones posteriores cuando estudiemos un valor particular de d , es decir, un número específico de dimensiones. Aunque nuestro universo tiene 4 dimensiones (3 espaciales y una temporal), algunas teorías siguen siendo de interés cuando son formuladas en dimensiones arbitrarias. Algunos fenómenos como la ruptura dinámica de la simetría quiral en la Teoría Cuántica de Campos son más sencillas de comprender cuando los restringimos a un universo con menos de 4 dimensiones, en este sentido destacamos a **QED3**, pues será el tema central en la siguiente sección.

2.4. Generación Dinámica de masas en QED3

Antes de comenzar con nuestro estudio de **QED3**², es prudente aclarar el porqué de nuestro interés en esta teoría; este se debe a que la teoría es super-renormalizable y tiene un límite quiral bien definido, por lo que permite la generación dinámica de masas. Debido a estas características, presenta cierta similitud cuantitativa con **QCD**, ya que la ruptura dinámica de la simetría quiral explica la masa de los quarks constituyentes [6]. Por si esto no fuese suficiente, **QED3** también resulta de interés en física de la materia condensada, al ser una teoría de campo eficaz para describir superconductores de alta temperatura [7] y el grafeno [8].

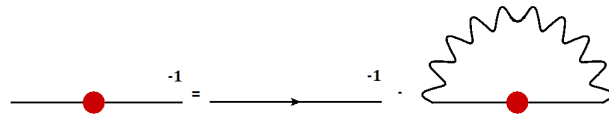
Para nuestro análisis partiremos de las ecuaciones de Schwinger Dyson (2.10) sustituyendo,

$$S_F^{-1}(P) = \not{P} - m, \quad (2.18)$$

$$S_F(k) = \frac{F(k^2)}{\not{k} - M(k^2)}, \quad (2.19)$$

y

$$\Delta_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]; \quad (2.20)$$



tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\not{P} - M(P^2)}{F(P^2)} &= \not{P} - m + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{F(k^2)}{k^2 - M^2(k^2)} (\not{k} + M(k^2)) \frac{\gamma^\nu}{q^2} g_{\mu\nu} \\ &\quad + ie^2 (\xi - 1) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{F(k^2)}{k^2 - M^2(k^2)} (\not{k} + M(k^2)) \gamma^\nu \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

²También llamada **QED** en tres dimensiones (2 espaciales y 1 temporal) o QED en el plano

Posteriormente tomaremos la traza de estas matrices por lo que podemos omitir la escritura de aquellos términos que contengan un número impar de matrices γ , haciendo esto la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} -\frac{M(P^2)}{F(P^2)} &= -m + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{F(k^2)M(k^2)\gamma^\nu}{q^2(k^2 - M^2(k^2))} \\ &\quad + ie^2(\xi - 1) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu F(k^2)M(k^2)\gamma^\nu q_\mu q_\nu}{q^4(k^2 - M^2(k^2))}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

resolviendo los productos de matrices γ

$$\begin{aligned} -\frac{M(P^2)}{F(P^2)} &= -m + ie^2 d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k^2)M(k^2)}{q^2(k^2 - M^2(k^2))} + ie^2(\xi - 1) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k^2)M(k^2)}{q^2(k^2 - M^2(k^2))} \\ &= -m + ie^2(\xi - 1 + d) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k^2)M(k^2)}{q^2(k^2 - M^2(k^2))}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Notemos que en la expresión anterior podemos tomar la traza de ambos lados y cada término tendrá un factor tres que podemos eliminar de la expresión. Ahora pasaremos al caso particular de tres dimensiones haciendo $d = 3$ y realizaremos una rotación de Wick³, de este modo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{M(P^2)}{F(P^2)} &= m + e^2(\xi + 2) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{F(k^2)M(k^2)}{q^2(k^2 + M(k^2))} \\ &= m + \frac{\alpha(\xi + 2)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{k^2 F(k^2)M(k^2)}{q^2(k^2 + M(k^2))} \sin(\theta) dk d\theta \\ &= m + \frac{\alpha(\xi + 2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{k^2 F(k^2)M(k^2)}{(k^2 + M(k^2))} I_{01} dk, \end{aligned}$$

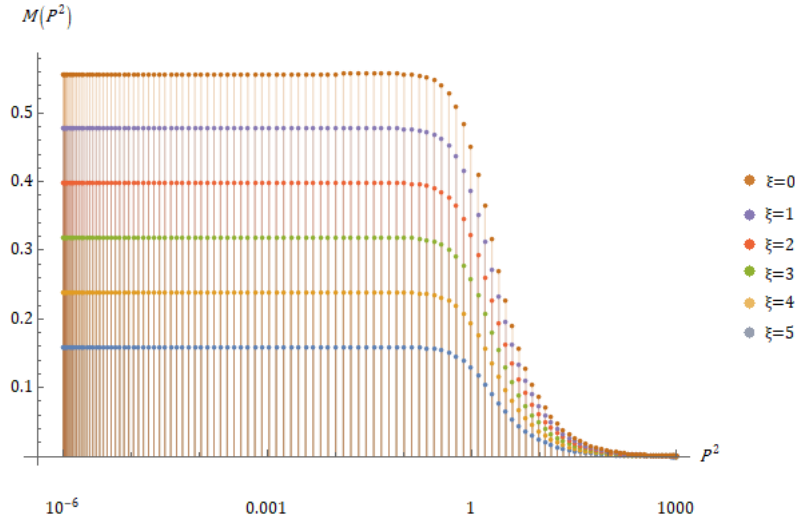
sustituyendo la ecuación (A.8),

$$\frac{M(P^2)}{F(P^2)} = m + \frac{\alpha(\xi + 2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{k^2 F(k^2)M(k^2)}{(k^2 + M(k^2))} \ln \left| \frac{k + P}{k - P} \right| dk, \quad (2.24)$$

aproximamos $F(k^2) = 1$ y $M(k^2) = m$ (estas aproximaciones se deben a que esos son los valores de estas funciones a nivel árbol) con lo que

$$\begin{aligned} \frac{M(P^2)}{F(P^2)} &= m \left(1 + \frac{\alpha(\xi + 2)}{P\pi} \int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 + m^2} \ln \left| \frac{k + P}{k - P} \right| \right) \\ &= m \left(1 + \frac{\alpha(\xi + 2)}{P\pi} \frac{1}{\sqrt{-P}} \arctg \left[\frac{-P^2}{m^2} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

³En esta tesis nos limitaremos a efectuar las conversiones: $k^2 \rightarrow -k^2$, $P^2 \rightarrow -P^2$, $k \cdot P \rightarrow -k \cdot P$ y $d^4 k \rightarrow id^4 k$. No obstante se puede encontrar una definición mas detallada en [9]

Figura 2.6: Solución para $M(P^2)$ con $m = 0$

En la figura 2.6 se puede apreciar que en la región no perturbativa, el valor de $M(P^2)$ aumenta, es decir, que la masa de la partícula aumenta. A este fenómeno se le conoce como generación dinámica de masa, existen diversos mecanismos que pueden explicar este proceso; todos estos basándose en el rompimiento de alguna simetría. Del mismo modo podemos notar que se presenta un mayor generación de masa cuando el valor de la norma es menor, en este caso $\xi = 0$. La suma de todas las autointeracciones del fermión dan origen a su masa (euclídeana), y esta puede inferirse del comportamiento infrarrojo de la función $M(p)$.

Para determinar $F(P^2)$ multiplicaremos la ecuación (2.21) por $\not{P}$ y tomaremos la traza del resultado, esto es,

$$\frac{P^2}{F(P^2)} = P^2 + ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\not{P} \gamma^\mu \not{k} F(k^2) \gamma_\mu}{q^2 [k^2 - M^2(k^2)]} + ie^2 (\xi - 1) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\not{P} \not{q} \not{k} F(k^2) \not{q}}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))},$$

usando las propiedades las trazas de las matrices de Dirac podemos reescribir la expresión anterior como,

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{F(P^2)} &= P^2 + ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{P \cdot k F(k^2)}{q^2 [k^2 - M^2(k^2)]} + ie^2 (\xi - 1) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F(k^2) \frac{2P \cdot q \, k \cdot q - q^2 P \cdot k}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))} \\ &= P^2 + ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{P \cdot k F(k^2)}{q^2 [k^2 - M^2(k^2)]} + ie^2 \xi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F(k^2) \frac{2P \cdot q \, k \cdot q - q^2 P \cdot k}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))} \\ &\quad - ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F(k^2) \frac{2P \cdot q \, k \cdot q - q^2 P \cdot k}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))} \\ &= P^2 + ie^2 \xi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F(k^2) \frac{2P \cdot q \, k \cdot q}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))} - ie^2 \xi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F(k^2) \frac{P \cdot k}{q^2 (k^2 - M^2(k^2))} \\ &\quad - ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k^2) (2P \cdot q \, k \cdot q)}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))}. \end{aligned}$$

Considerando $P \cdot q \, k \cdot q = k^2 (P \cdot k) - (P \cdot k)^2 - P^2 k^2 + P^2 (P \cdot k)$ y haciendo una rotación de Wick

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{F(P^2)} &= P^2 + \frac{2e^2(\xi - 1)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \, k^2 F(k^2) \frac{k^2 I_{12} - I_{22} - P^2 k^2 I_{02} + P^2 I_{12}}{k^2 + M^2(k^2)} \\ &\quad - \frac{e^2 \xi}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \, k^2 F(k^2) \frac{I_{11}}{k^2 + M^2(k^2)}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

Escribiendo explícitamente los términos notamos que los siguientes se cancelan y dan cero, esto es:

$$k^2 I_{12} - I_{22} - P^2 k^2 I_{02} + P^2 I_{12} = (P^2 + k^2) \left(\frac{k^2 + P^2}{(k^2 - P^2)^2} - \frac{1}{2kP} \ln \left| \frac{k+P}{k-P} \right| \right) - \frac{k^4 + P^4}{(k^2 - P^2)^2} + \frac{k^2 + P^2}{2kP} \ln \left| \frac{k+P}{k-P} \right| - \frac{2P^2 k^2}{(k^2 - P^2)^2} = 0, \quad (2.27)$$

de modo que, dividiendo la ecuación (2.26) entre P^2 y sustituyendo el valor de I_{11} tenemos,

$$\frac{1}{F(P^2)} = 1 - \frac{e^2 \xi}{P^2 (2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \left(\frac{k^2 + P^2}{2kP} \ln \left| \frac{k+P}{k-P} \right| - 1 \right).$$

Al tomar el límite $F(k^2) = 1$ y $M(k^2) = m$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(P^2)} &= 1 - \frac{\alpha \xi}{P^2 \pi} \int_0^\infty dk \frac{1}{k^2 + m} \frac{k^2 + P^2}{2kP} \ln \left| \frac{k+P}{k-P} \right| + \frac{\alpha \xi}{P^2 \pi} \int_0^\infty dk \frac{1}{k^2 + m} \\ &= 1 - \frac{\alpha \xi}{P^2 \pi} \int_0^\infty dk \frac{1}{k^2 + m} \frac{k^2 + P^2}{2kP} \ln \left| \frac{1 + \frac{P}{k}}{1 - \frac{P}{k}} \right| + \frac{\alpha \xi}{P^2 \pi} \left(\frac{\pi}{2m} \right) \\ &= 1 - \frac{\alpha \xi}{P^2 \pi} \int_0^\infty dk \frac{1}{k^2 + m} \frac{k^2 + P^2}{kP} \operatorname{arctanh} \left(\frac{P}{k} \right) + \frac{\alpha \xi}{2mP^2}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

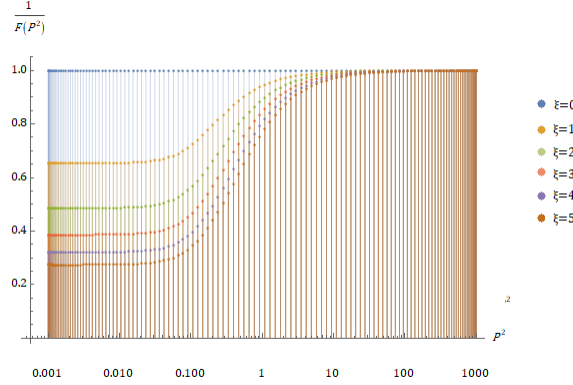


Figura 2.7: Solución para $\frac{1}{F(P^2)}$

Por la Figura 2.7 podemos inferir que, el inverso de la función de normalización es mayor en la región perturbativa, entonces $F(P^2)$ debe ser menor en esa misma región, en el régimen no perturbativo sucede algo similar; como $\frac{1}{F(P^2)}$ es pequeño podemos asumir que $F(P^2)$ alcanza su valor máximo en esta región. Podemos ver que en el escenario más sencillo de un modelo simple, pero con relevancia física directa como **QED3**, la aproximación arcoiris ilustra la naturaleza del fenómeno no perturbativo de la generación dinámica de masas. En la siguiente sección estudiamos el comportamiento no perturbativo del propagador del fermion apagada (en quenched) **QED4**, donde por apagada queremos decir que despreciamos la contribución de los lazos.

2.5. Solución para cuatro dimensiones

Como se discutió anteriormente, una de las motivaciones más importantes para estudiar el comportamiento no perturbativo de las teorías de norma, es el hecho de que si las interacciones son lo

suficientemente fuertes, son capaces de generar masas para las partículas incluso si comienzan sin masa, como muestran la ecuación (2.24) y la Figura 2.6. Para estudiar esta característica necesitamos hacer uso nuevamente de las ecuaciones de campo de la teoría, las ecuaciones de Schwinger-Dyson. Tomamos la DSE para el propagador del fermion en 4 dimensiones en la aproximación apagada con el vértice desnudo, dado por la ecuación (2.17) y tomemos la traza:

$$\begin{aligned} \frac{4P^2}{F(P^2)} = & 4P^2 - 8ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^2} \frac{P \cdot k}{k^2 - M(k^2)} - 4ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^4} \frac{[(P \cdot q)(k \cdot q) - P \cdot k q^2]}{q^4(k^2 - M(k^2))} \\ & - 4 \frac{ie^2}{F(P^2)} \xi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^4} \frac{[P^2 q \cdot k - P \cdot q M(k^2)M(P^2)]}{q^4(k^2 - M^2(k^2))}. \end{aligned}$$

Lo siguiente que haremos es dividir la ecuación anterior entre 4 y se realizara la correspondiente rotación de Wick desde Minkowski al espacio euclidiano.

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{F(P^2)} = & P^2 + 2e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^2} \frac{P \cdot k}{k^2 + M^2(k^2)} + e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(P^2)}{q^4} \frac{2(P \cdot q)(k \cdot q) - q^2(P \cdot k)}{k^2 + M^2(k^2)} \\ & + \frac{e^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^4} \frac{P^2(q \cdot k) + M(P^2)M(k^2)(P \cdot q)}{k^2 + M^2(k^2)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

si ahora consideramos que $q = k - P$ se tiene que,

$$\begin{aligned} 2(P \cdot q)(k \cdot q) - q^2(P \cdot k) = & 2(P \cdot (k - P))(k \cdot (k - P)) - (k - P)^2(P \cdot k) \\ = & 2[P \cdot k(k^2 + P^2 - P \cdot k) - P^2 k^2] - (k^2 - 2P \cdot k + P^2)P \cdot k \\ = & (k^2 + P^2)P \cdot k - 2P^2 k^2, \end{aligned} \quad (2.30)$$

además,

$$P^2(q \cdot k) + M(P^2)M(k^2)(P \cdot q) = P^2(k^2 - P \cdot k) + M(P^2)M(k^2)(P \cdot k - P^2). \quad (2.31)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.30) y (2.31) en la ecuación (2.29) se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{F(P^2)} = & P^2 + 2e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^2} \frac{P \cdot k}{k^2 + M^2(k^2)} + e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(P^2)}{q^4} \frac{(k^2 + P^2)P \cdot k - 2P^2 k^2}{k^2 + M^2(k^2)} \\ & + \frac{e^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{F(k^2)}{q^4} \frac{P^2(k^2 - P \cdot k) + M(P^2)M(k^2)(P \cdot k - P^2)}{k^2 + M^2(k^2)}, \end{aligned}$$

como ningún término dentro de la integral depende del ángulo ϕ el elemento d^4k se puede reescribir como,

$$d^4k = 2\pi k^2 dk^2 \sin^2 \theta d\theta, \quad (2.32)$$

de este modo tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{F(P^2)} = & P^2 + \frac{2\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{2} dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \int_0^\pi \frac{k \cdot P}{q^2} \sin^2 \psi d\psi \\ & + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{2} dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \left[-2P^2 k^2 \int_0^\pi \frac{1}{q^4} \sin^2 \psi d\psi + (k^2 + P^2) \int_0^\pi \frac{k \cdot P}{q^4} \sin^2 \psi d\psi \right] \\ & + \frac{\alpha \xi}{\pi^2 F(P^2)} \int_0^\infty \frac{k^2}{2} dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \left[P^2 k^2 \int_0^\pi \frac{1}{q^4} \sin^2 \psi d\psi - P^2 \int_0^\pi \frac{k \cdot P}{q^4} \sin^2 \psi d\psi \right. \\ & \left. + M(k^2)M(P^2) \left(\int_0^\pi \frac{k \cdot P}{q^4} \sin^2 \psi d\psi - P^2 \int_0^\pi \frac{1}{q^4} \sin^2 \psi d\psi \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

En la aproximación arcoíris las funciones $F(P^2)$ y $M(P^2)$ son independientes de q^2 por lo que con el fin de reducir esta expresión utilizaremos lo que se conoce como integrales maestras, estas son de la forma,

$$I_{nm} = \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{(k \cdot P)^n}{q^m}, \quad (2.34)$$

sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (2.33),

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{F(P^2)} = & P^2 + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} I_{11} + \frac{\alpha}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} [-2P^2 k^2 I_{02} \\ & + (k^2 + P^2) I_{12}] + \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{\xi}{F(P^2)} \int_0^\infty k^2 dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} [P^2 k^2 I_{02} - P^2 I_{12} \\ & + M(k^2) M(P^2) (I_{12} - P^2 I_{02})], \end{aligned}$$

agrupando términos similares,

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{F(P^2)} = & P^2 + \frac{\alpha}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} [-2P^2 k^2 I_{02} + (k^2 + P^2) I_{12} + 2I_{11}] \\ & + \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{\xi}{F(P^2)} \int_0^\infty k^2 dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} [P^2 k^2 I_{02} - P^2 I_{12} \\ & + M(k^2) M(P^2) (I_{12} - P^2 I_{02})]. \end{aligned}$$

Ahora, usando las ecuaciones (A.10) y (A.11) llegamos a,

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{F(P^2)} = & P^2 + \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{\xi}{F(P^2)} \int_0^\infty k^2 dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \left[\frac{\pi}{2} \frac{P^2}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right. \\ & \left. - M(k^2) M(P^2) \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{P^2} \theta(P^2 - k^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(P^2)} = & 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\xi}{F(P^2)} \left[\int_0^\infty k^2 dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \frac{1}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right. \\ & \left. - \int_0^\infty k^2 dk^2 \frac{F(k^2) M(k^2) M(P^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \frac{1}{P^4} \theta(P^2 - k^2) \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}. \quad (2.37)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (2.36), obtenemos la expresión final para el inverso de la constante de renormalización de onda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(P^2)} = & 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\xi}{F(P^2)} \left[\int_P^\infty k^2 dk^2 \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \frac{1}{k^2} \right. \\ & \left. - \int_0^P k^2 dk^2 \frac{F(k^2) M(k^2) M(P^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \frac{1}{P^4} \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

En esta ecuación, queda claro que en la norma de Landau $\xi = 0$, $F(p^2)$ es obviamente igual a 1 a todos los ordenes. Ahora, para determinar la función de masa $M(p^2)$ regresaremos a la ecuación principal (2.16),

⁴Los resultados de algunas de estas integrales se muestran en el apéndice A

$$\begin{aligned}
\frac{\not{P} - M(P^2)}{F(P^2)} = & \not{P} - m + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu}{q^2} \frac{\not{k} + M(k^2)}{k^2 - M^2(k^2)} F(k^2) \gamma_\mu - \\
& - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q} (\not{k} + M(k^2)) F(k^2) \not{q}}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))} - \\
& - \frac{ie^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{q} (\not{k} + M(k^2)) F(k^2) (\not{P} - M(P^2))}{q^4 (k^2 - M^2(k^2))},
\end{aligned}$$

y tomando la traza de ambos lados de la expresión,

$$\begin{aligned}
-4 \frac{M(P^2)}{F(P^2)} = & -4m + ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k^2) F(k^2)}{q^2 [k^2 - M^2(k^2)]} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_\mu) - 4ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k^2) F(k^2)}{q^2 [k^2 - M^2(k^2)]} \\
& - \frac{ie^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4 [k^2 - M^2(k^2)]} [M(k^2) F(k^2) \text{Tr}(\not{q} \not{P}) \\
& - F(k^2) M(P^2) \text{Tr}(\not{q} \not{k})] \\
= & -4m + 16ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k^2) F(k^2)}{q^2 [k^2 - M^2(k^2)]} - 4ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k^2) F(k^2)}{q^2 [k^2 - M^2(k^2)]} \\
& - \frac{ie^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4 [k^2 - M^2(k^2)]} [4P \cdot q M(k^2) F(k^2) \\
& - 4q \cdot k F(k^2) M(P^2)],
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{M(P^2)}{F(P^2)} = & m - 3ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k^2) F(k^2)}{q^2 [k^2 - M^2(k^2)]} - \frac{ie^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4 [k^2 - M^2(k^2)]} [PqM(k^2)F(k^2) \\
& - qkF(k^2)M(P^2)],
\end{aligned}$$

realizando una rotación de Wick,

$$\begin{aligned}
\frac{M(P^2)}{F(P^2)} = & m - \frac{e^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4 (k^2 + M^2(k^2))} [M(k^2) F(k^2) q \cdot P - M(P^2) F(k^2) q \cdot k] \\
& + 3e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k^2) F(k^2)}{q^2 [k^2 + M^2(k^2)]},
\end{aligned}$$

usando nuevamente la ecuación (2.32) y las integrales maestras se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{M(P^2)}{F(P^2)} = & m - \frac{e^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{k dk^2}{(2\pi)^3} \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} [M(k^2) (I_{12} - P^2 I_{02}) - M(P^2) (k^2 I_{02} - I_{12})] \\
& + 3e^2 \int \frac{k^2}{(2\pi)^3} \frac{M(k^2) F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} I_{02},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.12) y (A.13),

$$\begin{aligned}
\frac{M(P^2)}{F(P^2)} = & m - \frac{e^2 \xi}{F(P^2)} \int \frac{k^2 dk^2}{(2\pi)^3} \frac{F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \left[-\frac{\pi M(k^2)}{2P^2} \Theta(P^2 - k^2) - \frac{\pi M(P^2)}{2k^2} \Theta(k^2 - P^2) \right] \\
& + 3e^2 \int \frac{k^2}{(2\pi)^3} \frac{M(k^2) F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \left[\frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{1}{P^2} \theta(P^2 - k^2) + \frac{1}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right] \right].
\end{aligned} \tag{2.40}$$

En teoría de perturbaciones $F(P^2) = 1 + \dots$ y $M(P^2) = m + \dots$, de manera que para la ecuación anterior podemos considerar $F(P^2) \simeq 1$; si además utilizamos la norma de Landau ($\xi = 0$) y recordamos que $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, entonces la ecuación (2.40) se transforma en,

$$M(P^2) = m + \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{P^2} dk^2 \frac{k^2}{P^2} \frac{M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} + \frac{3\alpha}{4\pi} \int_{P^2}^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)}, \quad (2.41)$$

linealizando (i.e. supondremos que la masa generada es tan pequeña que $M^j(k^2) \rightarrow 0$ para $j \geq 2$) la ecuación anterior obtenemos la forma analítica para la función de masa $M(P^2)$,

$$M(P^2) = m + \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{P^2} dk^2 \frac{M(k^2)}{P^2} + \frac{3\alpha}{4\pi} \int_{P^2}^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{M(k^2)}{k^2}, \quad (2.42)$$

en el limite quiral⁵

$$M(P^2) = \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\int_0^{P^2} dk^2 \frac{M(k^2)}{P^2} + \int_{P^2}^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{M(k^2)}{k^2} \right].$$

Notemos que $M(P^2) = 0$ es solución de la última expresión, no obstante, esta solución no permite generación de masa cuando $m = 0$. Debido a esto tenemos que considerar el rompimiento dinámico de la simetría quiral, mismo que se da cuando α es mayor que un valor crítico α_c .

2.5.1. Análisis de Bifurcaciones

Como mencionamos anteriormente, el rompimiento dinámico de la simetría quiral se da cuando la constante de acoplamiento α supera un valor crítico α_c . En el punto α_c tenemos una bifurcación (la solución trivial y la no trivial se separan), para encontrar este valor crítico pedimos que $M(P^2)$ tenga forma de una ley de potencias,

$$M(P^2) = (P^2)^{-s},$$

con $s > 0$, de modo que,

$$\begin{aligned} (P^2)^{-s} &= \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\int_0^{P^2} dk^2 \frac{(k^2)^{-s}}{P^2} + \int_{P^2}^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{(k^2)^{-s}}{k^2} \right] \\ &= \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{P^{-2s}}{1-s} - \frac{\Lambda^{-2s}}{s} + \frac{P^{-2s}}{s} \right]. \end{aligned}$$

Considerando $s > 0$ y $\Lambda \rightarrow \infty$,

$$P^{-2s} = \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right] P^{-2s},$$

donde,

$$1 = \frac{3\alpha}{4\pi} \frac{1}{s - s^2},$$

o bien,

$$s^2 - s + \frac{3\alpha}{4\pi} = 0,$$

las soluciones a esta ecuación son,

$$s_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{\pi}}.$$

⁵Cuando $m = 0$

En esta última expresión podemos apreciar que para $\alpha = \frac{\pi}{3}$ tenemos un cambio de signo en s , con lo que podemos deducir el valor crítico de α es $\alpha_c = \frac{\pi}{3}$. En esta última expresión podemos notar que, para $\alpha > \alpha_0$ la solución de la función de masa toma valores complejos, lo que nos indica que ha ocurrido una transición de fase de una solución perturbativa a una no perturbativa correspondiente a la generación dinámica de masas. El rompimiento dinámico de la simetría quiral es de gran importancia en las teorías físicas, no obstante, no es sencillo introducirlo debido a que solo proporciona resultados confiables cuando las suposiciones hechas tienen un argumento físico sólido. En el artículo [10] se utiliza, a manera de *ansatz*, la expresión

$$\alpha^0(\Lambda) = \alpha_0 + \frac{\alpha_0 \pi^2}{\ln^2 \left(\frac{4\Lambda}{m_d} \right)},$$

de manera que podemos escribir la solución a la función de masa como

$$\frac{M}{\Lambda} = 4 \exp \left[\frac{-\pi}{\frac{3\alpha}{\pi} - 1} \right], \quad (2.43)$$

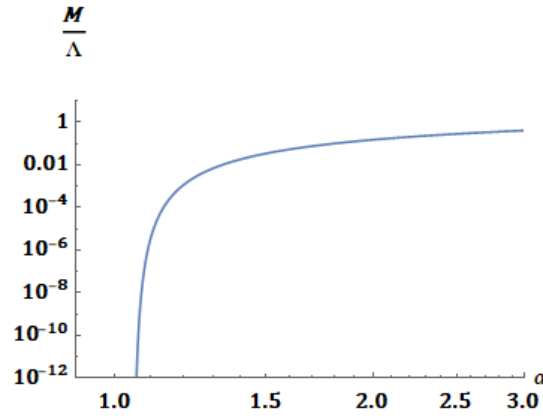


Figura 2.8: Variación de la masa Física respecto a α .

En la Figura 2.8 se muestra la gráfica de la ecuación (2.43), en donde notamos que la generación de masa comienza a darse cuando $\alpha > \alpha_c$ del mismo modo podemos apreciar que la función de masa es muy sensible a las variaciones de α . En el siguiente capítulo describimos el progreso realizado hasta ahora en esa dirección en **QCD**.

Capítulo 3

Vértice quark-gluón

En el presente capítulo se explora a profundidad las propiedades del vértice quark-gluón. También se presentan resultados numéricos para los factores de forma de este mismo vértice.

A pesar de la relevancia del vértice quark-gluón en Cromodinámica Cuántica (QCD), su estudio teórico más allá del nivel árbol aún es limitado. Al considerar cálculos a un loop, emerge un término asociado al vértice de tres gluones, el cual constituye el foco central de nuestra investigación.

Dado que la parte abeliana del vértice quark-gluón contribuye marginalmente a la generación dinámica de masa, anticipamos que el diagrama no abeliano sea el principal responsable de este fenómeno. Además, esperamos que la mayor parte de la masa generada se concentre en la región no perturbativa de la QCD.

Nuestro objetivo es obtener una expresión analítica que cuantifique la contribución del vértice de tres gluones a la generación dinámica de masa. Esta expresión, idealmente, debería concordar con las observaciones experimentales y las simulaciones de Lattice QCD.

Debido a la naturaleza intrínseca del fenómeno estudiado, trabajaremos estrictamente dentro del marco de la QCD. Específicamente, comenzaremos desarrollando el vértice quark-gluón de la siguiente manera,

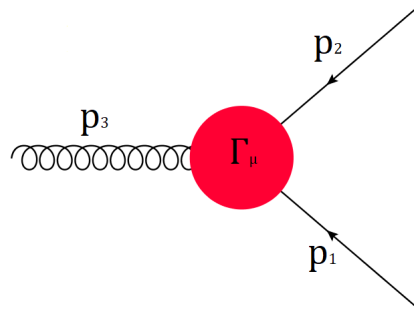


Figura 3.1: Vértice quark-gluón. Se cumple la ley de conservación energía-momento ($p_1 + p_2 + p_3 = 0$).

Las estructuras vectoriales y escalares que se deben incluir para describir adecuadamente las interacciones entre fermiones y bosones son,

$$\begin{cases} \text{Vectores:} & p_{2\mu}, p_{1\mu}, \gamma_\mu \\ \text{Escalares:} & I_D, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_1 \gamma \cdot p_2 \end{cases}$$

esto da lugar a 12 estructuras,

$$\Gamma_\mu = \sum_{i=1}^{12} \Omega_i(p_2, p_1) V_\mu^i(p_2, p_1),$$

donde, los términos $\Omega_i(p_2, p_1)$ son factores de forma y los términos $V_\mu^i(p_2, p_1)$ son componentes tensoriales dados por,

$$\begin{array}{ccc|ccc} V_\mu^1 = \gamma_\mu & & & V_\mu^2 = p_{2\mu} & & & V_\mu^3 = p_{1\mu} \\ V_\mu^4 = (\gamma \cdot p_2) \gamma_\mu & & & V_\mu^5 = (\gamma \cdot p_2) p_{2\mu} & & & V_\mu^6 = (\gamma \cdot p_2 p_{1\mu}) \\ V_\mu^7 = (\gamma \cdot p_1) \gamma_\mu & & & V_\mu^8 = (\gamma \cdot p_1) p_{2\mu} & & & V_\mu^9 = (\gamma \cdot p_1) p_{1\mu} \\ V_\mu^{10} = (\gamma \cdot p_2)(\gamma \cdot p_1) \gamma_\mu & & & V_\mu^{11} = (\gamma \cdot p_2)(\gamma \cdot p_1) p_{2\mu} & & & V_\mu^{12} = (\gamma \cdot p_2)(\gamma \cdot p_1) p_{1\mu} \end{array}$$

En general esta descomposición tiene singularidades cinemáticas en los factores de forma. Estas singularidades aparecen cuando $p_2^2 \rightarrow p_1^2$.

3.1. Vértice de Ball-Chiu

El vértice de Ball-Chiu[5] se puede descomponer de la forma,

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = \Gamma_L^\mu(p_2, p_1) + \Gamma_T^\mu(p_2, p_1),$$

donde, la parte transversa de cumplir,

$$p_{3\mu} \Gamma_T^\mu(p_2, p_1) = 0;$$

Como veremos a continuación, la parte longitudinal se fija mediante las WFGTL.

3.2. Identidades de Ward-Takahashi en QED

Para la parte longitudinal del vértice podemos proponer funciones que cumplan con las siguientes condiciones,

$$p_{3\mu} \Gamma_L^\mu(p_2, p_1) = S_F^{-1}(p_2) - S_F^{-1}(p_1); \quad (3.1)$$

donde,

$$S_F(p_1) = \frac{F(p_1^2)}{\not{p}_1 - M(p_1^2)}, \quad (3.2)$$

de la ecuación (3.1) tenemos,

$$\Gamma_L^\mu = \lim_{p_2 \rightarrow p_1} \frac{S_F^{-1}(p_2) - S_F^{-1}(p_1)}{(p_2 - p_1)_\mu},$$

de donde,

$$\begin{aligned} \Gamma_L^\mu(p_1, p_1) &= \frac{\partial S_F^{-1}(p_1)}{\partial p_{1\mu}} = \frac{\partial}{\partial p_{1\mu}} \left[\frac{\not{p}_1 - M(p_1^2)}{F(p_1^2)} \right] = \frac{\gamma^\mu}{F(p_1^2)} + \not{p}_1 \frac{\partial}{\partial p_{1\mu}} \left[\frac{1}{F(p_1^2)} \right] - \frac{\partial}{\partial p_{1\mu}} \left[\frac{M(p_1^2)}{F(p_1^2)} \right] \\ &= \frac{\gamma^\mu}{F(p_1^2)} + 2\not{p}_1 p_1^\mu \frac{\partial}{\partial p_1^2} \left[\frac{1}{F(p_1^2)} \right] - 2p_1^\mu \frac{\partial}{\partial p_1^2} \left[\frac{M(p_1^2)}{F(p_1^2)} \right], \end{aligned}$$

de este modo si tomamos $p_1 = p_2$ (por cuestiones prácticas se escribe p_1 y p_2 pues de hacer la sustitución directa aparecen divergencias),

$$\Gamma_L^\mu = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(p_1^2)} + \frac{1}{F(p_2^2)} \right] \gamma^\mu + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(p_1^2)} - \frac{1}{F(p_2^2)} \right] \frac{(p_2 + p_1)^\mu (\not{p}_2 + \not{p}_1)}{p_2^2 - p_1^2} - \left[\frac{M(p_2^2)}{F(p_2^2)} - \frac{M(p_1^2)}{F(p_1^2)} \right] \frac{(p_1 + p_2)^\mu}{p_2^2 - p_1^2},$$

si tomamos en cuenta que,

$$\Gamma_L^\mu(p_2, p_1) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i L_{i\mu}(p_2, p_1)$$

y,

$$\Gamma_T^\mu(p_2, p_1) = \sum_{i=1}^8 \tau_i T_{i\mu}(p_1, p_2),$$

podemos concluir que,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(p_1^2)} + \frac{1}{F(p_2^2)} \right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(p_2^2)} - \frac{1}{F(p_1^2)} \right] \frac{1}{p_2^2 - p_1^2}, \\ \lambda_3 &= \left[\frac{M(p_2^2)}{F(p_2^2)} - \frac{M(p_1^2)}{F(p_1^2)} \right] \frac{1}{p_2^2 - p_1^2}. \end{aligned}$$

de este modo tenemos determinada la parte longitudinal del vértice, por otro lado, la parte transversa debe cumplir,

1. Ortogonalidad al vértice, $p_{3\mu} \Gamma_\mu^T(p_2, p_1) = 0$,
2. Ser libre de divergencias cuando $p_2 \rightarrow p_1$.
3. Reducirse a nivel árbol en ausencia de interacciones.
4. Cumplir las identidades de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKF).
5. Ser multiplicativamente renormalizable.

La parte longitudinal del vértice cumple que,

$$\begin{aligned} L_{1\mu} &= \gamma_\mu, \\ L_{2\mu} &= (\not{p}_1 - \not{p}_2)(p_1 - p_2)_\mu, \\ L_{3\mu} &= (p_1 - p_2)_\mu, \\ L_{4\mu} &= \sigma_{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\nu. \end{aligned}$$

3.3. Vértice quark-gluón

Este enfoque se inspira en trabajos previos, entre los que destaca el de Davydychev[11].

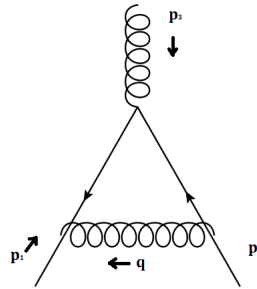


Figura 3.2: Diagrama Abelian.

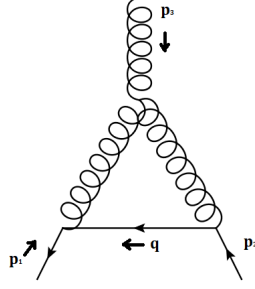


Figura 3.3: Diagrama no Abelianiano.

A un loop debemos considerar dos contribuciones al vértice quark-gluón, estas son las que se ven en las figuras 3.2 y 3.3. Los factores de color de estos diagramas son proporcionales a $(C_F - \frac{1}{2}C_A)$ y C_A , respectivamente. C_A y C_F son los eigenvalores del operador de Casimir cuadrático en la representación fundamental y adjunta respectivamente. Para el grupo $SU(N)$,

$$C_A = N, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad (3.3)$$

donde N es el numero de colores (en nuestro caso $N = 3$), de modo que $C_A = 3$ y $C_F = 4/3$.

La primera contribución “abeliana” es muy parecida a la corrección a un loop del vértice fotón-fermión en QED. El diagrama de la figura 3.3 es no abeliano y aparece por las autointeracciones de los gluones. Si tenemos quarks masivos ambos diagramas involucran integrales “triangulares” con dos y una línea masiva respectivamente, estas integrales son [11],

$$J_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \int \frac{d^n q}{[(p_2 - p_3)^2 - m^2]^{\nu_1} [(p_1 + p_3)^2 - m^2]^{\nu_2} (p_3)^{\nu_3}}, \quad (3.4)$$

$$J_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \int \frac{d^n q}{[(p_2 - p_3)^2]^{\nu_1} [(p_1 + p_3)^2]^{\nu_2} [p_3 - m^2]^{\nu_3}}, \quad (3.5)$$

donde q es el momento interno y $n = 4 - 2\varepsilon$ es la dimensión del espacio-tiempo en el marco de la regularización dimensional [12], entendiendo el subíndice de J como el número de propagadores masivos, podemos extender esta notación a las integrales sin masa $J(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ consideradas en [13],

$$J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \longleftrightarrow J_0(\nu_1, \nu_2, \nu_3),$$

del mismo modo que en [13], podemos extraer de cada integral a un loop la expresión,

$$\eta = \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2} - 1)}{\Gamma(n - 3)} \Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \Gamma(1 + \varepsilon), \quad (3.6)$$

una extensión natural de la notación usada en [13] es introducir las funciones φ_i ($i = 1, 2$) tales que,

$$J_i(1, 1, 1) = i\pi^{n/2} \eta \varphi_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2; m). \quad (3.7)$$

Para las integrales de dos puntos introducimos las funciones,

$$\kappa_i(p_l^2; m) \equiv \kappa_{i,l}, \quad (3.8)$$

con p_l ($l = 1, 2, 3$) el momento externo de la función de dos puntos, mientras tanto el índice ($i = 0, 1, 2$) indica cuantos de los dos propagadores internos son masivos. En este sentido, k_0 corresponde a la función de dos puntos con líneas sin masa,

$$J_1(1, 1, 0) = J_0(1, 1, 0) = i\pi^{n/2} \eta k_{0,3},$$

y análogamente para $J_0(0, 1, 1)$ y $J_0(1, 0, 1)$ con $k_{0,1}$ y $k_{0,2}$ respectivamente. Así pues, se puede comprobar que k_1 corresponde a la función de dos puntos con una línea masiva y una sin masa,

$$\begin{aligned} J_1(0, 1, 1) &= J_2(0, 1, 1) = i\pi^{n/2}\eta k_{1,1} \\ J_1(1, 0, 1) &= J_2(1, 0, 1) = i\pi^{n/2}\eta k_{1,2}, \end{aligned}$$

finalmente k_2 corresponde a la función de dos puntos con dos líneas masivas,

$$J_2(1, 1, 0) = J_3(1, 1, 0) = i\pi^{n/2}\eta k_{2,3},$$

del mismo modo para $J_3(1, 0, 1)$ y $J_3(0, 1, 1)$. Las funciones de dos puntos sin masa introducidas en la ecuación (2.15) de [13] pueden identificarse como $k_i \longleftrightarrow k_{0,i}$.

Con esto podemos escribir,

$$J_1(0, 0, 1) = J_2(1, 0, 0) = J_2(0, 1, 0) = i\pi^{n/2}\frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}(m^2)^{1-\varepsilon} = i\pi^{n/2}\eta m^2 \tilde{k},$$

donde,

$$\tilde{k} = \tilde{k}(m^2) = \frac{\Gamma(1 - 2\varepsilon)}{\Gamma^2(1 - \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} (m^2)^{-\varepsilon}.$$

No esta de más remarcar que en el marco de la renormalización dimensional [12] se cumple,

$$J_1(1, 0, 0) = J_1(0, 1, 0) = J_2(0, 0, 1) = 0,$$

Es conveniente introducir una notación que nos permita identificar cada elemento de una expansión perturbativa. Para una cantidad X denotamos la contribución de orden cero como $X^{(0)}$, la contribución a un loop se denota como $X^{(1)}$, de modo que la expansión perturbativa luce de la siguiente manera,

$$X = X^{(0)} + X^{(1)} + \dots,$$

3.3.1. Funciones de dos puntos.

A nivel más bajo el propagador del gluón es,

$$-i\delta^{a_1 a_2} \frac{1}{p^2} \left(g_{\mu_1 \mu_2} - \xi \frac{p_{\mu_1} p_{\mu_2}}{p^2} \right),$$

donde ξ es el término de norma, $\xi = 0$ corresponde a la norma de Feynman. En adelante se sobreentiende que $1/p^2 \longleftrightarrow 1/(p^2 + i0)$. Para nuestro propósito no requerimos las correcciones al propagador del gluón.

Denotamos al propagador del quark como $S(p)$. Las dos funciones escalares $\alpha(p^2)$ y $\beta(p^2)$ en el inverso del propagador del quark se definen como,

$$iS^{-1}(p) \equiv \alpha(p^2)\not{p} + \beta(p^2)I,$$

donde $\not{p} \equiv p^\mu \gamma_\mu$, además I corresponde a la identidad en el espacio de las matrices de Dirac. Al orden mas bajo se tiene $\alpha^{(0)} = 1$ y $\beta^{(0)} = -m$.

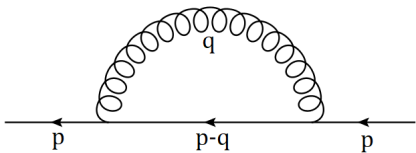


Figura 3.4: Diagrama de la autoenergía del quark.

Para los términos de orden mayor debemos calcular el diagrama de un loop mostrado en la Figura 3.4, los resultados de estos cálculos alrededor de 4 dimensiones se pueden encontrar en [14],

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(p^2) &= \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{n/2}} \frac{C_F}{2p^2} (n-2)(1-\xi)[(p^2 + m^2)k_1(p^2; m) \\ &\quad - m^2 \tilde{k}(m^2)], \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\beta^{(1)}(p^2) = -\frac{g^2\eta}{(4\pi)^{n/2}} C_F m(n - \xi) k_1(p^2; m). \quad (3.10)$$

El propagador del fantasma es,

$$\tilde{D}^{a_1 a_2}(p^2) = i\delta^{a_1 a_2} \frac{G(p^2)}{p^2}. \quad (3.11)$$

Al orden mas bajo $G(0) = 1$, mientras que para un loop se tiene,

$$G^{(1)}(p^2) = \frac{g^2\eta}{(4\pi)^{n/2}} \frac{C_A}{4} [2 + (n - 3)\xi] k_0(p^2), \quad (3.12)$$

podemos ver que en la norma de Fried-Yennie [15], $\xi = -2$ y $G^{(1)}(p^2)$ permanece finito cuando $n \rightarrow 4$. Si tomamos $\xi = -2/(n - 3)$ como la generalización n-dimensional de esta norma [16, 17] entonces el lado derecho de la ecuación (3.12) se anula.

3.3.2. Identidad de Ward-Slavnov-Taylor

La identidad de Ward-Slavnov-Taylor (WSTI) [18, 19] para el vértice quark-gluón $\Gamma_\mu(p_1, p_2, p_3)$, de acuerdo con [20, 21] es,

$$p_3^\mu \Gamma_\mu(p_1, p_2, p_3) = G(p_3^2) [S^{-1}(-p_1) H(p_1, p_2, p_3) - \bar{H}(p_2, p_1, p_3) S^{-1}(p_2)], \quad (3.13)$$

donde $G(p^2)$ es la función escalar asociada al propagador del fantasma.

La función H (y la función “conjugada” $\bar{H}$) involucran el vértice de cuatro puntos quark-quark-ghost-ghost completo como se muestra en la Figura 3.5. Para determinar la función H necesitamos “unir” las líneas del quark externo y el ghost interno en un vértice no estándar, denotado con una x , e integrar sobre el momento del loop resultante. Notemos que el vértice quark-quark-ghost-ghost completo involucrado en la WSTI se puede descomponer en una parte conectada y una parte desconectada como se puede apreciar en la Figura 3.6. Incluso podemos descomponer la parte conectada en términos de los vértices propios (irreducibles de una partícula) como en la Figura 3.7.

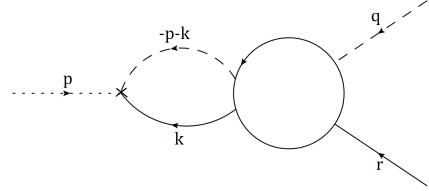


Figura 3.5: Representación gráfica de la función H .

Podemos notar que en el lado derecho de la ecuación mostrada en la Figura 3.7 no hay contribución del nivel árbol. La expansión perturbativa comienza a un loop, correspondiente al intercambio de dos gluones. Como la función H involucra un loop de integración extra, esta función propia de cuatro puntos no contribuye a la función H a un loop, $H^{(1)}$, que se muestra en la figura 3.8.

La función H se puede descomponer en términos de funciones escalares (factores de forma) como,

$$H(p_1, p_2, p_3) = \chi_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) I + \chi_1(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \not{p}_1 + \chi_2(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \not{p}_2 + \chi_3(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \sigma_{\mu\nu} p_1^\mu p_2^\nu, \quad (3.14)$$

donde,

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \quad (3.15)$$

La función “conjugada” $\bar{H}$ puede escribirse en términos de las mismas funciones escalares,

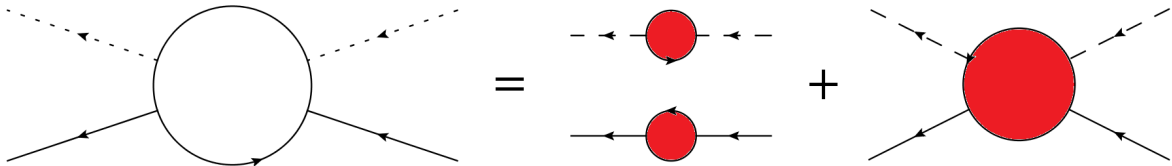


Figura 3.6: Parte conectada y desconectada de la amplitud quark-quark-ghost-ghost.

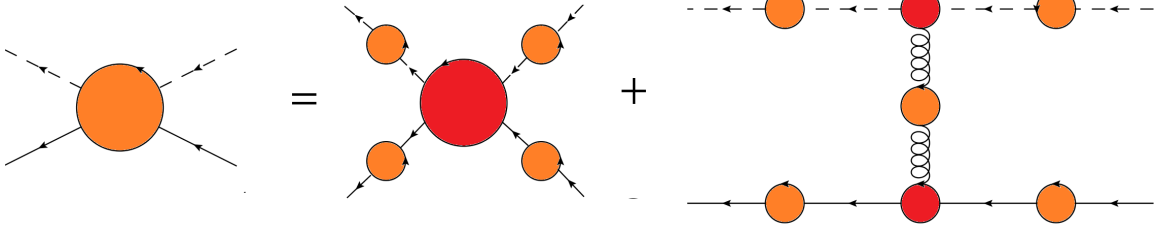


Figura 3.7: Parte conectada de la amplitud quark-quark-ghost-ghost en términos de los vértices propios (rojos).

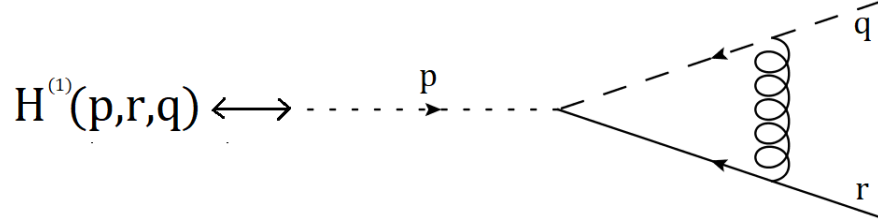


Figura 3.8: Función $H^{(1)}$ a un loop.

$$\bar{H}(p_1, p_2, p_3) = \chi_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2)I - \chi_2(p_1^2, p_2^2, p_3^2)\not{p}_1 - \chi_1(p_1^2, p_2^2, p_3^2)\not{p}_2 + \chi_3(p_1^2, p_2^2, p_3^2)\sigma_{\mu\nu}p_1^\mu p_2^\nu, \quad (3.16)$$

a orden mas bajo $\chi_0^{(0)} = 1$, $\chi_i^{(0)} = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

A un loop es conveniente dividir la WSTI en dos partes, correspondientes a los diagramas de las figuras 3.2 y 3.3, haciendo esto llegamos a las ecuaciones,

$$p_3^\mu \Gamma_\mu^{(1a)}(p_1, p_2, p_3) = \left(C_F - \frac{1}{2} C_A \right) C_F^{-1} [S^{-1}(-p_1) - S^{-1}(p_2)]^{(1)}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} p_3^\mu \Gamma_\mu^{(1b)}(p_1, p_2, p_3) &= [S^{-1}(-p_1)]^{(0)} H^{(1)}(p_1, p_2, p_3) - \bar{H}^{(1)}(p_2, p_1, p_3) [S^{-1}(p_2)]^{(0)} + \\ &+ \frac{1}{2} C_A C_F^{-1} [S^{-1}(-p_1) - S^{-1}(p_2)]^{(1)} H^{(0)} + \\ &+ 2G^{(1)}(p_3^2) [S^{-1}(-p_1) - S^{-1}(p_2)]^{(0)} H^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde continuamos usando la convención que los superíndices “(0)” y “(1)” indican la contribución de 0 y 1 loop respectivamente. La identidad de la ecuación (3.17) nos recuerda a la identidad abeliana de QED, por otro lado la ecuación (3.18) es la no abeliana.

3.3.3. Descomposición de vértice quark-gluón.

Recordando la ecuación (3.13), es conveniente separar el vértice en una parte longitudinal y una parte transversal,

$$\Gamma_\mu(p_q, p_2, p_3) = \Gamma_\mu^{(L)}(p_1, p_2, p_3) + \Gamma_\mu^{(T)}(p_1, p_2, p_3), \quad (3.19)$$

donde,

$$p_3^\mu \Gamma_\mu^{(T)}(p_1, p_2, p_3) = 0, \quad (3.20)$$

de modo que la parte transversal no contribuye al lado derecho de la ecuación (3.13).

En general basta con extender la **QCD** la descomposición del vértice **QED** sugerida en [5, 22] a QCD. Como se menciono anteriormente, la parte longitudinal del vértice puede escribirse,

$$\Gamma_\mu^{(L)}(p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2) L_{i,\mu}(p_1, p_2,), \quad (3.21)$$

donde,

$$\begin{aligned} L_{1,\mu} &= \gamma_\mu, \\ L_{2,\mu} &= (\not{p}_1 - \not{p}_2)(p_1 - p_2)_\mu, \\ L_{3,\mu} &= (p_1 - p_2)_\mu, \\ L_{4,\mu} &= \sigma_{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\nu, \end{aligned} \quad (3.22)$$

comparando con la ecuación (3.13) podemos relacionar las funciones λ_i con las funciones α , β , G y χ_i . Por otro lado, la parte transversa, que no contribuye a la ecuación (3.13) se puede escribir[5],

$$\Gamma_\mu^{(T)}(p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=1}^8 \tau_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2) T_{i,\mu}(p_1, p_2,), \quad (3.23)$$

con los tensores transversos,

$$\begin{aligned} T_{1,\mu}(p_1, p_2, p_3) &= p_{1\mu}(p_2 p_3) - p_{2\mu}(p_1 p_3), \\ T_{2,\mu}(p_1, p_2, p_3) &= -[p_{1\mu}(p_2 p_3) - p_{2\mu}(p_1 p_3)](\not{p}_1 - \not{p}_2), \\ T_{3,\mu}(p_1, p_2, p_3) &= p_3^2 \gamma_\mu - p_{3\mu} \not{p}_3, \\ T_{4,\mu}(p_1, p_2, p_3) &= [p_{1\mu}(p_2 p_3) - p_{2\mu}(p_1 p_3)] \sigma_{\nu\lambda} p_1^\nu p_2^\lambda, \\ T_{5,\mu}(p_1, p_2, p_3) &= \sigma_{\mu\nu} p_3^\nu, \\ T_{6,\mu}(p_1, p_2, p_3) &= \gamma_\mu(p_1^2 - p_2^2) + (p_1 - p_2)_\mu \not{p}_3, \\ T_{7,\mu}(p_1, p_2, p_3) &= -\frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2)[\gamma_\mu(\not{p}_1 - \not{p}_2) - (p_1 - p_2)_\mu] - (p_1 - p_2)_\mu \sigma_{\nu\lambda} p_1^\nu p_2^\lambda, \\ T_{8,\mu}(p_1, p_2, p_3) &= -\gamma_\mu \sigma_{\nu\lambda} p_1^\nu p_2^\lambda + p_{1\mu} \not{p}_2 - p_{2\mu} \not{p}_1, \end{aligned} \quad (3.24)$$

la relación entre λ 's y τ 's con la descomposición usual se puede encontrar en [11]. Se puede probar que L_μ y T_μ son funciones impar, excepto por L_4 y T_6 ,

$$\begin{aligned} L_{i\mu}(p_1, p_2) &= -L_{i\mu}^T(p_2, p_1), & i &= 1, 2, 3, \\ L_{4\mu}(p_1, p_2) &= L_{4\mu}^T(p_2, p_1), \\ T_{i\mu}(p_1, p_2) &= -T_{i\mu}^T(p_2, p_1), & i &= 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, \\ T_{6\mu}(p_1, p_2) &= T_{6\mu}^T(p_2, p_1), \end{aligned}$$

del mismo modo se cumple,

$$\begin{aligned} \lambda_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \lambda_i(p_2^2, p_1^2, p_3^2); & i &= 1, 2, 3, \\ \lambda_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= -\lambda_4(p_2^2, p_1^2, p_3^2), \\ \tau_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \tau_i(p_2^2, p_1^2, p_3^2); & i &= 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, \\ \tau_6(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= -\tau_6(p_2^2, p_1^2, p_3^2), \end{aligned}$$

como consecuencia de la relaciones anteriores, en el caso $p_1^2 = p_2^2 = p^2$ las funciones λ_4 y τ_6 deben ser cero,

$$\lambda_4(p^2, p^2, p_3^2) = 0; \quad \tau_6(p^2, p^2, p_3^2) = 0, \quad (3.25)$$

Con ayuda de estas simplificaciones, podemos comenzar a describir la forma analítica del vértice que nos permitirá analizar sus componentes.

3.3.4. Resultados off-shell.

Introducimos la notación,

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2, \\ \mathcal{M}_1 &= (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) + m^2 p_3^2, \\ \mathcal{M}_2 &= (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) p_3^2 + m^2 (p_1^2 - p_2^2)^2,\end{aligned}$$

del mismo modo, para distinguir las contribuciones a un loop de los dos diagramas que conforman al vértice quark-gluón usamos las letras a y b (en este sentido a representa la contribución abeliana y b la no abeliana), de este modo,

$$\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(1a)} + \lambda_i^{(1b)}, \quad \tau_i^{(1)} = \tau_i^{(1a)} + \tau_i^{(1b)},$$

a continuación se presentan los resultados para las partes longitudinal y transversa del vértice.

3.3.4.1. Resultados de la Parte Longitudinal del Vértice.

Las funciones del diagrama abeliano de la figura 3.2 son,

$$\lambda_1^{(1a)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{g^2 \eta (C_F - \frac{1}{2} C_A)}{(4\pi)^{n/2}} \frac{(n-2)(1-\xi)}{4p_1^2 p_2^2} [p_2^2 (p_1^2 + m^2) k_{1,1} + p_1^2 (p_2^2 + m^2) k_{1,2} - (p_1^2 + p_2^2) m^2 \tilde{k}], \quad (3.26)$$

$$\lambda_2^{(1a)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{g^2 \eta (C_F - \frac{1}{2} C_A)}{(4\pi)^{n/2}} \frac{(n-2)(1-\xi)}{4p_1^2 p_2^2 (p_1^2 - p_2^2)} [p_2^2 (p_1^2 + m^2) k_{1,1} - p_1^2 (p_2^2 + m^2) k_{1,2} + (p_1^2 + p_2^2) m^2 \tilde{k}], \quad (3.27)$$

$$\lambda_3^{(1a)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{g^2 \eta (C_F - \frac{1}{2} C_A)}{(4\pi)^{n/2}} \frac{(n-\xi)m}{p_1^2 - p_2^2} (k_{1,1} - k_{1,2}), \quad (3.28)$$

$$\lambda_4^{(1a)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = 0, \quad (3.29)$$

podemos ver que el diagrama a no contribuye a la función $\lambda_4^{(1)}$.

Las contribuciones del diagrama b son,

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(1b)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= -\frac{g^2 \eta C_A}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{16\mathcal{K}} \left\{ (2-\xi) \mathcal{K} [2(p_1^2 + p_2^2 - 2m^2) \varphi_1 - n k_{1,1} - n k_{1,2} - 4k_{0,3}] + [2 + (n-3)\xi] \right. \\ &\quad \times (p_1^2 - p_2^2)^2 [(p_1 p_2) \varphi_1 + m^2 \varphi_1 + k_{0,3}] + [2 + (n-3)\xi] (p_1^2 - p_2^2) [p_2^2 k_{1,2} - p_1^2 k_{1,1} + (p_1 p_2) (k_{1,1} - k_{1,2})] \\ &\quad \left. - (n-2)(2-\xi) \mathcal{K} m^2 \left[\frac{k_{1,1}}{p_1^2} + \frac{k_{1,2}}{p_2^2} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1^2 p_2^2} \tilde{k} \right] \right\}, \quad (3.30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2^{(1b)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= -\frac{g^2 \eta C_A}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{16\mathcal{K} (p_1^2 - p_2^2)} \left\{ [2 + (n-3)\xi p_3^2 (p_1^2 - p_2^2)] [(p_1 p_2) \varphi_1 + m^2 \varphi_1 + k_{0,3}] \right. \\ &\quad + [2 + (n-3)\xi] p_3^2 [p_2^2 k_{1,2} - p_1^2 k_{1,1} + (p_1 p_2) (k_{1,1} - k_{1,2})] + (n-2)(2-\xi) \mathcal{K} \\ &\quad \left. \times \left[\frac{p_1^2 + m^2}{p_1^2} k_{1,1} - \frac{p_2^2 + m^2}{p_2^2} k_{1,2} + \frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1^2 p_2^2} m^2 \tilde{k} \right] \right\}, \quad (3.31)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3^{(1b)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = & -\frac{g^2 \eta C_A}{(4\pi)^{n/2}} \frac{m}{8\mathcal{M}_1} \left\{ (n-4)\xi p_3^2 [(p_1 p_2) + m^2] \varphi_1 + \right. \\
& (n-3)\xi [(p_2^2 - p_3^2 - m^2)k_{1,1} + (p_1^2 - p_3^2 - m^2)k_{1,2} + p_3^2 k_{0,3}] \\
& - (n-2)\xi \frac{\mathcal{M}_1(p_1 p_2)}{p_1^2 - p_2^2} \left(\frac{k_{1,1}}{p_1^2} - \frac{k_{1,2}}{p_2^2} \right) + [4(n-1) - n\xi] \mathcal{M}_1 \frac{k_{1,1} - k_{1,2}}{p_1^2 - p_2^2} \\
& \left. + (n-2)\xi \left[1 - \frac{2(p_1 p_2) + m^2}{p_1^2 p_2^2} (p_1 p_2) \right] m^2 \tilde{k} \right\}, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4^{(1b)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = & -\frac{g^2 \eta C_A}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\xi m(p_1^2 - p_2^2)}{16\mathcal{K}\mathcal{M}_1} \left\{ (n-3)p_3^2 [(p_1 p_2) + m^2] \varphi_1 + (n-3)\mathcal{K}(k_{1,1} + k_{1,2}) + \mathcal{K}p_3^3 \varphi_1 \right. \\
& + (n-3)[(p_2 p_2) + m^2][(p_1 p_3)k_{1,1} + (p_2 p_3)k_{1,1} + (p_2 p_3)k_{1,2} + p_3^2 k_{0,3}] \\
& \left. + (n-2)\mathcal{K} \left[\frac{2(p_1 p_2) + m^2}{p_1^2 p_2^2} m^2 \tilde{k} + \frac{\mathcal{M}_1}{p_1^2 - p_2^2} \left(\frac{k_{1,1}}{p_1^2} - \frac{k_{1,2}}{p_2^2} \right) \right] \right\}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

De las expresiones anteriores podemos notar que en la norma de Feynman ($\xi = 0$) se tiene,

$$\lambda_3^{(1b)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = -\frac{g^2 \eta C_A}{(4\pi)^{n/2}} \frac{(n-1)m}{2(p_1^2 - p_2^2)} (k_{1,1} - k_{1,2}),$$

y,

$$\lambda_4^{(1b)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = 0.$$

Los resultados para la parte transversa del vértice en la norma de Feynman pueden consultarse en la referencia [11].

3.3.5. Casos Especiales.

Antes de continuar con la presentación de resultados haremos mención de algunos aspectos de los cálculos a tener en cuenta. Primeramente hacer mención del paquete HypExp [23] de mathematica con el que se puede realizar una expansión en serie de una función hipergeométrica. También es importante señalar que la única función que presenta una singularidad a un loop es λ_1 , no obstante esta singularidad es renormalizable, por lo que es posible obtener un resultado finito. En esta sección estudiaremos tres casos importantes del vértice quark-gluón.

Los casos que analizaremos son el límite simétrico, el caso $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ y el caso $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ con $p_3 = 0$. La importancia de estos casos radica en que al tener $p_1^2 = p_2^2$ algunas de las estructuras presentadas en las ecuaciones (3.22) y (3.24) se vuelven linealmente dependientes, más aún, de acuerdo a la ecuación (3.25) las funciones λ_4 y τ_6 se anulan.

3.3.5.1. Límite Simétrico.

Como se puede intuir del nombre, el límite simétrico se presenta cuando el cuadrado de los tres momentos es igual ($p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p^2$), en este caso la forma analítica de las funciones λ_i y τ_i es,

$$\begin{aligned}
\lambda_{1R}^{(1a)} = & \frac{g^2(\xi-1)(C_A - 2C_F)}{32\pi^2 \mu^4 p^4} \left(\mu^2 m^2 p^2 (p^2 - \mu^2) + p^4 (\mu^4 - m^4) \log \left(\frac{\mu^2}{m^2} + 1 \right) \right. \\
& \left. + \mu^4 (m^4 - p^4) \log \left(\frac{p^2}{m^2} + 1 \right) \right), \tag{3.34}
\end{aligned}$$

$$\lambda_2^{(1a)} = -\frac{g^2(\xi-1)(C_A-2C_F)}{64\pi^2 p^6} \left(-2m^2 p^2 + 2m^4 \log\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right) + p^4 \right), \quad (3.35)$$

$$\lambda_3^{(1a)} = -\frac{g^2 m(4-\xi)(C_F - \frac{C_A}{2})}{16\pi^2 p^4} \left(m^2 \log\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right) - p^2 \right), \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1R}^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{64\pi^2 \mu^4 p^4} (\xi-2) (\mu^2 p^2 (p-\mu)(\mu+p) (m^2 + \eta \mu^2 p^2 \varphi_1) \\ & + p^4 (-2\mu^4 + m^4 - \mu^2 m^2) \log\left(\frac{\mu^2}{m^2} + 1\right) \\ & - \mu^4 \left((m^4 - m^2 p^2 - 2p^4) \log\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right) + p^4 \log(\mu^2) - p^4 \log(p^2) \right)), \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{512\pi^2} \left(\frac{4(\xi+2)(2\eta m^2 \varphi_1 + \eta p^2 \varphi_1 - 2(\log(-p) + \log(p) + \gamma - 2))}{3p^2} \right. \\ & + \frac{4(\xi+2) \left(2p^4 \left(\log\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right) + \log(m^2) + \gamma - 1 \right) - p^2 \left(m^2 \log\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right) - p^2 \right) \right)}{3p^6} \\ & \left. + \frac{4(\xi-2) \left(-p^2 (-\gamma m^2 p^2 - p^2 (-\gamma - 2)m^2 - p^2)) - 2m^4 p^2 \log\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right) \right)}{p^8} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3^{(1b)} = & \frac{C_A g^2 m}{128\pi^2 p^4 (m^4 + m^2 p^2 + p^4)} \left(\xi p^6 (\log(m^2) - \log(p^2)) - 2(\xi-6)p^2 (m^4 + m^2 p^2 + p^4) \right. \\ & \left. + (2m^6(\xi-6) + 3m^4(\xi-4)p^2 + 3m^2(\xi-4)p^4 + \xi p^6) \log\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right) \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde el subíndice R indica que es la función renormalizada, a continuación se muestran las gráficas correspondientes a estas expresiones.

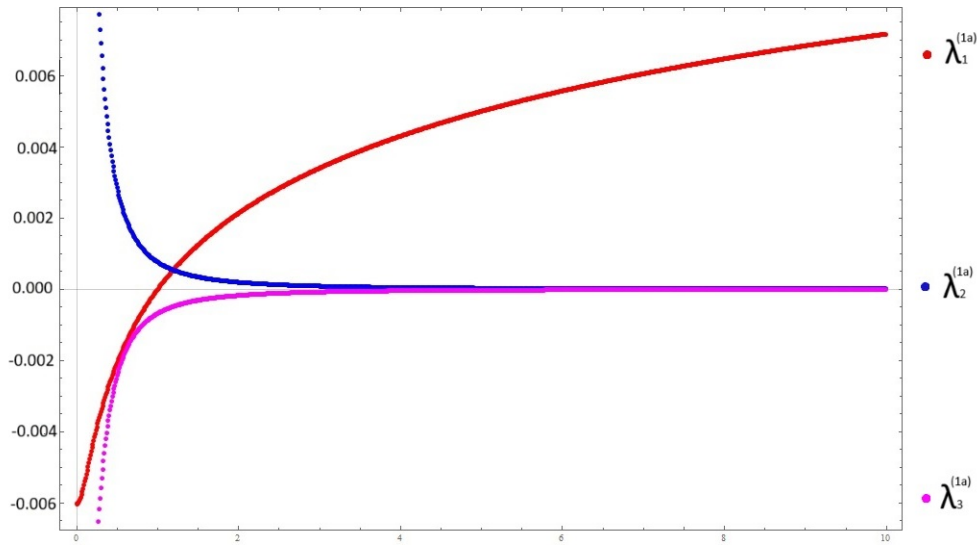


Figura 3.9: Gráfica de las funciones $\lambda_{1R}^{(1a)}$, $\lambda_2^{(1a)}$ y $\lambda_3^{(1a)}$

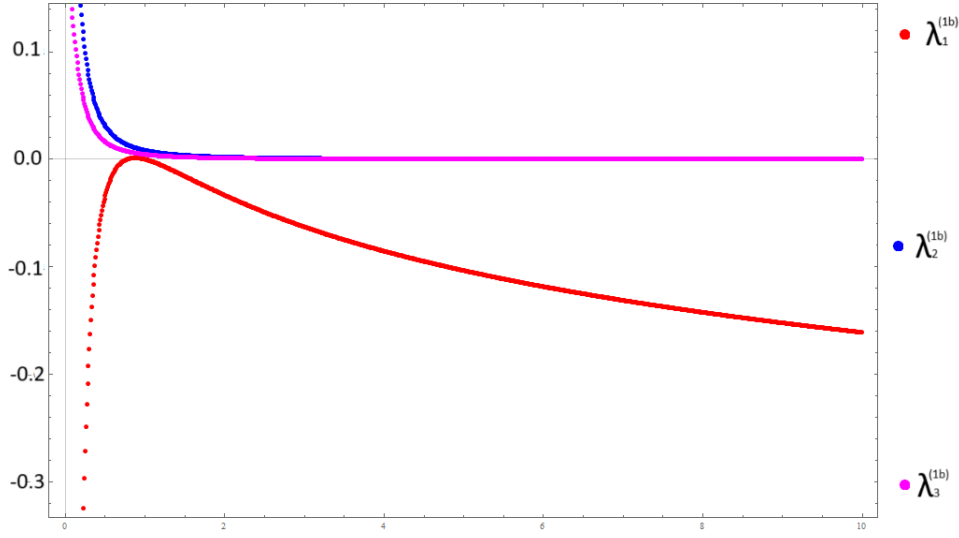


Figura 3.10: Gráfica de las funciones $\lambda_{1R}^{(1b)}$, $\lambda_2^{(1b)}$ y $\lambda_3^{(1b)}$

En estas gráficas podemos notar que las contribuciones de la parte no abeliana tienen un mayor peso en la contribución del vértice, tal como se esperaba. Por otro lado las funciones transversales son:

$$\tau_1^{(1a)} = \frac{g^2 m (\xi - 4) (C_A - 2C_F)}{48\pi^2 p^6} \left(p^2 \left(4f \left[\frac{p^2}{p^2 - 4m^2} \right] + \eta (2m^2 + p^2) \varphi_2 [p^2] - 3 \right) - (m^2 + 2p^2) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right), \quad (3.40)$$

$$\tau_2^{(1a)} = \frac{g^2 (C_A - 2C_F)}{96\pi^2 p^6} \left(-4(\xi - 1) (2m^2 + p^2) f \left[\frac{p^2}{p^2 - 4m^2} \right] - 4\eta m^4 (\xi - 1) \varphi_2 [p^2] + 4m^2 (\xi - 1) - 2 (2m^2 - (\xi - 1)p^2) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) + p^2 (\xi + 2\eta p^2 \varphi_2 [p^2] - 5) \right), \quad (3.41)$$

$$\tau_3^{(1a)} = \frac{g^2 (C_A - 2C_F)}{96\pi^2 p^6} \left(p^2 \left(f \left[\frac{p^2}{p^2 - 4m^2} \right] (4m^2 (\xi - 1) - 2(\xi + 1)p^2) + 2\eta m^4 (\xi - 1) \varphi_2 [p^2] + m^2 (-3\xi + 4\eta p^2 \varphi_2 [p^2] + 3) + 3(\xi + 1)p^2 + \eta (1 - 2\xi) p^4 \varphi_2 [p^2] \right) + \left(\xi (p^4 - m^4) + (m^2 - p^2)^2 \right) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right), \quad (3.42)$$

$$\tau_4^{(1a)} = \frac{g^2 m \xi (C_A - 2C_F)}{48\pi^2 p^6 (p - m)(m + p)} \left((8m^2 - 4p^2) f \left(\frac{p^2}{p^2 - 4m^2} \right) + 4m^2 (\eta (m - p)(m + p) \varphi_2 [p^2] - 1) + 2 (p^2 - m^2) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) + p^2 \right), \quad (3.43)$$

$$\tau_5^{(1a)} = \frac{g^2 m \xi (C_A - 2C_F)}{96\pi^2 p^4} \left(p^2 \left(4f \left(\frac{p^2}{p^2 - 4m^2} \right) + 2\eta (m - p)(m + p) \varphi_2 [p^2] + 3 \right) + (5m^2 - 2p^2) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right), \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}\tau_7^{(1a)} = & \frac{g^2 m \xi (C_A - 2C_F)}{96\pi^2 p^6 (p^2 - m^2)} \left(-4p^4 f \left(\frac{p^2}{p^2 - 4m^2} \right) + 6m^2 p^2 - 2\eta m^2 p^4 \varphi_2 [p^2] \right. \\ & \left. + 2(3m^4 - 4m^2 p^2 + p^4) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) - 3p^4 + 2\eta p^6 \varphi_2 [p^2] \right),\end{aligned}\quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}\tau_8^{(1a)} = & \frac{g^2 (C_A - 2C_F)}{48\pi^2 p^4} \left(p^2 \left(4f \left(\frac{p^2}{p^2 - 4m^2} \right) + \eta (2m^2 + p^2) \varphi_2 [p^2] \right) \right. \\ & \left. + 2(m-p)(m+p) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right),\end{aligned}\quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}\tau_1^{(1b)} = & -\frac{C_A g^2 m}{192 (\pi^2 p^6 (m^4 - m^2 p^2 + p^4)^2)} \left(-2\eta p^2 (m^4 - m^2 p^2 + p^4)^2 \varphi_1 [p^2] (2m^2(\xi - 6) + ((\xi - 2)\xi + 6)p^2) \right. \\ & - 9(\xi - 4) (m^4 - m^2 p^2 + p^4)^2 \left(m^2 \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) + p^2 \right) + (m^4 - m^2 p^2 + p^4) (4m^4(\xi - 6) \\ & - 4m^2(\xi - 6)p^2 + (\xi(3\xi + 4) - 24)p^4) \left(p^2 (\log(-p^2) - \log(m^2)) + (m-p)(m+p) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right) \\ & + 3\xi p^6 (m^4(3\xi - 1) + m^2(1 - 2\xi)p^2 + (\xi - 1)p^4) \\ & + \xi p^2 (-2m^6(\xi - 1) + 3m^4(\xi - 1)p^2 + 3m^2 p^4 + (\xi - 1)p^6) \\ & \times \left(p^2 (\log(m^2) - \log(-p^2)) + (p-m)(m+p) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right) \\ & \left. - 3m^2 \xi (m^6 - 2m^4 p^2 + 2m^2(\xi + 1)p^4 - (\xi + 1)p^6) \left((m-p)(m+p) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) + p^2 \right) \right),\end{aligned}\quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}\tau_2^{(1b)} = & -\frac{C_A g^2}{192 (\pi^2 p^6 (m^4 - m^2 p^2 + p^4))} \left((m^4 - m^2 p^2 + p^4) (4\eta m^4(\xi - 2)\varphi_1 [p^2] \right. \\ & + 2m^2 (2(\xi - 2) + \eta(\xi + 2)p^2 \varphi_1 [p^2]) + p^2 (-2(\xi - 2)\xi + \eta(\xi - 2)(\xi + 1)p^2 \varphi_1 [p^2] + 4)) \\ & + (4m^6(\xi - 2) + 8m^4 p^2 + m^2 (\xi^2 - 8) p^4 + 4\xi p^6) (\log(m^2) - \log(-p^2)) \\ & \left. + (m^6((5 - 2\xi)\xi - 6) + m^4(\xi(2\xi - 1) + 6)p^2 + m^2(\xi - 6)p^4 + 4\xi p^6) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right),\end{aligned}\quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}\tau_3^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{384\pi^2 p^6 (m^4 - m^2 p^2 + p^4)} \left(p^2 (m^4 - m^2 p^2 + p^4) (4\eta m^4(\xi - 2)\varphi_1 [p^2] \right. \\ & + 2m^2 (3(\xi - 2) + \eta(4 - (\xi - 4)\xi)p^2 \varphi_1 [p^2]) - 6((\xi - 3)\xi - 2)p^2 + \eta(\xi(\xi + 4) - 8)p^4 \varphi_1 [p^2]) \\ & + p^2 \log(m^2) (4m^6(\xi - 2) - 2m^4((\xi - 3)\xi - 6)p^2 + m^2(\xi(5\xi - 18) - 12)p^4 - 2((\xi - 5)\xi - 2)p^6) \\ & + p^2 \log(-p^2) (-4m^6(\xi - 2) + 2m^4((\xi - 3)\xi - 6)p^2 + m^2(\xi(18 - 5\xi) + 12)p^4 + 2((\xi - 5)\xi - 2)p^6) \\ & \left. + 2(m-p)(m+p) (m^6(\xi - 2) - 2m^4(\xi - 3)\xi p^2 - m^2(\xi - 6)\xi p^4 + ((\xi - 5)\xi - 2)p^6) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right),\end{aligned}\quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
\tau_4^{(1b)} = & -\frac{C_A g^2 m \xi}{96 \left(\pi^2 p^6 (m^4 - m^2 p^2 + p^4)^2 \right)} \left((m^4 - m^2 p^2 + p^4) (4 \eta m^6 \varphi_1 [p^2] + m^4 (4 - 6 \eta p^2 \varphi_1 [p^2])) \right. \\
& + 2 m^2 p^2 (-\xi + 3 \eta p^2 \varphi_1 [p^2] - 2) + p^4 (\xi - 2 \eta p^2 \varphi_1 [p^2] + 4) \left. \right) + (m^8 (5 - 2 \xi) + 2 m^6 (2 \xi - 5) p^2 \\
& + m^4 (13 - 6 \xi) p^4 + 2 m^2 (\xi - 4) p^6 + (2 \xi + 3) p^8) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) + (4 m^8 - 8 m^6 p^2 + 11 m^4 p^4 \\
& - m^2 (\xi + 7) p^6 + (2 \xi + 3) p^8) (\log (m^2) - \log (-p^2)),
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
\tau_5^{(1b)} = & \frac{C_A g^2 m}{192 \pi^2 p^4 (m^4 - m^2 p^2 + p^4)} \left(-p^2 (m^4 - m^2 p^2 + p^4) (\eta \varphi_1 [p^2] (((\xi - 8) \xi + 18) p^2 - 2 m^2 \xi) + 6 \xi) \right. \\
& + \xi p^2 (2 m^4 - m^2 (\xi - 4) p^2 + 2 (\xi - 2) p^4) (\log (m^2) - \log (-p^2)) \\
& \left. + 2 \xi (p - m)(m + p) (4 m^4 + m^2 (\xi - 4) p^2 + (\xi - 2) p^4) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
\tau_7^{(1b)} = & \frac{C_A g^2 m \xi}{192 \pi^2 p^6 (m^4 - m^2 p^2 + p^4)} \left(p^4 (p^2 - 2 m^2) (\log (m^2) - \log (-p^2)) \right. \\
& \left. - 2 p^2 (m^4 - m^2 p^2 + p^4) (\eta p^2 \varphi_1 [p^2] - 3) + (6 m^6 - 7 m^4 p^2 + 3 m^2 p^4 + p^6) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
\tau_8^{(1b)} = & -\frac{C_A g^2}{192 (\pi^2 p^4 (m^4 - m^2 p^2 + p^4))} \left(-\eta p^2 (m^4 - m^2 p^2 + p^4) \varphi_1 [p^2] (((\xi - 6) \xi + 12) p^2 - 2 m^2 (\xi - 6)) \right. \\
& + p^2 (2 m^4 (\xi - 6) + m^2 (12 - (\xi - 2) \xi) p^2 + 2 ((\xi - 3) \xi - 6) p^4) (\log (m^2) - \log (-p^2)) \\
& \left. + 2 (p - m)(m + p) (m^4 (\xi - 6) + m^2 (\xi - 3) (\xi - 2) p^2 + ((\xi - 3) \xi - 6) p^4) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right),
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Las gráficas correspondientes a estas funciones son:

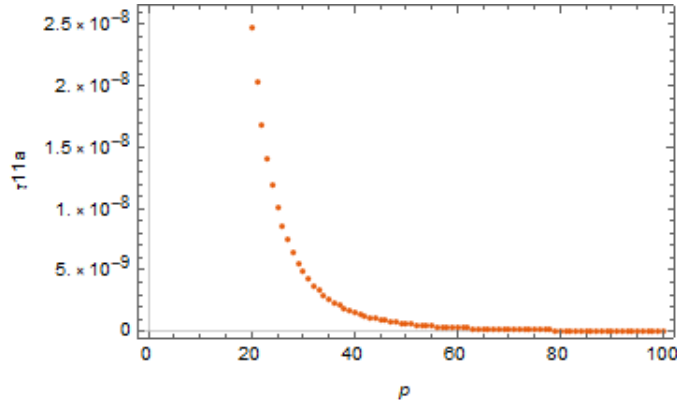
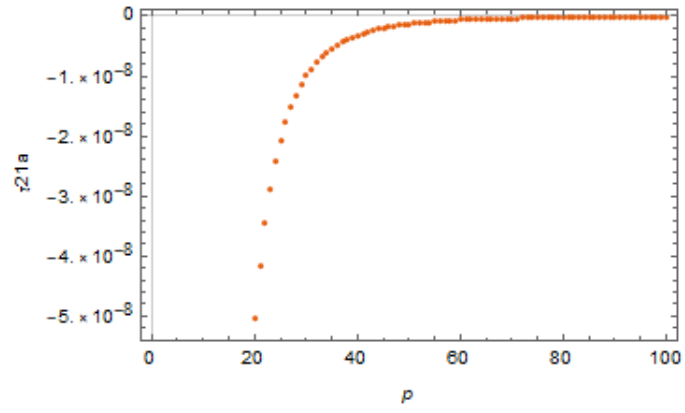
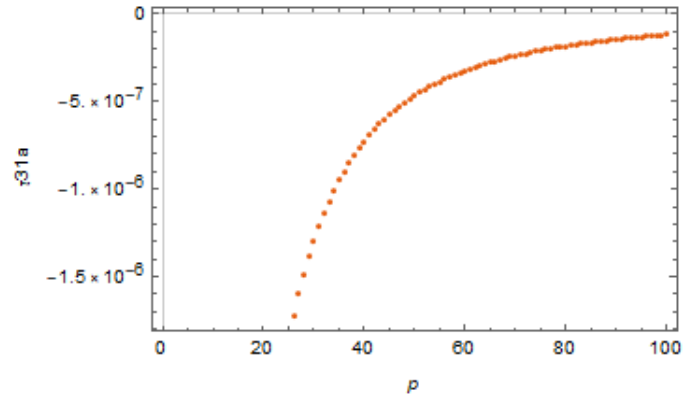
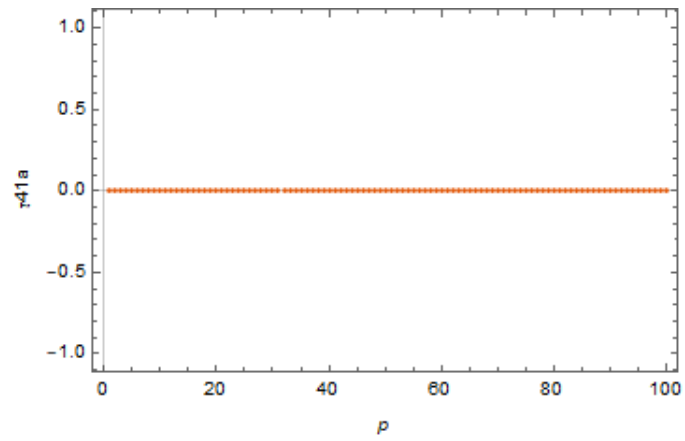
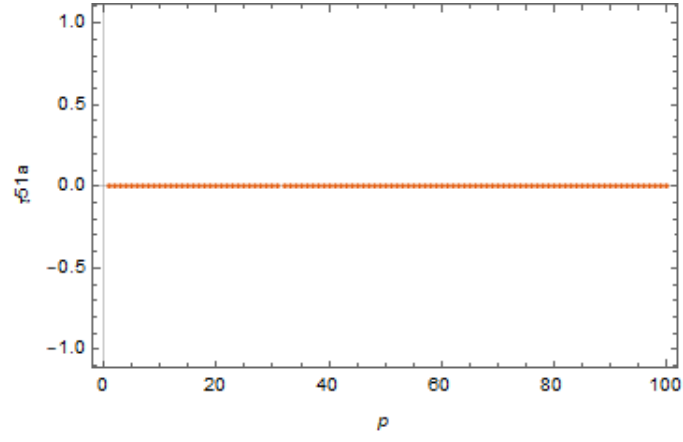
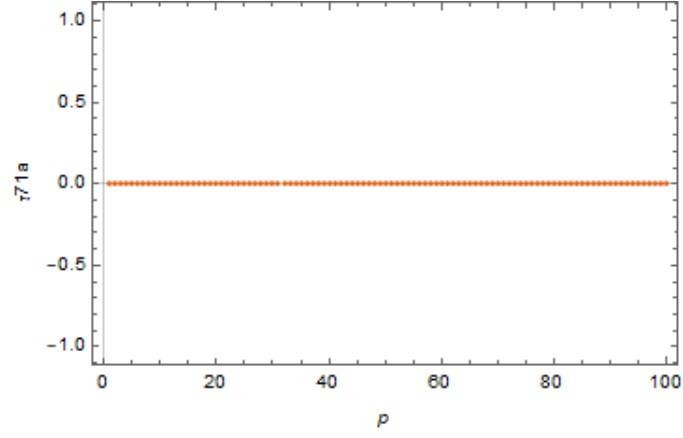
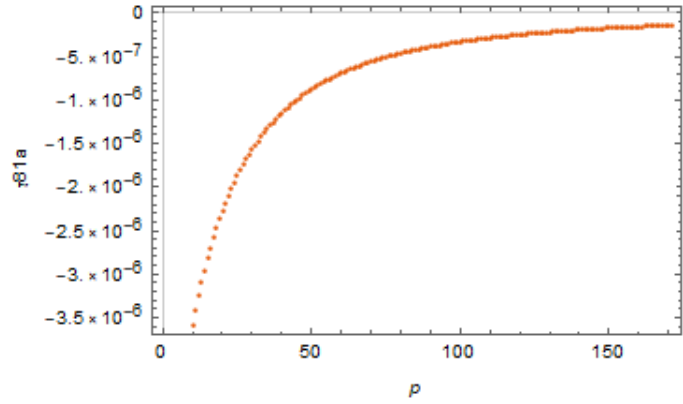
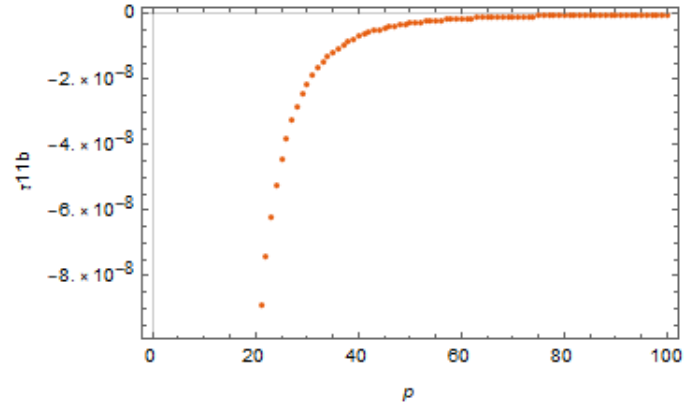
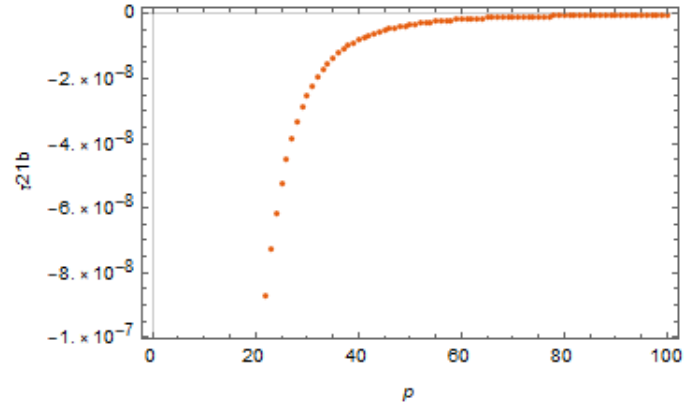
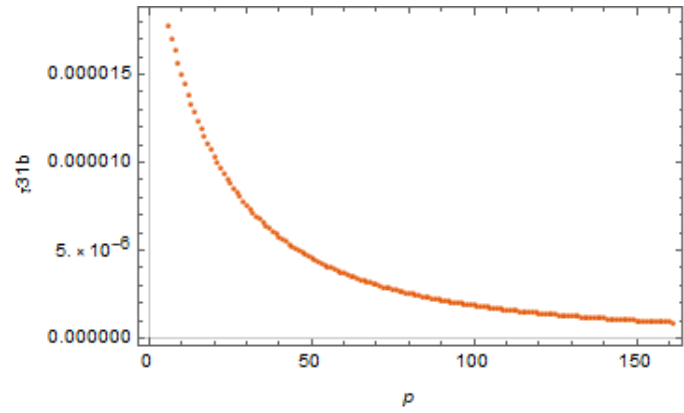
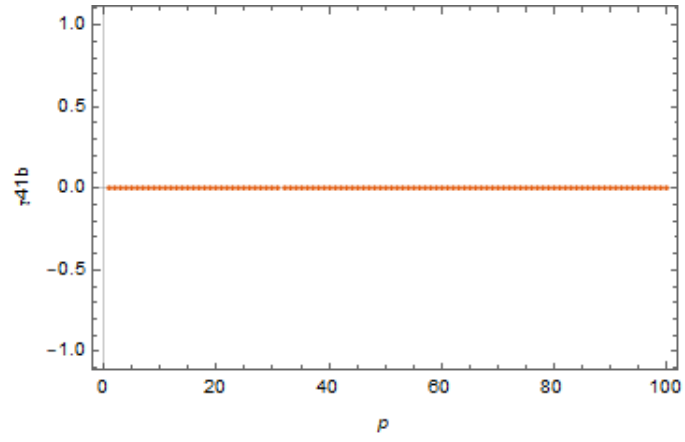
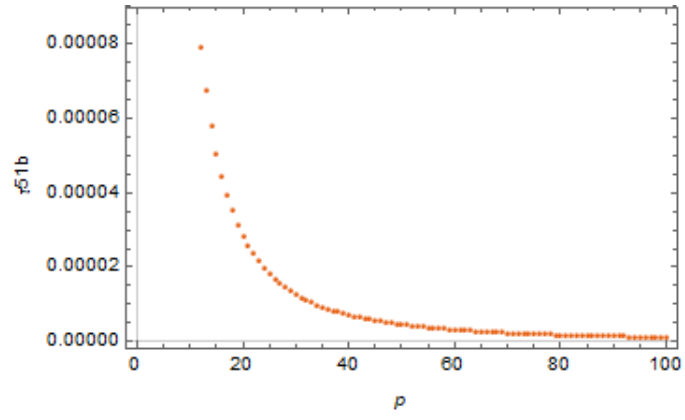
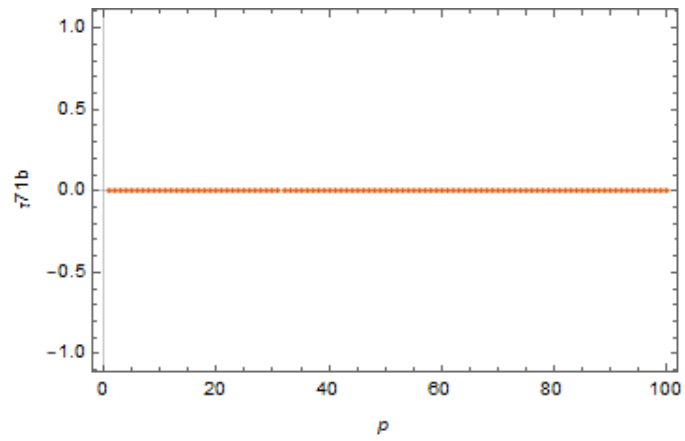


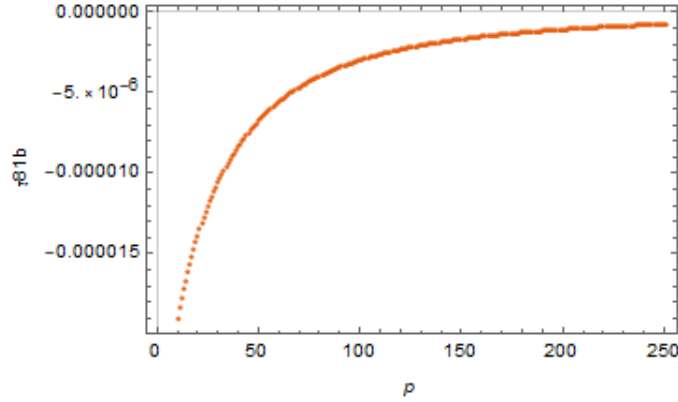
Figura 3.11: Gráfica de la función $\tau_1^{(1a)}$

Figura 3.12: Gráfica de la función $\tau_2^{(1a)}$ Figura 3.13: Gráfica de la función $\tau_3^{(1a)}$ Figura 3.14: Gráfica de la función $\tau_4^{(1a)}$

Figura 3.15: Gráfica de la función $\tau_5^{(1a)}$ Figura 3.16: Gráfica de la función $\tau_7^{(1a)}$ Figura 3.17: Gráfica de la función $\tau_8^{(1a)}$

Figura 3.18: Gráfica de la función $\tau_{1R}^{(1b)}$ Figura 3.19: Gráfica de la función $\tau_2^{(1b)}$ Figura 3.20: Gráfica de la función $\tau_3^{(1b)}$

Figura 3.21: Gráfica de la función $\tau_4^{(1b)}$ Figura 3.22: Gráfica de la función $\tau_5^{(1b)}$ Figura 3.23: Gráfica de la función $\tau_7^{(1b)}$

Figura 3.24: Gráfica de la función $\tau_8^{(1b)}$

De manera similar a lo que sucede en el caso de las funciones λ , las funciones correspondientes al diagrama no abeliano tienen una mayor contribución que aquellas correspondientes a la parte abeliana.

3.3.5.2. Caso On-Shell.

El caso simétrico es aquel en el que se cumple, $p_2 = -p_1 = m$, al tomar este límite las funciones adquieren la forma,

$$\lambda_{1R}^{(1a)} = \frac{g^2(\xi - 1)(C_A - 2C_F)}{32\pi^2\mu^4m^4} \left[\mu^2m^4(m^2 - \mu^2) + m^4(\mu^4 - m^4) \log\left(\frac{\mu^2}{m^2} + 1\right) \right] \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1R}^{(1b)} = & \frac{C_A g^2(\xi - 2)}{64\pi^2\mu^4m^4} (\mu^2m^2(m - \mu)(\mu + m) (\eta\mu^2m^2\varphi_1 + m^2) + \\ & + m^4(-2\mu^4 + m^4 - \mu^2m^2) \log\left(\frac{\mu^2}{m^2} + 1\right)) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\lambda_2^{(1a)} = -\frac{g^2(\xi - 1)(C_A - 2C_F)}{64\pi^2m^2} (2\log(2) - 1) \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{512\pi^2} \left[\frac{(\xi + 2)p_3^2 (2\eta m^2\varphi_1 - \eta\varphi_1 (-2m^2 - p_3^2) - 2(\log(-p_3) + \log(p_3) + \gamma - 2))}{m^4 - \frac{1}{4}(-2m^2 - p_3^2)^2} + \right. \\ & + \frac{(\xi + 2)p_3^2 ((-2m^2 - p_3^2)(m^2 \log(2) - m^2) + 2m^4 (\log(m^2) + \gamma - 1 + \log(2)))}{m^4 (m^4 - \frac{1}{4}(-2m^2 - p_3^2)^2)} + \\ & \left. + \frac{4(\xi - 2)(-2m^6 \log(2) - m^2(-\gamma m^4 - (-\gamma - 2)m^2 - m^2)m^2)}{m^8} \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\lambda_3^{(1a)} = -\frac{g^2(4 - \xi)(C_F - \frac{C_A}{2})(m^2 \log(2) - m^2)}{16\pi^2m^3} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{128\pi^2m^5(4m^4 + m^2p_3^2)} [-m^6\xi p_3^2 \log(-p_3^2) + m^6\xi p_3^2 \log(m^2) - 2m^2(4m^4 + m^2p_3^2)(6m^2 + \xi p_3^2) + \\ & \log(2)(12m^4(4m^4 + m^2p_3^2) + \xi p_3^2(3m^6 + m^4(5m^2 + 2p_3^2) + m^2(4m^4 + m^2p_3^2)))] . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Las gráficas correspondientes a estas funciones son:

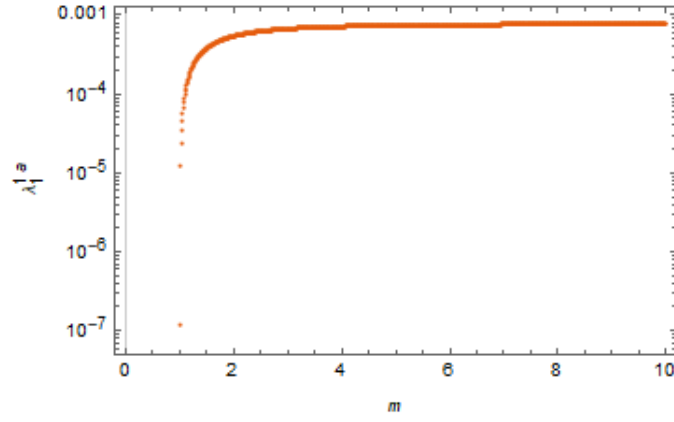


Figura 3.25: Gráfica de la función $\lambda_1^{(1a)}$

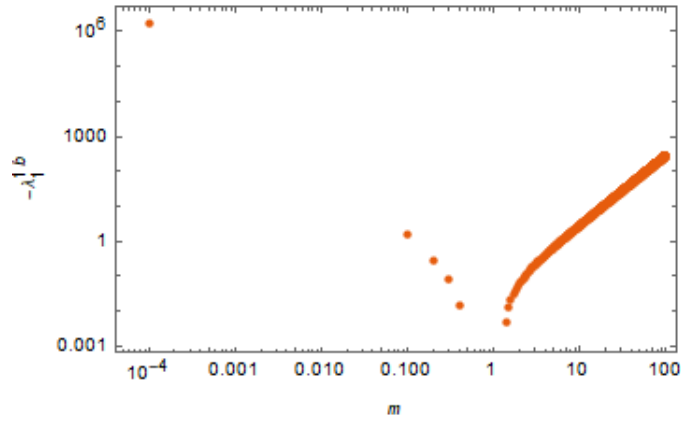


Figura 3.26: Gráfica de la función $\lambda_1^{(1b)}$

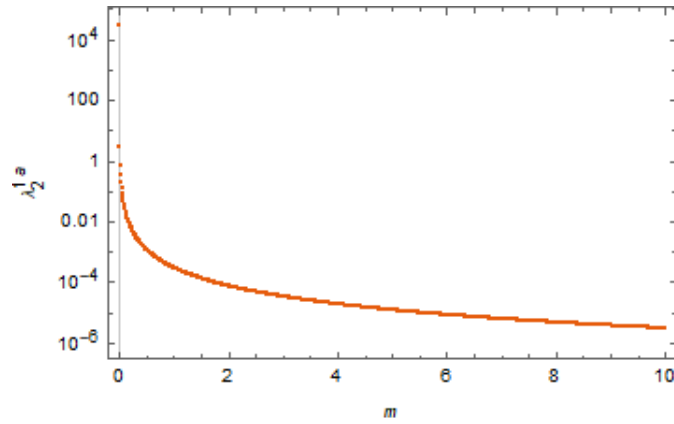
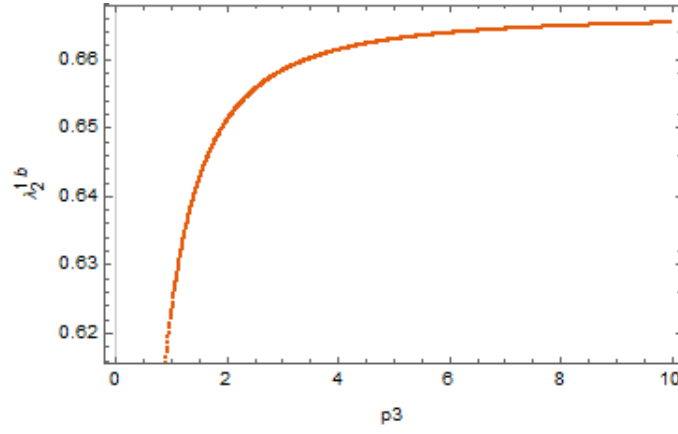
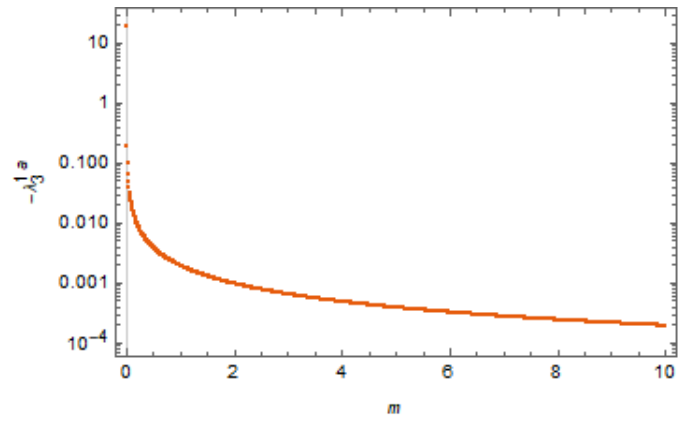
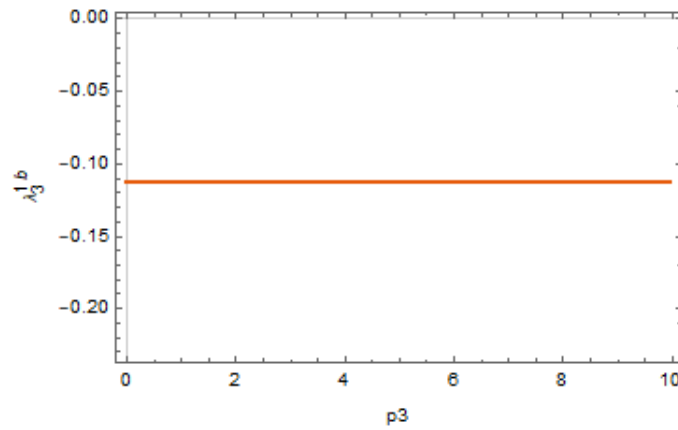


Figura 3.27: Gráfica de la función $\lambda_2^{(1a)}$

Figura 3.28: Gráfica de la función $\lambda_2^{(1b)}$ Figura 3.29: Gráfica de la función $\lambda_3^{(1a)}$ Figura 3.30: Gráfica de la función $\lambda_3^{(1b)}$

En el caso de los factores transversales se tiene:

$$\tau_1^{(1a)} = \frac{g^2(\xi - 4)(C_A - 2C_F)}{16\pi^2 m p_3^2 (4m^2 + p_3^2)} \left(-4m^2 f\left(\frac{p_3^2}{p_3^2 - 4m^2}\right) + m^2 (\eta p_3^2 \varphi_2 + 4) - p_3^2 (\log(2) - 1) \right) \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \tau_2^{(1a)} = & -\frac{g^2(C_A - 2C_F)}{32\pi^2 m^2 p_3^2 (4m^2 + p_3^2)^2} \left(4m^2 f\left(\frac{p_3^2}{p_3^2 - 4m^2}\right) (4m^2 \xi + (\xi + 3)p_3^2) + 16\eta m^6 (\xi - 1) \varphi_2 + \right. \\ & + 4m^4 (\xi (\eta p_3^2 \varphi_2 - 4 + \log(16)) + 1 - 4\log(2)) + m^2 p_3^2 (4\xi(\log(8) - 2) - 2\eta p_3^2 \varphi_2 + 5 - 24\log(2)) + \\ & \left. + (\xi - 1)p_3^4 (\log(4) - 1) \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \tau_3^{(1a)} = & \frac{g^2(C_A - 2C_F)}{64\pi^2 p_3^2 (4m^2 + p_3^2)} \left(-4f\left(\frac{p_3^2}{p_3^2 - 4m^2}\right) (4m^2 \xi + (\xi + 1)p_3^2) + 16\eta m^4 \varphi_2 + \right. \\ & \left. + 4m^2 (3\xi + 2\eta p_3^2 \varphi_2 - 1 + \log(16)) + p_3^2 (3\xi + 2\eta p_3^2 \varphi_2 - 1 + \log(256)) \right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \tau_4^{(1a)} = & -\frac{g^2 \xi (C_A - 2C_F)}{128\pi^2 m^3 p_3^2 (4m^2 + p_3^2)^2} \left(16 (8m^4 - m^2 p_3^2) f\left(\frac{p_3^2}{p_3^2 - 4m^2}\right) + 64\eta m^6 \varphi_2 - \right. \\ & \left. - 32m^4 (\eta p_3^2 \varphi_2 + 4 - \log(4)) + 4m^2 p_3^2 (32\log(2) - 19) + p_3^4 (16\log(2) - 11) \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \tau_5^{(1a)} = & -\frac{g^2 \xi (C_A - 2C_F)}{128\pi^2 m (4m^2 + p_3^2)} \left(16m^2 f\left(\frac{p_3^2}{p_3^2 - 4m^2}\right) + 4m^2 (4\eta m^2 \varphi_2 + 3 - 8\log(2)) + \right. \\ & \left. + p_3^2 (3 - 4\log(2)) \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\tau_6^{(1a)} = 0 \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \tau_7^{(1a)} = & -\frac{g^2 \xi (C_A - 2C_F)}{256\pi^2 m^3 (4m^2 + p_3^2)} \left(16m^2 f\left(\frac{p_3^2}{p_3^2 - 4m^2}\right) + 16\eta m^4 \varphi_2 + m^2 (44 - 80\log(2)) + \right. \\ & \left. + p_3^2 (11 - 16\log(2)) \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\tau_8^{(1a)} = \frac{g^2(C_A - 2C_F)}{16\pi^2 (4m^2 + p_3^2)} \left(-4f\left(\frac{p_3^2}{p_3^2 - 4m^2}\right) + \eta p_3^2 \varphi_2 + \log(16) \right) \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \tau_1^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{64\pi^2 m^3 p_3^2 (4m^2 - p_3^2)^2} (32\eta m^8 (\xi - 6) \varphi_1 + 8m^6 (4(\xi - 6) - \eta(\xi - 3)(\xi + 4)p_3^2 \varphi_1) - \\ & - 2m^4 p_3^2 (\xi(\xi(-\eta p_3^2 \varphi_1 + 2 + \log(16)) - 8 + \log(4096)) - 6(-\eta p_3^2 \varphi_1 + 8 - 4\log(2))) \\ & + m^2 p_3^4 (\xi^2 + 2\xi(\log(512) - 7) - 12 + \log(4096)) + m^2 (\xi^2 p_3^4 \log(16m^2) + \\ & + (4m^2 - p_3^2) \log(m^2) (4m^2 (\xi - 6) + \xi p_3^2) + \log(p_3^2) (-16m^4 (\xi - 6) - 24m^2 p_3^2 - \\ & - (\xi - 1)\xi p_3^4)) - \xi p_3^6 (\log(8) - 2)) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \tau_2^{(1b)} = & -\frac{C_A g^2}{64\pi^2 m^2 p_3^2 (4m^2 - p_3^2)^2} \left(-8\eta m^6 (\xi^2 - 8) \varphi_1 + 2m^4 (-4(\xi^2 - 8) - \eta(\xi(2 - 3\xi) + 12)p_3^2 \varphi_1) - \right. \\ & - m^2 p_3^2 (\xi (-\xi (-\eta p_3^2 \varphi_1 + 2 + \log(16)) + \eta (-p_3^2) \varphi_1 + \log(16)) - 2\eta p_3^2 \varphi_1 + 32 - 24\log(2)) + \\ & \left. + m^2 (4m^2 (\xi^2 - 8) - (3\xi^2 - 8) p_3^2) (\log(p_3^2) - \log(m^2)) + p_3^4 ((\xi - 6)\log(2) + 4) \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \tau_3^{(1b)} = & -\frac{C_A g^2}{128\pi^2 p_3^2 (4m^2 - p_3^2)} \left(- (4m^2 - p_3^2) (\eta \varphi_1 (2m^2 ((\xi - 2)\xi - 4) - (\xi - 4)\xi p_3^2) + 2(\xi - 2)\xi - 8) - \right. \\ & \left. - (4m^2 ((\xi - 2)\xi - 4) - (\xi(\xi + 2) - 4)p_3^2) (\log(m^2) - \log(p_3^2)) + 8\xi p_3^2 \log(2) \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \tau_4^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{32\pi^2 m^3 p_3^2 (4m^2 - p_3^2)^2} \xi \left(4\eta m^6 (\xi + 6) \varphi_1 + 2m^4 (2(\xi + 6) - \eta(2\xi + 3)p_3^2 \varphi_1) - \right. \\ & - m^2 p_3^2 (\xi + 14 - 16\log(2)) + m^2 (-\xi p_3^2 \log(16m^2) + \log(m^2) (2m^2 (\xi + 6) - p_3^2) - \\ & \left. - \log(p_3^2) (2m^2 (\xi + 6) - (\xi + 1)p_3^2)) - p_3^4 (\log(8) - 2) \right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

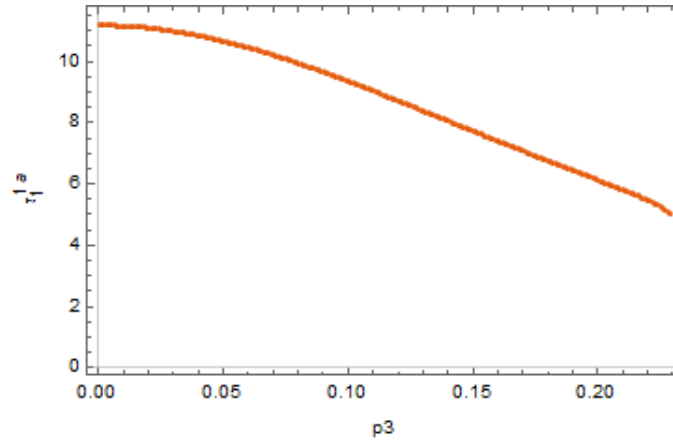
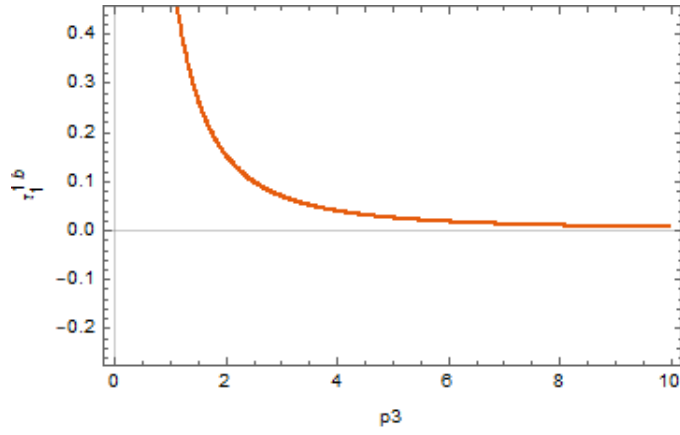
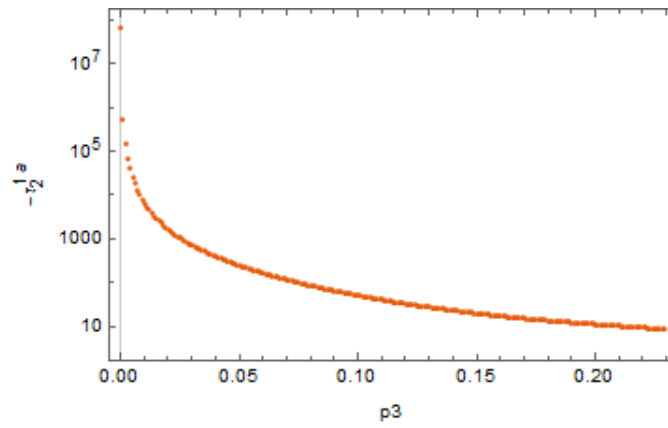
$$\begin{aligned} \tau_5^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{64\pi^2 m (4m^2 - p_3^2)} \left(-2\eta m^4 ((\xi - 4)\xi + 12) \varphi_1 - m^2 (\xi (-\eta(\xi - 2)p_3^2 \varphi_1 - 8 + \log(4096)) - \right. \\ & \left. - 6\eta p_3^2 \varphi_1) + m^2 (\xi - 2) \xi (\log(p_3^2) - \log(m^2)) + 2\xi p_3^2 (\log(4) - 1) \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

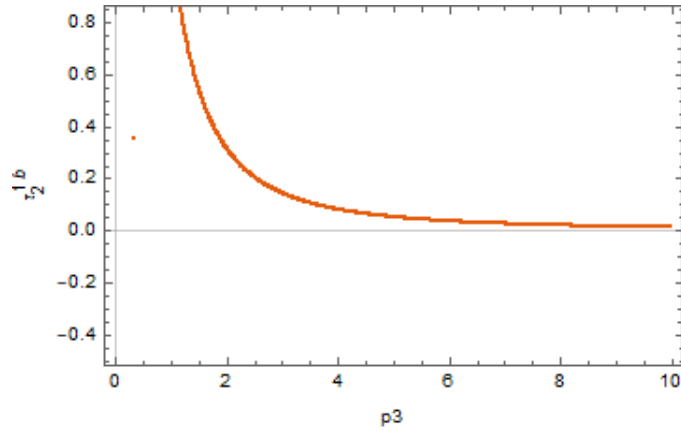
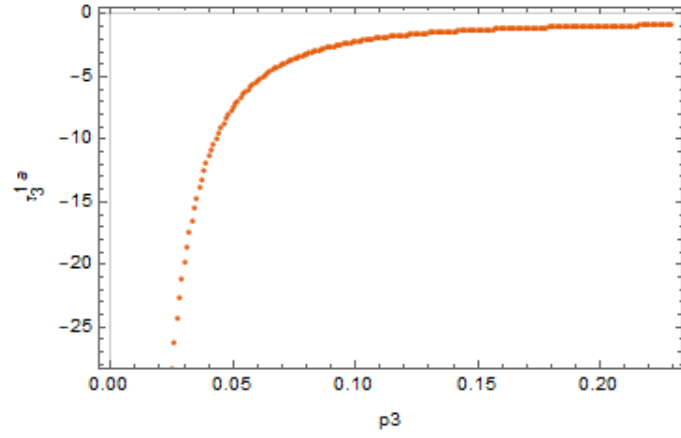
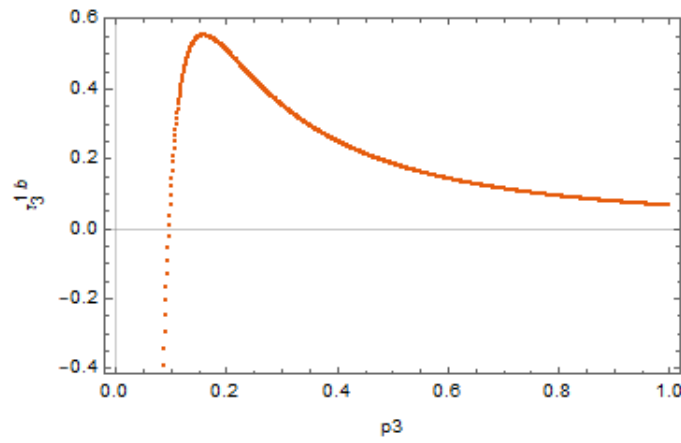
$$\tau_6^{(1b)} = 0 \quad (3.73)$$

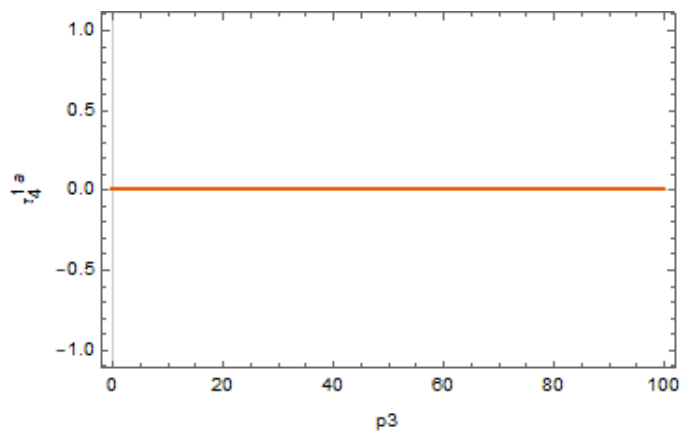
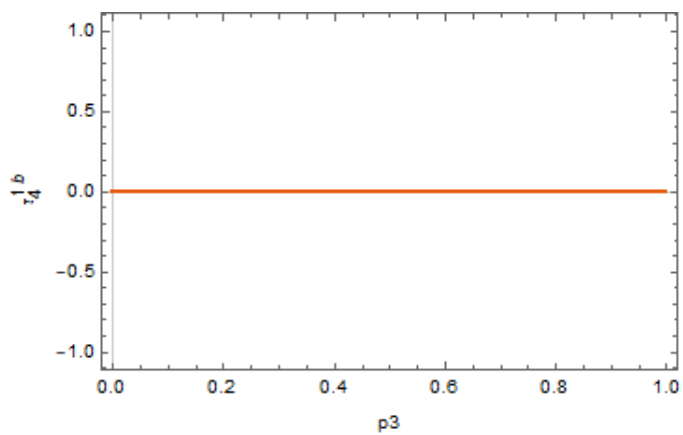
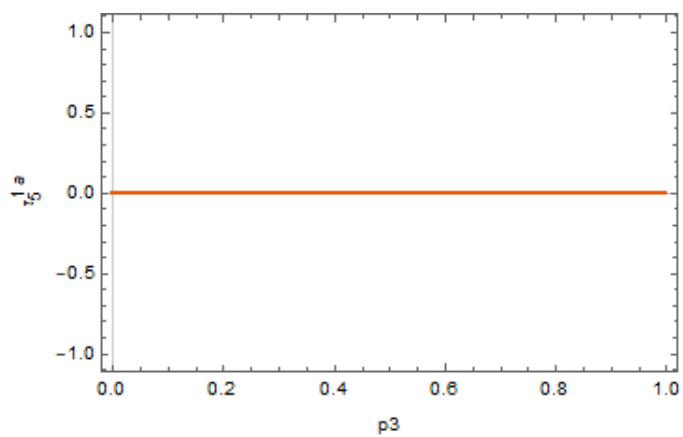
$$\begin{aligned} \tau_7^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{64\pi^2 m^3 (4m^2 - p_3^2)} \xi \left(2\eta m^4 \varphi_1 + m^2 (\log(m^2) - \log(p_3^2)) - 8m^2 (\log(2) - 1) + p_3^2 (\log(8) - 2) \right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

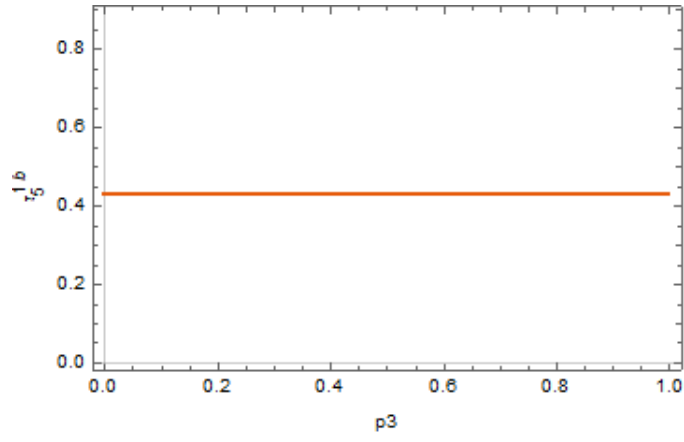
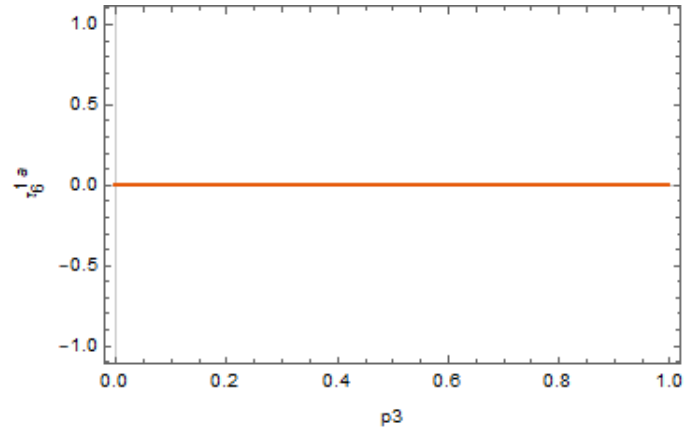
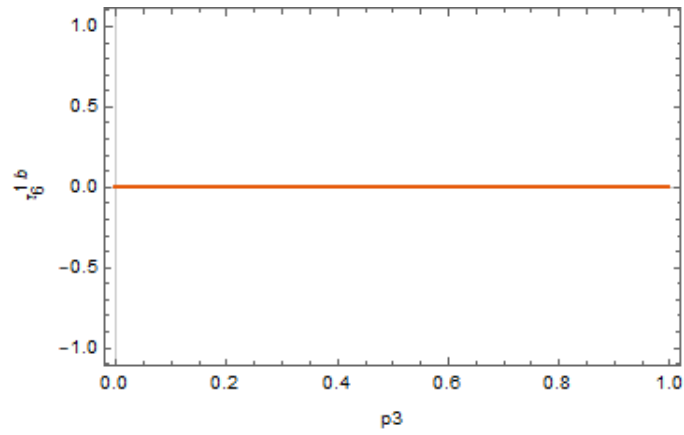
$$\begin{aligned} \tau_8^{(1b)} = & \frac{C_A g^2}{64\pi^2 (4m^2 - p_3^2)} \left(((\xi - 2)\xi - 12) \log(m^2) + \xi (\eta(\xi - 4) \varphi_1 (2m^2 - p_3^2) + \log(16)) + \right. \\ & \left. + (12 - (\xi - 2)\xi) \log(p_3^2) - 24\log(2) \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

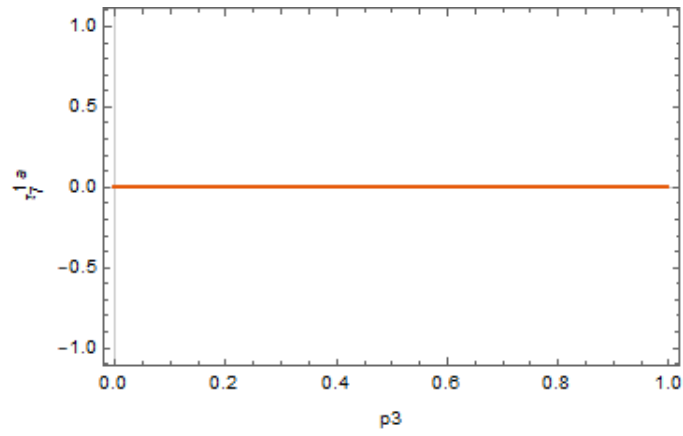
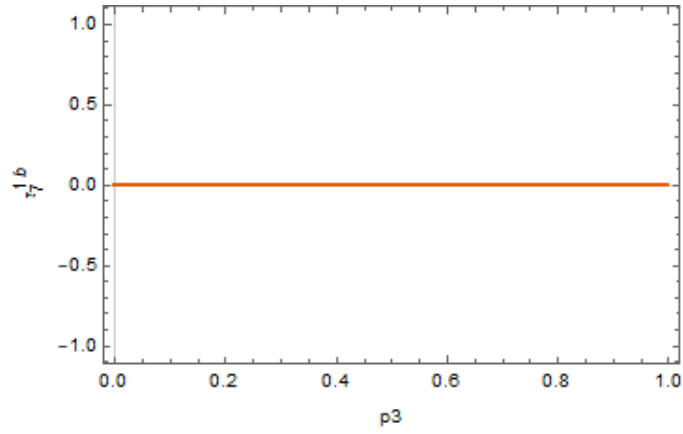
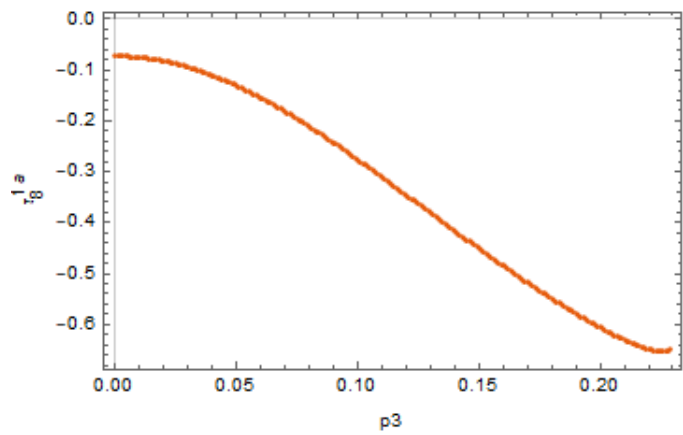
Las gráficas correspondientes a estas expresiones se presentan a continuación:

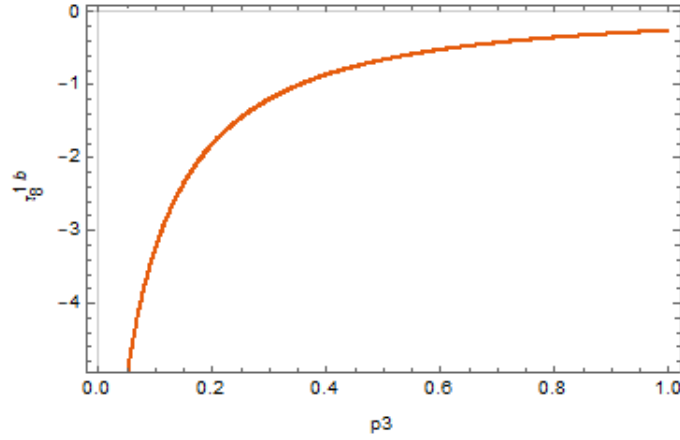
Figura 3.31: Gráfica de la función $\tau_1^{(1a)}$ Figura 3.32: Gráfica de la función $\tau_1^{(1b)}$ Figura 3.33: Gráfica de la función $\tau_2^{(1a)}$

Figura 3.34: Gráfica de la función $\tau_2^{(1b)}$ Figura 3.35: Gráfica de la función $\tau_3^{(1a)}$ Figura 3.36: Gráfica de la función $\tau_3^{(1b)}$

Figura 3.37: Gráfica de la función $\tau_4^{(1a)}$ Figura 3.38: Gráfica de la función $\tau_4^{(1b)}$ Figura 3.39: Gráfica de la función $\tau_5^{(1a)}$

Figura 3.40: Gráfica de la función $\tau_5^{(1b)}$ Figura 3.41: Gráfica de la función $\tau_6^{(1a)}$ Figura 3.42: Gráfica de la función $\tau_6^{(1b)}$

Figura 3.43: Gráfica de la función $\tau_7^{(1a)}$ Figura 3.44: Gráfica de la función $\tau_7^{(1b)}$ Figura 3.45: Gráfica de la función $\tau_8^{(1a)}$

Figura 3.46: Gráfica de la función $\tau_8^{(1b)}$

Como se puede apreciar en las gráficas anteriores los factores τ_4 , τ_5 , τ_6 y τ_7 son cero mientras que los factores $\tau_1^{(1b)}$, $\tau_2^{(1b)}$ y $\lambda_2^{(1a)}$ presentan un gran crecimiento en el infrarrojo. Por su parte las funciones $\lambda_1^{(1a)}$, $\lambda_1^{(1b)}$, $\lambda_3^{(1a)}$, $\tau_2^{(1a)}$, $\tau_3^{(1a)}$, $\tau_8^{(1a)}$ y $\tau_3^{(1b)}$ presentan mayormente valores negativos.

3.3.5.3. Caso $p_3 = 0$.

En este caso tenemos dos condiciones; $p_2 = -p_1 = m$ y $p_3 = 0$, al tomar estos límites obtenemos las expresiones,

$$\lambda_{1R}^{(1a)} = \frac{g^2(\xi - 1)(C_A - 2C_F)}{32\pi^2\mu^4m^4} \left(\mu^2m^4(m^2 - \mu^2) + m^4(\mu^4 - m^4) \log\left(\frac{\mu^2}{m^2} + 1\right) \right) \quad (3.76)$$

$$\lambda_2^{(1a)} = -\frac{g^2(\xi - 1)(C_A - 2C_F)(2m^4 \log(2) - m^4)}{64\pi^2m^6} \quad (3.77)$$

$$\lambda_3^{(1a)} = -\frac{g^2(4 - \xi)(C_F - \frac{C_A}{2})(m^2 \log(2) - m^2)}{16\pi^2m^3} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1R}^{(1a)} = & \frac{C_A g^2(\xi - 2)}{64\pi^2\mu^4m^4} (\mu^2m^2(m - \mu)(\mu + m)(\eta\mu^2m^2\varphi_1 + m^2) + \\ & + m^4(-2\mu^4 + m^4 - \mu^2m^2) \log\left(\frac{\mu^2}{m^2} + 1\right)) \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\lambda_2^{(1b)} = -\frac{C_A g^2(\xi - 2)(2m^4 \log(2) - m^4)}{128\pi^2m^6} \quad (3.80)$$

$$\lambda_3^{(1b)} = -\frac{3C_A g^2(m^2 \log(2) - m^2)}{32\pi^2m^3} \quad (3.81)$$

Las gráficas corespondientes a estas expresiones son,

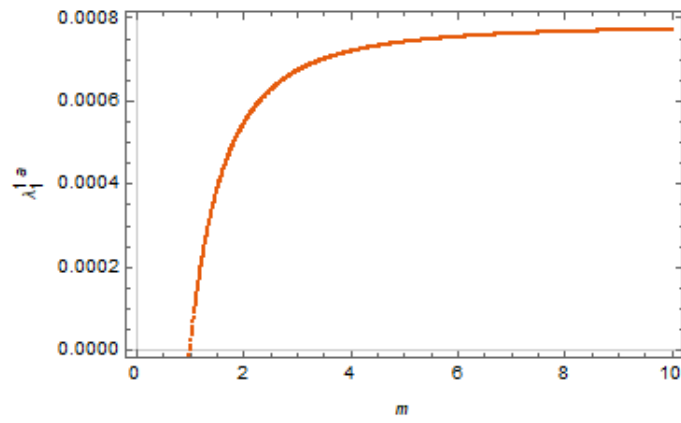


Figura 3.47: Gráfica de la función $\lambda_{1R}^{(1a)}$

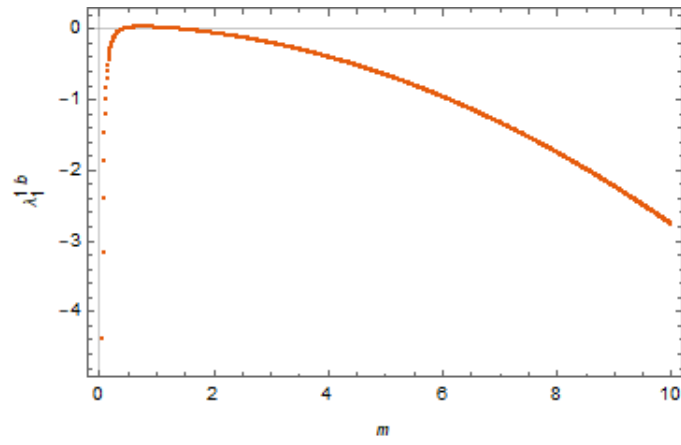


Figura 3.48: Gráfica de la función $\lambda_{1R}^{(1b)}$

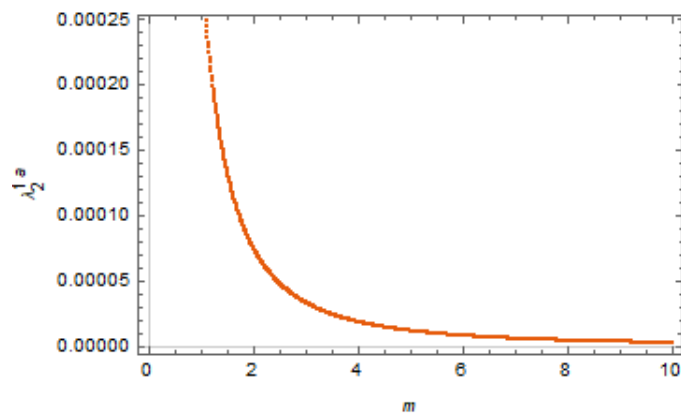
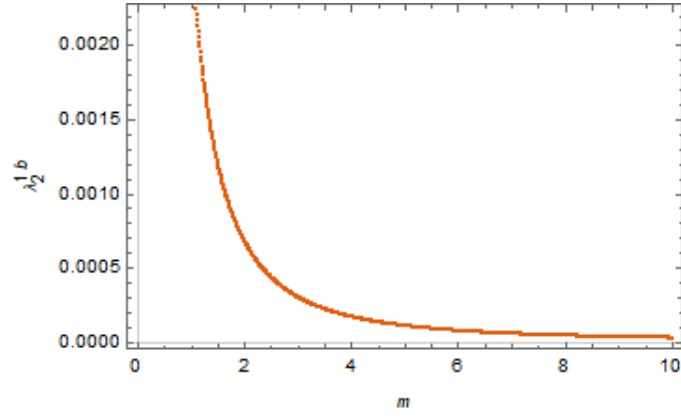
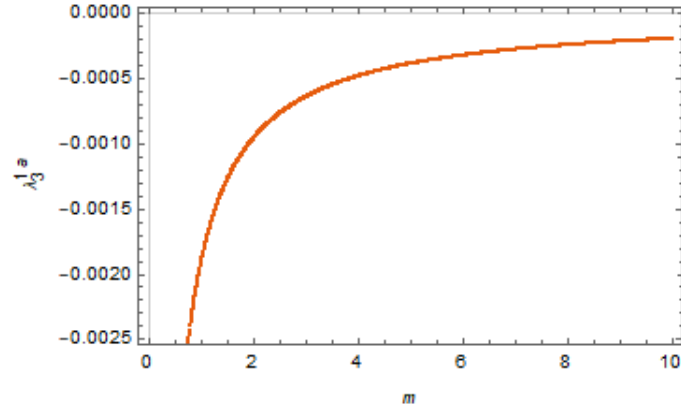
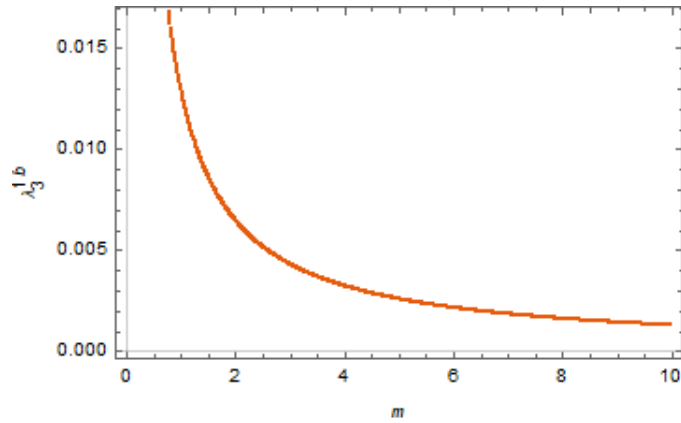


Figura 3.49: Gráfica de la función $\lambda_2^{(1a)}$

Figura 3.50: Gráfica de la función $\lambda_2^{(1b)}$ Figura 3.51: Gráfica de la función $\lambda_3^{(1a)}$ Figura 3.52: Gráfica de la función $\lambda_3^{(1b)}$

En estas gráficas podemos notar que las funciones λ_2 y $\lambda_3^{(1b)}$ presentan un gran crecimiento en el infrarrojo. Las funciones τ presentan divergencias no renormalizable cuando tomamos $p_3 = 0$.

Capítulo 4

Vértice de Tres gluones

En el capítulo anterior estudiamos el vértice quark-gluón y, como se ve en la figura 3.3, notamos que en este cálculo está involucrado el vértice de tres gluones, en los cálculos posteriores notamos que la generación dinámica de masa es producida principalmente por este diagrama, motivo por el que es de gran importancia entender a detalle este vértice. En este capítulo nos dedicaremos a estudiar este vértice.

A nivel árbol el vértice de tres gluones es,

$$-igf^{a_1 a_2 a_3} [g_{\nu\mu}(p_1 - p_2)_\alpha + g_{\mu\alpha}(p_2 - p_3)_\nu + g_{\alpha\nu}(p_3 - p_1)_\mu], \quad (4.1)$$

con, p_i los momentos de los gluones, al ser todos gluones entrantes se debe cumplir $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, por su parte, los factores $f^{a_1 a_2 a_3}$ son las estructuras de color totalmente antisimétricas correspondientes a la representación adjunta del grupo de gauge. Podemos extraer estos factores de la expresión general del vértice definiendo,

$$\Gamma_{\nu\mu\alpha}^{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3) = -igf^{a_1 a_2 a_3} \Gamma_{\nu\mu\alpha}, \quad (4.2)$$

ya que los gluones son bosones y las estructuras $f^{a_1 a_2 a_3}$ son antisimétricas, el término $\Gamma_{\nu\mu\alpha}$ también debe ser antisimétrico ante el intercambio de un par de momentos y su correspondiente índice de Lorentz. A nivel árbol el propagador del gluón es,

$$\frac{\delta^{a_1 a_2}}{p^2} \left(g_{\nu\mu} - \xi \frac{p_\nu p_\mu}{p^2} \right), \quad (4.3)$$

donde ξ es el término de norma, $\xi = 0$ corresponde a la norma de Feynman y $\xi = 1$ es llamada norma de Landau.

Podemos descomponer el vértice como se hace en [24],

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\mu\alpha}(p_1, p_2, p_3) = & A(p_1^2, p_2^2; p_3^2) g_{\nu\mu}(p_1 - p_2)_\alpha + B(p_1^2, p_2^2; p_3^2) g_{\nu\mu}(p_1 + p_2)_\alpha \\ & - C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) ((p_1 p_2) g_{\nu\mu} - p_{1\mu} p_{2\nu} (p_1 - p_2)_\alpha) \\ & + \frac{1}{3} S(p_1^2, p_2^2; p_3^2) (p_{1\alpha} p_{2\nu} p_{3\mu} + p_{1\mu} p_{2\alpha} p_{3\nu}) \\ & + F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) ((p_1 p_2) g_{\nu\mu} - p_{1\mu} p_{2\nu}) (p_{1\alpha} (p_2 p_3) - p_{2\alpha} (p_1 p_3)) \\ & + H(p_1^2, p_2^2; p_3^2) [-g_{\nu\mu} (p_{1\alpha} (p_2 p_3) - p_{2\alpha} (p_1 p_3)) + \frac{1}{3} (p_{1\alpha} p_{2\nu} p_{3\mu} - p_{1\mu} p_{2\alpha} p_{3\nu})] \\ & + \{\text{Permutaciones cíclicas de } (p_1, \nu), (p_2, \mu), (p_3, \alpha)\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

En la expresión anterior, A , C y F son funciones simétricas en los dos primeros argumentos, la función H es totalmente simétrica, la función B es antisimétrica en los primeros dos argumentos y la función S es antisimétrica ante el intercambio de cualquier par de argumentos. Adicionalmente, las

funciones F y H son totalmente transversas, es decir que se anulan al hacer la contracción con $p_{1\nu}$, $p_{2\mu}$, $p_{3\alpha}$.

La forma explicita de las funciones escalares A , B , C , S , F y H se puede encontrar en las ecuaciones (3.10)-(3.15) de [13] donde,

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \quad (4.5)$$

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{4}((p_1^2)^2 + (p_2^2)^2 + (p_3^2)^2 - 2p_1^2 p_2^2 - 2p_1^2 p_3^2 - p_2^2 p_3^2). \quad (4.6)$$

Adicional eso, denotaremos a la integral correspondiente al diagrama triangular como,

$$J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \equiv \int \frac{d^n q}{((k-q)^2)^{\nu_1} ((p+q)^2)^{\nu_2} (q^2)^{\nu_3}}, \quad (4.7)$$

donde $n = 4 - 2\varepsilon$ corresponde a la dimensión del espacio-tiempo. Cabe señalar que todas las integrales que aparecen en el presente cálculo se pueden reducir algebraicamente a una integral no trivial,

$$J(1, 1, 1) = i\pi^{n/2} \eta \varphi(p^2, k^2), \quad (4.8)$$

donde $\varphi(p^2, k^2) \equiv \varphi$ es una función totalmente simétrica que puede ser expresada como,

$$\kappa(p_i^2) \equiv \kappa_i = -\frac{2}{(n-3)(n-4)} (-p_i^2)^{(n-4)/2} = \frac{1}{\varepsilon(1-2\varepsilon)} (-p_i^2)^{-\varepsilon}, \quad (4.9)$$

por su parte η se define como en la ecuación 3.6,

$$\eta = \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(n-3)} \Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(1+\varepsilon),$$

con esto en mente podemos proceder con el análisis del vértice de tres gluones.

4.0.1. La Base de Davydychev

Usamos la descomposición del vértice propuesta por Davydychev[13],

$$\Gamma^{\nu\mu\alpha}(p_1, p_2, p_3) = \sum_i^{14} Z_i \tau_i^{\nu\mu\alpha}, \quad (4.10)$$

al expresar p_1 en términos de los otros dos momentos ($p_1 = -p_2 - p_3$), podemos reescribir el vértice como,

$$\begin{aligned} \Gamma^{\nu\mu\alpha}(p_1, p_2, p_3) = & g^{\nu\mu} p_1^\alpha Z_1 + g^{\nu\alpha} p_1^\mu Z_2 + g^{\mu\alpha} p_1^\nu Z_3 \\ & + g^{\nu\mu} p_2^\alpha Z_4 + g^{\nu\alpha} p_2^\mu Z_5 + g^{\mu\alpha} p_2^\nu Z_6 \\ & + p_1^\nu p_1^\mu p_1^\alpha Z_7 + p_2^\nu p_2^\mu p_2^\alpha Z_8 \\ & + p_1^\nu p_1^\mu p_2^\alpha Z_9 + p_1^\nu p_2^\mu p_1^\alpha Z_{10} + p_2^\nu p_1^\mu p_1^\alpha Z_{11} \\ & + p_1^\nu p_2^\mu p_2^\alpha Z_{12} + p_2^\nu p_1^\mu p_2^\alpha Z_{13} + p_2^\nu p_2^\mu p_1^\alpha Z_{14}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

comparando las ecuaciones (4.10) y (4.11) obtenemos la forma explícita de $\tau_i^{\nu\mu\alpha}$. A diferencia de la expresión del vértice en la base de Ball y Chiu (BC), en la base de Davydychev el vértice no queda separado en una parte longitudinal y una transversal, no obstante esta base nos permite analizar a mayor profundidad las estructuras involucradas en los cálculos. Otra importante ventaja del vértice en la base de Davydychev es que las estructuras que componen el vértice están calculadas a un lazo en

norma y dimensión arbitrarias, lo que nos permite hacer un análisis numérico de dichas estructuras. A continuación presentamos la forma de pasar de la base de BC a la de Davydychev,

$$\begin{aligned}
Z_1 &= A(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - (p_1 p_2) C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + B(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + (p_1 p_2)(p_2 p_3) F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - (p_2 p_3) H, \\
Z_2 &= -2A(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + 2(p_1 p_3) C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + p_2^2 (p_1 p_3) F(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - p_2^2 H, \\
Z_3 &= A(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - (p_2 p_3) C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - B(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + (p_1 p_2)(p_2 p_3) F(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - (p_1 p_2) H, \\
Z_4 &= -A(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + (p_1 p_2) C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + B(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - (p_1 p_2)(p_1 p_3) F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + (p_1 p_3) H, \\
Z_5 &= -A(p_3, p_1; p_2^2) + (p_1 p_3) C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - B(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - (p_1 p_2)(p_1 p_3) F(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + (p_1 p_2) H, \\
Z_6 &= 2A(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - 2(p_2 p_3) C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - p_1^2 (p_2 p_3) F(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + p_1^2 H \\
Z_7 &= 2C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + p_2^2 F(p_3^2, p_1^2; p_2^2), \\
Z_8 &= -2C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) - p_1^2 F(p_2^2, p_3^2; p_1^2), \\
Z_9 &= -C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + (p_1 p_2) F(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + H - S, \\
Z_{10} &= C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - (p_1 p_2) F(p_3^2, p_1^2; p_2^2), \\
Z_{11} &= C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + 2C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - (p_2 p_3) F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + p_2^2 F(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - H - S, \\
Z_{12} &= -C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + (p_1 p_2) F(p_2^2, p_3^2; p_1^2), \\
Z_{13} &= -C(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - 2C(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + (p_1 p_3) F(p_1^2, p_2^2; p_3^2) - p_1^2 F(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + H - S, \\
Z_{14} &= C(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - (p_1 p_2) F(p_3^2, p_1^2; p_2^2) - H - S,
\end{aligned}$$

con esto y la forma explícita de las funciones escalares dadas en [13] podemos calcular la forma explícita de las funciones Z_i .

4.0.2. Base de Aguilar

Aguilar[25] presenta una tercera base para representar el vértice de tres gluones, en esta nueva base el vértice se representa de la forma,

$$\Gamma^{\alpha\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) = \Gamma_L^{\alpha\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) + \Gamma_T^{\alpha\mu\nu}(p_1, p_2, p_3), \quad (4.12)$$

donde, $\Gamma_L^{\alpha\mu\nu}(p_1, p_2, p_3)$ es la parte longitudinal del vértice y $\Gamma_T^{\alpha\mu\nu}(p_1, p_2, p_3)$ es la parte transversa del mismo. Para determinar la forma tensorial exacta hacemos uso de la base simétrica de Bose introducida en la referencia [24], de esta forma,

$$\Gamma_L^{\alpha\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=1}^{10} X_i(p_1, p_2, p_3) \ell_i^{\alpha\mu\nu}, \quad (4.13)$$

donde los tensores $\ell_i^{\alpha\mu\nu}$ están dados por,

$$\begin{aligned}
\ell_1^{\alpha\mu\nu} &= (p - k)^\nu g^{\alpha\mu}, \\
\ell_2^{\alpha\mu\nu} &= -q^\nu g^{\alpha\mu}, \\
\ell_3^{\alpha\mu\nu} &= (p - k)^\nu [p^\mu k^\alpha - (p \cdot k) g^{\alpha\mu}], \\
\ell_4^{\alpha\mu\nu} &= (k - q)^\alpha g^{\mu\nu}, \\
\ell_5^{\alpha\mu\nu} &= -p^\alpha g^{\mu\nu}, \\
\ell_6^{\alpha\mu\nu} &= (k - q)^\alpha [k^\nu q^\mu - (k \cdot q) g^{\mu\nu}], \\
\ell_7^{\alpha\mu\nu} &= (q - p)^\mu g^{\alpha\nu}, \\
\ell_8^{\alpha\mu\nu} &= -k^\mu g^{\alpha\nu}, \\
\ell_9^{\alpha\mu\nu} &= (q - p)^\mu [q^\alpha p^\nu - (q \cdot p) g^{\alpha\nu}], \\
\ell_{10}^{\alpha\mu\nu} &= p^\nu k^\alpha q^\mu + p^\mu k^\nu q^\alpha,
\end{aligned}$$

por otro lado la parte transversa se escribe como,

$$\Gamma_L^{\alpha\mu\nu}(p, k, q) = \sum_{i=1}^4 Y_i(p, k, q) t_i^{\alpha\mu\nu}, \quad (4.14)$$

donde,

$$\begin{aligned} t_1^{\alpha\mu\nu} &= [(p \cdot k)g^{\alpha\mu} - p^\mu k^\alpha][(k \cdot q)p^\nu - (p \cdot q)k^\nu], \\ t_2^{\alpha\mu\nu} &= [(k \cdot q)g^{\mu\nu} - k^\nu q^\mu][(q \cdot p)k^\alpha - (k \cdot p)q^\alpha], \\ t_3^{\alpha\mu\nu} &= [(q \cdot p)g^{\nu\alpha} - q^\alpha p^\nu][(p \cdot k)q^\mu - (q \cdot k)p^\mu], \\ t_4^{\alpha\mu\nu} &= g^{\mu\nu}[(k \cdot p)q^\alpha - (q \cdot p)k^\alpha] + g^{\nu\alpha}[(q \cdot k)p^\mu \\ &\quad - (p \cdot k)q^\mu] + g^{\alpha\mu}[(p \cdot q)k^\nu - (k \cdot q)p^\nu] \\ &\quad + k^\alpha q^\mu p^\nu - q^\alpha p^\mu k^\nu. \end{aligned}$$

La simetría de Bose aplicada a los tres gluones requiere que Γ_L cambie de signo ante el intercambio de los índices de Lorentz y los respectivos momentos, esto nos lleva a las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} X_1(p, k, q) &= X_1(k, p, q), & X_2(p, k, q) &= -X_2(k, p, q) \\ X_3(p, k, q) &= X_3(k, p, q), & X_4(p, k, q) &= X_4(p, q, k), \\ X_5(p, k, q) &= -X_5(p, q, k), & X_6(p, k, q) &= X_6(p, q, k), \\ X_7(p, k, q) &= X_7(q, k, p), & X_8(p, k, q) &= -X_8(q, k, p), \\ X_9(p, k, q) &= X_9(q, k, p), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} X_{10}(p, k, q) &= -X_{10}(k, p, q), & X_{10}(p, k, q) &= -X_{10}(p, q, k), \\ X_{10}(p, k, q) &= -X_{10}(q, k, p). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Adicional a estas relaciones tenemos,

$$\begin{aligned} X_4(p, k, q) &= X_1(k, q, p), & X_5(p, k, q) &= X_2(k, q, p), \\ X_6(p, k, q) &= X_3(k, q, p), & X_7(p, k, q) &= X_1(q, p, k), \\ X_8(p, k, q) &= X_2(q, p, k), & X_9(p, k, q) &= X_3(q, p, k), \end{aligned}$$

podemos cambiar de la base de Davydychev a la base de Aguilar de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{4} \left[-((pq) + (pk))(Z_{10} - Z_{12} - Z_{14} + Z_9) + 2(qk)Z_8 - 2Z_6 \right] \\
X_2 &= \frac{1}{4} (((pq) - (pk))(Z_{10} - Z_{12} - Z_{14} + Z_9) + 2(qk)(2Z_{12} - Z_8) - 4Z_3 + 2Z_6) \\
X_3 &= \frac{(pq)Z_{12} + (pk)(Z_{12} - Z_8)}{(pq) - (pk)} \\
X_4 &= \frac{1}{4} (2((pk)(-Z_{10} - Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14} + Z_7 - Z_8 - Z_9) - Z_1 + Z_4) \\
&\quad + q^2(Z_{10} - Z_{12} - Z_{14} + Z_9)) \\
X_5 &= \frac{1}{4} (2(pk)(Z_{10} + Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} - Z_{14} - Z_7 - Z_8 - Z_9) + (q^2 + 2(qk)) \left[Z_{10} \right. \\
&\quad \left. - Z_{12} - Z_{14} + Z_9 \right] + 2(Z_1 + Z_4)) \\
X_6 &= \frac{1}{(q^2 + 2(qk))} q^2(Z_{10} + Z_{11} - Z_{14} - Z_7) \\
&\quad + (qk)(Z_{10} + Z_{11} - Z_{12} - Z_{13} - Z_{14} - Z_7 + Z_8 + Z_9) \\
X_7 &= \frac{1}{4} \left[-2(pq)Z_7 + k^2 \left(Z_{10} - Z_{12} - Z_{14} + Z_9 \right) + 2Z_2 \right] \\
X_8 &= \frac{1}{4} \left[(pq)(4Z_{10} - 2Z_7) - (2(qk) + k^2)(Z_{10} - Z_{12} - Z_{14} + Z_9) + 2(Z_2 - 2Z_5) \right] \\
X_9 &= \frac{(k^2 Z_{10} - Z_7((qk) + k^2))}{(2(qk) + k^2)} \\
X_{10} &= \frac{1}{2} (Z_{10} + Z_{12} - Z_{14} - Z_9) \\
Y_1 &= \frac{(Z_8 - 2Z_{12})}{((pk) - (pq))} \\
Y_2 &= \frac{(Z_{10} + Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} - Z_{14} - Z_7 - Z_8 - Z_9)}{(q^2 + 2(qk))} \\
Y_3 &= \frac{(Z_7 - 2Z_{10})}{(2(qk) + k^2)} \\
Y_4 &= \frac{1}{2} (-Z_{10} + Z_{12} + Z_{14} - Z_9)
\end{aligned}$$

De esté modo tenemos expresado el vértice en la base de Aguilar, una de las bases mas utilizadas tanto en el formalismo de las ecuaciones de Schwinger-Dyson como en de Lattice. Una de las principales ventajas de esta base es que nos permite hacer una comparación numérica con otros métodos y en diferentes normas.

4.0.3. Resultados Numéricos

En está sección realizaremos un análisis numérico utilizando las tres bases previas. Otro aspecto a tener en cuenta es que aplicaremos los resultados de Davydychev en norma y dimensión arbitraria al límite simétrico,

$$p_i^2 = Q^2, \quad (4.17)$$

En esté caso tenemos, $(p_1 p_2) = (p_1 p_3) = (p_2 p_3) = -\frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} M^2$, al hacer estas consideraciones el vértice se simplifica considerablemente. Primeramente debido a que por la antisimetría, las funciones

B y S deben anularse en la base de BC,

$$B(Q^2, Q^2; Q^2) = S(Q^2, Q^2; Q^2) \equiv 0. \quad (4.18)$$

Otra simplificación importante la encontramos en la base de Davydychev, pues en este límite el número de combinaciones tensoriales independientes se reduce a tres y pueden ser escritos, en la notación usada en [26], como,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\mu\alpha}(p_1, p_2, p_3) = & G_0(p^2)[g_{\nu\mu}(p-k)_\alpha + g_{\mu\alpha}(k-q)_\nu + g_{\alpha\nu}(q-p)_\mu] - G_1(p^2)(k-q)_\nu(q-p)_\mu(p-k)_\alpha \\ & + G_2(p^2)(p_\alpha k_\nu q_\mu - p_\mu k_\alpha q_\nu), \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde las funciones G_i vienen dadas por,

$$\begin{aligned} G_0(Q^2) &= A(Q^2) + \frac{1}{2}Q^2 C(Q^2) + \frac{1}{4}Q^4 F(Q^2) + \frac{1}{2}Q^2 H(Q^2), \\ G_1(Q^2) &= C(Q^2) + \frac{1}{2}Q^2 F(Q^2), \\ G_2(Q^2) &= C(Q^2) + \frac{1}{2}Q^2 F(Q^2) + H(Q^2). \end{aligned}$$

Podemos notar que estas tres expresiones se relacionan entre si de la forma,

$$\begin{aligned} G_2(Q^2) &= G_1(Q^2) + H(Q^2), \\ G_0(Q^2) &= A(Q^2) + \frac{1}{2}Q^2 G_2(Q^2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

De acuerdo a [13], en el límite simétrico para una norma y dimensión arbitrarias las funciones G_i toman la forma,

$$\begin{aligned} G_0^{(1,\xi)}(Q^2) = & \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{n/2}} C_A \frac{1}{288} \left\{ Q^2 \varphi(Q^2) \left[8 + 12\xi(14n-51) + 6\xi^2(n^2-18n+60) \right. \right. \\ & \left. \left. - \xi^3(n-4)(n-12) \right] - 6\kappa \left[32 + 36\xi(2n-7) + 6\xi^2(n-4)(n-6) - \xi^3(n-4)(n-3) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} G_1^{(1,\xi)}(Q^2) = & -\frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{n/2}} C_A \frac{1}{3456 Q^2} \left\{ Q^2 \varphi(Q^2) \left[64(n-20) - 144\xi(7n-26) - 24\xi^2(n^2-18n+50) \right. \right. \\ & \left. \left. + \xi^3(n^3-24n^2+200n-384) \right] - 6\kappa \frac{n-4}{n-1} \left[64(n-2) - 144\xi(n-1) - 12\xi^2(n-1)(2n-7) \right. \right. \\ & \left. \left. + \xi^3(n-1)(n-3)(n-20) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} G_2^{(1,\xi)}(Q^2) = & \frac{g^2 \eta}{(4\pi)^{n/2}} C_A \frac{1}{144 Q^2} \left\{ Q^2 \varphi(Q^2) \left[128 + 6\xi(29n-114) + 6\xi^2(n^2-18n+60) \right. \right. \\ & \left. \left. - \xi^3(n-4)(n-12) \right] - 6\kappa \frac{n-4}{n-1} \left[8 + 30\xi(n-1) + 6\xi^2(n-1)(n-5) - \xi^3(n-1)(n-3) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

las integrales en esta configuración se pueden evaluar en términos de las funciones de Clausen,

$$J_1(1, 1, 1) \Big|_{n=4, Q^2=-\mu^2} = -\frac{i\pi^2}{\mu^2\sqrt{3}} \left\{ 2\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3} + 2\theta_{s1}\right) + \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta_{s1}\right) + \text{Cl}_2(\pi - 2\theta_{s1}) \right\}, \quad (4.24)$$

$$J_2(1, 1, 1) \Big|_{n=4, Q^2=-\mu^2} = -\frac{2i\pi^2}{\mu^2\sqrt{3}} \left\{ 2\text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3} + 2\theta_{s2}\right) + \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta_{s2}\right) \right\}, \quad (4.25)$$

donde,

$$\tan \theta_{s1} = \frac{\mu^2 + 2m^2}{\mu^2\sqrt{3}}, \quad \tan \theta_{s2} = \sqrt{\frac{\mu^2 + 4m^2}{3\mu^2}}. \quad (4.26)$$

En el límite sin masa ($m = 0$) tenemos $\theta_{s1} = \theta_{s2} = \pi/6$ y como $\text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$, verificamos la identidad [26],

$$J_0(1, 1, 1) \Big|_{n=4, p_i^2=-\mu^2} = -\frac{4i\pi^2}{\mu^2\sqrt{3}} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right). \quad (4.27)$$

Con lo discutido anteriormente podemos proceder al análisis numérico, usando $\alpha = 0.118$ y el parámetro de renormalización $\mu = 4.3$, podemos graficar los tres factores de forma del vértice en la norma de Landau (Figura 4.1). Para estas G_i no hay resultados numéricos obtenidos por otros métodos,

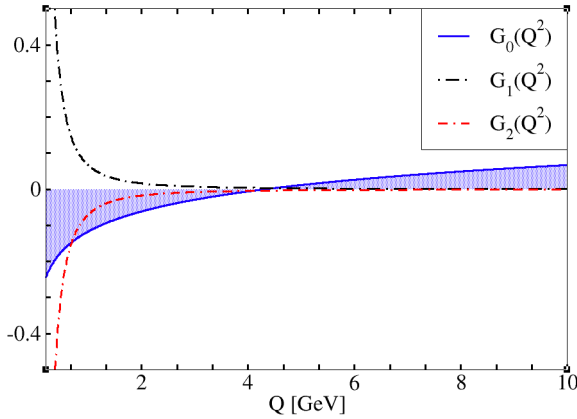


Figura 4.1: Los tres factores de forma de las ecuaciones (4.21), (4.23) y (4.24) del vértice de tres gluones en la norma de Landau alrededor del punto de renormalización $\mu = 4.3 \text{ GeV}$.

sin embargo, si los hay para la base presentada en [25]. Como se menciono anteriormente se puede relacionar las G 's con las estructuras presentes en la base de Aguilar. La relación entre las G 's y las X 's e Y 's introducidas en las ecuaciones (4.13) y (4.14) viene dada por,

$$X_1(Q) = \frac{G_2(Q^2)Q^2}{2} - G_0(Q^2), \quad (4.28)$$

$$X_3(Q) = G_1(Q^2), \quad (4.29)$$

$$Y_4(Q) = -G_1(Q^2) - G_2(Q^2). \quad (4.30)$$

Podemos notar que X_2, X_5, X_8 y X_{10} deben ser cero debido a su naturaleza antisimétrica y las simetrías de Bose discutidas en la sección anterior. Adicionalmente podemos comprobar las siguientes relaciones,

$$X_1(Q) = X_4(Q) = X_7(Q), \quad (4.31)$$

$$X_3(Q) = X_6(Q) = X_9(Q). \quad (4.32)$$

La forma explícita de los componentes nulos de la base de Aguilar en norma arbitraria es,

$$X_1(Q) = \frac{CAg^2\eta}{576\pi^2} \left\{ 3(9\xi + 8) \ln(\mu^2) + 3\xi(\xi(\xi + 6) - 30) + \varphi(Q^2)(3\mu^2(5 - 2\xi) + (6\xi^2 + 9\xi + 17)Q^2) - 3(9\xi + 8) \ln(Q^2) - 8 \right\}, \quad (4.33)$$

$$X_3(Q) = -\frac{CAg^2\eta}{3456\pi^2 Q^2} \left\{ 12\xi^3 + 9\xi^2 + 108\xi + (6\xi^3 + 9\xi^2 - 18\xi - 64)Q^2\varphi(Q^2) - 32 \right\}, \quad (4.34)$$

$$Y_4(Q) = \frac{CAg^2\eta}{3456\pi^2 Q^2} \left\{ 3\xi(\xi(10\xi + 39) - 144) + (6\xi^3 + 45\xi^2 + 128)Q^2\varphi(Q^2) - 80 \right\}, \quad (4.35)$$

en la norma de Landau estas expresiones se reducen a,

$$X_1(Q) = \frac{CAg^2\eta}{576\pi^2} \left\{ 51 \ln(\mu^2) + (9\mu^2 + 32p^2)\varphi(Q^2) - 51 \ln(Q^2) - 77 \right\}, \quad (4.36)$$

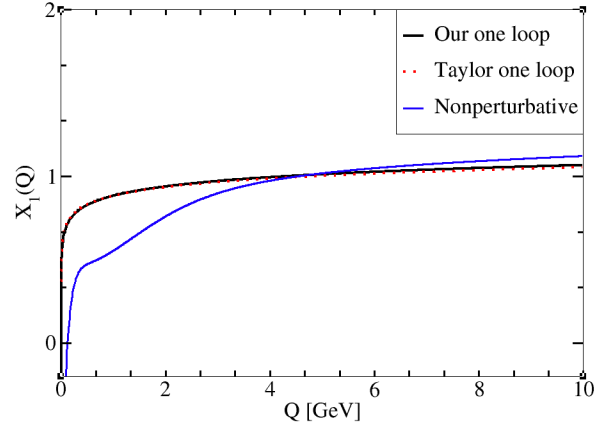


Figura 4.2: $X_1(Q)$ en la norma de Landau comparado con los resultados de [27]. Las curvas azul y negra fueron calculadas usando $\alpha = 0.22$, mientras que la nuestra se hizo con $\alpha = 0.118$.

$$X_3(Q) = -\frac{CAg^2\eta}{3456\pi^2Q^2}(97 - 67Q^2\varphi(Q^2)), \quad (4.37)$$

$$Y_4(Q) = \frac{CAg^2\eta}{3456\pi^2Q^2}\{179Q^2\varphi(Q^2) - 365\}. \quad (4.38)$$

En la Figura 4.2 se presenta la gráfica correspondiente a la expresión de $X_1(Q)$ y se comparan los resultados con los obtenidos en [27] usando una construcción Ball-Chiu no perturbativa del vértice de tres gluones y el resultado a un lazo usando una renormalización de Taylor.

Podemos construir una combinación de las estructuras no nulas del vértice como en [25] y [27],

$$L_{sym}(Q) = X_1(Q) - \frac{Q^2}{2}X_3(Q) + \frac{Q^4}{4}Y_1(Q) - \frac{Q^2}{2}Y_4(Q), \quad (4.39)$$

en la Figura 4.2 se presenta la gráfica de la ecuación (4.39) en dos diferentes métodos de renormalización a un lazo.

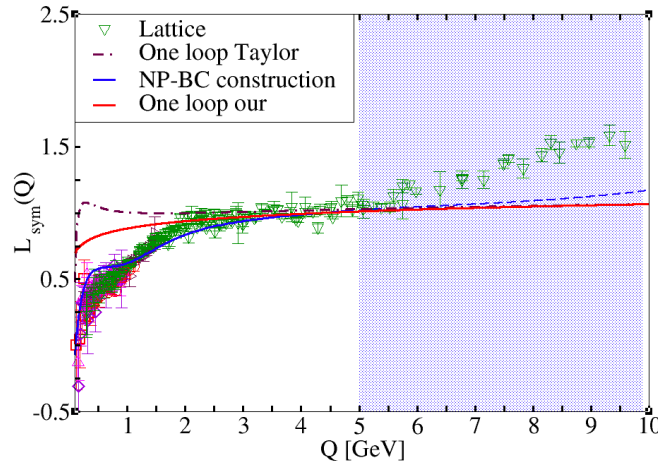


Figura 4.3: $L_{Sym}(Q)$ de la ecuación (4.39) comparado diferentes esquemas de renormalización, los resultados de Lattice se obtuvieron de obtenido de [27] y [28]. La franja azul indica resultados posteriores a $Q^2 = 5\text{GeV}$ (los resultados no perturbativos se reportan hasta antes de este valor. La línea azul fue obtenida de [25]

Es evidente que X_1 es la estructura que mas contribuye a L_{sym} puesto que,

$$-\frac{Q^2}{2}X_3(Q) + \frac{Q^4}{4}Y_1(Q) - \frac{Q^2}{2}Y_4(Q) = \frac{C_A g^2 \eta (77 - 41Q^2 \varphi(Q))}{1152\pi^2} \approx 0.0677265,$$

está última expresión se obtuvo con la norma de Landau. En la Figura 4.3 se muestra la gráfica de la ecuación (4.39) usando las normas de Landau y la de Yennie, también se comparan estos resultados con los obtenidos por [27] y [28].

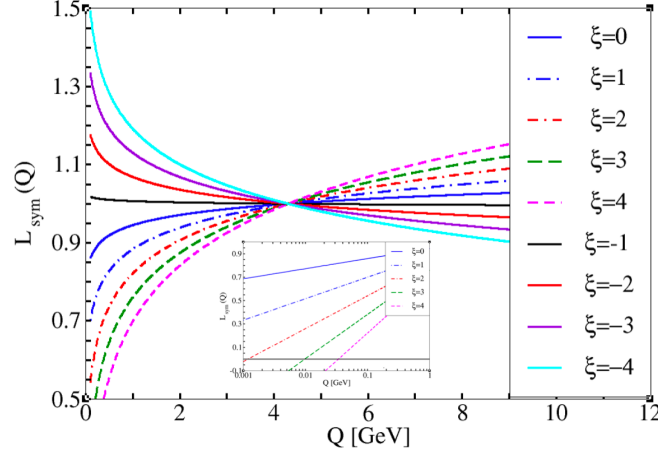


Figura 4.4: $L_{sym}(Q)$ en diferentes normas, hacemos mención especial de las normas de Yennie y Arbuzov ($\xi = -2$ y $\xi = -4$ respectivamente). El requerimiento de renormalización implica que en $\mu = 4.3 \text{ GeV}$, todas las curvas son igual a uno, en la parte inferior de la gráfica se muestra un acercamiento a $Q = 0$.

En la figura 4.4 presentamos una comparación entre diferentes normas, podemos notar que la norma de Feynman y las normas positivas crecen en el infrarrojo mientras que las normas negativas decrecen. En el acercamiento se puede apreciar que el valor en el que la curva se vuelve positiva incrementa conforme lo hace la norma.

Aunque el conjunto completo de diagramas invariantes de norma que representan el proceso físico son independientes de la norma, los diagramas individuales y la dificultad computacional dependen en gran medida de la selección de norma. Debido a sus atractivas propiedades en el infrarrojo, la norma de Yennie [15] ha probado ser efectiva para los cálculos de ajuste radiactivo de parámetros de estados ligados [29]. Una de las principales ventajas de la norma de Yennie por sobre otras normas covariantes es que describe mucho mejor el comportamiento infrarrojo de diagramas individuales, característica que comparte con la norma no covariante de Coulomb. Está propiedad es de especial ayuda en diagramas que son finitos en el infrarrojo al usar la norma de Yennie pero divergentes si usamos otra norma relativista (Feynman, Landau, etc.)

Consideramos el propagador del gluón como,

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = -i\delta^{a_1 a_2} \frac{(M^2)^{\gamma-1}}{(p^2)^\gamma} \left(g_{\mu\nu} - d(\gamma) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), \quad (4.40)$$

donde,

$$d(\gamma) = \frac{2\gamma}{2\gamma + 1 - d}, \quad (4.41)$$

en el caso particular $\gamma = 1$, la ecuación (4.40) corresponde a la norma de Soloviev–Yennie [30]. Por otro lado, cuando $\gamma = 2$ tenemos la norma de Arbuzov [31], [32], [33]. Bajo la condición $\gamma = 2$, la

transformada de Fourier del propagador ($D_{\mu\nu}^{ab}(x)$) es transversa, es decir, $D_{\mu\nu}^{ab}(x)x^\nu = 0$. Esta propiedad garantiza la cancelación de las principales singularidades infrarrojas [34]. La norma de Arbutov ha probado dar una descripción auto-consistente del nivel más bajo de la función de Green del gluón y el ghost (de otro modo uno necesita recurrir a un efecto no trivial de los ghost en las identidades de norma, que se usan para reconstruir los vértices de los gluones). En la Figura 4.5, se presenta la gráfica de nuestros resultados en la norma de Landau, Feynman, Yennie y Arbutov.

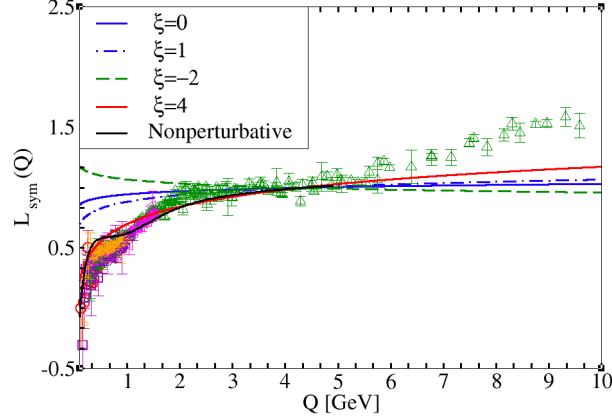


Figura 4.5: L_{sym} de la ecuación (4.39) comparado con datos de Lattice obtenidos de [27], [28] y otras aproximaciones usando una construcción no perturbativa de Ball-Chiu del vértice de tres gluones [25]. L_{sym} presenta un cero en la norma de Arbutov en $Q = 0.034$.

En la figura 4.6 presentamos una comparación directa entre nuestros resultados y el ajuste presentado en [25]. Se puede apreciar claramente que la norma de Arbutov ($\xi = 4$) es la que mejor se ajusta a los resultados en el infrarrojo, mientras que la norma de Yennie produce buenos resultados en el régimen ultravioleta. Pesé a haber sido calculado en el régimen perturbativo y extrapolado para momentos pequeños, nuestros resultados presentan la propiedad no perturbativa del cruce a cero del vértice de tres gluones. En la norma de Arbutov, el vértice presenta un cero en $Q = 0.034 \text{ GeV}$.

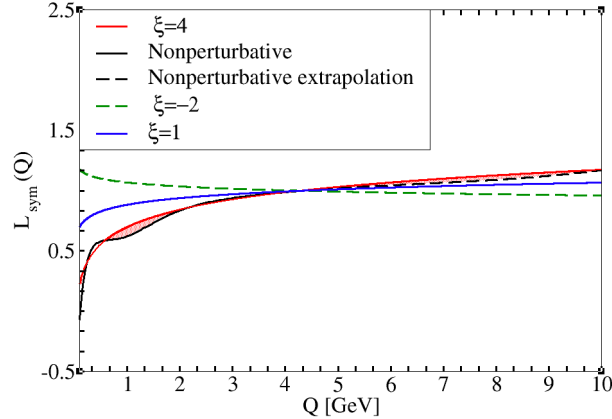


Figura 4.6: L_{Sym} en las normas de Landau, Yennie y Arbutov a un lazo comparadas con resultados no perturbativos. La línea negra corresponde a lo reportado en [25], no obstante, para un mejor análisis estos resultados se extrapolaron con una línea punteada.

Finalmente, la Figura 4.7 muestra los resultados de las ecuaciones de Schwinger-Dyson obtenidos en [35] y los resultados de Lattice para el vértice de tres gluones con degeneración planar [36] en el rango

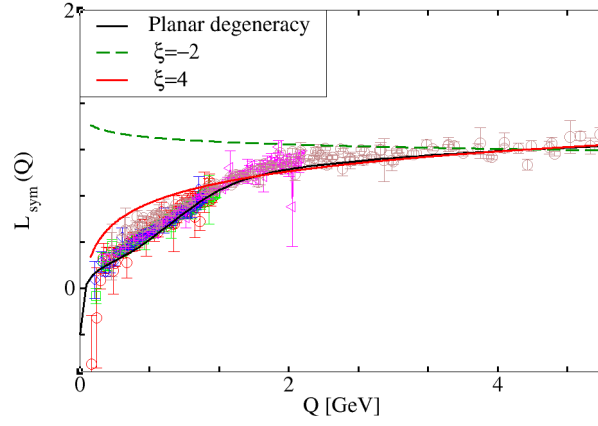


Figura 4.7: L_{Sym} en las normas de Arbuzov y Yennie a un lazo comparadas con el resultado de las SDE combinadas con degeneración planar [35].

$[0,5] \text{ GeV}$. En el contexto de la degeneración planar solo tenemos una variable ($s^2 = 1/2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$), lo que prácticamente determina los valores de forma asociados. Si analizamos el límite simétrico, notamos que $s^2 = 3Q^2/2$, de modo que podemos comparar nuestros resultados reportados por Aguilar de la siguiente manera,

$$\tilde{\Gamma}_1^{Sym}(Q^2) \approx \Gamma_{Sym}\left(\frac{3Q^2}{2}\right).$$

Debido a las propiedades infrarrojas de la norma de Arbuzov, resulta una buena aproximación para el vértice de tres gluones. Por otro lado, la norma de Yennie cancela las contribuciones de los ghost a un lazo, por lo que no es una buena alternativa en este régimen.

Capítulo 5

Conclusiones

El estudio del vértice de tres gluones (así como el vértice quark-gluón) es de suma importancia para entender la generación dinámica de masa, pese a esta importancia la complejidad de los cálculos es un factor atenuante para estudios más allá del nivel árbol. No obstante, existen herramientas que nos permiten simplificar dicho cálculo.

Al hacer la descomposición del vértice quark-gluón en las partes longitudinal y transversal podemos notar que los términos correspondientes a la parte no abeliana del proceso tienen un peso mayor en la generación dinámica de masa, tal como se esperaba. Por su parte, el vértice de tres gluones requirió un trato diferente, pues fue necesario el uso de tres bases diferentes para obtener expresiones que pudieran ser tratadas de manera numérica sin la presencia de divergencias no renormalizables. En adición a esto la norma de Yennie también puede ser de utilidad para aminorar la carga computacional requerida para los cálculos.

Apéndice A

Integrales Maestras

Como se menciona en la sección 2.3.1, las integrales maestras son de la forma

$$I_{nm} = \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{(k \cdot P)^n}{q^m},$$

estas integrales son de especial utilidad debido a su reiterada aparición en algunos cálculos de propagadores, de modo que se conocen los resultados de varias de estas integrales. A continuación enlistamos algunos de estos resultados en cuatro dimensiones.

$$I_{00} = \frac{\pi}{2} [\theta(P^2 - k^2) + \theta(k^2 - P^2)] \quad (\text{A.1})$$

$$I_{01} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{P^2} \theta(P^2 - k^2) + \frac{1}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$I_{02} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{1}{P^2} \theta(P^2 - k^2) + \frac{1}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right] \quad (\text{A.3})$$

$$I_{10} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$I_{11} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{k^2}{P^2} \theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right] \quad (\text{A.5})$$

$$I_{12} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{k^2}{P^2} \theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right] \quad (\text{A.6})$$

Algunos resultados análogos para tres dimensiones son

$$I_{00} = 2 \quad (\text{A.7})$$

$$I_{01} = \frac{1}{kP} \ln \left| \frac{k+P}{k-P} \right| \quad (\text{A.8})$$

Los resultados mencionados anteriormente se utilizan en el capítulo 2.

A.1. sumas de las I's.

En algunos otros cálculos también pueden aparecer las sumas de estas integrales, de modo que a continuación se ofrece una simplificación de algunas sumas presentes en el cuerpo de esta tesis.

$$\begin{aligned}
-2P^2k^2I_{02} + (k^2 + P^2)I_{12} &= -2P^2k^2\frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{1}{P^2}\theta(P^2 - k^2) + \frac{1}{k^2}\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&\quad + (k^2 + P^2)\frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{k^2}{P^2}\theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2}\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= -\frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} [-2k^2\theta(P^2 - k^2) + 2P^2\theta(k^2 - P^2)] \\
&\quad + \frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\left(\frac{k^4}{P^2} + k^2\right)\theta(P^2 - k^2) + \left(P^2 + \frac{P^4}{k^2}\right)\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[2k^2\theta(P^2 - k^2) - 2P^2\theta(k^2 - P^2) - \left(\frac{k^4}{P^2} + k^2\right)\theta(P^2 - k^2) \right. \\
&\quad \left. + \left(P^2 + \frac{P^4}{k^2}\right)\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[\left(k^2 - \frac{k^4}{P^2}\right)\theta(P^2 - k^2) + \left(-P^2 + \frac{P^4}{k^2}\right)\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[\frac{k^2}{P^2}(P^2 - k^2)\theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2}(P^2 - k^2)\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= -\frac{\pi}{2} \left[\frac{k^2}{P^2}\theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2}\theta(k^2 - P^2) \right]
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
-2P^2k^2I_{02} + (k^2 + P^2)I_{12} + 2I_{11} &= -\frac{\pi}{2} \left[\frac{k^2}{P^2}\theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2}\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&\quad + 2\frac{\pi}{4} \left[\frac{k^2}{P^2}\theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2}\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
P^2k^2I_{02} - P^2I_{12} &= P^2k^2\frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{1}{P^2}\theta(P^2 - k^2) + \frac{1}{k^2}\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&\quad - P^2\frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{k^2}{P^2}\theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2}\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[-k^2\theta(P^2 - k^2) + P^2\theta(k^2 - P^2) + k^2\theta(P^2 - k^2) - \frac{P^4}{k^2}\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2} \left[\left(P^2 - \frac{P^4}{k^2}\right)\theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2 - P^2}\frac{P^2}{k^2} (k^2 - P^2)\theta(k^2 - P^2) \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{P^2}{k^2}\theta(k^2 - P^2)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} - P^2 I_{02} &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{k^2}{P^2} \theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right] \\
&\quad - P^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{1}{P^2} \theta(P^2 - k^2) + \frac{1}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left[-\frac{k^2}{P^2} \theta(P^2 - k^2) + \frac{P^2}{k^2} \theta(k^2 - P^2) + \theta(P^2 - k^2) - \frac{P^2}{k^2} \theta(k^2 - P^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left(-\frac{k^2}{P^2} + 1 \right) \theta(P^2 - k^2) \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \frac{1}{P^2} (P^2 - k^2) \theta(P^2 - k^2) \\
&= -\frac{\pi}{2} \frac{1}{P^2} \theta(P^2 - k^2)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
k^2 I_{02} - I_{12} &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left[\frac{1}{P^2} \Theta(k^2 - P^2) - \frac{1}{\cancel{P^2}} \Theta(\cancel{P^2 - k^2}) \right] \\
&\quad - \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left[\frac{P^2}{k^2} \Theta(k^2 - P^2) - \frac{k^2}{\cancel{P^2}} \Theta(\cancel{P^2 - k^2}) \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2 - P^2} \left[\Theta(k^2 - P^2) - \frac{P^2}{k^2} \Theta(k^2 - P^2) \right] = \frac{\pi}{2k} \Theta(k^2 - P^2)
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Bibliografía

- [1] M. Tanabashi et al. «Review of Particle Physics». En: *Phys. Rev. D* 98.3 (2018), pág. 030001. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001.
- [2] John Clive Ward. «An Identity in Quantum Electrodynamics». En: *Phys. Rev.* 78 (1950), pág. 182. DOI: 10.1103/PhysRev.78.182.
- [3] H.S. Green. «A Pre-renormalized quantum electrodynamics». En: *Proc. Phys. Soc. A* 66 (1953), págs. 873-880. DOI: 10.1088/0370-1298/66/10/303.
- [4] Y. Takahashi. «On the generalized Ward identity». En: *Nuovo Cim.* 6 (1957), pág. 371. DOI: 10.1007/BF02832514.
- [5] James S. Ball y Ting-Wai Chiu. «Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. 1.» En: *Phys. Rev. D* 22 (1980), pág. 2542. DOI: 10.1103/PhysRevD.22.2542.
- [6] C.D. Roberts. «Hadron Properties and Dyson-Schwinger Equations». En: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 61 (2008). Ed. por Amand Faessler, págs. 50-65. DOI: 10.1016/j.ppnp.2007.12.034. arXiv: 0712.0633 [nucl-th].
- [7] M. Franz, Z. Tesanovic y O. Vafek. «QED(3) theory of pairing pseudogap in cuprates. 1. From D wave superconductor to antiferromagnet via 'algebraic' Fermi liquid». En: *Phys. Rev. B* 66 (2002), pág. 054535. DOI: 10.1103/PhysRevB.66.054535. arXiv: cond-mat/0203333.
- [8] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov y J.P. Carbotte. «AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics». En: *Int. J. Mod. Phys. B* 21 (2007), págs. 4611-4658. DOI: 10.1142/S0217979207038022. arXiv: 0706.3016 [cond-mat.mes-hall].
- [9] Walter Greiner y Joachim Reinhardt. *Field Quantization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996, págs. 372-373.
- [10] V.A. Miransky. «Dynamics of Spontaneous Chiral Symmetry Breaking and Continuum Limit in Quantum Electrodynamics». En: *Nuovo Cim. A* 90 (1985), págs. 149-170. DOI: 10.1007/BF02724229.
- [11] Andrei I. Davydychev, P. Osland y L. Saks. «Quark gluon vertex in arbitrary gauge and dimension». En: *Phys. Rev. D* 63 (2001), pág. 014022. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.014022. arXiv: hep-ph/0008171.
- [12] Gerard 't Hooft y M. J. G. Veltman. «Regularization and Renormalization of Gauge Fields». En: *Nucl. Phys. B* 44 (1972), págs. 189-213. DOI: 10.1016/0550-3213(72)90279-9.
- [13] Andrei I. Davydychev, P. Osland y O. V. Tarasov. «Three gluon vertex in arbitrary gauge and dimension». En: *Phys. Rev. D* 54 (1996). [Erratum: *Phys.Rev.D* 59, 109901 (1999)], págs. 4087-4113. DOI: 10.1103/PhysRevD.59.109901. arXiv: hep-ph/9605348.
- [14] T. Muta. *Foundations of quantum chromodynamics: An Introduction to perturbative methods in gauge theories*. Vol. 5. 1987.
- [15] H. M. Fried y D. R. Yennie. «New Techniques in the Lamb Shift Calculation». En: *Phys. Rev.* 112 (1958), págs. 1391-1404. DOI: 10.1103/PhysRev.112.1391.

- [16] E. E. Boos y Andrei I. Davydychev. «A Method of evaluating massive Feynman integrals». En: *Theor. Math. Phys.* 89 (1991), págs. 1052-1063. DOI: 10.1007/BF01016805.
- [17] G. S. Adkins, M. Lymberopoulos y D. D. Velkov. «One loop vertex function in Yennie gauge QED». En: *Phys. Rev. D* 50 (1994), págs. 4194-4200. DOI: 10.1103/PhysRevD.50.4194.
- [18] A. A. Slavnov. «Ward Identities in Gauge Theories». En: *Theor. Math. Phys.* 10 (1972), págs. 99-107. DOI: 10.1007/BF01090719.
- [19] J. C. Taylor. «Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field». En: *Nucl. Phys. B* 33 (1971), págs. 436-444. DOI: 10.1016/0550-3213(71)90297-5.
- [20] P. Pascual y R. Tarrach. «Slavnov-Taylor Identities in Weinberg's Renormalization Scheme». En: *Nucl. Phys. B* 174 (1980). [Erratum: Nucl.Phys.B 181, 546 (1981)], pág. 123. DOI: 10.1016/0550-3213(80)90193-5.
- [21] William J. Marciano y Heinz Pagels. «Quantum Chromodynamics: A Review». En: *Phys. Rept.* 36 (1978), pág. 137. DOI: 10.1016/0370-1573(78)90208-9.
- [22] A. Kizilersu, M. Reenders y M. R. Pennington. «One loop QED vertex in any covariant gauge: Its complete analytic form». En: *Phys. Rev. D* 52 (1995), págs. 1242-1259. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.1242. arXiv: hep-ph/9503238.
- [23] T. Huber y Daniel Maitre. «HypExp: A Mathematica package for expanding hypergeometric functions around integer-valued parameters». En: *Comput. Phys. Commun.* 175 (2006), págs. 122-144. DOI: 10.1016/j.cpc.2006.01.007. arXiv: hep-ph/0507094.
- [24] James S. Ball y Ting-Wai Chiu. «Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. 2.» En: *Phys. Rev. D* 22 (1980). [Erratum: Phys.Rev.D 23, 3085 (1981)], pág. 2550. DOI: 10.1103/PhysRevD.22.2550.
- [25] A. C. Aguilar et al. «Nonperturbative Ball-Chiu construction of the three-gluon vertex». En: *Phys. Rev. D* 99.9 (2019), pág. 094010. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.094010. arXiv: 1903.01184 [hep-ph].
- [26] William Celmaster y Richard J. Gonsalves. «The Renormalization Prescription Dependence of the QCD Coupling Constant». En: *Phys. Rev. D* 20 (1979), pág. 1420. DOI: 10.1103/PhysRevD.20.1420.
- [27] A. C. Aguilar et al. «Infrared facets of the three-gluon vertex». En: *Phys. Lett. B* 818 (2021), pág. 136352. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136352. arXiv: 2102.04959 [hep-ph].
- [28] A. Athenodorou et al. «On the zero crossing of the three-gluon vertex». En: *Phys. Lett. B* 761 (2016), págs. 444-449. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.08.065. arXiv: 1607.01278 [hep-ph].
- [29] J. R. Sapirstein, E. A. Terray y D. R. Yennie. «Radiative Recoil Corrections to Muonium and Positronium Hyperfine Splitting». En: *Phys. Rev. D* 29 (1984), pág. 2290. DOI: 10.1103/PhysRevD.29.2290.
- [30] D. R. Yennie, Steven C. Frautschi y H. Suura. «The infrared divergence phenomena and high-energy processes». En: *Annals Phys.* 13 (1961), págs. 379-452. DOI: 10.1016/0003-4916(61)90151-8.
- [31] B. A. Arbuzov, E. E. Boos y S. S. Kurennoy. «Scale Solutions and Coupling Constant in Electrodynamics of Vector Particles». En: *Yad. Fiz.* 34 (1981), pág. 406.
- [32] B. A. Arbuzov, E. E. Boos y Andrei I. Davydychev. «Infrared Asymptotics of Gluon Green's Functions in Covariant Gauge». En: *Theor. Math. Phys.* 74 (1988), págs. 103-108. DOI: 10.1007/BF01886478.
- [33] B. A. Arbuzov. «QUANTUM CHROMODYNAMICS AT LARGE DISTANCES». En: *Sov. J. Part. Nucl.* 19 (1988), pág. 1.
- [34] Arbuzov. En: *Phys. Lett. B.* 125 (1983), pág. 497.

- [35] A. C. Aguilar et al. «Planar degeneracy of the three-gluon vertex». En: *Eur. Phys. J. C* 83.6 (2023), pág. 549. DOI: 10.1140/epjc/s10052-023-11732-3. arXiv: 2305.05704 [hep-ph].
- [36] F. Pinto-Gómez et al. «General kinematics three-gluon vertex in Landau-gauge from quenched-lattice QCD». En: *PoS LATTICE2022* (2023), pág. 382. DOI: 10.22323/1.430.0382.