UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

Facultad de Ingeniería

Coordinación de Investigación y Posgrado

Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES DEL APRENDIZAJE DE LAS ASÍNTOTAS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR CON EL USO DEL GEOGEBRA

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

GUSTAVO FRANCISCO ZÚÑIGA MIJANGOS G090211

DIRECTOR DE TESIS

Dr. HIPÓLITO HERNÁNDEZ PÉREZ

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS; SEPTIEMBRE DE 2021.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE INGENIERÍA C-I

Tuxtla Gutiérrez; Chiapas.
A 11 de agosto del 2021
Oficio FI. 01/1251/2021.

C. Gustavo Francisco Zúñiga Mijangos
Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa
Presente.

Por este medio comunico a usted, que se autoriza la impresión de su trabajo de tesis denominado: "Análisis de las dificultades del aprendizaje de las asíntotas en el nivel medio superior con el uso de GeoGebra" para que pueda continuar con los trámites de titulación para la obtención del Grado de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.
"Por la conciencia de la necesidad de servir"

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
DIRECCIÓN DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

Dr. José Alonso Figueroa Gallegos
Encargado de Dirección

C. c. p. Dra. Daisy Escobar Castillejos. Coordinadora de Investigación y Posgrado. - F.I.
Archivo Minutario.
DEC/aclr*

Código: FO-113-09-05
Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) **Gustavo Francisco Zúñiga Mijangos,** Autor (a) de la tesis bajo el título de **"Análisis de las dificultades del aprendizaje de las asíntotas en el nivel medio superior con el uso del Geogebra"**
presentada y aprobada en el año 2021 como requisito para obtener el título o gradode **Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa**, autorizo a laDirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a querealice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 20 días del mes de septiembre del año 2021.

Gustavo Francisco Zúñiga Mijangos

Boulevard Belisario Domínguez Km 1081, Sin Número. Terán. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. México. C.P.29050 Teléfono (961) 615 55 04 y (961) 615 13 21 www.biblioteca.unach.mx arturo.sanchez@unach.mx

INDICE

INTRODUCCIÓN

Este trabajo tiene como objetivo demostrar el impacto positivo que tiene el uso de TIC, en nuestro caso Geogebra en la enseñanza de matemáticas, particularmente en el tema de asíntotas, que se encuentra en el tema de funciones racionales del plan de estudios de 4º semestre de nivel medio superior en México (en la práctica se trabajó con un grupo de 5º semestre debido al tiempo, pero eso se ahondará más adelante en el trabajo).

Se eligió el tema de las asíntotas, por mi interés particular y las dificultades que pueden tener los estudiantes al graficar e interpretar las funciones racionales, y por lo tanto, las asíntotas, y suelen haber errores al momento de graficar.

El uso de herramientas tecnológicas se justifica bajo la hipótesis que se menciona en diversos estudios consultados, el cual es "el uso adecuado de TIC en la didáctica de las matemáticas puede tener resultados positivos"; por eso se decidió trabajar con el software Geogebra para la situación didáctica, por su accesibilidad y fácil manejo.

Durante los últimos 30 años, la tecnología ha jugado un papel importante en el desarrollo de varios campos en el mundo. El dominio de herramientas tecnológicas ya no solo se limita a unos pocos, sino que la mayor parte de la población puede tener acceso a ellas, y ahora con la pandemia de COVID 19 que azotó al mundo en este año 2020 será necesario que el individuo tenga conocimiento y dominio de estas. El campo de la educación no es la excepción, y tanto docentes como alumnos deben tener estas destrezas para lograr un aprendizaje más dinámico, interactivo, pero sobretodo, significativo.

A continuación se da una breve explicación del contenido de cada capítulo de la investigación: en el primer capítulo se trabaja la parte de la problemática de investigación, hasta los antecedentes de nuestra investigación.

En el segundo capítulo analizamos el marco teórico y metodológico con el que se trabajó fue la *socioepistemología*; y la metodología para la práctica, que fue la *ingeniería didáctica.*

El tercer capítulo constará de la planeación de la actividad, que se alinea con los objetivos planteados en el primer capítulo, y también se hablará un poco del contexto de la institución donde se realizó esta práctica.

El cuarto capítulo será el análisis *a posteriori*, que consiste en analizar la realidad tras la práctica, el descubrir si se cumplieron los objetivos esperados, o que otros fenómenos fuera de nuestro control pudieron haber sucedido. Finalmente se agregan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1. Problema de investigación

1.1. Planteamiento del problema

Debido a que es un tema que se ve casi al final del ciclo escolar, y tomando en cuenta las suspensiones de clases, en matemáticas IV del programa de estudios de para las generaciones 2017-2020 y subsecuentes de la Dirección General de Bachillerato (DGB) las asíntotas son poco conocidas por estudiantes del nivel medio superior en el cuarto semestre, al ser un tema ubicado casi al final del plan de estudios (en el Bloque III).

Por eso el particular interés en observar cómo los estudiantes aprenden un tema que está en su plan de estudios pero no lo ven en el semestre que corresponde (suponiendo que desconocen el tema). En la problematización de la investigación se recurre a la lectura y análisis de los antecedentes desde la parte histórica y epistemológica de las asíntotas.

1.2. Antecedentes

Si buscamos orígenes históricos de las asíntotas, no siempre se encontrarán como rectas que tienden a acercarse a una de las ramas de las curvas, sino que también como comportamientos que se extienden de manera infinita aunque no sean totalmente rectos.

El antecedente más antiguo citado en esta investigación se ubica en Menecmo, en torno al 350 a. C., que fue discípulo de Eudoxo y maestro de Aristóteles. Fue quien descubrió las secciones cónicas, elipse, parábola e hipérbola. Pero fue Apolonio de Pergámo (siglo III a. C), en su obra que "Las cónicas" en la cual demostró que dependiendo de la inclinación un plano que corta una sección cónica se pueden construir las curvas: círculo, parábola, elipse e hipérbola (las tres últimas llamadas "La triada de Menecmo" (García, 2014, pp. 2-4)

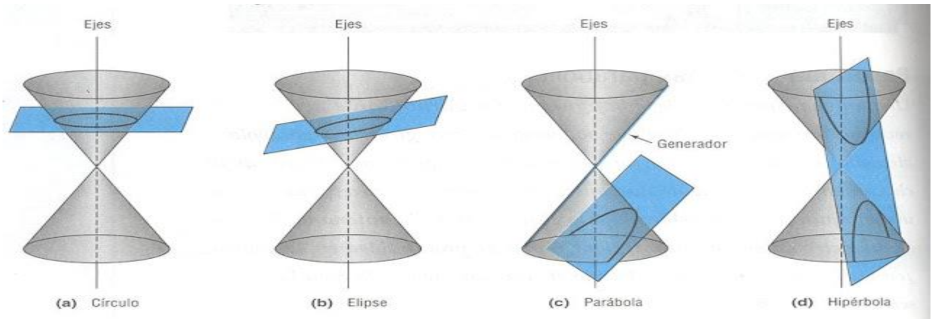


Fig. 1.2.1. Construcción de las secciones cónicas, elipses, parábolas e hipérbolas mediante el método de Menecmo y Apolonio.

Siendo la hipérbola la principal figura geométrica donde se ubican las asíntotas, y la más adoptada en el sistema educativo a nivel nacional, lo que mencionaremos más adelante. En el libro II es donde "estudia las propiedades de las asíntotas de la hipérbola. Caracteriza la asíntota OM por la distancia PM sobre la tangente, en función de OP y el parámetro correspondiente (figura 2)." (Tapia, 2002; p. 24).

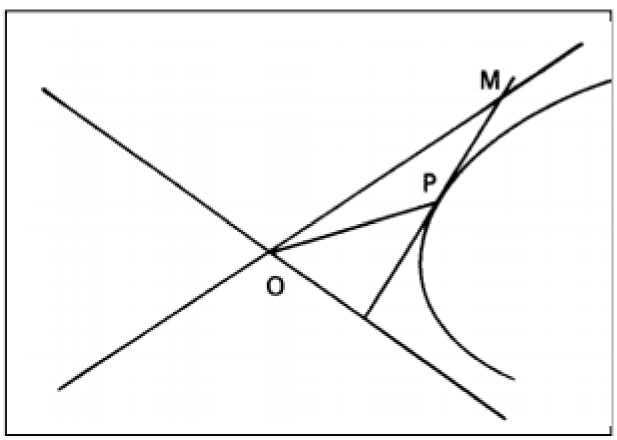


Figura 1.2.2. Representación de la asíntota, tomada de Tapia (2002)

Aunque las asíntotas se han definido como rectas que tienden a acercarse a los brazos de las curvas mientras estas se extienden al infinito; también se define como un comportamiento, que fue estudiado por Cordero y Domínguez (2001) que se presenta en algunas figuras geométricas, como las espirales. En caso de las espirales está la famosa Espiral de Arquímedes, la cual tiene una ecuación polar lineal $r = a + b\theta$, la cual parte de un centro, pero su brazo se va extendiendo de forma rotativa de manera infinita, y mantiene una distancia constante.

La espiral de Arquímedes “se emplea en bombas de compresión o compresores rotativos, hechos de dos espirales de Arquímedes del mismo tamaño intercaladas, para comprimir líquidos y gases” (Granados, 2018, p. 1).

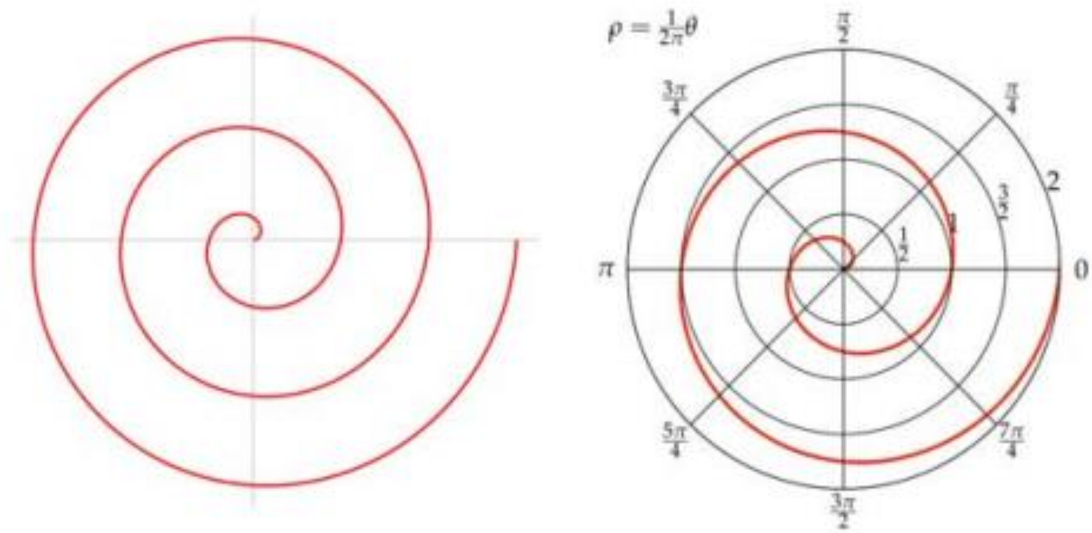


Figura 1.2.3. Gráfico de la espiral de Arquímedes con coordenadas polares

Otra curva donde se encuentran asíntotas es en la *Hoja de Descartes,* que su ecuación cartesiana general es $x^3 + y^3 = 3axy$, y su asíntota es representada por la ecuación $x + y + a = 0$

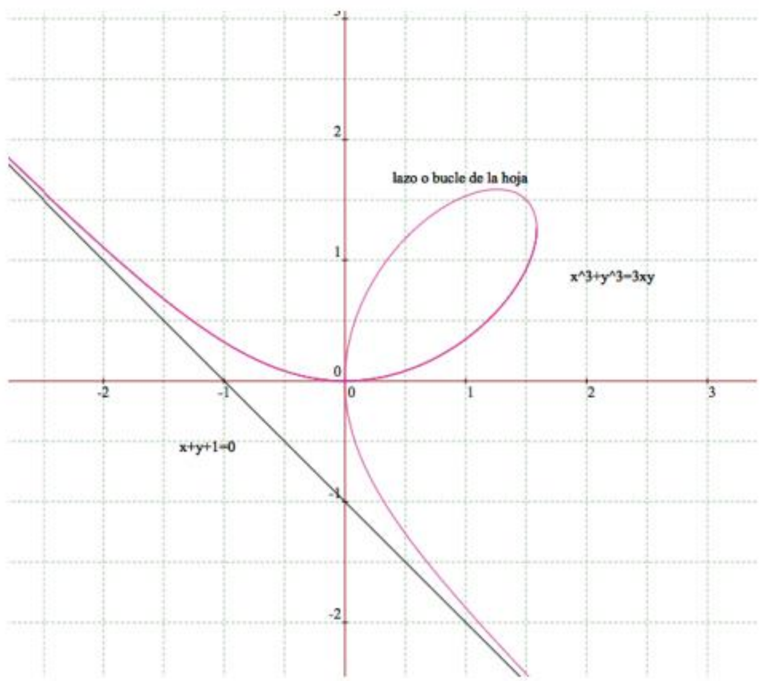


Figura 1.2.4. Folium u hoja de Descartes con a = 1 para la ubicar la asíntota. Tomada de Sáenz (2017)

Otros ejemplos de curvas donde se presentan asíntotas son en la obra de Newton *De Analysi,* donde se analizan las propiedades de las curvas que realizo Newton, principalmente las hipérbolas. Durán (2003) toma las últimas especies cúbicas. Parte del hiperbolismo elíptico definido por la ecuación $xy^2 + ey = cx + d$, siendo la asíntota la línea ordenada al origen.

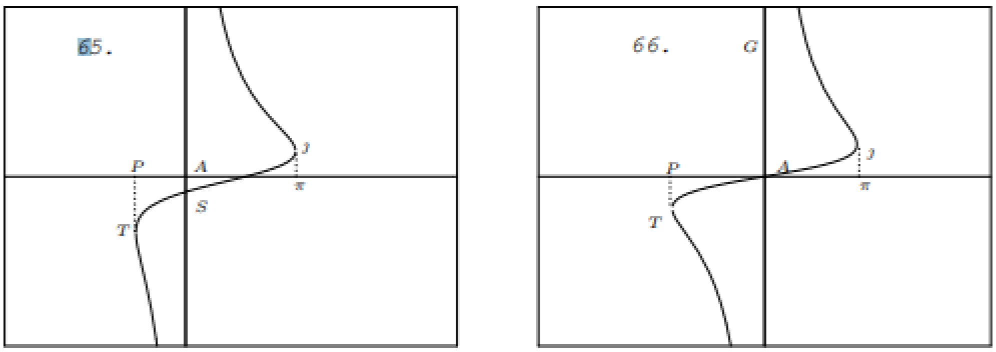


Figura 1.2.5. Figuras de hiperbolismo elíptico, donde el primer caso (figura 65) es la principal, y la figura 66 no cuenta con el término d, pero la asíntota sigue siendo la misma.

Las gráficas de estas ecuaciones son la *especie sexagésimo prima y sexagésimo segunda* (Durán, 2003, p. 124) respectivamente.

Si falta el termino ey y no el término d, sigue teniendo la asíntota AG (Figura 1.6), y tienen un diámetro sin centro, y es diámetro de la abscisa AB (Durán, 2003, p. 124). Siendo esta la *especie sexagésimo tercia.*

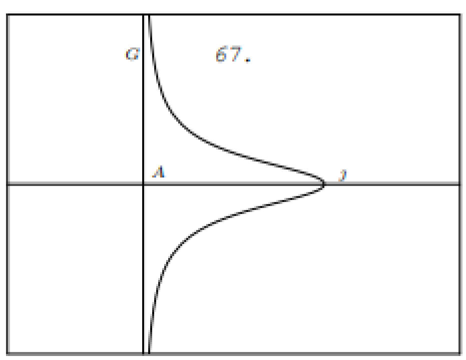


Figura 1.2.6. Especie sexagésimo tercia

También está el caso del tridente, que se define por la ecuación $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$, teniendo como asíntota la ordenada AG, siendo la especie *sexagésima sexta* (Durán, 2003, p.127)

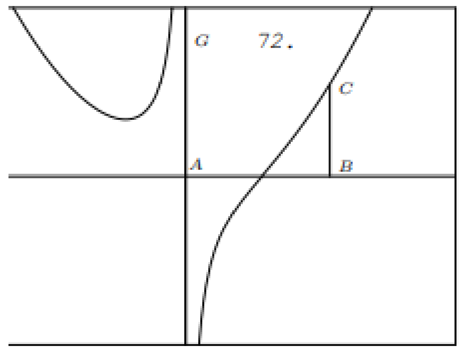


Figura 1.2.7. Tridente de Newton

Entre las problemáticas que se encuentran al estudiar la didáctica de las funciones racionales (donde se ubican las asíntotas) está en que “los alumnos (y algunas veces los profesores) no cuentan con marcos de referencia que les posibilite resignificar su conocimiento matemático” (Domínguez, 2003; p. 2).

En el caso de las asíntotas, la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ suele ser privilegiada en el discurso matemático escolar,

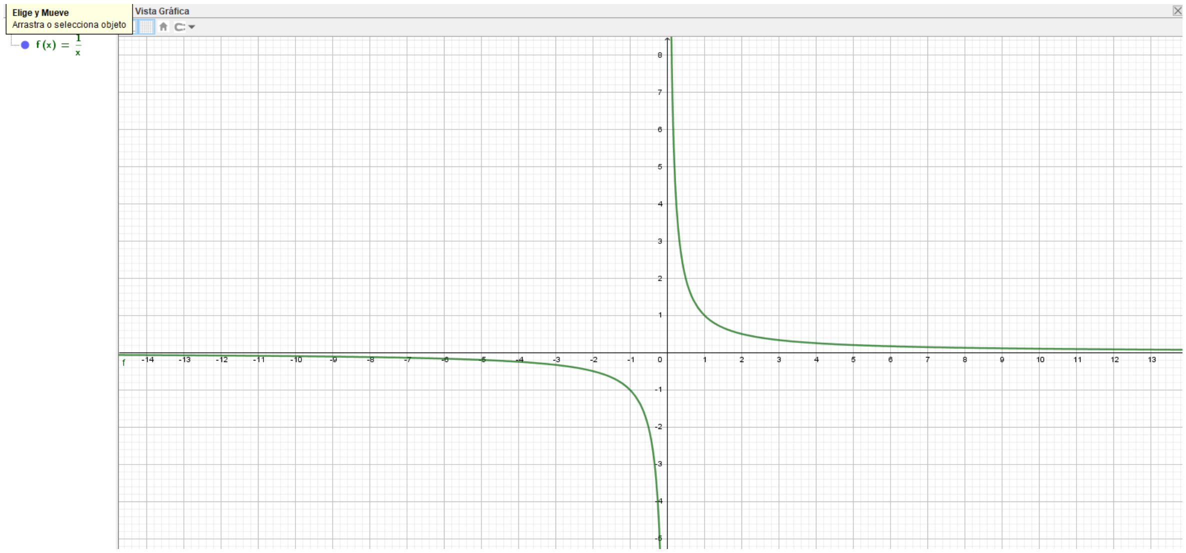


Figura 1.2.8. Grafica de la funcion $f(x) = \frac{1}{x}$ elaborada en Geogebra

El efecto didáctico de los privilegios de la representación de esta función en el nivel medio superior y fortaleciéndose en el superior es que condiciona que las asíntotas sean rectas y que las curvas tiendan a ésta sin tocarla, con lo cual el marco de referencia se limita a que las asíntotas sean rectas verticales, horizontales y oblicuas, haciendo que se generen carencias, dificultades, faltas de argumentos, para construir funciones asintóticas más generales en los estudiantes (Domínguez, 2003; pp. 3-4)

Las asíntotas de funciones se presentan en tres temas: Geometría Analítica, Cálculo y Ecuaciones Diferenciales (tomando al primero y al segundo como parte de nuestra investigación debido a que dichos temas se ubican en el nivel medio superior que es el ambiente donde se realizará).

"En Geometría Analítica se considera que la asíntota es una línea recta, tal que la distancia entre la recta y la curva tiende a cero cuando estas se alejan del origen, formulando dos tipos de comportamientos asintóticos: los horizontales y los oblicuos. Asociado a estos comportamientos se realizan procedimientos algebraicos para graficar curvas de ecuaciones." (Domínguez, 2003; p. 4).

En los textos de Cálculo (Domínguez cita a Edwars & Penney, y a Stewart (1994)) la asíntota de una función es una línea recta cuya distancia entre esta y la curva que representa la función, tiende a cero cuando la variable independiente tiende a infinito o a un determinado punto.

Para justificar el uso de tecnología en nuestra investigación, tomaremos como evidencia la investigación de Yerushalmy (1997) (citada por Domínguez); en la cual estudiantes de bachillerato fueron sometidos a hallar asíntotas verticales, horizontales y oblicuas en un ambiente tecnológico. Dicha investigación se basó en trabajos donde se manipulaban las expresiones algebraicas y el cálculo de límites.

En este estudio, los estudiantes concluyeron que la asíntota vertical surge cuando el denominador de la función es igual a cero, la asíntota horizontal se obtenía dividiendo los términos de la potencia mayor de x, y para la asíntota oblicua consideraron un algoritmo que involucraba el cálculo de límites.

El papel de la tecnología fue de apoyo, debido a que ayudó al aprendizaje y memorización de los comportamientos asintóticos.

En estudios citados posteriormente, se ve que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es el prototipo para la construir funciones con comportamientos asintóticos, y el reconocimiento de asíntotas verticales y horizontales era incuestionable, pero no reconocían que hay otros comportamientos asintóticos dentro de las funciones racionales.

En Kranewitter (2014) se introduce a los estudiantes en el concepto de asíntota que forma parte de las funciones racionales. Como se menciona antes, en el discurso matemático escolar suele presentarse una función prototipo 1/x, y al hacer un análisis cualitativo para determinar mínimos, máximos, dominio, imagen, etc. “Allí podrían haberse observado, representadas en diversos gráficos, las asíntotas verticales u horizontales como “líneas punteadas”, algunas de las cuales podrían indicar que habría elementos (que podrían ser del dominio o de la imagen) y que no se debían considerar.” (Kranewitter, 2014, p. 15).

Las asíntotas destacan cuando queremos estudiar el comportamiento de funciones que se extienden al infinito. Como ya hemos mencionado anteriormente, la asíntota se ha definido como una recta a la cual una función se va acercando pero no la toca.

En el caso citado por Kranewitter (2014) plantea la función f(x) = (1 + 1 / x) ^x la cual tiene un comportamiento creciente, y es una sucesión convergente, que tiene como límite el numero *e*

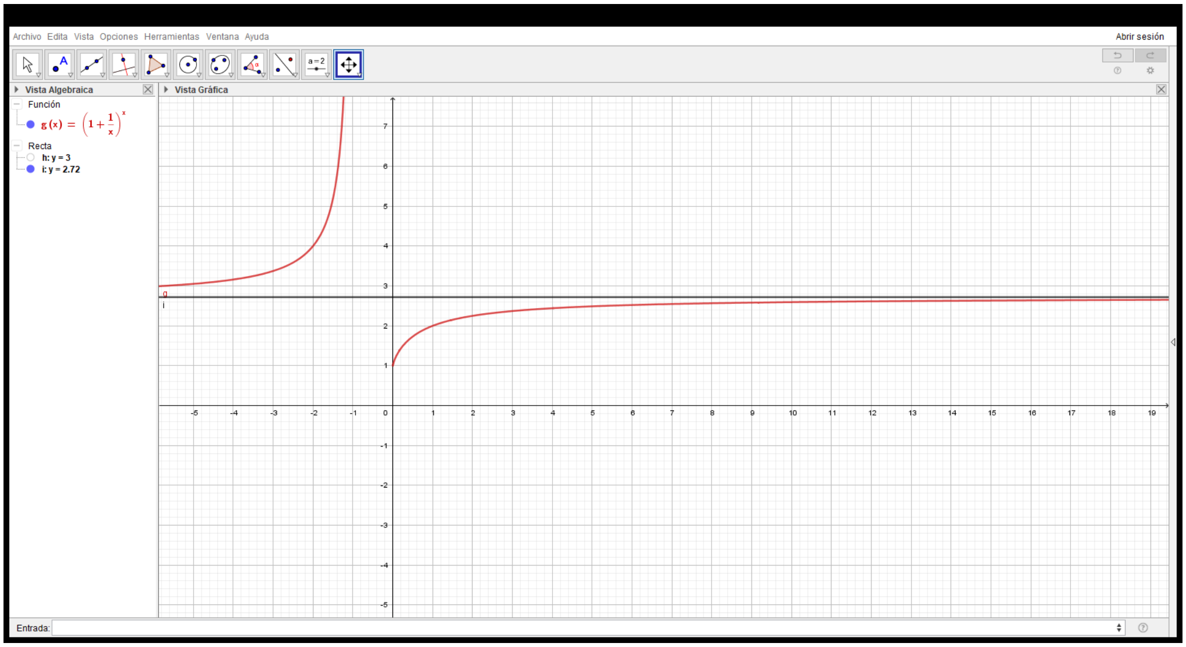


Figura 1.2.9. Grafica de la función f(x) = (1 + 1 / x) ^x elaborada en Geogebra

En la figura 2 se demuestra que efectivamente, la recta y = *e* es la asíntota horizontal de la función, pero un estudiante podría preguntarse ¿Por qué la recta y = 3 no es asíntota de la función, si también se acerca a esta en el infinito? En este caso la recta y = 3 tampoco toca a la curva de la función cuando esta se extiende en el infinito por el eje x, pero la función empieza a acercarse más pronto a la recta y = *e* que a la recta y = 3 como se muestra en la figura 3

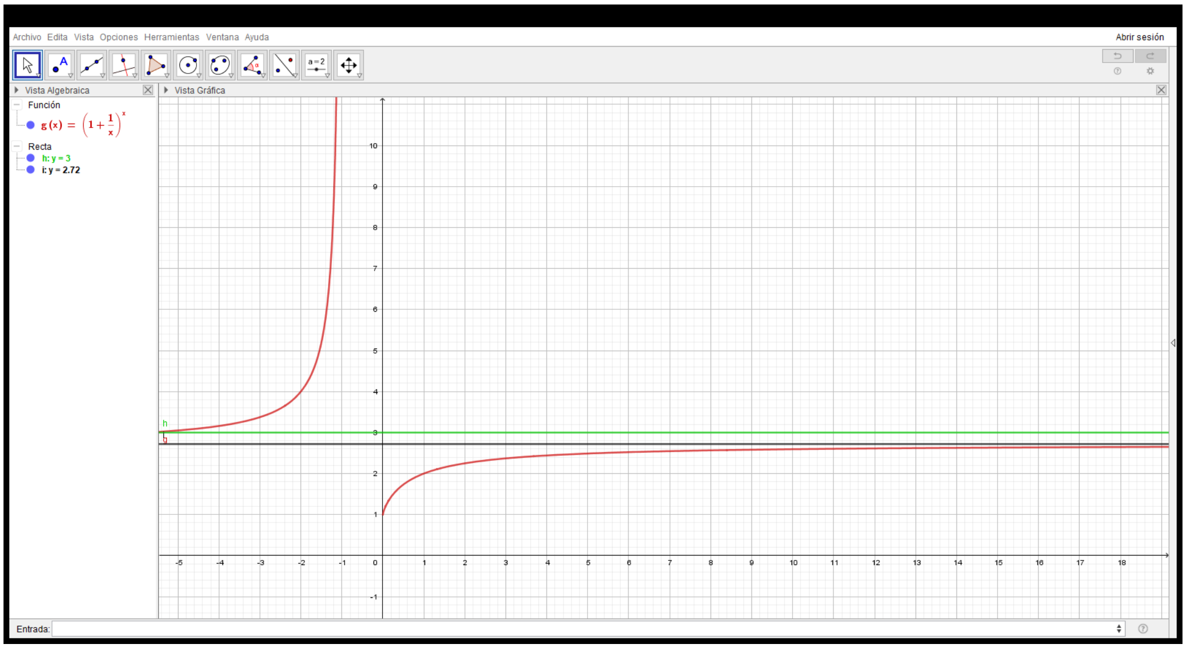


Figura 1.2.10. La función en su rama positiva empieza a aproximarse más pronto a la recta y = *e,* la cual es su asíntota horizontal, mientras que en y = 3 solo hay un paralelismo.

La razón por la que se citó este ejemplo y el uso de Geogebra para la realización y demostración del argumento, es porque se busca usar dicho software para la actividad, y buscamos fomentar la argumentación mediante el ambiente gráfico.

En Cordero y Domínguez (2001), hacen un estudio bajo el supuesto de que “los comportamientos asintóticos usuales que aluden a funciones exponenciales, hiperbólicas y racionales componen un obstáculo didáctico para generalizar la noción de asíntota de una función”, debido a que el comportamiento asintótico sinoidal “contradice las características principales de las asíntotas de funciones que componen a sus representaciones graficas”.

Y en este estudio busca la construcción de una nueva representación, en “el comportamiento de la asíntota”. Para eso, Cordero y Domínguez citan a Palma (1999), quien trabajó en un ambiente gráfico, dejando una función hiperbólica *f(x)=1/x.* La secuencia consistió simplemente en que los estudiantes cambiaran parámetros en la función base, como agregar constantes, agregar una propiedad de recta o de función cuadrática, esto con el fin de construir asíntotas oblicuas.

Yerushalmy (1997), quien busco que los estudiantes generaran la semántica de las asíntotas, al trabajar en un ambiente tecnológico.

“La diferencia entre ambos acercamientos consiste en que uno enfoca su estudio en la construcción de comportamientos asintóticos oblicuos que logran los estudiantes y el otro, en la semántica de las asíntotas cuando los estudiantes se someten hallar tipos de asíntotas a través de la tecnología” (Cordero y Domínguez, 2001, p. 326)

En la problemática, aparecen las gráficas donde se identifican fácilmente las asíntotas en la figura 1.

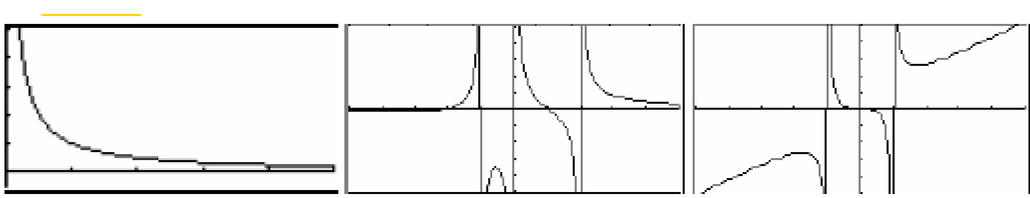


Figura 1

Figura 1.2.11. Representaciones tradicionales de las asíntotas

Estas situaciones aluden a funciones *f(x)* que cuando “x tiende a infinito”. Aquí es donde está implícito el concepto de límite de cálculo diferencial. Pero cuando un estudiante se encuentra graficas como en la figura 2, requiere ampliar su universo respecto a las asíntotas.

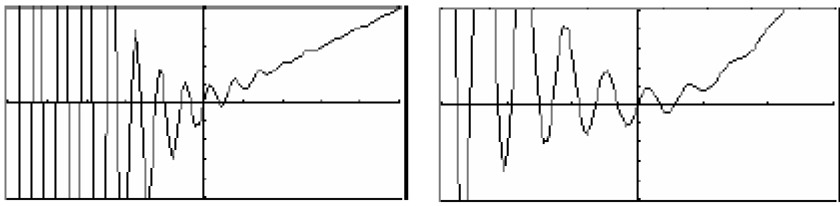


Figura 2

Figura 1.2.12. Otras representaciones de asíntotas

En el diseño de la situación se tomaron en cuenta tres aspectos: la gráfica, la función asociada a la gráfica y las posibles definiciones de asíntotas que los estudiantes pueden expresar a la luz de sus experiencias en los dos puntos anteriores (Cordero y Domínguez, 2001, p.328).

En el estudio realizado por los autores anteriores aplicaron nueve estudiantes de ingeniería 7, organizados en dos equipos, uno de cuatro y otro de cinco estudiantes.

En los resultados del estudio, en la actividad 1 se vio que los estudiantes solo identificaban las asíntotas verticales, sin identificar otros "comportamientos asintóticos". En la actividad 2, que implicaba el aspecto algebraico, buscaban donde la función era indefinida, para asociarla a una gráfica que tuviese asíntota vertical. En la actividad 3, definen a la asíntota como "un punto donde la función no está definida", o "un límite de una función que se representa con una línea imaginaria".

Otro artículo a analizar, como parte de los antecedentes, y consideramos, una demostración del poder de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, es de Lupiáñez y Moreno (2001) *Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas.*

La parte que nos incumbe es en el que mencionan a las calculadoras graficadoras, que proporcionan "un amplio abanico de representaciones de objetos y relaciones matemáticas en diferentes registros. (Lupiáñez y Moreno, 2001, p. 295).

Las calculadoras, pueden expresar graficas que resultarían prácticamente imposible dibujar en papel, además de permitir “conjeturar propiedades y comprobar visualmente (actividad que puede tener un importante uso didáctico) hechos que escapaban al análisis algebraico”.

En el caso de graficas complejas, como los de la figura 3 del artículo;

Dentro del ambiente de trabajo de la calculadora, una función es derivable en un punto si al realizar varios *zooms* sobre la gráfica, un entorno de la imagen de ese punto se ve como un trozo de recta”; En este caso, un tratamiento de funciones bajo esta perspectiva debe ser cuidadosamente planeado, para no llevar al estudiante a interpretaciones erróneas…

La calculadora permite ver los objetos matemáticos como manipulables, y por eso, la fuerza de la tecnología está basada, en gran medida, en esa reificación de objetos y relaciones matemáticas. (Lupiañez y Moreno, 2001, pp. 296-297)

Como conclusión particular respecto a este artículo, respalda el uso de la tecnología en la enseñanza de matemáticas, lo cual hace a los objetos matemáticos pasar de estáticos a manipulables, y refuerzan el aprendizaje visual, el cual suele ser muy olvidado, debido a que se le da mayor énfasis al aprender de forma analítica, además que ahorraría tiempo en graficar manualmente.

La propuesta encontrada en Llanos, Otero, y Gazzola (2014) es la de “combatir” la *pérdida de sentido y monumentalización del saber*, denominada por Chevallard, que ocurre en los planes de estudio de matemáticas últimamente; donde se dejan de lado los problemas y soluciones que dieron origen a ese conocimiento, dejándolo como un conocimiento ya establecido e incuestionable.

En este trabajo se implementó la metodología de Recorridos de Estudio e Investigación (REI) propuesta por Chevallard. En el uso de los REI se empieza con una pregunta base Q, que permite generar más preguntas, a fin de llevar la “(re)construcción de un gran número de organizaciones matemáticas, que surgirán como respuesta a las preguntas que requirieron su construcción (Llanos, Otero y Gazzola, 2014, p. 4).

En la enseñanza por REI se perciben similitudes con la ingeniería didáctica y la socioepistemología, debido a que tienen que haber “cambios relativos a las funciones didácticas *meso génesis, topo génesis y crono génesis”.* En ingeniería didáctica se toman en cuenta variables micro y macrodidácticas, antes de la planeación de la secuencia. La topo génesis se asemeja al objetivo de la socioepistemología, que tiene como objetivo hacer que el estudiante resignifique un conocimiento por medio de prácticas sociales, en vez de conformarse con la definición ya establecida en el programa de estudios, y que el profesor (en la mayoría de los casos) solo se limita a retransmitir, y en la topo génesis de los REI, donde el alumno adquiere un mayor protagonismo y aporta su conocimiento adquirido a la clase. Y a la cronogénesis porque hay que planear la secuencia didáctica, en la parte de experimentación se tiene que describir las características del grupo de estudiantes, los tiempos que toma realizar cada parte de la secuencia, y en REI se permite analizar y describir la gestión del tiempo didáctico.

En este estudio, sin adentrarse mucho en detalle, se partió de una pregunta base Q que empieza a generar más preguntas, y en base a adaptación se empiezan a resolver más cuestiones.

En el caso de las asíntotas, se identificaron los signos y los puntos seguros de la gráfica q. Siendo q=f/g. Luego pasan a la noción principal de las funciones racionales: el caso de la división por cero. Para analizar el comportamiento de la gráfica se trabajó con valores cercanos al “cero del denominador”

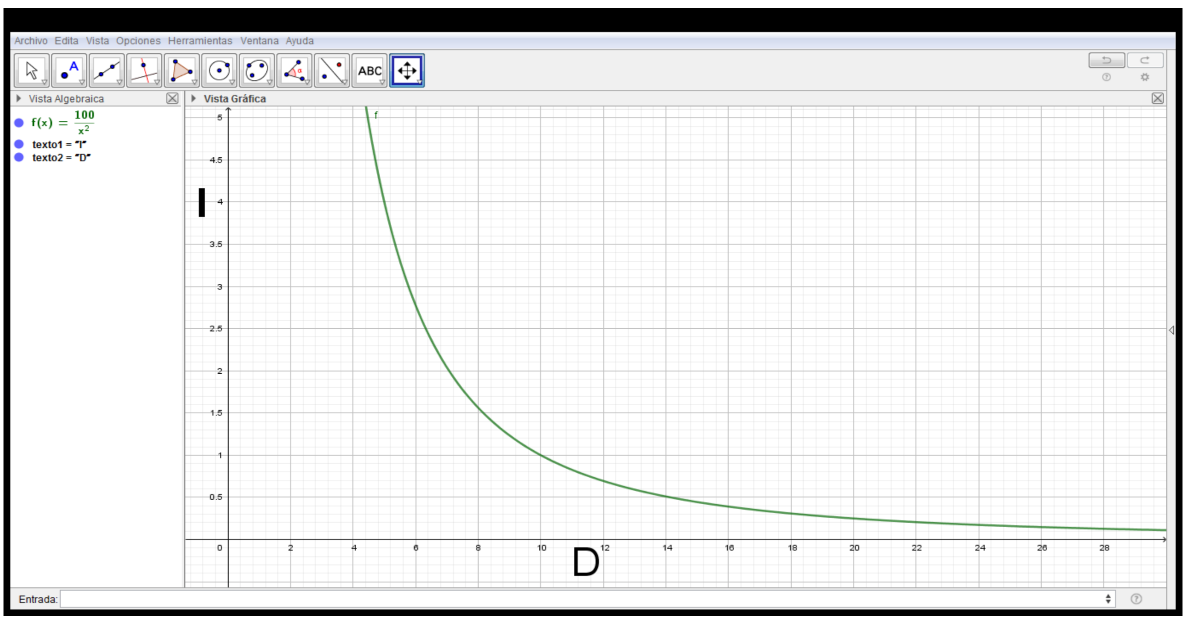
1.2.1. Aplicaciones de las asíntotas

Las asíntotas suelen estar presentes en las funciones racionales, y estas al igual que otras funciones, pueden tener una aplicación a fenómenos y situaciones de la vida cotidiana. En palabras de Nikolai Ivanovich Lobachevski “No hay rama de la matemática, por más abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real”. Por eso aquí se citan algunos ejemplos donde están presentes las asíntotas y que representan.

Ejemplo 1. Función del sonido

La intensidad del sonido que podemos percibir desde un punto sonoro llamado foco depende de la distancia a la que se encuentre el receptor desde el punto emisor del sonido.

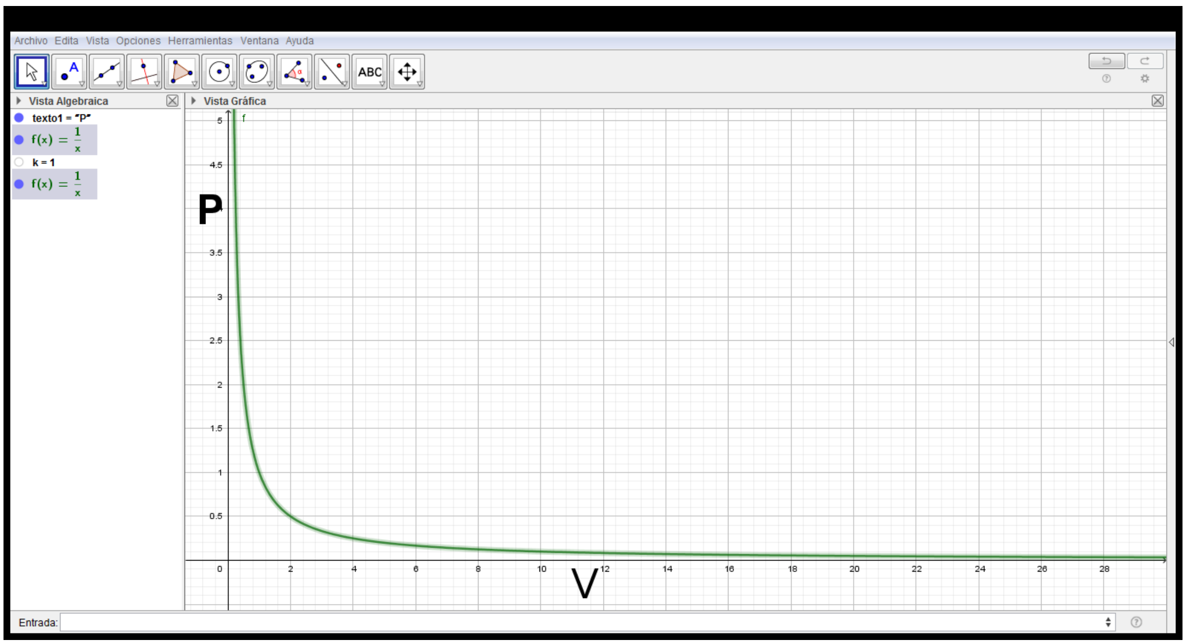
Así la intensidad que recibe el receptor vendrá dada por la fórmula I=$\frac{100}{d^\wedge 2}$ donde I es la intensidad del sonido medida en decibelios y d es la distancia en metros a la que se encuentra el receptor.



La grafica de la función es una hipérbola, pero como aplicación práctica solo se toma el primer cuadrante del eje, ya que no puede haber distancia negativa. El foco es representado por el origen, El eje x representa la distancia y el eje y representa la intensidad. Interpretando a la gráfica queda, a menor distancia mayor intensidad, y a mayor distancia menor intensidad, las asíntotas son los ejes y representan el acercamiento al foco en el caso del eje y, y se observa como disminuye la intensidad cuando la distancia aumenta infinitamente.

Ejemplo: Ley de Boyle

Representa la relación entre presión y volumen para un gas a temperatura constante. Donde a mayor presión menor volumen y viceversa. Al igual que la función del sonido tiene una estructura P=$\frac{k}{v}$



Siendo P la presión y V el volumen. Las asíntotas son los ejes y representan el aumento y disminución de la presión del volumen. Cuando el volumen tiende a cero, la presión aumenta, tendiendo a infinito, cuando el volumen aumenta, la presión disminuye, tendiendo a cero.

Ejemplos 3 y 4: Ley de la gravitación universal de Newton y Ley de Coulomb

Isaac Newton enunció que la fuerza con que se atraen dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de distancia que les separa, matemáticamente se expresa $F = G\frac{Mm}{d^2}$

La Ley de Coulumb dice que la fuerza de atracción o de repulsión de dos cargas es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, se expresa matemáticamente como:

$$F = K\frac{Qq}{d^2}$$

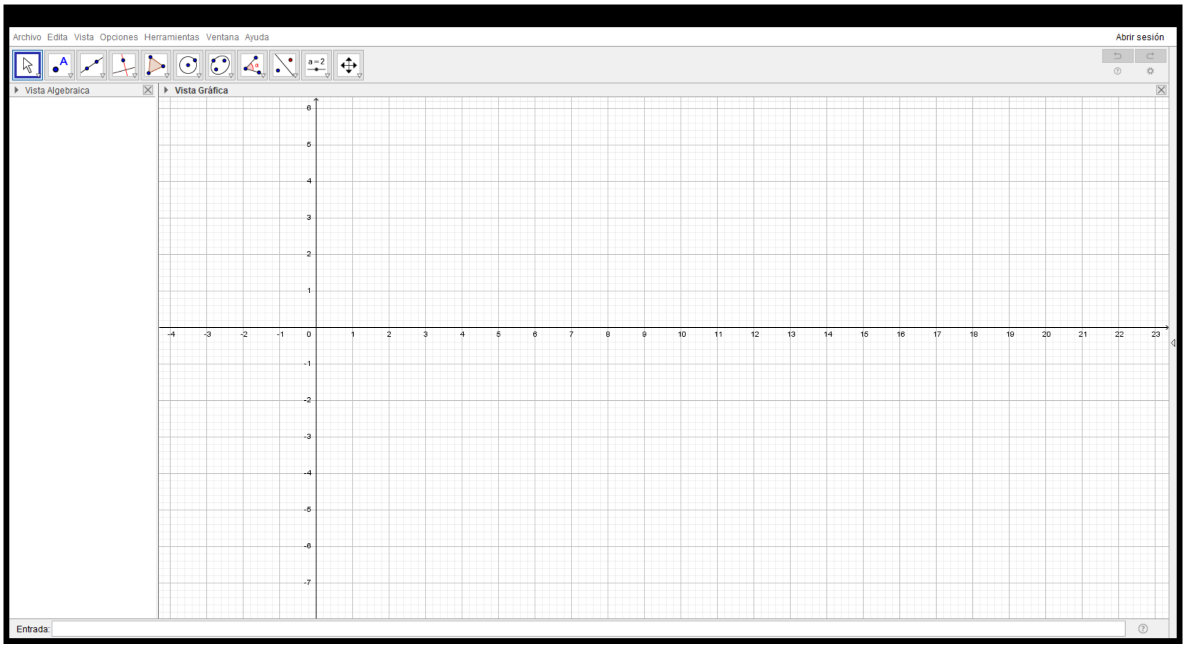
Las funciones racionales suelen expresar relaciones inversamente proporcionales a variables que pueden ser independientes como la distancia, el volumen, el tiempo, etc.

1.3. Justificación

La razón por la que se eligió el tema de asíntotas es debido a que no ha sido tan explorado como otro tipo de funciones, por ejemplo la cuadrática, y como en todo tema matemático, tiene dificultades (por parte de los estudiantes) particulares al momento de aprenderse; y el por qué queremos implementar Geogebra, es porque en los últimos años, en todas las ramas de la educación, no solo en matemáticas, se han empezado a implementar herramientas tecnológicas para ayudar al aprendizaje, y, los dispositivos como teléfonos inteligentes, tabletas, laboratorios de computo, están al alcance de los lugares donde queremos aplicar la situación didáctica.

> La integración de las TIC en las aulas es función de los profesores, pero antes de introducirlas, es necesario plantearse el modo de hacerlo eficazmente, para que sea coherente con la propia visión del proceso de enseñanza y aprendizaje… en la mayoría de los estudios, se ha demostrado que el alumno aprende más y mejor cuando se usa una metodología de trabajo por descubrimiento por parte del alumnado… En este entorno tecnológico es fácilmente alcanzable esta metodología de trabajo, en la cual el aprendizaje es autónomo y guiado. El profesor proporciona el material, enlaces, programas y pequeñas implementaciones para que el alumno las use directamente y se centre en conseguir alcanzar el objetivo y el conocimiento (Mañas, 2013, p. 7)

La razón para utilizar Geogebra en la investigación es debido a que es un software de libre acceso (gratuito), es un software con el cual se pueden realizar cálculos analíticos, algebra, etc. Pero su mayor potencial reside en el uso de geometría dinámica, que será pilar de esta práctica, además de que tiene una interfaz amigable para los usuarios. En México, Geogebra tiene presencia en asociaciones académicas como Instituto de Geogebra en la UNAM, Movimiento STEM A.C., que es aliada de Comunidad Geogebra Latinoamericana, la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática AMUITEM, que cuenta con el Instituto Geogebra AMIUTEM; entre otras.



1.4. Objetivos

Los objetivos que guiarán la investigación se dividen en General y Específicos, siendo estos:

OBJETIVO GENERAL

- Analizar las dificultades y parámetros que influyen en el comportamiento de las asíntotas y diseñar actividades con el uso de herramientas tecnológicas.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Plantear actividades para que los estudiantes enfrenten dichas dificultades con respecto a la asíntota con el de Geogebra.
2. Demostrar como los parámetros influyen en el comportamiento de las asíntotas de las funciones.
3. Observar que tan bien desarrollada tienen la habilidad de graficar para saber que tan bien asocian una función con la gráfica.
4. Demostrar que el uso adecuado de herramientas tecnológicas para situaciones didácticas puede lograr que los estudiantes tengan un aprendizaje más significativo.

Capítulo 2. Marco teórico y metodológico

En este capítulo se definen la teoría y metodología que se implementará para nuestra investigación. Escogimos la socioepistemología como teoría porque nos interesa saber si el entorno sociocultural de los estudiantes influye en su forma de aprender, el que tan bien dominan las prácticas sociales que sin darse cuenta aplican en la escuela.

La metodología a implementar para la secuencia didáctica es la ingeniería didáctica (que definiremos más adelante en la investigación), debido a que se diseñó para aplicarse en el aula con tal de que las investigaciones realizadas en este entorno (el aula) logren un aprendizaje significativo.

2.1. Teoría Socioepistemológica

La teoría socioepistemológica emerge en el campo de la matemática educativa, como una combinación entre matemáticas, ciencias sociales y humanidades. Tiene como “pioneros” en la teoría los trabajos doctorales de Cantoral (1990); Cordero (1994); Farfán (1993), entre otros. También se encuentran las investigaciones de Apolo Castañeda, Gabriela Buendía, Juan Alanís, Liliana Suarez, Gisela Montiel, entre otros.

A grandes rasgos, la socioepistemología tiene como objetivo “explorar formas del pensamiento matemático, fuera y dentro de la escuela, que pudiesen difundirse socialmente, caracterizarlos para su uso efectivo entre la población” (Cantoral, 2013, p. 43).

Para comprender cuales fueron los antecedentes que ayudaron al surgimiento de esta teoría, es necesario comprender dos premisas principales:

- La investigación en Matemática educativa se ocupa del problema que plantea la conformación del saber matemático. En este enfoque se asume la legitimidad de todas las formas del saber, ya sea popular, culto o técnico.

- “La socioepistemología plantea una relación social al saber que la ubica como teoría que modela la construcción social del conocimiento.” Citamos primero a la transposición didáctica de Chevallard, la cual menciona que el saber matemático (llamado también saber sabio) surgió en ambientes no escolares, pasa a ser adaptado para ser enseñado en el ámbito escolar, pero durante esa adaptación, el saber se despersonaliza y descontextualiza, perdiendo su significado original, reduciendo a temas aislados, cuidadosamente secuenciados, denominados “contenidos” o “unidades temáticas” de una asignatura (Cantoral, 2013, p. 26)

Siendo el discurso matemático escolar tradicional la base del saber matemático para algunas teorías de corte más cognitivo y didáctico, que se toman a este saber como objeto matemático, los investigadores de la socioepistemología se propusieron hacer un “rediseño del discurso matemático escolar”, como forma de atender, **sin soslayar,** a los problemas sociales y culturales que acompañan a la actividad educativa en el campo de las matemáticas. (Cantoral, 2013, p. 27).

La teoría socioepistemológica considera a las *matemáticas* como parte esencial de la cultura, porque están en nuestro día a día; se esconden en *prácticas cotidianas* (y algunas se consideran prácticas sociales), por ejemplo: clasificar, predecir, medir, estimar, representar, diseñar, medir, etc. Para la socioepistemología, las matemáticas son un elemento vivo que se “crea” fuera, pero se “recrea” dentro del aula, a través de rediseños para la intervención educativa más allá del aula.

Bajo el enfoque socioepistemológico, el conocimiento se considera información sin uso; el saber pasa a ser el conocimiento aplicado a una situación problemática; por lo tanto el aprendizaje lo define como la transición del conocimiento a saber (Cantoral, 2013, p. 52, citando a D’Amore). Las investigaciones de las últimas décadas han tratado con cuatro dimensiones principales del saber:

- Naturaleza epistemológica (sobre la forma en que le conocemos)
- Tesitura sociocultural (el énfasis puesto en el valor de uso)
- Planos de lo cognitivo (funciones adaptativas)
- Modos de transmisión vía enseñanza (la herencia cultural)

En el plano de esta teoría es de interés comprender las formulaciones verbales y escritas que tiene el alumno para responder una tarea matemática, así como comprender como influye la cultura y el medio para la formación del pensamiento matemático, es menester comprender cómo y por qué el pensamiento matemático del alumno opera como opera.

Desde esta perspectiva, no debe limitarse al aula para explicar los fenómenos que se dan en la didáctica de las matemáticas, debido a que la cultura y el entorno social influye en esta (en este caso nos enfocamos en el aprendizaje); por lo cual no sería viable copiar formas de enseñanza y aprendizaje del exterior, porque tendrían un resultado distinto de donde se emplearon originalmente.

Otra visión del aprendizaje que está siendo puesta en funcionamiento más recientemente se conoce como *aproximación sociocultural* del aprendizaje, según la cual

> Se considera que la mente está un poco más allá de la piel y, en esa medida, los procesos mentales humanos poseen una relación esencial con los escenarios culturales, históricos e institucionales. De modo que se presenta un marco según el cual es posible hablar de distintas formas de pensar matemáticas al considerar que el escenario modifica dichos pensamientos (Cantoral, 2013, p. 75).

2.2. Modelación-Graficación

Entre los autores que más ha tratado de dar otro enfoque a las gráficas, aparte de la función de representación de las funciones que se da normalmente en el discurso matemático escolar (dme) (elemento fundamental en nuestra investigación) (Cordero, 2006), quien será nuestra mayor referencia en este apartado, sin menospreciar a otros investigadores que colaboraron con él.

Dos de las prácticas sociales que “van de la mano” para nuestra investigación son la modelación-graficación, la modelación por si sola es la “representación del a realidad o la representación de un objeto del cual se asume su preexistencia” (Bautista, Morales y Mena, 2013, p. 2); por otra parte Cordero (2006) dice “el tratamiento de la modelación en la enseñanza de las matemáticas es considerado una herramienta didáctica que ayudará al estudiante a hacer representaciones adecuadas y eficientes del objeto”. Al agregar las gráficas de las funciones, ya se implica graficación, pero no solo sirve para representar la modelación, sino que también la gráfica puede servir como argumento.

En palabras de Cordero (2006) “las gráficas de las funciones formulan argumentos que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los estudiantes son capaces de hacer, con las condiciones que son capaces de capturar y transformar, y los conceptos se van construyendo progresivamente”.

En Cordero, Cen & Suárez (2010), la problemática reside en el uso de las gráficas únicamente como representación de las funciones; pero buscan asumir al uso de la gráfica como argumento y pase a considerarse práctica social, teniendo como ejemplo a Oresme, en su obra *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum,* usó la geometría y las proporciones para representar como varían las cosas. Por ejemplo, la longitud de los segmentos representaba variaciones en la intensidad de ciertas variables, y las figuras geométricas los diferentes cambios. Desde esta perspectiva, las figuras tenían propiedades que eran intrínsecas a las cualidades a la cualidad misma como la proporcionalidad.

Otro ejemplo citado es el de Euler, quien en su obra *Introducción al análisis del infinito* concluye que las propiedades analíticas de las funciones son intrínsecas a las curvas, demostrado en el comportamiento de sus ramas. Menciona que la asintoticidad es una propiedad intrínseca de curvas que poseen ramas con comportamiento al infinito.

El uso de graficas tiene implícito la dualidad de funcionamiento y forma. El funcionamiento son las ejecuciones, acciones u operaciones que desempeña la gráfica en la situación, mientras que la forma son las clases de esas ejecuciones, acciones u operaciones” (Cordero, Cen & Suárez, 2010, p. 199).

En las gráficas que se encuentran los estudiantes en su transcurso por el bachillerato se identificaron cinco usos de gráficas:

- **uso distribución de puntos:** se presenta mediante *formas* como tablas con valores preestablecidos, graficas, con funcionamientos como la ubicación de puntos, el desplazamiento en el plano cartesiano, variación de los puntos.
- **uso comportamiento geométrico:** surge cuando se alude a la interpretación geométrica de la función o asociación curva-expresión, con la finalidad de comprender cómo se dan las transformaciones en las funciones.
- **uso análisis de la curva:** se enfoca en la variación de la curva, lo que son máximos, mínimos, puntos de inflexión, etc., aparecen los criterios de primera y segunda derivada.
- **uso cálculo de áreas y volúmenes:** se enfoca en el cálculo de áreas y volúmenes delimitados por funciones. El foco no es la gráfica en sí, sino el análisis a realizar para ver que herramienta utilizar para obtener dicha área o volumen, generalmente en bachillerato se utiliza el cálculo integral.
- **uso análisis de información:** aparece cuando hay datos recopilados para interpretarlos. Sus formas suelen ser tablas, graficas de barras, histogramas, etc. Suele aparecer en cursos de Probabilidad y Estadística.

De estos cinco usos, el que más se presentará para nuestra investigación es el de comportamiento geométrico, debido a que nos enfocaremos en el aprendizaje de las asíntotas en un ambiente gráfico; esperando aprovechar las ventajas que brinda la geometría dinámica.

En Suárez (2008) se busca una epistemología de la modelación y la graficación, donde estén juntas al momento de aplicarse a alguna situación. Se centra en el conocimiento que se encuentra alrededor de la modelación gráfica del cambio y la variación.

La hipótesis que plantea es que la variación se resignifica a través de la modelación-graficación; en una situación donde los estudiantes tengan interés por estudiar una gráfica de fenómeno de cambio sin recurrir necesariamente a las propiedades analíticas de la función (Suárez, 2008, pp. 14-15).

Complementando la definición de modelación, que al estar anclada a la graficación, no podemos dejar de lado el ámbito tecnológico, del cual hablaremos más adelante. Se define al modelo matemático como “cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones matemáticas, diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad, su prototipo. Tal prototipo puede ser una entidad física, biológica, socia, psicológica o conceptual, tal vez, incluso, otro modelo matemático (Suarez, citando a Aris, 2008, p. 23).

La modelación empieza a tener el propósito de crear una interacción del mundo real y las matemáticas a través de modelos matemáticos.

Complementando la parte de graficación, tiene como antecedente en 1990, donde se recopilaron varias investigaciones que marcaban la tendencia del uso de las gráficas para la enseñanza del concepto de función, desde ese entonces representación algebraica y grafica de las funciones ha ido de la mano en el discurso matemático escolar.

Se identifican tres cortes en las investigaciones que tienen que ver con la literatura de las funciones, gráficas y graficación.

La primera tiene que ver con las tareas que se hacen sobre la gráfica. Suárez halla dos grupos: interpretación y construcción, agrupados en cuatro tareas, las cuales son:

- **predicción:** construcción de patrones que subyacen en las gráficas y en las funciones.
- **clasificación:** interpretación de las relaciones entre la definición formal de función y las imágenes mentales que el estudiante tiene del concepto de función.
- **traducción:** pasar de la representación gráfica a otras representaciones.
- **tareas de escala:** se relacionan las convenciones con las tensiones y las limitaciones del sistema coordinado cartesiano.

El segundo grupo de investigaciones se concentra en las intuiciones, conceptos erróneos y otras dificultades; explicando tres tipos de dificultades: asociación de regularidades de las gráficas con el concepto de función, predominio del enfoque puntual sobre el enfoque por intervalos, y dificultades con las abstracciones y convenciones del mundo gráfico.

El tercer grupo se enfoca en la enseñanza de las funciones, las gráficas y la graficación en un ambiente tecnológico. A la fecha, hay escasez de investigaciones con este enfoque (Suárez, 2008, pp. 29.31)

2.3. Uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de matemáticas

Este apartado compone el “marco teórico” que justifica nuestro deseo de implementar tecnología (en nuestro caso, el software Geogebra) a nuestra actividad. Mencionando antecedentes históricos del surgimiento de herramientas tecnológicas, las ventajas que otorgan y las consideraciones necesarias para aprovechar al máximo dichas herramientas.

2.3.1. Antecedentes históricos de las herramientas tecnológicas

Al hablar del surgimiento de herramientas tecnológicas también hablamos del surgimiento de las computadoras, ya que al ir evolucionando las últimas también evolucionan dichas herramientas.

Salat (2013) parte de la idea de Charles Babbage, quien en 1834, diseñó una maquina analítica, capaz de realizar las cuatro operaciones básicas, con una unidad de memoria, programable; se introducían los datos en tarjetas perforadas y era capaz de imprimir los resultados. Aunque nunca se construyó, quedó como antecedente para el futuro de las computadoras.

John Von Neumann construye EDVAC; una computadora con una arquitectura similar a la de las computadoras modernas. Era capaz de resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales, que entro en operaciones en 1952. La EDVAC “fue la materialización de las ideas de Babbage y de una genial invención de von Neumann” (Salat, 2013, pp. 62-63).

Al principio, las computadoras se programaban en lenguaje máquina, es decir, mediante números binarios. Pero en 1956 nació el compilador Fortran, que traducía un programa escrito en un lenguaje accesible al público al lenguaje de las máquinas.

En 1967 surge un gran antecedente de herramientas tecnológicas aplicables a la educación, con Bolt, Beranek, Newman y Papert, que desarrollaron el lenguaje Logo, un lenguaje utilizado en la enseñanza para diseñar actividades para explorar conceptos matemáticos mediante programación (Salat cita a Papert, 2013, p. 63).

2.3.2. Ventajas del uso de herramientas tecnológicas en la didáctica de matemáticas

En Gómez (1997) la tecnología jugará un papel importante en la didáctica de las matemáticas, gracias al dinamismo que nos ofrece para poder interactuar con objetos matemáticos; pero para aprovechar esa interacción es necesario tener en cuenta “ la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas...teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, y para que aprovechen la tecnología para crear espacios donde el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y más potente” (Gómez, 1997, p.94).

Tomando el sistema didáctico de Balacheff, donde el sujeto (estudiante) interactúa con el medio y los agentes didácticos. El conocimiento surge cuando se dan “perturbaciones” de dicha interacción, y el sujeto se ve obligado a buscar el equilibrio con el medio. Bajo este enfoque la tecnología puede formar parte del medio, ya sea formando parte del diseño de las situaciones, o puede influir en el tipo de problemas que el sujeto puede afrontar.

El uso de tecnología permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos. Existe la representación externa, que es la actividad física, que permite organizar la experiencia cuando se realiza la tarea, la interacción del sujeto con el medio; y la experiencia interna, que involucra el como el alumno organiza internamente la información.

En un ambiente tecnológico, un objeto matemático, por ejemplo las funciones, puede representarse en un sistema de representación simbólico, gráfico y tabular.

Las ventajas que ofrecen las tecnologías es que ayudan al proceso de comprensión de las matemáticas. Al ser dinámicas, permiten la manipulación de objetos matemáticos y sus relaciones.

En la práctica, se emplearán el sistema de representación simbólico y gráfico. Con el simbólico se espera que noten la estructura de las funciones racionales, junto con la manipulación de este sistema se espera que identifiquen qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas, y cómo influyen en estas y en las demás ramas de la gráfica.

En Salat (2013) se menciona el impacto de las herramientas tecnológicas para solucionar problemas matemáticos complejos, debido a que facilitan el camino hacia la solución y ahorra tiempo. Se citan algunos ejemplos, y resumidamente se explica de qué manera se llegó a la solución.

1. Cálculo de π por simulación
2. Cálculo de √2 por simulación
3. Problema de flotación
4. Solución de una ecuación diferencial por el método de iteraciones sucesivas de Picard.
5. Algunas posibilidades del cálculo simbólico
6. El problema de las torres de Hanói

En los problemas 1, 2 y 6 se utilizaron programas hechos con los lenguajes de programación BASIC para el programa 1 y Python para los programas 2 y 6, con unas pocas líneas de código se simularon situaciones varias veces, lo cual evita que de verdad se hagan las “actividades”, y ambos programas arrojaron sus respectivos resultados. En el caso del problema 6 podemos asignar el número de aros con los que queremos trabajar, y aun así el programa siempre arrojará la solución.

Algo que podemos aprender de estos ejemplos es que un problema complejo se puede solucionar de una forma sencilla si utilizamos adecuadamente las herramientas disponibles (en este caso los lenguajes de programación).

En el problema 3 se utilizó un sistema de algebra computacional, el cual arroja una solución, pero se “requiere una cuidadosa interpretación de los resultados”, debido a que en este caso, el sistema arroja una solución, “pero en realidad la ecuación no tiene solución” (Salat. 2013. P. 68). En el caso del problema 4, el sistema de algebra computacional “proporciona un nuevo recurso para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias” (Salat, 2013, p. 69).

Arrieta (2013) menciona una serie factores y recomendaciones para tener un aprovechamiento fructífero al momento de utilizar las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación) que al ser aplicadas al aula pasan a denominarse TAC (Tecnologías del Aprendizaje y Conocimiento) (categoría en la que entra Geogebra al ser utilizada en el aula).

Los aspectos sobre los cuales el uso de TIC en las aulas tiene sobre los alumnos son:

- Interactividad: ya que permite al alumnado ejerce una relación directa con los contenidos que está trabajando y manipularlos con mayor independencia.
- La motivación: al hacer las clases más entretenidas e interesantes para los alumnos, además, tienen la posibilidad de investigar y aprender jugando (cita a Zugowitki, 2012).
- El papel del alumnado se vuelve más activo, al convertir su información en conocimiento, consiguiendo aprendizajes significativos.
- La cooperación entre los estudiantes, y también entre los docentes.
- La comprensión de los contenidos es más fácil por distintas razones: el alumnado puede experimentar y aprender mediante interacción directa e individual con representaciones concretas del contenido a estudiar. (Arrieta, 2013, p. 9).

Las TIC pueden ser de gran ayuda para el docente, debido a que proporcionan acceso a una gran cantidad de información, además de que es inmediato, lo cual le permite ahorrar tiempo y ganar flexibilidad en sus clases (Arrieta, 2013, p.9), además, para que el docente prepare una clase empleando las TIC, y estas aporten un aprendizaje significativo, debe cumplir ciertos requisitos.

Primero, el docente debe poseer los conocimientos y habilidades necesarios en el manejo de las TIC, y obviamente, en el contenido matemático a enseñar, porque las tecnologías por si solas no funcionan. Por eso, es necesario incluir la capacitación de los docentes en el manejo de tecnologías de información y comunicación, en el currículo.

En segundo, el aula debe contar con los medios físicos (pizarrón interactivo, equipo de cómputo, etc.) necesarios para que el docente y los alumnos puedan usar las TIC en la clase; también tomar en cuenta el nivel de manejo que los alumnos tienen sobre las herramientas tecnológicas.

2.3.3. Cuestiones a tomar en cuenta para la implementación de las TIC

Para implementar las herramientas tecnológicas, o TIC, es necesario que primero conozcamos a los estudiantes; para que puedan facilitar el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos, es necesario implementar una metodología adecuada. Como plantea Real Pérez (año desconocido), debemos asumir dos pilares con respecto a las TIC:

- Son un recurso más
- No son el objetivo, sino el medio (Real Pérez, NA, p. 4)

Con esto nos referimos a que como docentes no debemos enfocarnos en que el estudiante domine al cien las herramientas tecnológicas, sino que a la hora de usar las herramientas tecnológicas, se concentre en el contenido matemático que se está enseñando.

Y al querer utilizar TIC para la enseñanza de algún contenido matemático: debemos tener claras otras cuestiones: ¿Cómo debemos utilizar las TIC en el proceso de enseñanza? que nos lleva a preguntarnos ¿Qué pretendemos enseñar? ¿Dónde lo vamos a enseñar? ¿Cómo lo vamos a enseñar?

En nuestro caso está claro que queremos enseñar funciones racionales, donde está explícitamente la obtención de asíntotas, el dónde y el quien, en el nivel medio superior que es la primera vez que aparecen ante la vida escolar de los estudiantes, y el cómo, primero empezaríamos con una enseñanza tradicional de lápiz y papel para ver su dominio en las prácticas sociales, qué conflictos pueden haber al momento de llegar a un valor donde la función se indefine, y usar el software Geogebra como soporte para actividades que implican gráficas más complejas. Se eligió Geogebra, debido a que es un software libre, puede usarse tanto en laptops, pc y dispositivos móviles, y la mayoría de los jóvenes hoy en día cuentan con almenos uno de estos dispositivos, y es un software que se puede utilizar para la elaboración de gráficas y manipulación de objetos matemáticos

2.4. Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica se presenta como metodología en el campo de la didáctica de investigación, particularmente en la problemática del desarrollo de la argumentación de soluciones de problemas matemáticos en el aula de en los niveles medio y primeros niveles de la educación superior (clasificación de niveles de Calderón y León, asumiendo que el nivel medio superior de nuestro país entra en el nivel medio de ellas). En nuestro caso se implementará en la segunda mitad del nivel medio superior.

Surge en los años ochenta como respuesta a las exigencias de asignar una función efectiva a las investigaciones educativas. En particular, frente al requerimiento de que sus producciones sean significativas para la enseñanza y el aprendizaje, [a fin] de consolidar una metodología de investigación específica para la didáctica de las matemática (Calderón & León, 2012, p. 73)

El sustento teórico de la ingeniería didáctica está en los trabajos de Brosseau, Chevallard y Douady, entre otros (De Faria, (2006), y Calderón y León (2012)).

2.4.1. Dimensiones de la ingeniería didáctica

Artigue hace distinción de tres dimensiones que abarca la ingeniería didáctica:

- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.
- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Está es una clasificación que se deriva de la naturaleza de la perspectiva sistémica adoptada explícitamente, la cual es paralela a la clasificación de Brousseau para el estudio de los obstáculos. (Artigue, Douady & Moreon, 1995, p. 40).

Adaptando esta clasificación a nuestra investigación, tendríamos que nuestra clasificación, en base a uno de los objetivos quedaría como:

- Plano epistemológico: engloba el concepto de asíntota, y por ende el concepto de función que los estudiantes debieron aprender al iniciar el cuarto semestre de bachillerato, los problemas como el citado previamente en Domínguez (2013), que se da privilegio a la asíntota como una recta.
- Plano cognitivo: la exigencia de movilidad permanente entre los cuadros que se necesitan para el estudio cualitativo y el nivel de manejo de los objetos elementales del análisis requerido por las justificaciones.

- Plano didáctico: la fuerza de enseñanza basada en algoritmos, el estatus inframatemático del cuadro gráfico en la enseñanza, y el mito de la resolución completa (se espera que el profesor llegue a un punto de no poder responder las preguntas que se formulan de manera natural). En este plano tenemos como ejemplo los libros de Carbonell y Santaló; Cuellar.

  En Carbonell y Santaló (2001), se menciona el concepto de asíntota como elemento de la hipérbola, al ser un texto de geometría analítica todavía no se entra todavía a una representación algebraica general para las hipérbolas; más bien, se busca construir de forma geométrica, e ir construyendo cada uno de sus elementos. Se define a la hipérbola como "el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F' (fig. 2.4.1a) es una cantidad constante que se representa por 2a" (Carbonell y Santaló, 2001, p. 163). Los elementos que componen la hipérbola son:

    - Focos: puntos fijos F y F' que se extienden por el eje x, la distancia entre estos se denomina distancia focal.
    - Centro: el punto medio entre F y F'.
    - Radios vectores: segmentos MF y MF' que unen un punto cualquiera de la hipérbola con los focos. Para que haya hipérbola es necesario que c > a.
    - Cuerda: segmento como CC' que une dos puntos de una misma rama de la hipérbola.
    - Diámetro: segmento que une dos puntos de la hipérbola y pasa por el centro. El diámetro que pasa por los focos se conoce como *diámetro focal*, y el diámetro perpendicular al focal se conoce como *eje conjugado*.
    - Asíntotas: Diagonales del rectángulo 2a*2b. (Carbonell y Santaló, 2001, p. 163 - 164).

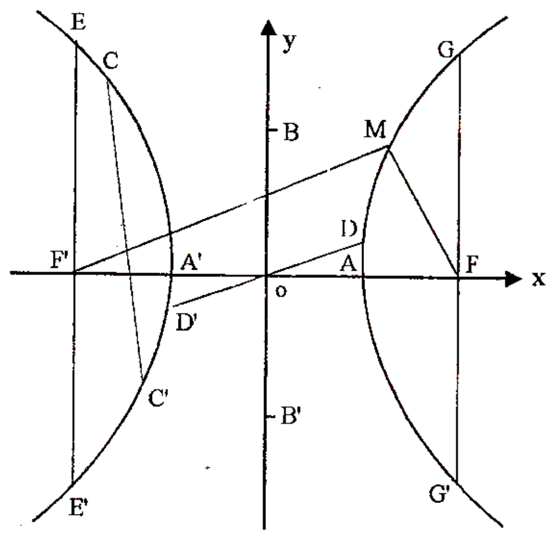


fig. 2.4.1. a Representación de la hipérbola y los puntos de sus componentes.

Aquí no se detallan las propiedades que en cursos posteriores se conocen sobre las asíntotas, como que se extienden al infinito y no suelen tocar alguna parte de las ramas de las funciones racionales cuando se extienden al infinito. En la figura 2.4.1b se muestran los componentes de las hipérbolas, las asíntotas se remarcan con una línea roja.

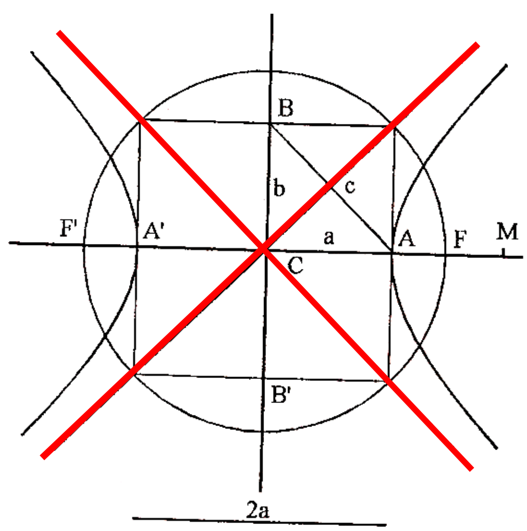


Fig. 2.1.4.b representación de las asíntotas en la hipérbola.

La expresión algebraica que se obtiene para la representación de la hipérbola con centro en el origen, y teniendo como eje focal el eje de las x es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ó $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ si tiene como eje focal el eje de las y.

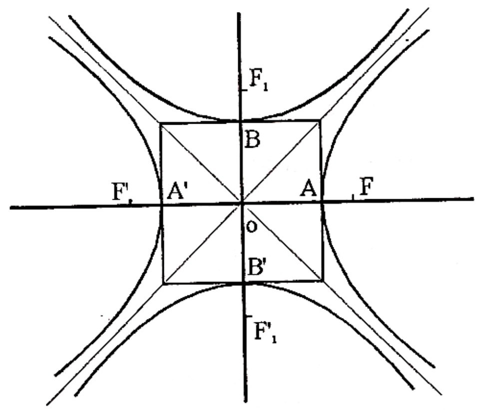


fig. 2.1.4. c asíntotas presentes en las hipérbolas

Las asíntotas son las diagonales del rectángulo a*b, por lo tanto la ecuación de la recta que las representa se define como by – ax = 0,   by + ax = 0

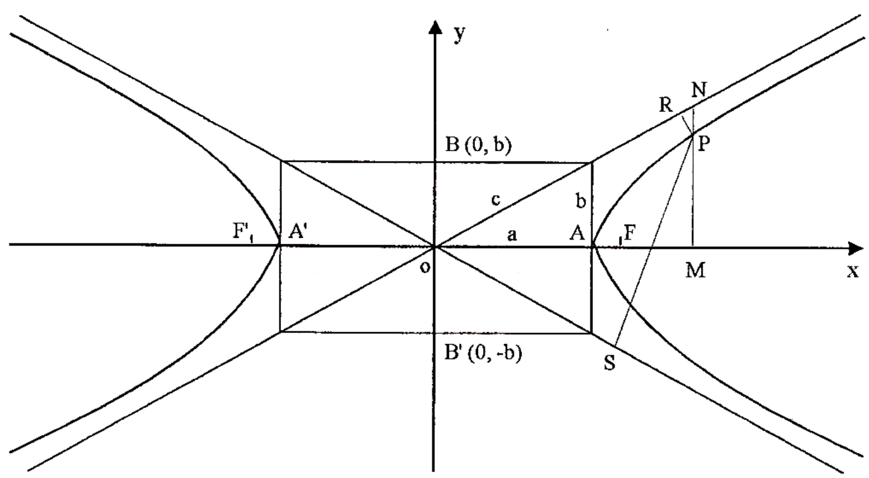
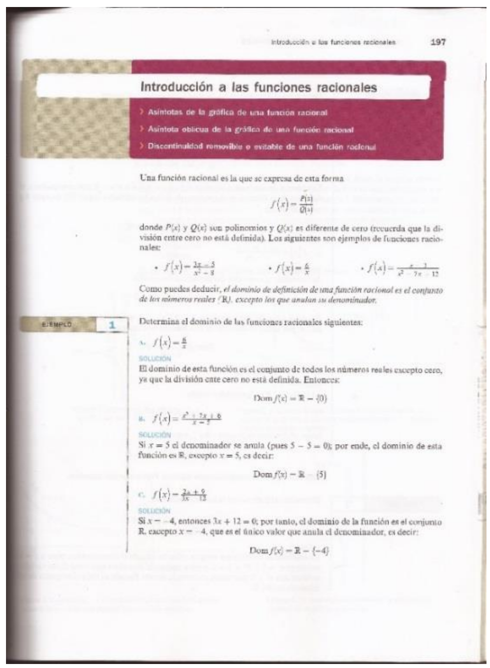


fig. 2.1.4.d Asíntotas representadas por las ecuaciones by + ax = 0, by - ax = 0

Tanto en Cuellar como en Basurto y Castillo (2011) se trabaja el modelo por competencias (modelo vigente en el sistema educativo a nivel nacional), las funciones racionales se ubican en el bloque VI de ambas obras. En la figura *2.4.1e* explica la estructura de una función racional y su dominio (en la cual las asíntotas están presentes), hasta cómo obtener las asíntotas verticales y horizontales de la función (véase en anexos). En general ambos libros van explicando paso a paso cómo obtener las asíntotas de las funciones racionales, no profundiza en el surgimiento y evolución del concepto de función racional, y por tanto las asíntotas; y en la parte final de la unidad, una evaluación de opción múltiple, presenta una serie de ejercicios, y la presencia de problemas es casi nula, lo cual se podría considerar preocupante, porque los estudiantes no tendrían idea de dónde se aplicaría o qué representa en contextos de la vida cotidiana



Introducción a las funciones racionales 197

Introducción a las funciones racionales

- Asíntotas de la gráfica de una función racional
- Asíntota oblicua de la gráfica de una función racional
- Discontinuidad removible o evitable de una función racional

Una función racional es la que se expresa de esta forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x)$ es diferente de cero (recuerda que la división entre cero no está definida). Los siguientes son ejemplos de funciones racionales:

- $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-8}$
- $f(x) = \frac{6}{x}$
- $f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x-12}$

Como puedes deducir, *el dominio de definición de una función racional es el conjunto de los números reales (ℝ), excepto los que anulan su denominador.*

EJEMPLO 1

Determina el dominio de las funciones racionales siguientes:

a. $f(x) = \frac{6}{x}$

SOLUCIÓN

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales excepto cero, ya que la división entre cero no está definida. Entonces:

$$\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

b. $f(x) = \frac{x^2+7x+6}{x-5}$

SOLUCIÓN

Si $x = 5$ el denominador se anula (pues $5 - 5 = 0$); por ende, el dominio de esta función es ℝ, excepto $x = 5$, es decir:

$$\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{5\}$$

c. $f(x) = \frac{2x+9}{3x+12}$

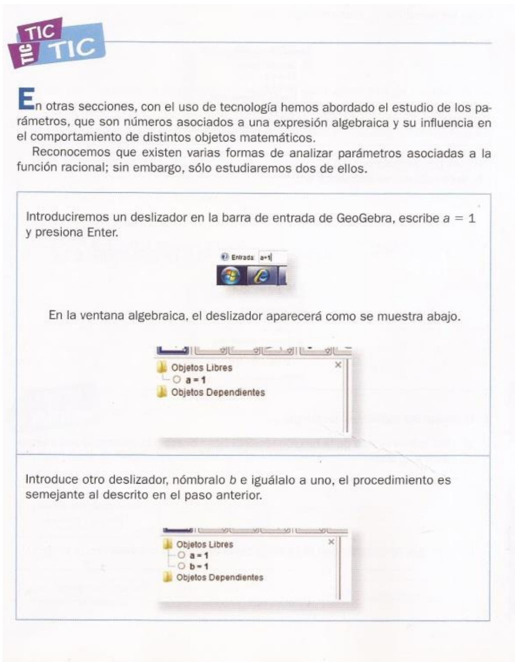
SOLUCIÓN

Si $x = -4$, entonces $3x + 12 = 0$; por tanto, el dominio de la función es el conjunto ℝ, excepto $x = -4$, que es el único valor que anula el denominador, es decir:

$$\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{-4\}$$

Figura 2.4.1e Introducción a las funciones racionales de Cuellar

Aunque en Basurto y Castillo (2011) se induce un poco más para que el estudiante note la relación de las funciones racionales y contextos usados comúnmente en física, como la velocidad. En cuanto al desarrollo del texto para el aprendizaje de obtención de asíntotas de las funciones se asemeja a Cuellar; se empieza por la tabulación, posteriormente a la graficación de puntos y finalmente unir los puntos para obtener la gráfica de la función. Y en esta obra ya se incita al uso de Geogebra como soporte (fig. 2.1.4f ,2.1.4g y 2.1.4h)



TIC

En otras secciones, con el uso de tecnología hemos abordado el estudio de los parámetros, que son números asociados a una expresión algebraica y su influencia en el comportamiento de distintos objetos matemáticos.

Reconocemos que existen varias formas de analizar parámetros asociadas a la función racional; sin embargo, sólo estudiaremos dos de ellos.

Introduciremos un deslizador en la barra de entrada de GeoGebra, escribe $a = 1$ y presiona Enter.

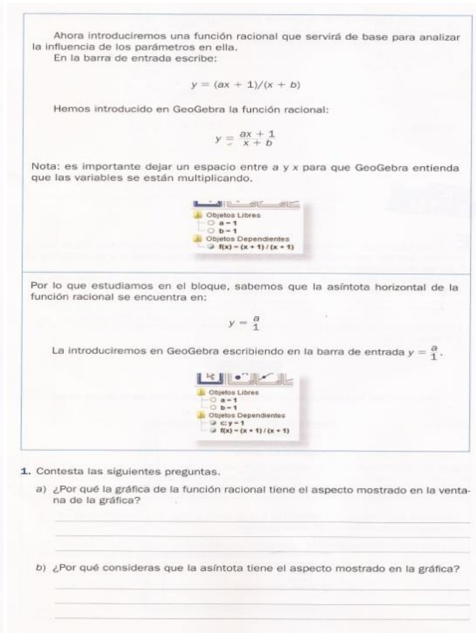
Entrada: a=1

En la ventana algebraica, el deslizador aparecerá como se muestra abajo.

Objetos Libres
a = 1
Objetos Dependientes

Introduce otro deslizador, nómbralo b e iguálalo a uno, el procedimiento es semejante al descrito en el paso anterior.

Objetos Libres
a = 1
b = 1
Objetos Dependientes



Ahora introduciremos una función racional que servirá de base para analizar la influencia de los parámetros en ella.

En la barra de entrada escribe:

$$y = (ax + 1)/(x + b)$$

Hemos introducido en GeoGebra la función racional:

$$y = \frac{ax + 1}{x + b}$$

Nota: es importante dejar un espacio entre a y x para que GeoGebra entienda que las variables se están multiplicando.

Objetos Libres
a = 1
b = 1
Objetos Dependientes
f(x) = (x + 1) / (x + 1)

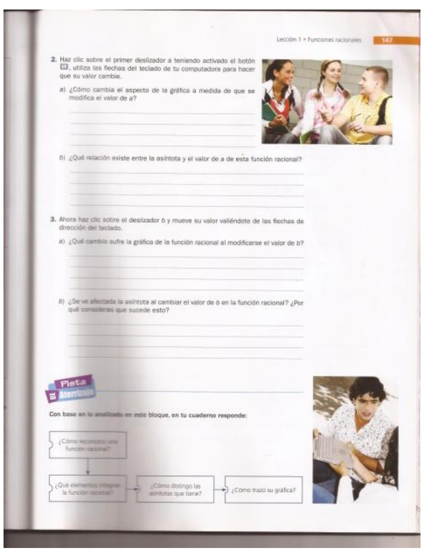
Por lo que estudiamos en el bloque, sabemos que la asíntota horizontal de la función racional se encuentra en:

$$y = \frac{a}{1}$$

La introduciremos en GeoGebra escribiendo en la barra de entrada $y = \frac{a}{1}$.

Objetos Libres
a = 1
b = 1
Objetos Dependientes
c: y = 1
f(x) = (x + 1) / (x + 1)

1. Contesta las siguientes preguntas.
   a) ¿Por qué la gráfica de la función racional tiene el aspecto mostrado en la ventana de la gráfica?
   b) ¿Por qué consideras que la asíntota tiene el aspecto mostrado en la gráfica?



Lección 1 • Funciones racionales 147

2. Haz clic sobre el primer deslizador a teniendo activado el botón, utiliza las flechas del teclado de tu computadora para hacer que su valor cambie.
   a) ¿Cómo cambia el aspecto de la gráfica a medida de que se modifica el valor de a?
   b) ¿Qué relación existe entre la asíntota y el valor de a de esta función racional?
3. Ahora haz clic sobre el deslizador b y mueve su valor valiéndote de las flechas de dirección del teclado.
   a) ¿Qué cambio sufre la gráfica de la función racional al modificarse el valor de b?
   b) ¿Se ve afectada la asíntota al cambiar el valor de b en la función racional? ¿Por qué consideras que sucede esto?

Pista de Aterrizaje

Con base en lo analizado en este bloque, en tu cuaderno responde:

¿Cómo reconozco una función racional?
¿Qué elementos integran la función racional?
¿Cómo distingo las asíntotas que tiene?
¿Cómo trazo su gráfica?

Fig. 2.1.4f, g y h respectivamente. Inclusión de las TIC en la curricula de la enseñanza de funciones racionales

2.4.2. Fases de la Ingeniería Didáctica.

Una secuencia didáctica aplicada bajo la metodología de ingeniería didáctica debe comprender estas cuatro fases:

1. Análisis preliminares
   sirven para analizar aspectos como: el análisis de epistemológico de los contenidos a estudiar, el discurso matemático escolar (dME), las concepciones que tienen los estudiantes respecto al tema, las restricciones donde se va a realizar la situación didáctica.
2. Análisis *a priori*
   Aquí se trata de describir la situación didáctica, qué podría ocurrir durante la secuencia; que objetivos esperamos cumplir con esta secuencia. Pero debe tener una validación interna.
3. Experimentación
   Puesta en escena de la secuencia didáctica, el docente puede asumir el papel de moderador u observador y debe recopilar los datos que surjan para el análisis *a posteriori.*
4. Análisis *a posteriori*
   Confrontación de los resultados obtenidos en la experimentación con el análisis *a priori.* Aquí veremos si cumplimos los objetivos planteados al principio de la investigación, si se cumplieron nuestras expectativas, y lo que ocurrió realmente.

Capítulo 3: Planeación de la actividad

En este capítulo plantearemos la secuencia didáctica. Dicha secuencia se compondrá de un breve cuestionario para saber cuáles son las dificultades de los estudiantes; de ahí se plantearán una serie de actividades que involucrarán graficar funciones y uso de software para interactuar con gráficas más complejas, para ahorrar tiempo en elaborarlas manualmente.

3.1. Análisis preliminares de las actividades

Siguiendo el esquema de la ingeniería didáctica, al igual que la investigación en general, también se aplicarán las cuatro fases de esta en cada actividad para explicar mejor el propósito de cada una de estas (análisis preliminar, análisis a priori, que se confrontará con el análisis a posteriori, y la fase de experimentación).

La actividad 1 será un cuestionario (véase en Anexos 1) donde se busca conocer la percepción que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, que tan fáciles o difíciles las consideran, cual es la rama de las matemáticas con la que tienen mayor dificultad.

En nuestro caso, será un tema de matemáticas IV, las funciones racionales (donde están presentes las asíntotas), se espera que los estudiantes tengan claro el concepto de función; aunque "diversas investigaciones muestren como la enseñanza del concepto de función en las etapas en las etapas iniciales del aprendizaje del cálculo es problemática" (De Faria, 2006, p. 6)

En la actividad 2 se pretende evaluar que tan desarrollada tienen la habilidad de graficar funciones, y al poner criterios a la asignación de valores a las variables, se guía "implícitamente" que lleguen a encontrarse con asíntotas en las funciones.

Se cuestionará a los alumnos cómo se comporta la gráfica cuando los valores de x se acercan demasiado al valor donde x se indefine y cuál es el valor de f(x) cuando x toma valores muy grandes

La actividad 3, que se considera la principal debido a que implica el uso de herramientas tecnológicas, tiene la finalidad de que los estudiantes puedan manipular las variables de una función y a la vez observar que ocurre con la gráfica de la función cuando cambia una o más variables, en este caso se espera se enfoquen en el comportamiento de las asíntotas. Como un extra, se pedirá a los estudiantes que agreguen otro tipo de variables a la estructura de la función (trigonométricas, logarítmicas, etc.) para observar que ocurre con las asíntotas, si siguen siendo principalmente rectas, o pueden ser también curvas.

3.2. Análisis a priori

Se trabajó en la preparatoria de la Universidad Mesoamericana, institución particular ubicada en la ciudad de San Cristóbal de Las Casas.

Al ser una institución particular, está la creencia de que tiene mayor nivel que una institución pública. Se esperaba que los alumnos tuvieran conocimiento de Geogebra, y por lo tanto no se dificultara su uso.

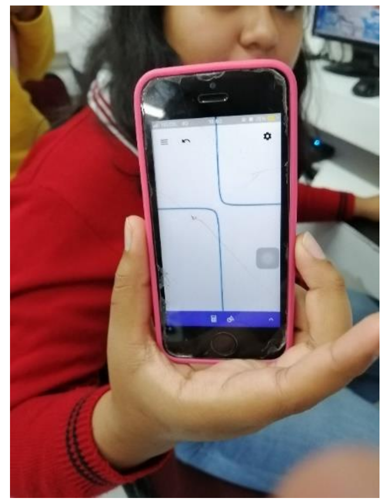
3.3. Fase de experimentación

Para la práctica se trabajó con el grupo de 5° semestre, conformado por dieciocho alumnos de la especialidad Químico – Biólogo; bajo la coordinación conjunta con el maestro de matemáticas del grupo, Ing. Darinel Cordero.

La práctica se realizó en dos sesiones de una hora los días 25 y 26 de noviembre de 2019.

En la primera sesión nos enfocamos en el diagnóstico para saber los conocimientos matemáticos de los alumnos, posteriormente pasamos a las actividades que se realizan a lápiz y papel.

En la segunda sesión no concentramos en la actividad donde se usó Geogebra, finalmente concluimos con una rondad de discusiones sobre los resultados de trabajar con Geogebra, y conocer la opinión de los alumnos respecto a la actividad. Se trabajó con una versión de navegador de dicho software, debido a que son equipos de laboratorio y por ende están congelados; y algunos decidieron trabajar en su celular mediante la aplicación graficador.

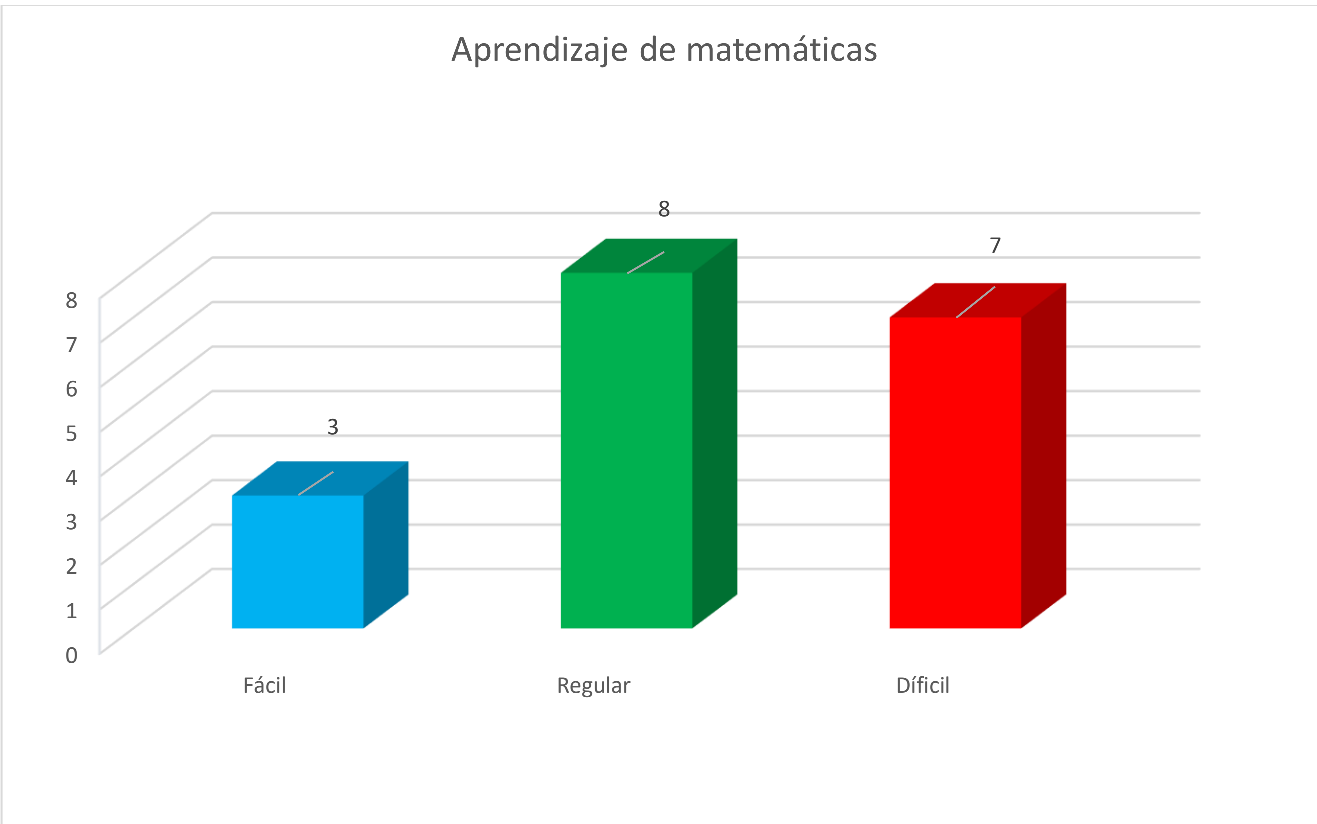


Fotos 3.3.a y 3.3.b Respectivamente, Los alumnos en el laboratorio de cómputo y alumnos con GeoGebra en sus móviles

Capítulo 4. Resultados y análisis *a posteriori*

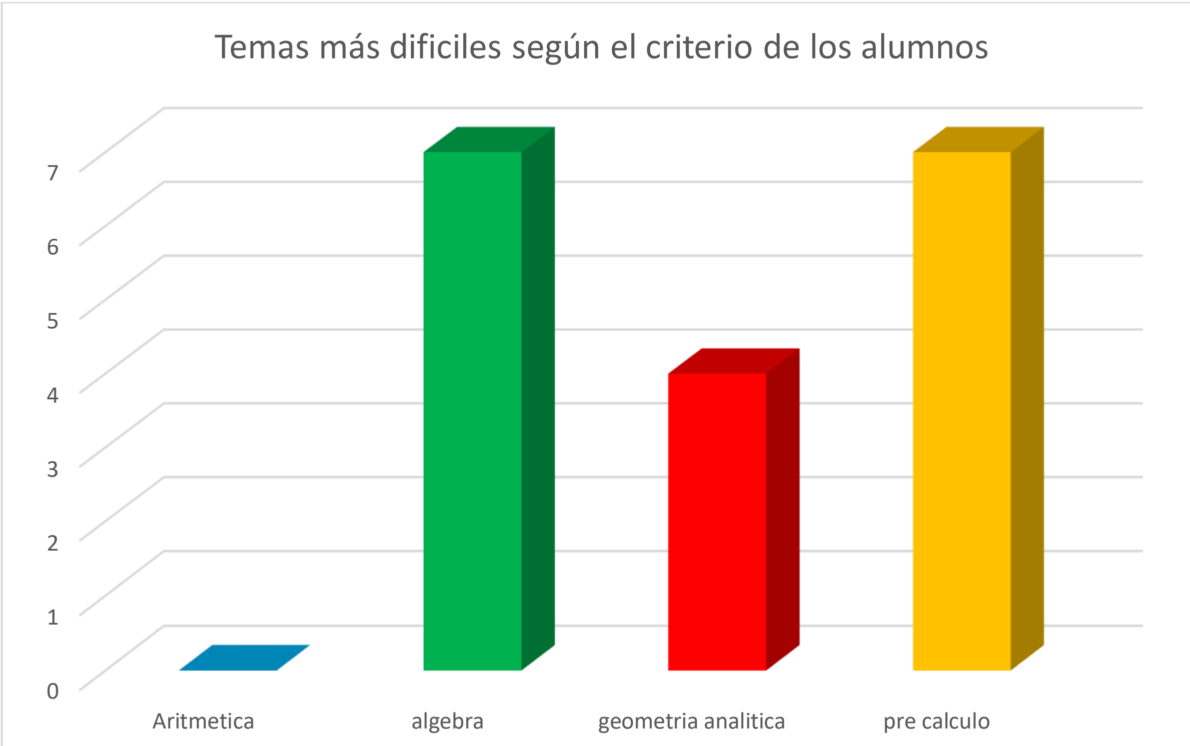
Al finalizar la actividad, se descubrió que los alumnos en realidad tenían un nivel bajo comparado al esperado durante el análisis a priori, debido a que el promedio general del grupo es de 7 (dato proporcionado por el maestro del grupo); Hubieron 2 alumnos que fueron transferidos a la institución, pero eso es de menor importancia.

La mayor parte de los alumnos consideran el aprendizaje de matemáticas como regular, siendo el un total de 8, mientras que 7 consideran el aprendizaje difícil, y solo 3 alumnos consideran que aprender matemáticas es fácil.



Gráfica 4.a. Aprendizaje de matemáticas de los alumnos obtenido en el diagnóstico previo a la actividad

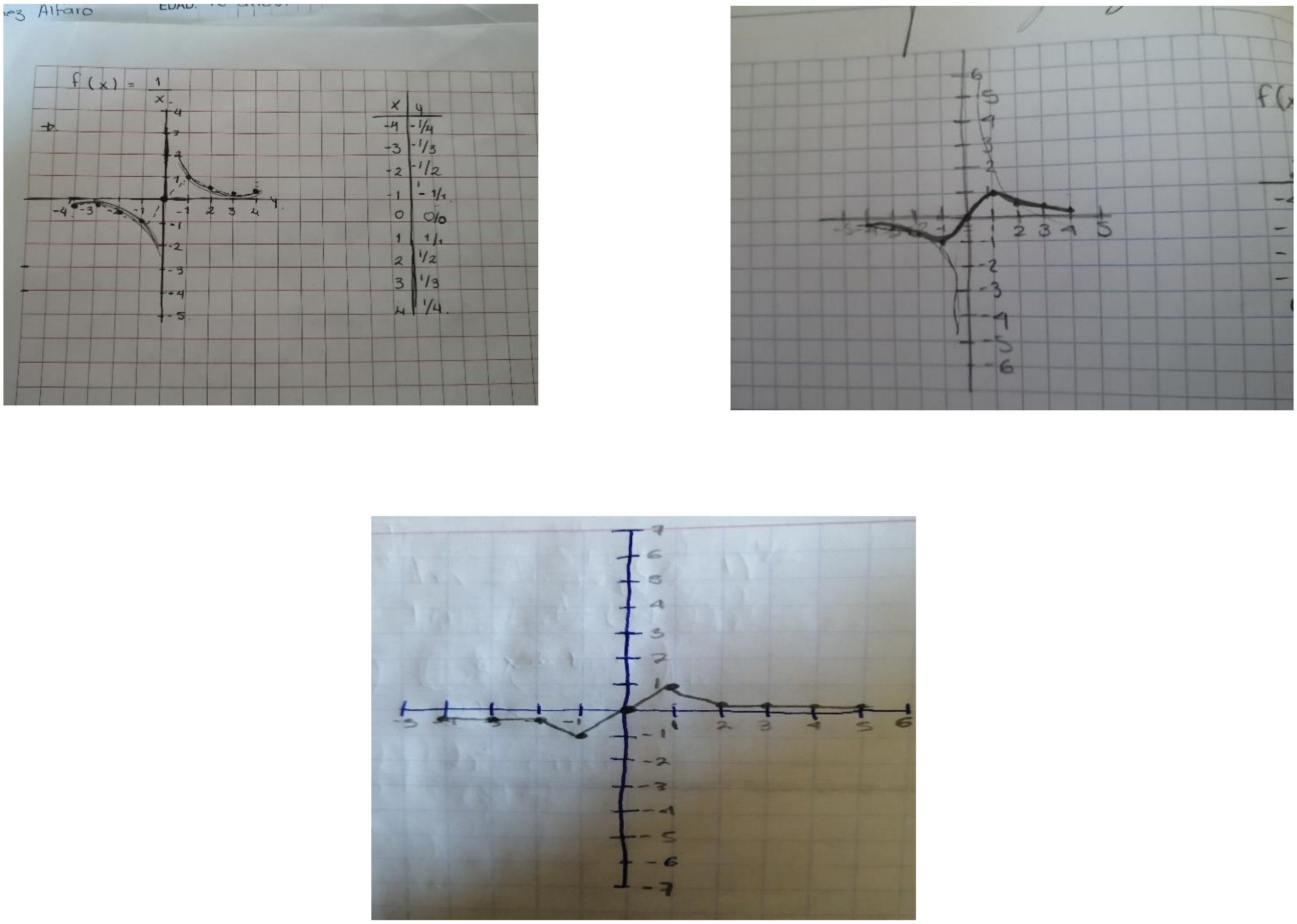
En cuanto a los temas para aprender, los que consideran más difíciles son álgebra y pre cálculo, con 7 cada uno, y el segundo lugar figura geometría analítica, con 4, no consideraron aritmética.



Gráfica 4.b. Temas más difíciles de aprender según el criterio de los alumnos

En cuanto al por qué tienen dificultades para aprender matemáticas, hay opiniones variadas, entre las cuales están: “porque no puedo asociarlo con otras cosas que pueda comprender más”; “porque son procedimientos bastante largos y tediosos luego para sacar resultados hay que hacer mucha derivada de números”; “no le entiendo a algunos temas, el desarrollar se me complica”; “me confundo mucho en los procedimientos” entre otras.

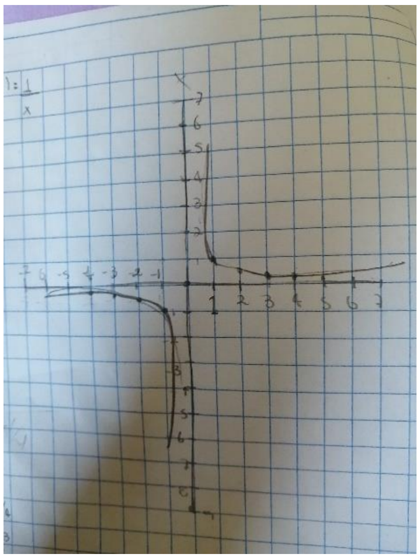
En cuanto a la primera actividad que tenía como finalidad saber que tan bien grafican, hubieron algunos errores cuando llegaron al punto donde se indefine la función y se producen las asíntotas, como se ilustra en las siguientes fotografías.

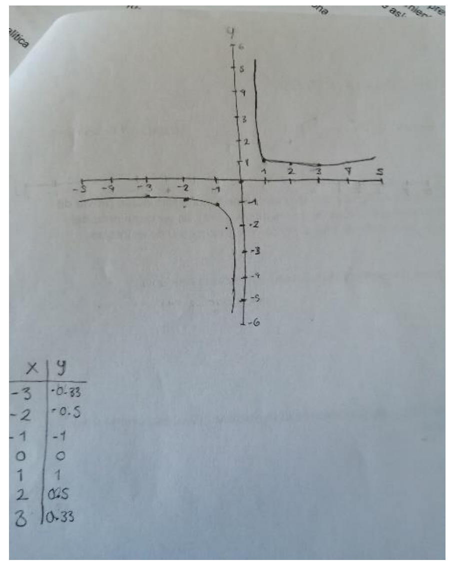


Fotos 4.a, 4.b y 4.c respectivamente. Errores cometidos por alumnos durante la graficación

Error común durante la graficación: unir los puntos de los cuadrantes tercero y primero, en el momento donde la función empieza a acercarse al eje, aunque en el segundo caso se dio cuenta de su error.

Sin embargo, hubo alumnos que entendieron el comportamiento de la gráfica de una función racional, y respetaron las asíntotas que eran los ejes.





Fotos 4.d y 4.e respectivamente. Graficación correcta de la función racional, respetando las asíntotas representadas por los ejes.

Ahora en la siguiente parte de la actividad 1, las preguntas:

1. ¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

2. ¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero?

3. ¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero?

4. ¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor?

En la primera pregunta, la mayoría de los alumnos dio como respuesta que la gráfica cambiaba de dirección, se modifica, se modifican las coordenadas, etc. Pero se dan cuenta que ocurre un cambio al modificar el signo de la función.

En la segunda pregunta, también hubo una opinión generalizada de que el valor da infinito, o no se gráfica, pero en un caso, el alumno notó que hay una línea muy cerca del eje

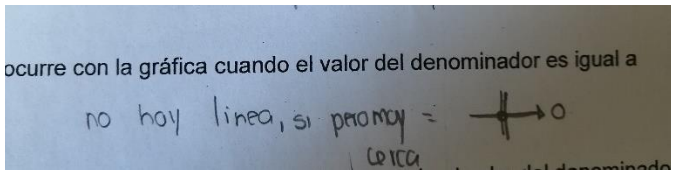


Foto 4.f.

En la tercera pregunta, no manejan la expresión "tiende a infinito" que se suele usar en cálculo diferencial, debido a que no lo asocian al cálculo, pero la mayoría menciona la característica de que la gráfica se acerca al eje, sin usar el término tiende, en uno, el alumno contestó "se pega más al eje y sin tocarlo".

La cuarta y última pregunta de la actividad 1 tuvo respuestas semejantes a la pregunta tres, aunque relacionadas al eje x, al decir que "queda en forma lineal", o "se aleja" refiriéndose a que se aleja del eje y.

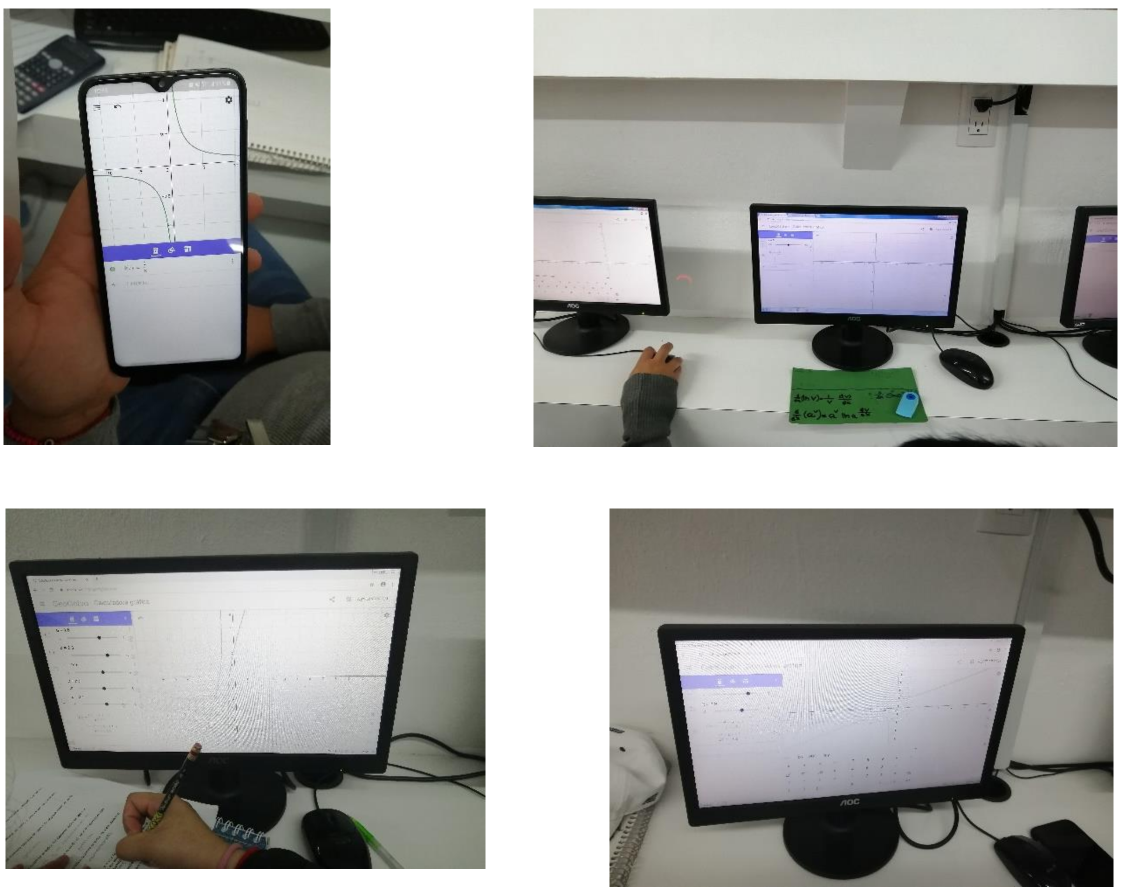
Se aclara que primero realizaron la actividad de forma manual, posteriormente, decidieron usar Geogebra para validar sus respuestas, aunque algunos se dieron cuenta de que estaban mal, pero el software les sirvió para contestar las preguntas.

A pesar de ser un grupo con el nivel educativo que tienen (mencionado previamente en el capítulo tres), supieron expresar los cambios que surgen en la gráfica al modificar el signo en las variables, expresaron con lenguaje sencillo sus respuestas, algunos de forma general, y otros más específicos, aunque ninguno uso la frase "tiende a infinito", o "tiende" a *y,* etc.

En la actividad 2, que se usó geogebra, se le pidió a los alumnos que realizaran la gráfica de la función, y se les oriento para que crearan los deslizadores para la manipulación de variables, se dieron cuenta de que un cambio en las variables influye en el comportamiento de las asíntotas, sin embargo, solo unos pocos especificaron la influencia de cada variable en ellas.

Respecto a la percepción de los alumnos sobre la actividad, el cien por ciento consideró positivo y significativo el uso de esta herramienta para su aprendizaje (anexos 3); reforzando la hipótesis “el uso de las TIC en la didáctica de las matemáticas puede tener resultados positivos para los estudiantes” debido a la interacción de los estudiantes con el objeto matemático (grafica). Se cita el ejemplo de “Karen”, quien especificó como influye cada variable en el comportamiento de la gráfica:

> “Si se mueve la *a* se mueve la gráfica. Si se mueve b solo sube o baja. Si se mueve c se intercambian. Si se mueve d pues igual cambia la posición.”



Fotos 4.g, h, i, j respectivamente. Realización de la actividad 2 usando Geogebra

CONCLUSIONES

Bajo la perspectiva sociepistemológica, se observó que los alumnos han arrastrado el “miedo” a las matemáticas, un fenómeno muy común en México, desde que no saben para qué les servirán, su conocimiento adquirido en grados de estudio anteriores o fuera de la escuela es considerado invalido, etc.

La ingeniería didáctica nos ayudó a tener una organización adecuada para la implementación de las prácticas, debido a que es una metodología que se implementa en las aulas, aunque al final se agregaron dos preguntas para conocer la opinión y realmente saber si el uso de Geogebra ayudó a tener un aprendizaje significativo del tema.

A pesar de ser un colegio particular, se descubrió que el nivel de los estudiantes en matemáticas es bajo, sin embargo, con la ayuda de un software dinámico y fácil de usar como Geogebra, se demostró que estas herramientas tecnológicas, empleadas adecuadamente, pueden ser de gran ayuda para superar ciertas dificultades, al construir la gráfica de las funciones racionales, sin observar que las asíntotas son parte de la gráfica, y no solo un espacio vacío de estas, como en los errores cometidos por algunos estudiantes reflejados en el capítulo 4.

Como fue demostrado en trabajos citados durante la investigación y en ésta, el trabajar con herramientas tecnológicas con una guía adecuada por parte del docente, motivó más a los alumnos, así como logró un aprendizaje significativo en el tema de las asíntotas. Al ser algo que no suelen usar seguido en el aula, debido a que están la mayor parte del tiempo aprendiendo de forma “tradicional” y eso influye en la motivación para aprender matemáticas, demostrado en la sección 4 donde se ve que la mayor parte de los alumnos considera a las matemáticas difíciles de aprender. Y ahora con la pandemia de COVID-19, los sistemas de educación en el mundo deberán estar más involucrados en la implementación de TIC en la educación, porque esta pandemia cambio las cosas a largo plazo, sino es que para siempre

BIBLIOGRAFIA

Arrieta, J. (2013). Las TIC y las matemáticas, avanzando hacia el futuro. Tesis de maestría no publicada: Universidad de Cantabria, España.

Artigue, M, Régine, D & Moreno, L. (1995) Ingeniería Didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. Bogotá, Colombia. Recuperado el 22 de noviembre de 2018 en: http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Ballester, S. (2009). Aplicaciones de las funciones matemáticas en la vida real y otras áreas. Revista digital Innovación y experiencias educativas N° 23, Octubre 2008. ISSN 1988-6047. (pp. 4-6). Recuperado el 27 de noviembre de 2018 en: https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_23/SERGIO_BALLESTER_SAMPEDRO01.pdf

Basurto, E. & Castillo, G. (2011), *Matemáticas 4.* Pearson Educación. Primera Edición. México. (pp. 128 – 148).

Bautista, L. Morales, A & Mena, J. (2013). El rol de la argumentación gráfica en la construcción de conocimiento matemático escolar: El caso de la paridad e imparidad de las funciones. Actas del VII CIBEM [ISSN 2301-0797]. (Pp. 6796-6803). Recuperado el 27 de septiembre de 2018 en: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1328.pdf

Carbonell, V. & Santaló, M. (2001). *Geometría Analítica.* Grupo Editorial Éxodo. Segunda Edición. México, D.F. (pp. 163 – 185)

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. México: GEDISA.

Cordero, F. Cen, C & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. Artículo publicado en Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), Vol. 13 (2). (pp. 187-214). Recuperado el 15 de septiembre de 2018 en: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v13n2/v13n2a4.pdf

Cordero, F. & Domínguez, I. (2001). *Algunas construcciones de comportamientos asintóticos senoidales en estudiantes de precálculo y cálculo.* Artículo publicado en CLAME. (pp. 325-332) Cineasta- Instituto Politécnico Nacional. México. Recuperado el 4 de abril de 2018, en: https://www.researchgate.net/profile/Francisco_Cordero/publication/273775162_Algunas_Construcciones_de_Comportamientos_Asintoticos_Senoidales_en_Estudiantes_de_Precalculo_y_Calculo/links/550cfc260cf2752610978ed5/Algunas-Construcciones-de-Comportamientos-Asintoticos-Senoidales-en-Estudiantes-de-Precalculo-y-Calculo.pdf

Cuellar, J. (2012). *Matemáticas IV.* Editorial McGraw Hill/Interamericana EDR. Tercera Edición. México (pp. 195 – 215).

Dirección General de Bachillerato. Programa de estudios de Cuarto Semestre de Matemáticas IV. Recuperado el 17 de marzo de 2020 en: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/CFB/4to-semestre/Matematicas-IV.pdf

Domínguez, I. (2003). La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Durán, A. (2003) El último de los magos. La Gaceta de la RSME, Vol. 6.1. pp. 124-127. Recuperado el 30 de septiembre de 2019 en: https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/historia601.pdf

García, E. (2014). Hasta el Infinito y más allá: Concepciones manifestadas por el alumnado de bachillerato respecto al concepto de asíntota horizontal. Estudio exploratorio. Trabajo de maestría. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Pp. 2 - . Recuperado el 17 de septiembre de 2019 de:

https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM-EmilioAndresGarciaGalvez.pdf

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. Informática Educativa UNIANDES - LIDIE Colombia, Vol. 10, No. 1, pp. 93-111.

Krannewitter, J. (2014). Objetos matemáticos y su aprendizaje: un recorrido con “obstáculos”. Universidad Nacional de General Sarmiento. Recuperado el 3 de septiembre de 2018 en: https://www.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2014/10/objetos-matematicos-y-su-aprendizaje-un-recorrido-con-obstáculos.pdf

Granados, A. (2018). Espirales. Recuperado el 23 de septiembre de 2019 en: https://www.researchgate.net/publication/328482004_Espirales

Llanos, VC. Otero, MR & Gazzola, MP (2014). Las funciones racionales en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación: el estudio de las asíntotas utilizando GeoGebra como soporte. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires, Argentina. Recuperado el 28 de marzo de 2019 en https://www.researchgate.net/publication/265842186_Las_funciones_racionales_en_el_marco_de_un_Recorrido_de_Estudio_y_de_Investigacion_el_estudio_de_las_asintotas_utilizando_GeoGebra_como_soporte

Lupiañez, JL. Y Moreno, L. Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Cantabria y CINVESTAV del Instituto Politécnico Nacional IPN. Recuperado el 14 de septiembre de 2018 en https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/homenaje/20LupianezJL.PDF

Maña, J. (2013). Utilización de las TIC en el aula. Geogebra y Wiris. Universidad de Almería. Recuperado el 01 de octubre de 2020 en http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/2289/Trabajo.pdf?isAllowed=y&sequence=1

Morales, A & Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. Artículo publicado en Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), Vol. 17(3). (pp. 319-345). Recuperado el 27 de septiembre de 2018 en: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v17n3/v17n3a4.pdf

Real Pérez, M. (NA). *Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Jornadas de Innovación docente. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. (pp. 1 – 13). Recuperado el 28 de mayo de 2019 en: https://personal.us.es/suarez/ficheros/tic_matematicas.pdf

Sáenz, L. (2017). La curva folium u hoja de Descartes. Recuperado el 30 de septiembre de 2019 en matematicaeducativa.com › foro › download › file

Salat, R. (2013). La enseñanza de las matemáticas y la tecnología. Innovación Educativa, vol. 13. No. 62, 62-74.

Suárez, L. (2008). Modelación – Graficación, Una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. Tesis de doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Tapia, F. (2002). Apolonio, el geómetra de la antigüedad. Apuntes de historia de las matemáticas. Vol. 1. No. 1. P. 24

ANEXOS

ANEXO 1. Diagnóstico previo a la actividad

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: EDAD:

SEMESTRE:

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento de aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- Regular
- Difícil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

Geometría analítica

Pre calculó

¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Actividad 1

Teniendo f(x)=$\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

Tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero?

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero?

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor?

Actividad 2

En Geogebra, inserte la función (a x^2 + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.**

¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas?

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

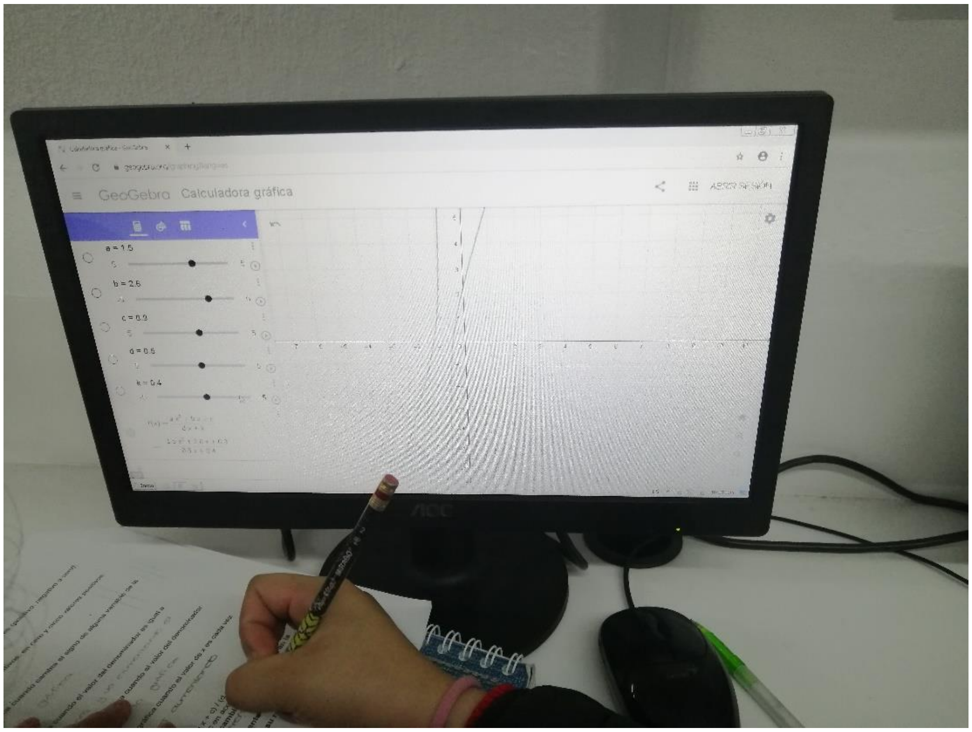
¿Qué les pareció la actividad?

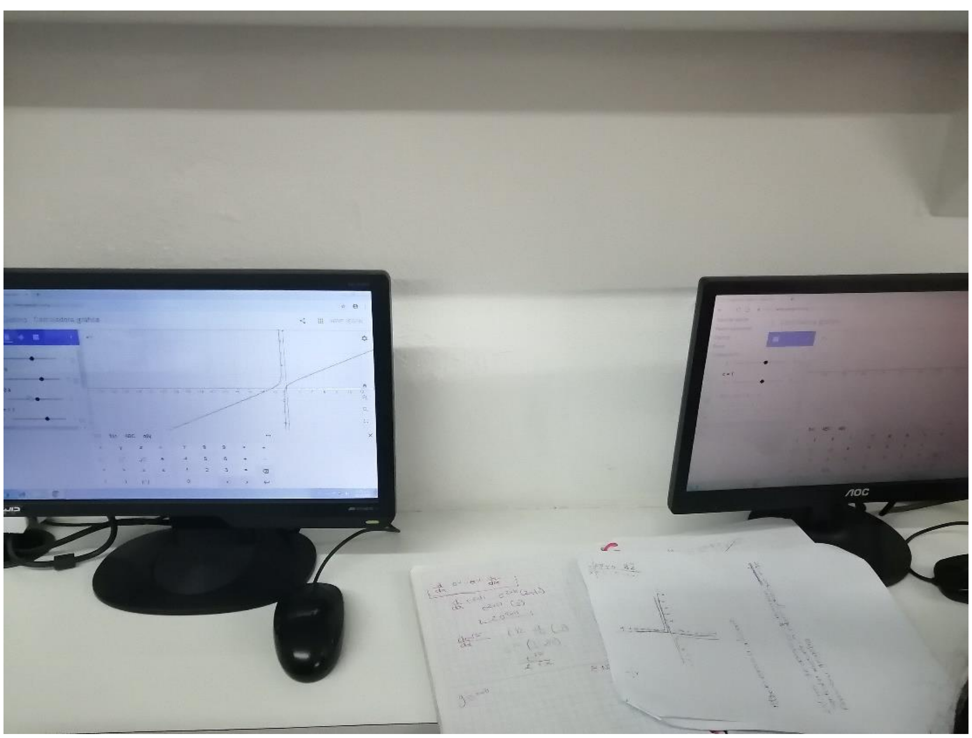
¿Creen que aprendieron de forma más significativa mediante un entorno gráfico como el que proporciona Geogebra, que trabajando de forma manual?

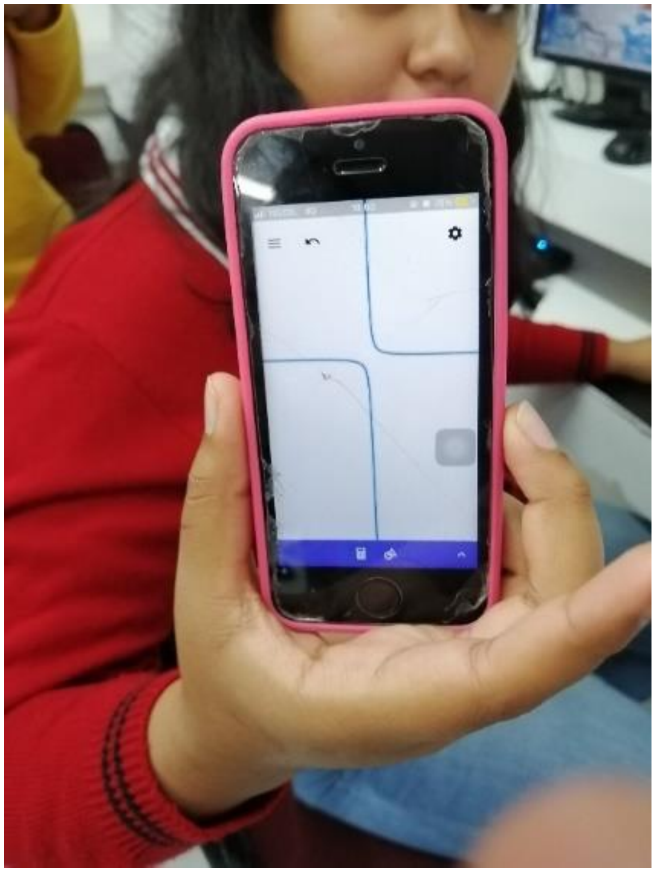
ANEXO 2. Fotos durante la práctica


PC-16
PC-15
PC-14

.


GeoGebra Calculadora gráfica





ANEXO 3. Pruebas contestadas por los estudiantes

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: Karen Gômez Alfaro EDAD: 16 años.

SEMESTRE:

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- <u>Regular</u>
- Dificil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

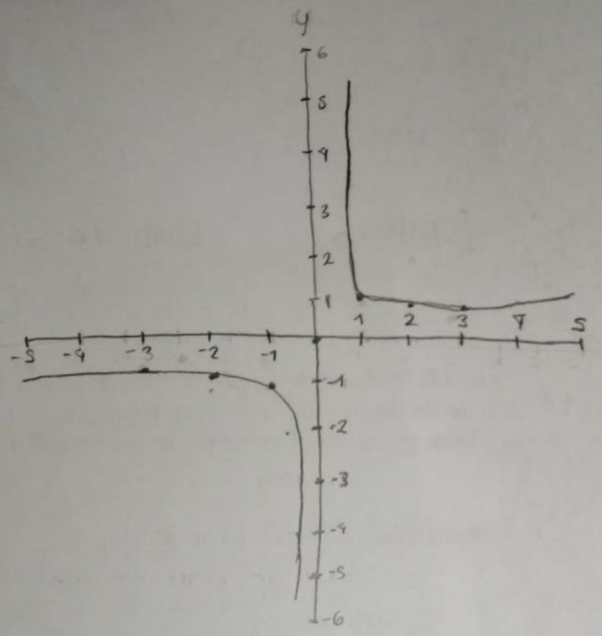
Geometría analítica

<u>Pre calculó</u>

¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

- Por que son procedimientos bastantes largos y tediosos. luego para sacar resultados hay que hacer mucha derivada de números.

$F(x) = \frac{1}{x}$



x	y
-3	-0.33
-2	-0.5
-1	-1
0	0
1	1
2	0.25
3	0.33

Actividad 1

Teniendo f(x)=$\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

La grafica hace una inversión hacia el lado izquierdo donde están los negativos o viceversa si es positivo.

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero? Incrementa el valor de Y y la posición de la grafica varia.

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero? los ejes y variables se acercan por el valor del denominador.

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor? La asintota se vuelve lineal.

Actividad 2

En Geogebra, inserte la función (a x² + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.**

- si se mueve la a se mueve la grafica
- Si se mueve b sólo sube o baja
- Si se mueve c se intercambian
- Se mueve d pues igual cambia la posición.

¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas? las variables son a, b, c, d, k.

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

pues van moviendo su posición si se modifica alguna variable

¿Qué les parecio la actividad?

Buena por que descubres cosas que no habías como experimentado en el movimiento de variables que pueden realizarse en una grafica.

Pero un poco complicada por que es un tema de dificultad para mí.

¿Creen que aprendieron de forma más significativa mediante un entorno gráfico como el que proporciona geogebra, que trabajando de forma manual?

Si porque puedes hacer movimientos libres y descubrir diferentes movimientos que puedes realizar en una grafica.

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: Lucia Collazo López EDAD: 17

SEMESTRE:

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- Regular
- Difícil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

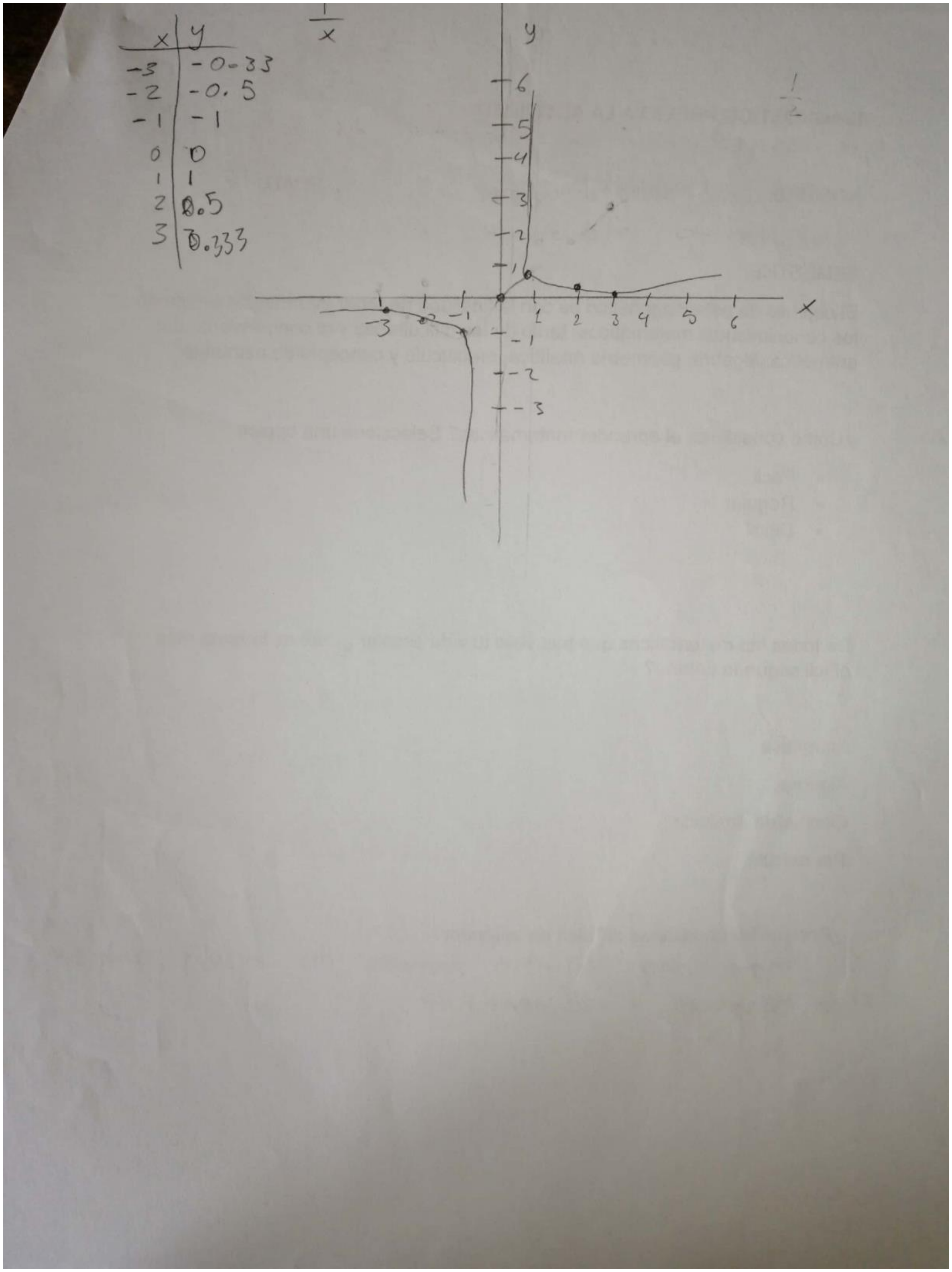
Algebra

Geometría analítica

Pre calculó

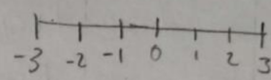
¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Porque tienen distintas formas de resolver, que se me revuelve y me confunde



x	y
-3	-0.33
-2	-0.5
-1	-1
0	0
1	1
2	0.5
3	0.333

Actividad 1 $\frac{1}{2}$



Teniendo f(x)=$\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

Combia de dirección

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero? Se convierte en infinito

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero?

Se acerca más al eje.

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor?

Se aleja

Actividad 2

En Geogebra, inserte la función (a x² + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.**

¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas?

Que se mueven en todo el eje

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

Que dependiendo la constate va a cambiar su posición y signo

1. Etretenido.

2. Si, porque nos demostro de una forma muy facil los ositotos, y los diferencia que puede hacer una variable y constante.

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: Miriam Berenice Gomez Hdez. EDAD: 17

SEMESTRE: 5to Quimicos-Biologos.

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- Regular
- Dificil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

Geometría analítica

Pre calculó

¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Por que son muchas formulas.

Actividad 1

Teniendo f(x)=$\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

Cambia de dirección

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero?

Se convierte en infinito.

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero?

Se acerca mas al eje

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor?

Se alega del eje.

Actividad 2

En Geogebra, inserte la función (a x² + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.**

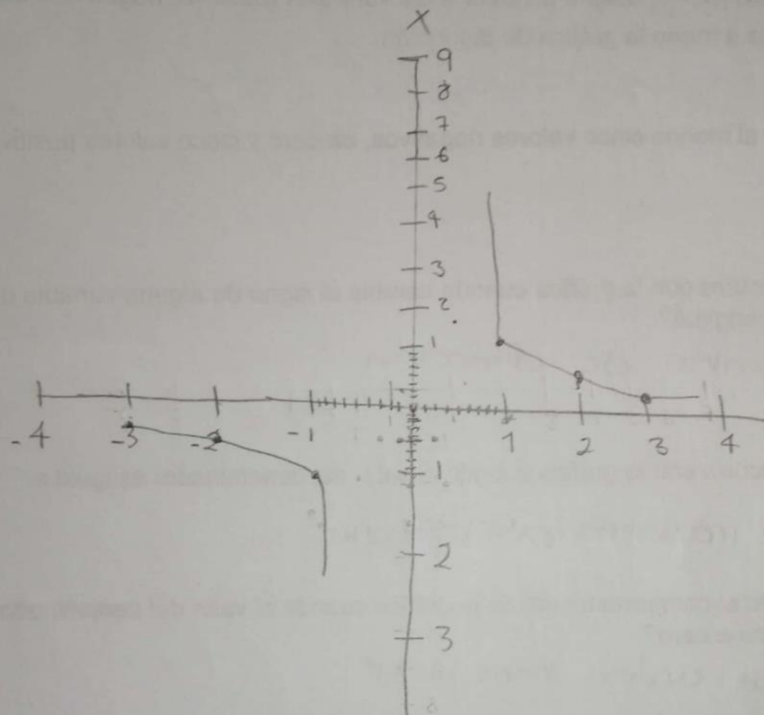
¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas?

Cambia el lado del eje

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

Que dependiendo su constante,
Cambiara de posición.

$y = \frac{1}{x}$



x	y
-3	-1/3
-2	-1/2
1	1
0	0
1	1
2	1/2
3	1/3

① Que les pareció la actividad?
Divertida y muy buena.

②.- Sí, es mas divertido, y practico, sin tener qu
copiar la grafica.

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: S. Edith. López. Carpio.   EDAD: 17.

SEMESTRE:

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- Regular
- Dificil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

Geometría analítica

Pre calculó

¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Me complica ver tantos números, los signos, y cada ley.

Actividad 1

Teniendo $f(x)=\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

y	-1/5	-1/4	-1/3	-1/2	-1/1	0/0	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

Cambia de posición.

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero? Solo quedo en una posición

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero? Se crea una mayor inclinación.

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor? Forma lineal.

Actividad 2

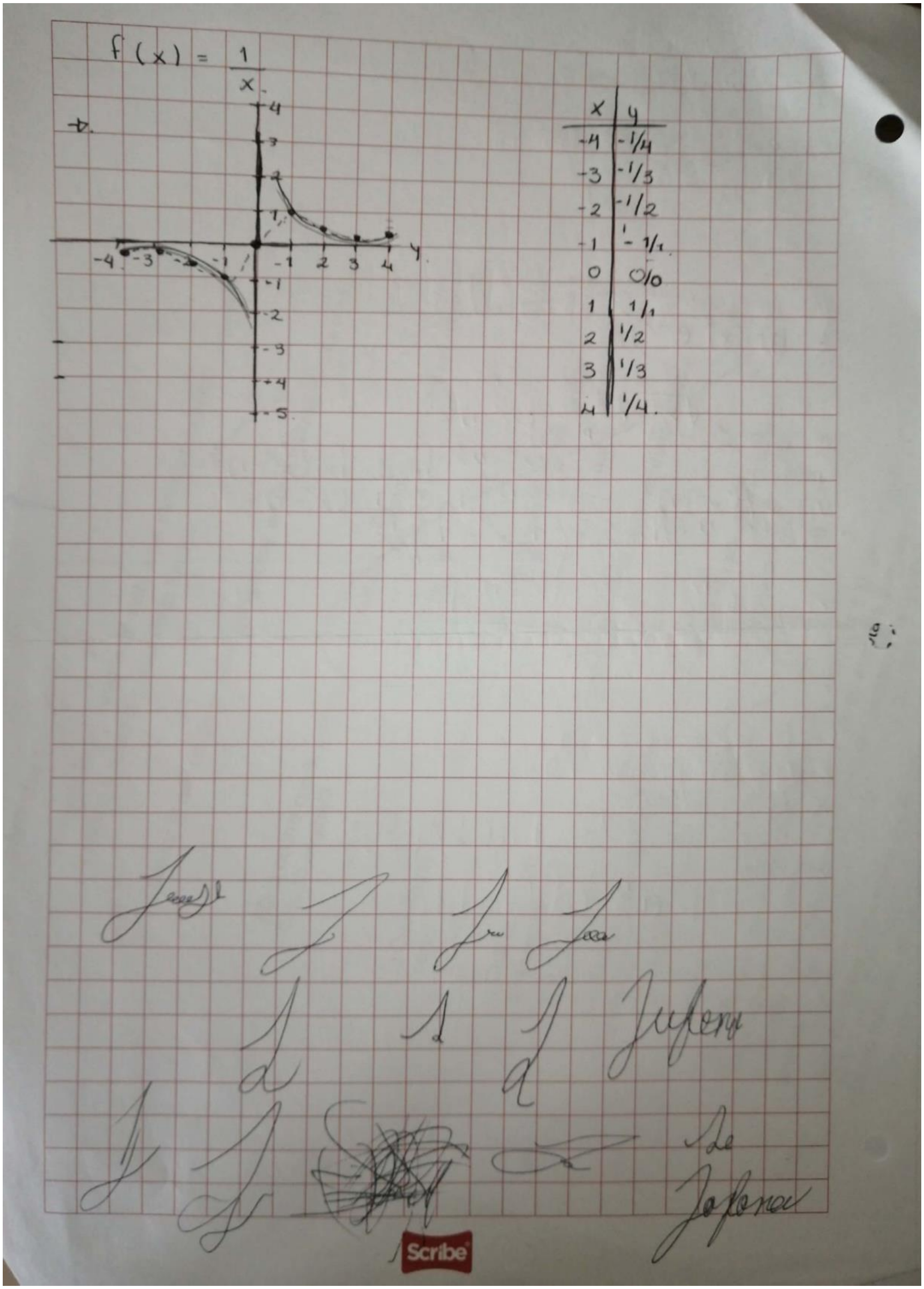
En Geogebra, inserte la función (a x² + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.**

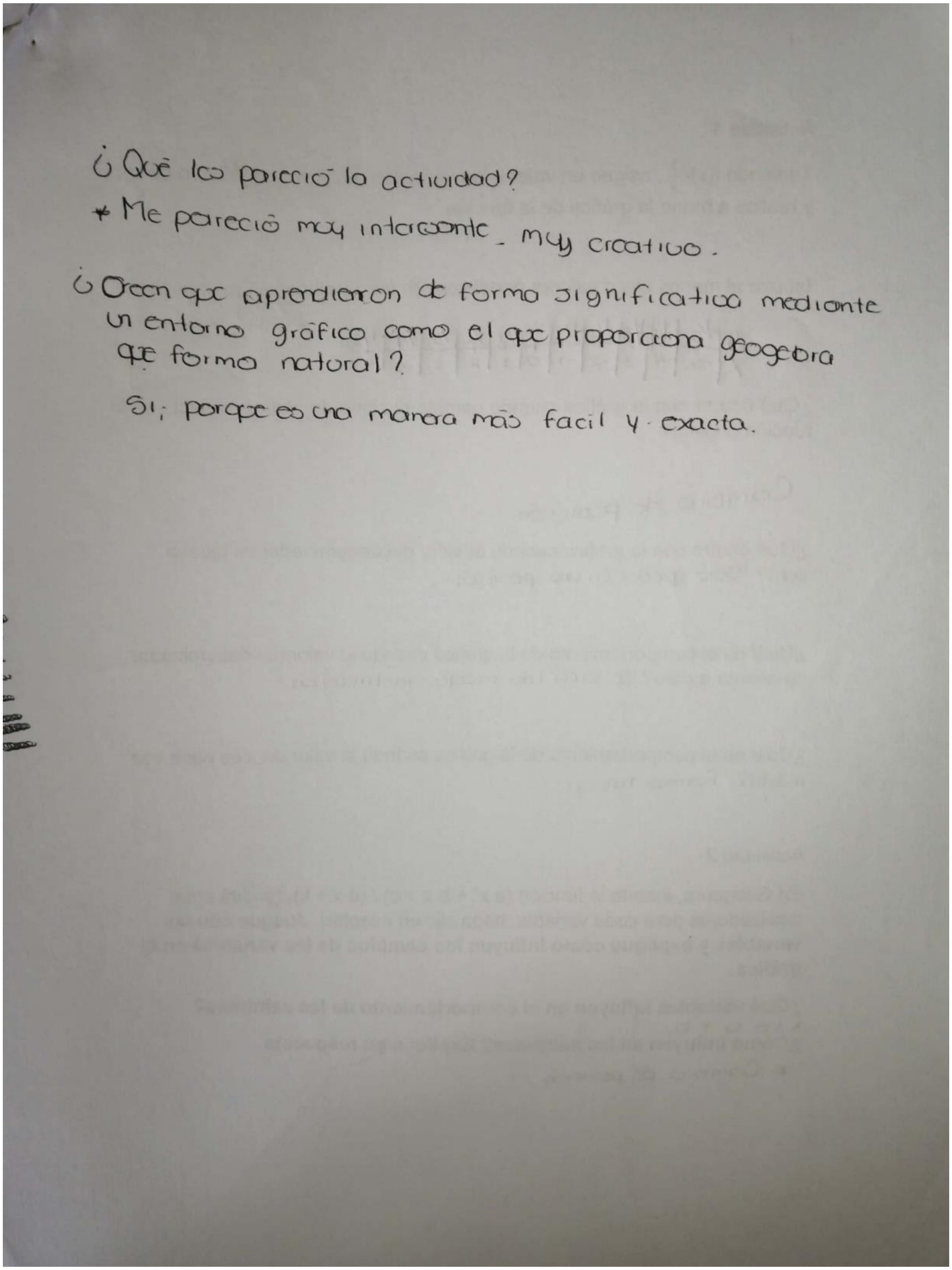
¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas?

* la a y b.

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

* Cambio de posición.


f(x) = 1/x
x | y
-4 | -1/4
-3 | -1/3
-2 | -1/2
-1 | -1/1
0 | 0/0
1 | 1/1
2 | 1/2
3 | 1/3
4 | 1/4


¿Qué les pareció la actividad?

* Me pareció muy interesante, muy creativo.

¿Creen que aprendieron de forma significativa mediante un entorno gráfico como el que proporciona geogebra de forma natural?

Si; porque es una manera más facil y exacta.

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: Fernanda Juárez EDAD: 17 años.

SEMESTRE: 5to / Quimicos-Biológos

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- <u>Regular</u>
- Dificil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

Geometría analítica

<u>Pre calculó</u>

¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Porque me confundo mucho en los procedimientos

Actividad 1

Teniendo $f(x)=\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

Se modifica la gráfica.

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero?

cambia las coordenadas y va aumentando el valor de y.

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero?

Queda más estrecha la gráfica

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor?

Queda lineal, aún así aumentando

Actividad 2

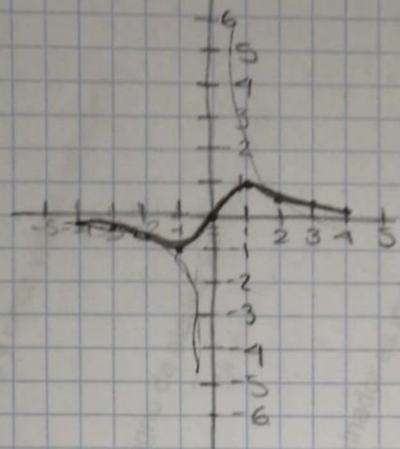
En Geogebra, inserte la función (a x² + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.** Se deslizan para diferentes partes y puede llegar a ser lineal.

¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas? En todas afecta por que se llega a mantener el gran espacio para que no se unan

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

Depende de las coordenadas que marquemos, así se pueden hacer más estrecha o más junta, en algún momento puede llegar a ser lineal

Fernanda Juárez



$f(x) = \frac{1}{x}$

x	y
-4	$-\frac{1}{4}$
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
0	0
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

- ¿Qué le pareció la actividad?

  Estuvo muy bien planteado, porque mediante algunas ecuaciones pudimos observar la variación de asintotas

- ¿Creen qué aprendieron de forma más significat mediante un entorno gráfico como el que proporciona geogebra, que trabajando de forma manual?

  Si un poco porque nos facilita algunos procedimientos, como encontrar asintontas diferentes en cuestión de segundos pero a la vez no porque manual nos ayuda a darnos cuenta del porque suceden las variaciones

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: Diana Carpio Herrera EDAD: 17 años

SEMESTRE: 5°

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- Regular
- Dificil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

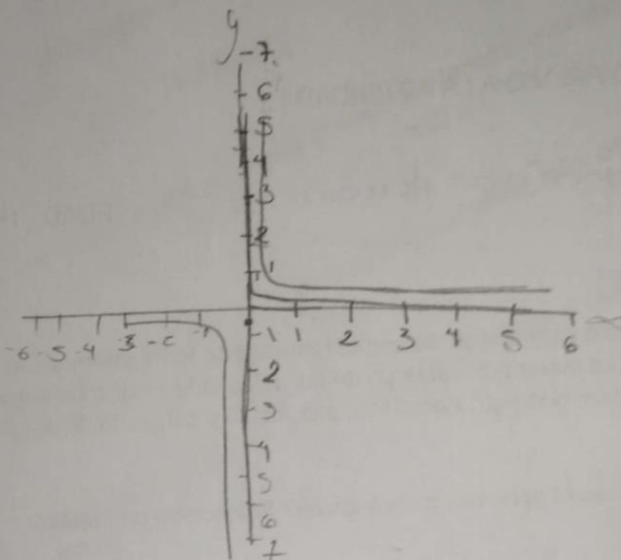
Geometría analítica

Pre calculó

¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Por que son demasiados numeros dependiendo la ecuación y aces son muchas operaciones

$\frac{1}{x}$



x	y
-3	-1/3
-2	-1/2
-1	-1
0	0
1	1
2	0.5
3	0.33

1° ¿Que les parecio la actividad?

Muy interezante y divertida, ya que fue algo fuera de lo comun.

2° ¿Creen que aprendieron de forma mas ~~[illegible]~~ significativa mediante un entorno grafico como el que proporciona geogebra que trabajan de forma manual?

Si, ya que observamos el comportamiento de las asintotas.

Actividad 1

Teniendo f(x)=$\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

cambia la grafica. o posición.

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero? Va cambiando el valor de las coordenadas

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero?

se acercan los ejes coordenadas
se acercan.

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor?

Se hace más grade la grafica

Actividad 2

En Geogebra, inserte la función (a x² + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.**

¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas?

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: Vanny Guadalupe Cabrera Pérez EDAD: 17 años

SEMESTRE: 5º Semestre

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- Regular
- Dificil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

Geometría analítica

Pre calculó

¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Por qué no sé exactamente que tipo de operaciones se aplican, ya que aveces aplicamos factorización.

Actividad 1

Teniendo f(x)=$\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

aumenta o disminuye la asíntota
función

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero?

No se grafica

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero?

Es una línea muy delgada

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor?

forma una recta en el eje X

Actividad 2

En Geogebra, inserte la función (a x² + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.**

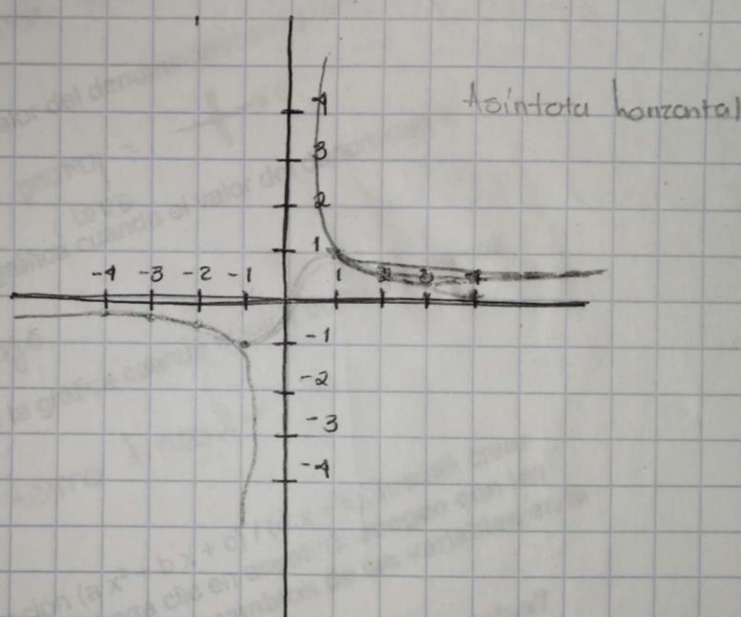
¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas?

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

Yanny Cabrera. 25.11.19

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

X	Y	
4	$\frac{1}{4}$	$=0.25$
3	$\frac{1}{3}$	0.33
2	$\frac{1}{2}$	0.5
1	1	1
0	0	0
-1	-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$	-0.5
-3	$-\frac{1}{3}$	-0.33
-4	$-\frac{1}{4}$	-0.25



DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: Llaguno De Los Santos EDAD: 16 años

SEMESTRE: 5to Quimicos-biologos

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- Regular
- Difícil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

Geometría analítica

Pre calculó

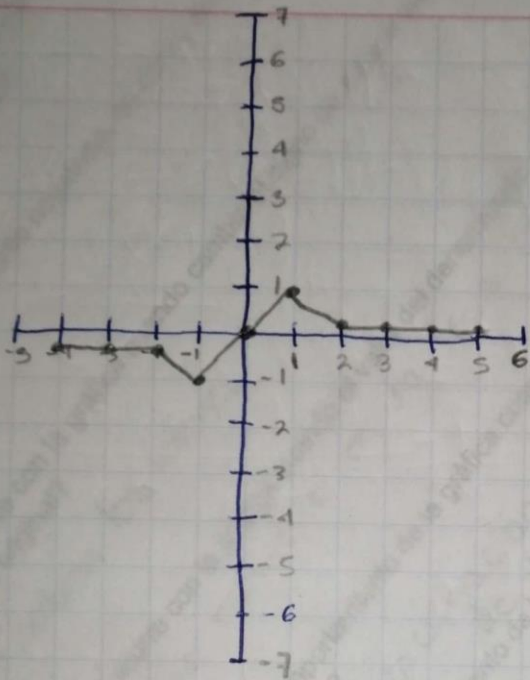
¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Por que no le entiendo así me lo expliquen muchos veces no l
entiendo.

Matematicas

Elian

25-Nov-19



$f(x) = \frac{1}{x}$

x	y
-4	-1/4
-3	-1/3
-2	-1/2
-1	-1
0	0
1	1
2	1/2
3	1/3
4	1/4
5	1/5
6	1/6

1 ¿Que les parecio la actividad?
Interesante
Aprendī algo mās

Si por quē nos beneficia para un futuro y
no sabía de la aplicación

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: Andrea Mariana Sánchez Gómez. EDAD: 17 años

SEMESTRE: 5to.

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- Regular
- Dificil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

Geometría analítica

Pre calculó

¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Porque me revuelvo y me confundo mucho, de manera que me cuesta saber lo que estoy haciendo o de que manera se hace. Incluso me confundo en que fórmula usar.

Actividad 1

Teniendo $f(x)=\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

La ~~[illegible]~~ asíntota se va en otra dirección.

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero? El valor es infinito.

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero?

Se acercan conforme se cambian los valores, los ejes o coordenadas se acercan.

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor? Se alejan poco a poco.

Actividad 2

En Geogebra, inserte la función (a x² + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.**

¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas?

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

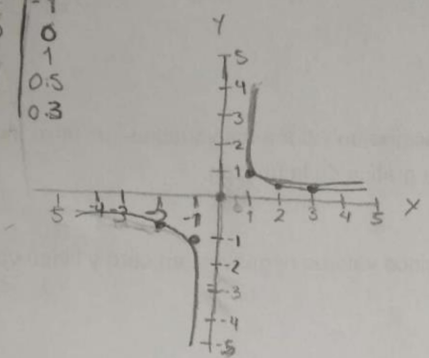
1.- Influyen todas ya que todas son parte de la función, pero en sí influyen más d, k y c.

2.- Cambian de posición, la mayoría se unen, aunque depende mucho de la variable, porque también se pueden alejar.

$F(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{-3}$

x	y
-3	-1/3 -0.33
-2	-1/2 -0.5
-1	-1
0	0
1	1
2	0.5
3	0.3



¿Que me pareció la actividad?

Pues se me hizo interesante, ya que fue algo fuera de lo común en las clases de matemáticas, por eso la mayoría puso atención.

¿Aprendí más de forma gráfica con geogebra o manual?

Emm pues si, quizá por que es más práctico y me ahorré el tener que hacer las gráficas yo misma.

DIAGNOSTICO PREVIO A LA ACTIVIDAD

NOMBRE: Ihaila Gendira Pano Tores EDAD: 16

SEMESTRE: 6nto Quimicos biologos

El objetivo de este diagnóstico es con la finalidad de tener información previa de los conocimientos matemáticos: tanto de las dificultades y el conocimiento del aritmética, álgebra, geometría analítica, precálculo y concepto de asíntotas.

¿Cómo consideras el aprender matemáticas? Selecciona una opción

- Fácil
- Regular
- Difícil

De todas las matemáticas que has visto tu vida escolar ¿Cuál es la rama más difícil según tu criterio?

Aritmética

Algebra

Geometría analítica

Pre calculó

¿Por qué las consideras difíciles de aprender?

Por que me confunde mucho.

Actividad 1

Teniendo f(x)=$\frac{1}{x}$, asigne un valor a las variables (positivo, negativo o cero), y realice a mano la gráfica de la función.

tabular al menos cinco valores negativos, en cero y cinco valores positivos:

−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5

¿Qué ocurre con la gráfica cuando cambia el signo de alguna variable de la función original?

cambio de posción ya sea arriba o abajo

¿Qué ocurre con la gráfica cuando el valor del denominador es igual a cero?

no hay linea, si pro muy = → 0
cerca

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor del denominador se acerca a cero?

queda abajo

¿Cuál es el comportamiento de la gráfica cuando el valor de x es cada vez mayor?

queda en forma lineal arriba

Actividad 2

En Geogebra, inserte la función (a x² + b x + c) / (d x + k), (pedirá crear deslizadores para cada variable, haga clic en aceptar). **Juegue con las variables y explique cómo influyen los cambios de las variables en la gráfica.**

¿Qué variables influyen en el comportamiento de las asíntotas?

¿Cómo influyen en las asíntotas? Explique su respuesta

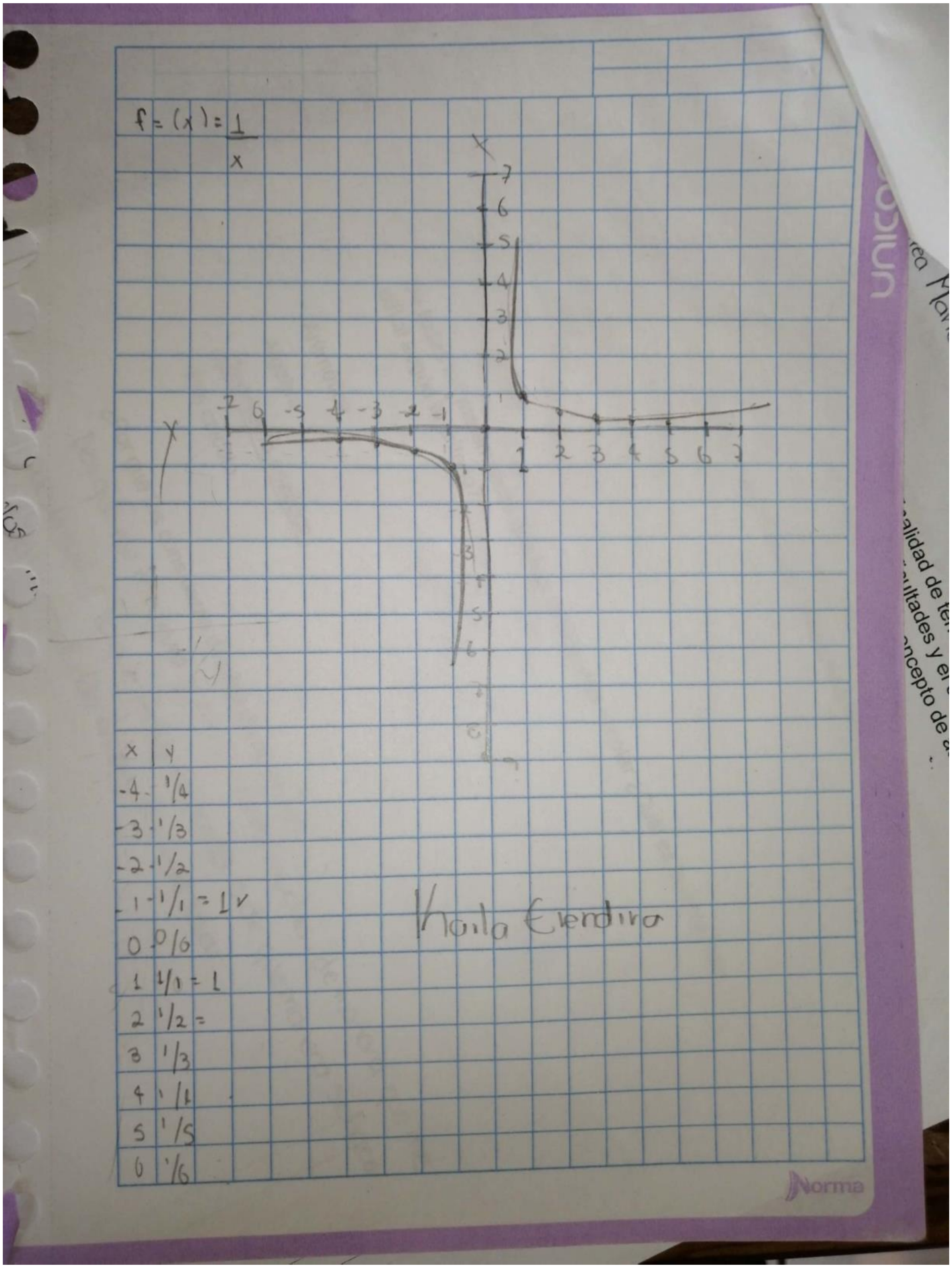
1.- dependiendo de la variable cambia la posción
la a, b, c y d, si me da con la asintota c

2.- las asintotas cambian de posción

¿Que les pareció la actividad?

interesante y compartimos Ideas e hicimos un debate

¿Creen que aprendierón de forma más significativa como un entorno grafico como el que proporciona Geogebra que trabajan de forma manual? Si porque practicamos y jugamos con los asintotas y eso se nos hizo dinamico



$f = (x) = \frac{1}{x}$

x	y
-4	1/4
-3	1/3
-2	1/2
-1	1/1 = 1
0	0/0
1	1/1 = 1
2	1/2 =
3	1/3
4	1/4
5	1/5
6	1/6

Karla Erendira