Universidad Autónoma de Chiapas

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

CAMPUS I

Sobre la homología del producto simétrico del círculo

TESIS

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Christopher Oswaldo Zaragoza Moreno X170018

Director de Tesis:
Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; Octubre del 2024

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
30 de Septiembre de 2024
Oficio No. FCFM/0413/24

Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella
Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"Sobre la homología del producto simétrico del círculo".

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestría en Ciencias Matemáticas del **Lic. Christopher Oswaldo Zaragoza Moreno** con matrícula escolar X170018.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente
"Por la conciencia de la necesidad de servir"

DIRECCIÓN
FCFM

Dr. Orlando Díaz Hernández
Director

C. c. p. Dra. María del Rosario Soler Zapata, Secretaria Académica de la FCFM
Lic. Juan Manuel Aguiar Gámez, Encargado del Control Escolar Posgrado de la FCFM
Archivo ODH/jmag

Código: FO-113-05-05	
Revisión: 0	

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

La alumna (s) o él alumno (s) Christopher Oswaldo Zaragoza Moreno, autora (s) o autor (es) de la tesis bajo el título de Sobre la homología del producto simétrico del círculo presentada y aprobada en el año 2024 como requisito para obtener el título o grado de Maestro en Ciencias Matemáticas, autorizo licencia a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), para que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para su consulta, reproducción parcial y/o total, citando la fuente, que contribuya a la divulgación del conocimiento humanístico, científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 4 días del mes de Octubre del año 2024.

Christopher Oswaldo Zaragoza Moreno

Nombre y firma de la alumna (s) o él alumno (s)

Agradecimientos

En estas líneas primero quiero agradecer a mi familia, a mi madre Laura, a mi abuela Flor, a mis tíos Adolfo, Alfredo, Cecilia, Lily y Martha, por brindarme su apoyo y su cariño en cada momento de mi vida, por darme animos y motivarme a siempre ser mejor.

También agradezco el apoyo de todos mis amigos Ernesto, Kevin, Jenni, Elisa, Miranda, Felipe, Mara que me han acompañado y me han motivado como una segunda familia, en especial quiero agradecer a Sayuri, por siempre darme animos cuando sentía que no podía más y por acompañarme la mayor parte de esta maestría.

Quisiera agradecer de manera especial a el Dr. José María Cantarero, a el Dr. Bernardo Villarreal y a todos los miembros de CIMAT-Mérida por su apoyo, su guía y su hospitalidad durante mi intercambio en esta institución.

Por último pero no menos importante quiero agradecer a todos mis profesores que han sido parte de mi formación; le agradezco a el Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella y a el Dr. Javier Sánchez Martínez por guiarme al momento de realizar este trabajo, su asesoría me ha sido de gran ayuda para elaborar este documento.

A muchas personas más que me han acompañado hasta este punto de mi vida, gracias.

ÍNDICE GENERAL

SOBRE LA HOMOLOGÍA DEL PRODUCTO SIMÉTRICO DEL CÍRCULO

2024

INTRODUCCIÓN

En el vibrante campo de la topología algebraica, los productos simétricos de un espacio topológico X han emergido como una fuente inagotable de fascinación y desafío matemático. Este trabajo de maestría se sumerge en la exploración profunda de estos espacios, centrándose en su intrincada relación con la homología y homotopía, así como explorar los resultados consecuentes que implican saber el tipo de homotopía y la homología de los productos simétricos del círculo unitario S^1.

Karol Borsuk fue un destacado matemático polaco del siglo XX que deslumbró al mundo matemático con el Teorema de Borsuk-Ulam. Este teorema fue uno de los primeros en estudiar el 3-producto simétrico de S^1, afirmando que este era homeomorfo al espacio $S^2 \times S^1$ (véase [1]), sin embargo, el terreno se agitó cuando Raoul Bott, figura de renombre en la topología algebraica, desafió a Borsuk al refutar su modelo del 3-producto simétrico del círculo unitario afirmando que este era homeomorfo a la 3-esfera S^3 (véase [2]).

R. Bott no solo cuestionó la validez de ciertas conclusiones, sino que también desató una serie de investigaciones que llevaron a la reconsideración de los hiperespacios productos simétricos desde una perspectiva más profunda y rigurosa, llevando a la comunidad matemática a abordar los productos simétricos con las herramientas poderosas de la topología algebraica.

A través de este trabajo, se explorarán las consecuencias de esta refutación, analizando cómo los matemáticos contemporáneos han reexaminado y extendido la teoría de hiperespacios, en partícular de los productos simétricos, incorporando métodos avanzados de homología y homotopía.

En el capítulo 1 se empezarán definiendo todos los conceptos necesarios para el desarrollo de la tesis, de los cuales cabe destacar la homología, la homotopía y la teoría de nudos, posteriormente en el capítulo 2 se definirá al k-ésimo producto simétrico visto como hiperespacio y a su vez, se dará un nuevo enfoque a este espacio con el cual es posible desarrollar mejor los objetivos de este trabajo, y para finalizar, en el capítulo 3 se expondrá como calcular la homología y la homotopía de los productos simétricos de S^1 y como con esto se puede obtener el resultado que Raoul Bott desarrolló junto con otros resultados que tienen de motivación a la teoría de nudos.

En términos generales, esta tesis busca profundizar nuestra comprensión del k-ésimo producto simétrico del círculo y ofrecer así, una visión actualizada de su importancia en el panorama matemático actual.

Se espera que el lector de esta tesis tenga las bases de topología y álgebra moderna como en los textos [9] y [7], así como algunos conceptos básicos sobre variedades como en [16].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Antes de hablar sobre el k-ésimo producto simétrico del círculo es necesario comprender algunos conceptos importantes, los cuales ayudarán a explicar de mejor manera el contenido de este trabajo.

Dentro de este capítulo primero se hablará un poco sobre la teoría de categorías, pues esta ayudará a desenvolver mejor los siguientes conceptos, posteriormente se explicará que es la homotopía, haciendo énfasis en el grupo fundamental, haciendo también mención de la homología, conceptos y teoremas importantes para el desarrollo de la tesis, y por último se mencionarán algunas nociones básicas sobre teoría de nudos.

1.1. Teoría de categorías

La teoría de categorías es un estudio matemático que trata de axiomatizar diversas estructuras matemáticas como una sola, usando conceptos como objetos y morfismos, y a la vez, trata de mostrar una nueva forma de ver a las matemáticas sin necesidad de usar conceptos como elementos, pertenencia, etc.

Esta teoría tuvo sus orígenes en la topología algebraica siendo motivada por la homología, y de ahí, se extendió a otras áreas como la geometría algebraica, e inclusive en la física. Por tanto, se expondrá a continuación algunos conceptos básicos que servirán más adelante para explicar mejor los otros conceptos.

Lo escrito dentro de esta sección proviene principalmente de [12].

Definición 1.1.1.
Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de:

- Una clase de objetos, denotada por $Obj(\mathcal{C})$.
- Para cada par de objetos X, Y en $Obj(\mathcal{C})$ existe un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ cuyos objetos se les llama morfismos, los cuales se denotarán como $f : X \longrightarrow Y$.
- Para cada terna de objetos X, Y, Z en $Obj(\mathcal{C})$ existe una regla de asignación llamada composición $\circ : Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$, donde $\circ(f, g)$ se denota como $f \circ g$, tal que:
    - · Es asociativa, es decir $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
    - · Para cada X en $Obj(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ tal que $id_X \circ f = f$ para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ y $g \circ id_X = g$ para cada $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, B)$, con A, B arbitrarios en $Obj(\mathcal{C})$. A id_X se le llama el morfismo identidad asociado a X.

Observación 1.1.1.
Aunque la notación de un morfismo de X a Y sea $f : X \longrightarrow Y$, no necesariamente se trata de una función.

Definición 1.1.2.
Un isomorfismo en $\mathcal{C}$ es un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ para el cual existe un único morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$. En caso de que exista, se denota a g como f^{-1}.
Se dice que dos objetos X, Y en $\mathcal{C}$ son isomorfos si existe un isomorfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Notación 1.1.1.
Se denota por $X \cong_{\mathcal{C}} Y$ cuando X, Y son isomorfos en $\mathcal{C}$. Cuando la categoría ya está implícita, simplemente se escribe $X \cong Y$.

De ahora en adelante cuando se hable de isomorfismos entre objetos dentro de una categoría, se hará uso de la notación anterior.

Ahora, se presentan algunos ejemplos de las categorías más conocidas.

Ejemplo 1.1.1.
Se considera a las siguientes como ejemplos clásicos:

(1) La categoría de conjuntos, llamada Set, cuyos sus objetos son todos los conjuntos, sus morfismos son todas las funciones y la función $\circ$ es la composición usual de funciones.

(2) A la categoría de espacios topológicos se le llama Top y sus objetos son todos los espacios topológicos, sus morfismos son todas las funciones continuas y la función $\circ$ es la composición usual de funciones.

(3) Se le llama Grp a la categoría de grupos, sus objetos son todos los grupos, sus morfismos son todos los homomorfismos de grupos y la función $\circ$ es la composición usual de funciones.
Análogamente, se define Ab como la categoría de grupos abelianos, $Ring$ como la categoría de anillos, R-Mod como la categoría de módulos sobre un anillo R, y Vec_K como la categoría de K-espacios vectoriales sobre un campo K.

(4) Sea G un grupo. Se le llama $\mathcal{G}$ a la categoría asociada a G, esta es como sigue: su único objeto es un punto $*$, sus morfismos son los elementos de G y la función $\circ$ es la operación binaria que define a la estructura de grupo de G.

(5) Se le llama Top^* a la categoría de espacios topológicos basados en un punto, en efecto, sus objetos son parejas de la forma (X, x_0) tales que X es un espacio topológico con $x_0 \in X$, sus morfismos son funciones continuas de la forma $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ tales que $f(x_0) = y_0$, y la función $\circ$ es la composición usual de funciones.

Ya que se tiene una idea de que son las categorías, lo más natural es tener algún tipo de relación entre dos categorías, para ello se da la siguiente definición.

Definición 1.1.3.
Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor covariante, que también es llamado simplemente funtor, es una asignación $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ que cumple:

- A cada objeto X en $\mathcal{C}$ se le asigna un objeto $F(X)$ en $\mathcal{D}$.
- A cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ se le asigna un morfismo $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$.
- $F(id_X) = id_{F(X)}$.
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Por otra parte, se dice que F es funtor contravariante si cumple todos los puntos anteriores a excepción del segundo y el cuarto, donde en su lugar se pide que:

- A cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ se le asigna un morfismo $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$.
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$,

respectivamente.

Para entender mejor el concepto de funtor, ya sea covariante o contravariante, se dan algunos de los ejemplos más comunes.

Ejemplo 1.1.2.
Se considera a los siguientes como ejemplos clásicos:

(1) Se le llama $id : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ al funtor identidad, donde para cada X en $Obj(\mathcal{C})$ se tiene que $id(X) = X$ y para cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ se cumple que $id(f) = f$.

(2) Sea M un R-módulo, se tiene así el funtor $Hom_{R\text{-}Mod}(M, \quad) : R\text{-}Mod \longrightarrow Ab$ tal que

- A cada R-módulo N se le asigna el grupo abeliano $Hom_{R\text{-}Mod}(M, N)$.
- A cada morfismo de R-módulos $f : N \longrightarrow L$ se le asigna un morfismo de grupos dado por

$$\begin{array}{rccc} f_* : & Hom_{R\text{-}Mod}(M, N) & \longrightarrow & Hom_{R\text{-}Mod}(M, L) \\ & g & \longmapsto & f \circ g. \end{array}$$

Ya que se tiene la idea de los funtores, se desearía ver la relación que existe entre ser covariante o contravariante, para ello se da la siguiente definición.

Definición 1.1.4.
Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se define la categoría opuesta a $\mathcal{C}$, denotada por $\mathcal{C}^{op}$, como la categoría que cumple que:

- $Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C})$.
- $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$.
- $\begin{array}{rccc} \circ_{op} : & Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y, X) \times Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Z, Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Z, X) \\ & (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$, con $\circ$ la composición en $\mathcal{C}$.

Observación 1.1.2.
Un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tiene asociado un funtor covariante de la forma $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$. Por tanto, es posible considerar a los funtores contravariantes como covariantes, siempre y cuando se observen en una categoría opuesta.

Por la observación 1.1.2, a partir de aquí se hablará unicamente de funtores covariantes.

Un resultado importante al momento de hablar de funtores es cuando se tienen isomorfismos, así pues dicho resultado se da en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1.
Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$ entonces $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.

Demostración: Como $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$ entonces por la definición 1.1.2 existe el morfismo $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ f^{-1} = id_Y$ y $f^{-1} \circ f = id_X$.
De las propiedades del funtor de la definición 1.1.3, $F_n(f) \circ F_n(f^{-1}) = F_n(f \circ f^{-1}) = F_n(id_X) = id_{F_n(X)}$ y $F_n(f^{-1}) \circ F_n(f) = F_n(f^{-1} \circ f) = F_n(id_Y) = id_{F_n(Y)}$, por tanto de la definición 1.1.2 se tiene que $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$. ■

1.2. Homotopía y homología

Uno de los objetivos de la topología algebraica es el de clasificar los espacios topológicos, y para eso, una herramienta fundamental son los grupos de homotopía, que no son más que la asignación de un grupo algebraico a un espacio topológico. El más simple de estos grupos, y el primero, se conoce como grupo fundamental. Intuitivamente, los grupos de homotopía registran información sobre agujeros de un espacio topológico.

Siguiendo esta idea, a continuación se desarrollan los siguientes conceptos y resultados relacionados a la homotopía.

Lo visto dentro de esta sección proviene principalmente de [8].

Primero se empieza introduciendo conceptos que servirán para dar los resultados que se quieren exponer en esta sección.

Definición 1.2.1.
Sean X, Y espacios topológicos, una función continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ se llama homotopía.

Notación 1.2.1.
Sea $I := [0,1]$, dada una homotopía $H : X \times I \longrightarrow Y$, para cada $t \in I$, se tiene la función

$$\begin{array}{rccc} H_t: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & H(x,t). \end{array}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se da la siguiente definición.

Definición 1.2.2.
Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que A es un retracto por deformación de X si existe una homotopía $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que:

- $H_0 = 1_X$, donde $1_X : X \longrightarrow X$ es la función identidad.
- $H_1(X) \subseteq A$.
- $H_1|_A = 1_A$, donde $1_A : A \longrightarrow A$ es la función identidad.

Si además H se puede elegir de tal modo que $H_t|_A = 1_A$ para toda $t \in I$, entonces se dice que A es un retracto por deformación fuerte de X.

A continuación, se da un ejemplo de un retracto por deformación.

Ejemplo 1.2.1.
Se afirma que $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. En efecto, sea

$$\begin{array}{rccc} H: & (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \\ & (x,t) & \longmapsto & (1-t)x + t\frac{x}{||x||}, \end{array}$$

donde $||\cdot||$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^{n+1}$.
Claramente H es continua, también se observa que $H_0(x) = x$ y $H_1(x) = \dfrac{x}{||x||} \in S^n$ para cada $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, por lo que $H_0 = 1_X$ y $H_1\left(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\right) \subseteq S^n$. Si $x \in S^n$, se cumple que $||x|| = 1$, así en este caso $H_1(x) = x$, por lo que $H_1|_{S^n} = 1_{S^n}$. Más aún, como se tiene que $x \in S^n$ si y sólo si $||x|| = 1$, entonces en este caso $H_t(x) = (1-t)x + tx = x$, por lo que $H_t|_{S^n} = 1|_{S^n}$.
De aquí se tiene que S^n un es retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Ahora bien, la idea intuitiva de la homotopía es formar caminos que lleven de un espacio a otro de manera continua, y esto a su vez también se puede hacer con las funciones continuas entre dos espacios topológicos. Por tanto, se da la siguiente definición.

Definición 1.2.3.
Se dice que $f, g \in Hom_{Top}(X,Y)$ son homotópicas si existe una homotopía $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

Notación 1.2.2.
Cuando f, g sean homotópicas bajo una homotopía H se escribirá $f \simeq_H g$. Cuando se sobrentienda la homotopía H simplemente se escribirá $f \simeq g$.

Para entender mejor este concepto, se da el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.2.
Sean $f, g \in Hom_{Top}(I, \mathbb{R}^2 - \{0\})$ dadas por

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 - \{0\} \\ & x & \longmapsto & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 - \{0\} \\ & x & \longmapsto & (\cos(2\pi x), 2\sin(2\pi x)) . \end{array}$$

Es posible notar que la función

$$\begin{array}{rccc} H: & I \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 - \{0\} \\ & (x,t) & \longmapsto & (\cos(2\pi x), (1+t)\sin(2\pi x)) , \end{array}$$

es una homotopía que cumple que $H_0 = f$ y $H_1 = g$, por tanto $f \simeq_H g$.

Ya que se tienen estos conceptos y una idea más clara de como funcionan las homotopías entre funciones, se dan los siguientes resultados importantes que serán de ayuda al momento de definir el concepto de grupos de homotopía de un espacio topológico.

Proposición 1.2.1.
La relación de homotopía en $Hom_{Top}(X, Y)$ es de equivalencia.

Es rutinario probar la proposición anterior y esta prueba se encuentra en [8, proposición 1.2, pág. 26], así pues, se da a continuación el siguiente resultado.

Proposición 1.2.2.
La relación de homotopía de funciones es compatible con composiciones.

Demostración: Sean $f, f' \in Hom_{Top}(X, Y)$ tales que $f \simeq_H f'$.
Considerando que $H : X \times I \longrightarrow Y$ es la homotopía tal que $H_0 = f$ y $H_1 = f'$, sea $g \in Hom_{Top}(Y, Z)$ y así se define $G := g \circ H : X \times I \longrightarrow Z$. Es fácil ver que G es continua pues g y H lo son, además se observa que $G_0 = g \circ H_0 = g \circ f$ y $G_1 = g \circ H_1 = g \circ f'$, por tanto $g \circ f \simeq_G g \circ f'$.
Suponiendo ahora que $h \in Hom_{Top}(Z, X)$, entonces se define

$$\begin{array}{rccc} F: & Z \times I & \longrightarrow & Y \\ & (z,t) & \longmapsto & H(h(z), t). \end{array}$$

Claramente F es continua y además $F_0 = H_0 \circ h = f \circ h$ y $F_1 = H_1 \circ h = f' \circ h$, por tanto $f \circ h \simeq_F f' \circ h$.
Se concluye así que la homotopía es compatible con la composición. ∎

Definición 1.2.4.
Sea $f \in Hom_{Top}(X, Y)$, se dice que f es una equivalencia homotópica si existe $g \in Hom_{Top}(Y, X)$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$, donde $1_X, 1_Y$ son las funciones identidad a X y Y respectivamente. En este caso, a la función g se le llama la inversa homotópica de f.
Si existe una equivalencia homotópica $f : X \longrightarrow Y$, entonces se dice que los espacios topológicos X y Y son equivalentes homotópicamente o que tienen el mismo tipo de homotopía.

A continuación, se quisiera dar una noción de un elemento neutro para definir los grupos de homotopía. Es fácil observar que esto se logra con la siguiente definición.

Definición 1.2.5.
Sea $f \in Hom_{Top}(X, Y)$, se dice que f es null-homotópica si $f \simeq c$, donde $c : X \longrightarrow Y$ es una función constante.

Se da también un resultado importante sobre los retractos por deformación de un espacio topológico el cual relaciona el concepto de equivalencia homotópica.

Proposición 1.2.3.
Si A es un retracto por deformación de X, entonces la inclusión natural $j : A \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica.

Demostración: Por la definición 1.2.2 existe una homotopía $H : X \times I \longrightarrow X$ que cumple que $H_0 = 1_X$, $H_1(X) \subseteq A$ y $H_1|_A = 1_A$. Se define

$$\begin{array}{rccc} r: & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & H_1(x). \end{array}$$

Claramente r está bien definida y es continua, por tanto, se tiene que r es la inversa homotópica de j. En efecto, no es díficil observar que $r \circ j = H_1|_A = 1_A$, y además se tiene que $j \circ r = H_1$, por lo tanto $j \circ r = H_1 \simeq_H H_0 = 1_X$. ■

Observación 1.2.1.
Todos los resultados anteriores también se aplican dentro de la categoría Top^*.

Considerando la observación anterior, y ya que se tiene una idea sobre lo que es homotopía, se da la definición de grupos de homotopía.

Definición 1.2.6.
Sea (X, x_0) un objeto en la categoría Top^*, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define el conjunto de clases de homotopía $\pi_n(X, x_0) := Hom_{Top^*}((S^n, a), (X, x_0))/\simeq$, de morfismos $f : (S^n, a) \longrightarrow (X, x_0)$ en Top^* para algún $a \in S^n$. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces al conjunto $\pi_n(X, x_0)$ se le llama el grupo de homotopía de orden n relativo a x_0.

Observación 1.2.2.
Para $n = 0$, se tiene que $S^0 = \{a, b\}$ donde a y b son puntos sobre una recta a una unidad de distancia del origen, así se considera $x_1, x_2 \in X$ puntos distintos junto con $f_i : (S^0, a) \longrightarrow (X, x_0)$ en Top^* tal que $f_i(b) = x_i \in X$ para $i = 1, 2$.
Se tiene que $f_1 \simeq f_2$ si y solo si existe $\alpha : I \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_1$ y $\alpha(1) = x_2$ pues las funciones f_i al tener al punto $a \in S^0$ fijo solo depende del punto b, y además la función α existe si y sólo si x_1, x_2 están en la misma componente arcoconexa de X.
De aquí es posible ver que cada clase de homotopía de funciones $f : (S^0, a) \longrightarrow (X, x_0)$ determina una componente arcoconexa de X, por tanto es posible considerar $\pi_0(X, x_0)$ como el conjunto de las componentes arcoconexas de X.

Ahora, de la definición 1.2.6 se quisiera comprobar varias cosas, que no importa la elección del punto $a \in S^n$, que en efecto el nombre grupo de homotopía tiene sentido y además π_n es un funtor para cada $n \in \mathbb{N}$, esto y otros resultados consecuentes serán más fáciles de ver por medio del concepto de lazos basados en un punto.

La idea de lazo surge del isomorfismo que existe entre S^1 y $I/\{0, 1\}$ dado por la función

$$\begin{array}{ccc} I/\{0,1\} & \longrightarrow & S^1 \\ [t] & \longmapsto & e^{2\pi i t}. \end{array} \tag{1.1}$$

En esencia, al tener una función $f : (S^1, a) \longrightarrow (X, x_0)$ se puede considerar que el isomorfismo anterior mande la clase $[0]$ al punto $a \in S^1$ y de esta forma tener un lazo $\gamma : I \longrightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$, por tanto, se llamará a γ el lazo basado en el punto x_0.

Observación 1.2.3.
En general, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $I^n/\partial I^n \cong_{Top} S^n$ donde ∂I^n es la frontera de I^n, así para tener un resultado analógo al de S^1 lo que se tendría que hacer es mandar cada punto de ∂I^n al punto $a \in S^n$ dado. De esta misma forma, al tener una función $f : (S^n, a) \longrightarrow (X, x_0)$, el n-lazo $\gamma : I^n \longrightarrow X$ mandará cada punto de ∂I^n al punto $x_0 \in X$, teniendo así un n-lazo basado en un punto x_0.

Dada esta observación, se da formalmente el concepto de lazo con la siguiente definición.

Definición 1.2.7.
Sea X un espacio topológico y sean $x_0, x_1 \in X$, se define el conjunto

$$\Omega(X, x_0, x_1) := \{\omega \in Hom_{Top}(I, X) : \omega(0) = x_0, \omega(1) = x_1\}.$$

A los elementos de $\Omega(X, x_0) := \Omega(X, x_0, x_0)$ se les llaman lazos basados en x_0.
En general, a los elementos de $\Omega^n(X, x_0) := \{\omega \in Hom_{Top}(I^n, X) : \omega(y) = x_0 \text{ para cada } y \in \partial I^n\}$ se les llaman n-lazos basados en x_0.

Se quisiera ver que el nombre grupo de la definición 1.2.6 tiene sentido, para ello primero se tiene que dar una operación de grupo, por tanto, se da a continuación la siguiente definición.

Definición 1.2.8.
Se define la concatenación de caminos como la función

$$\begin{array}{ccc} \Omega(X,x_0,x_1)\times\Omega(X,x_1,x_2) & \longrightarrow & \Omega(X,x_0,x_2) \\ (\omega,\gamma) & \longmapsto & \omega*\gamma, \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{cccc} \omega*\gamma: & I & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} \omega(2t) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}, \\ \gamma(2t-1) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1. \end{cases} \end{array}$$

Observe que, por el lema del pegado (véase [9, teorema 18.3, pág. 106]), $\omega*\gamma\in\Omega(X,x_0,x_2)$.

También es necesario dar la idea del inverso de un lazo, por tanto, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.2.9.
Se define el reverso de un camino $\omega\in\Omega(X,x_0,x_1)$ como el camino $\overline{\omega}\in\Omega(X,x_1,x_0)$ dado por

$$\begin{array}{cccc} \overline{\omega}: & I & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \omega(1-t). \end{array}$$

Observación 1.2.4.
Para n-lazos basados en algún punto $x_0\in X$, la concatenación está dada por

$$\begin{array}{cccc} \omega*\gamma: & I^n & \longrightarrow & X \\ & (t_1,t_2,\dots,t_n) & \longmapsto & \begin{cases} \omega(2t_1,t_2,\dots,t_n) & 0\leq t_1\leq \dfrac{1}{2}, \\ \gamma(2t_1-1,t_2,\dots,t_n) & \dfrac{1}{2}\leq t_1\leq 1. \end{cases} \end{array}$$

Así también, el reverso de un n-lazo está dado por

$$\begin{array}{cccc} \overline{\omega}: & I^n & \longrightarrow & X \\ & (t_1,t_2,\dots,t_n) & \longmapsto & \omega(1-t_1,t_2,\dots,t_n). \end{array}$$

Dado que la definición 1.2.6 usa las clases de homotopía, de igual manera se quisiera tener homotopía pero entre caminos. Por tanto, en el sentido de la definición 1.2.3, se da la siguiente definición.

Definición 1.2.10.
Se dice que $\omega,\gamma\in\Omega(X,x_0,x_1)$ son homotópicos por caminos si existe una homotopía $H:I\times I\longrightarrow X$ tal que $\omega\simeq_H\gamma$ y $H_t\in\Omega(X,x_0,x_1)$ para toda $t\in I$.
En general, para cada $n\in\mathbb{N}$ se dice que dos n-lazos $\omega,\gamma\in\Omega^n(X,x_0)$ son homotópicos por caminos si existe una homotopía $H:I^n\times I\longrightarrow X$ tal que $\omega\simeq_H\gamma$ y $H_t\in\Omega^n(X,x_0)$ para toda $t\in I$.

Notación 1.2.3.
Si ω y γ son homotópicos por caminos, se escribirá $\omega\simeq_p\gamma$.

Ahora, se dará unos resultados sobre las homotopías de caminos que servirán para definir correctamente la operación de grupo en los grupos de homotopía.

Proposición 1.2.4.
La relación $\simeq_p$ es una relación de equivalencia en $\Omega(X,x_0,x_1)$.

Al igual que en la proposición 1.2.1, es rutinario probar el resultado anterior.

A continuación, el siguiente teorema relaciona a $\simeq_p$ con $\Omega(X,x_0)$ donde cuya prueba se puede encontrar en [8, proposición 1.3, pág. 26].

Teorema 1.2.1.
Para (X, x_0) un objeto en Top^* se tiene que $\Omega(X, x_0)/\simeq_p$ es un grupo bajo la operación $[\omega] \cdot [\gamma] := [\omega * \gamma]$.

Observación 1.2.5.
Siguiendo la prueba de [8, proposición 1.3, pág. 26], el teorema anterior se puede generalizar a que $\Omega^n(X, x_0)/\simeq_p$ es un grupo para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, por los resultados anteriores tiene sentido dar la siguiente definición, la cual es equivalente a la definición 1.2.6.

Definición 1.2.11.
Sea (X, x_0) un objeto en Top^*, para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el grupo de homotopía de orden n relativo a x_0 como $\pi_n(X, x_0) := \Omega^n(X, x_0)/\simeq_p$.
Al grupo de homotopía de orden $n = 1$, $\pi_1(X, x_0)$, se le llama también grupo fundamental.

Ahora bien, se quisiera considerar a los grupos de homotopía como funtores entre la categoría Top^* y la categoría Grp, para ello sería ideal que dado un morfismo en Top^* se construya un morfismo en Grp, por tanto se considera los siguientes resultados.

Lema 1.2.1.
Sea $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ un morfismo en Top^*. Para cada $\omega \in \Omega^n(X, x_0)$ se tiene que $f \circ \omega \in \Omega^n(Y, y_0)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, donde $[f \circ \omega]$ en $\pi_n(Y, y_0)$ no depende del representante de $[\omega]$ en $\pi_n(X, x_0)$.

Demostración: Es claro que $f \circ \omega \in \Omega^n(Y, y_0)$, la segunda parte es análoga a la proposición 1.2.2. ■

Definición 1.2.12.
Sea $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ un morfismo en Top^*. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$\begin{array}{rccc} f^n_\# : & \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, y_0) \\ & [\omega] & \longmapsto & [f \circ \omega]. \end{array}$$

Para $n = 1$, se escribirá simplemente $f_\# := f^1_\#$.

Proposición 1.2.5.
Si $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es un morfismo en Top^*, $f^n_\# \in Hom_{Grp}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0))$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Por el lema 1.2.1 se tiene que $f^n_\#$ está bien definida.
Ahora bien, para cada $\omega, \gamma \in \Omega^n(X, x_0)$ observe que $f \circ (\omega * \gamma) = (f \circ \omega) * (f \circ \gamma)$, usando esto se tiene que $f^n_\#([\omega] \cdot [\gamma]) = f^n_\#([\omega * \gamma]) = [f \circ (\omega * \gamma)] = [(f \circ \omega) * (f \circ \gamma)] = [f \circ \omega] \cdot [f \circ \gamma] = f^n_\#([\omega]) \cdot f^n_\#([\gamma])$, concluyendo así que $f^n_\#$ es un morfismo en Grp para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Considerando los resultados anteriores, se probará a continuación que, en efecto, es posible construir un funtor con los grupos de homotopía en cualquier orden.

Teorema 1.2.2.
Mediante los grupos de homotopía se obtiene, para cada $n \in \mathbb{N}$, un funtor $\pi_n : Top^* \longrightarrow Grp$ tal que

- A cada objeto (X, x_0) en Top^* se le asigna $\pi_n(X, x_0)$.
- A cada morfismo $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ en Top^* se le asigna $f^n_\# : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$.

Demostración: Por la proposición 1.2.5, solo basta comprobar los siguientes puntos de la definición 1.1.3.

- Para $1_X : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ y $\omega \in \Omega^n(X, x_0)$, se tiene que $(1_X)_\#([\omega]) = [1_X \circ \omega] = [\omega]$, es decir $(1_X)^n_\# = 1_{\pi_n(X, x_0)}$.
- Para $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ morfismos en Top^* y para $\omega \in \Omega^n(X, x_0)$, se tiene que $(g \circ f)^n_\#([\omega]) = [g \circ (f \circ \omega)] = g^n_\#([f \circ \omega]) = g^n_\#\left(f^n_\#([\omega])\right) = \left(g^n_\# \circ f^n_\#\right)([\omega])$, por tanto $(g \circ f)^n_\# = g^n_\# \circ f^n_\#$.

■

Ahora bien, se presenta a continuación unos resultados para el grupo fundamental que servirán más adelante. La prueba del siguiente resultado se encuentra en [8, proposición 1.18, pág. 37].

Proposición 1.2.6.
Sea $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ en Top^* una equivalencia homotópica, se tiene que $f_\# : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo en Grp.

Se da ahora una carateterización especial para el grupo fundamental, en el caso de elegir distintos puntos distinguidos para un mismo espacio topológico dentro de la categoría Top^*. La prueba del siguiente resultado se basa en el comentario que está después de [8, proposición 1.5, pág. 28].

Proposición 1.2.7.
Sea X arcoconexo y sean $x_0, x_1 \in X$, se tiene que $\pi_1(X, x_0) \cong_{Grp} \pi_1(X, x_1)$.

Observación 1.2.6.
La proposición 1.2.7 se puede generalizar para cualquier grupo de homotopía de orden $n \in \mathbb{N}$ de un espacio arcoconexo X, ya que si $\omega \in \Omega^n(X, x_1)$ entonces dado $\varphi : I \longrightarrow X$ tal que $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi(1) = x_1$ se puede construir $\omega' \in \Omega^n(X, x_0)$ reduciendo el dominio de ω a un cubo concentrico más pequeño dentro de I^n para luego insertar φ en cada segmento radial en el caparazón entre I^n y este cubo más pequeño.

El resultado anterior dice que el grupo de homotopía de orden n, cuando $n \in \mathbb{N}$, es invariante a la elección del punto x_0 si X es arcoconexo, lo cual motiva la siguiente notación.

Notación 1.2.4.
Cuando X sea arcoconexo simplemente se escribirá $\pi_n(X)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ya que se tiene presente el concepto de grupo de homotopía de orden n y considerando los resultados que ya se han desarrollado sobre estos, se da la siguiente definición.

Definición 1.2.13.
Sea (X, x_0) un objeto en Top^*, se dice que (X, x_0) es n-conexo si $\pi_i(X, x_0) = 0$ para toda $i \in \{0, \dots, n\}$. En particular, si (X, x_0) es 1-conexo, se dirá que X es simplemente conexo.

De la definición anterior, se tiene que el ser 0-conexo es lo mismo que ser arcoconexo, pues por la observación 1.2.2 se tiene que cada elemento en $\pi_0(X, x_0)$ es una componente arcoconexa de X y al ser $\pi_0(X, x_0) = 0$, es decir que todos los morfimos $f : (S^0, a) \longrightarrow (X, x_0)$ son homotópicos, entonces el conjunto $\pi_0(X, x_0)$ sólo tiene un elemento y por tanto el espacio X tiene una componente arcoconexa. Por tanto, para espacios n-conexos con $n \geq 1$, por la observación 1.2.6 simplemente se escribirá $\pi_n(X)$.

A continuación, se dará un resultado importante para calcular el grupo fundamental de varios espacios topológicos, que será vital en la sección 3.2, pero antes se da la siguiente observación.

Observación 1.2.7.
Si $X = U \cup V$ y si existen las inclusiones naturales $i_1 : U \cap V \hookrightarrow U$, $i_2 : U \hookrightarrow X$, $j_1 : U \cap V \hookrightarrow V$ y $j_2 : V \hookrightarrow X$ tales que $i := i_2 \circ i_1$ y $j := j_2 \circ j_1$, entonces, por la propiedad funtorial del grupo fundamental visto en el teorema 1.2.2, se tienen $i_\# : \pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X)$, $j_\# : \pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X)$.

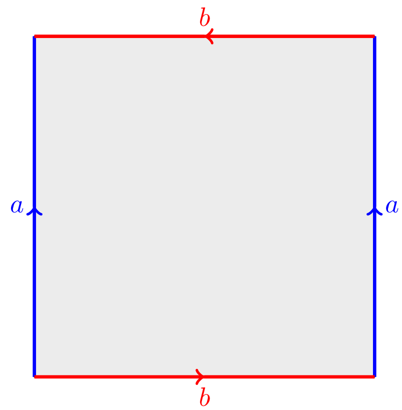
Notación 1.2.5.
Dada una clase $[\alpha]$ en un grupo de homotopía de orden n, si no hay confusión simplemente se escribirá α.

Considerando lo anterior, se da el siguiente resultado el cual puede verse en [8, teorema 1.20, pág. 44].

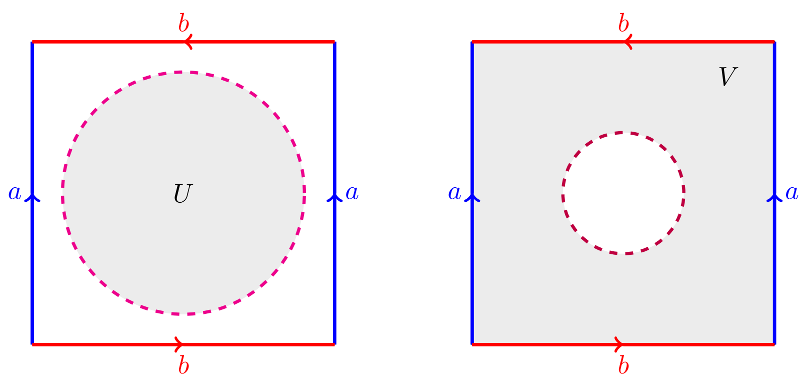
Teorema 1.2.3 (Seifert-van Kampen)**.**
Sea $X = U \cup V$ con U, V abiertos en X tal que $U, V, U \cap V$ son arcoconexos y considerando $\mathcal{N}(\langle S \rangle)$ como el subgrupo normal más pequeño que contiene a $S := \{i_\#(\alpha) j_\#(\alpha)^{-1} : \alpha \in \pi_1(U \cap V)\}$ donde $i_\#$, $j_\#$ son como en la observación 1.2.7, se sigue que $\pi_1(X) \cong_{Grp} \dfrac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{\mathcal{N}(\langle S \rangle)}$ donde $*$ denota al producto libre, tal como se describe en [13, pág. 145], entre los grupos $\pi_1(U)$ y $\pi_1(V)$.

Para comprender mejor como se aplica el teorema 1.2.3, se da el siguiente ejemplo basado en representación geométrica.

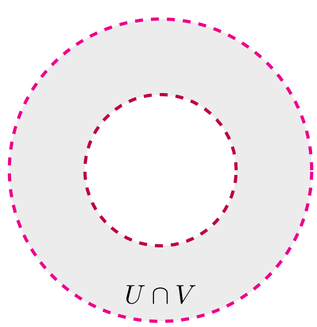
Ejemplo 1.2.3.
Sea K la botella de Klein representado por un cociente del espacio $I \times I$, tal como se indica en la figura a continuación.



Sea $U \subseteq K$ un disco abierto de radio positivo $r < \dfrac{1}{2}$ con centro en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, y sea $V = K - U'$ con $U' \subseteq K$ un disco cerrado de radio $r' < r$ con centro en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ tal como se presenta a continuación.

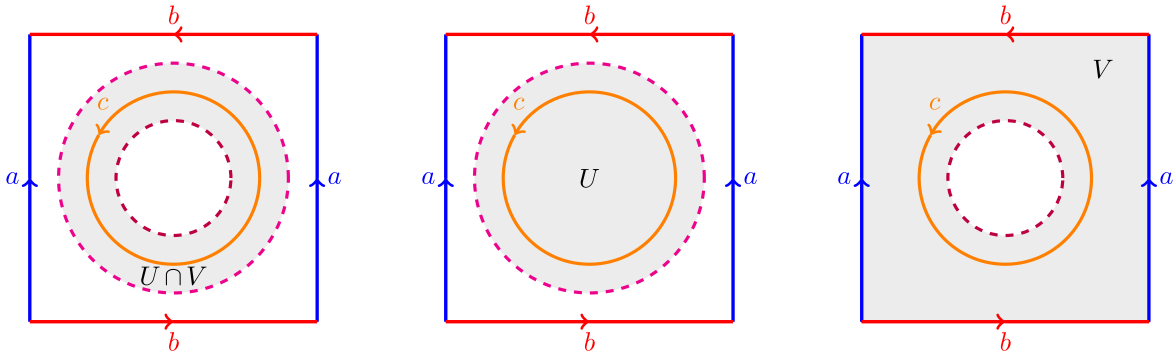


Claramente U, V son abiertos y arcoconexos, además, como el disco $U' \subseteq U$, la intersección $U \cap V$ está representada por la siguiente figura, de donde se puede apreciar que la intersección también es un conjunto arcoconexo.

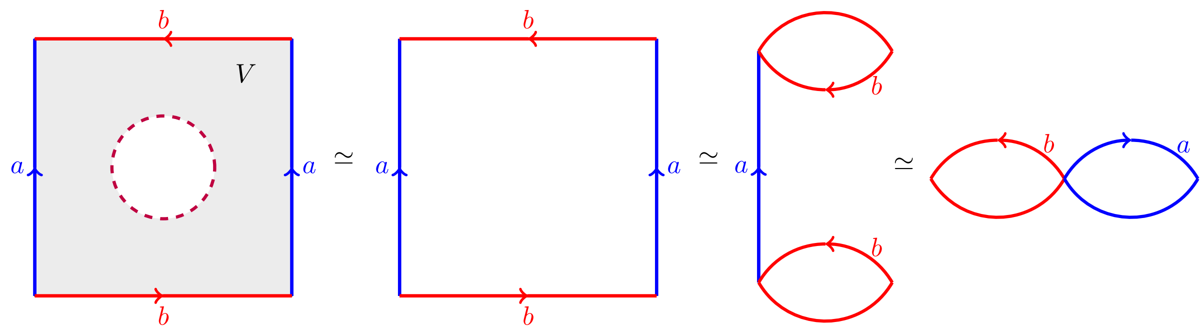


Es claro de la figura anterior que $U \cap V$ y S^1 tienen el mismo tipo de homotopía, entonces considerando la proposición 1.2.6 se tiene que $\pi_1(U \cap V) \cong \pi_1(S^1)$, por [8, teorema 1.7, pág. 29], $\pi_1(S^1) = \langle c \rangle$ donde c es un lazo isomorfo a S^1 al cual se contrae el espacio $U \cap V$.

Ahora bien, como ya se tienen los requisitos para aplicar el teorema 1.2.3, se quisiera observar como el lazo c se ve dentro de $U \cap V$, de U y de V, lo cual es posible observar en las siguientes figuras.



Dado que U es un espacio convexo en $\mathbb{R}^2$, considerando [8, ejemplo 1.4, pág. 27], $\pi_1(U) = 0$, por lo que es fácil observar que $i_\#(c) = 1$, con $i_\#$ como en la observación 1.2.7 y 1 la identidad del grupo.
Por otra parte, no es difícil observar que el contorno del cuadrado anterior es un retracto por deformación de V, y además se tienen las siguientes homotopías.



De lo anterior se observa que V y $S^1 \vee S^1$ tienen el mismo tipo de homotopía, donde $S^1 \vee S^1$ es el wedge de dos círculos (véase [8, pág. 10]), y por la proposición 1.2.6 se tiene que $\pi_1(V) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1)$ donde, por [8, ejemplo 1.21, pág. 43], se tiene que $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \langle a, b \rangle$ el grupo libre generado por a y b.
Además, como ya se ha visto al lazo c dentro de V, se tiene entonces que el retracto por deformación arrastraría este mismo lazo c al contorno del cuadrado, y por la orientación que se le dio, se tiene que $j_\#(c) = aba^{-1}b$ con $j_\#$ como en la observación 1.2.7. Por tanto, el teorema 1.2.3 dice que

$$\pi_1(K) \cong \langle a, b \rangle * 0 / \mathcal{N}\langle aba^{-1}b \rangle \cong \langle a, b \rangle / \mathcal{N}\langle aba^{-1}b \rangle \cong \langle a, b : aba^{-1}b = 1 \rangle.$$

Como ya ha visto, el grupo fundamental y por consiguiente los grupos de homotopía de cualquier orden n, son complicados de calcular en algunos casos, por tanto, a cada espacio topológico X conviene asociarle otro grupo que sea más fácil de calcular.

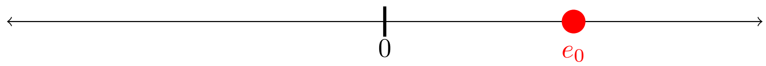
De aquí surge la idea de homología, la cual no es más que el procedimiento para asociar a espacios topológicos sucesiones de grupos abelianos, o en contextos más generales asociar a los espacios topológicos sucesiones de R-módulos.

La homología estudia a los espacios topológicos por medio de sus agujeros en todas sus dimensiones, por lo que en primer lugar se querría estudiar a los espacios topológicos que se pueden descomponer en distintos sectores que dependan de la dimesión en la que se encuentren, para ello se empieza dando la siguiente definición.

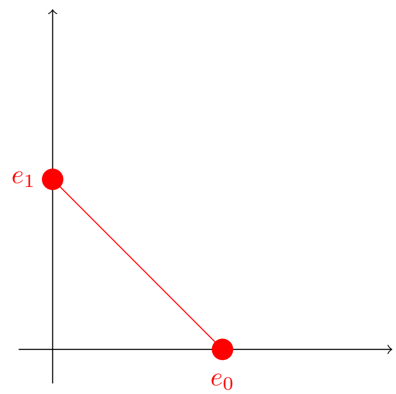
Definición 1.2.14.
El n-símplex estándar Δ^n es el subespacio convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$ generado por los vectores de la base estándar $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir el conjunto $\left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i e_i : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_j \geq 0 \text{ para cada } j \in \{0, \ldots, n\} \right\}$.

Para comprender mejor esta definición, se da el siguiente ejemplo.

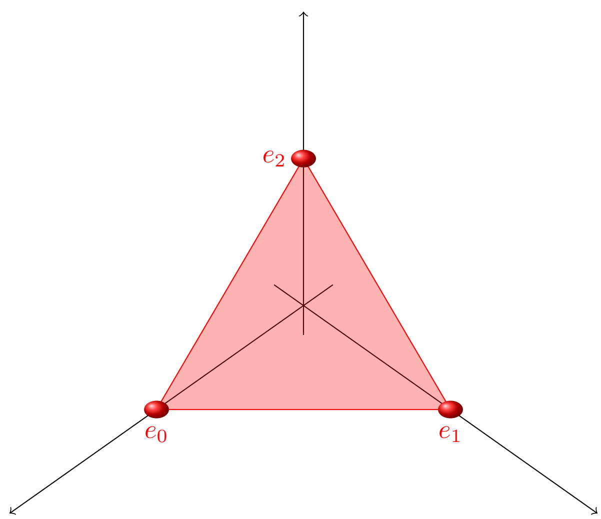
Ejemplo 1.2.4.
Un 0-símplex estándar en $\mathbb{R}$ es de la forma



Un 1-símplex estándar en $\mathbb{R}^2$ es de la forma



Un 2-símplex estándar en $\mathbb{R}^3$ es de la forma



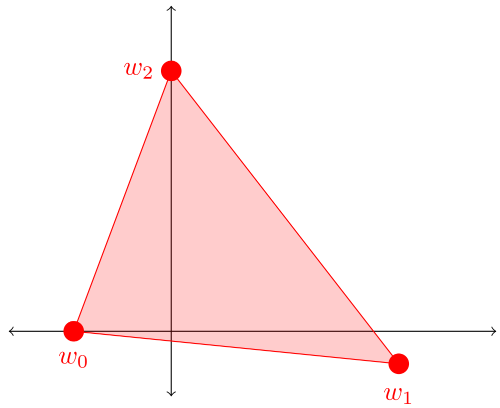
A partir de lo anterior, se quisiera generalizar la idea de los n-símplex estándar en cualquier dimensión mayor o igual a n y en cualquier posición en la que se encuentren, para ello se da la siguiente definición.

Definición 1.2.15.
Un n-simplex en $\mathbb{R}^m$ $(m \geq n)$ es un subespacio convexo de $\mathbb{R}^m$ generado por $n+1$ puntos $w_0, \ldots, w_n$, es decir el conjunto $\left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_j \geq 0 \text{ para cada } j \in \{0, \ldots, n\} \right\}$, tales que, si $n \geq 1$, dichos puntos $v_0, ..., v_n$ cumplen que el conjunto $\{w_1 - w_0, w_2 - w_0, \ldots, w_n - w_0\}$ sea linealmente independiente.

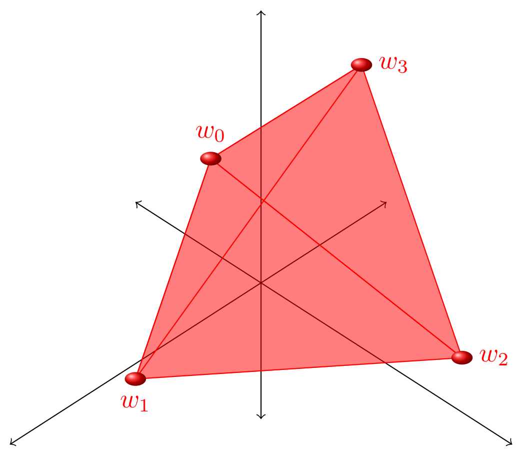
Observación 1.2.8.
Un n-símplex estándar es un n-símplex dentro de $\mathbb{R}^{n+1}$ en el sentido de la definición 1.2.15, generado por los puntos $e_0, \ldots, e_n$ tales que el conjunto $\{e_1 - e_0, \ldots, e_n - e_0\}$ es linealmente independiente.

Para comprender mejor el concepto de n-símplex, se da el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.5.
Un 2-símplex en $\mathbb{R}^2$ es de la forma



Un 3-símplex en $\mathbb{R}^3$ es de la forma



Notación 1.2.6.
Los n-símplex se denotan como $[w_0, w_1, \ldots, w_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i w_i : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_j \geq 0 \text{ para cada } j \in \{0, \ldots, n\} \right\}$.
De la misma forma, se denota a los n-símplex estándar como $\Delta^n = [e_0, e_1, \ldots, e_n]$.

Observación 1.2.9.
Para el cálculo de la homología se requiere que los n-símplex posean una orientación. El orden de los vértices, tal como está dado en la notación 1.2.6, determina la orientación del n-símplex.

Observación 1.2.10.
Sea $[x_0, \ldots, x_n]$ un n-símplex arbitrario, si $\sum_{i=0}^{n} t_i x_i, \sum_{i=0}^{n} r_i x_i \in [x_0, \ldots, x_n]$ tales que $\sum_{i=0}^{n} t_i x_i = \sum_{i=0}^{n} r_i x_i$, entonces $\sum_{i=0}^{n} (t_i - r_i) x_i = 0$. Ahora, como $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1 = \sum_{i=0}^{n} r_i$ entonces $t_0 - r_0 = -\sum_{i=1}^{n} (t_i - r_i)$, por tanto $0 = \sum_{i=0}^{n} (t_i - r_i) x_i = (t_0 - r_0) x_0 + \sum_{i=1}^{n} (t_i - r_i) x_i = -\sum_{i=1}^{n} (t_i - r_i) x_0 + \sum_{i=1}^{n} (t_i - r_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} (t_i - r_i)(x_i - x_0)$.
De lo anterior, como $\sum_{i=1}^{n} (t_i - r_i)(x_i - x_0) = 0$ y $\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$ es linealmente independiente, se cumple que $t_i - r_i = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y como consecuencia de esto se tiene que $t_0 - r_0 = -\sum_{i=1}^{n} (t_i - r_i) = 0$.
Por lo tanto, de los resultados anteriores se concluye que $t_i = r_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Con lo que se ha mencionado anteriormente, se prueba a continuación el siguiente lema.

Lema 1.2.2.
Todo n-símplex es homeomorfo a Δ^n.

Demostración: Se definen

$$\begin{array}{rccc} f: & [w_0, w_1, \ldots, w_n] & \longrightarrow & \Delta^n \\ & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t_i w_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t_i e_i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \Delta^n & \longrightarrow & [w_0, w_1, \ldots, w_n] \\ & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t_i w_i \end{array}$$

Por la observación 1.2.10 se tiene que f, g están bien definidas, así también, f, g son continuas, y además g es la inversa de f, de aquí se tiene el homeomorfismo. ∎

Por el homeomorfismo anterior, a partir de aquí para referirse a un n-símplex arbitario (salvo isomorfismos) sin que se tenga la necesidad de especificar sus vértices, simplemente se escribirá Δ^n.

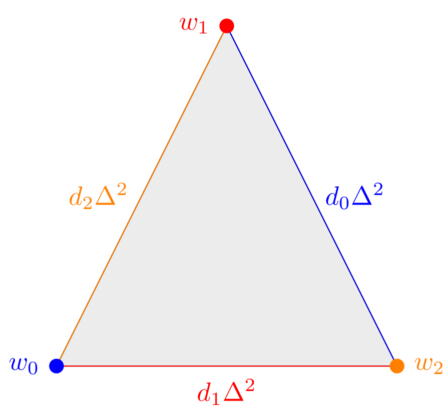
Ahora, se da una definición que dirá cuando se este hablando de las caras de un n-símplex.

Definición 1.2.16.
Sea $[w_0, \ldots, w_n]$ un n-símplex, para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$ se define a la i-ésima cara de $[w_0, \ldots, w_n]$ o la cara opuesta a w_i como $[w_0, \ldots, \widehat{w_i}, \ldots, w_n] := \left\{ \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} t_k w_k : \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} t_k = 1,\ t_j \geq 0 \text{ para cada } j \in \{0, \ldots, n\} \right\}$.
Se denota a esta i-ésima cara como $d_i\Delta^n$.

Observación 1.2.11.
Se puede observar que $d_i\Delta^n$ es un $(n-1)$-símplex, y por el lema 1.2.2, $d_i\Delta^n \cong_{Top} \Delta^{n-1}$.

Para entender mejor la definición 1.2.16, se da el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.6.
En un 2-símplex, sus caras están representadas por $d_0\Delta^2$, $d_1\Delta^2$, $d_2\Delta^2$ en la siguiente figura.



Se da ahora una definición que será de gran ayuda para desarrollar los conceptos posteriores.

Definición 1.2.17.
Al espacio $\text{int}\Delta^n := \Delta^n - \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} d_i\Delta^n$ se le llama el interior del n-símplex Δ^n.

En la definición presentada a continuación, para cada n-símplex se asume que se considera el homeomorfismo del lema 1.2.2.

Definición 1.2.18.
Un Δ-complejo es un espacio topológico X junto con una colección de funciones $\{f_\alpha^n : \Delta^n \longrightarrow X\}_{\alpha \in I_n}^{n\geq 0}$, donde para cada $n \geq 0$, I_n es el conjunto que indexa a la cantidad de n-símplex en los que se divide a X, dichas funciones cumplen que:

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\alpha \in I_n$, la restricción $f_\alpha^n|_{\text{int}\Delta^n}$ es inyectiva.

(2) Para cada $x \in X$ existen únicos $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in I_n$ tales que $x \in f_\alpha^n\left(\text{int}\Delta^n\right)$, o bien, existe un único $\alpha \in I_0$ tal que $x \in f_\alpha^0\left(\Delta^0\right)$.

(3) Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, cada restricción $f_\alpha^n|_{d_i\Delta^n}$ es una de las funciones $f_\beta^{n-1} : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$.

(4) $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si $\left(f_\alpha^n\right)^{-1}(A)$ es abierto en Δ^n para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\alpha \in I_0$

A la colección de funciones $\{f_\alpha^n : \Delta^n \longrightarrow X\}_{\alpha \in I_n}^{n\geq 0}$ se le llama una estructura de Δ-complejo para X.

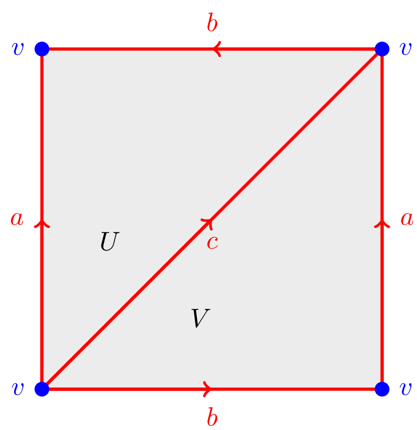
Observación 1.2.12.
Dado que Δ^n es un n-símplex arbitrario, salvo isomorfismos, entonces cuando se dice que $f_\alpha^n|_{d_i\Delta^n}$ es una de las funciones f_β^{n-1} se refiere a que $f_\alpha^n|_{d_i\Delta^n} = f_\beta^{n-1} \circ \varphi$ donde $\varphi : d_i\Delta^n \longrightarrow \Delta^{n-1}$ es un isomorfismo, el cual existe por la observación 1.2.11. Así también, como Δ^n es un n-símplex arbitrario, salvo isomorfismos, si es posible considerar $f_\alpha^n : \Delta_1^n \longrightarrow X$ y $f_\beta^n : \Delta_2^n \longrightarrow X$ con Δ_1^n y Δ_2^n distintos como conjuntos.
Además, la estructura de Δ-complejo de un espacio topológico X, no es única.

Se considera a continuación el siguiente ejemplo para entender mejor la definición anterior.

Ejemplo 1.2.7.
La botella de Klein K es un Δ-complejo, en efecto, definiendo $U = [(0,0),(0,1),(1,1)]$, $V = [(0,0),(1,0),(1,1)]$, $a = [(0,0),(0,1)]$, $b = [(0,0),(1,0)]$, $c = [(0,0),(1,1)]$ y $v = [(0,0)]$ y considerando a K como un cociente del espacio $I \times I$, tal como se hizo en el ejemplo 1.2.3, para cada $O \in \{U, V, a, b, c, v\}$ se define

$$\begin{array}{rccc} f_O : & O & \longrightarrow & K \\ & p & \longmapsto & q(p) \end{array}$$

donde $q : I \times I \longrightarrow K$ es la función cociente que describe las identificaciones en $I \times I$ para construir a K.
Considerando a las funciones anteriores y al cociente que representa a K, los símplex U, V, a, b, c, v se representan como sigue en la siguiente figura.



De la figura anterior, es fácil ver que la colección de funciones $\{f_O : O \longrightarrow K : O \in \{U, V, a, b, c, v\}\}$ cumple con los 4 puntos de la definición 1.2.18, por tanto dicha colección es una estructura de Δ-complejo para K.

Ahora bien, antes de dar el concepto de homología, se da la siguiente definición.

Definición 1.2.19.
Sea una sucesión de R-módulos, para un anillo R, dada por

$$\cdots \longrightarrow M_k \xrightarrow{f_k} M_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} M_{k-2} \longrightarrow \cdots$$

Se dice que dicha sucesión es

- **exacta**, si $\mathrm{Im}(f_k) = \ker(f_{k-1})$ para toda $k \in \mathbb{Z}$;
- **un complejo de cadena**, si $\mathrm{Im}(f_k) \subseteq \ker(f_{k-1})$ para toda $k \in \mathbb{Z}$.

Observación 1.2.13.
La condición de ser complejo de cadena es equivalente a que $f_{k-1} \circ f_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Para que tenga sentido hablar de homología, se tiene que construir un complejo de cadena.

Se empezará a construir la homología más simple e intuitiva, para ello, sea $\{f_\alpha^n : \Delta^n \longrightarrow X\}_{\alpha \in I_n}^{n \geq 0}$ una estructura de Δ-complejo para X, se construye así el complejo de cadena asociado a la estructura de un Δ-complejo X.

Se define $C_n^{\Delta}(X) = \mathbb{Z}J_n$ como el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por J_n, donde $J_n := \{f_\alpha^n : \Delta^n \longrightarrow X\}_{\alpha \in I_n}$ para un n fijo, así pues dado que $C_n^{\Delta}(X)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo, es decir un grupo abeliano, entonces sus elementos tienen la forma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_{\alpha_k}^n \quad \text{con } a_k \in \mathbb{Z},\ f_{\alpha_k}^n \in J_n.$$

Normalmente se usa por convención que $\mathbb{Z}\emptyset = 0$.

Ahora se construyen funciones que relacionan los $C_n^{\Delta}(X)$.
Por el punto (2) de la definición 1.2.18, $f_{\alpha_k}^n|_{d_i \Delta^n} \in C_{n-1}^{\Delta}(X)$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, por tanto se define

$$\partial_n^{\Delta}(f_{\alpha_k}^n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_{\alpha_k}^n|_{d_i \Delta^n}.$$

Por la propiedad universal del módulo libre (véase [7, teorema 6.7, pág. 30]), existe un único morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}}$ tal que extiende por linealidad al morfismo ∂_n^{Δ} definido anteriormente, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
J_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\partial_n^{\Delta}"'] & \mathbb{Z}J_n \arrow[dl, dashed, "\boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}}"] \\
C_{n-1}^{\Delta}(X) &
\end{tikzcd}$$

De aquí, se ha definido morfismos de $\mathbb{Z}$-módulos $\boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}} : C_n^{\Delta}(X) \longrightarrow C_{n-1}^{\Delta}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Como no se tienen n-símplex con $n < 0$, se puede considerar que $\boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}} = 0$ y $C_{n-1}^{\Delta}(X) = 0$ para toda $n \leq 0$.

Por tanto, se ha construido la sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos asociada a la estructura de Δ-complejo de X, la cual esta dada por

$$\cdots \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_3^{\boldsymbol{\Delta}}} C_2^{\Delta}(X) \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_2^{\boldsymbol{\Delta}}} C_1^{\Delta}(X) \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}} C_0^{\Delta}(X) \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_0^{\boldsymbol{\Delta}}} 0 \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_{-1}^{\boldsymbol{\Delta}}} \cdots$$

Dada esta sucesión, se presenta el siguiente lema cuya prueba se encuentra en [8, lema 2.1, pág. 105].

Lema 1.2.3.
$\boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}} \circ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^{\boldsymbol{\Delta}} = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Observación 1.2.14.
Con el lema 1.2.3 y la observación 1.2.13, se tiene que la sucesión anterior es un complejo de cadena.

Dada la observación anterior, tiene sentido dar la siguiente definición.

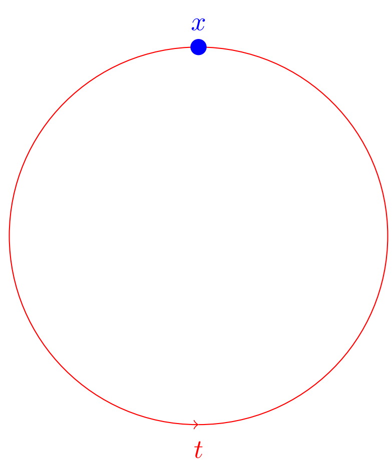
Definición 1.2.20.
Los grupos de homología simplicial de un Δ-complejo X son $H_n^{\Delta}(X) := \ker \boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}} / \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^{\boldsymbol{\Delta}}$.

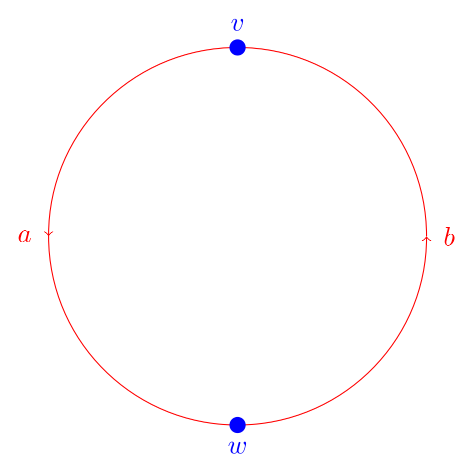
Observación 1.2.15.
Dado que el núcleo y la imagen de un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, son de nuevo $\mathbb{Z}$-módulos, y como consecuencia de la observación 1.2.14 se tiene que $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^{\boldsymbol{\Delta}} \subseteq \ker \boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}}$ siendo ambos $\mathbb{Z}$-módulos, por tanto el cociente $\ker \boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}} / \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^{\boldsymbol{\Delta}}$ viene siendo de nuevo un $\mathbb{Z}$-módulo, es decir un grupo abeliano.

Ahora bien, de la observación 1.2.12 se tiene que la estructura de Δ-complejo no es única para un determinado espacio topológico X, por lo que en principio el complejo de cadena cambia si se da otra estructura de Δ-complejo y se podría pensar que los grupos de homología también tienen que cambiar, sin embargo, esto no sucede.

Lo que se tiene es que, de existir diferentes estructuras de Δ-complejo asociadas a un mismo espacio X, sus grupos de homología son isomorfos, esto se probará más adelante pero de mientras se da el siguiente ejemplo donde se ve presente esta propiedad.

Ejemplo 1.2.8.
Sea S^1 el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y se considera dos estructuras de Δ-complejo para S^1 (asignándole una orientación para definir las funciones del complejo de cadena) presentadas a continuación.





Entonces para la primer estructura, se tiene el complejo de cadena asociado dado por

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}t & \longrightarrow & \mathbb{Z}x & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & t & \longmapsto & x - x & & & & \end{array}$$

De aquí es fácil ver que $H_n^{\Delta}(S^1) = 0$ para toda $n \geq 2$, y además que la función $\boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}} : \mathbb{Z}t \longrightarrow \mathbb{Z}x$ es la función cero, y dado que a su vez $\boldsymbol{\partial}_0^{\boldsymbol{\Delta}} = 0 = \boldsymbol{\partial}_2^{\boldsymbol{\Delta}}$, por tanto

$$H_0^{\Delta}(S^1) = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_0^{\boldsymbol{\Delta}}}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}} = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_0^{\boldsymbol{\Delta}}}{\text{Im } 0} \cong \ker \boldsymbol{\partial}_0^{\boldsymbol{\Delta}} = \ker 0 = \mathbb{Z}x \cong \mathbb{Z}.$$

$$H_1^{\Delta}(S^1) = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_2^{\boldsymbol{\Delta}}} = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}}{\text{Im } 0} \cong \ker \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}} = \ker 0 = \mathbb{Z}t \cong \mathbb{Z}.$$

Así también, para la segunda estructura, se tiene el complejo de cadena asociado dado por

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b & \longrightarrow & \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & a & \longmapsto & w - v & & & & \\ & & & & b & \longmapsto & v - w & & & & \end{array}$$

De aquí es fácil ver que $H_n^{\Delta}(S^1) = 0$ para toda $n \geq 2$, y que si $na + mb \in \ker \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}$ entonces se tiene que $0 = \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}(na + mb) = n(w - v) + m(v - w) = (m - n)v + (n - m)w$, esto implica que $n - m = 0 = m - n$, es decir $n = m$, por lo que

$$\ker \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}} = \{na + mb : \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}(na + mb) = 0\} = \{n(a + b) : n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}(a + b).$$

Además, es fácil observar que Im $\boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}} = \mathbb{Z}(w - v)$ y que $\boldsymbol{\partial}_0^{\boldsymbol{\Delta}} = 0 = \boldsymbol{\partial}_2^{\boldsymbol{\Delta}}$, por tanto

$$H_0^{\Delta}(S^1) = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_0^{\boldsymbol{\Delta}}}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}} = \frac{\ker 0}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}} = \frac{\mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w}{\mathbb{Z}(w - v)} \cong \frac{\mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}(w - v)}{\mathbb{Z}(w - v)} \cong \frac{\mathbb{Z}v}{\mathbb{Z}v \cap \mathbb{Z}(w - v)} = \frac{\mathbb{Z}v}{0} \cong \mathbb{Z}v \cong \mathbb{Z}.$$

$$H_1^{\Delta}(S^1) = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_2^{\boldsymbol{\Delta}}} = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}}}{\text{Im } 0} \cong \ker \boldsymbol{\partial}_1^{\boldsymbol{\Delta}} = \mathbb{Z}(a + b) \cong \mathbb{Z}.$$

Como se ha visto, aún con diferentes estructuras de Δ-complejo, se tienen grupos de homología isomorfomos, así, se concluye que los grupos de homología simplicial de S^1 son

$$H_n^{\Delta}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ya se ha visto que se puede obtener homología simplicial mediante los n-símplex de manera muy intuitiva, pero esto no siempre es posible, ya que no todo espacio topológico posee estructura de Δ-complejo. Por tanto, se hablará de una homología, la cual se llama homología singular, que servirá para cualquier espacio topológico, para ello se introducen algunos conceptos.

Definición 1.2.21.
Sea X un espacio topológico. Un n-símplex singular en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$. Así también, se define el conjunto de todos los n-símplex singulares como $S_n(X) := \{\sigma : \Delta^n \longrightarrow X | \ \sigma \text{ es continua}\}$.

Definición 1.2.22.
Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define el grupo de n-cadenas singulares como el $\mathbb{Z}$-módulo dado por

$$C_n(X) := \mathbb{Z}S_n(X) = \left\{ \sum_{finita} n_i \sigma_i \,\middle|\, n_i \in \mathbb{Z} \text{ y } \sigma_i \in S_n(X) \right\}.$$

A los elementos de $C_n(X)$ se les llamarán cadenas singulares de dimensión n, o bien, n-cadenas singulares.

Ahora bien, si se desea hablar de homología, se tiene que construir un complejo de cadena asociado a sus n-símplex, en este caso a sus n-símplex singulares, por tanto, se empezará construyendo funciones que relacionan a los $C_n(X)$.

Sea $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ un n-símplex estándar, teniendo en cuenta el lema 1.2.2 es posible considerar a Δ^n como $[v_0, \ldots, v_n]$. Por la observación 1.2.11 se tiene que existe un homeomorfismo entre $d_i\Delta^n \cong_{Top} \Delta^{n-1}$ y por la consideración anterior se tiene que $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n] = d_i\Delta^n$, de aquí para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ se define a $d_i\sigma : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$ como la función que hace el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \arrow[rr, "\sigma"] & & X \\
{[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]} \arrow[u, hook] & & \\
\Delta^{n-1} \arrow[u, "\cong"] \arrow[uurr, "d_i\sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por el diagrama anterior, es claro que $d_i\sigma \in S_{n-1}(X)$ y además $d_i\sigma = \sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_n]}$.

De todo lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define

$$\partial_n\sigma = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i\sigma \in C_{n-1}(X).$$

Así, al igual que en el caso simplicial, por la propiedad universal del módulo libre ya previamente mencionada, existe un único morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\boldsymbol{\partial}_n$ tal que extiende por linealidad al morfismo ∂_n definido anteriormente, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
S_n(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\partial_n"'] & \mathbb{Z}S_n(X) \arrow[dl, dashed, "\boldsymbol{\partial}_n"] \\
C_{n-1}(X) &
\end{tikzcd}$$

De aquí, se han definido morfismos de $\mathbb{Z}$-módulos $\boldsymbol{\partial}_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dado que no se tienen n-símplex con $n < 0$, es posible considerar $\boldsymbol{\partial}_n = 0$ y $C_{n-1}(X) = 0$ para toda $n \leq 0$.

Por tanto, se ha construido la sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos asociada a X, la cual esta dada por

$$\cdots \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_3} C_2(X) \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_2} C_1(X) \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_1} C_0(X) \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_0} 0 \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_{-1}} \cdots$$

Dada esta sucesión, se da el siguiente lema para los morfismos definidos anteriormente y cuya prueba es analóga a la de [8, lema 2.1, pág. 105].

Lema 1.2.4.
$\boldsymbol{\partial}_n \circ \boldsymbol{\partial}_{n+1} = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Se ha construido un complejo de cadena singular asociado al espacio topológico X, por tanto, tiene sentido dar la siguiente definición.

Definición 1.2.23.
El n-ésimo grupo de homología singular de X es $H_n(X) := \ker \boldsymbol{\partial}_n / \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}$.

Para entender mejor como se calculan los grupos de homología singular, se da el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.9.
Sea $X = \{0\} = *$, para cada $n \geq 0$ hay una única función $\sigma_n : \Delta^n \longrightarrow *$, por lo que $S_n(*) = \{\sigma_n\}$ y a su vez $C_n(*) = \mathbb{Z}\sigma_n$. Así

$$\boldsymbol{\partial}_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma_n|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_n]} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar o } n = 0, \\ \sigma_{n-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esto dice que $\boldsymbol{\partial}_n = 0$ si n es impar o $n = 0$, y $\boldsymbol{\partial}_n$ es un isomorfismo si n es par, por lo que

$$H_0(*) = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_0}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_1} = \frac{\ker 0}{\text{Im } 0} \cong \frac{\mathbb{Z}\sigma_0}{0} \cong \mathbb{Z}\sigma_0 \cong \mathbb{Z};$$

$$H_n(*) = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_n}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}} = \frac{\ker 0}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}} \cong \frac{\mathbb{Z}\sigma_n}{\mathbb{Z}\sigma_n} \cong 0 \qquad \text{si } n \geq 1 \text{ es impar;}$$

$$H_n(*) = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_n}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}} = \frac{\ker \boldsymbol{\partial}_n}{\text{Im } 0} \cong \frac{0}{0} \cong 0 \qquad \text{si } n \geq 1 \text{ es par.}$$

En conclusión, se tiene que

$$H_n(*) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Al momento de calcular los grupos de homología, se quisiera simplificar dichos resultados con las propiedades que tenga el espacio topológico en cuestión, entonces se da a continuación un resultado importante al momento de calcular el 0-grupo de homología que servirá en resultados posteriores. La prueba de este resultado se encuentra en [8, proposición 2.7, pág. 109].

Proposición 1.2.8.
Si X es arcoconexo entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

A continuación, se da un repaso a la construcción de la funtorialidad de este tipo de homología, para ello es necesario definir morfismos que relacionen dos complejos de cadena, pero antes se da la siguiente notación.

Notación 1.2.7.
Cuando se hable de un complejo de cadena dada por la sucesión

$$\cdots \longrightarrow M_k \xrightarrow{f_k} M_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} M_{k-2} \longrightarrow \cdots$$

simplemente se escribirá (M, f).

Dado esto, es posible dar la siguiente definición.

Definición 1.2.24.
Sean (C, d), (D, d') dos complejos de cadena. Un morfismo de complejos $f_{Cad} : (C, d) \longrightarrow (D, d')$ es una sucesión de morfismos $f_n : C_n \longrightarrow D_n$ tales que conmutan con las funciones d_n y d'_n para cada $n \in \mathbb{Z}$, es decir, se tienen los siguientes cuadrados conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "d'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ahora, dada $f : X \longrightarrow Y$, se construye el morfismo de cadena asociado a f. Es fácil observar que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cada $\sigma_n : \Delta^n \longrightarrow X$ se tiene que $f \circ \sigma_n : \Delta^n \longrightarrow Y$, esto permite definir

$$\begin{array}{rccc} \hat{f}_n : & S_n(X) & \longrightarrow & S_n(Y) \\ & \sigma_n & \longmapsto & f \circ \sigma_n. \end{array}$$

Considerando la inclusión natural $S_n(Y) \hookrightarrow C_n(Y)$ por la propiedad universal del módulo libre existe un único morfismo f_n que extiende linealmente al morfismo $\hat{f}_n$ compuesto con la inclusión mencionada anteriormente, es decir, se tiene el siguiente cuadro conmutativo.

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "\hat{f}_n"] \arrow[d, hook] & S_n(Y) \arrow[d, hook] \\ C_n(X) \arrow[r, dashed, "f_n"] & C_n(Y) \end{tikzcd}$$

Se define a continuación para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ el morfismo $F_j : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ tal que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} {[v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_n]} \arrow[r, hook] & \Delta^n \\ \Delta^{n-1} \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur, "F_j"'] & \end{tikzcd}$$

De esta manera, por como se definió $d_j\sigma^X : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$ para cualquier $\sigma^X : \Delta^n \longrightarrow X$, es fácil observar que $d_j\sigma^X = \sigma^X \circ F_j$.

Así $d_j\left(f_n\left(\sigma^X\right)\right) = \left(f_n\left(\sigma^X\right)\right) \circ F_j = \left(f \circ \sigma^X\right) \circ F_j = f \circ \left(\sigma^X \circ F_j\right) = f \circ \left(d_j\sigma^X\right) = f_{n-1}\left(d_j\sigma^X\right)$ y esto se cumple para toda $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{\partial}_n^Y \circ f_n\right)\left(\sigma^X\right) = \boldsymbol{\partial}_n^Y\left(f_n\left(\sigma^X\right)\right) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j d_j\left(f_n\left(\sigma^X\right)\right) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j f_{n-1}\left(d_j\sigma^X\right) \\ &= f_{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j d_j\sigma^X\right) = f_{n-1}\left(\boldsymbol{\partial}_n^X\left(\sigma^X\right)\right) = \left(f_{n-1} \circ \boldsymbol{\partial}_n^X\right)\left(\sigma^X\right). \end{aligned}$$

Se concluye que $\boldsymbol{\partial}_n^Y \circ f_n = f_{n-1} \circ \boldsymbol{\partial}_n^X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "\boldsymbol{\partial}_n^X"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "\boldsymbol{\partial}_n^Y"] & C_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Además se tiene que $\left(\boldsymbol{\partial}_0^Y \circ f_0\right)\left(\sigma^X\right) = \boldsymbol{\partial}_0^Y\left(f_0\left(\sigma^X\right)\right) = 0$ para cada $\sigma^X : \Delta^0 \longrightarrow X$, de aquí se tiene la siguiente observación.

Observación 1.2.16.
Por lo planteado anteriormente y por la definición 1.2.24, se tiene que la colección de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $f_k = 0$ para cada $k < 0$ es un morfismo de complejos de cadena entre $\left(C(X), \boldsymbol{\partial}^X\right)$ y $\left(C(Y), \boldsymbol{\partial}^Y\right)$, los cuales son los complejos de cadena asociados a los espacios X y Y respectivamente.

Por la observación 1.2.16 es posible dar la siguiente definición.

Definición 1.2.25.
Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en Top, se define el morfismo de cadena asociado a f como la colección de morfismos de $\mathbb{Z}$-módulos $\{f_\times^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dados por

$$\begin{array}{rccc} f_\times^n : & C_n(X) & \longrightarrow & C_n(Y) \\ & \sigma & \longmapsto & \begin{cases} f\circ\sigma & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases} \end{array}$$

A esta colección se le denota por $f_\times : \left(C(X), \boldsymbol{\partial}^X\right) \longrightarrow \left(C(Y), \boldsymbol{\partial}^Y\right)$, o bien, cuando no haya confusión simplemente se escribirá $f_\times$.

Dada esta definición se considera la siguiente observación.

Observación 1.2.17.
Dado que $\left(C(X), \boldsymbol{\partial}^X\right)$ y $\left(C(Y), \boldsymbol{\partial}^Y\right)$ son complejos de cadena, como consecuencia de la definición 1.2.19, se tiene que $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X \subseteq \ker \boldsymbol{\partial}_n^X$ y $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Y \subseteq \ker \boldsymbol{\partial}_n^Y$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, entonces es posible considerar las inclusiones naturales $i_X : \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X \hookrightarrow \ker \boldsymbol{\partial}_n^X$, $i_Y : \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Y \hookrightarrow \ker \boldsymbol{\partial}_n^Y$ con las cuales se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, "f_\times^n|_{\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X}"'] & \ker \boldsymbol{\partial}_n^X \arrow[d, "f_\times^n|_{\ker \boldsymbol{\partial}_n^X}"] \\
\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Y \arrow[r, hook, "i_Y"] & \ker \boldsymbol{\partial}_n^Y
\end{tikzcd}$$

Por tanto, de la definición 1.2.23 como $H_n(X) = \ker \boldsymbol{\partial}_n^X / \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X$ y $H_n(Y) = \ker \boldsymbol{\partial}_n^Y / \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Y$, al aplicar a $H_n(X)$ la propiedad universal del cociente para grupos (véase [7, teorema 5.1, pág. 23]), existe un único morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos f_*^n para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que hace el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, "f_\times^n|_{\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X}"'] & \ker \boldsymbol{\partial}_n^X \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "f_\times^n|_{\ker \boldsymbol{\partial}_n^X}"] & H_n(X) \arrow[d, dashed, "f_*^n"] \\
\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Y \arrow[r, hook, "i_Y"] & \ker \boldsymbol{\partial}_n^Y \arrow[r, "q_Y"] & H_n(Y)
\end{tikzcd}$$

Así, por el diagrama anterior, se puede ver que $f_*^n\left(\sigma + \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X\right) = f_\times^n(\sigma) + \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Y = f\circ\sigma + \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Y$.

Con lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 1.2.26.
Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en Top, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define el morfismo inducido por homología de grado n dado por

$$\begin{array}{rccc} f_*^n : & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(Y) \\ & \sigma + \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X & \longmapsto & f\circ\sigma + \mathrm{Im}\ \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Y. \end{array}$$

Se le denotará como $f_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ a la colección $\{f_*^n\}_{n\geq 0}$ de los morfismos dados anteriormente, o bien, cuando no haya necesidad de especificar los espacios X, Y simplemente se escribirá f_*.

Así, considerando esta definición se da el siguiente teorema.

Teorema 1.2.4.
Mediante los grupos de homología se obtiene para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ un funtor $H_n : Top \longrightarrow Ab$ tal que:

- a cada objeto X en Top se le asigna $H_n(X)$ en Ab,
- a cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en Top se le asigna $f_*^n : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ en Ab.

Demostración: Por la observación 1.2.15 y la observación 1.2.17, sólo basta comprobar los siguientes puntos de la definición 1.1.3.

- Para $1_X : X \longrightarrow X$ se tiene que $(1_X)_*^n \left(\sigma + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X\right) = 1_X \circ \sigma + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X = \sigma + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X$, por lo que $(1_X)_*^n = 1_{H_n(X)}$.
- Para $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos en Top se observa que
$$\begin{aligned}(g \circ f)_*^n \left(\sigma + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X\right) &= (g \circ f) \circ \sigma + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Z = g \circ (f \circ \sigma) + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Z = g_*^n \left(f \circ \sigma + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^Y\right) \\ &= g_*^n \left(f_*^n \left(\sigma + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X\right)\right) = (g_*^n \circ f_*^n) \left(\sigma + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^X\right),\end{aligned}$$
por lo que $(g \circ f)_*^n = g_*^n \circ f_*^n$.

■

Con la funtorialidad de los grupos de homología se desearía tener un resultado similar al de la proposición 1.2.6, para ello se da el siguiente lema cuya prueba está en [8, teorema 2.10, pág. 111].

Lema 1.2.5.
Sean $f, g : X \longrightarrow X$ morfismos en Top tales que $f \simeq g$, se tiene que $f_* = g_*$.

Con el resultado anterior se da el siguiente corolario.

Corolario 1.2.1.
Si $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica entonces $f_*^n : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración: Suponiendo que $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$, ahora bien, por el lema 1.2.5 se tiene que $(g \circ f)_* = (1_X)_*$ y $(f \circ g)_* = (1_Y)_*$, es decir, $(g \circ f)_*^n = (1_X)_*^n$ y $(f \circ g)_*^n = (1_Y)_*^n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
De aquí, por el teorema 1.2.4 se tiene que $g_*^n \circ f_*^n = (g \circ f)_*^n$, $f_*^n \circ g_*^n = (f \circ g)_*^n$, $(1_X)_*^n = 1_{H_n(X)}$ y $(1_Y)_*^n = 1_{H_n(Y)}$, por lo que $g_*^n \circ f_*^n = 1_{H_n(X)}$ y $f_*^n \circ g_*^n = 1_{H_n(Y)}$, y por lo anterior se tiene que g_*^n es el inverso de f_*^n para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir, f_*^n es un isomorfismo. ■

Ya que se tienen algunos resultados clásicos de la homología singular, se quisiera probar la equivalencia entre homología simplicial y homología singular, para ello, sea $\{f_\alpha^n : \Delta^n \longrightarrow X\}_{\alpha \in I_n}^{n \geq 0}$ una estructura de Δ-complejo para X, se observa que a cada f_α^n se le puede asociar su función característica $\sigma_\alpha^n : \Delta^n \longrightarrow X$, de esta manera $\sigma_\alpha^n \in C_n(X)$. Con esto se define

$$\begin{array}{rccc}\varphi_n : & C_n^{\Delta}(X) & \longrightarrow & C_n(X) \\ & \Delta_\alpha^n & \longmapsto & \sigma_\alpha^n.\end{array}$$

Obsérvese que φ_n es un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos y además se tiene que $\varphi_n|_{\ker \boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}}} \circ i^{\Delta} = i \circ \varphi_n|_{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}}}$ con $i^{\Delta} : \ker \boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}} \hookrightarrow \text{Im } \boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}}$, $i : \ker \boldsymbol{\partial}_n \hookrightarrow \text{Im } \boldsymbol{\partial}_n$, entonces por la propiedad universal del cociente en $H_n^{\Delta}(X)$ existe un único morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos φ_*^n tal que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^{\boldsymbol{\Delta}} \arrow[r, hook, "i^{\Delta}"] \arrow[d, "\varphi_n|_{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^{\boldsymbol{\Delta}}}"'] & \ker \boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}} \arrow[r, "q^{\Delta}"] \arrow[d, "\varphi_n|_{\ker \boldsymbol{\partial}_n^{\boldsymbol{\Delta}}}"] & H_n^{\Delta}(X) \arrow[d, dashed, "\varphi_*^n"] \\
\text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1} \arrow[r, hook, "i"] & \ker \boldsymbol{\partial}_n \arrow[r, "q"] & H_n(X)
\end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior, es posible ver que $\varphi_*^n\left(f_\alpha^n + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}^{\boldsymbol{\Delta}}\right) = \varphi_n\left(f_\alpha^n\right) + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1} = \sigma_\alpha^n + \text{Im } \boldsymbol{\partial}_{n+1}$.

Con esto, se da el siguiente resultado cuya prueba puede verse en [11, teorema 10.4, pág. 27].

Teorema 1.2.5.
Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función $\varphi_n : C_n^\Delta(X) \longrightarrow C_n(X)$ induce un isomorfismo $\varphi_*^n : H_n^\Delta(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$.

Con esto, se prueba que la homología simplicial es invariante bajo la estructura de Δ-complejo que se elija.

Corolario 1.2.2.
Sea X un espacio topológico dotado de dos estructuras de Δ-complejo, denotando dichas estructuras como Δ_1 y Δ_2. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sean $H_n^{\Delta_1}(X)$ y $H_n^{\Delta_2}(X)$ los grupos de homología asociados a las estructuras de Δ-complejo Δ_1 y Δ_2, respectivamente. Se tiene por tanto que $H_n^{\Delta_1}(X) \cong H_n^{\Delta_2}(X)$.

Demostración: Por el teorema 1.2.5 para $\varphi_n : C_n^{\Delta_1}(X) \longrightarrow C_n(X)$ y $\psi_n : C_n^{\Delta_2}(X) \longrightarrow C_n(X)$ se tienen los isomorfismos inducidos $\varphi_*^n : H_n^{\Delta_1}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$ y $\psi_*^n : H_n^{\Delta_2}(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$, por tanto se tiene que $(\psi_*^n)^{-1} \circ \varphi_*^n : H_n^{\Delta_1}(X) \longrightarrow H_n^{\Delta_2}(X)$ es un isomorfismo. ■

Como consecuencia del teorema 1.2.5 los resultados anteriores que se han probado para la homología singular, así como los que se vayan probando posteriormente, se cumplen también para la homología simplicial y viceversa, siempre y cuando el espacio X esté dotado de una estructura de Δ-complejo.

También, por el corolario 1.2.2, no importa de que estructura de Δ-complejo se le dote al espacio X, los grupos de homología serán isomorfos, por lo que para calcular homología simplemente se necesita obtener una estructura de Δ-complejo sin importar cuál sea está.

Tomando lo anterior en cuenta junto con la definición 1.2.13, se da un enunciado que será importante en los resultados posteriores y cuya prueba puede consultarse en [15, teorema 16.4.8, pág. 417], o bien en [8, teorema 4.32, pág. 366].

Teorema 1.2.6 (Hurewicz)**.**
Si X es un espacio $(n-1)$-conexo, para $n \geq 2$, entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, $H_i(X) = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y además $\pi_n(X) \cong H_n(X)$.

Como consecuencia directa de este teorema de Hurewicz se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.2.3.
Si X es un espacio simplemente conexo tal que $H_i(X) = 0$ para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$, entonces X es n-conexo.

Demostración: Para probar que X es n-conexo, se observa que solo basta probar que $\pi_i(X) = 0$ para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$, por tanto se hace inducción sobre i.
Si $i = 2$, como X es simplemente conexo, por el teorema 1.2.6 se tiene que $\pi_2(X) \cong H_2(X)$ y como por hipótesis $H_2(X) = 0$ entonces $\pi_2(X) = 0$, es decir, X es 2-conexo.
Ahora, si se supone que $\pi_k(X) = 0$ para cada $k \in \{0, \ldots, i\}$ con $i \geq 2$ y además $i + 1 \leq n$, entonces por el teorema 1.2.6 se tiene que $\pi_{i+1}(X) \cong H_{i+1}(X)$ y además como $H_{i+1}(X) = 0$, entonces $\pi_{i+1}(X) = 0$. ■

Se da ahora otro enunciado que será importante en resultados posteriores comenzando con las siguientes definiciones.

Definición 1.2.27.
Una n-celda es un espacio $e \cong_{Top} \begin{cases} \mathring{D}^n & n \geq 1, \\ \{0\} & n = 0, \end{cases}$ donde $\mathring{D}^n := \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1 \right\}$.
Cuando se hable de un $e \cong_{Top} \mathring{D}^n$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dado, se dirá que e es de dimensión n, o bien, e es n-dimensional, y en este caso simplemente se escribirá $e^{(n)}$.

Definición 1.2.28.
Sea X un espacio topológico T_2 y sea ε una partición de X tal que cada $e \in \varepsilon$ es una n-celda con $n \leq \dim(X)$, y además la partición satisface que:

- para cada $e \in \varepsilon$ hay una función continua $\varphi_e : D^n \longrightarrow X$ tal que $\varphi_e|_{\mathring{D}^n} : \mathring{D}^n \longrightarrow \varphi_e(\mathring{D}^n)$ es un isomorfismo en Top, y además si se tiene $e^{(k)} \in \varepsilon$ tal que si $\varphi_e(\partial D^n) \cap e^{(k)} \neq \emptyset$ entonces $k \leq n-1$,
- para cada $e \in \varepsilon$ se tiene que $C_e := \{e' \in \varepsilon : \overline{e} \cap e' \neq \emptyset\}$ es finito, con $\overline{e}$ la cerradura de e,
- $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $A \cap \overline{e}$ es cerrado para todo $e \in \varepsilon$.

A un tal X para el cual exista una partición ε que cumpla los puntos anteriores se le llama CW-complejo y a dicha partición ε se le llama la partición de X asociada a la estructura de CW-complejo.

Ya que se sabe que es un CW-complejo, se quisiera dar una forma más intuitiva de construirlos, para ello se da la siguiente definición.

Definición 1.2.29.
Sea X un CW-complejo con ε la partición de X asociada a la estructura de CW-complejo dada, entonces

$$X^n := \bigcup_{e \in \varepsilon^n} e \quad \text{con} \quad \varepsilon^n := \{e \in \varepsilon : \dim(e) \leq n\}$$

es llamado el n-esqueleto de X.

Ahora que se tiene la definición de n-esqueleto, es posible construir con estos la estructura ya dada de CW-complejo de un espacio X de la siguiente manera.

1.- Se considera como el 0-esqueleto X^0 como un conjunto discreto de puntos.

2.- De manera inductiva, se construye el n-esqueleto X^n de X^{n-1} pegando n-celdas e^n_α mediante funciones continuas $\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \longrightarrow X^{n-1}$, es decir, se tiene que

$$X^n := \bigsqcup_{\alpha} \frac{X^{n-1} \sqcup D^n_\alpha}{x \sim \varphi_\alpha(x)}$$

3.- Si existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que se deje de adjuntar celdas en el m-esqueleto, entonces $X := X^m$ y se dice que X tiene dimensión finita m.

4.- Si no se deja de adjuntar celdas se toma

$$X := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X^n.$$

A X se le dota de una topología respecto a las inclusiones $X^n \hookrightarrow X$, es decir, U es abierto en X si y sólo si $U \cap X^n$ es abierto en X^n para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Cuando se tenga este caso se dice que X tiene dimensión infinita.

Con la construcción anterior se puede obtener un CW-complejo sin necesidad de probar todos los puntos de la definición 1.2.28. Así pues, se da ahora un resultado importante que relaciona los CW-complejos con los grupos de homotopía cuya prueba puede verse en [8, corolario 4.12, pág. 351].

Teorema 1.2.7.
Sea X un CW-complejo y para algún $n \in \mathbb{N}$ sea X^n el n-esqueleto de X, entonces la inclusión natural $i : X^n \hookrightarrow X$ induce un isormorfismo $i^k_\# : \pi_k(X^n) \longrightarrow \pi_k(X)$ para cada $k \leq n-1$.

El teorema 1.2.7 proviene de un resultado más general presente en [8, corolario 4.12, pág. 351], pero se ha tomado del enunciado solo la parte necesaria para este trabajo de tesis.

Teniendo en cuenta lo planteado anteriormente, ya tiene sentido dar el siguiente resultado cuya prueba puede consultarse en [15, teorema 16.9.5, pág. 439], o bien en [8, corolario 4.33, pág. 367].

Teorema 1.2.8 (Whitehead)**.**
Sean X, Y CW-complejos simplemente conexos, si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo en Top tal que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f_*^n : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo, entonces f es una equivalencia homotópica.

Se puede observar que el enunciado que se dio en teorema 1.2.8 es más bien un corolario del teorema 1.2.6, pero dada su importancia en la tesis se considerará un teorema.

1.3. Teoría de nudos

En nuestra percepción de un espacio tridimensional, hablar de un nudo se vuelve algo cotidiano de experimentar, ya que estos tienen la peculiaridad de representar una cualidad verdaderamente intrínseca y esencial de este espacio de 3 dimensiones que a su vez es accesible a la comprensión intuitiva. Por tanto, en estas líneas se hablará un poco sobre teoría de nudos, que como su nombre indica, se encarga de estudiar el objeto matemático que abstrae la noción que se tiene en nuestra vida diaria de un nudo.

Lo escrito en esta sección proviene principalmente de [3].

Antes de dar el concepto formal de nudo, se dará una definición importante para desarrollar los resultados posteriores.

Definición 1.3.1.
Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice encaje si $f : X \longrightarrow f(X)$ es un isomorfismo en Top.

Considerando la definición anterior, se dan a continuación los siguientes conceptos.

Definición 1.3.2.
Dos encajes $f, g : X \longrightarrow Y$ son isotópicos si existe una homotopía H tal que $f \simeq_H g$ y que con esta se pueda construir un encaje dado por

$$\begin{array}{rccc} F: & X \times I & \longrightarrow & Y \times I \\ & (x,t) & \longmapsto & (H(x,t),t)\,. \end{array}$$

Definición 1.3.3.
Dos encajes $f, g : X \longrightarrow Y$ son ambientalmente isotópicos si existe un isomorfismo $h : Y \longrightarrow Y$ en Top tal que $g = h \circ f$ y h es isotópico a la identidad 1_Y.

Así de la definición 1.3.1, es posible definir formalmente el concepto matemático de nudo como sigue.

Definición 1.3.4.
Un nudo es un encaje $\mathfrak{k} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, si no hay confusión, cuando se hable del conjunto imagen $\mathfrak{k}(S^1)$ simplemente se escribirá $\mathfrak{k}$.

Observación 1.3.1.
Dado que $S^3 \cong_{Top} \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ entonces es posible considerar a los nudos como encajes $\mathfrak{k} : S^1 \longrightarrow S^3$, además, como S^1 es compacto y S^3 es T_2, entonces por un resultado ya conocido de topología general, para que $\mathfrak{k} : S^1 \longrightarrow S^3$ sea un encaje solo se necesita que $\mathfrak{k}$ sea continua e inyectiva.

Considerando los conceptos desarrollados anteriormente, se da la siguiente definición que determinará cuando dos nudos son equivalentes.

Definición 1.3.5.
Sean $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 : S^1 \longrightarrow S^3$ dos nudos, se dice que estos son equivalentes si $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ son ambientalmente isotópicos, en este caso se escribirá $\mathfrak{k}_1 \equiv \mathfrak{k}_2$.

Al hablar de nudos, existe una forma de clasificarlos en dos tipos, dicha clasificación se describe a continuación.

Definición 1.3.6.
A un nudo $\mathfrak{k}$ se le dice nudo dócil si es ambientalmente isotópico a un polígono simple cerrado en $\mathbb{R}^3$, es decir $\mathfrak{k} \equiv K$ donde K es un nudo formado por una unión finita de segmentos de recta, lo cuales serán llamados aristas, cuyos puntos extremos serán los vértices del nudo. Se le llama nudo salvaje al nudo que no es dócil.

Un ejemplo de nudo salvaje puede encontrarse en [5]. A partir de aquí, se hablará únicamente de los nudos dóciles.

Cuando se quiere describir un nudo, hacerlo en 3 dimensiones es complicado, por lo que para determinar la información de un nudo por lo regular se hace uso de una proyección de este a un plano $E \subseteq \mathbb{R}^3$, así pues, este escrito se enfocará en proyecciones regulares las cuales se definen a continuación.

Definición 1.3.7.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un plano y sea $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$ la proyección en dicho plano, entonces para un nudo $\mathfrak{k}$ se dice que $p(\mathfrak{k})$ es una proyección regular si existe $A \subseteq p(\mathfrak{k})$ que cumple los siguientes puntos:

- Si para toda $a \in A$ se tiene que $p^{-1}(a)$ contiene más de un punto en $\mathfrak{k}$, entonces $A = \{P_1, \ldots, P_n\}$ es finito, único y $|p^{-1}(P_i)| = 2$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- Ningún vértice $v \in \mathfrak{k}$ cumple que $p(v) \in A$.

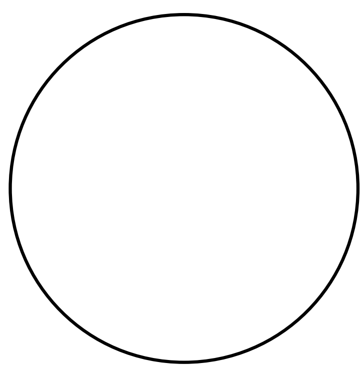
Si un nudo $\mathfrak{k}$ posee una orientación entonces a la proyección regular de $\mathfrak{k}$ dotada de una orientación heredada del nudo se le llama diagrama de nudo.

Observación 1.3.2.
Dado que se decidió trabajar únicamente con nudos dóciles, es decir, nudos ambientalmente isótopicos a un polígono simple cerrado entonces tiene sentido considerar el vértice de $\mathfrak{k}$.

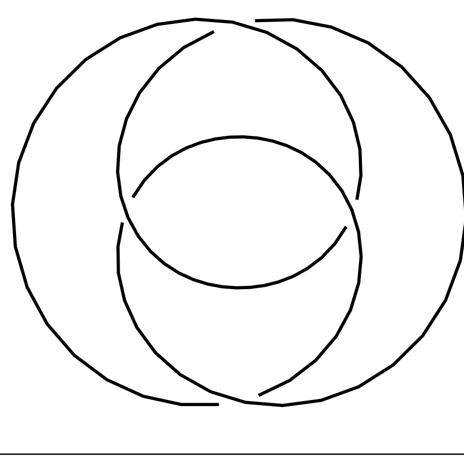
La proyección regular de $\mathfrak{k}$ no determina al nudo, pero si en cada punto $P \in A$ se marca la línea de cruce dentro de dicha proyección regular entonces el nudo se puede reconstruir a partir de su proyección, así pues, se presenta a continuación algunos de los ejemplos de nudos más comunes, los cuales están representados por sus proyecciones regulares.

Ejemplo 1.3.1.
Algunos de los nudos más conocidos son:

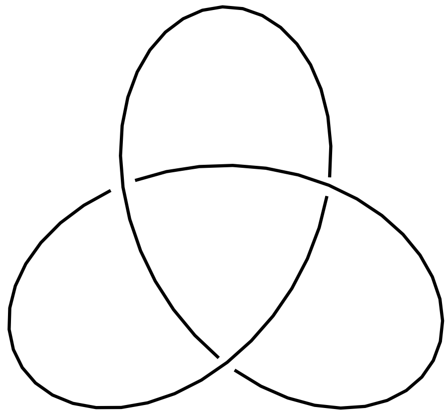
(1) El nudo trivial, que es una circunferencia y está representado por:



(2) El nudo ocho, el cual está representado por:



(3) El nudo trébol, el cual está representado por:

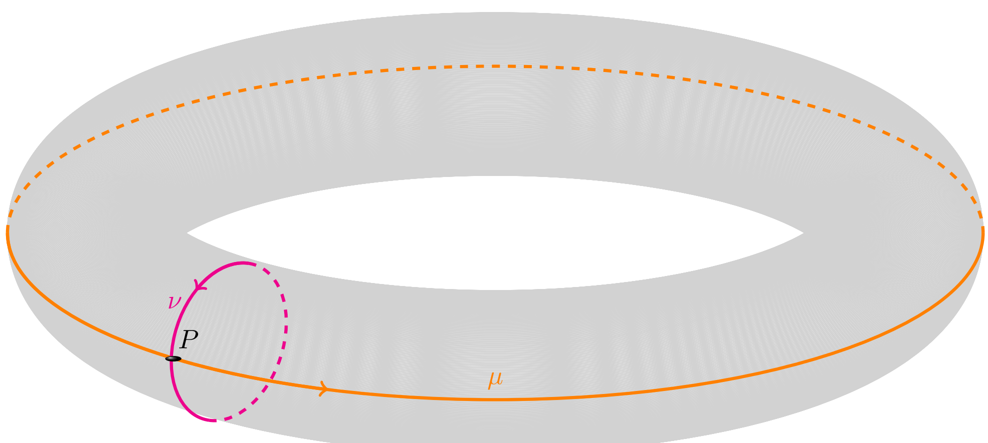


Se quisiera dar ahora un invariante topológico asociado a los nudos con base en su complemento en la esfera S^3, para ello se da la siguiente definición.

Definición 1.3.8.
Sea $\mathfrak{k}$ un nudo, se define el grupo del nudo como $G(\mathfrak{k}) := \pi_1(S^3 - \mathfrak{k})$.

No es díficil observar que $S^3 - \mathfrak{k}$ es arcoconexo, por lo que por la proposición 1.2.7, el grupo fundamental de este espacio es invariante bajo la elección del punto base.

Un resultado ya conocido es que el toro $S^1 \times S^1$ posee dos generadores tal como se puede visualizar en la siguiente figura.



Considerando dichos generadores se da la siguiente definición.

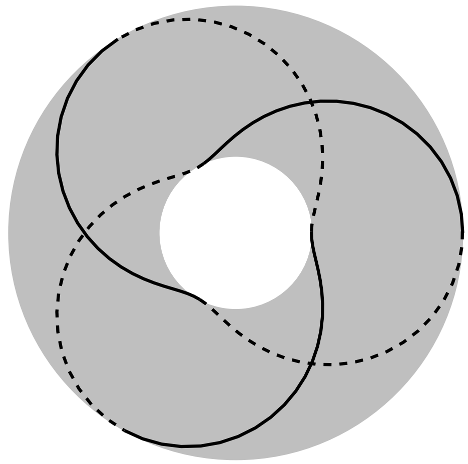
Definición 1.3.9.
Un nudo tórico $T(a, b)$ es una curva cerrada simple en la superficie de el toro $S^1 \times S^1$ tal que su número de intersección con el generador μ es $|a|$, su número de intersección con el generador ν es $|b|$ y además $|a|, |b| \geq 2$.

Para identificar un nudo tórico, según la definición 1.3.9, basta saber cuantas vueltas da pasando por en el generador μ del toro y saber cuantas vueltas da pasando por el generador ν del toro.

Se muestra a continuación como se da esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.2.
Sea el nudo tórico $T(2,3)$, según la definición 1.3.9, este nudo da 2 vueltas pasando por μ y da 3 vueltas pasando por ν.

Esto se representa en la siguiente figura.



Así pues, de aquí es fácil ver que este nudo es equivalente al nudo trébol.

Es importante mencionar este tipo de nudos pues en la sección 3.3 se hablará de su relación con el producto simétrico del círculo, el cual se definirá en el siguiente capítulo. Ahora que ya se ha presentado el concepto de nudo tórico, se quisiera saber cual es su grupo de nudo, para ello se tiene el siguiente resultado cuya prueba puede verse en [3, proposición 3.28, pág. 47].

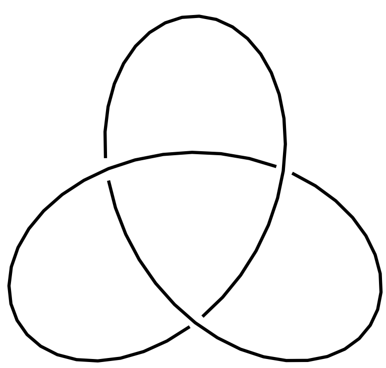
Proposición 1.3.1.
Si $T(a,b)$ es un nudo tórico entonces su grupo de nudo tiene una presentación dada por $\langle u, v : u^a v^{-b} \rangle$.

En base a la proposición anterior, se puede dar un resultado que clasifica a los nudos tóricos, esto se expresa a continuación en el siguiente teorema cuya prueba se encuentra en [3, teorema 3.29, pág. 48].

Teorema 1.3.1.
$T(a,b) \equiv T(a',b')$ si y solo si (a',b') es igual a alguno de los siguientes pares: (a,b), (b,a), $(-a,-b)$, $(-b,-a)$.

El grupo de nudo es un invariante al momento de estudiar la teoría de nudos, pero cabe notar que el hecho de que dos nudos tengan grupos isomorfos no es suficiente para determinar que dichos nudos son equivalentes. Esto se verá a continuación en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.3.
La imagen espejo del nudo trébol, así este nudo está representado por la siguiente figura.



Este nudo no es equivalente al nudo trébol (veáse [14, ejemplo 2.2.3, pág. 16]) pero al calcular su grupo de nudo, siguiendo [14, ejemplo 2.4.18, pág. 32], resulta que ambos nudos tienen la misma presentación, la cual está dada por $\langle a, b : a^3 = b^2 \rangle$.

CAPÍTULO 2

SOBRE EL K-ÉSIMO PRODUCTO SIMÉTRICO

En topología general, dado un espacio topológico X, existen muchas maneras de construir un nuevo espacio topológico. Por ejemplo, cuando se considera el conjunto potencia, al pedirle que sus elementos sean cerrados, se puede formar un nuevo espacio que resulta ser topológico, el cual es la base de la teoría de hiperespacios.

Dentro de la teoría de hiperespacios, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene un hiperespacio particular llamado n-ésimo producto simétrico, el cual se estudiará en este capítulo.

2.1. Hiperespacios y los productos simétricos

Los hiperespacios son estudiados mediante los subconjuntos cerrados de ciertas familias de un espacio topológico, por lo que en esta sección se verá como se le asigna una topología a la colección de conjuntos cerrados y que relaciones tienen con el espacio topológico del que provienen.

Lo escrito dentro de esta sección proviene principalmente de [10].

Como primer paso, se dará una notación para indicar una colección especial de subconjuntos cerrados de un espacio topológico.

Notación 2.1.1.
Sea X un espacio topológico no vacío, se denota por

$$CL(X) := \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\}.$$

Dado que se está hablando de espacios topológicos, se quisiera dotar de una topología al conjunto $CL(X)$, para ello se da la siguiente definición.

Definición 2.1.1.
Si (X, τ) es un espacio topológico, se le llamará topología de Vietoris para $CL(X)$, denotada por τ_V, a la topología más pequeña para $CL(X)$ tal que:

i) $\{A \in CL(X) : A \subseteq U\} \in \tau_V$, para cada $U \in \tau$,

ii) $\{A \in CL(X) : A \subseteq B\}$ es cerrado en la topología τ_V si B es cerrado en X.

Tomando en cuenta la topología de Vietoris, se procede a continuación a dar la definición de hiperespacio.

Definición 2.1.2.
A cualquier subespacio no vacío de $(CL(X), \tau_V)$ se le llamará hiperespacio de X.

Ya que se tiene la definición de hiperespacio, se quisiera ver de manera explícita a los abiertos dentro de la topología de Vietoris, para ello se deberá construir una base para dicha topología, pero antes se da la siguiente notación.

Notación 2.1.2.
Si X es un espacio topológico y $S_1, \ldots, S_n \subseteq X$ con $n \in \mathbb{N}$, se denota como

$$\langle S_1, \ldots, S_n \rangle = \left\{ A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i \text{ y } A \cap S_j \neq \emptyset \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Dado esto, se da la siguiente proposición que construye una base de forma explícita para la topología de Vietoris.

Proposición 2.1.1.
Si (X, τ) es un espacio topológico entonces $\beta_V := \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : U_i \in \tau$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $n \in \mathbb{N}\}$ es una base para τ_V.

Demostración: Sean U un abierto en X y B un cerrado en X.
Por la definición 2.1.1, se tiene que

i) $\{A \in CL(X) : A \subseteq U\} = \langle U \rangle$, que es abierto en τ_V;

ii) $\{A \in CL(X) : A \subseteq B\} = CL(X) - \langle X, X - B \rangle$, que es cerrado en τ_V.

Con esto, τ_V es la mínima topología para $CL(X)$ tal que $\langle U \rangle$ y $\langle X, U \rangle$ son abiertos en $CL(X)$, para cada $U \in \tau$. De lo anterior, $S := \{\langle U \rangle : U \in \tau\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \tau\}$ es una subbase para τ_V.
De esta forma, se define $S^* := \left\{ \bigcap_{i=1}^{r} x_i : x_i \in S \text{ y } r \in \mathbb{N} \right\}$, a continuación se probará que $S^* = \beta_V$.
Sea $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \in \beta_V$, en este caso se tiene que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\rangle \cap \bigcap_{i=1}^{n} \langle X, U_i \rangle$ y como se tiene que $\left\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\rangle, \langle X, U_1 \rangle, \ldots, \langle X, U_n \rangle \in S$ entonces $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \in S^*$.
Ahora, se observa que $S \subseteq \beta_V$, si se prueba que la intersección de cualesquiera dos elementos en β_V es un elemento de β_V entonces se tendría que $S^* \subseteq \beta_V$, por tanto se probará eso a continuación.
Sean $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, $\langle W_1, \ldots, W_m \rangle \in \beta_V$, entonces para los conjuntos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $W = \bigcup_{j=1}^{m} W_j$ se probará que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle W_1, \ldots, W_m \rangle = \langle U_1 \cap W, \ldots, U_n \cap W, U \cap W_1, \ldots, U \cap W_m \rangle$.
Si $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle W_1, \ldots, W_m \rangle$ entonces $A \subseteq U \cap W$ y $A \cap U_i \neq \emptyset \neq A \cap W_j$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, m\}$, así que $A \cap (U_i \cap W) \neq \emptyset \neq A \cap (W_j \cap U)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, m\}$, por tanto $A \in \langle U_1 \cap W, \ldots, U_n \cap W, U \cap W_1, \ldots, U \cap W_m \rangle$.
Si ahora $A \in \langle U_1 \cap W, \ldots, U_n \cap W, U \cap W_1, \ldots, U \cap W_m \rangle$ entonces $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (W \cap U_i) \cup \bigcup_{j=1}^{m} (U \cap W_j) = U \cap W$, además como se tiene que $A \cap (U_i \cap W) \subseteq A \cap U_i$, $A \cap (W_j \cap U) \subseteq A \cap W_j$ y $A \cap (U_i \cap W) \neq \emptyset \neq A \cap (W_j \cap U)$ entonces se tiene que $A \cap U_i \neq \emptyset \neq A \cap W_j$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, m\}$, por tanto $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle W_1, \ldots, W_m \rangle$. ■

Con la proposición 2.1.1, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 2.1.3.
A los abiertos $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \in \beta_V$ se les llamarán Vietóricos.

Con los resultados anteriores, es posible estudiar a los hiperespacios de manera más explícita a través de sus abiertos básicos, es decir, de sus Vietóricos.

Ahora, ya que se tiene el concepto general de hiperespacio y como está construida la topología de Vietoris, se procede a definir el producto simétrico.

Definición 2.1.4.
Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$, al conjunto $F_n(X) := \{A \subseteq X : 1 \leq |A| \leq n\}$, donde $|A|$ denota la cardinalidad de A, se le llamará el n-ésimo producto simétrico de X.

Observación 2.1.1.
Dado que X es T_1, entonces los conjuntos unipuntuales $\{x\} \subseteq X$ son cerrados, por tanto $F_n(X) \subseteq CL(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y al incluir la topología de subespacio inducida por la topología de Vietoris en $F_n(X)$, se tendría que el n-ésimo producto simétrico de X es un hiperespacio de X por la definición 2.1.2 donde sus abiertos básicos, considerando la proposición 2.1.1, serían de la forma $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle \cap F_n(X)$ con U_i abierto en X para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$.

A continuación, se darán algunos resultados clásicos sobre los productos simétricos, para ello se supondrá a partir de aquí que se está trabajando con un espacio topológico T_1 para que el n-ésimo producto simétrico tenga sentido.

Teorema 2.1.1.
$X \cong_{Top} F_1(X)$

Demostración: Se define

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & F_1(X) \\ & x & \longmapsto & \{x\}. \end{array}$$

Claramente f es biyectiva.
Si U es un conjunto abierto en X, no es difícil observar que $f(U) = \langle U \rangle \cap F_1(X)$ el cual es un abierto en $F_1(X)$ por la observación 2.1.1, por tanto f es una función abierta.
Por otra parte, nuevamente considerando la observación 2.1.1, si $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap F_1(X)$ es un abierto en $F_1(X)$, $f^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap F_1(X)) = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ el cual es un abierto en X y así, f es continua.
Dado que se tiene una función biyectiva, continua y abierta, entonces f es un isomorfismo en Top. ■

Se da ahora un resultado que garantiza la arcoconexidad del n-ésimo producto simétrico, dicho resultado será muy importante en la siguiente sección.

Teorema 2.1.2.
Si X es arcoconexo, entonces $F_n(X)$ es arcoconexo para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, \ldots, x_s\}, \{y_1, \ldots, y_k\} \in F_n(X)$, se observa que $1 \leq s \leq n$ y $1 \leq k \leq n$, sin pérdida de generalidad se supone que $s \leq k$. Si $s < k$, se definen los puntos $x_i = x_s$ para cada $i \in \{s+1, \ldots, k\}$ y de esta forma se tiene que $\{x_1, \ldots, x_s\} = \{x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_k\}$.
Como X es arcoconexo, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ existe $\alpha_j : I \longrightarrow X$ una función continua tal que $\alpha_j(0) = x_j$ y $\alpha_j(1) = y_j$. Se define

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & I & \longrightarrow & F_n(X) \\ & t & \longmapsto & \{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_k(t)\}. \end{array}$$

Es fácil ver que la función α está bien definida.
Ahora, se afirma que para cualquier $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle \cap F_n(X)$ conjunto abierto arbitrario en $F_n(X)$, entonces $\alpha^{-1}\left(\langle U_1, \ldots, U_r \rangle \cap F_n(X)\right) = \left(\bigcap_{j=1}^{k} \alpha_j^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{r} U_i\right)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{r}\left(\bigcup_{j=1}^{k} \alpha_j^{-1}(U_i)\right)\right)$, en efecto, para probar la afirmación anterior se mostrarán ambas contenciones:

Si $t \in \alpha^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap F_n(X))$ entonces $\{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_k(t)\} = \alpha(t) \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle$ con $k \leq n$, por la notación 2.1.2 se tiene que $\{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_k(t)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ y $\{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_k(t)\} \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. De lo anterior se tiene que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $\alpha_j(t) \in \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ y a su vez, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\alpha_j(t) \in U_i$. Así para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $t \in \alpha_j^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{r} U_i\right)$ y para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $t \in \alpha_j^{-1}(U_i)$, es decir $t \in \left(\bigcap_{j=1}^{k} \alpha_j^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{r} U_i\right)\right)$ y $t \in \left(\bigcap_{i=1}^{r}\left(\bigcup_{j=1}^{k} \alpha_j^{-1}(U_i)\right)\right)$, por tanto $t \in \left(\bigcap_{j=1}^{k} \alpha_j^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{r} U_i\right)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{r}\left(\bigcup_{j=1}^{k} \alpha_j^{-1}(U_i)\right)\right)$.
Si $t \in \left(\bigcap_{j=1}^{k} \alpha_j^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{r} U_i\right)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{r}\left(\bigcup_{j=1}^{k} \alpha_j^{-1}(U_i)\right)\right)$ entonces para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $t \in \alpha_j^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{r} U_i\right)$ y para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $t \in \alpha_j^{-1}(U_i)$, así para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $\alpha_j(t) \in \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ y para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\alpha_j(t) \in U_i$. De lo anterior, $\{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_k(t)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ y $\{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_k(t)\} \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Por la notación 2.1.2 se tiene que $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_k(t)\} \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle$ y dado que $k \leq n$ entonces $\alpha(t) \in (\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap F_n(X))$, es decir $t \in \alpha^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap F_n(X))$.
Por la afirmación anterior se tiene que $\alpha^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap F_n(X))$ es un abierto en I por la continuidad de cada α_j, por tanto α es continua, además se tiene que $\alpha(0) = \{x_1, \ldots, x_k\} = \{x_1, \ldots, x_s\}$ y $\alpha(1) = \{y_1, \ldots, y_k\}$, por tanto $F_n(X)$ es arcoconexo. ■

2.2. Otra cara de $F_n(X)$

Como se vio en la sección anterior, la topología de Vietoris brinda una estructura de espacio topológico al producto simétrico, sin embargo esta estructura es un poco complicada al momento de estudiarlos, por tanto se quisiera encontrar una topología más simple que sea equivalente a la topología de Vietoris.

Lo escrito en esta sección proviene principalmente de [17].

Como primer paso, se dará la siguiente estructura de espacio topológico la cual es más intuitiva al momento de trabajar con los productos simétricos, dicha estructura se da en la siguiente definición.

Definición 2.2.1.
Sea X un espacio topológico T_1, para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $\widehat{F}_n(X)$ como un cociente del espacio X^n tal que se identifica cada n-tupla $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ como sigue

$$(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow \{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

Así, se considera también a $q_n : X^n \longrightarrow \widehat{F}_n(X)$ como la función cociente asociada al espacio $\widehat{F}_n(X)$, por tanto, cuando se hable de esta topología cociente, simplemente se escribirá τ_{q_n}.

Es fácil ver que $\widehat{F}_n(X)$ con la topología cociente de la definición anterior y $F_n(X)$ con la topología de Vietoris, como conjuntos, son isomorfos, por tanto se quisiera comprobar que las topologías son equivalentes, para esto se presenta el siguiente teorema cuya prueba se encuentra en [6].

Teorema 2.2.1.
$(\widehat{F}_n(X), \tau_{q_n}) \cong_{Top} (F_n(X), \tau_V)$.

Como consecuencia del teorema 2.2.1, es posible estudiar a los productos simétricos desde el punto de vista de la topología de Vietoris, o bien, como un cociente del espacio X^n, por tanto, se puede trabajar con cualquiera de las dos según convenga. A partir de aquí, se escribirá $F_n(X)$ para referirse al n-ésimo producto simétrico de X, sin importar cual de las dos topologías anteriores tenga.

Esta topología cociente ya mencionada es útil al momento de estudiar a los productos simétricos de los espacios topológicos de los cuales ya se tiene un modelo en específico, tal es el caso del intervalo cerrado I, o bien el círculo unitario S^1, de los cuales se hablará con mayor profundidad más adelante.

Se procede a probar la funtorialidad del producto simétrico, comenzando con la siguiente definición.

Definición 2.2.2.
Sea $h : X \longrightarrow Y$ un morfismo en Top, se define la función inducida al n-ésimo producto simétrico dada por

$$\begin{array}{rccc} F_n(h): & F_n(X) & \longrightarrow & F_n(Y) \\ & \{x_1, \ldots, x_l\} & \longmapsto & \{h(x_1), \ldots, h(x_l)\}. \end{array}$$

Dado que $\{x_1, \ldots, x_l\} \in F_n(X)$ entonces $1 \leq l \leq n$ y por tanto $\{h(x_1), \ldots, h(x_l)\}$ tiene cardinalidad a lo más l, por lo que $\{h(x_1), \ldots, h(x_l)\} \in F_n(Y)$, es decir, se tiene que la función $F_n(h)$ está bien definida.

Se quisiera observar ahora como se relaciona la función anterior con los abiertos básicos de los productos simétricos con la topología de Vietoris, por tanto se da el siguiente lema.

Lema 2.2.1.
Si $h : X \longrightarrow Y$ es un morfismo en Top, entonces para cada abierto $\langle W_1, \ldots, W_r\rangle \cap F_n(Y)$ se tiene que $F_n(h)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_r\rangle \cap F_n(Y)) = \langle h^{-1}(W_1), \ldots, h^{-1}(W_r)\rangle \cap F_n(X)$.

Demostración: Sea $A \in F_n(h)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_r\rangle \cap F_n(Y))$, entonces existe $B \in \langle W_1, \ldots, W_r\rangle \cap F_n(Y)$ tal que $F_n(h)(A) = B$, como en particular $A \in F_n(X)$ y $B \in F_n(Y)$ se puede tomar $A = \{x_1, \ldots, x_{l_1}\}$ y $B = \{y_1, \ldots, y_{l_2}\}$ con $1 \leq l_1 \leq n$, $1 \leq l_2 \leq n$, y $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$.
Ahora, por como se define $F_n(h)$, se tiene que $\{h(x_1), ..., h(x_{l_1})\} = \{y_1, ..., y_{l_2}\}$, de aquí se tiene que para cada $t \in \{1, \ldots, l_1\}$ existe $j \in \{1, \ldots, l_2\}$ tal que $h(x_t) = y_j$. Así también, dado que $\{y_1, \ldots, y_{l_2}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} W_i$ entonces para cada $s \in \{1, \ldots, l_2\}$ existe $m \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $y_s \in W_m$, por tanto, en particular para $j \in \{1, \ldots, l_2\}$ existe $p \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $h(x_t) = y_j \in W_p$. De lo anterior se tiene que para cada $t \in \{1, \ldots, l_1\}$ existen $j \in \{1, \ldots, l_2\}$ y $p \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $x_t \in h^{-1}(y_j) \subseteq h^{-1}(W_p)$, por lo que $\{x_1, \ldots, x_{l_1}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} h^{-1}(W_i)$.
Además, como $\{y_1, \ldots, y_{l_2}\} \cap W_t \neq \emptyset$ entonces para cada $t \in \{1, \ldots, r\}$ existe $s \in \{1, \ldots, l_2\}$ tal que $y_s \in W_t$ y dado que $\{h(x_1), \ldots, h(x_{l_1})\} = \{y_1, \ldots, y_{l_2}\}$ entonces para cada $i \in \{1, \ldots, l_2\}$ existe $j \in \{1, \ldots, l_1\}$ tal que $h(x_j) = y_i$, por tanto, en particular para $s \in \{1, \ldots, l_2\}$ existe $p \in \{1, \ldots, l_1\}$ tal que $h(x_p) = y_s \in W_t$. De lo anterior se tiene que para cada $t \in \{1, \ldots, r\}$ existen $s \in \{1, \ldots, l_2\}$ y $p \in \{1, \ldots, l_1\}$ tales que $x_p \in h^{-1}(y_s) \subseteq h^{-|}(W_t)$, por lo que $\{x_1, \ldots, x_{l_1}\} \cap h^{-1}(W_t) \neq \emptyset$ para cada $t \in \{1, \ldots, r\}$.
Por todo lo anterior se concluye que $A = \{x_1, \ldots, x_{l_1}\} \in \langle h^{-1}(W_1), \ldots, h^{-1}(W_r)\rangle \cap F_n(X)$.
Ahora, sea $C \in \langle h^{-1}(W_1), \ldots, h^{-1}(W_r)\rangle \cap F_n(X)$, considerando $C = \{x_1, \ldots, x_t\}$ con $1 \leq t \leq n$ y $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, como $\{x_1, \ldots, x_t\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} h^{-1}(W_i)$, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$ existe $l \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $x_j \in h^{-1}(W_l)$. De la definición de imagen inversa, para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$ existe $y_j \in W_i$ tal que $h(x_j) = y_j$. Tomando $D = \{y_1, \ldots, y_t\}$, es fácil observar que $F_n(h)(C) = D \in F_n(Y)$ y $D \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} W_i$, y como también se tiene que $\{x_1, \ldots, x_t\} \cap h^{-1}(W_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, entonces para cada $i \in \{1 \ldots, r\}$ existe $x_j \in h^{-1}(W_i)$, de aquí se tiene que $y_j = h(x_j) \in h(h^{-1}(W_i)) \subseteq W_i$, por lo que $D \cap W_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, por tanto $D \in \langle W_1, \ldots, W_r\rangle \cap F_n(Y)$, y así $C \in F_n(h)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_r\rangle \cap F_n(Y))$. ■

Se probará ahora la funtorialidad de los productos simétricos en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2.
Mediante los productos simétricos se obtiene para cada $n \in \mathbb{N}$ un funtor $F_n : Top \longrightarrow Top$ tal que

- A cada objeto X en Top se le asigna $F_n(X)$ en Top.
- A cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en Top se le asigna $F_n(f) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ en Top.

Demostración: Por el lema 2.2.1 se tiene que la preimagen de un abierto en $F_n(Y)$ bajo $F_n(f)$ es un abierto en $F_n(X)$, entonces $F_n(f)$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, $F_n(f)$ es un morfismo en Top.
Por tanto, solo basta comprobar los siguientes puntos de la definición 1.1.3.

- Para $1_X : X \longrightarrow X$, se tiene que $F_n(1_X)(\{x_1, \ldots, x_l\}) = \{1_X(x_1), \ldots, 1_X(x_l)\} = \{x_1, \ldots, x_l\}$, es decir $F_n(1_X) = 1_{F_n(X)}$.
- Para $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos en Top, de la definición 2.2.2 se tiene que
$$\begin{aligned} F_n(g \circ f)(\{x_1, \ldots, x_l\}) &= \{(g \circ f)(x_1), \ldots, (g \circ f)(x_l)\} = \{g(f(x_1)), \ldots, g(f(x_l))\} \\ &= F_n(g)(\{f(x_1), \ldots, f(x_l)\}) = F_n(g)(F_n(f)(\{x_1, \ldots, x_l\})) \\ &= (F_n(g) \circ F_n(f))(\{x_1, \ldots, x_l\}) \end{aligned}$$
por tanto $F_n(g \circ f) = F_n(g) \circ F_n(f)$.

■

Ya que se tiene la funtorialidad de los productos simétricos, entonces se quisiera ver si dicho funtor preserva isomorfismos, lo cual se observará en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3.
Si $h : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo en Top entonces $F_n(h) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es un isomorfismo en Top para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Es consecuencia directa del teorema 2.2.2 y de la proposición 1.1.1. ■

Ahora bien, se quisiera ver como se relaciona el funtor del producto simétrico con la homotopía de la que se habló en la sección 1.2, lo cual se mencionará en el teorema presentado a continuación.

Teorema 2.2.4.
Si $f, g : X \longrightarrow Y$ son morfismos en Top tales que $f \simeq g$, entonces $F_n(f) \simeq F_n(g)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Dado que $f \simeq g$, entonces existe una homotopía $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$, además como H es un morfismo en Top entonces $F_n(H) : F_n(X \times I) \longrightarrow F_n(Y)$ es un morfismo en Top, es decir, $F_n(H)$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$.
Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$\begin{array}{rccc} G_n : & F_n(X) \times I & \longrightarrow & F_n(X \times I) \\ & (\{x_1, \ldots, x_l\}, t) & \longmapsto & \{(x_1, t), \ldots, (x_l, t)\} \end{array}$$

Es fácil ver que $G_n^{-1}(\langle U_1 \times A_1, \ldots, U_r \times A_r \rangle \cap F_n(X \times I)) = (\langle U_1, \ldots, U_r \rangle \cap F_n(X)) \times \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i \right)$ donde U_i es un conjunto abierto en X y A_i es un conjunto abierto en I para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. En efecto, si $A \in G_n^{-1}(\langle U_1 \times A_1, \ldots, U_r \times A_r \rangle \cap F_n(X \times I))$ entonces existe $B \in \langle U_1 \times A_1, \ldots, U_r \times A_r \rangle \cap F_n(X \times I)$ tal que $G_n(A) = B$, como $A \in F_n(X) \times I$ y $B \in F_n(X \times I)$ se puede tomar $A = (\{x_1, \ldots, x_{l_1}\}, t)$ y $B = \{(y_1, t_1), \ldots, (y_{l_2}, t_{l_2})\}$ con $1 \leq l_1 \leq n$, $1 \leq l_2 \leq n$, y $x_i \neq x_j$, $(y_i, t_i) \neq (y_j, t_j)$ si $i \neq j$.
Ahora, por como se define G_n, se tiene que $\{(x_1, t), \ldots, (x_{l_1}, t)\} = \{(y_1, t_1), \ldots, (y_{l_2}, t_{l_2})\}$, de aquí que $l_1 = l_2$ y además existe $\sigma : \{1, \ldots, l_1\} \longrightarrow \{1, \ldots, l_1\}$ tal que $(x_{\sigma(i)}, t) = (y_i, t_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, l_1\}$.
Por la igualdad anterior se tiene que $t = t_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, l_1\}$ y además se tiene que $x_{\sigma(i)} = y_i$, como $B \in \langle U_1 \times A_1, \ldots, U_r \times A_r \rangle$ entonces $\{(y_1, t_1), \ldots, (y_{l_2}, t_{l_2})\} \cap U_i \times A_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, r\}$, de aquí que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ existe $(y_j, t_j) \in U_i \times A_i$, así se tiene que $x_{\sigma(j)} = y_j \in U_i$ y $t = t_j \in A_i$, por lo que $t \in \bigcap_{i=1}^{r} A_i$.

Por otra parte, dado que $\{(y_1, t_1), \ldots, (y_{l_2}, t_{l_2})\} = B \subseteq \bigcup_{i=1}^{r}(U_i \times A_i)$ entonces para cada (y_j, t_j) existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $(y_j, t_j) \in U_i \times A_i$, así que para cada y_j existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $x_{\sigma(j)} = y_j \in U_i$, concluyendo así que $\{x_1, \ldots, x_{l_1}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_i$. De que $\{x_1, \ldots, x_{l_1}\} \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap F_n(X)$ y $t \in \bigcap_{i=1}^{r} A_i$ se concluye que $A = (\{x_1, \ldots, x_{l_1}\}, t) \in (\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap F_n(X)) \times \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right)$.

Ahora si $V \in (\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap F_n(X)) \times \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right)$, entonces considerando $V = (\{x_1, \ldots, x_s\}, t)$ con $1 \leq s \leq n$ y $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, de aquí se define $W = \{(x_1, t), \ldots, (x_s, t)\}$, se observa que $W \in F_n(X) \times I$ y $G_n(V) = W$, como $\{x_1, \ldots, x_s\} \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap F_n(X)$ entonces $\{x_1, \ldots, x_s\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ y $\{x_1, \ldots, x_s\} \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, r\}$, de aquí, para cada x_j existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $x_j \in U_i$ y para cada $k \in \{1, \ldots, r\}$ existe $x_m \in U_k$, y como $t \in A_l$ para toda $l \in \{1, \ldots, r\}$, entonces para cada (x_j, t) existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $(x_j, t) \in U_i \times A_i$ y para cada $k \in \{1, \ldots, r\}$ existe $(x_m, t) \in U_k \times A_k$, por tanto $W \subseteq \bigcup_{i=1}^{r}(U_i \times A_i)$ y $W \cap (U_i \times A_i) \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, r\}$, así $W \in \langle U_1 \times A_1, \ldots, U_r \times A_r\rangle \cap F_n(X \times I)$ y entonces $V \in G_n^{-1}(\langle U_1 \times A_1, \ldots, U_r \times A_r\rangle \cap F_n(X \times I))$.

Ahora, como $G_n^{-1}(\langle U_1 \times A_1, \ldots, U_r \times A_r\rangle \cap F_n(X \times I)) = (\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap F_n(X)) \times \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right)$ es un abierto en $F_n(X) \times I$ entonces G_n es continua, por tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $H^n := F_n(H) \circ G_n$ que claramente es continua y además se cumple que
$H^n(\{x_1, \ldots, x_l\}, 0) = \{H(x_1, 0), \ldots, H(x_l, 0)\} = \{f(x_1), \ldots, f(x_l)\} = F_n(f)(\{x_1, \ldots, x_l\})$, y
$H^n(\{x_1, \ldots, x_l\}, 1) = \{H(x_1, 1), \ldots, H(x_l, 1)\} = \{g(x_1), \ldots, g(x_l)\} = F_n(g)(\{x_1, \ldots, x_l\})$.
Por tanto H^n es una homotopía tal que $H_0^n = F_n(f)$ y $H_1^n = F_n(g)$, concluyendo que $F_n(f) \simeq F_n(g)$. ■

Con el teorema 2.2.4 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.2.1.
Si $h : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica entonces $F_n(h) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es una equivalencia homotópica para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Si $h : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica entonces existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ h \simeq 1_X$ y $h \circ g \simeq 1_Y$, así por el teorema 2.2.4 se tiene que $F_n(g \circ h) \simeq F_n(1_X)$ y $F_n(h \circ g) \simeq F_n(1_Y)$. Ahora por el teorema 2.2.2 se tiene que $F_n(g \circ h) = F_n(g) \circ F_n(h)$, $F_n(h \circ g) = F_n(h) \circ F_(g)$, $F_n(1_X) = 1_{F_n(X)}$ y $F_n(1_Y) = 1_{F_n(Y)}$, por lo que $F_n(g) \circ F_n(h) \simeq 1_{F_n(X)}$ y $F_n(h) \circ F_n(g) \simeq 1_{F_n(Y)}$, por tanto, se concluye que $F_n(h) : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ es una equivalencia homotópica para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Otro resultado consecuente del teorema 2.2.4 y que relaciona a la homologia con los productos simetricos es el siguiente.

Corolario 2.2.2.
Si $h : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica entonces $(H_m \circ F_n)(h) : (H_m \circ F_n)(X) \longrightarrow (H_m \circ F_n)(Y)$ es un isomorfismo en *Grp* para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración: Es consecuencia directa del corolario 2.2.1 y el corolario 1.2.1. ■

El corolario 2.2.2 dice que si se tienen espacios homotópicos entonces es posible clasificar a sus productos simétricos mediante su homología, aunque no se tuvo que el funtor del producto simétrico induzca isomorfismos, por el corolario 2.2.1 se tiene que el producto simétrico es invariante bajo la relación de homotopía.

2.3. Algunos modelos de $F_2(X)$

Ya que se conoce que son los productos simétricos y algunas propiedades de estos, dado $k \in \mathbb{N}$ se quisiera conocer si existe algún modelo que diga de forma explícita quien es el k-ésimo producto simétrico de algún espacio X, esto se tendrá si es posible encontrar un espacio topológico Y tal que $F_k(X) \cong_{Top} Y$.

Cabe aclarar que por el teorema 2.1.1 el modelo para los productos simétricos de orden 1 viene siendo el mismo espacio en cuestión. Para entender mejor como se construyen dichos modelos en esta sección se estudiarán los modelos de $F_2(X)$ para el intervalo cerrado $I = [0,1]$ y el círculo unitario S^1.

Lo escrito en esta sección proviene principalmente de [10].

Modelo de $F_2(I)$.

Se define la función

$$\begin{array}{rccc} f: & F_2(I) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \{a,b\} & \longmapsto & \left(\dfrac{a+b}{2}, |b-a|\right). \end{array}$$

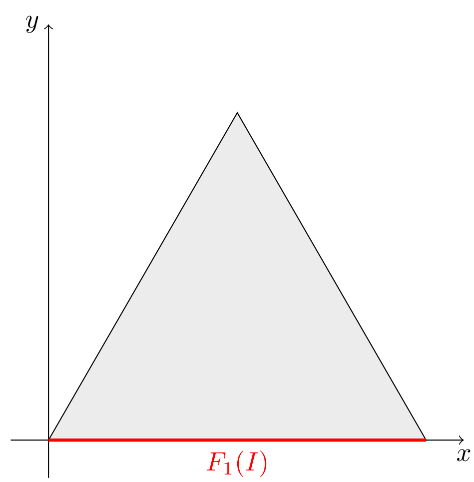
Es fácil ver que f es inyectiva. En efecto, si se supone que $f(\{a,b\}) = f(\{a',b'\})$ para $\{a,b\}, \{a',b'\} \in F_2(I)$, entonces por definición $\left(\dfrac{a+b}{2}, |b-a|\right) = \left(\dfrac{a'+b'}{2}, |b'-a'|\right)$, en particular se tiene que $|b-a| = |b'-a'|$. Sin pérdida de generalidad suponiendo que $a \leq b$ y $a' \leq b'$, entonces $b-a = b'-a'$. Dado que $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a'+b'}{2}$, es decir $a+b = a'+b'$, al sumar ambas igualdades se tiene que $2b = (b-a)+(a+b) = (b'-a')+(a'+b') = 2b'$, de aquí que $b = b'$ y en consecuencia $a = a'$, probando así que $\{a,b\} = \{a',b'\}$.

Es fácil ver que f es continua y por lo tanto, considerando

$$\begin{array}{rccc} f': & F_2(I) & \longrightarrow & f(F_2(I)) \\ & \{a,b\} & \longmapsto & f(\{a,b\}), \end{array}$$

se tiene que f' es un isomorfismo en Top.

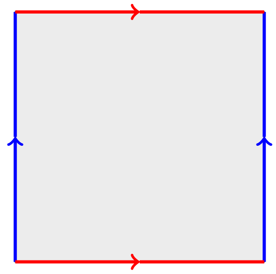
Se concluye que $F_2(I) \cong f(F_2(I))$, dicho espacio está representado por la siguiente figura.



Se puede observar que $F_1(I)$ visto dentro de $F_2(I)$ está representado por el conjunto $A := \{(x,0) : x \in I\}$, pues $f^{-1}(A)$ son todos los conjuntos de la forma $\{a,a\}$ con $a \in I$.

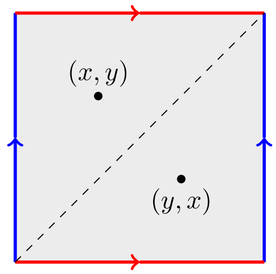
Modelo de $F_2(S^1)$.

Para este modelo, se considera el isomorfismo $S^1 \cong_{Top} I/\{0,1\}$ que por el teorema 2.2.3 se tiene que $F_2(S^1) \cong_{Top} F_2(I/\{0,1\})$, por lo que sólo es necesario construir un modelo para $F_2(I/\{0,1\})$ y de esta forma, se puede tomar $(I/\{0,1\})^2$ representado en I^2 por la siguiente figura.

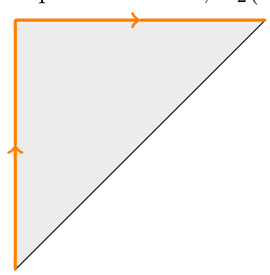


Donde, por la relación $0 \sim 1$, las líneas rojas están identificadas entre sí y también las líneas azules entre sí.

De esta manera, aplicando al espacio anterior el cociente de la definición 2.2.1 se tiene que $(x,y) \sim (y,x)$ para cualquier $x, y \in I$, por tanto para cada punto por arriba de la diagonal que une a los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ se relaciona con un punto por debajo de la misma diagonal, lo cual se representa en la siguiente figura.

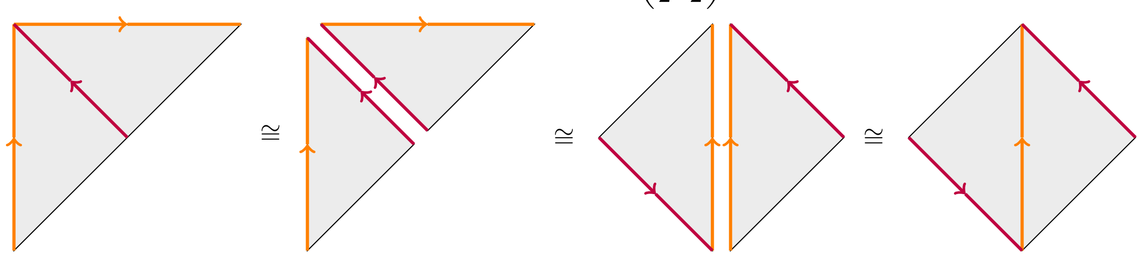


Como los puntos arriba de la diagonal están determinados por $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, por el cociente y dado que no hay otra identificación que se pueda realizar, $F_2(S^1)$ es la siguiente figura.



Donde las líneas naranjas deben estar identificadas entre sí ya que $(0,x) \sim (x,0) \sim (x,1)$ por las identificaciones del cociente de la definición 2.2.1 y de la identificación $0 \sim 1$.

Ahora bien, trazando una línea auxiliar desde el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ al punto $(0,1)$ se tiene que



En la figura resultante, al identificar las líneas púrpuras se obtiene la banda de Möebius.

Por tanto, el modelo de $F_2(S^1)$ es isomorfo a la banda de Möebius en la categoría Top.

CAPÍTULO 3

EL K-ÉSIMO PRODUCTO SIMÉTRICO DEL CÍRCULO

En el capítulo 2, se habló sobre unos objetos particulares dentro de la teoría de hiperespacios, los productos simétricos. Estos objetos en su mayoría son estudiados por la topología general de conjuntos y aunque se han obtenido muchos resultados, estos han sido difíciles de manejar.

Desde que Raoul Bott en 1952, usando los conceptos de topología algebraica, consiguió refutar un resultado importante sobre el producto simétrico del círculo unitario S^1 que se conocía desde 1949, se ha buscado usar los mismos conceptos para analizar a los productos simétricos.

Tomando lo anterior como motivación, en este capítulo se aplicarán los resultados del capítulo 1 en el k-ésimo producto simétrico del círculo, así como los resultados consecuentes que impliquen el saber el tipo de homotopía y la homología de $F_k(S^1)$.

3.1. Homotopía y homología de $F_k(S^1)$

Ya que se tiene el concepto de producto simétrico de la definición 2.1.4, se quisiera obtener el tipo de homotopía y de homología de los productos simétricos del círculo unitario S^1 para que de alguna forma sea posible clasificar estos espacios topológicos y obtener información adicional sobre los mismos.

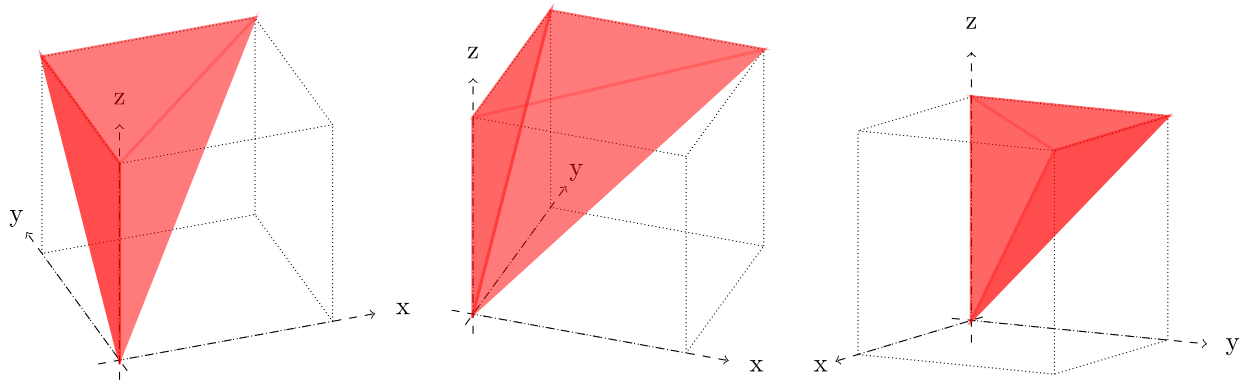
Lo escrito en esta sección proviene en su mayoría de [17].

Por el teorema 1.2.5 y el corolario 1.2.2, dado que uno de los objetivos de esta sección es calcular los grupos de homología del producto simétrico del círculo, sólo basta construir una estructura de Δ-complejo para cada $F_k(S^1)$ con $k \in \mathbb{N}$, así que se procede a construir dicha estructura.

Del mismo modo en el que se consideró el modelo de $F_2(S^1)$ de la sección 2.3, como consecuencia del isomorfismo $S^1 \cong I/\{0,1\}$ y del teorema 2.2.3, para cada $k \in \mathbb{N}$ estudiar el k-ésimo producto simétrico de S^1 será equivalente a estudiar el espacio $F_k(I/\{0,1\})$. Así pues, para usar el cociente de la definición 2.2.1, se considera $(I/\{0,1\})^k$ como un cociente del espacio I^k dentro de $\mathbb{R}^k$.

Como primer paso, es fácil ver que para $k = 3$, para cualquier $\sigma : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$ se tiene que $(x_1, x_2, x_3) \sim (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$, por lo que sin pérdida de generalidad es posible tomar los puntos (x, y, z) de la forma $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ tal como se hizo en el modelo de $F_2(S^1)$.

El conjunto de puntos $\{(x,y,z) : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$, visto desde diferentes ángulos, está representado por las siguientes figuras.



Este conjunto de puntos ordenados se puede generalizar, lo cual da la siguiente definición.

Definición 3.1.1.
Para cada $k \in \mathbb{N}$ se denota por A^k a el conjunto

$$\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq 1\} \subseteq I^k.$$

De la figura anterior se observa que A^3 es un 3-símplex dentro de $\mathbb{R}^3$ donde este 3-símplex está determinado por el conjunto $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ con $v_0 = (0,0,0)$, $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (1,1,1)$.

Esto se generaliza en el siguiente lema.

Lema 3.1.1.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto A^k es el k-símplex $[v_0, v_1, \ldots, v_k]$ dentro de $\mathbb{R}^k$ donde $v_i = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{(k-i)\text{-veces}}, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{i\text{-veces}})$ para cada $i \in \{0,1,\ldots,k\}$.

Demostración: Sea $x \in [v_0, v_1, ..., v_k]$, por la notación 1.2.6 se tiene que $x = \sum_{i=0}^{k} t_i v_i$, ahora bien, dado que $v_i = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{(k-i)\text{-veces}}, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{i\text{-veces}})$ entonces $t_i v_i = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{(k-i)\text{-veces}}, \underbrace{t_i,t_i,\ldots,t_i}_{i\text{-veces}})$, y por tanto se considera que $x = (t_k, t_k + t_{k-1}, \ldots, t_k + \cdots + t_1) = (x_1, \ldots, x_k)$ con $x_j = \sum_{i=k+1-j}^{k} t_i$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, de esta forma es fácil ver que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$, así nuevamente por la notación 1.2.6 se tiene que $x_1 = t_k \geq 0$ y que $x_k = \sum_{i=1}^{k} t_i = 1 - t_0 \leq 1$, por tanto, se concluye que $x \in A^k$.
Ahora, si $x \in A^k$, por la definición 3.1.1 entonces $x = (x_1, \ldots, x_k)$ con $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq 1$, es fácil ver que $(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, y_1, \ldots, y_{k-1})$ con $y_j = \sum_{i=1}^{j+1} x_i - \sum_{i=1}^{j} x_i = x_1 + \sum_{i=1}^{j} (x_{i+1} - x_i)$ para cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Definiendo $t_k := x_1$ y $t_{k-i} = x_{i+1} - x_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, se tiene que $y_j = \sum_{i=0}^{j} t_{k-i} = \sum_{i=k-j}^{k} t_i$, así $x = \left(t_k, t_{k-1} + t_k, \ldots, \sum_{i=1}^{k} t_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{(k-i)\text{-veces}}, \underbrace{t_i,t_i,\ldots,t_i}_{i\text{-veces}}) = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i$, además $t_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, por tanto como $\sum_{i=1}^{k} t_i = x_k$ se define $t_0 := 1 - x_k \geq 0$, teniendo así que $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ y $x = \sum_{i=0}^{k} t_i v_i$, con esto se concluye que $x \in [v_0, v_1, \ldots, v_k]$. ■

Dado que los conjuntos A^k son k-símplex, tiene sentido hablar de la cara i-ésima de este k-símplex, lo cual se verá en el siguiente lema.

Lema 3.1.2.
Las caras del k-símplex $[v_0, v_1, \dots, v_k]$, de la definición 3.1.1, están dadas por

$$[\widehat{v_0}, v_1, \dots, v_k] = \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_k = 1\};$$

$$[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k] = \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_{k-i} = x_{k+1-i}\} \quad \text{para cada } i \in \{1, \dots, k-1\};$$

$$[v_0, \dots, v_{k-1}, \widehat{v_k}] = \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_1 = 0\}.$$

Demostración: La prueba se dará por igualdad de conjuntos en cada caso, teniendo así lo siguiente.

- Sea $x \in [\widehat{v_0}, v_1, \dots, v_k]$, por la definición 1.2.16 se tiene que $x = \sum_{j=1}^{k} t_j v_j$ con $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$ y $t_j \geq 0$ para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, por la prueba del lema 3.1.1 se tiene que $x = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ con $x_j = \sum_{i=k+1-j}^{k} t_i$, así $x_k = \sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, por lo que $x \in \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_k = 1\}$.
  Ahora, si se toma $x \in \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_k = 1\}$, nuevamente por la prueba del lema 3.1.1 se tiene que $x = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i$ con $x_k = \sum_{i=1}^{k} t_i$ y como $x_k = 1$, por la definición 1.2.16 se tiene que $x \in [\widehat{v_0}, v_1, \dots, v_k]$.

- Sea $i \in \{1, \dots, k-1\}$ arbitrario y sea $x \in [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k]$, por la prueba del lema 3.1.1 se tiene que $x \in A^k$, además $x_{k-i} = \sum_{r=i+1}^{k} t_r$ y $x_{k+1-i} = \sum_{\substack{r=i \\ r \neq i}}^{k} t_r = \sum_{r=i+1}^{k} t_r$, así $x_{k-i} = x_{k+1-i}$ y por tanto $x \in \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_{k-i} = x_{k+1-i}\}$. Ahora, si se toma $x \in \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_{k-i} = x_{k+1-i}\}$, nuevamente por la prueba del lema 3.1.1 se tiene que $x = \sum_{i=0}^{k} t_i v_i$ con $t_{k-i} = x_{i+1} - x_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, de aquí que $t_i = x_{k+1-i} - x_{k-i} = 0$ pues $x_{k-i} = x_{k+1-i}$, por lo que se puede considerar $x = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} t_j v_j$, además es claro que $\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} t_j = 1$ y cada $t_j \geq 0$, por tanto $x \in [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k]$.

- Sea $x \in [v_0, \dots, v_{k-1}, \widehat{v_k}]$, por la prueba del lema 3.1.1 se tiene que $x \in A^k$, además, se tiene que $x = \sum_{i=0}^{k-1} t_i v_i = \left(0, t_{k-1}, \dots, \sum_{i=1}^{k-1} t_i\right)$, de aquí que $x_1 = 0$ y por tanto $x \in \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_1 = 0\}$.
  Ahora, si se toma $x \in \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_1 = 0\}$, nuevamente por la prueba del lema 3.1.1 se tiene que $x = \sum_{i=0}^{k} t_i v_i$ y que $x_1 = t_k$, como por hipótesis se tiene que $x_1 = 0$, se puede considerar $x = \sum_{i=0}^{k-1} t_i v_i$ donde es claro que $\sum_{i=0}^{k-1} t_j = 1$ y cada $t_j \geq 0$, por tanto $x \in [v_0, \dots, v_{k-1}, \widehat{v_k}]$.

■

Ya que se tiene como son las caras del k-símplex A^k, se introduce esta notación.

Notación 3.1.1.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, las caras del k-símplex A^k se escribirán como:

$$d_i A^k = [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k] \quad \text{para cada } i \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Ahora bien, se quisiera ver como el cociente de la definición 2.2.1 y el cociente que relaciona $1 \sim 0$ en $I/\{0,1\}$, actúan sobre los k-símplex A^k y además, se desearía saber si estos cocientes determinan un modelo para $F_k(S^1)$.

Primero se da la siguiente definición.

Definición 3.1.2.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define el cociente en A^k dado por

$$\begin{array}{cccc} q^k: & A^k & \longrightarrow & (I/\{0,1\})^k \\ & (x_1,\ldots,x_k) & \longmapsto & ([x_1],\ldots,[x_k]) \end{array}$$

Donde $[x_i]$ es la clase de x_i según la relación en $I/\{0,1\}$ para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$.

Considerando la definición anterior, se da el siguiente lema.

Lema 3.1.3.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, el espacio cociente $f_k(A^k)$ con $f_k := q_k \circ q^k$ determina un modelo para $F_k(S^1)$.

Demostración: Dado que $F_k(I/\{0,1\}) \cong F_k(S^1)$ por el teorema 2.2.3, solo basta probar que se cumple $f_k(A^k) = F_k(I/\{0,1\})$, la cual es una igualdad de conjuntos.
Dado que $f_k : A^k \longrightarrow F_k(I/\{0,1\})$ entonces $f_k(A^k) \subseteq F_k(I/\{0,1\})$ así solo basta probar la otra contención.
Sea $A \in F_k(I/\{0,1\})$, se puede considerar $A = \{[x_1],\ldots,[x_l]\}$ con $1 \leq l \leq k$ y $[x_i] \neq [x_j]$ si $i \neq j$. Como $[x_1],\ldots,[x_l] \in I/\{0,1\}$ y todas estas clases son distintas, es posible considerar $[x_i] = x_i$ para cada $i \in \{1,\ldots,l\}$, por lo que para estos puntos, existe una permutación $\sigma : \{1,\ldots,l\} \longrightarrow \{1,\ldots,l\}$ tal que $0 \leq x_{\sigma(1)} \leq \ldots \leq x_{\sigma(l)} \leq 1$, así se define $B = (x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(l)},\underbrace{x_{\sigma(l)},\ldots,x_{\sigma(l)}}_{(k-l)\text{-veces}})$, es claro que $B \in A^k$ y además $f_k(B) = A$, concluyendo así que $A \in f_k(A^k)$. ■

Observación 3.1.1.
Como consecuencia del lema anterior, se tiene que $F_k(S^1)$ no posee ningún n-símplex, con $n > k$, en su descomposición simplicial, y además $F_k(S^1)$ se puede descomponer simplicialmente en un único k-símplex dado por A^k.

Observación 3.1.2.
Si $(x_1,\ldots,x_k) \in \text{int}A^k$ entonces $0 < x_1 < \cdots < x_k < 1$, por tanto, si $(x_1,\ldots,x_k),(y_1,\ldots,y_k) \in \text{int}A^k$ tales que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = f_k(y_1,\ldots,y_k)$ entonces es fácil observar que $(x_1,\ldots,x_k) = (y_1,\ldots,y_k)$.

De lo anterior se deduce que las clases de equivalencia en $f_k(\text{int}A)$ están determinadas unicamente por su representante, por lo que sólo queda analizar como actúa el cociente anterior en cada cara del k-símplex, para ello se da el siguiente lema.

Lema 3.1.4.
Se cumple que $f_1(d_0A^1) = f_1(d_1A^1)$, además para $k \geq 2$ se cumple que $f_k(d_0A^k) = f_k(d_kA^k)$ y que $f_k(d_iA^k) = f_k(d_jA^k)$ para cada $i,j \in \{1,\ldots,k-1\}$ con $f_k := q_k \circ q^k$.

Demostración: Dado que por el lema 3.1.2 se tiene que $d_0A^1 = [\widehat{v_0}, v_1] = \{1\}$ y $d_1A^1 = [v_0,\widehat{v_1}] = \{0\}$, como $0 \sim 1$ es fácil ver que $f_1(d_0A^1) = f_1(d_1A^1)$.
Se probará entonces el enunciado para $k \geq 2$.
Sea $B \in f_k(d_0A^k)$, así existe $(x_1,\ldots,x_k) \in d_0A^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = B$, entonces por el lema 3.1.2 se tiene que $x_k = 1$, de aquí que $B = \{[x_1],\ldots,[x_{k-1}],[1]\} = \{[x_1],\ldots,[x_{k-1}],[0]\}$ y además se tiene que $\{[x_1],\ldots,[x_{k-1}],[0]\} = f_k(0,x_1,\ldots,x_{k-1})$ con $(0,x_1,\ldots,x_{k-1}) \in d_kA^k$, por lo que $B \in f_k(d_kA^k)$.
Ahora, si se toma $B \in f_k(d_kA^k)$, entonces existe $(x_1,\ldots,x_k) \in d_kA^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = B$, nuevamente por el lema 3.1.2 se tiene que $x_1 = 0$, de aquí que $B = \{[0],[x_2],\ldots,[x_k]\} = \{[1],[x_2],\ldots,[x_k]\}$ y además $\{[1],[x_2],\ldots,[x_k]\} = f_k(x_2,\ldots,x_k,1)$ con $(x_2,\ldots,x_k,1) \in d_0A^k$, por lo que $B \in f_k(d_0A^k)$.
Para probar la segunda igualdad bastará probar que $f_k(d_1A^k) = f_k(d_iA^k)$ para $i \in \{2,\ldots,k-1\}$ arbitrario.

Sea $B \in f_k(d_1A^k)$, así existe $(x_1,\ldots,x_k) \in d_1A^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = B$, entonces por el lema 3.1.2 se tiene que $x_k = x_{k-1}$, de aquí se define $(y_1,\ldots,y_k) \in A^k$ tal que $x_j = y_j$ para $j \in \{1,\ldots,k-i\}$ y $y_j = x_{j-1}$ para $j \in \{k+1-i,\ldots,k\}$, así es fácil ver que $f_k(y_1,\ldots,y_k) = \{[x_1],\ldots,[x_{k-1}]\} = B$ y además $y_{k-i} = x_{k-i} = y_{k+1-i}$, por lo que $(y_1,\ldots,y_k) \in d_iA^k$, se concluye así que $B \in f_k(d_iA^k)$.
Ahora, si se toma $B \in f_k(d_iA^k)$, entonces existe $(x_1,\ldots,x_k) \in d_iA^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = B$, nuevamente por el lema 3.1.2 se tiene que $x_{k-i} = x_{k+1-i}$, de aquí se define $(y_1,\ldots,y_k) \in A^k$ tal que $x_j = y_j$ para $j \in \{1,\ldots,k-i\}$, $y_j = x_{j+1}$ para $j \in \{k+1-i,\ldots,k-1\}$ y $y_k = x_k$, no es difícil observar que se cumple que $f_k(y_1,\ldots,y_k) = \{[x_1],\ldots,[x_{k-i}],[x_{k+2-i}],\ldots,[x_k]\} = B$ y además $y_{k-1} = x_k = y_k$, por lo que se tiene que $(y_1,\ldots,y_k) \in d_1A^k$ y se concluye que $B \in f_k(d_1A^k)$. ■

Se introduce ahora la siguiente proposición que determina como se relacionan los $(k-1)$-símplex A^{k-1} y d_jA^k dentro del cociente f_k, para cada $j \in \{1,\ldots,k-1\}$.

Proposición 3.1.1.
Si $k \geq 2$ entonces $f_{k-1}(A^{k-1})$ y $f_k(d_jA^k)$ son el mismo conjunto, para cada $j \in \{1,\ldots,k-1\}$.

Demostración: Del lema 3.1.4 se tiene que $f_k(d_1A^k) = \cdots = f_k(d_{k-1}A^k)$, por tanto para probar el enunciado solo basta probar que $f_{k-1}(A^{k-1}) = f_k(d_{k-1}A^k)$ como conjuntos.
Si $x \in f_{k-1}(A^{k-1})$ entonces existe $(x_1,\ldots,x_{k-1}) \in A^{k-1}$ tal que $f_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}) = x$, así se define $(x_1,x_1,\ldots,x_{k-1}) \in d_{k-1}A^{k-1}$ y es claro que $f_k(x_1,x_1,\ldots,x_{k-1}) = \{[x_1],\ldots,[x_{k-1}]\} = f_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1})$, por tanto $x \in f_k(d_{k-1}A^k)$. Análogamente se prueba que $f_k(d_{k-1}A^k) \subseteq f_{k-1}(A^{k-1})$. ■

Ya que d_0A^k y d_kA^k son $(k-1)$-símplex, se da la siguiente notación que describe a las caras de los símplex mencionados anteriormente.

Notación 3.1.2.
Para $k \geq 2$, se escribirán:

$$d_i\left(d_0A^k\right) = [\widehat{v_0}, v_1,\ldots,\widehat{v_{i+1}},\ldots,v_k] = d_0\left(d_{i+1}A^k\right) \qquad \text{para cada } i \in \{0,1,\ldots,k-1\},$$

$$d_i\left(d_kA^k\right) = [v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_{k-1},\widehat{v_k}] = d_{k-1}\left(d_iA^k\right) \qquad \text{para cada } i \in \{0,1,\ldots,k-1\}.$$

Tomando en cuenta la notación anterior, se da el siguiente resultados.

Proposición 3.1.2.
Para $k \geq 2$, se cumple que $f_k\left(d_i\left(d_0A^k\right)\right) = f_k\left(d_j\left(d_0A^k\right)\right) = f_k\left(d_r\left(d_kA^k\right)\right) = f_k\left(d_s\left(d_kA^k\right)\right)$ para cada $i,j,r,s \in \{0,1,\ldots,k-1\}$

Demostración: Para $k=2$, como consecuencia del lema 3.1.2 entonces $d_0\left(d_0A^2\right) = [\widehat{v_0},\widehat{v_1},v_2] = \{(1,1)\}$, $d_1\left(d_0A^2\right) = [\widehat{v_0},v_1,\widehat{v_2}] = \{(1,1)\} = d_0\left(d_2A^2\right)$ y $d_1\left(d_2A^2\right) = [v_0,\widehat{v_1},\widehat{v_2}] = \{(0,0)\}$, y dado que $0 \sim 1$ es fácil observar que $f_2\left(d_0\left(d_0A^2\right)\right) = f_2\left(d_1\left(d_0A^2\right)\right) = f_2\left(d_0\left(d_2A^2\right)\right) = f_2\left(d_1\left(d_2A^2\right)\right)$.
Si $k \geq 2$, para probar la igualdad solo basta probar que $f_k\left(d_0\left(d_0A^k\right)\right) = f_k\left(d_i\left(d_0A^k\right)\right)$ para $i \in \{1,\ldots,k-1\}$ arbitrario y $f_k\left(d_l\left(d_0A^k\right)\right) = f_k\left(d_l\left(d_kA^k\right)\right)$ para $l \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ arbitrario.
En efecto, si $B \in f_k\left(d_0\left(d_0A^k\right)\right)$ entonces existe $(x_1,\ldots,x_k) \in d_0\left(d_0A^k\right) = d_0\left(d_1A^k\right) \subseteq d_1A^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = B$, como consecuencia del lema 3.1.2 se tiene que $x_k = 1$ y además por la prueba del lema 3.1.4, existe $(y_1,\ldots,y_k) \in d_{i+1}A^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = f_k(y_1,\ldots,y_k)$ y $y_k = x_k = 1$, por tanto $(y_1,\ldots,y_k) \in d_0\left(d_{i+1}A^k\right) = d_i\left(d_0A^k\right)$ y así $B = f_k(y_1,\ldots,y_k) \in f_k\left(d_i\left(d_0A^k\right)\right)$.
Así también, si $B \in f_k\left(d_i\left(d_0A^k\right)\right)$ entonces existe $(x_1,\ldots,x_k) \in d_i\left(d_0A^k\right) = d_0\left(d_{i+1}A^k\right) \subseteq d_{i+1}A^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = B$, como consecuencia del lema 3.1.2 se tiene que $x_k = 1$ y además por la prueba del lema 3.1.4, existe $(y_1,\ldots,y_k) \in d_1A^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = f_k(y_1,\ldots,y_k)$ y $y_k = x_k = 1$, por tanto $(y_1,\ldots,y_k) \in d_0\left(d_1A^k\right) = d_0\left(d_0A^k\right)$ y así $B = f_k(y_1,\ldots,y_k) \in f_k\left(d_0\left(d_0A^k\right)\right)$.
Por lo anterior, se tiene que $f_k\left(d_0\left(d_0A^k\right)\right) = f_k\left(d_i\left(d_0A^k\right)\right)$ para $i \in \{1,\ldots,k-1\}$ arbitrario.
Ahora, si $B \in f_k\left(d_l\left(d_0A^k\right)\right)$ entonces existe $(x_1,\ldots,x_k) \in d_l\left(d_0A^k\right) \subseteq d_0A^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = B$, como consecuencia del lema 3.1.2 se tiene que $x_{k-1-l} = x_{k-l}$ donde $x_0 = 0$, y por la prueba del lema 3.1.4, existe $(y_1,\ldots,y_k) \in d_kA^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = f_k(y_1,\ldots,y_k)$ y $x_j = y_{j+1}$ para cada $j \in \{1,\ldots,k-1\}$, así $y_{k-l} = x_{k-1-l} = x_{k-l} = y_{k+1-l}$, por tanto $(y_1,\ldots,y_k) \in d_l\left(d_kA^k\right)$ y así $B = f_k(y_1,\ldots,y_k) \in f_k\left(d_l\left(d_kA^k\right)\right)$.

Si $B \in f_k\left(d_l\left(d_k A^k\right)\right)$ entonces existe $(x_1,\ldots,x_k) \in d_l\left(d_k A^k\right) \subseteq d_k A^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = B$, como consecuencia del lema 3.1.2 se tiene que $x_{k-l} = x_{k+1-l}$ donde $x_{k+1} = 1$, y por la prueba del lema 3.1.4, existe $(y_1,\ldots,y_k) \in d_0 A^k$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = f_k(y_1,\ldots,y_k)$ y $y_j = x_{j+1}$ para cada $j \in \{1,\ldots,k-1\}$, así $y_{k-1-l} = x_{k-l} = x_{k+1-l} = y_{k-l}$, por tanto $(y_1,\ldots,y_k) \in d_l\left(d_0 A^k\right)$ y así $B = f_k(y_1,\ldots,y_k) \in f_k\left(d_l\left(d_0 A^k\right)\right)$.
Por lo anterior, se tiene que $f_k\left(d_l\left(d_0 A^k\right)\right) = f_k\left(d_l\left(d_k A^k\right)\right)$ para $l \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ arbitrario. ■

Existe un razonamiento analógo al de la observación 3.1.2 pero para el símplex $d_0 A^k$, el cual se presenta en la siguiente observación.

Observación 3.1.3.
Si $(x_1,\ldots,x_k) \in \mathrm{int} d_0 A^k$ entonces $0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = 1$, así, si $(x_1,\ldots,x_k),(y_1,\ldots,y_k) \in \mathrm{int} d_0 A^k$ tales que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = f_k(y_1,\ldots,y_k)$ entonces es fácil observar que $(x_1,\ldots,x_k) = (y_1,\ldots,y_k)$.

A continuación, se da un resultado similar al de la proposición 3.1.1 pero ahora para las caras del símplex $d_0 A^k$ en el siguiente enunciado.

Proposición 3.1.3.
Para $k \geq 2$, se cumple que $f_{k-1}\left(d_0 A^{k-1}\right)$ y $f_k\left(d_0\left(d_0 A^k\right)\right)$ son el mismo conjunto.

Demostración: Si $B \in f_{k-1}\left(d_0 A^{k-1}\right)$, existe $(x_1,\ldots,x_{k-1}) \in d_0 A^{k-1}$ tal que $f_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}) = B$, como consecuencia del lema 3.1.2 se tiene que $x_{k-1} = 1$, así se define $(y_1,\ldots,y_{k-1},1) \in d_0 A^k$ tal que $y_j = x_j$ para cada $j \in \{1,\ldots,k-1\}$, de aquí que $y_{k-1} = x_{k-1} = 1$ y $f_k(y_1,\ldots,y_{k-1},1) = f_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1})$, por tanto $(y_1,\ldots,y_{k-1},1) \in d_0\left(d_0 A^k\right)$ y así $B = f_k(y_1,\ldots,y_{k-1},1) \in f_k\left(d_0\left(d_0 A^k\right)\right)$.
Ahora, si $B \in f_k\left(d_0\left(d_0 A^k\right)\right)$ entonces existe $(x_1,\ldots,x_k) \in d_0\left(d_0 A^{k-1}\right)$ tal que $f_k(x_1,\ldots,x_k) = B$, como consecuencia del lema 3.1.2 se tiene que $x_{k-1} = x_k = 1$, así se define $(y_1,\ldots,y_{k-1}) \in A^{k-1}$ tal que $y_j = x_j$ para cada $j \in \{1,\ldots,k-1\}$, de aquí que $y_{k-1} = x_{k-1} = 1$ y $f_{k-1}(y_1,\ldots,y_{k-1}) = f_k(x_1,\ldots,x_k)$, por tanto $(y_1,\ldots,y_{k-1}) \in d_0 A^{k-1}$ y así $B = f_{k-1}(y_1,\ldots,y_{k-1}) \in f_{k-1}\left(d_0 A^{k-1}\right)$. ■

Se da ahora una definición para empezar a construir la estructura de Δ-complejo de $F_k(S^1)$.

Definición 3.1.3.
Sea $k \geq 2$, para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$ se define $\sigma^j : A^j \longrightarrow F_k(S^1)$ tal que $\sigma^j(x) := \varphi_k\left(i^j\left(f_j\left(x\right)\right)\right)$ para cada $x \in A^j$, se define también $\sigma^0 : d_0 A^1 \longrightarrow F_k(S^1)$ tal que $\sigma^0(x) := \varphi_k\left(i^1\left(f_1\left(x\right)\right)\right)$ para cada $x \in d_0 A^1$, y para cada $r \in \{1,\ldots,k-1\}$ se define también $\tau^r : d_0 A^{r+1} \longrightarrow F_k(S^1)$ tal que $\tau^r(x) := \varphi_k\left(i^{r+1}\left(f_{j+1}\left(x\right)\right)\right)$ para cada $x \in d_0 A^{r+1}$, donde para cada $k \geq 2$, $\varphi_k : F_k(I/\{0,1\}) \longrightarrow F_k(S^1)$ es un isomorfismo y para cada $l \in \{1,\ldots,k\}$, $i^l : F_l(I/\{0,1\}) \hookrightarrow F_k(I/\{0,1\})$ es la inclusión natural.

Con esta definición, se da ahora el siguiente resultado.

Lema 3.1.5.
Para $k \geq 2$, $\Delta\left(F_k(S^1)\right) := \{\sigma_0, \sigma^i, \sigma^k, \tau^i : 1 \leq i \leq k-1\}$ es una estructura de Δ-complejo para $F_k(S^1)$.

Demostración: Por como se construyen las funciones σ^0, σ^i, σ^k, τ^i para cada $i \in \{1,\ldots,k-1\}$, según la definición 3.1.3, se observa que se cumplen los puntos (1) y (4) de la definición 1.2.18.
Por la observación 3.1.2 se tiene que $\sigma^j|_{\mathrm{int}A^j}$ es inyectiva para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$, y por la observación 3.1.3 se tiene que $\sigma^0|_{\mathrm{int}d_0 A^1}$, $\tau^r|_{\mathrm{int}d_0 A^{r+1}}$ son inyectivas para cada $r \in \{1,\ldots,k-1\}$, entonces por lo anterior se cumple el punto (1) de la definición 1.2.18.
Por el lema 3.1.4 y la proposición 3.1.1, se tiene que para cada $j \in \{2,\ldots,k\}$ y cada $i \in \{1,\ldots,j-1\}$, la restricción $\sigma^j|_{d_i A^j}$ es la función σ^{j-1}. Por el lema 3.1.4, para cada $j \in \{2,\ldots,k\}$ se observa que las restricciones $\sigma^j|_{d_0 A^j}$ y $\sigma^j|_{d_j A^j}$ son la función τ^{j-1}, y además las restricciones $\sigma^1|_{d_0 A^1}$ y $\sigma^1|_{d_1 A^1}$ son la función σ^0.
Por la proposición 3.1.2 y la proposición 3.1.3, para cada $j \in \{2,\ldots,k-1\}$ y cada $i \in \{0,\ldots,j\}$ se tiene que la restricción $\tau^j|_{d_i A^{j+1}}$ es la función τ^{j-1}, y además las restricciones $\tau^1|_{d_0 A^1}$ y $\tau^1|_{d_1 A^1}$ son la función σ^0.
Por todo lo anterior se cumple el punto (3) de la definición 1.2.18.
Como se cumplen todos los puntos de la definición 1.2.18,se tiene que $\Delta\left(F_k(S^1)\right)$ es una estructura de Δ-complejo para $F_k(S^1)$. ■

Teniendo ya una estructura de Δ-complejo para $F_k(S^1)$ se construirá el complejo de cadena asociado a $F_k(S^1)$ con el siguiente lema.

Lema 3.1.6.
Para $k \geq 2$, el complejo de cadena asociado a $F_k(S^1)$ está dado por las funciones:
$\boldsymbol{\partial}_k : \mathbb{Z}\sigma^k \longrightarrow \mathbb{Z}\sigma^{k-1} \oplus \mathbb{Z}\tau^{k-1}$ que está determinada por el vector columna

$$D_k = \frac{1+(-1)^k}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para $i \in \{2, ..., k-1\}$, $\boldsymbol{\partial}_i : \mathbb{Z}\sigma^i \oplus \mathbb{Z}\tau^i \longrightarrow \mathbb{Z}\sigma^{i-1} \oplus \mathbb{Z}\tau^{i-1}$ está determinada por la matriz

$$D_i = \frac{1+(-1)^i}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

junto con $\boldsymbol{\partial}_1 : \mathbb{Z}\sigma^1 \oplus \mathbb{Z}\tau^1 \longrightarrow \mathbb{Z}\sigma^0$ siendo está la función 0.

Demostración: Dado que en un complejo de cadena sus funciones son morfismos de $\mathbb{Z}$-módulos, sólo bastar ver como estos evalúan a los generadores, sea σ^j para $j \in \{2, \ldots, k\}$ arbitrario.

Por definición, $\boldsymbol{\partial}_j(\sigma^j) = \displaystyle\sum_{r=0}^{j}(-1)^r \sigma^j|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_r},\ldots,v_j]}$, y tal como se vio en la prueba del lema 3.1.5, las caras $\sigma^j|_{[\widehat{v_0},\ldots,v_j]}$, $\sigma^j|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_j}]}$ corresponden a τ^{j-1} y las caras $\sigma^j|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_r},\ldots,v_j]}$ para cada $r \in \{1, \ldots, j-1\}$ corresponden a σ^{j-1}, por lo tanto $\boldsymbol{\partial}_j(\sigma^j) = \tau^{j-1} + \displaystyle\sum_{r=1}^{j-1}(-1)^r \sigma^{j-1} + (-1)^j \tau^{j-1}$.

Como $\displaystyle\sum_{r=1}^{j-1}(-1)^r = \frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{j-1}(-1)^r + \sum_{r=1}^{j-1}(-1)^r\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{j-1}(-1)^r - \sum_{r=2}^{j}(-1)^r\right) = -\frac{1+(-1)^j}{2}$ y además se tiene que $\tau^{j-1} + (-1)^j\tau^{j-1} = 2\tau^{j-1}\dfrac{1+(-1)^j}{2}$, entonces $\boldsymbol{\partial}_j(\sigma^j) = \dfrac{1+(-1)^j}{2}\left(-\sigma^{j-1} + 2\tau^{j-1}\right)$ donde está expresión corresponde a D_k cuando $k = j$ y a la primer columna de la matriz D_j cuando $j \in \{2, \ldots, k-1\}$.
Se considera τ^i para $i \in \{2, \ldots, k-1\}$ arbitrario.

Así, por definición, $\boldsymbol{\partial}_i(\tau^i) = \displaystyle\sum_{r=0}^{i}(-1)^r \tau^i|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_r},\ldots,v_i]}$, de aquí que, tal como se vio en la prueba del lema 3.1.5, se tiene que para cada $r \in \{0, \ldots, i\}$, las caras $\tau^i|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_r},\ldots,v_i]}$ corresponden a τ^{i-1}, por lo que $\boldsymbol{\partial}_i(\tau^i) = \displaystyle\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\tau^{i-1}$, de aquí que $\displaystyle\sum_{r=0}^{i}(-1)^r = 1 + \sum_{r=1}^{i-1}(-1)^r + (-1)^i = 1 - \frac{1+(-1)^i}{2} + (-1)^i = \frac{1+(-1)^i}{2}$,
por lo que $\boldsymbol{\partial}_i(\tau^i) = \dfrac{1+(-1)^i}{2}\tau^{i-1}$ donde está expresión corresponde a la segunda columna de la matriz D_i.
Por tanto se tiene que $\boldsymbol{\partial}_k$ está determinada por D_k y para cada $i \in \{2, \ldots, k-1\}$ $\boldsymbol{\partial}_i$ está determinada D_i.
Por último, por definición $\partial_{\mathbf{1}}(\sigma^1) = \sigma^1|_{[\widehat{v_0},v_1]} - \sigma^1|_{[v_0,\widehat{v_1}]}$ y $\partial_{\mathbf{1}}(\tau^1) = \tau^1|_{[\widehat{v_0},v_1]} - \tau^1|_{[v_0,\widehat{v_1}]}$, así, dado que por la prueba del lema 3.1.5, las caras $\sigma^1|_{[\widehat{v_0},v_1]}$, $\sigma^1|_{[v_0,\widehat{v_1}]}$, $\tau^1|_{[\widehat{v_0},v_1]}$, $\tau^1|_{[v_0,\widehat{v_1}]}$ corresponden a σ^0, entonces se tiene que $\boldsymbol{\partial}_1(\sigma^1) = \sigma^0 - \sigma^0 = 0$ y $\boldsymbol{\partial}_1(\tau^1) = \sigma^0 - \sigma^0 = 0$, por tanto, se concluye que $\partial_{\mathbf{1}}$ es la función cero. ■

Con el lema anterior, se procede ahora a calcular los grupos de homología de $F_k(S^1)$.

Teorema 3.1.1.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, los grupos de homología de $F_k(S^1)$ son isomorfos a los de S^{d_k}, la esfera unitaria d_k-dimensional donde $d_k = 2\left\lceil \dfrac{k}{2} \right\rceil - 1$ donde $\lceil \cdot \rceil$ es la función mayor entero.

Demostración: Para $k = 1$, por el teorema 2.1.1 se tiene que $F_1(S^1) \cong S^1$, con esto se tiene que $F_1(S^1)$ y S^1 tienen el mismo tipo de homotopía y por el corolario 1.2.1, se tiene que $H_n(F_1(S^1)) \cong H_n(S^1)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ teniendo así el enunciado. Para $k \geq 2$, se nota del lema 3.1.6 que para i impar se tiene que $D_i = 0$ y para i par el determinante $\det(D_i) = -1$ entonces en este caso existe la inversa de D_i.
Dado que $D_i^{-1} = \dfrac{1}{\det(D_i)}Adj(D_i) = -Adj(D_i)$ donde $Adj(D_i)$ es la matriz adjunta que es una matriz de 2×2 con entradas en $\mathbb{Z}$, entonces es posible definir una función inversa para $\partial_{\mathbf{i}}$ cuando i es impar.

Así, por el lema 3.1.6 que $\partial_{\mathbf{1}} = 0$ entonces para $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ se tiene que $\partial_{\mathbf{i}} = 0$ si i es impar y que $\partial_{\mathbf{i}}$ es un isomorfismo si i es par, por tanto como consecuencia $H_i(F_k(S^1)) = 0$ para $i \in \{1, \ldots, k-2\}$.
Ahora, es claro que S^1 es arcoconexo, entonces por el teorema 2.1.2 se tiene que $F_k(S^1)$ es arcoconexo y por la proposición 1.2.8 se tiene que $H_0(F_k(S^1)) \cong \mathbb{Z}$.
Por último, dado que $d_k = k-1$ si k es par y $d_k = k$ si k es impar, se analizan estos dos casos.

- Si k es impar entonces $\boldsymbol{\partial}_k = 0$ y $\boldsymbol{\partial}_{k-1}$ es un isomorfismo, por lo que $H_{k-1}(S^1) = \dfrac{\ker \boldsymbol{\partial}_{k-1}}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_k} = \dfrac{0}{0} \cong 0$.
  Así también, dado que $\boldsymbol{\partial}_{k+1} = 0$ entonces $H_k(S^1) = \dfrac{\ker \boldsymbol{\partial}_k}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_{k+1}} \cong \ker \boldsymbol{\partial}_k = \mathbb{Z}\sigma^k \cong \mathbb{Z}$.
- Si k es impar entonces $\boldsymbol{\partial}_{k-1} = 0$ y $\boldsymbol{\partial}_k(\sigma^k) = -\sigma^{k-1} + 2\tau^{k-1}$ donde se tiene que $\ker \boldsymbol{\partial}_k = 0$, como también $\boldsymbol{\partial}_{k+1} = 0$ se tiene que $H_k(S^1) = 0$, y como se tiene que $\text{Im } \boldsymbol{\partial}_k = \mathbb{Z}(-\sigma^{k-1} + 2\tau^{k-1})$ entonces $H_{k-1}(S^1) = \dfrac{\ker \boldsymbol{\partial}_{k-1}}{\text{Im } \boldsymbol{\partial}_k} = \dfrac{\mathbb{Z}\sigma^{k-1} \oplus \mathbb{Z}\tau^{k-1}}{\mathbb{Z}(-\sigma^{k-1} + 2\tau^{k-1})} \cong \dfrac{\mathbb{Z}(-\sigma^{k-1} + 2\tau^{k-1}) \oplus \mathbb{Z}\tau^{k-1}}{\mathbb{Z}(-\sigma^{k-1} + 2\tau^{k-1})}$.
  Con lo anterior, por el segundo teorema de isormorfismos para grupos (véase [7, teorema 5.9, pág. 25]) se satisface que $H_{k-1}(S^1) \cong \dfrac{\mathbb{Z}(-\sigma^{k-1} + 2\tau^{k-1}) \oplus \mathbb{Z}\tau^{k-1}}{\mathbb{Z}(-\sigma^{k-1} + 2\tau^{k-1})} \cong \dfrac{\mathbb{Z}\tau^{k-1}}{\mathbb{Z}(-\sigma^{k-1} + 2\tau^{k-1}) \cap \mathbb{Z}\tau^{k-1}}$.
  Dado que $\mathbb{Z}(-\sigma^{k-1} + 2\tau^{k-1}) \cap \mathbb{Z}\tau^{k-1} = 0$ entonces $H_{k-1}(S^1) \cong \dfrac{\mathbb{Z}\tau^{k-1}}{0} \cong \mathbb{Z}\tau^{k-1} \cong \mathbb{Z}$.

En conclusión, los grupos de homología para $F_k(S^1)$ están dados por

$$H_n(F_k(S^1)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, d_k\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde estos son los grupos de homología para S^{d_k} (ver [8, corolario 2.14, pág. 114]) teniendo así el resultado. ∎

Se observa ahora que, con la descomposición simplicial de $F_k(S^1)$ del lema 3.1.5 es posible dotar a este espacio de una estructura de CW-complejo considerando sus n-esqueletos para cada $n \in \mathbb{Z}$ como los n-símplex presentes en su estructura de Δ-complejo, ya que dichos n-símplex son isomorfos en Top al disco cerrado D^n.

Teniendo en cuenta lo anterior, se da el siguiente lema.

Lema 3.1.7.
Para cada $k \geq 3$, $F_k(S^1)$ es simplemente conexo.

Demostración: Como ya se ha visto, dado que S^1 es arcoconexo por el teorema 2.1.2, $F_k(S^1)$ es arcoconexo, por tanto, basta probar que su grupo fundamental es trivial.
Considerando el 2-esqueleto de $F_k(S^1)$ al cual se le llamará $X^2 := \sigma^2 \cup \tau^2$, por como se representó este espacio en las figuras de las caras de $F_3(S^1)$ no es difícil observar que X^2 se puede contraer a un punto, es decir $\pi_1(X^2) = 0$. Ahora, por el teorema 1.2.7 la inclusíon $X^2 \hookrightarrow F_k(S^1)$ da que $\pi_1(X^2) \cong \pi_1(F_k(S^1))$, por lo tanto $\pi_1(F_k(S^1)) = 0$. ∎

Ya con este lema, se procede a dar los siguientes resultados consecuentes que otorga el conocer los grupos de homología y el grupo fundamental del k-ésimo producto simétrico del círculo.

Corolario 3.1.1.
$F_k(S^1)$ tiene el tipo de homotopía de la esfera S^{d_k}.

Demostración: El resultado es claro para $k \in \{1, 2\}$ pues por el teorema 2.1.1 se tiene que $F_1(S^1) \cong S^1$ y por el modelo de $F_2(S^1)$ de la sección 2.3, $F_2(S^1)$ es isomorfo a la banda de Möebius, la cual tiene el tipo de homotopía de S^1 ya que S^1 es un retracto por deformación de la banda de Möebius (véase [8, pág. 2]).
Ahora, para $k \geq 3$, por el lema 3.1.7 se tiene que $F_k(S^1)$ es simplemente conexo, por el teorema 3.1.1 se tiene que $H_i(F_k(S^1)) = 0$ para cada $i \in \{2, ..., d_k - 1\}$, entonces por el corolario 1.2.3 se tiene que $F_k(S^1)$ es $(d_k - 1)$-conexo, así, por el teorema 1.2.6 se tiene que $\pi_{d_k}(F_k(S^1)) \cong H_{d_k}(F_k(S^1))$.

Por el teorema 3.1.1, $H_{d_k}(F_k(S^1)) \cong \mathbb{Z}$, entonces por lo anterior $\pi_{d_k}(F_k(S^1)) \cong \mathbb{Z}$, así, en base a la definición 1.2.6, se considera a $\phi : S^{d_k} \longrightarrow F_k(S^1)$ como un representante del generador del grupo $\pi_{d_k}(F_k(S^1))$.
Ahora bien, tomando $[\omega]$ como el generador de $\pi_{d_k}(S^{d_k})$ es fácil observar que $[\phi \circ \omega]$ es el generador de $\pi_{d_k}(F_k(S^1))$, por lo que la función inducida $\phi_{\#}^{d_k} : \pi_{d_k}(S^{d_k}) \longrightarrow \pi_{d_k}(F_k(S^1))$ de la definición 1.2.12 es un isomorfismo. También, por el teorema 1.2.6 aplicado a S^{d_k} se tiene que $\pi_{d_k}(S^{d_k}) \cong H_{d_k}(S^{d_k}) \cong \mathbb{Z}$ y de esta forma se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
H_{d_k}(S^{d_k}) \arrow[r, "\phi_*^{d_k}"] \arrow[d, "\cong"'] & H_{d_k}(F_k(S^1)) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_{d_k}(S^{d_k}) \arrow[r, "\phi_{\#}^{d_k}", "\cong"'] & \pi_{d_k}(F_k(S^1))
\end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior se tiene que $\phi_*^{d_k} : H_{d_k}(S^{d_k}) \longrightarrow H_{d_k}(F_k(S^1))$ es un isomorfismo, además dado que $H_j(S^{d_k}) = 0 = H_j(F_k(S^1))$ para cada $j \in \mathbb{N} - \{d_k\}$ entonces $\phi_*^j : H_j(S^{d_k}) \longrightarrow H_j(F_k(S^1))$ es un isomorfismo. Se observa que $\phi_*^0 : H_0(S^{d_k}) \longrightarrow H_0(F_k(S^1))$ también es un isomorfismo pues ambos espacios son arcoconexos, y por la prueba del proposición 1.2.8, estos espacios son los generadores de sus grupos.
Por tanto, se tiene que $\phi : S^{d_k} \longrightarrow F_k(S^1)$ induce un isomorfismo $\phi_*^n : H_n(S^{d_k}) \longrightarrow H_n(F_k(S^1))$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; como S^{d_k} y $F_k(S^1)$ son CW-complejos entonces por el teorema 1.2.8 se tiene que ϕ es una equivalencia homotópica, así, por la definición 1.2.4, S^{d_k} y $F_k(S^1)$ tienen el mismo tipo de homotopía. ■

El siguiente resultado lo presentó Raoul Bott en 1952 (véase [2]), siendo este es de gran importancia ya que dió un modelo correcto para $F_3(S^1)$ y refutó el modelo presentado por Karol Borsuk en 1949 (véase [1]).

Teorema 3.1.2.
$F_3(S^1) \cong_{Top} S^3$

Demostración: Por [4, lema 5.2, pág. 2620], se tiene que $F_3(S^1)$ es una 3-variedad. Además $F_3(S^1)$ es compacta pues A^k es claramente compacto y $f_k = q_k \circ q^k$ es una función continua, teniendo así que $F_3(S^1)$ es una 3-variedad compacta que en particular es una 3-variedad cerrada.
Ahora por el lema 3.1.7, $F_3(S^1)$ es simplemente conexo, así, dado que el teorema de Perelman-Poincaré dice que la única 3-variedad cerrada y simplemente conexa es S^3, se concluye que $F_3(S^1) \cong_{Top} S^3$. ■

3.2. Analizando el espacio $F_k(S^1) - F_{k-2}(S^1)$

El objetivo principal de esta sección es obtener un análisis general sobre el grupo fundamental del espacio $F_k(S^1) - F_{k-2}(S^1)$, y así, usar lo que se obtenga en esta sección y relacionarlo con la teoría de nudos, para ello se hará uso de la sección anterior considerando la descomposición simplicial que tiene $F_k(S^1)$ y realizando así una nueva estructura al producto simétrico para que con ello se de, por el teorema de Seifert-Van Kampen, una presentación del grupo fundamental del espacio que se quiere analizar.

Lo escrito en esta sección proviene en su mayoría de [17].

Se procede a dar a los k-símplex A^k una nueva estuctura con respecto a una de sus caras, lo cual ayudará a poder aplicar mejor el Teorema de Seifert-Van Kampen, para ello se tiene la siguiente definición.

Definición 3.2.1.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define la función dada por

$$\begin{array}{cccc} h_k : & d_k A^k \times I & \longrightarrow & A^k \\ & (a_0, \ldots, a_{k-1}, t) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_k), \end{array}$$

donde para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que $x_i = a_{i-1} + (1 - a_{k-1})t$.

Dado que cualquier $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in d_k A^K$ cumple que $0 = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{k-1} \leq 1$, es fácil ver que $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq 1$, por lo que h_k es una función bien definida y claramente es continua, para cada $k \in \mathbb{N}$.

A continuación, se probará que con la función h_k, se tiene una nueva forma de analizar los k-símplex A^k, para ello es necesario dar la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1.
La función $h_k : d_k A^k \times I \longrightarrow A^k$ es sobreyectiva para cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $(x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ arbitrario, de aquí se tienen dos casos:

- Si $x_1 = 0$ y $x_k = 1$ entonces se define $(a_0, \ldots, a_{k-1}, 1)$ tal que $a_i = x_{i+1}$ para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, así, como $0 = x_1 \leq \ldots \leq x_k = 1$ entonces $0 = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{k-1} = 1$, así $(a_0, \ldots, a_{k-1}, 1) \in d_k A^k \times I$. Se observa que $h_k(a_0, \ldots, a_{k-1}, 1) = (a_0, \ldots, a_{k-1}) = (x_1, \ldots, x_k)$.
- En cualquier otro caso, se define $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ tal que $a_i = x_{i+1} - x_1$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ y $t = \dfrac{x_1}{1 - x_k + x_1}$. Es fácil ver que $a_0 = x_1 - x_1 = 0$ y además, dado que $0 \leq x_1 \leq ... \leq x_k \leq 1$, entonces $0 \leq a_1 \leq ... \leq a_{k-1} \leq 1$, así también, como se tiene $0 \leq x_1 \leq 1 - x_k + x_1$ entonces $0 \leq \dfrac{x_1}{1 - x_k + x_1} \leq \dfrac{1 - x_k + x_1}{1 - x_k + x_1} = 1$, es decir $0 \leq t \leq 1$, por tanto $(a_0, \ldots, a_{k-1}, t) \in d_k A^k \times I$.
  Se observa que $h_k(a_0, \ldots, a_{k-1}, t) = (x_1, \ldots, x_k)$.

En ambos casos se tiene que h_k es sobreyectiva. ■

Usando la proposición anterior, la definición 3.2.1 y la función cociente $f_k = q_k \circ q^k$ que se consideró en el lema 3.1.3, se tiene el siguiente cociente para $d_k A^K \times I$.

Definición 3.2.2.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define la función cociente dada por

$$\begin{array}{cccc} q'_k : & d_k A^k \times I & \longrightarrow & F_k(I/\{0,1\}) \\ & (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, t) & \longmapsto & \{[a_0 + (1 - a_{k-1})t], \ldots, [a_{k-1} + (1 - a_{k-1})t]\} \end{array}$$

donde $a_0 = 0$ y $[x]$ denota a la clase de x en $I/\{0,1\}$.

Dado que $q'_k = f_k \circ h_k$, entonces la función anterior es continua, está bien definida y además cumple que $q'_k\left(d_k A^k \times I\right) = F_k(I/\{0,1\})$, por lo que se tiene una nueva forma de poder obtener el k-ésimo producto simétrico de S^1.

Ahora bien, ya que el objetivo es calcular el grupo fundamental del espacio $F_k(S^1) - F_{k-2}(S^1)$ para $k \geq 3$, por el teorema 2.2.3 se tiene que $F_n(S^1) \cong F_n(I/\{0,1\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces, para el espacio $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$ se construirán los abiertos necesarios para aplicar el teorema 1.2.3.

Como primer paso, se quisiera estudiar el espacio $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$, ya que este es uno de los conjuntos necesarios para estudiar el grupo fundamental de $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$, por tanto se da a continuación el siguiente lema.

Lema 3.2.1.
Para $k \geq 2$, $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}) = q'_k\left(\left(\text{int } d_k A^k\right) \times I\right)$.

Demostración: Sea $k \geq 2$ arbitrario y sea $\{b_1, \ldots, b_l\} \in q'_k\left(\left(\text{int } d_k A^k\right) \times I\right)$, por definición existe $(0, c_1, \ldots, c_{k-1}, t) \in \left(\text{int } d_k A^k\right) \times I$ tal que $q'_k(0, c_1, \ldots, c_{k-1}, t) = \{b_1, \ldots, b_l\}$, así $(0, c_1, \ldots, c_{k-1}) \in \text{int } d_k A^k$. Se afirma que $0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < 1$, en efecto, si $c_1 = 0$ entonces $(0, c_1, \ldots, c_{k-1}) \in [v_0, \ldots, v_{k-2}, \widehat{v_{k-1}}, \widehat{v_k}]$, si $c_i = c_{i+1}$ para algún $i \in \{1, \ldots, k-2\}$ entonces $(0, c_1, \ldots, c_{k-1}) \in [v_0, \ldots, \widehat{v_{k-1-i}}, \ldots, v_{k-1}, \widehat{v_k}]$ y si $c_{k-1} = 1$ entonces $(0, c_1, \ldots, c_{k-1}) \in [\widehat{v_0}, v_1, \ldots, v_{k-1}, \widehat{v_k}]$, los tres casos se tienen como consecuencia del lema 3.1.2. Así, ya que es fácil ver que $[v_0, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_{k-1}, \widehat{v_k}] = \delta_j^k \subseteq \partial d_k A^k$ para cada $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, entonces si pasa alguno de los tres casos anteriores se tendría que $(0, c_1, \ldots, c_{k-1}) \in \partial d_k A^k$ lo cual no es posible.

Entonces para $\{[y_1],\ldots,[y_k]\} = q'_k(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t)$ donde, según la definición 3.2.2, $y_1 = (1-c_{k-1})t$ y $y_j = c_{j-1} + (1-c_{k-1})t$ para $j \in \{2,\ldots,k\}$, como $0 < c_1 < \ldots. < c_{k-1} < 1$ se tendría que $[x_i] \neq [x_j]$ si $i \neq j$ y así $\{b_1,\ldots,b_l\} = q'_k(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t) = \{[y_1],\ldots,[y_k]\} \in F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$.
Si $\{[b_1],\ldots,[b_l]\} \in F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$, entonces $l = k$ y $[b_i] \neq [b_j]$ si $i \neq j$, así por como se define la relación de equivalencia en $I/\{0,1\}$ entonces se puede considerar $[b_r] = b_r$ para cada $r \in \{1,\ldots,k\}$, por tanto, como $\{b_1,\ldots,b_l\} = \{b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(k)}\}$ con $\sigma : \{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,k\}$ alguna permutación que cumple que $b_{\sigma(1)} < \ldots < b_{\sigma(k)}$. Se define así $(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t)$ tal que $c_i = b_{\sigma(i+1)} - b_{\sigma(1)}$ para $i \in \{1,\ldots,k-1\}$ y que $t = \dfrac{b_{\sigma(1)}}{1 - b_{\sigma(k)} + b_{\sigma(1)}}$, no es difícil observar que $0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < 1$ y $t \in I$, por tanto se tiene que $(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t) \in \left(\text{int } d_kA^k\right) \times I$, además por la definición 3.2.2 no es difícil observar que $q'_k(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t) = \{b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(k)}\} = \{b_1,\ldots,b_l\}$, por lo tanto $\{[b_1],\ldots,[b_l]\} \in q'_k\left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times I\right)$. ■

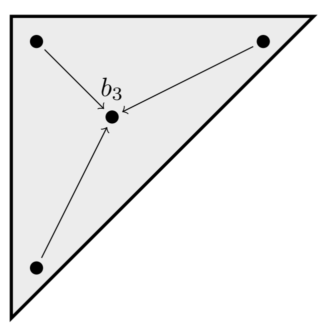
Para cada $n \geq 2$, algo importante que se puede observar del espacio $F_n(I/\{0,1\}) - F_{n-1}(I/\{0,1\})$ es que tiene el mismo tipo de homotopía del círculo unitario S^1, la idea es construir un retracto por deformación a un lazo basado en un punto distinguido, esto se puede ya que la cara d_kA^k es un espacio convexo.

Primero conviene destacar un punto particular en el cual se aplicará la convexidad que tiene la cara d_kA^k, para ello se da la siguiente definición.

Definición 3.2.3.
Para cada $k \geq 2$, se define el punto $b_k = \left(0, \dfrac{1}{k}, \ldots, \dfrac{k-1}{k}\right) \in d_kA^k$.

La importancia de b_k radica en como se comporta bajo la convexidad de d_kA^k y en que, como se verá más adeltante, con este punto se construye el generador del grupo fundamental de $F_n(I/\{0,1\}) - F_{n-1}(I/\{0,1\})$.

Por ejemplo, para $k = 3$ se considera primero que en la cara d_3A^3 es posible construir un segmento que une a cada punto de d_3A^3 con el punto b_3, esto se puede observar en la siguiente figura.



De esta forma, se tiene un retracto por deformación determinado por la siguiente homotopía:

$$\begin{array}{rccc} h^3 : & \left(\text{int } d_3A^3\right) \times I & \longrightarrow & \text{int } d_3A^3 \\ & (0,a_1,a_2,s) & \longmapsto & (0,a_1,a_2)(1-s) + sb_3. \end{array}$$

Esta homotopía se puede extender al espacio $d_3A^3 \times I$ como sigue:

$$\begin{array}{rccc} H^3 : & \left(\left(\text{int } d_3A^3\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & \left(\text{int } d_3A^3\right) \times I \\ & (0,a_1,a_2,t,s) & \longmapsto & \left(h^3(0,a_1,a_2,s),t\right). \end{array}$$

Con lo anterior se ha construido una homotopía para el espacio $\left(\text{int } d_3A^3\right) \times I$ y entonces, por el lema 3.2.1, para construir una homotopía en $F_3(I/\{0,1\}) - F_2(I/\{0,1\})$ bastaría con que la homotopía H^3 induzca una homotopía en el cociente $q'_k\left(\left(\text{int } d_3A^3\right) \times I\right)$.

Para ello, para cualquier $k \geq 2$ se analizará cómo son las identificaciones en el cociente $q'_k\left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times I\right)$, por tanto se empieza dando la siguiente observación.

Observación 3.2.1.
Sea $c = (0, c_1, \ldots, c_{k-1}) \in \text{int } d_k A^k$, y sea $q'_k(c,t) = \{[z_1], \ldots, [z_k]\}$ donde $z_j = c_{j-1} + (1 - c_{k-1})t$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ y $c_0 = 0$. Como por la prueba del lema 3.2.1 se tiene que $0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < 1$ entonces es fácil ver que $0 = z_1 < \ldots < z_k < 1$ si y sólo si $t = 0$, $0 < z_1 < \ldots < z_k < 1$ si y sólo si $t \in (0,1)$ y $0 < z_1 < \ldots < z_k = 1$ si y sólo si $t = 1$.

Para explicar mejor los siguientes resultados se da la siguiente notación.

Notación 3.2.1.
Para cada punto $x \in d_k A^k \times I$, se denota por $\overline{x}$ a la clase de x bajo el cociente q'_k.

Lo planteado anteriormente ayuda a probar la siguiente proposición.

Proposición 3.2.2.
Para cada $k \geq 2$, si $x \in \left(\text{int } d_k A^k\right) \times (0,1)$ entonces $\overline{x} = \{x\}$.

Demostración: Sea $x \in \left(\text{int } d_k A^k\right) \times (0,1)$ y suponiendo que existe $b = (0, b_1, \ldots, b_{k-1}) \in d_k A^k$ tal que $q'_k(x) = q'_k(b,t)$ para algún $t \in I$, por el lema 3.2.1 se tiene que $b \in \text{int } d_k A^k$.
Considerando $x = (a,s)$ donde $a = (0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \text{int } d_k A^k$ y $s \in (0,1)$, por la definición 3.2.2 se tiene que $q'_k(x) = \{[x_1], \ldots, [x_k]\}$ donde $x_j = a_{j-1} + (1 - a_{k-1})s$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ y $a_0 = 0$, de la misma forma se tiene que $q'_k(b,t) = \{[y_1], \ldots, [y_k]\}$ donde $y_j = b_{j-1} + (1 - b_{k-1})t$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ y $b_0 = 0$, por tanto $\{[x_1], \ldots, [x_k]\} = \{[y_1], \ldots, [y_k]\}$.
Por la observación 3.2.1 se tiene que $0 < x_1 < \ldots < x_k < 1$, entonces por la igualdad anterior se tiene que $y_j \notin \{0,1\}$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ y como $b \in \text{int } d_k A^k$ se tiene que $0 < y_1 < \ldots < y_k < 1$, de aquí es fácil observar que $x_j = y_j$ pues los puntos están ordenados y todas las clases son distintas.
Por de lo anterior $a_i = b_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ y además $t = s \in (0,1)$, por tanto $x = (b,t)$. ∎

Con la proposición anterior se tiene como se identifican los puntos del espacio $\left(\text{int } d_k A^k\right) \times (0,1)$ en el cociente q'_k, se observa a continuación que pasa con las identificaciones del cociente q'_k en el espacio $\left(\text{int } d_k A^k\right) \times \{0\}$ y en el espacio $\left(\text{int } d_k A^k\right) \times \{1\}$, así pues para obtener dichas identificaciones, en principio se da la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3.
Para cada $k \geq 2$ y cada $t \in I$, si $x \in \left(\text{int } d_k A^k\right) \times \{t\}$ entonces $\overline{x} \cap (d_k A^k \times \{t\}) = \{x\}$.

Demostración: Si $t \in (0,1)$ el resultado se tiene por la proposición 3.2.2.
Ahora, sea $x \in \left(\text{int } d_k A^k\right) \times \{1\}$ y suponiendo que existe $b = (0, b_1, \ldots, b_{k-1}) \in d_k A^k$ tal que $q'_k(x) = q'_k(b,1)$, por el lema 3.2.1 se tiene que $b \in \text{int } d_k A^k$ y como consecuencia de esto, por la observación 3.2.1 se tiene que $0 < y_1 < \ldots < y_k = 1$ donde $y_j = b_{j-1} + (1 - b_{k-1})$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ y $b_0 = 0$. Considerando $x = (a,1)$ donde $a = (0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \text{int } d_k A^k$, por la definición 3.2.2 se tiene que $q'_k(x) = \{[x_1], \ldots, [x_k]\}$ donde $x_j = a_{j-1} + (1 - a_{k-1})$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ y $a_0 = 0$, de la misma forma se tiene que $q'_k(b,1) = \{[y_1], \ldots, [y_k]\}$, y por hipótesis se tiene $\{[x_1], \ldots, [x_k]\} = \{[y_1], \ldots, [y_k]\}$.
Por la observación 3.2.1 se tiene que $0 < x_1 < ... < x_k = 1$, entonces $x_j = y_j$ pues los puntos están ordenados y todas las clases son distintas, de aquí $a_i = b_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ y por tanto $x = (b,1)$.
Por último, si $x \in \left(\text{int } d_k A^k\right) \times \{0\}$, suponiendo que existe $b = (0, b_1, \ldots, b_{k-1}) \in d_k A^k$ tal que $q'_k(x) = q'_k(b,0)$ y considerando $x = (a,1)$ donde $a = (0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \text{int } d_k A^k$, entonces por la definición 3.2.2 se tiene que $\{[0], [b_1], \ldots, [b_{k-1}]\} = q'_k(b,0) = q'_k(x) = \{[0], [a_1], \ldots, [a_{k-1}]\}$, así pues, como por el lema 3.2.1 se tiene que $b \in \text{int } d_k A^k$ y por la prueba del mismo lema se tiene que $0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < 1$ y que $0 < b_1 < \ldots < b_{k-1} < 1$, es fácil ver que $a_i = b_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, por tanto $x = (b,0)$. ∎

Siguiendo con las identificaciones del cociente q'_k en el espacio $\left(\text{int } d_k A^k\right) \times \{0\}$ y en $\left(\text{int } d_k A^k\right) \times \{1\}$, se da la siguiente definición que será de ayuda en los resultados posteriores.

Definición 3.2.4.
Para cada $k \geq 2$, se define la función dada por

$$\begin{array}{rccc} \sigma_k : & d_k A^k & \longrightarrow & d_k A^k \\ & (0, a_1, \ldots, a_{k-1}) & \longmapsto & (0, x_1, \ldots, x_{k-1}), \end{array}$$

donde $x_i = a_{i-1} + 1 - a_{k-1}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ y $a_0 = 0$.

Observación 3.2.2.
Es fácil ver que σ_k está bien definida y además, si se define

$$\begin{array}{rccc} \gamma_k : & d_kA^k & \longrightarrow & d_kA^k \\ & (0, b_1, \ldots, b_{k-1}) & \longmapsto & (0, y_1, \ldots, y_{k-1}), \end{array}$$

donde $y_i = b_{i+1} - b_1$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ y $b_k = 1$.
Se tiene entonces que $\sigma_k(\gamma_k(a)) = a$ y que $\gamma_k(\sigma_k(a)) = a$ para cada $a \in d_kA^k$, y por tanto σ_k es biyectiva.

Observación 3.2.3.
Si $a = (0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \text{int } d_kA^k$ entonces $0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < 1$, así como $\sigma_k(a) = (0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ y $\gamma_k(a) = (0, y_1, \ldots, y_{k-1})$ donde $x_j = a_{j-1} + 1 - a_{k-1}$, $y_j = a_{j+1} - a_1$ para cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, $a_0 = 0$ y $a_k = 1$, entonces $0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < 1$ y $0 < y_1 < \ldots < y_{k-1} < 1$, por lo que de la prueba del lema 3.2.1 se concluye que $\sigma_k(a), \gamma_k(a) \in \text{int } d_kA^k$.

La función σ_k es muy útil para el objetivo de esta sección, esto se sustenta con la siguiente proposición.

Proposición 3.2.4.
Sea $k \geq 2$, así para cada $a \in d_kA^k$ se tiene que $q'_k(a, 1) = q'_k(\sigma_k(a), 0)$ y $q'_k(a, 0) = q'_k(\gamma_k(a), 1)$.

Demostración: Sea $a = (0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in d_kA^k$ arbitrario y se considera $a_0 = 0$.
Entonces por la definición 3.2.4 se tiene que $\sigma_k(a) = (0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = x$ tal que $x_j = a_{j-1} + 1 - a_{k-1}$ para cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, por tanto como consecuencia de la definición 3.2.1 y la definición 3.2.2 se tiene que $q'_k(a, 1) = f_k(h_k(a, 1)) = f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1) = \{[x_1], \ldots, [x_{k-1}], [1]\}$, y de esta forma también se tiene que $q'_k(x, 0) = f_k(h_k(x, 0)) = f_k(0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = \{[0], [x_1], \ldots, [x_{k-1}]\}$, claramente se cumple que $\{[x_1], \ldots, [x_{k-1}], [1]\} = \{[0], [x_1], \ldots, [x_{k-1}]\}$ y por tanto se tiene el resultado.
Ahora, si se toma $\gamma_k(a) = y$, por lo probado anteriormente, $q'_k(y, 1) = q'_k(\sigma_k(y), 0)$ y por la observación 3.2.2, $\sigma_k(y) = \sigma_k(\gamma_k(a)) = a$, esto concluye el resultado. ∎

Con la proposición anterior es posible describir como son las identificaciones del cociente q'_k en los espacios $\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{0\}$ y $\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{1\}$, lo cual se describirá en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1.
Para $k \geq 2$, si $a \in \text{int } d_kA^k$ entonces $\overline{(a, 1)} = \{(a, 1), (\sigma_k(a), 0)\}$ y $\overline{(a, 0)} = \{(a, 0), (\gamma_k(a), 1)\}$.

Demostración: Ya sea que $x \in \left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{1\}$ o que $x \in \left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{0\}$, por el lema 3.2.1 se tiene que $\overline{x} \subseteq \left(\text{int } d_kA^k\right) \times I$ y dado que por la proposición 3.2.2 se tiene que $\overline{x} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times (0, 1)\right) = \emptyset$, de aquí que $\overline{x} \subseteq \left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{0, 1\}$ y por tanto $\overline{x} = \left(\overline{x} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{0\}\right)\right) \cup \left(\overline{x} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{1\}\right)\right)$.
Ahora, si $a \in \text{int } d_kA^k$ entonces por la proposición 3.2.4 se tiene que $\overline{(a, 1)} = \overline{(\sigma_k(a), 0)}$ y se tiene que $\overline{(a, 0)} = \overline{(\gamma_k(a), 1)}$, además por la proposición 3.2.3 se tiene que $\overline{(\gamma_k(a), 1)} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{1\}\right) = \{(\gamma_k(a), 1)\}$, $\overline{(\sigma_k(a), 0)} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{0\}\right) = \{(\sigma_k(a), 0)\}$ y $\overline{(a, r)} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{r\}\right) = \{(a, r)\}$ para $r \in \{0, 1\}$, se concluye que $\overline{(a, 1)} = \left(\overline{(\sigma_k(a), 0)} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{0\}\right)\right) \cup \left(\overline{(a, 1)} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{1\}\right)\right) = \{(a, 1), (\sigma_k(a), 0)\}$ y que $\overline{(a, 0)} = \left(\overline{(a, 0)} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{0\}\right)\right) \cup \left(\overline{(\gamma_k(a), 1)} \cap \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{1\}\right)\right) = \{(a, 0), (\gamma_k(a), 1)\}$. ∎

Como último paso para ya construir una homotopía que se comporte bien bajo el cociente q'_k, se da la siguiente proposición, esta es una propiedad de la función σ_k, la cual será útil para resultados posteriores.

Proposición 3.2.5.
Para cada $k \geq 2$, cualquier $n \in \{2, \ldots, k\}$ y para cualesquiera $[x_0, \ldots, x_{n-1}]$, $[y_0, \ldots, y_{n-1}]$, $[z_0, \ldots, z_{n-1}]$ $(n-1)$-símplex tales que $\sigma_k(x_i) = y_i$ y $\gamma_k(x_i) = z_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, se satisface que si $x = \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i \in [x_0, \ldots, x_{n-1}]$ entonces $\sigma_k(x) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i y_i$ y $\gamma_k(x) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i z_i$.

Demostración: Si $x_i = (0, x_i^1, \ldots, x_i^{k-1})$, $y_i = (0, y_i^1, \ldots, y_i^{k-1})$ tales que para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\sigma_k(x_i) = y_i$, entonces $y_i^j = x_i^{j-1} + 1 - x_i^{k-1}$ con $x_i^0 = 0$ para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Tomando ahora $x = \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i$ arbitrario, así se tiene que $x = \left(0, \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i^1, \ldots, \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i^{k-1}\right)$, por la definición 3.2.4, $\sigma_k(x) = (0, v_1, \ldots, v_{k-1})$ donde $v_j = \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i^{j-1} + 1 - \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i^{k-1}$ con $x_i^0 = 0$ para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y para cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$,
Dado que $\sum_{i=0}^{n-1} t_i = 1$ entonces $v_j = \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i^{j-1} + \sum_{i=0}^{n-1} t_i - \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} t_i (x_i^{j-1} + 1 - x_i^{k-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i y_i^j$, y por tanto se concluye que $\sigma_k(x) = (0, v_1, \ldots, v_{k-1}) = \left(0, \sum_{i=0}^{n-1} t_i y_i^1, \ldots, \sum_{i=0}^{n-1} t_i y_i^{k-1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i y_i$.
Ahora, por la observación 3.2.2 se tiene que $x_i = \sigma_k(\gamma_k(x_i)) = \sigma_k(z_i)$ para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, así para $z = \sum_{i=0}^{n-1} t_i z_i$, por lo que se probó anteriormente se cumple que $\sigma_k(z) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i = x$ y de nuevo por la observación 3.2.2, $\gamma_k(x) = \gamma_k(\sigma_k(z)) = z = \sum_{i=0}^{n-1} t_i z_i$. ■

Retomando ahora la homotopía H^3, usando la misma notación que en la proposición 3.2.2 se define la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} \widehat{H}^3: & q_3'\left(\left(\text{int } d_3A^3\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & q_3'\left(\left(\text{int } d_3A^3\right) \times I\right) \\ & (\overline{x}, s) & \longmapsto & q_3'\left(H^3(x, s)\right). \end{array}$$

Es fácil ver que si $\overline{x} \in q_3'\left(\left(\text{int } d_3A^3\right) \times (0,1)\right)$ entonces $\widehat{H}^3$ está bien definida por la proposición 3.2.2.
Ahora bien, dado que $h^3(a,s) \in \text{int } d_3A^3$ para cada $s \in I$, entonces por el corolario 3.2.1 se puede observar que $\overline{(h^3(a,s),1)} = \left\{(h^3(a,s),1), (\sigma_3(h^3(a,s)),0)\right\}$ y $\overline{(h^3(a,s),0)} = \left\{(h^3(a,s),0), (\gamma_3(h^3(a,s)),1)\right\}$, y por la proposición 3.2.5 se tiene que $\sigma_3(h^3(a,s)) = h^3(\sigma_3(a),s)$ y $\gamma_3(h^3(a,s)) = h^3(\gamma_3(a),s)$.
Si $\overline{x} \in q_3'\left(\left(\text{int } d_3A^3\right) \times \{0\}\right)$ al considerar $x = (a,0)$ se tiene que $q_3'\left(h^3(a,s),0\right) = q_3'\left(h^3(\gamma_3(a),s),1\right)$ y si $\overline{x} \in q_3'\left(\left(\text{int } d_3A^3\right) \times \{1\}\right)$ al considerar $x = (a,1)$ se tiene que $q_3'\left(h^3(a,s),1\right) = q_3'\left(h^3(\sigma_3(a),s),0\right)$.
De esta forma se tiene que $\widehat{H}^3$ está bien definida en todos los casos y además, es fácil observar que es continua.

Continuando con el retracto por deformación para $F_3(I/\{0,1\}) - F_2(I/\{0,1\})$, dado que $\{b_3\} \times I$ es un retracto por deformación de $\left(\text{int } d_kA^k\right) \times I$ por la homotopía H^3, entonces por como se definió $\widehat{H}^3$ se tiene que $q_3'\left(\{b_3\} \times I\right)$ es un retracto por deformación de $q_3'\left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times I\right)$.

Se quiere probar que $q_3'(\{b_3\} \times I)$ es la imagen de un lazo basado en un punto, y además ese punto tiene una correspondencia biyectiva a las raíces complejas de x^3+1, por tanto primero se da la siguiente notación.

Notación 3.2.2.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, se denota a $r_k := \left\{\left[\frac{s}{k}\right] : s \in \{0, \ldots, k-1\}\right\} \in F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$ como el conjunto de isomorfismos de todas las raíces complejas del polinomio $x^k - 1$.

Esta notación tiene sentido ya que cada elemento en r_k, por el isomorfismo $I/\{0,1\} \cong S^1$, es isomorfo a una raíz compleja, de aquí se da el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2.
Para cualquier $k \geq 2$, $q_k'(b_k, 0) = q_k'(b_k, 1)$ y con esto $q_k'(\{b_k\} \times I)$ es la imagen de un lazo basado en r_k.

Demostración: Dado que $\sigma_k(b_k) = b_k$, por la proposición 3.2.4 se tiene que $q_k'(b_k, 0) = q_k'(b_k, 1)$.
Es fácil ver que $q_k'(b_k, 0) = r_k = q_k'(b_k, 1)$, y como por la proposición 3.2.2 se tiene que $\overline{(b_k, t)} = \{(b_k, t)\}$ si $t \in (0,1)$, entonces se concluye que $q_k'(\{b_k\} \times I)$ es la imagen de un lazo basado en r_k. ■

Teniendo en cuenta lo anterior, tiene sentido dar la siguiente definición.

Definición 3.2.5.
Para cada $k \geq 2$, se define la biyección dada por

$$\begin{array}{rccc} \alpha_k : & I & \longrightarrow & q'_k\left(\{b_k\} \times I\right) \\ & t & \longmapsto & q'_k(b_k, t). \end{array}$$

Al a cual se le llamará el LAZO BASADO EN LAS RAÍCES COMPLEJAS DE $x^k - 1 = 0$.

Tomando en cuenta la definición anterior se concluye que $\alpha_3(I)$ es un retracto por deformación de $q'_3\left(\left(\text{int } d_3A^3\right) \times I\right) = F_3(I/\{0,1\}) - F_2(I/\{0,1\})$.

El retracto por deformación anterior se puede generalizar para cualquier $k \geq 2$ haciendo un procedimiento analogo al caso $k = 2$, y dado que un retracto por deformación determina una equivalencia homotópica, con esto se puede calcular el grupo fundamental del espacio $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$.

Se probará lo que se ha mencionado anteriormente con el siguiente lema.

Lema 3.2.2.
Para cada $k \geq 2$, $\pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}), r_k\right) = \langle[\alpha_k]\rangle$.

Demostración: Sea $k \geq 2$, como la cara d_kA^k es un espacio convexo, se tiene un retracto por deformación determinado por la siguiente homotopía.

$$\begin{array}{rccc} h^k : & \left(\text{int } d_kA^k\right) \times I & \longrightarrow & \text{int } d_kA^k \\ & (0, a_1, \ldots, a_{k-1}, t) & \longmapsto & (0, a_1, \ldots, a_{k-1})(1-t) + tb_k. \end{array}$$

Esta homotopía se puede extender al espacio $d_kA^k \times I$ como sigue.

$$\begin{array}{rccc} H^k : & \left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & \left(\text{int } d_kA^k\right) \times I \\ & (0, a_1, \ldots, a_{k-1}, t, s) & \longmapsto & \left(h^k(0, a_1, \ldots, a_{k-1}, s), t\right). \end{array}$$

A su vez, considerando la notación 3.2.1, con la homotopía H^k se define la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} \widehat{H}^k : & q'_k\left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & q'_k\left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times I\right) \\ & (\overline{x}, s) & \longmapsto & q'_k\left(H^k(x, s)\right). \end{array}$$

Si $\overline{x} \in q'_k\left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times (0,1)\right)$ entonces $\widehat{H}^k$ está bien definida por la proposición 3.2.2.
Ahora bien, dado que $h^k(a,s) \in \text{int } d_kA^k$ para cada $s \in I$, entonces por el corolario 3.2.1 se puede observar que $\overline{(h^k(a,s),1)} = \left\{(h^k(a,s),1), (\sigma_k(h^k(a,s)),0)\right\}$ y $\overline{(h^k(a,s),0)} = \left\{(h^k(a,s),0), (\gamma_k(h^k(a,s)),1)\right\}$, y por la proposición 3.2.5 se tiene que $\sigma_k(h^k(a,s)) = h^k(\sigma_k(a),s)$ y $\gamma_k(h^k(a,s)) = h^k(\gamma_k(a),s)$.
Si $\overline{x} \in q'_k\left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{0\}\right)$ al considerar $x = (a,0)$ se tiene que $q'_k(h^k(a,s),0) = q'_k(h^k(\gamma_k(a),s),1)$ y si $\overline{x} \in q'_k\left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times \{1\}\right)$ al considerar $x = (a,1)$ se tiene que $q'_k(h^k(a,s),1) = q'_k(h^k(\sigma_k(a),s),0)$.
De está forma se tiene que $\widehat{H}^k$ está bien definida en todos los casos y además es continua.
Por tanto, ya que H^k da que $\{b_k\} \times I$ es un retracto por deformación de $\left(\text{int } d_kA^k\right) \times I$, entonces por como se define $\widehat{H}^k$, se observa que el conjunto $\alpha_k(I) = q'_k(\{b_k\} \times I)$ es un retracto por deformación de $q'_k\left(\left(\text{int } d_kA^k\right) \times I\right) = F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$. Por la proposición 1.2.3 se tiene que la inclusión natural $j : (\alpha_k(I), r_k) \hookrightarrow (F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}), r_k)$ es equivalencia homotópica y por la proposición 1.2.6, $j_{\#} : \pi_1\left(\alpha_k(I), r_k\right) \longrightarrow \pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}), r_k\right)$ es un isomorfismo.
De aquí que $\pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}), r_k\right) \cong \pi_1\left(\alpha_k(I), r_k\right) = \langle[\alpha_k]\rangle$ y por como se construye $j_{\#}$ según la definición 1.2.12 se tiene que $\pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}), r_k\right) = \langle[j \circ \alpha_k]\rangle = \langle[\alpha_k]\rangle$. ■

A continuación, se construirá otro conjunto con el cual ya será posible aplicar el teorema de Seifert-van Kampen, ya que estos conjuntos determinarán abiertos con los cuales se podrá aplicar dicho teorema.

Para lograr esto, se empezará dando la siguiente definición.

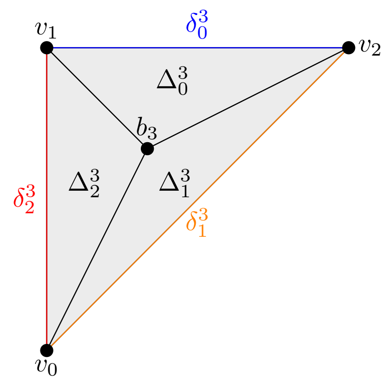
Definición 3.2.6.
Para cada $k \geq 2$ y considerando $d_k A^k = [v_0, \ldots, v_{k-1}, \widehat{v_k}]$, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ se definen

$$\Delta_i^k := [b_k, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}, v_0, \ldots, v_{i-1}, \widehat{v_k}],$$

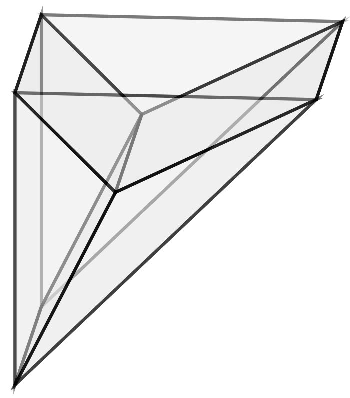
$$\delta_i^k := [\widehat{b_k}, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}, v_0, \ldots, v_{i-1}, \widehat{v_k}].$$

Con la definición anterior, es posible hacer una división para la cara $d_k A^k$ separando dicha cara en otros símplex que incluyan al punto b_k, estás separaciones servirá para definir los espacios abiertos que serán necesarios para poder aplicar el teorema 1.2.3.

Por ejemplo, para $k = 3$ la cara $d_3 A^3$ se puede dividir como sigue.



Tomando en cuenta la figura anterior, se puede dividir el espacio $d_3 A^3 \times I$ como sigue.



Considerando la división anterior se define un espacio particular que será de gran importancia para el objetivo de esta sección.

Definición 3.2.7.
Para cada $k \geq 3$, se define a N_k como el conjunto dado por $q_k' \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} \left(\text{int } \Delta_i^k \cup \delta_i^k\right) \times I \right)$.

La importancia del espacio definido anteriormente radica en que el espacio $F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$ es un retracto por deformación de N_k, esto es posible pues δ_i^k es retracto por deformación de Δ_i^k para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ y con esto se tendrá un isomorfismo entre sus grupos fundamentales.

Para lograr esto, como primer paso será útil conocer como actúa el cociente q_k' en $\left(\text{int } \Delta_i^k \cup \delta_i^k\right) \times I$, por tanto, se empieza dando el siguiente corolario.

Corolario 3.2.3.
Para $k \geq 2$, si $x \in \Delta_0^k$ entonces $\sigma_k(x) \in \Delta_{k-1}^k$ y si $x \in \Delta_i^k$ entonces $\sigma_k(x) \in \Delta_{i-1}^k$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Demostración: Es fácil ver que $\sigma_k(v_0) = v_{k-1}$ y que $\sigma_k(v_i) = v_{i-1}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Además por el corolario 3.2.2 se tiene que $\sigma_k(b_k) = b_k$, y como por la proposición 3.2.5 se satisface que si $x \in \Delta_0^k = [b_k, v_1, \ldots, v_{k-1}, \widehat{v_k}]$, entonces $\sigma_k(x) \in [b_k, v_0, \ldots, v_{k-2}, \widehat{v_k}] = \Delta_{k-1}^k$ y para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, si $x \in \Delta_i^k = [b_k, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}, v_0, \ldots, v_{i-1}\widehat{v_k}]$ entonces $\sigma_k(x) \in [b_k, v_i, \ldots, v_{k-1}, v_0, \ldots, v_{i-2}, \widehat{v_k}] = \Delta_{i-1}^k$. ■

Con este resultado, se puede dar la siguiente observación.

Observación 3.2.4.
Denotando $\sigma_k := \sigma$ cuando $k \geq 2$ esté implícito, por el corolario 3.2.3 es fácil observar que si $x \in \Delta_{k-1}^k$ entonces $\sigma^j(x) \in \Delta_{k-1-j}^k$ para cada $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ y por la prueba de la proposición 3.2.5 también se tiene que $\sigma^k(x) = x$.

Con los resultados anteriores, se puede probar que $q_k'\left(\bigcup_{i=0}^{k-1} \text{int } \delta_i^k\right)$ es un retracto por deformación de N_k tal como se verá más adelante, ahora bien, para probar que N_k y $F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$ tienen grupos fundamentales isomorfos, es importante analizar como son las identificaciones en el cociente q_k' del espacio $\bigcup_{i=0}^{k-1} \left(\text{int } \delta_i^k\right) \times I$, para ello se dan los siguientes resultados.

Lema 3.2.3.
Para $k \geq 3$, $F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}) = q_k'\left(\left(\text{int } \delta_i^k\right) \times I\right)$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Demostración: Sean $k \geq 3$ arbitrario y $\{b_1, \ldots, b_l\} \in q_k'\left(\left(\text{int } \delta_i^k\right) \times I\right)$, por definición de imagen de una función existe $(0, c_1, \ldots, c_{k-1}, t) \in \left(\text{int } \delta_i^k\right) \times I$ tal que $q_k'(0, c_1, \ldots, c_{k-1}, t) = \{b_1, \ldots, b_l\}$, de aquí se tiene que $(0, c_1, \ldots, c_{k-1}) \in \text{int } \delta_i^k$ y dado que se considera $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, se tienen dos casos:

- Si $i \in \{1, \ldots, k-2\}$, como es fácil ver que $\delta_i^k = [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{k-1}, \widehat{v_k}]$ entonces $c_{k-1-i} = c_{k-i}$, y dado que $(0, c_1, \ldots, c_{k-1})$ está dentro del interior de un símplex, por la prueba del lema 3.2.1 se tiene que $0 < c_1 < \ldots < c_{k-1-i} = c_{k-i} < \ldots < c_{k-1} < 1$, por lo que para $q_k'(0, c_1, \ldots, c_{k-1}, t) = \{[x_1], \ldots, [x_k]\}$, donde $x_1 = (1 - c_{k-1})t$ y $x_j = c_{j-1} + (1 - c_{k-1})t$ para $j \in \{2, \ldots, k\}$, se tendrá que se cumplirá que $0 < x_1 < \ldots < x_{k-i} = x_{k-i+1} < \ldots < x_k < 1$, así $[x_{k-i}] = [x_{k-i+1}]$ y para $j, r \in \{1, \ldots, k\} - \{k-i\}$ se tiene que $[x_j] \neq [x_r]$ si $j \neq r$, concluyendo que $\{b_1, \ldots, b_l\} = q_k'(0, c_1, \ldots, c_{k-1}, t) = \{[x_1], \ldots, [x_k]\}$.
- Si $i = k-1$, como es fácil ver que $\delta_{k-1}^k = [v_0, v_1, \ldots, v_{k-2}, \widehat{v_{k-1}}, \widehat{v_k}]$ entonces $c_1 = 0$, y dado que $(0, c_1, \ldots, c_{k-1})$ está dentro del interior de un símplex, tal como se vio en la prueba del lema 3.2.1 se tiene que $0 = c_1 < c_2 < \ldots < c_{k-1} < 1$, por lo que para $q_k'(0, c_1, \ldots, c_{k-1}, t) = \{[x_1], \ldots, [x_k]\}$, donde $x_1 = (1 - c_{k-1})t$ y $x_j = c_{j-1} + (1 - c_{k-1})t$ para $j \in \{2, \ldots, k\}$, se tendrá que se cumplirá que $0 < x_1 = x_2 < \ldots < x_k < 1$, así entonces $[x_1] = [x_2]$ y para cada $j, r \in \{2, \ldots, k\}$ se tiene que $[x_j] \neq [x_r]$ si $j \neq r$, concluyendo que $\{b_1, \ldots, b_l\} = q_k'(0, c_1, \ldots, c_{k-1}, t) = \{[x_1], \ldots, [x_k]\}$.

En los dos casos anteriores se tiene que $\{b_1, \ldots, b_l\} = \{[x_1], \ldots, [x_k]\} \in F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$, concluyendo así que $q_k'\left(\left(\text{int } \delta_i^k\right) \times I\right) \subseteq F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$
Ahora, si $\{[b_1], \ldots, [b_l]\} \in F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$, entonces $l = k-1$ y $[b_i] \neq [b_j]$ si $i \neq j$, así por como se define la relación de equivalencia en $I/\{0,1\}$ se puede considerar $[b_r] = b_r$ para cada $r \in \{1, \ldots, k-1\}$, por tanto, como $\{b_1, \ldots, b_l\} = \{b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(k-1)}\}$ con $\sigma : \{1, \ldots, k-1\} \longrightarrow \{1, \ldots, k-1\}$ alguna permutación que cumple que $b_{\sigma(1)} < \ldots < b_{\sigma(k-1)}$, se consideran los siguientes casos:

- Si $i \in \{1, \ldots, k-2\}$, se da $(c_0, \ldots, c_{k-1}, t) \in d_k A^k \times I$ con $c_j = b_{\sigma(j+1)} - b_{\sigma(1)}$ si $j \in \{0, \ldots, k-1-i\}$, $c_j = b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(1)}$ si $j \in \{k-i, \ldots, k-1\}$ y $t = \dfrac{b_{\sigma(1)}}{1 - b_{\sigma(k-1)} + b_{\sigma(1)}}$, se tiene $0 < c_1 < \ldots < c_{k-2} < 1$ con $c_{k-1-i} = c_{k-i}$, por tanto $(c_0, \ldots, c_{k-1}, t) \in \left(\text{int } \delta_i^k\right) \times I$ y por la definición 3.2.2 se cumple que $q_k'(c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, t) = \{b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(k-1)}\} = \{b_1, \ldots, b_l\}$, por tanto $\{[b_1], \ldots, [b_l]\} \in q_k'\left(\left(\text{int } \delta_i^k\right) \times I\right)$.
- Si $i = k-1$, se define $(0, 0, c_1, \ldots, c_{k-2}, t) \in d_k A^k \times I$ donde $c_j = b_{\sigma(j+1)} - b_{\sigma(1)}$ para $i \in \{1, \ldots, k-2\}$ y $t = \dfrac{b_{\sigma(1)}}{1 - b_{\sigma(k-1)} + b_{\sigma(1)}}$, se nota que $0 < c_1 < \ldots < c_{k-2} < 1$ y así $(0, 0, c_1, \ldots, c_{k-2}, t) \in \left(\text{int } \delta_{k-1}^k\right) \times I$.

Además por la definición 3.2.2 se tiene que $q'_k(0,0,c_1,\ldots,c_{k-2},t)=\{b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(k-1)}\}=\{b_1,\ldots,b_l\}$, por lo tanto $\{[b_1],\ldots,[b_l]\}\in q'_k\left(\left(\text{int }\delta^k_{k-1}\right)\times I\right)$.

De lo anterior se concluye que $F_{k-1}(I/\{0,1\})-F_{k-2}(I/\{0,1\})\subseteq q'_k\left(\left(\text{int }\delta^k_i\right)\times I\right)$. ■

Para el conjunto $\delta^k_0\times I$ se tiene una caracterización especial dada por el siguiente lema.

Lema 3.2.4.
Para cada $k\geq 3$ y cada $t\in I$, se cumple que $q'_k\left(\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times\{t\}\right)=C_k\subsetneq F_{k-1}(I/\{0,1\})-F_{k-2}(I/\{0,1\})$ donde C_k es el conjunto

$$\{\{x_1,\ldots,x_{k-1}\}\in F_{k-1}(I/\{0,1\})-F_{k-2}(I/\{0,1\}):\text{existe un único } r\in\{1,\ldots,k-1\} \text{ tal que } x_r=[0]\}.$$

Demostración: Sean $k\geq 3$, $t\in I$ arbitrarios y sea $\{b_1,\ldots,b_l\}\in q'_k\left(\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times\{t\}\right)$, por definición de imagen de una función existe $(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t)\in\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times\{t\}$ tal que $q'_k(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t)=\{b_1,\ldots,b_l\}$.
Como $(0,c_1,\ldots,c_{k-1})\in\text{int }\delta^k_i$ y dado que $\delta^k_0=[\widehat{v_0},v_1,\ldots,v_{k-1},\widehat{v_k}]$, entonces $c_{k-1}=1$, así pues, como $(0,c_1,\ldots,c_{k-1})$ está dentro del interior de un símplex, tal como se vio en la prueba del lema 3.2.1 se tiene que $0<c_1<\ldots<c_{k-2}<c_{k-1}=1$, por lo que para $q'_k(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t)=\{[x_1],\ldots,[x_k]\}$, donde $x_1=(1-c_{k-1})t=0$ y $x_j=c_{j-1}+(1-c_{k-1})t=c_{j-1}$ para $j\in\{2,\ldots,k\}$, se tendrá que $0=x_1<\ldots<x_k=1$, así $[x_1]=[0]=[1]=[x_k]$ y para cada $j,r\in\{1,\ldots,k-1\}$ se tiene que $[x_j]\neq[x_r]$ si $j\neq r$, concluyendo que $\{b_1,\ldots,b_l\}=q'_k(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t)=\{[x_1],\ldots,[x_k]\}\in C_k$.
Ahora, si $\{[b_1],\ldots,[b_l]\}\in C_k$, entonces $l=k-1$, $[b_r]=[0]$ para algún $r\in\{1,\ldots,k-1\}$ y $[b_i]\neq[b_j]$ si $i\neq j$, así por como se define la relación de equivalencia en $I/\{0,1\}$ entonces $[b_s]=b_s$ para cada $s\in\{1,\ldots,k-1\}$, por tanto, como $\{b_1,\ldots,b_l\}=\{b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(k-1)}\}$ con $\sigma:\{1,\ldots,k-1\}\longrightarrow\{1,\ldots,k-1\}$ alguna permutación tal que $0=b_{\sigma(1)}<b_{\sigma(2)}<\ldots<b_{\sigma(k-1)}$, se define $(0,c_1,\ldots,c_{k-2},1,t)\in d_kA^k\times\{t\}$ donde $c_j=b_{\sigma(j+1)}$ para $j\in\{1,\ldots,k-2\}$ y $t\in I$ es arbitrario, así $0<c_1<\ldots<c_{k-2}<1$ y por tanto $(0,c_1,\ldots,c_{k-2},1,t)\in\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times I$, además, dado que por la definición 3.2.2 se satisface que $q'_k(0,c_1,\ldots,c_{k-2},1,t)=\{b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(k-1)}\}=\{b_1,\ldots,b_l\}$, por tanto $\{[b_1],\ldots,[b_l]\}\in q'_k\left(\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times\{t\}\right)$. ■

Ya que se tiene como son las identificaciones en el cociente q'_k, se quisiera analizar como son las clases de equivalencia de los elementos dentro de los espacios δ^k_i, para ello se da la siguiente observación.

Observación 3.2.5.
Recordando que cada $(0,a_1,\ldots,a_{k-1})\in\text{int }\delta^k_i$ cumple que $0<a_1<\ldots<a_{k-1-i}=a_{k-i}<\ldots<a_{k-1}<1$ si $i\in\{1,\ldots,k-2\}$, que $0=a_1<\ldots<a_{k-1}<1$ si $i=k-1$ y que $0<a_1<\ldots<a_{k-1}=1$ si $i=0$ entonces:

- Para cualquier $i\in\{1,\ldots,k-1\}$, si $x\in\left(\text{int }\delta^k_i\right)\times(0,1)$, siguiendo la prueba de la proposición 3.2.2 se tiene que $\overline{x}\cap(\delta^k_i\times(0,1))=\{x\}$.
- Para cualquier $i\in\{0,\ldots,k-1\}$ y cualquier $t\in I$, si $x\in\left(\text{int }\delta^k_i\right)\times\{t\}$, siguiendo la prueba de la proposición 3.2.3 se tiene que $\overline{x}\cap(\delta^k_i\times\{t\})=\{x\}$.
- De la prueba del corolario 3.2.4 se tiene que para cualquier $t\in I$, si $(0,c_1,\ldots,c_{k-1})\in\text{int }\delta^k_0$ entonces $q'_k(0,c_1,\ldots,c_{k-1},t)=\{[x_1],\ldots,[x_k]\}$ donde $x_j=c_{j-1}$ para cada $j\in\{1,\ldots,k\}$ y $c_0=0$, y de aquí se deduce que si $b\in\text{int }\delta^k_0$ entonces $\overline{(b,t)}\cap\left(\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times I\right)=\{b\}\times I$.

Con la observación anterior, es fácil obtener un cálculo rápido del grupo fundamental de C_k, el cual se expondrá en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.4.
Para cualquier $k\geq 3$ se tiene que $\pi_1(C_k)=0$.

Demostración: Para cualquier punto $x\in\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times\{t\}$, se cumple que $\{x\}$ es un retracto por deformación de $\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times\{t\}$. Se le llama H a la homotopía que induce el retracto por deformación anterior.
Se define la siguiente función.

$$\begin{array}{rccc}\widehat{H}: & q'_k\left(\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times\{t\}\right)\times I & \longrightarrow & q'_k\left(\left(\text{int }\delta^k_0\right)\times\{t\}\right)\\ & (\overline{x},s) & \longmapsto & q'_k\left(H(x,s)\right).\end{array}$$

Por la observación 3.2.5, se tiene que $\widehat{H}$ está bien definida, es continua y además $\{q'_k(x)\}$ es un retracto por deformación de $q'_k\left(\left(\text{int } \delta_0^k\right) \times \{t\}\right) = C_k$, es decir, C_k tiene el tipo de homotopía de un punto y por tanto $\pi_1(C_k) = 0$. ■

Para finalizar con el análisis de las identificaciones en $\left(\text{int } \Delta_i^k \cup \delta_i^k\right) \times I$, se da la siguiente observación.

Observación 3.2.6.
De la proposición 3.2.2, el corolario 3.2.1 y la observación 3.2.4, si $x \in \left(\text{int } \Delta_i^k\right) \times I$ entonces $\overline{x} \cap (\Delta_i^k \times I) = \{x\}$ para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Con los resultados anteriores y usando la función σ de la definición 3.2.4, es posible probar que el espacio $F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$ es un retracto por deformación de N_k, lo cual se cumple para cada $k \geq 3$. Se probará esto a continuación y además que dicho retracto mencionado anteriormente implica un isomorfismo entre sus grupos fundamentales.

Proposición 3.2.6.
Para $k \geq 3$, $\pi_1\left(F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}), r_{k-1}\right) \cong \pi_1\left(N_k, r_{k-1}\right)$.

Demostración: Sea $k \geq 3$ y se define la homotopía dada por

$$\begin{array}{rccc} h^k: & \left(\text{int } \Delta_{k-1}^k \cup \delta_{k-1}^k\right) \times I & \longrightarrow & \text{int } \Delta_{k-1}^k \cup \delta_{k-1}^k \\ & \left(t_0 b_k + \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} t_j v_{j-1}, s\right) & \longmapsto & (1-s)t_0 b_k + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\left(t_j + s\frac{t_0}{k-1}\right) v_{j-1}. \end{array}$$

Ahora, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, por la observación 3.2.4 para cualquier $a \in \text{int}\Delta_{k-1}^k \cup \delta_{k-1}^k$ se cumple que $\sigma^i(a) \in \text{int}\Delta_{k-1-i}^k \cup \delta_{k-1-i}^k$ y para cualquier $a \in \text{int}\Delta_{k-1-i}^k \cup \delta_{k-1-i}^k$ se tiene que $\sigma^{k-i}(a) \in \text{int}\Delta_{k-1}^k \cup \delta_{k-1}^k$. Para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ tiene sentido definir las siguientes homotopías como sigue,

$$\begin{array}{rccc} h_i^k: & \left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k \cup \delta_{k-1-i}^k\right) \times I & \longrightarrow & \text{int } \Delta_{k-1-i}^k \cup \delta_{k-1-i}^k \\ & (a, s) & \longmapsto & \sigma^i\left(h^k\left(\sigma^{k-i}(a), s\right)\right). \end{array}$$

Las funciones anteriores están bien definida, es continua y además con esto se tiene que int δ_i^k es un retracto por deformación de int $\Delta_i^k \cup \delta_i^k$, lo cual se cumple para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.
De aquí, es posible extender las homotopías anteriores como sigue,

$$\begin{array}{rccc} H_i^k: & \left(\left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k \cup \delta_{k-1-i}^k\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & (\text{int } \Delta_{k-1-i}^k \cup \delta_{k-1-i}^k) \times I \\ & (a, t, s) & \longmapsto & (h_i^k(a, s), t). \end{array}$$

Con esto se tiene que $\left(\text{int } \delta_{k-1-i}^k\right) \times I$ es un retracto por deformación de $\left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k \cup \delta_{k-1-i}^k\right) \times I$, por tanto, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ se define una homotopía en el cociente q'_k de la siguiente forma,

$$\begin{array}{rccc} \widehat{H}_i^k: & q'_k\left(\left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k \cup \delta_{k-1-i}^k\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & q'_k\left(\left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k \cup \delta_{k-1-i}^k\right) \times I\right) \\ & \left(\overline{(a, t)}, s\right) & \longmapsto & q'_k(H_i^k(a, t, s)). \end{array}$$

Por la observación 3.2.6, se observa que las funciones anteriores están bien definidas, por tanto, se da una homotopía general construida a base de las homotopías $\widehat{H}_i^k$ la cual está dada por,

$$\begin{array}{rccc} \widehat{H}^k: & \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1} q'_k\left(\left(\text{int } \Delta_i^k \cup \delta_i^k\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1} q'_k\left(\left(\text{int } \Delta_i^k \cup \delta_i^k\right) \times I\right) \\ & \left(\overline{(a, t)}, s\right) & \longmapsto & \widehat{H}_j^k\left(\overline{(a, t)}, s\right) \quad \text{si } a \in \text{int } \Delta_{k-1-j}^k \cup \delta_{k-1-j}^k. \end{array}$$

Se observa que la función anterior está bien definida y es continua, pues, por como se definieron las homotopías h_i^k y la proposición 3.2.4 es posible ver que $\widehat{H}^k|_{q'_k\left(\left(\text{int } \Delta_{k-1-j}^k \cup \delta_{k-1-j}^k\right) \times \{0\}\right) \times I} = \widehat{H}^k|_{q'_k\left(\left(\text{int } \Delta_{k-j}^k \cup \delta_{k-j}^k\right) \times \{1\}\right) \times I}$ para cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ y $\widehat{H}^k|_{q'_k\left(\left(\text{int } \Delta_{k-1}^k \cup \delta_{k-1}^k\right) \times \{0\}\right) \times I} = \widehat{H}^k|_{q'_k\left(\left(\text{int } \Delta_0^k \cup \delta_0^k\right) \times \{1\}\right) \times I}$.

Además, como $N_k = q'_k\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\Delta_i^k \cup \delta_i^k\right)\times I\right) = \bigcup_{i=0}^{k-1} q'_k\left(\left(\text{int }\Delta_i^k \cup \delta_i^k\right)\times I\right)$, entonces con la homotopía $\widehat{H}^k$ es fácil observar que $q'_k\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\delta_i^k\right)\times I\right) = \bigcup_{i=0}^{k-1} q'_k\left(\left(\text{int }\delta_i^k\right)\times I\right)$ es retracto por deformación de N_k.
Ahora bien, por el lema 3.2.3 se satisface que $F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}) = q'_k\left(\left(\text{int }\delta_i^k\right)\times I\right)$ para cada $i \in \{1,\ldots,k-1\}$ y por el lema 3.2.4, $q'_k\left(\left(\text{int }\delta_0^k\right)\times I\right) = \bigcup_{t\in I} q'_k\left(\left(\text{int }\delta_0^k\right)\times\{t\}\right) = \bigcup_{t\in I} C_k = C_k$ donde $C_k \subsetneq F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$, por tanto, $\bigcup_{i=0}^{k-1} q'_k\left(\left(\text{int }\delta_i^k\right)\times I\right) = F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$ es retracto por deformación de N_k.
Por la proposición 1.2.3, $j : (F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}), r_{k-1}) \hookrightarrow (N_k, r_{k-1})$ es equivalencia homotópica y por la proposición 1.2.6, $j_\# : \pi_1\left(F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}), r_{k-1}\right) \longrightarrow \pi_1\left(N_k, r_{k-1}\right)$ es un isomorfismo. ■

Algo importante que notar del espacio N_k es que es un conjunto abierto, su unión con el espacio $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$ dá el espacio $F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$ y su intersección con el mismo espacio $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$ es arcoconexa, por lo que se cumplen todas las hipótesis necesarias para usar el teorema de Seifert-van Kampen, así se probará lo que ya se ha mencionado anteriormente.

Proposición 3.2.7.
Para $k \geq 3$, $(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})) \cup N_k = F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$.

Demostración: Como $\left(\left(\text{int }d_kA^k\right)\times I\right)\cup\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\Delta_i^k\cup\delta_i^k\right)\times I\right) = \left(\left(\text{int }d_kA^k\right)\times I\right)\cup\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\delta_i^k\right)\times I\right)$ entonces $q'_k\left(\left(\text{int }d_kA^k\right)\times I\right)\cup q'_k\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\Delta_i^k\cup\delta_i^k\right)\times I\right) = q'_k\left(\left(\text{int }d_kA^k\right)\times I\right)\cup q'_k\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\delta_i^k\right)\times I\right)$, por tanto, del lema 3.2.1 se tiene que $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}) = q'_k\left(\left(\text{int }d_kA^k\right)\times I\right)$ y por la prueba de la proposición 3.2.6, entonces $q'_k\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\delta_i^k\right)\times I\right) = F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$, se concluye que $(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}))\cup N_k = (F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}))\cup(F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}))$.
Por lo tanto $(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}))\cup N_k = F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$. ■

Se define a continuación otro conjunto particular que también será importante en resultados posteriores.

Definición 3.2.8.
Para cada $k \geq$, se define a N'_k como el conjunto dado por $q'_k\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\text{int }\Delta_i^k\times I\right)$.

La importancia del conjunto anterior se puede observar fácilmente con la siguiente proposición.

Proposición 3.2.8.
Para $k \geq 3$, $(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}))\cap N_k = N'_k$ y además N'_k es arcoconexo.

Demostración: Se observa que $\left(\left(\text{int }d_kA^k\right)\times I\right)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\Delta_i^k\cup\delta_i^k\right)\times I\right) = \bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\delta_i^k\right)\times I$, así entonces $q'_k\left(\left(\left(\text{int }d_kA^k\right)\times I\right)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\Delta_i^k\cup\delta_i^k\right)\times I\right)\right) = q'_k\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\delta_i^k\right)\times I\right)$, por tanto, al considerar el lema 3.2.1, a la definición 3.2.7 y a la definición 3.2.8, se satisface la siguiente igualdad de conjuntos $(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}))\cap N_k = q'_k\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\Delta_i^k\right)\times I\right)$.

Como para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ se cumple que $\left(\text{int } \Delta_i^k\right) \times I$ es arcoconexo, por el corolario 3.2.3 y la proposición 3.2.5, $q_k'(\Delta_{k-1}^k \times \{0\}) = q_k'(\Delta_0^k \times \{1\})$ y $q_k'(\Delta_{j-1}^k \times \{0\}) = q_k'(\Delta_j^k \times \{1\})$ para cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ y como $q_k'\left(\bigcup_{i=0}^{k-1} \left(\text{int } \Delta_i^k\right) \times I\right) \subseteq q_k'\left(\left(\text{int } d_k A^k\right) \times I\right) = F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$, entonces N_k' es arcoconexo. ■

Teniendo esto en cuenta, como el objetivo de esta sección es aplicar el teorema de Seifert-van Kampen al espacio $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$, se quisiera obtener información sobre el grupo fundamental de N_k' y resulta que N_k' tiene el mismo tipo de homotopía del círculo S^1.

Como primer paso, para probar lo que se mencionó, se da la siguiente definición.

Definición 3.2.9.
Sea $k \geq 3$ y considerando $x \in \text{int } \Delta_{k-1}^k$, entonces para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ se define la biyección

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_i : & I & \longrightarrow & q_k'\left(\{\sigma^i(x)\} \times I\right) \\ & t & \longmapsto & q_k'(\sigma^i(x), t). \end{array}$$

Por la observación 3.2.4 y por como se definen los caminos ε_i, la concatenación $\varepsilon_0 * \cdots * \varepsilon_{k-1}$ tiene sentido, además este es un lazo basado en $q_k'(x, 0)$, por tanto es posible dar la siguiente definición.

Definición 3.2.10.
Sea $k \geq 3$ y considerando $\overline{x} \in N_k'$ tal que $\overline{x} = \{(x,0), (\sigma^{k-1}(x), 1)\}$ para algún $x \in \text{int } \Delta_{k-1}^k$, se define $\varepsilon_k := \varepsilon_0 * \cdots * \varepsilon_{k-1}$ como el lazo basado en $\overline{x}$.

Observación 3.2.7.
Dado que la función σ^{k-1} cumple que $\sigma^{k-1}(\sigma(x)) = \sigma^k(x) = x$ y $\sigma(\sigma^{k-1}(x)) = \sigma^k(x) = x$ entonces por la observación 3.2.2, $\sigma^{k-1} = \gamma$ y de esta forma tiene sentido considerar a $\overline{x} = \{(x,0), (\sigma^{k-1}(x), 1)\}$ si $x \in \text{int } \Delta_{k-1}^k$.

Considerando el lazo de la definición 3.2.10 y realizando una prueba similar a la de la proposición 3.2.6 se calcula el grupo fundamental del espacio N_k', lo cual se hará en el siguiente lema.

Lema 3.2.5.
Para $k \geq 3$ se tiene que $\pi_1(N_k') = \langle [\varepsilon_k] \rangle$.

Demostración: Por la proposición 3.2.8 se tiene que N_k' es arcoconexo, considerando arbitrariamente un punto $\overline{x} \in N_k'$, donde $\overline{x} = \{(x,0), (\sigma^{k-1}(x), 1)\}$ tal que $x \in \text{int } \Delta_{k-1}^k$, de esta forma como Δ_{k-1}^k es convexo, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ se define:

$$\begin{array}{rccc} h^i : & \left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k\right) \times I & \longrightarrow & \text{int } \Delta_{k-1-i}^k \\ & (a, s) & \longmapsto & \sigma^i\left((1-s)\sigma^{k-i}(a) + sx\right). \end{array}$$

Ahora, se extienden las funciones anteriores al espacio $\left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k\right) \times I$ como sigue:

$$\begin{array}{rccc} H^i : & \left(\left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & \left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k\right) \times I \\ & (a, t, s) & \longmapsto & (h^i(a, s), t). \end{array}$$

Se observa que para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, las funciones anteriores son homotopías con las cuales se tiene que $\{\sigma^i(x)\} \times I$ es un retracto por deformación de $\left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k\right) \times I$, por tanto, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ se define una homotopía en el cociente q_k' de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} \widehat{H}^i : & q_k'\left(\left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & q_k'\left(\left(\text{int } \Delta_{k-1-i}^k\right) \times I\right) \\ & \left(\overline{(a,t)}, s\right) & \longmapsto & q_k'(H_i^k(a, t, s)). \end{array}$$

Considerando la observación 3.2.6, no es difícil observar que las funciones anteriores están bien definidas y son continuas.

Se observa también que $\varepsilon_i(I) = q'_k(\{\overline{\sigma}^i\,(x_{k-1})\} \times I)$ es un retracto por deformación de $q'_k\left(\left(\text{int }\Delta^k_{k-1-i}\right) \times I\right)$ para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, lo cual es consecuencia de como se definieron las homotopías anteriores.
Por tanto se da una homotopía general construida a base de las homotopías $\widehat{H}^i$ la cual está dada por

$$\begin{array}{rccc} \widehat{H}: & \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1} q'_k\left(\left(\text{int }\Delta^k_i\right) \times I\right) \times I & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1} q'_k\left(\left(\text{int }\Delta^k_i\right) \times I\right) \\ & \left(\overline{(a,t)}, s\right) & \longmapsto & \widehat{H}^j\left(\overline{(a,t)}, s\right) \quad \text{si } a \in \text{int }\Delta^k_{k-1-j}. \end{array}$$

Se observa que la función anterior está bien definida y es continua debido a la definición de las homotopías h^k_i, de la proposición 3.2.4 se tiene que $\widehat{H}|_{q'_k\left(\left(\text{int }\Delta^k_{k-1-j}\right)\times\{0\}\right)\times I} = \widehat{H}|_{q'_k\left(\left(\text{int }\Delta^k_{k-j}\right)\times\{1\}\right)\times I}$ para cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ y $\widehat{H}|_{q'_k\left(\left(\text{int }\Delta^k_{k-1}\right)\times\{0\}\right)\times I} = \widehat{H}|_{q'_k\left(\left(\text{int }\Delta^k_{0}\right)\times\{1\}\right)\times I}$.
Además, como $N'_k = q'_k\left(\displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1}\left(\text{int }\Delta^k_i\right) \times I\right) = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1} q'_k\left(\left(\text{int }\Delta^k_i\right) \times I\right)$ entonces con la homotopía $\widehat{H}$ es fácil ver que $\varepsilon_k(I) = (\varepsilon_0 * \cdots * \varepsilon_{k-1})(I)$ es retracto por deformación de N'_k.
Por la proposición 1.2.3, $j : (\varepsilon_k(I), \overline{x}) \hookrightarrow (N'_k, \overline{x})$ es equivalencia homotópica y por la proposición 1.2.6, $j_\# : \pi_1\left(\varepsilon_k(I), \overline{x}\right) \longrightarrow \pi_1\left(N'_k, \overline{x}\right)$ es un isomorfismo, de aquí que $\pi_1\left(N'_k, \overline{x}\right) \cong \pi_1\left(\varepsilon_k(I), \overline{x}\right) = \langle[\varepsilon_k]\rangle$, por como se construye $j_\#$ según la definición 1.2.12 se tiene que $\pi_1\left(N'_k, \overline{x}\right) = \langle[j \circ \varepsilon_k]\rangle = \langle[\varepsilon_k]\rangle$. ■

Ya que se calculó el grupo fundamental del espacio N'_k, lo que sigue a continuación es analizar algunas propiedades respecto al lazo ε_k, para ello se tiene el siguiente lema.

Lema 3.2.6.
Para cualquier $k \geq 3$, $\varepsilon_k \simeq (\alpha_k)^k$.

Demostración: Dado $k \geq 3$ arbitrario y considerando la homotopía $\widehat{H}^k$ que se construyó en la prueba del lema 3.2.2, se define para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ la siguiente homotopía dada por:

$$\begin{array}{rccc} \overline{H}^i: & I \times I & \longrightarrow & q'_k\left(\left(\text{int } d_k A^k\right) \times I\right) \\ & (t,s) & \longmapsto & \widehat{H}^k\left(\varepsilon_i(t), s\right). \end{array}$$

De aquí, se observa que la homotopía anterior cumple que $\overline{H}^i_0(t) = \varepsilon_i(t)$ y $\overline{H}^i_1(t) = \alpha_k(t)$, es decir $\varepsilon_i \simeq_{\overline{H}^i} \alpha_k$.
Por tanto se tiene que $\varepsilon_k = \varepsilon_0 * \cdots * \varepsilon_{k-1} \simeq \alpha_k * \cdots * \alpha_k = (\alpha_k)^k$. ■

Por el lema 3.2.1 se tiene que $\pi_1(F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}), r_{k-1}) = \langle[\alpha_{k-1}]\rangle$, entonces una pregunta natural que surge es que puntos del cociente de $\left(\text{int }\delta^k_i\right) \times I$ corresponden al espacio $\alpha_{k-1}(I)$, y además como por el corolario 3.2.4 se tiene que $\pi_1(C_k) = 0$ entonces se quisiera saber como actúan las identificaciones del cociente q'_k en el espacio $\left(\text{int }\delta^k_0\right) \times I$, por tanto, se da la siguiente observación.

Observación 3.2.8.
Para $b_{k-1} = \left(0, \dfrac{1}{k-1}, \ldots, \dfrac{k-2}{k-1}\right)$ se define $b^0_{k-1} = (b_{k-1}, 1)$, $b^{k-1}_{k-1} = (0, b_{k-1})$ y $b^r_{k-1} := (0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ para cada $r \in \{1, \ldots, k-2\}$ tal que $x_m = \dfrac{m}{k-1}$ para $m \in \{1, \ldots, k-1-r\}$ y $x_m = \dfrac{m-1}{k-1}$ para $m \in \{k-r, \ldots, k-1\}$, de aquí, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ se observa que $b^i_{k-1} \in \text{int }\delta^k_i$.
Así pues, por la observación 3.2.5 y el lema 3.2.3, de manera análoga a la prueba del lema 3.2.1 se tiene que $\alpha_{k-1}(I) = q'_k(\{b^i_{k-1}\} \times I)$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.
Por último, siguiendo la prueba del corolario 3.2.4 se tiene que $q_k(\{b^0_{k-1} \times \{t\}) = \{r_{k-1}\}$ es un retracto por deformación de C_k para cualquier $t \in I$ y por tanto se puede considerar al espacio $c_{r_{k-1}}(I) = q'_k(\{b^0_{k-1}\} \times I)$ como un retracto por deformación $q_k\left(\left(\text{int }\delta^k_0\right) \times I\right) = C_k$, donde $c_{r_{k-1}}$ es el camino constante en r_{k-1} dado por $c_{r_{k-1}}(t) = q'_k(b^0_{k-1}, t)$ para cada $t \in I$.

Con el resultado anterior, se analiza a continuación la relación que tiene el lazo α_{k-1} y el lazo ε_k, tal como se hizo en el lema 3.2.6, con el siguiente lema.

Lema 3.2.7.
Para cualquier $k \geq 3$, $\varepsilon_k \simeq (\alpha_{k-1})^{k-1}$.

Demostración: Dado que int $\Delta^k_{k-1-i} \cup \delta^k_{k-1-i}$ es convexo, para cada $i \in \{0, ..., k-1\}$, considerando $x \in$ int Δ^k_{k-1} tal que $\varepsilon_i(0) = q'_k(\sigma^i(x), 0)$, se define la siguiente función dada por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i: & I & \longrightarrow & \text{int } \Delta^k_{k-1-i} \cup \delta^k_{k-1-i} \\ & s & \longmapsto & (1-s)\sigma^i(x) + s b^{k-1-i}_{k-1}. \end{array}$$

De aquí, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ se define la siguiente homotopía dada por

$$\begin{array}{rccc} H^i: & I \times I & \longrightarrow & q'_k\left(\left(\text{int } \Delta^k_{k-1-i} \cup \delta^k_{k-1-i}\right) \times I\right) \\ & (s,t) & \longmapsto & q'_k\left(\varphi_i(s), t\right). \end{array}$$

Ahora bien, por la observación 3.2.6 es fácil ver que cada H^i está bien definida y es continua, además cumple que $H^i_0(t) = \varepsilon_i(t)$ y $H^i_1(t) = q'_k(\varphi_i(1), t) = q'_k(b^{k-1-i}_{k-1}, t)$. Así, por la observación 3.2.8 se tiene que $H^{k-1}_1(t) = c_{r_{k-1}}(t)$ y $H^i_1(t) = \alpha_{k-1}(t)$ si $i \in \{0, \ldots, k-2\}$ para toda $t \in I$, es decir, se concluye que $\varepsilon_{k-1} \simeq c_{r_{k-1}}$ y $\varepsilon_i \simeq \alpha_{k-1}$ si $i \in \{0, \ldots, k-2\}$.
Por tanto se tiene que $\varepsilon_k = \varepsilon_0 * \cdots * \varepsilon_{k-1} \simeq \alpha_{k-1} * \cdots * \alpha_{k-1} * c_{r_{k-1}} = (\alpha_{k-1})^{k-1}$. ∎

Para finalizar esta sección, considerando todos los resultados anteriores se procede a calcular el grupo fundamental del espacio $F_k(S^1) - F_{k-2}(S^1)$, esto se hará en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1.
Para cada $k \geq 3$, $\pi_1\left(F_k(S^1) - F_{k-2}(S^1)\right)$ tiene una presentación dada por $\langle \alpha, \beta : \alpha^k = \beta^{k-1} \rangle$.

Demostración: Por el teorema 2.2.3 se tiene que $F_n(S^1) \cong F_n(I/\{0,1\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces para tener una presentación del grupo $\pi_1\left(F_k(S^1) - F_{k-2}(S^1)\right)$ sólo basta dar una presentación para $\pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})\right)$, se considera los espacios $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$ y N_k.
Dado que $\left(\text{int } d_k A^k\right) \times I$ es un conjunto abierto y arcoconexo, q'_k es función abierta y además por el lema 3.2.1 se tiene que $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}) = q'_k\left(\left(\text{int } d_k A^k\right) \times I\right)$, entonces como ya se han estudiado las identificaciones en $q'_k\left(\left(\text{int } d_k A^k\right) \times I\right)$ anteriormente, no es difícil observar que $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$ es abierto y arcoconexo, así también, como $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1} \left(\text{int } \Delta^k_i \cup \delta^k_i\right) \times I$ es un conjunto abierto y arcoconexo, y q'_k es función abierta, entonces por la definición 3.2.7 y como también ya se han estudiado las clases de equivalencia del cociente q'_k en N_k, es fácil ver que $N_k = q'_k\left(\displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1} \left(\text{int } \Delta^k_i \cup \delta^k_i\right) \times I\right)$ abierto y arcoconexo.
Además, por la proposición 3.2.7, $(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})) \cup N_k = F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$ y por la proposición 3.2.8 se tiene que $(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})) \cap N_k = N'_k$ es arcoconexo, por otra parte, por el lema 3.2.5 también se tiene que $\pi_1(N'_k) = \langle [\varepsilon_k] \rangle$
Teniendo lo anterior en cuenta, se cumplen todos los requisitos para aplicar el teorema 1.2.3, por tanto $\pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})\right) \cong \dfrac{\pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})\right) * \pi_1\left(N_k\right)}{\mathcal{N}(\langle i_\#(c) j_\#(c)^{-1} : c \in N'_k \rangle)}$. Por la proposición 1.2.7 se considera $\pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})\right) = \pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}), r_k\right)$, por el lema 3.2.2 se tiene que $\pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})\right) = \pi_1\left(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}), r_k\right) = \langle [\alpha_k] \rangle$.
Así, nuevamente por la proposición 1.2.7, la proposición 3.2.6 y de nuevo por el lema 3.2.2 se puede considerar $\pi_1(N_k) = \pi_1(N_k, r_{k-1}) \cong \pi_1\left(F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}), r_{k-1}\right) = \langle [\alpha_{k-1}] \rangle$, así considerando a $\varphi : \pi_1\left(F_{k-1}(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\}), r_{k-1}\right) \longrightarrow \pi_1(N_k, r_{k-1})$ como el isomorfismo construido en la proposición 3.2.6, es fácil observar que $\varphi([\alpha_{k-1}]) = [\alpha_{k-1}]$, teniendo así que $\pi_1(N_k, r_{k-1}) = \langle [\alpha_{k-1}] \rangle$.
Ahora bien, al considerar a las inclusiones naturales $i_1 : N'_k \hookrightarrow F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\})$, $j_1 : N'_k \hookrightarrow N_k$, $i_2 : F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-1}(I/\{0,1\}) \hookrightarrow F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$, $j_2 : N_k \hookrightarrow F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$, como $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$ es arcoconexo, pues de la prueba de la proposición 3.2.7 este espacio es la imagen bajo q'_k de un conjunto arcoconexo, es posible tomar w_1, w_2, w_3, los cuales son caminos en $F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})$ tales que $w_1(0) = r_k = w_3(1)$, $w_1(1) = r_{k-1} = w_2(1)$, $w_2(0) = \varepsilon_k(0) = w_3(0)$.

De aquí, se tiene que $(j_2)_\#([\alpha_{k-1}]) = [w_1 * \alpha_{k-1} * \overline{w_1}] := \beta$, $(i_2)_\#([\alpha_k]) = [\alpha_k] := \alpha$ y denotando $\varepsilon := [\varepsilon_k]$, se cumple que $\pi_1(F_k(I/\{0,1\}) - F_{k-2}(I/\{0,1\})) \cong \langle \alpha, \beta \rangle / \mathcal{N}(\langle i_\#(\varepsilon) j_\#(\varepsilon)^{-1} \rangle) \cong \langle \alpha, \beta : i_\#(\varepsilon) = j_\#(\varepsilon) \rangle$.
Por el lema 3.2.6 se tiene que $\varepsilon_k \simeq (\alpha_k)^k$, entonces se observa que $(i_1)_\#(\varepsilon) = [\overline{w_3} * \varepsilon_k * w_3] = [\alpha_k]^k = \alpha^k$, así por el lema 3.2.7 se da que $\varepsilon_k \simeq (\alpha_{k-1})^{k-1}$, también se da que $(j_1)_\#(\varepsilon) = [w_2 * \varepsilon_k * \overline{w_2}] = [\alpha_{k-1}]^{k-1}$.
Como $i_\#$ proviene de $i = i_2 \circ i_1$ entonces $i_\#(\varepsilon) = (i_2)_\#((i_1)_\#(\varepsilon)) = (i_2)_\#(\alpha^k) = ((i_2)_\#(\alpha))^k = \alpha^k$, y como $j_\#$ proviene de $j = j_2 \circ j_1$, entonces $j_\#(\varepsilon) = (j_2)_\#((j_1)_\#(\varepsilon)) = (j_2)_\#([\alpha_{k-1}]^{k-1}) = ((i_2)_\#([\alpha_{k-1}])^{k-1} = \beta^{k-1}$.■

3.3. Una relación especial entre $F_1(S^1)$ y $F_3(S^1)$

Por el teorema 3.2.1, para cada $k \geq 3$ se tiene que el grupo fundamental de $F_k(S^1) - F_{k-2}(S^1)$ está dado por $\langle \alpha, \beta : \alpha^k = \beta^{k-1} \rangle$ y por la proposición 1.3.1 esta presentación está asociada al nudo tórico $T(k, k-1)$.

Cuando se restringe el hecho anterior al caso $k = 3$, por el teorema 3.1.2, $F_3(S^1) \cong_{Top} S^3$ y por el teorema 1.3.1, $T(2,3) \equiv T(3,2)$, es decir el nudo trébol según el ejemplo 1.3.2, entonces lo más natural es pensar que $F_1(S^1)$ visto dentro de $F_3(S^1)$ es equivalente al nudo trébol.

A continuación, se da la siguiente observación.

Observación 3.3.1.
Por el teorema 2.1.1, $S^1 \cong_{Top} F_1(S^1)$, denotando a este isomorfismo como $\psi : S^1 \longrightarrow F_1(S^1)$, al isomorfismo del teorema 3.1.2 como $\varphi : F_3(S^1) \longrightarrow S^3$ y considerando la inclusión natural $i : F_1(S^1) \hookrightarrow F_3(S^1)$, se tiene que $f := \varphi \circ i \circ \psi : S^1 \longrightarrow S^3$ es una función continua e inyectiva, así por la observación 1.3.1 se concluye que f es un nudo.

De la observación anterior, la inclusión natural $i : F_1(S^1) \hookrightarrow F_3(S^1)$ es un nudo salvo isomorfismo, así para referirse a este nudo simplemente se dirá que es el nudo $F_1(S^1)$.

Como $F_1(S^1)$ dentro de $F_3(S^1)$ tiene la misma presentación del nudo tórico $T(3,2)$, es decir que sus grupos de nudo son isomorfos, es tentador a concluir que $F_1(S^1) \equiv T(3,2)$ pero al considerar el ejemplo 1.3.3, el tener grupos de nudo isomorfos no es suficiente para concluir la equivalencia.

Una manera con la cual se podría probar la equivalencia del nudo $F_1(S^1)$ y el nudo $T(3,2)$ es usar un teorema de Waldhausen (el cual se encuentra en [3, teorema 3.15, pág. 40]) pero para ello hay que introducir el concepto de meridiano y de longitud de un nudo, los cuales pueden consultarse en [3, definición 2.6, pág. 19].

Una prueba de la equivalencia de estos nudos se da en [17, apéndice A, pág. 22], pero para ello se debe introducir el concepto de división de Heegaard, el cual puede consultarse en [3, definición 3.20, pág. 42].

En este trabajo ya no se desarrolló con mayor profundidad la equivalencia de los nudos $F_1(S^1)$ y el nudo trébol ya que, como se puede observar de las líneas anteriores, esto se sale de los objetivos de la tesis.

CONCLUSIÓN

Esta tesis que se ha desarrollado abordó una variedad de resultados sobre el producto simétrico del círculo realizando un análisis desde otra perspectiva y haciendo uso de una poderosa herramienta, la topología algebraica.

En el capítulo 1, se empezó dando los conceptos y resultados clásicos sobre la teoría de categorías, la homología y homotopía de espacios topológicos así como otra área de las matemáticas que también tiene sus bases en la topología algebraica, la teoría de nudos.

Posteriormente en el capítulo 2 se habló de la teoría de hiperespacios haciendo énfasis en los productos simétricos, de aquí se estudió a los productos simétricos de un determinado espacio topológico X desde el punto de vista de un cociente del espacio producto X^k tal como se describe en la definición 2.2.1, esto ayudó a dar resultados que hicieron más fácil analizar las propiedades de $F_k(S^1)$.

Ya en el capítulo 3, se calculó la homología y en consecuencia de esto, la homotopía del producto simétrico del círculo, el cual en el corolario 3.1.1 se dice que $F_k(S^1)$ es homotópicamente equivalente a la esfera S^{d_k}, donde $d_k = k - 1$ si k es par y $d_k = k$ si k es impar. Dentro del mismo capítulo se calculó el grupo fundamental de $F_k(S^1) - F_{k-2}(S^1)$ haciendo uso del teorema de Seifert-van Kampen, donde se probó que este espacio posee una presentación similar al grupo de nudo del nudo tórico $T(k-1, k)$, tal como se vio en el teorema 3.2.1. Por último, usando la presentación mencionada se vio la relación que existe entre $F_1(S^1)$ visto dentro de $F_3(S^1)$ y el nudo trébol.

Como se ha visto a lo largo de este trabajo, los resultados anteriores son una muestra de como la topología algebraica ayuda en otras áreas de las matemáticas, que en este caso fue de gran ayuda para probar algunos resultados de los productos simétricos, existen otras herramientas que de igual manera brindan resultados útiles sobre los hiperespacios por ello es importante seguir desarrollando teorías que sean de utilidad en futuros descubrimientos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Borsuk, K. (1949). On the third symmetric potency of the circumference. *Fundamenta Mathematicae, 36*, 236-244.

[2] Bott, R. (1952). On the third symmetric potency of S^1. *Fundamenta Mathematicae, 1*(39), 264-268.

[3] Burde, G., & Zieschang, H. (2002). *Knots*. Walter de gruyter.

[4] Chinen, N., & Koyama, A. (2010). On the symmetric hyperspace of the circle. *Topology and its Applications, 157*(17), 2613-2621.

[5] Fox, R. H., & Artin, E. (1948). Some wild cells and spheres in three-dimensional space. *Annals of Mathematics, 49*(4), 979-990.

[6] Ganea, T. (1954). Symmetrische potenzen topologischer Räume. *Mathematische Nachrichten, 11*(4-5), 305-316.

[7] Grillet, P. A. (2007). *Abstract algebra* (Vol. 242). Springer Science & Business Media.

[8] Hatcher A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.

[9] Munkres, J. R. (2000). *Topology* (2nd edn). Prentice-Hall.

[10] Nadler Jr, S. B. (1978). Hyperspaces of sets. *A Text with Research Questions*. 33 Marcel Dekker, INC.

[11] Pulido Monroy, M. (2015). *Topología algebraica: homología singular*. Departamento de Geometría y Topología, Facultad de Ciencias Matemáticas, UCM.

[12] Rotman, J. J. (2009). *An introduction to homological algebra* (Vol. 2). New York: Springer.

[13] Scott, P., & Wall, T. (1979, September). Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)* (Vol. 36, pp. 137-203).

[14] Soto Contreras, J. (2019). *Invariantes polinomiales de nudos*. Universidad de Sonora.

[15] Stöcker, R., & Zieschang, H. (1988). *Algebraische Topologie: eine Einführung*. Stuttgart B.G. Teubner.

[16] Tu, L. W. (2011). *An Introduction to Manifolds*. New York, NY: Springer New York.

[17] Tuffley, C. (2002). Finite subset spaces of S^1. *Algebraic & Geometric Topology, 2*(2), 1119-1145.