UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE INGENIERÍA
CAMPUS I

“CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO

EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

FERNANDO CASTAÑÓN MORENO C040017

DIRECTOR DE TESIS:

M. C. PIERRE FRANCOIS BENOIT POIRIER

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS; MAYO DE 2024.

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
15 de abril del 2024
Oficio No. F.I.01.648/2024

C. FERNANDO CASTAÑÓN MORENO
EGRESADO
MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
PRESENTE.

Con base en el Reglamento de Evaluación Profesional para los egresados de la Universidad Autónoma de Chiapas, y habiéndose cumplido con las disposiciones en cuanto a la aprobación por parte de los integrantes del jurado en el contenido de su Tesis Titulada:

"CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA".

CERTIFICO el **VOTO APROBATORIO** emitido por este jurado, y autorizo la entrega de tesis digital elaborada a través del Programa Institucional para la Obtención del Grado Académico (PIGA), para que sea sustentado en su Examen de grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR"

DR. OMAR ANTONIO DE LA CRUZ COURTOIS
DIRECTOR

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS
UNACH
DIRECCIÓN DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA

Ccp. Dr. Humberto Miguel Sansebastián García. Coordinador de Investigación y Posgrado. Facultad de Ingeniería, Campus I. UNACH.
Archivo/minutario
OACC/HMSG/tcpg*

Código: FO-113-05-05	
Revisión: 0	

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) FERNANDO CASTAÑÓN MORENO, Autor (a) de la tesis bajo el título de CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA presentada y aprobada en el año 2024 como requisito para obtener el título o grado de MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, autorizo licencia a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), para que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para su consulta, reproducción parcial y/o total, citando la fuente, que contribuya a la divulgación del conocimiento humanístico, científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 24 días del mes de abril del año 2024.

FERNANDO CASTAÑÓN MORENO

Nombre y firma del Tesista o Tesistas

Agradecimientos

A la Dra. Crystel Sofía Díaz Díaz

Por compartir su conocimiento y demostrar interés y entrega en la orientación de esta tesis.

A M. C. Pierre Francois Benoit Poirier

Por su tiempo y paciencia, así como por compartir su conocimiento para ayudarme a construir este trabajo de investigación.

A Dr. Erivan Velasco Núñez y M. E. Cristóbal Cruz Ruiz

Por su valioso aporte en la realización de esta tesis.

A Dr. Humberto Miguel Sansebastián García

Por estar siempre al pendiente y por su apoyo para el ingreso al programa.

A mis compañeros de Maestría

Alejandra, Armando, Evelia, Freddy, Gustavo, Luis y Rosario por brindarme su amistad, compartirme sus experiencias y el apoyo incondicional durante y después de las clases.

Dedicatoria

A Dios

Por permitirme disfrutar la vida, por cuidar de mi familia, y de mis seres queridos.

A Berenizze

Con todo mi amor y agradecimiento por formar parte de mi vida, por su amor, paciencia y apoyo incondicional para concluir este trabajo.

A mi Mamá

Por darme la vida y nunca soltarme de su mano. Por ser mi primera maestra y enseñarme con tanto esmero los hábitos, valores y buenos sentimientos que me han impulsado para seguir adelante en tiempos difíciles.

A mis hermanos

Daniel, Enrique y Jesús, por hacer de mi vida una fiesta, por su cariño y aliento.

A mi Papá

Que desde el cielo me ilumina para seguir adelante con mis proyectos.

Índice General

Capítulo I. Introducción **1**

Planteamiento del Problema 3

Justificación 6

Objetivo General 6

Objetivos Específicos 6

Antecedentes 7

Capítulo II. Marco Teórico **9**

La Socioepistemología 11

La Práctica Social 15

La Práctica Social de Predicción 18

Estado del Arte 18

Tecnología y Matemática Escolar 19

GeoGebra una Herramienta para la Enseñanza de Cálculo. 21

Razón de Cambio 24

Aspectos Epistemológicos de la Recta Tangente 25

Construcción de tangentes a través de la historia. 27

Construcción de tangentes por los Geómetras Griegos. 27

El Método de Descartes. 30

El Método de Fermat. 34

Capítulo III. Metodología 40

El Esquema Metodológico 42

Momento: Epistemología de Prácticas 44

Situación Problema 44

Hacia la Construcción del Conocimiento 45

Elementos Claves de la Investigación 45

Problemática 46

Situación Problema 46

Ingeniería Didáctica 47

Los Análisis preliminares 47

Análisis a Priori 49

Experimentación y Análisis a Posteriori 49

Diseño de la secuencia didáctica 50

Fase de planeación. Análisis preliminares 50

Programas de estudios 51

Programa de Estudios de Matemáticas I 55

Programa de Estudios de Matemáticas III. 59

Programa de Estudios de Matemáticas IV. 62

Programa de Estudios de Cálculo Diferencial. 64

Construcción del Conocimiento. 66

Estudio Epistemológico de la Recta Tangente. 66

Capítulo IV. Resultados y discusión 67

Fase de diseño. Análisis a priori 67

Secuencia didáctica. 68

Fase de experimentación 73

La puesta en escena, los alumnos y la dinámica a seguir. 73

Resultados y discusión de la Aplicación de la Secuencia Didáctica. 76

Capítulo V. Conclusiones 96

Referencias 99

Índice de Tablas

Tabla 1 *Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta uno. Basada en Esqueda (2014)* 76

Tabla 2 *Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta dos. Basada en Esqueda (2014)* 77

Tabla 3 Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta tres. Basada en Esqueda (2014) 80

Tabla 4 Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta cuatro y cinco. Basada en Esqueda (2014) 82

Tabla 5 Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta seis. Basada en Esqueda (2014) 87

Tabla 6 Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta siete. Basada en Esqueda (2014) 88

Tabla 7 Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta ocho. Basada en Esqueda (2014) 90

Índice de figuras

Figura 1 Dimensiones de la Socioepistemología. Fuente: Adaptado de Yojcom (2013, p. 51) 14

Figura 2 Anidación de prácticas. Fuente: Adaptado de Cantoral et al. (2014, p. 99) 16

Figura 3 La parábola. Fuente: Adaptado de Cruse y Lehman (1982, p. 14) 28

Figura 4 Trazo de circunferencia de Radio *P*. Fuente: Adaptado de Cruse y Lehman (1982, p. 15) 29

Figura 5 Construcción de la tangente a la parábola. Fuente: Adaptado de Cruse y Lehman (1982, p. 15) 30

Figura 6 Trazo de recta secante sobre parábola. Fuente: Adaptado de Cruse y Lehman (1982, p. 25) 32

Figura 7 Secante a una curva. Fuente: Adaptado de Cruse y Lehman (1982, p. 32) ... 34

Figura 8 Secante que tiende a Tangente. Fuente: Adaptado de Cruse y Lehman (1982, p. 33) 35

Figura 9 Recta secante sobre parábola. Fuente: Adaptado de Cruse y Lehman (1982, p. 33) 36

Figura 10 Parábola y su tangente hallada con el método de Fermat. Fuente: Adaptado de Cruse y Lehman (1982, p. 33) 38

Figura 11 El esquema metodológico. Fuente: Rosas y Romo (2013, p. 63) 43

Figura 12 Mapa curricular del Telebachillerato en Chiapas (RIEMS). Fuente: SEP (2008) 53

Figura 13 Bloques que componen al programa de la asignatura de Matemáticas I. Fuente: SEP (2010a, p. 8) 57

Figura 14 Desempeños y objetivos de aprendizaje del estudiante al concluir el bloque II. Fuente: SEP (2010a, p. 15) 58

Figura 15 Bloques que componen al programa de la asignatura de Matemáticas III. Fuente: SEP (2011a, p. 8) 60

Figura 16 Desempeños y objetivos de aprendizaje del estudiante al concluir el bloque III. Fuente: SEP (2011a, p. 18) 61

Figura 17 Bloques que componen al programa de la asignatura de matemáticas IV. Fuente: SEP (2011b, p. 8) 63

Figura 18 Bloques que componen al programa de la asignatura de Cálculo Diferencial. Fuente: SEP (2010b, p. 8) 65

Figura 19 La dinámica de trabajo. Fuente: (Creación propia) 74

Figura 20 Respuestas a preguntas uno y dos. Fuente: (Creación propia) 79

Figura 21 Respuestas a pregunta tres. Fuente: (Creación propia) 81

Figura 22 Respuestas a preguntas cuatro y cinco. Fuente: (Creación propia) 84

Figura 23 Respuestas a preguntas seis, siete y ocho. Fuente: (Creación propia) 86

Figura 24 Gráficas elaboradas en el inciso a) de la parte III de la secuencia didáctica. Fuente: (Creación propia) 92

Figura 25 Gráficas elaboradas en el inciso b) de la parte III de la secuencia didáctica. Fuente: (Creación propia) 93

Figura 26 Gráfica elaborada en el inciso c) de la parte III de la secuencia didáctica. Fuente: (Creación propia) 94

Resumen

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo diseñar una secuencia didáctica que permita a los alumnos del Telebachillerato núm. 100 Carlos Olmos, ubicado en el ejido Vicente Guerrero de Salto de Agua, Chiapas de las etnias *Ch'ol* y *Tseltal*, construir la relación entre la perspectiva gráfica y analítica del concepto de derivada de una función a través de la construcción de una gráfica en *GeoGebra,* se parte de la siguiente hipótesis: plantear una situación didáctica apoyada en software dinámico especializado representa un método novedoso y atractivo para los alumnos a través del cual ellos lograrán construir la relación entre la derivada de una función y la gráfica de su pendiente, y dibujar el lugar geométrico de la derivada de una función a partir del análisis de su razón de cambio.

Esta inquietud surge de la necesidad de atender la desconexión que existe en la matemática escolar, entre el aspecto analítico y la perspectiva gráfica de la derivada de una función y su relación con la pendiente de la recta tangente a un punto. Para abordar el problema de investigación se consideró la componente social de la construcción del conocimiento matemático a través de la Socioepistemología, mientras que la secuencia didáctica se diseñó con Ingeniería Didáctica a partir del análisis de los programas de estudios de la materia de matemáticas en el bachillerato, así como del estudio epistemológico de la recta tangente a una curva. Para hacer la secuencia didáctica más atractiva y fácil de realizar se creó un video tutorial que permite que cada estudiante construya en *GeoGebra* la gráfica de la derivada de una función, para que posteriormente los alumnos a través de una serie de preguntas puedan construir el conocimiento esperado.

La secuencia didáctica se aplicó en febrero de 2024, en el Telebachillerato mencionado a los 13 estudiantes del área de físico matemático, los cuales estuvieron participativos y entusiasmados por la forma en la que se utilizó la tecnología en el aula de matemáticas, algo poco común para ellos.

A partir de los resultados obtenidos se concluye que *GeoGebra* puede ser una excelente opción para plantear situaciones didácticas que involucren predicción y

cálculo diferencial, pues permite visualizar aspectos relevantes del tema. Así pues, utilizar este programa en conjunto con la secuencia didáctica ayudó a los alumnos a identificar cambios en la variación de la tangente de una curva y asociarlo con el valor numérico y cambiante de la pendiente de la recta tangente que se desplaza por la curva sobre un punto de ella. Además, esta secuencia permitió que los estudiantes fueran capaces de identificar a la gráfica de la derivada de una función con la gráfica que describe el valor de la pendiente de una recta tangente a dicha curva y conciliar la perspectiva gráfica, analítica y geométrica de la concepción de derivada. Además se abrió la posibilidad para el desarrollo de una secuencia didáctica que se preocupe por desarrollar la concepción de derivada como razón de cambio.

Capítulo I. Introducción

Es común en la matemática escolar que alumnos de semestres avanzados de bachillerato aprendan a derivar funciones y a calcular sus valores máximos y mínimos a través de los distintos algoritmos y fórmulas, sin embargo es un fenómeno común que a pesar de contar con esta habilidad procedimental para resolver dichos problemas, muchas veces estos alumnos no logran comprender la relación que existe entre la derivada de una función y la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, y cómo estas se relacionan con la razón de cambio. Se suma a este conflicto, las dificultades para construir las gráficas de las derivadas a partir de las funciones primitivas.

Precisamente el problema que motiva a la presente investigación surge de la dificultad que tienen los alumnos para relacionar los diferentes aspectos que conlleva el concepto de derivada en el proceso de enseñanza-aprendizaje, siendo la perspectiva analítica la comúnmente adoptada, mientras que se deja de lado aquella relacionada con la perspectiva gráfica en la que se asocia a la derivada con la pendiente de la recta tangente a una curva. Del mismo modo, se han relegado aquellos aspectos en los que según la naturaleza del problema se exige la interpretación de la primera, e incluso una segunda derivada de una función y la interrelación existente entre ellas.

Con esta tesis se pretende que los alumnos puedan unificar la perspectiva gráfica y analítica del concepto de derivada a través de una secuencia didáctica apoyada con geometría dinámica con la finalidad de que construyan paso a paso la gráfica de la derivada de una función de manera geométrica y dinámica. Estas actividades serán guiadas por el profesor y con el apoyo de éste y en plenaria se contestarán una serie de preguntas encaminadas a la construcción del concepto de derivada.

Con las actividades se trabajará, además, un acercamiento a la gráfica de la derivada de una función, para que los alumnos realicen un análisis del comportamiento gráfico de las magnitudes involucradas e interpreten la relación que tiene la variación de dichas magnitudes con el comportamiento de la gráfica de la derivada. En resumen, la presente investigación se desarrolla en la rama de las matemáticas denominada cálculo diferencial, específicamente se centra en la construcción del concepto de derivada a través del uso de herramientas tecnológicas para la construcción de conocimiento, en particular del software de uso libre llamado *Geogebra.*

En el capítulo I se describe el problema de investigación, del cual surge el interés para realizar esta tesis. Se presentan las ideas e inquietudes con relación a la dificultad que exhiben los alumnos para construir el concepto de derivada y a su vez relacionarla con la interpretación geométrica de la noción de razón de cambio, también se mencionan las investigaciones que dan sustento teórico a estas ideas y se enuncian los objetivos que persigue esta investigación.

El capítulo II describe al marco teórico de la investigación que contiene a la teoría que aportará el punto de vista, es decir, la perspectiva desde la que se aborda al problema de investigación. Se presenta a la Socioepistemología y a sus aspectos más importantes. También se describen las categorías de análisis que incluyen por un lado a la tecnología en la matemática escolar y a la derivada vista como razón de cambio, incluyendo los aspectos epistemológicos de la recta tangente que es un punto medular de esta visión.

En el capítulo III se encuentra la metodología de investigación, en donde se describen las acciones, herramientas, y elementos necesarios para recabar y analizar la información. Por un lado se describen los componentes más relevantes del esquema metodológico propuesto por Gisela Montiel Espinoza y Gabriela Buendía Ávalos, que tendrá el papel de marco metodológico y por otro lado se detalla a la ingeniería didáctica que es la herramienta con la que se diseñó la situación didáctica y a través de la cual se obtuvieron los resultados de la presente investigación.

El capítulo IV contiene el planteamiento de los resultados obtenidos, específicamente la discusión y análisis pertinentes que emanan de la situación didáctica planteada.

Finalmente en el capítulo V se presentan al lector los resultados definitivos y que han permitido validar los supuestos de investigación y cumplir con los objetivos planteados al inicio de esta investigación. Así también, se hace particular hincapié en cómo dichos resultados han contribuido al rediseño del discurso matemático escolar.

Planteamiento del Problema

La derivada como razón de cambio es un concepto que para los estudiantes de nivel medio superior ha sido difícil de asimilar, por lo que generalmente; a pesar de contar con la habilidad algebraica para encontrar la derivada de una función, ésta no puede relacionarse e interpretarse como una herramienta que permite encontrar la variación instantánea de un fenómeno. Además, se debe tener en cuenta que la noción de derivada de una función involucra distintos aspectos además del analítico:

> la noción de derivada de una función es un concepto fundamental del cálculo. El concepto de derivada conlleva diversos aspectos: su perspectiva gráfica, como pendiente de la tangente a una curva; su perspectiva analítica, como límite del cociente incremental; su carácter puntual o global –es decir, en intervalos- y, según exija la solución de una determinada tarea, se pueden utilizar aspectos que relacionan a f’, y f’’. (Sánchez et al., 2008, p. 269)

En este sentido, diversos estudios: Artigue et al. (1995), Dolores (1996), Serna (2007) y Sánchez et al. (2008), han puesto en evidencia la dificultad de relacionar los aspectos anteriormente mencionados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, siendo la perspectiva analítica la comúnmente adoptada.

Por ejemplo Sánchez et al. (2008), comenta que aunque los alumnos son capaces de realizar algunos cálculos de derivadas y de resolver algunos problemas básicos, ellos presentan dificultades para lograr una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático.

Artigue et al. (1995) señalan que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunas operaciones referentes al cálculo diferencial, hallar la derivada de funciones, calcular la pendiente de la recta tangente a determinada curva, y a resolver algunos problemas estándar de cálculo, hay dificultades para que los jóvenes logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático de este campo de estudio. Estos estudios puntualizan que:

> frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, aun si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. (Artigue et al, 1995, p. 97).

Como advierten los autores, este fenómeno crea un eterno retorno en el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial. Puesto que se posiciona a la parte algorítmica como objetivo de la enseñanza porque es lo que se evalúa, por tanto, los alumnos es lo que consideran esencial.

Sánchez et al. (2008) mencionan la investigación de Ferrini-Mundy y Graham (1994), en donde analiza la dificultad que presentan los estudiantes al intentar esbozar la gráfica de la derivada de una función a partir de la gráfica de la función (de f a f’). Además, analizan la investigación de Habre y Abboud, los cuales mencionan que el análisis sobre la manera en cómo los estudiantes coordinan los modelos de representación permite concluir que:

- Los estudiantes pueden considerar a los contextos gráficos y algebraicos como modos separados donde se aplican algoritmos sin relación para resolver problemas.
- Los estudiantes de cálculo construyen sus conexiones, influidos por su experiencia previa.
- Hay grandes inconsistencias entre representaciones, particularmente ítems procedimentales y comprensión de conceptos. (Sánchez et al., 2008, p. 277)

Investigadores como Dolores (1996) y Serna (2007) señalan la dificultad que presentan los alumnos para apropiarse y comprender efectivamente el concepto de razón de cambio y su relación con la derivada, mucho menos logran dar cuenta del uso e importancia que representa su aplicación en la vida cotidiana. Este contexto remarcan la importancia de una resignificación del concepto de razón de cambio así como de la necesidad de realizar una propuesta que rediseñe el discurso matemático escolar, para que; los alumnos puedan construir su conocimiento con respecto a la razón de cambio y logren relacionar de manera exitosa dicho concepto con el de derivada.

En este sentido es correcto afirmar que los ejercicios de cálculo diferencial descontextualizados referentes a la derivada que privilegian la perspectiva analítica y no atienden la naturaleza física de la cual se desprende su concepción como razón de cambio, no contribuyen a que los alumnos construyan adecuadamente el concepto de derivada, como botón de muestra la investigación efectuada por Asiala et al. (1997) encontró que los estudiantes que siguieron un curso experimental (en el cual se enfatiza la relación entre lo gráfico y lo analítico) tuvieron más éxito en construir un esquema del concepto de derivada a través de la coordinación entre los modos gráficos y analíticos, que los que habían seguido cursos tradicionales de cálculo. Lo que señala la importancia de ayudar a los estudiantes a construir los conceptos de razón de cambio y derivada de una función a través de relaciones funcionales entre lo gráfico y lo analítico a fin de cubrir la perspectiva gráfica, analítica y el carácter puntual o global del concepto de derivada mencionado anteriormente por Sánchez et al. (2008).

Es por ello que esta investigación parte de la siguiente hipótesis: Plantear una situación didáctica apoyada en software dinámico especializado representa un método novedoso y atractivo para los alumnos a través de la cual ellos lograrán construir la relación entre la derivada de una función y la gráfica de su pendiente, y dibujar el lugar geométrico de la derivada de una función a partir del análisis de su razón de cambio.

Justificación

Como se ha mencionado anteriormente con este estudio se pretende atender la desconexión que existe en la matemática escolar, entre la noción de derivada de una función y cómo esta se relaciona con la pendiente de una recta que representa una medida de la razón de cambio, se busca pues que los alumnos puedan unificar la perspectiva gráfica y analítica del concepto de derivada a través de una secuencia didáctica apoyada con geometría dinámica. Este proyecto aportará al campo de estudio del cálculo diferencial información necesaria para el rediseño del discurso matemático escolar.

Objetivo General

Para dar dirección a la presente investigación y proporcionar al lector la visión general de lo que se ha planteado lograr, se presenta el objetivo general:

Diseñar una secuencia didáctica a través del abordaje de problemas modelados con *Geogebra* para que los alumnos de sexto semestre del área de físicos matemáticos del Telebachillerato núm. 100 Carlos Olmos, ubicada en el ejido Vicente Guerrero, perteneciente al municipio de Salto de Agua, Chiapas, identifiquen la relación existente entre la derivada de una función y la gráfica de su pendiente.

Objetivos Específicos

Los objetivos específicos son:

- Describir el contenido temático de la asignatura de Matemáticas en el Telebachillerato estatal.
- Analizar la forma en cómo ha sido abordado el concepto de razón de cambio en el contexto escolar.
- Elaborar un videotutorial en el que se explique paso a paso el proceso para elaborar la gráfica de la razón de cambio a partir de una función a través del *software* de uso libre denominado *GeoGebra.*

- Diseñar actividades en *software* especializado denominado *GeoGebra,* para que el alumno trabaje con modelación y graficación como herramientas para la construcción del concepto de derivada
- Mostrar a través del trabajo con la secuencia didáctica diseñada, cómo la modelación de problemas físicos con software especializado favorecen a la construcción del concepto de derivada de una función.

Antecedentes

Una de las principales limitaciones que tienen los docentes del área de las matemáticas para llevar a cabo su práctica profesional es el tiempo del que disponen con los alumnos en el salón de clases para abordar las situaciones problemas que incentivarán a estos últimos a construir su conocimiento. En este sentido autores como Jiménez y Jiménez (2017) señalan a la tecnología como una herramienta interesante que puede abonar en positivo a la práctica docente para que las clases se tornen más interesantes y amenas. Esto privilegiará el desarrollo de estrategias que permitirán que el estudiantado se apropie de los conceptos matemáticos y construya su conocimiento.

Al respecto, diversos estudios como Carrillo (2012), Elías (2013), Inzuna (2014), Jiménez y Jiménez (2017) señalan las bondades de utilizar herramientas tecnológicas en el aula, agregando una larga lista de beneficios de su uso en clase, entre las que se pueden destacar las siguientes:

- Las clases se tornan más interesantes y llevaderas para el alumnado.
- Estimulación visual para los estudiantes.
- Posibilidad de manipulación dinámica de parámetros matemáticos.
- Ayudan a trascender las limitaciones de la mente porque permiten relacionar los distintos efectos que causan las variaciones de parámetros en gráficas de ecuaciones.
- Ahorro considerable de tiempo.

Para esta investigación se ha elegido como herramienta tecnológica al *software* denominado *GeoGebra,* por su uso libre, puede descargarse de manera fácil y gratuita;

es una plataforma muy versátil, ya que puede usarse en computadoras, celulares, tabletas, navegadores de internet; su interfaz es muy fácil de entender y muy intuitiva, pues posibilita el uso de esta por usuarios que no están familiarizados con este tipo de herramienta.

A pesar de todos estos beneficios, no debe perderse de vista que un recurso muy importante es la imaginación que el docente tenga para diseñar situaciones didácticas que permitan abordar los distintos temas de estudio, y cómo estas situaciones sean presentadas a los alumnos para que ellos interactúen con ellas y entre pares para crear su conocimiento.

En lo concerniente al tema de investigación de este estudio, Esqueda (2014) señala que las nociones de razón de cambio no son privilegiadas en los programas de estudio, así mismo encuentra que la forma de construir la razón de cambio por estudiantes universitarios en el área de la ingeniería es a través de representaciones gráficas, y señala la importancia del conocimiento del origen epistemológico de la razón de cambio. Por lo que posteriormente en el Capítulo II, en el apartado referente al estado del arte se abordará al tema de razón de cambio, desde su perspectiva histórica y epistemológica sin dejar de advertir lo que se señala en investigaciones tales como Serna (2007) y Hernández (2015), en las que se destaca la importancia de relacionar la noción de derivada con la de razón de cambio.

Capítulo II. Marco Teórico

Los investigadores tienen un trabajo equiparable al de un detective que va en busca de pistas que lo conduzcan al origen o al inicio de una cuestión, a la solución de un problema o a la explicación de un fenómeno. Asimismo, como menciona Daros (2002), “Investigar significa *in vestigia ire*, esto es, ir tras los vestigios o huellas: investiga quien ve las huellas pero no a quien las realiza, y las sigue para llegar al causante de esas huellas” (p. 73).

Para Daros (2002), una investigación tiene su origen en la inquietud, en una curiosidad no resuelta, de un tema sin respuesta, en una dificultad. Dicho en otras palabras, es ante un problema que surge la necesidad intrínseca de investigar. Así pues, como menciona dicho autor, la investigación consta de cuatro fases generales: el problema, el marco teórico, el diseño metodológico y la realización de lo planificado. Con respecto al problema, menciona que es el inicio del proceso de investigación, en esta fase debe delimitarse concretamente lo que se va a estudiar y plantearse los objetivos perseguidos. En cuanto al marco teórico señala que son:

> las ideas (teorías e hipótesis) con las cuales supuestamente el problema adquiere un sentido. El marco teórico consiste en asumir una teoría que sirva de marco de referencia a todo el proceso de investigación, enlazando el problema con la metodología propuesta y empleada para buscarle una solución. (Daros 2002, p. 76)

Sin embargo para elegir este punto de vista o perspectiva de investigación, es necesario considerar la naturaleza del problema. Es pertinente señalar que la presente investigación pertenece al ámbito educativo y en primera instancia se preocupa por la construcción del conocimiento matemático, por lo tanto la teoría que fungirá como marco de referencia para esta investigación debe satisfacer la visión que el investigador tiene acerca de la generación y transmisión de conocimiento, específicamente del matemático.

Con respecto a la construcción de conocimiento Yojcom (2013) señala que es a través de la interacción con otras personas como se construye y estructura el conocimiento. Y que estos conocimientos comunes de los distintos miembros que conforman un grupo social son la base sobre la cual se cimienta el saber científico de una comunidad. En definitiva, y en relación a un contexto determinado, se considera tanto al saber y al conocer actividades comunitarias. Se puede advertir al contexto social y cultural como elementos importantes en la generación de conocimiento, así como también es posible notar que se considera como una actividad que se realiza en conjunto y no de manera aislada en la *psique* de un individuo.

El aprendizaje que realizan los seres humanos se ve afectado directamente por el contexto cultural y las interacciones sociales en las que se desarrolla. Vygotski (1979) hace énfasis en las cualidades únicas que tiene el ser humano como especie, específicamente en el modo en que es capaz de cambiar y realizarse en los distintos contextos históricos y culturales en los que se desarrolla y que se hallan intrínsecamente en la vida en sociedad exclusiva de la especie humana. Destaca pues, que la construcción del conocimiento no se da como un proceso individual, sino que es a través de la interacción del sujeto con su medio, entendiendo como medio al componente social y cultural de un lugar.

Es por éstas razones por las que para la presente investigación se ha escogido a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (en adelante TSME) como la teoría que fungirá como marco de referencia y desde la cual se analizará el problema de investigación. Pues ella “se ocupa del estudio de fenómenos didácticos ligados al saber matemático asumiendo la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues considera que ellas, en su conjunto, constituyen la sabiduría humana” (Cantoral et al., 2015, p.91). A continuación se describirán sus aspectos más importantes.

El Marco Teórico de la presente investigación contemplará además de la teoría de referencia, las categorías de análisis que incluyen por un lado a la tecnología en la matemática escolar y a la derivada vista como razón de cambio, incluyendo los aspectos epistemológicos de la recta tangente que es un punto medular de esta visión.

La Socioepistemología

Muchos consideran que las matemáticas constituyen un universo abstracto cuyo desarrollo está alejado de la realidad social de cada época y que su desarrollo es independiente del devenir general de la historia. Sin embargo, la misma historia es la que se ha encargado de demostrar que si hemos aprendido a conocer y dominar el universo que nos rodea es gracias en parte, a las matemáticas. Precisamente la palabra griega Matemáticas significa: “Aquello que se puede aprender”.

> Las matemáticas han ayudado al desarrollo y avance de la sociedad, pero ésta ayuda ha sido mutua, y la vida e interacción social han sugerido el avance de ella. Los conceptos, operaciones, teoremas e incluso métodos de demostración importantes fueron sugeridos por situaciones y fenómenos reales. La matemática nació de nuestras experiencias en el mundo físico. (Kline, 2007, p. 88)

Es decir que el saber matemático ha surgido fuera de la escuela, en la cotidianeidad de la vida en sociedad. Cantoral (2013) sugiere, por lo tanto, que su introducción a las aulas ha imperado una serie de modificaciones que afectan al saber en su estructura y manera de funcionar, así como también, afectan las relaciones que estos saberes fomentan entre los estudiantes y los docentes.

La Socioepistemología nace como respuesta a la necesidad intrínseca de indagar las formas del pensamiento matemático, y cómo éstas son susceptibles a su socialización y utilización de manera efectiva en la vida cotidiana. Del mismo modo, no debe dejarse de lado que la forma en cómo se transmite el conocimiento está compuesta por prácticas de enseñanza (la acción didáctica en: el salón de clases, en el seno de la familia, en la comunidad, etc.) y que esto a su vez es inherente a la difusión social del conocimiento. Es por ello que no debemos considerar una didáctica de las matemáticas que se centre solamente en el objeto y no considere a los alumnos, como tampoco debe considerarse a la didáctica sin tener en cuenta el contexto sociocultural, la discusión pues, debe trasladarse del objeto hacia las prácticas (Cantoral et al., 2015).

Dicho esto, es importante precisar que la Socioepistemología nació en México a finales de la década de los ochentas y pronto se extendió por Latinoamérica. El objetivo que persigue es el de explorar formas de pensamiento matemático, que aparece no solo dentro de la escuela, sino en otros aspectos de la vida de los estudiantes; que puedan difundirse socialmente y encaminarlos a su uso correcto por los individuos (Cantoral, 2016).

> La Teoría Socioepistemológica sugiere que el conocimiento no nace solo, no se genera en un vacío, sino que nace de la interacción de varios factores como el cultural, el temporal y las necesidades que en su momento hacen posible el desarrollo de nuevos conocimientos, es decir que en un entorno social específico se desarrollan conocimientos que son impulsados por el contexto que prevalece en el momento. (Jonapá, 2017, p. 50-51)

Es precisamente por ello que es de gran importancia no dejar de considerar al componente sociocultural en la construcción del conocimiento matemático. El acercamiento socioepistemológico es de carácter sistémico puesto que considera a los saberes matemáticos como parte de un todo, que a su vez son situados porque surgen en un momento y en un espacio determinado. “La Socioepistemología plantea el problema de la construcción social del conocimiento matemático desde un punto de vista sistémico. Asume al saber como la construcción social del conocimiento” (Cantoral, 2013, p. 180). Y atiende dicha construcción de conocimiento desde tres ejes: la problematización del saber, la práctica social y la caracterización del funcionamiento del modelo de construcción social.

> Sostenemos que ante la cuestión teórica general de cómo construimos nuestros sistemas conceptuales, la Socioepistemología contesta,

> invariablemente, en tres planos, no secuenciados temporalmente, pero articulados conceptualmente:
>
> - El primer plano de respuesta trata sobre la naturaleza misma del saber. Su problematización.
>
> - El segundo plano se ocupa de la práctica social como normativa de la actividad humana y como base de la construcción de nuestros sistemas conceptuales, sus mecanismos funcionales.
>
> - El tercer plano, el de las articulaciones teóricas, es el que estamos impulsando más recientemente y se apoya sobre la gran diversidad de evidencia empírica acumulada. A este nivel, la teoría se ocupa de caracterizar el funcionamiento del modelo de construcción social del conocimiento mediante dialécticas parciales del modelo. (Cantoral, 2013, p.180)

Además la Teoría Socioepistemológica se sustenta a través de cuatro pilares fundamentales. El primero de ellos es conocido como:

- Principio de normatividad de las prácticas sociales, y sostiene que ellas son la base sobre la que se construye el conocimiento.
- El principio de racionalidad contextualizada, explica cómo el contexto condiciona la forma en cómo un colectivo de individuos construye racionalmente su conocimiento y su uso es condicionado por él.
- Cuando el conocimiento es usado, éste se afianza, y adquiere un valor y significado propio relativo al grupo desde el que surgió, a esto se le conoce como relativismo epistemológico, y es el tercer principio sobre el que se sostiene la Teoría Sociepistemológica.
- El último principio, llamado de resignificación progresiva, sostiene que el conocimiento está en constante evolución y reconstrucción a través de la interacción con los diversos contextos en los que se encuentra inmerso el

colectivo de individuos, lo que dotará al conocimiento de nuevos significados (Cantoral et al., 2015).

Así pues, la Socioepistemología rechaza a los saberes como un constructo aislado, pues parte del entendimiento de que el conocimiento se construye socialmente y que adquiere sentido, relevancia y pertinencia a través del uso que se le da en una comunidad específica dentro de cierto contexto cultural y social (Jonapá, 2017, p. 52). Este componente social, que se encuentra inmerso en la construcción del conocimiento, es incorporado al triángulo didáctico que solo contemplaba las relaciones de profesores, alumnos y conocimiento. De esta manera y como puede verse en la figura 1, la TSME considera cuatro dimensiones articuladas, y que al mismo tiempo sostienen una relación transversal entre sí (Yojcom, 2013), con el objetivo de ayudar en el desarrollo del pensamiento matemático (Montiel, 2005).

Figura 1

Dimensiones de la Socioepistemología

Nota. Adaptado de *La Epistemología de la Matemática Maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de prácticas* (p. 51) por D. Yojcom, 2013.

Además, la Socioepistemología contempla como componente fundamental y base del conocimiento a las prácticas sociales. “Asumiremos a la *práctica social* como normativa de la actividad humana, más que como una actividad humana reflexiva o la reflexión sobre una práctica” (Cantoral et al., 2014, p.98). Su importancia radica en que ellas permiten, a través del sustento que proveen y la dirección que ofrecen, la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral et al., 2014). A continuación se describirá a la práctica social y los elementos que la componen.

La Práctica Social

Así como las letras son las unidades que componen a las palabras, la práctica social es el nexo que compone, vincula y da sentido a la Teoría Socioepistemológica en la Matemática Educativa. En este sentido Cantoral et al. (2014), define a las prácticas sociales como “la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen, por así decirlo, como las generadoras del conocimiento” (p. 99). Entender lo que significa la práctica social es comenzar a develar las entrañas de la TSME.

La práctica social puede entenderse como una consecución de actividades, que en su conjunto norman el comportamiento humano (figura 2). Estas prácticas sociales son las responsables de articular la construcción social del conocimiento (Cantoral et al., 2014). Para ello, dichos principios se articulan uno detrás de otro tal que:

> se pasa de la “acción”, directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones: material (entorno), organizacional (contexto), social (normativo), esto se organiza como una “actividad humana” situada socioculturalmente, para perfilar una “práctica” (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una “práctica de referencia” que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), la que a la vez es normada mediante cuatro funciones por la “práctica social” (normativa, identitaria, pragmática y discursiva–reflexiva). (p. 99)

Este proceso interrelacionado permite explicar el proceso de construcción del sujeto a su vez como individuo, como colectivo y como sujeto histórico (Cantoral et al., 2014).

Figura 2

Anidación de prácticas

Nota. Adaptado de “Socioepistemología, matemáticas y realidad” (p. 99), por Cantoral et al., 2014, *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 7 (3).

La práctica social no es una mera acción del sujeto a un objeto, y menos una actividad aislada. Al respecto Camacho (2006) señala que “la frase práctica social se refiere a la actividad del ser humano sobre el medio en el que se desenvuelve […] [dando] sentido a los problemas fundamentales de la ciencia, sometiéndolos a las complejas relaciones entre ellos y su entorno” (p. 133).

Las acciones que los seres humanos ejercen sobre el conocimiento de manera directa y consciente resultan en cambios en el contenido de los objetos. Hablando en el marco de la solución de problemas matemáticos, se puede distinguir a las prácticas sociales como manifestaciones llevadas a cabo por individuos con la finalidad de resolver problemas matemáticos, como un “conjunto de acciones voluntarias que, intencionalmente, desarrolla el individuo para construir conocimiento” (Arrieta et al., 2003, p. 418).

> La práctica social ha sido caracterizada por medio de actividades sujetas a condiciones de un contexto particular, contexto que a su vez es determinado por las prácticas de referencia. Esto ha llevado a identificar los fenómenos, los problemas, las circunstancias y las herramientas asociados al conocimiento matemático involucrado en ámbitos no escolares, pues es ahí donde nace y se usa dicho conocimiento. (Montiel 2005, p. 102)

Sin embargo para lograr que un saber se consolide no basta solo con las acciones determinadas por el sujeto sobre él.

> Dentro de la teoría Socioepistemológica, se afirma que para consolidar un saber es necesario que los conocimientos sean afectados por acciones deliberadas, actividades que se realizan dentro de un actuar en común y en consecuencia, se dice que esas actividades se institucionalizan, es decir se establecen y se consolidan como un saber grupal, precisamente entran en juego las prácticas de referencia que son el medio a través de las cuales el saber se institucionaliza. Estas prácticas de referencia pasan a formar parte de lo que se le denomina prácticas socialmente compartidas las cuales pasan de generación en generación. (Jonapá, 2017, p. 62)

Se reconoce pues a la práctica social como reguladora, que norma la actividad humana, de la que surge el conocimiento matemático y que además dirige su construcción. En la presente investigación el saber que se busca problematizar es el concepto de derivada como razón de cambio y para ello se toma como base a la práctica social de predicción.

A continuación se profundiza en la práctica de predicción, debido a la relevancia de ésta para la presente investigación.

La Práctica Social de Predicción

Centrándose en la práctica social de predicción, no se puede ignorar a Montiel (2005), quien señala que ésta práctica ha sido utilizada comúnmente por diversos investigadores para tratar objetos matemáticos que surgen o toman su carácter matemático en el estudio del movimiento y del cambio, es por tal motivo que tal práctica se amalgama a la noción de derivada vista como razón de cambio:

> El estudio del cambio sirve para entender sus efectos en diversos fenómenos, pero este interés se deriva de la necesidad de predecir, inherente al ser humano. Ante la incapacidad de poder adelantar el tiempo para observar los resultados de los acontecimientos, se han desarrollado diversas herramientas basadas en el estudio del cambio para lograr anticipar el comportamiento de sistemas complejos, de tal modo que la idea de predicción se vuelve una herramienta fundamental en el desarrollo y construcción de algunos resultados y conceptos matemáticos. (Cantoral, 2013, p. 202-203)

De esta manera es como se ha encontrado íntimamente relacionado con el cálculo a la práctica de predicción. En este sentido Caballero (2015) advierte que “la práctica social del *Praediciere*, entendiéndola como normativa de la actividad humana en la búsqueda por la predicción, favorece el desarrollo de las ideas del Cálculo” (p. 2). Además, el autor señala que la predicción exige, para prever los resultados o consecuencias de un fenómeno a través de comparaciones y estimaciones, el estudio de aspectos variacionales de manera imperativa.

Estado del Arte

Se ha dividido este apartado en dos, el primero trata sobre la tecnología y su uso en la Matemática Escolar, mientras que en el segundo apartado se aborda el concepto de razón de cambio (derivada), incluyendo los aspectos epistemológicos de la recta tangente.

Tecnología y Matemática Escolar

Históricamente los medios tecnológicos no son herramientas propias de la mayoría de la generación de docentes actual, porque no tuvieron acceso a ella durante su formación académica y profesional, esto debido a que fue hasta la década de los setenta que aparecieron las primeras computadoras personales, las cuales constaban con poca capacidad de memoria y baja velocidad. Además, su implementación en el aula obviamente presupone un esfuerzo extra por parte de los docentes, quienes tienen que enfrentarse a distintas dificultades, desde problemas técnicos propios del uso de dichas tecnologías, hasta sus propias limitaciones en cuanto a dominio y conocimiento de ella. Y es que una de las grandes restricciones de la enseñanza matemática es el tiempo del que se dispone para explorar las características de los distintos sistemas de representación de los objetos matemáticos en el día a día del quehacer docente. Por lo que “el profesor debe buscar estrategias para hacer sus clases más interesantes y amenas, la tecnología puede ser una buena herramienta para el desarrollo de la construcción del conocimiento matemático” (Jiménez y Jiménez, 2017, p. 3).

Además, la tecnología aplicada a la enseñanza matemática aporta una notable ventaja contra la enseñanza tradicional de las matemáticas, debido a que permite manipular de manera dinámica los distintos sistemas de representación, al mismo tiempo es visualmente estimulante para los alumnos. Para efectos de la presente investigación se entiende por enseñanza tradicional a aquella que no ocupa a la tecnología como una herramienta cognitiva, Pea (1987, citado en Inzunza, 2014) define una herramienta cognitiva como cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas.

Las herramientas tecnológicas permiten relacionar los distintos efectos que causan las variaciones de parámetros en gráficas, para comprender las principales características de los tipos de funciones, lo que eventualmente se traducirá en la capacidad para predecir el comportamiento gráfico de las funciones, la relación entre la gráfica de una función y su representación algebraica así como la posibilidad de relacionar un tipo de gráfica con un fenómeno físico real. Por ejemplo el software *GeoGebra* "permite que el usuario sea partícipe en la construcción de su propio conocimiento al interactuar con las diferentes componentes y representaciones" (Insunza, 2014, p. 4). Dicho *software* destaca por ser gratuito y poseer un entorno intuitivo que permite su uso y aprendizaje con facilidad, además de estar disponible para ser utilizarlo en computadoras, *Smartphones* y *Tablets*, mismas que representan herramientas tecnológicas atractivas de las cuales puede valerse el profesor para utilizar en el salón de clases.

Para la incorporación de estas herramientas tecnológicas al ámbito educativo es necesario cumplir con varios requisitos para que el proceso de enseñanza aprendizaje sea lo más exitoso posible. Una de ellas es la formación del docente con respecto a estas herramientas tecnológicas, puesto que debe ser capaz de utilizarlas, poseer conocimientos y habilidades que le permitan usar a su favor dichas herramientas, pues lo importante no es la tecnología en sí, sino cómo el docente se vale de dichas herramientas para facilitar la construcción del conocimiento de sus alumnos.

Otro requisito importante es la disposición de medios físicos y virtuales para utilizar estas herramientas tecnológicas, además de tener la habilidad de manejar los problemas que se deriven de su uso. Y finalmente, tener la conciencia del nivel de conocimiento tecnológico del que disponen los alumnos ya que esto guiará indudablemente la actuación del docente. Desde esta perspectiva, se debe considerar que,

> para implementar el uso de la tecnología para producir el aprendizaje requiere de la implementación de una nueva pedagogía donde el estudiante debe ser involucrado y motivado a expresar sus opiniones, a responder preguntas de manera libre y establecer colaborativamente estrategias de resolución para los problemas planteados (Moreira, 2003, citado en Jiménez y Jiménez, 2017, p. 4).

Según Elías (2013, p. 17) "las metodologías asociadas al uso de las TIC en el aula de matemáticas comparten entre si el hecho de fomentar que los estudiantes experimenten, manipulen, corrijan, conjeturen, etc.” Todo con un ahorro considerable de tiempo con respecto a los métodos tradicionales de enseñanza de matemáticas y con un núcleo dinámico e interactivo, lo que no solo capta la atención de los jóvenes por ser un método novedoso, sino que permite llevar la enseñanza matemática a un nuevo contexto, en el cual los conceptos abstractos de la matemática se materializan y el alumno puede manipularlos y experimentar con ellos. El mismo autor señala que la educación matemática apoyada en herramientas tecnológicas tiene influencias positivas en dicho proceso de enseñanza-aprendizaje: por ejemplo favorece la interacción con los objetos matemáticos y permite la materialización de dichos conceptos, incluso los más abstractos. Mejora el análisis e interpretación de datos y parámetros por parte del alumnado y muestra su versatilidad para incorporarse a distintas áreas del conocimiento matemático, de ésta manera permite que el alumnado pueda utilizar distintos sistemas de representación para analizar un concepto o un ejercicio matemático y a partir de ello tomar decisiones y escoger el mejor camino para solucionar dicho problema.

En esta investigación se retoma el uso del *GeoGebra* como una herramienta que facilitará la construcción del concepto de derivada, a través de actividades diseñadas para tal fin y en las cuales la modelación y graficación se consideran indispensables.

GeoGebra una Herramienta para la Enseñanza de Cálculo.

Enseñar matemáticas supone de muchos retos, los relativos a la naturaleza del saber mismo, los cognitivos, didácticos y sociales. Esta investigación está centrada en el uso de la tecnología como un recurso didáctico pero también con una herramienta cognitiva, sin embargo,

> hay que tener en claro que la tecnología es una herramienta, y no quita al docente la responsabilidad de realizar sus secuencias de actividades y sobre todo la elaboración de estrategias didácticas, es decir que, aunque el profesor realice la integración de las TICs en la producción y comprensión de conocimientos matemáticos, debe mantener una actitud de reflexión, para que los alumnos empiecen a dominar el ogro de las

> ciencias y dejen de catalogar a las matemáticas como el área inalcanzable y difícil de aprender. (Jiménez y Jiménez, 2017, p. 10)

GeoGebra es una herramienta libre de costo en la cual se pueden modelar cálculos de tipo algebraico y geométrico. Favorece el pensamiento matemático de los alumnos y los ayuda a aumentar su nivel de comprensión de conceptos matemáticos por la representación geométrica atractiva.

Entre las bondades que se pueden dilucidar de *GeoGebra* es la facilidad con la que se puede operar, su interfaz es muy intuitiva y simple y para las generaciones de alumnos que han crecido utilizando tecnologías de todo tipo, representa un método novedoso puesto que convencionalmente la matemática es enseñada de manera algorítmica privilegiando las operaciones abstractas para su comprensión.

> *GeoGebra* no es solo geometría (Geo) al menos como su nombre indica también es álgebra (Gebra), aunque en la realidad, es más, es análisis y también estadística; en definitiva, *GeoGebra* supone una excelente opción para hacer unas matemáticas dinámicas sobre todo en los niveles educativos de Primaria, Secundaria y también Bachillerato. (Carrillo, 2012, p. 2)

GeoGebra no tiene un sentido exclusivo como plataforma para trabajo en la enseñanza, sin embargo una de las virtudes del programa recae en la gran variedad de opciones que podemos encontrar en él, ya que no solo se limita entre, otras cosas acciones, a dibujar o construir, sino que también es capaz de incorporarse a investigaciones, análisis e experimentaciones en el campo de las matemáticas (Carrillo, 2012).

Proporciona estrategias diferentes para plantear los ejercicios, además la posibilidad de introducir parámetros y modificarlos en tiempo real, mientras que podemos apreciar las repercusiones gráficas y geométricas de dicho estudio lo que facilita la exploración dinámica de dichas situaciones. Esto compromete al docente a proponer situaciones en las que el alumno recurra a la gama de posibilidades que brinda el análisis y estudio a través de *GeoGebra,* para que pueda anticipar los resultados y proponer a partir de este conocimiento, soluciones a los problemas que se le presenten en el cotidiano (Jiménez y Jiménez, 2017).

Una de las ventajas que proporciona *Geogebra* recae en la facilidad en la que puede accederse a él,

> aparte de ser un *software* gratuito, también se puede instalar en dispositivos móviles, como tabletas y celulares; además de que existe una versión que se ejecuta sobre los navegadores más conocidos de internet, existen múltiples estudios que muestran a este recurso tecnológico como una herramienta que permite el desarrollo del pensamiento matemático, ya que solo se pueden realizar gráficos, sino también análisis estadísticos como describe la investigación que realizó Inzunsa (2014). (Jiménez y Jiménez, 2017, p. 11)

Las situaciones didácticas y el modo de trabajarlas dependerán de los docentes, sin embargo *GeoGebra* permite a través de su dinamismo, incluso hasta en los ejemplos más simples, introducir nuevos conceptos o investigaciones sin complicar técnicamente al ejercicio. Se pueden plantear actividades que requieran cierto trabajo de manipulación de los objetos, es decir, variar parámetros que permitan reconocer las relaciones entre ellos. Además *GeoGebra* permite visualizar, gracias a su exactitud y a la forma de representar los objetos, la posibilidad de animar las construcciones y realizar acercamientos y analizar ciertos detalles, conceptos o relaciones que en otras circunstancias de trabajo no se lograrían advertir (Carrillo, 2012).

Como se comentó anteriormente, en la práctica profesional de la docencia, el tiempo es un recurso limitado y la velocidad con la que se puede trabajar en *GeoGebra* permite dedicar más tiempo al diseño de situaciones, que suponen una parte importantísima del proceso enseñanza-aprendizaje.

Razón de Cambio

Desde la época antigua el ser humano se ha preocupado y ocupado en fenómenos de cambio, puesto que nuestro mundo está inmerso en constante movimiento. Se ha interesado en un principio por el cambio de la posición del sol, la luna y las estrellas y su relación con la sucesión del día y la noche y cómo estos se conectan con las estaciones del tiempo y por supuesto con los procesos de producción agrícola, por ejemplo. Los aportes de las civilizaciones mesopotámicas, “en particular la babilónica (2000 A.C. a 600 A.C.), constituyen las referencias conocidas más antiguas sobre el estudio de fenómenos de cambio y de la determinación de leyes cuantitativas a través de tablas de representación” (Esqueda, 2014, p. 93).

En la investigación titulada *Razón de Cambio: Un estudio para analizar su construcción a través de las gráficas generadas por el modelo de llenado de recipientes* de Esqueda (2014) menciona que la civilización griega también se interesó en fenómenos que involucraban cambio, más por interés intelectual que práctico, sin embargo sus aportaciones fueron relevantes al sentar las bases de los conceptos de razón geométrica. Tales de Mileto hacia el año 585 A.C. hizo estudios acerca de las proporciones, sentando la génesis de la matematización de las comparaciones entre medidas geométricas de segmentos (Esqueda, 2014).

Sin embargo, los avances más importantes y que originaron un análisis más profundo al pensamiento matemático y lo orientaron en una dirección diferente a la seguida por los griegos, se dieron en esta época (1250-1492), hacia la primera mitad del siglo XIV, cuando los matemáticos del colegio de Mentón, se propusieron predecir, utilizando herramientas matemáticas, el valor de una magnitud física que está cambiando, como la fuerza que actúa sobre un móvil que se desplaza por un camino inclinado. La relación entre la matemática y la física dio origen a una nueva ciencia: la cinemática, que se constituyó con base en el cálculo (Rendón, 2009). En esta nueva relación se encuentran conceptos como el de razón de cambio que son indispensables de ser analizados, sobre todo si se consideran los resultados de la investigación presentados por Serna (2007, p. 36):

desde el plano gráfico, en la construcción de la noción de derivada es importante que el alumno le dé un significado a la pendiente como una razón de cambio; por lo que no es correcto que sea utilizada solamente como una fórmula.

Al respecto de esta concepción de la noción de derivada en Vidal (2012, citado en Hernández, 2015), se menciona que la razón de cambio se entiende como la medida del cambio de una variable con respecto a otra y que un ejemplo de ello es la pendiente, la cual se define como la razón de cambio entre la altura con respecto a la distancia horizontal. En el mismo sentido para Rendón (2009) la razón de cambio es un cociente incremental o de diferencias, en donde el cociente es el cambio o la diferencia en el eje y dividido por el respectivo cambio en el eje x. Cuando este cociente resulte ser el mismo, entonces la razón de cambio es constante, y en otro caso, la razón de cambio es variable.

Hablar del concepto de razón de cambio y de derivada implica conocer previamente aspectos geométricos así como históricos epistemológicos de la recta tangente. No obstante será necesario conocer los problemas que se presentan en la concepción del concepto de derivada, la forma en que construyen los alumnos dicho concepto, y estudiar un enfoque de la enseñanza aprendizaje de dicho concepto.

Aspectos Epistemológicos de la Recta Tangente. A finales del siglo IV a. C., Euclides presentó en los elementos de la Geometría los resultados relativos a la tangente al círculo, y definió la tangente como: se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta. Con el descubrimiento de las secciones cónicas en pleno siglo III a. C., los geómetras griegos, en especial Apolonio de Pérgamo, idearon métodos particulares para el trazo de sus tangentes basándose solamente en las propiedades geométricas de éstas curvas. Fue así como Apolonio logró extender a las cónicas la concepción de tangencia que Euclides había establecido para el círculo. Sin embargo con dichas definiciones se encontraron problemas al tratar de aplicar los métodos euclidianos a otra clase de figuras geométricas (Lehman, 2002).

En esta concepción euclidiana habría que considerar por tanto tres aspectos importantes, primero; la naturaleza de la tangente, puesto que sería considerada como un lugar geométrico, segundo; sobre la significación que le impone la palabra “tocar”, puesto que tocar y cortar no es lo mismo. Y el siguiente aspecto a considerar, es el hecho de que la definición de tangente exige que la recta no vuelva a tocar a la curva en ningún otro punto (Lehman, 2002). Y es que no se puede perder de vista que esta concepción euclidiana de recta tangente impone ciertas limitaciones para su aplicación en curvas distintas a círculos, y por su puesto a su introducción en la matemática escolar, pues los problemas físicos contextualizados exigirán curvas con características geométricas distintas.

Si bien es cierto que el desarrollo de la geometría analítica aclara la relación entre las curvas y las ecuaciones, y el hecho de que de las ecuaciones de dos variables pudiera resultar un sinnúmero de posibilidades de curvas para las cuales el concepto euclidiano de curva no pudiera ser concebido (Lehman, 2002). No fue hasta a mediados del siglo XVII que nuevos métodos fueron estudiados por Descartes, Fermat y otros, quienes se preguntaron ¿Cómo se determina la tangente en un punto determinado, donde la curva y el diámetro coinciden, si se concibe la tangente como una recta que toca, pero no corta a la curva? (Cruse y Lehman, 1982). De esta pregunta surge una idea clave de esta investigación, pues entender los primeros intentos de construcción de tangentes a curvas permite conocer, analizar y adaptar estos mecanismos de construcción a la matemática escolar a través de situaciones didácticas contextualizadas.

Una de estas ideas claves se desprende de lo que en 1638, Pierre Fermat, en su método para hallar máximos y mínimos, propone como una solución novedosa (que más adelante se estudiará en esta investigación) para el problema de las tangentes usando ideas muy cercanas al concepto de infinitesimales. (Cruse y Lehman, 1982). En dichos trabajos Fermat encuentra, por así decirlo, la idea clave de lo que posteriormente será la derivada, y de la cual puede desprenderse un método de construcción de la recta tangente a una curva capaz de reproducirse en *Geogebra* y que puede abonar a la asimilación del concepto de derivada como razón de cambio.

Por supuesto sin perder de vista que la derivada de una función puede expresarse como la ecuación para hallar la pendiente de una recta tangente a dicha curva en cualquier punto, dicha pendiente puede significar un sinnúmero de magnitudes, por ejemplo: área mínima de una caja, volumen máximo de un recipiente, velocidad instantánea de un objeto etc. y es por ello que el problema de encontrar tangentes a curvas ha ocupado interés de muchas personas a lo largo de la historia matemática y se han ideado numerosos métodos para construir tangentes a ciertas curvas especiales.

A continuación se describirán algunos métodos de construcción de tangentes que fueron utilizaron a través de la historia.

Construcción de tangentes a través de la historia. Como se señaló anteriormente, uno de los aspectos fundamentales para la construcción de la concepción de derivada es el aspecto geométrico-gráfico de la derivada.

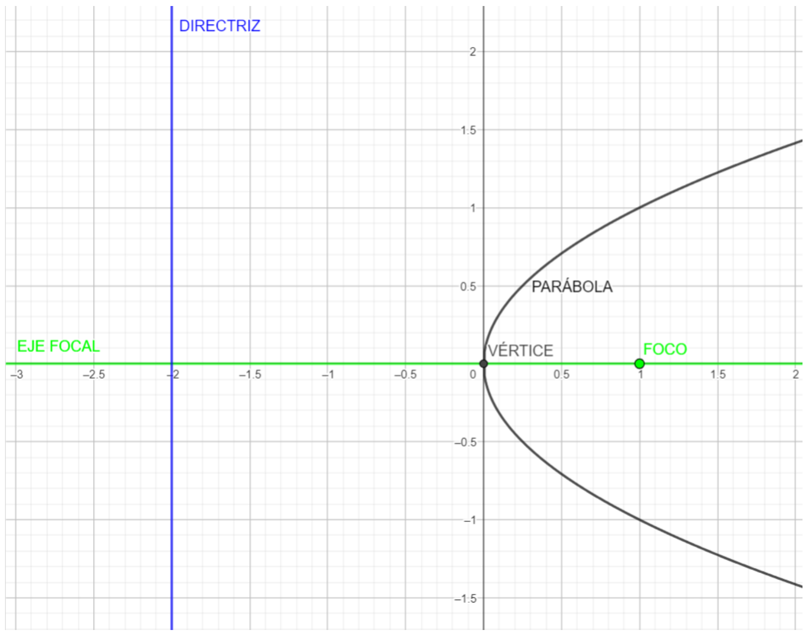
Se sabe que dicha concepción tiene como base a la pendiente de la recta tangente a un punto de la curva dada, por lo tanto cobra sentido e importancia estudiar la construcción de tangentes a través de la historia, para tener un panorama completo del origen de lo que hoy en día se conoce como un algoritmo matemático abstracto que abona a la presente investigación

Construcción de tangentes por los Geómetras Griegos. Los antiguos geómetras griegos tenían una forma de construir tangentes a la parábola. Después del círculo, la parábola es una de las curvas más sencillas que puede encontrarse en la matemática escolar, dicha curva está compuesta de todos aquellos puntos del plano que están equidistantes a un punto fijo llamado foco y a una recta fija denominada directriz de la parábola (Cruse y Lehman, 1982). En la figura 3 pueden apreciarse los elementos que componen a la parábola.

Puede resumirse el método griego de dibujar tangentes a una parábola en tres pasos. Primero debe suponerse que *T* representa un punto a través del cual se quiere hacer pasar una recta tangente. Se llama *P* a un punto sobre el eje focal de la parábola, colocado en la intersección de dicho eje con la recta perpendicular a este que parte desde el punto *T***.** La presente demostración del método griego para dibujar tangentes está basada en lo descrito por Cruse y Lehman (1982):

Figura 3

La parábola

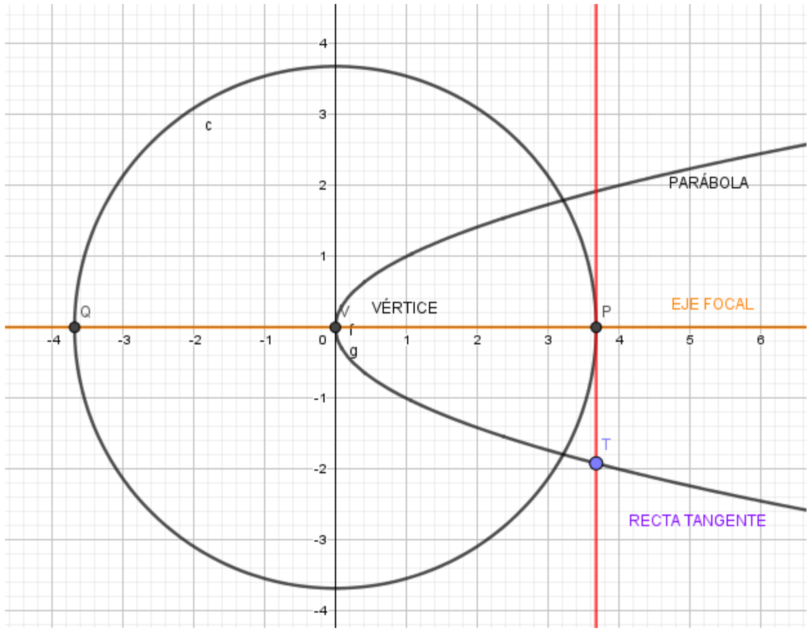


Nota. La figura muestra los elementos más importantes de una parábola. Adaptado de *Lectures on freshman Calculus. [Lecciones de cálculo]* (p. 14), por A. Cruse, y M. Lehman, 1982, Fondo Educativo Interamericano, S. A.

A continuación se traza una circunferencia de radio igual a la distancia existente entre el vértice *V* de la parábola y el punto *P*, haciendo coincidir el centro de la circunferencia con el vértice de la parábola. Como puede notarse en la figura 4, esta circunferencia toca al eje focal en dos puntos, uno de ellos es el punto *P* mientras que al otro será llamado punto *Q* (Cruse y Lehman, 1982).

Figura 4

Trazo de circunferencia de Radio P

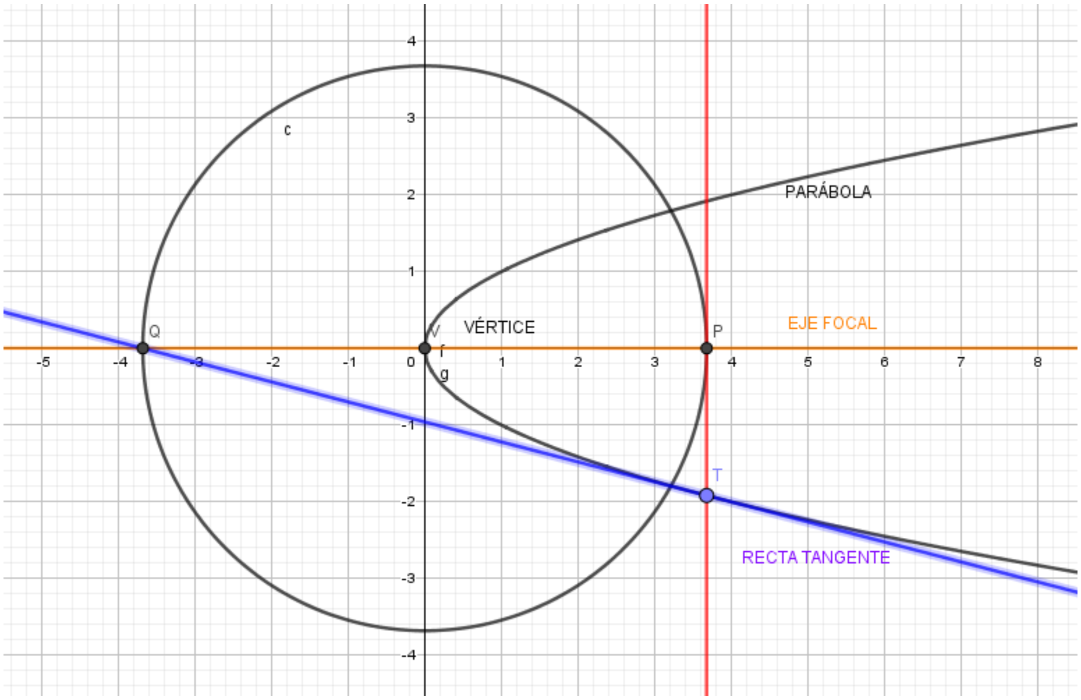


Nota. Adaptado de *Lectures on freshman Calculus. [Lecciones de cálculo]* (p. 15), por A. Cruse, y M. Lehman, 1982, Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Finalmente se dibuja una recta que una los puntos *T* y *Q*, dicha recta es la recta tangente a la parábola en el punto *T*, tal y como puede verse en la figura 5 (Cruse y Lehman, 1982).

Figura 5

Construcción de la tangente a la parábola



Nota. Adaptado de *Lectures on freshman Calculus. [Lecciones de cálculo]* (p. 15), por A. Cruse, y M. Lehman, 1982, Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Este procedimiento para trazar tangentes inventado por los griegos, aunque efectivo, es limitado pues se basa en las propiedades geométricas de la parábola, por lo que sólo es válido únicamente para este tipo de curvas.

El Método de Descartes. No fue sino hasta después de la invención de la geometría analítica, al final del siglo XVII, que se hizo un progreso unificado, significativo y tangible en el método para encontrar la recta tangente a una curva. René Descartes se esforzó por crear un procedimiento uniforme por medio del cual fuera posible encontrar las tangentes a una curva sin importar la naturaleza geométrica de esta. Y aunque hoy sabemos que no fue del todo exitoso en tal objetivo, el método que ideó, hoy conocido como el método de las raíces iguales fue un acercamiento importante e ingenioso que significó un gran avance en la solución del problema de las tangentes a curvas (Cruse y Lehman, 1982).

El método de Descartes de las raíces iguales parte del supuesto de que una recta secante toca a una curva en dos puntos, uno de ellos conocido y que al mismo tiempo representará al punto de tangencia. Mientras que del otro punto se desconocen las coordenadas. Estos dos puntos sobre la curva representan las dos intersecciones de la recta secante y la curva en cuestión, con el punto conocido se plantea la ecuación de la recta secante dejando como incógnita obviamente a la pendiente de dicha recta. La ecuación de la curva en función de la variable independiente se iguala a la ecuación de la recta que también está en función de la variable independiente pero al mismo tiempo, se encuentra como incógnita a la pendiente de la recta. A continuación, para resolver la ecuación encontrada; se procede a dar paso a la consideración más interesante del método de Descartes: debido a que se desea encontrar la recta tangente a la curva, se supone entonces que la recta y la curva sólo se tocan en un punto, por lo que la resolución de dicha ecuación se hace con esta consideración como eje central del método, lo que resulta en el hallazgo de la pendiente de la recta tangente a la curva (Cruse y Lehman, 1982).

Por simplicidad se demostrará el Método de Descartes de las raíces iguales en una parábola $y = x^2$ y el punto de tangencia será el (2, 4). Cabe señalar que la siguiente demostración está basada en Cruse y Lehman (1982):

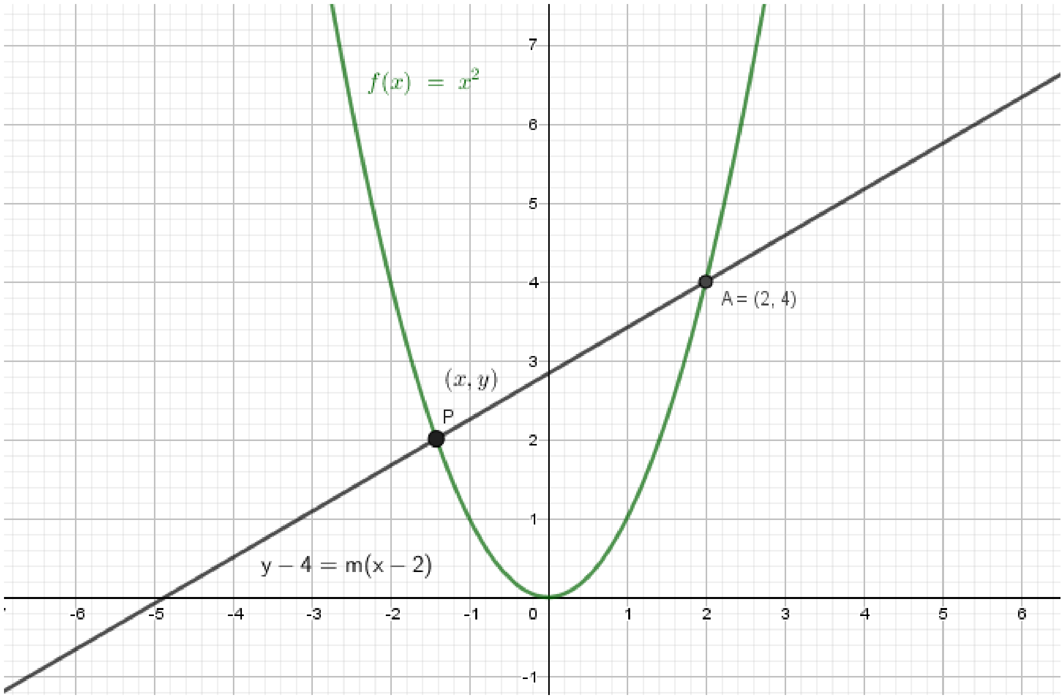
Así como señalan Cruse y Lehman (1982), primero se considera la ecuación de una recta cualquiera que pasa por el punto (2, 4), sin embargo el valor de la pendiente al momento es desconocido, por lo que sólo se dejará expresado:

$$y - 4 = m(x - 2)$$

Dicha recta se puede considerar como una recta secante que además de pasar por el punto (2, 4) también pasa por un punto arbitrario P(x, y), tal como puede observarse en la figura 6 (Cruse y Lehman, 1982).

Figura 6

Trazo de recta secante sobre parábola



Nota. Adaptado de *Lectures on freshman Calculus. [Lecciones de cálculo]* (p. 25), por A. Cruse, y M. Lehman, 1982, Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Para determinar las coordenadas (x, y) de los puntos de intersección con la parábola Cruse y Lehman (1982) indican que se igualan y resuelven las ecuaciones de manera simultánea:

$$y - 4 = m(x - 2)\ldots(1)$$

$$y = x^2\ldots(2)$$

Se sustituye el valor de (2) en (1):

$$x^2 - 4 = m(x - 2)$$

Se acomodan los términos:

$$x^2 - mx + (2m - 4) = 0$$

Lo que resulta en una ecuación de segundo grado, que puede resolverse usando la fórmula general del álgebra para hallar los valores de "x" que en este caso representa a las abscisas de los puntos en donde la secante corta a la curva Cruse y Lehman (1982).

$$x = \frac{m \pm \sqrt{(-m)^2 - 4(1)(2m-4)}}{2}$$

O Simplemente:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m + 16}}{2}$$

Así pues Cruse y Lehman (1982) hacen notar que los signos $\pm$ significan que entre la parábola y la recta hay dos puntos de corte, y es ahí donde la genialidad de Descartes cobra relevancia, puesto que él propone, basado en la suposición de que la recta es una tangente en realidad y que por lo tanto sólo existe un punto en donde se toca la recta y la curva por lo que se obliga a que la solución en lugar de tener dos valores de *x* solo tenga uno, puesto que la recta tangente sólo toca a la parábola en un punto, esto se logra haciendo que el discriminante de la ecuación sea igual a cero, por lo que sólo habrá una solución simultánea para la ecuación de la recta y la parábola. Lo que se traduce como:

$$\sqrt{m^2 - 8m + 16} = 0$$

Descartes entendió que cuando las ecuaciones de la recta y la parábola tuvieran una sola solución simultánea: (2, 4), esto significaría que la recta es tangente a la parábola. Y al resolver la ecuación y hallar que ambas raíces eran iguales Descartes concluyó que había encontrado la pendiente de la tangente (Cruse y Lehman, 1982).

Resolviendo entonces la ecuación dentro del radical como lo señalan Cruse y Lehman (1982), se obtiene que $m = 4$. Y para este valor de *m* obviamente se tiene que las dos raíces de la ecuación de segundo grado del principio son iguales.

Finalmente la ecuación de la tangente buscada estará dada por:

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 4$$

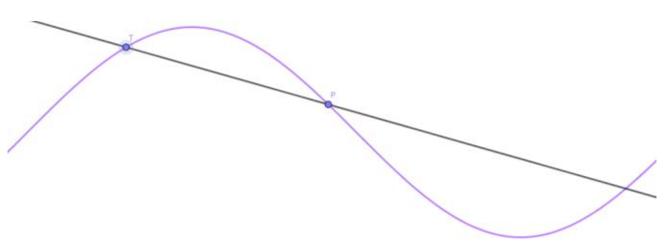
El método de Descartes también trabaja con otras curvas distintas de la parábola, como circunferencias o cualquier otra curva que pueda ser representada por una ecuación de segundo grado, de ahí su relevancia. Sin embargo falla para todas las curvas descritas por ecuaciones de tercer grado. En su tiempo, el método de Descartes representó un verdadero adelanto en el tema. Y sus ideas fueron pronto retomadas por otro matemático del siglo XVII: Pierre Fermat.

El Método de Fermat. Pierre Fermat logró desarrollar un método exitoso donde Descartes falló, y pudo resolver el problema de las tangentes, encontrando una forma de determinar sus ecuaciones para cualquier tipo de curva (Cruse y Lehman, 1982).

Fermat basó su método en la idea que se presenta a continuación. Así como lo describen Cruse y Lehman (1982), en una curva se trazan dos puntos, *T* y *P*, tales que por ellos se pueda hacer pasar una recta, que por las condiciones de trazo será una secante, puesto que pasa por los dos puntos antes mencionados tal y como puede verse en la figura 7.

Figura 7

Secante a una curva

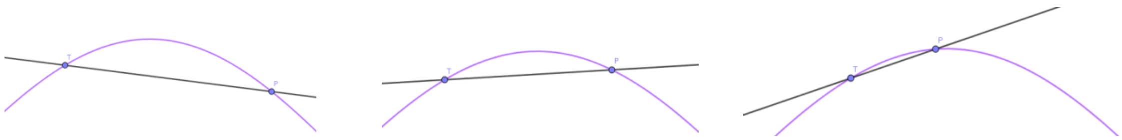


Nota. Adaptado de *Lectures on freshman Calculus. [Lecciones de cálculo]* (p. 32), por A. Cruse, y M. Lehman, 1982, Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Puede suponerse que el punto *P* se mueve a lo largo de la curva de tal suerte que se acerca a la posición del punto *T*, Fermat se dio cuenta que cuando esto sucede la recta secante se aproxima a la posición de una recta tangente hipotética trazada sobre el punto *T* tal y como puede apreciarse en la figura 8 (Cruse y Lehman, 1982).

Figura 8

Secante que tiende a Tangente



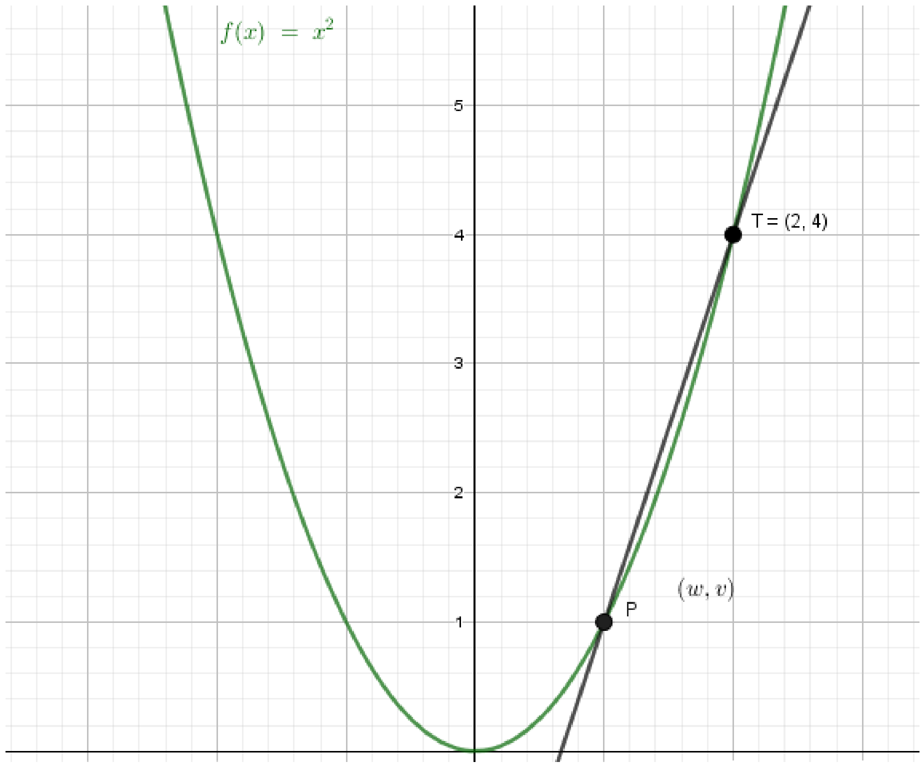
Nota. Adaptado de *Lectures on freshman Calculus. [Lecciones de cálculo]* (p. 33), por A. Cruse, y M. Lehman, 1982, Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Esta ingeniosa idea, apoyada en las herramientas proporcionadas por la geometría analítica abre la puerta a la solución del problema de trazar rectas tangentes a cualquier tipo de curva (Cruse y Lehman, 1982).

A continuación se presenta un ejemplo extraído de Cruse y Lehman (1982) del método de Fermat. Sea la curva $y = x^2$ y el punto de tangencia será el (2, 4). Indicando como punto *P* a un punto de la curva cercano a *T*, teniendo coordenadas (w, v) como se muestra en la figura 9.

Figura 9

Recta secante sobre parábola



Nota. Adaptado de *Lectures on freshman Calculus. [Lecciones de cálculo]* (p. 33), por A. Cruse, y M. Lehman, 1982, Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Lo que se busca es la recta tangente a la curva en el punto *T*, y se sabe que su ecuación puede expresarte en término de *x* y *m* de la siguiente manera:

$$y - 4 = m(x - 2)$$

Donde *m* representa a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de tangencia, sin embargo de principio se considera que la recta es secante y está determinada por los puntos *P* y *T*, por lo que su pendiente está determinada por:

$$Pendiente\ PT = \frac{v - 4}{w - 2}$$

Según lo que señalan Cruse y Lehman (1982), el punto *P* pertenece a la parábola, sus coordenadas (w, v) deben satisfacer la ecuación de la parábola $y = x^2$, por lo que dicha ecuación puede reescribirse como $v = w^2$, de igual manera, la ecuación de la pendiente puede expresarse como:

$$Pendiente\ PT = \frac{w^2 - 4}{w - 2}$$

De esta manera se reemplaza el valor de *v* y la pendiente de la secante queda expresada sólo en término de *w*, que representa la abscisa del segundo punto donde la secante corta a la tangente. Cuando el punto *P* se mueve a lo largo de la curva, hacia el punto *T*, entonces su primer coordenada *w*, se aproxima al valor de 2. Si w=2 la función se indetermina puesto que la división por cero no está definida, por lo que alternativamente se busca la solución utilizando factorización algebraica (Cruse y Lehman, 1982).

$$Pendiente\ PT = \frac{w^2 - 4}{w - 2} = \frac{(w + 2)(w - 2)}{w - 2}$$

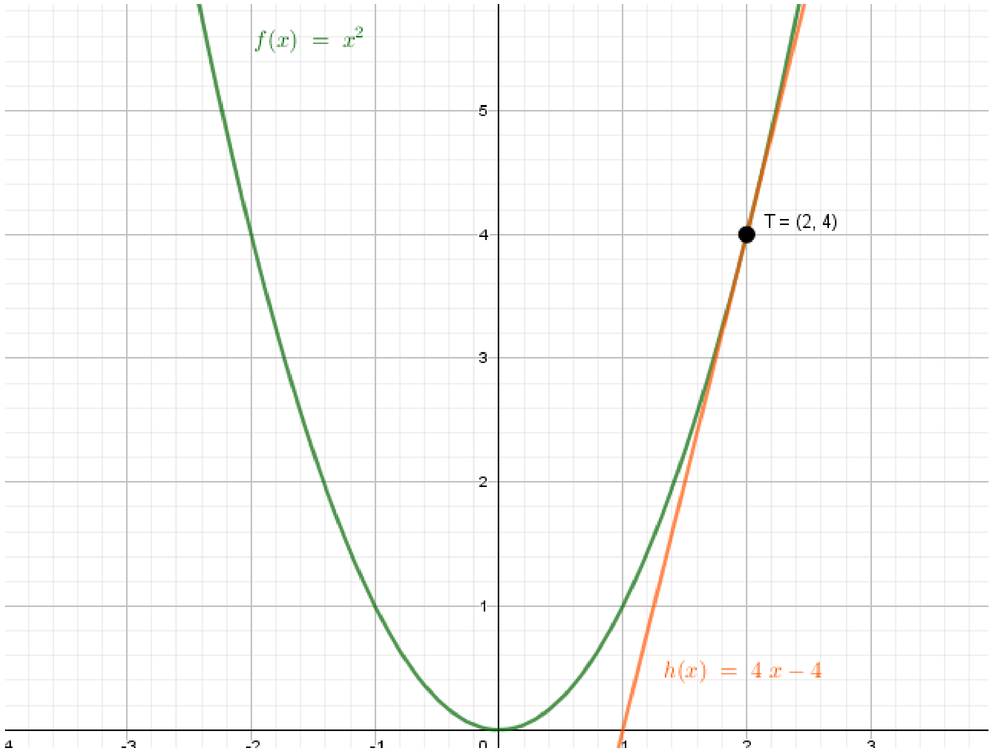
$$\therefore Pendiente\ PT = w + 2$$

$$\rightarrow Pendiente\ PT = 4$$

Lo que significa que el valor de la pendiente de la recta cuando el punto *P* se aproxima al punto *T* es de 4, la aproximación a la que se hace referencia es tan infinitamente cercana, que significa que la recta secante tiende a una recta tangente, por lo que de este modo se halla en realidad la pendiente de la tangente a la curva en el punto *T*, lo que puede apreciarse en la figura 10 (Cruse y Lehman, 1982).

Figura 10

Parábola y su tangente hallada con el método de Fermat



Nota. Adaptado de *Lectures on freshman Calculus. [Lecciones de cálculo]* (p. 33), por A. Cruse, y M. Lehman, 1982, Fondo Educativo Interamericano, S. A.

A continuación se puede ver al método trabajar sobre una función cúbica para un punto tangente general *T*(x,y), es decir qué se encontrará la fórmula general para hallar pendientes a una curva cúbica.

$$y = x^3$$

Para esto se sigue los mismos pasos utilizados en el ejemplo anterior: Se plantea en primer lugar la ecuación de la pendiente de la recta secante:

$$Pendiente\ PT = \frac{v - y}{w - x}$$

La función $y = x^3$ puede expresarse como: $v = w^3$ y sustituirla en la ecuación de la pendiente PT:

$$Pendiente\ PT = \frac{w^3 - x^3}{w - x}$$

El límite de dicha pendiente cuando *w* se aproxima a *x* será la pendiente de la recta tangente a la curva, sin embargo se debe realizar un tratamiento algebraico para que la función no se indetermine:

$$Pendiente\ PT = \frac{w^3 - x^3}{w - x}$$

$$Pendiente\ PT = \frac{(w - x)(w^2 + wx + x^2)}{w - x}$$

$$Pendiente\ PT = (w^2 + wx + x^2)$$

Si *w* se aproxima infinitamente a *x* se tiene que:

$$Pendiente\ PT = (x^2 + x * x + x^2)$$

$$Pendiente\ PT = m(x) = 3x^2$$

Puede concluirse rápidamente que se ha hallado la ecuación para calcular la pendiente a una curva de la forma $y = x^3$, en cualquier punto (x, y) además de probar que el método de Fermat funciona en donde aún los métodos anteriores fallaron, y siembra la idea clave para la invención del Cálculo diferencial (Cruse y Lehman, 1982).

Además en este método se ilustra de manera práctica y muy clara cómo se encuentra ligado el concepto de pendiente de una recta tangente a una curva y su relación con la derivada de dicha función, por lo que para el presente estudio se partirá de esa idea y será a través de la geometría dinámica que se construirá la gráfica de la derivada de una función a partir de la pendiente de una recta tangente a dicha curva.

Capítulo III. Metodología

Como se mencionó en el apartado correspondiente al marco teórico, para la presente investigación se ha elegido a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa para fungir como el marco de referencia desde el cual se analizará el problema de investigación, pues dicha teoría se ocupa de estudiar aquellos fenómenos relacionados con la construcción social del conocimiento matemático. Sin embargo aún está pendiente presentar al lector la metodología que se utilizará para obtener la información que servirá de soporte al presente estudio. Para ello, no se puede dejar de considerar a Cantor (2002) pues menciona que resulta conveniente trabajar con distintos tipos de paradigmas metodológicos para estudiar una realidad social. Así mismo en su estudio *Certezas en jaque. Un estudio sobre los alcances de la inseguridad*, aborda las ventajas de utilizar a los enfoques cualitativos y cuantitativos de forma tal que ambos enfoques coexistan y se complementen el uno al otro en las investigaciones sociales.

Es importante precisar lo que se entiende por estos enfoques, de acuerdo con Lafuente y Marín (2008), la investigación podrá ser cualitativa o cuantitativa según la naturaleza de las variables. Una investigación cuantitativa se ocupa de la observación de variables numéricas concretas susceptibles a tratamiento estadístico, mientas que una investigación cualitativa trabaja con datos descriptivos.

Al respecto de la metodología para una investigación Cea D'Ancona, (1999); Cortés et al. (1996), Gallart, (1992), en Cantor (2002), señalan que escoger una estrategia de investigación implica elegir los métodos y el tipo de información con el que se trabajará. Es decir que se establecen:

> cuáles son los aspectos del problema a investigar que serán abordados y de qué manera se intentará dar cuenta de los mismos. Esto significa que la decisión acerca del tipo de información con el cual operar tiene lugar desde el mismo momento en que comienza a delimitarse el objeto de estudio. (Cantor, 2002, p. 3)

Por lo anteriormente expuesto, se considera a la metodología como una parte medular de cualquier investigación, que no solo debe proveer los datos para su análisis, sino que debe ajustarse perfectamente al tipo de estudio que se realiza. Para esta tesis, la metodología debe considerar que el conocimiento matemático se forma a través de la interacción social del individuo con sus pares y que dicha construcción se ve alterada por el contexto social y cultural en donde se lleva a cabo.

Así pues, para la presente investigación se ha escogido al Esquema Metodológico elaborado por Gabriela Buendía y Gisela Montiel, pues como menciona Cantoral (2013), es un "intento genuino por organizar metodológicamente el asunto de las investigaciones en el programa socioepistemológico" (p. 168).

En este esquema, las autoras exponen que la epistemología de prácticas puede organizarse a través de un esquema general perfectible. Considerando los siguientes aspectos:

> Conocimiento situado: atiende a las circunstancias y a los escenarios socioculturales particulares, caracterizándolo como el fruto de las interacciones entre epistemología y factores sociales.
>
> Producción de objetos de conocimientos: Las acciones del individuo responden a su pertenencia a un grupo social, a su presencia en escenarios específicos y a la influencia de diversas instituciones. (Jonapá, 2017, p. 74)

Dicho esto, debe señalarse que para la presente investigación también se utilizará a la Ingeniería Didáctica cómo metodología para el diseño de la situación problema. Es decir que se utilizarán metodologías que son complementarias entre sí, ya que por un lado se hará uso del esquema metodológico que está orientado a las investigaciones cualitativas, y por otro se utilizará a la ingeniería didáctica que arrojará datos a través del diseño de una situación didáctica, partiendo de un análisis preliminar del fenómeno de estudio.

Es importante señalar que “la combinación de perspectivas metodológicas diferentes para abordar distintas aristas de un mismo fenómeno, […] [permite] combinar diferentes niveles de análisis: lo macro y lo micro, lo sincrónico y lo diacrónico, lo subjetivo y lo estructural, entre otros pares dicotómicos” (Cantor, 2002, p. 12). Para la concreción de los diferentes propósitos de la investigación es necesario que ambas perspectivas metodológicas sean complementarias, ya que es a través de ello que se vuelve posible una investigación más a fondo. Como menciona Cantor (2002) la triangulación metodológica permite obtener de manera más amplia y profunda, el conocimiento ligado al objeto de análisis. Es importante enriquecer los análisis cualitativos con análisis cuantitativos, lo que permitirá *a posteriori* conocer de manera más integral al fenómeno en cuestión.

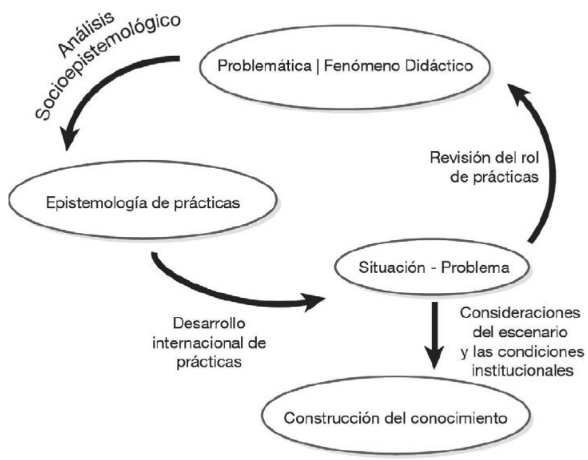
A continuación se describirá más a detalle ambas metodologías y la forma en que se aplicarán en el presente estudio.

El Esquema Metodológico

Como se mencionó anteriormete, la metodología que se utilizará para el presente estudio será el Esquema Metodológico para la investigación socioepistemológica propuesto por Gisela Montiel Espinoza y Gabriela Buendía Ávalos (*Figura* 11). Dicha Metodología hace uso de un cuerpo teórico pero se apoya en la experimentación para validar los resultados. Este esquema busca concordar con una serie de supuestos iniciales de la Socioepistemología, como por ejemplo que estudia la construcción social del conocimiento, es decir, de un conocimiento situado abordando su caracterización como el producto de las interacciones entre epistemología y factores sociales. “La investigación socioepistemológica confiere a la actividad la función de producir objetos de conocimiento” (Cantoral, et al., 2006 citado en Montiel y Buendía, 2012, p. 62), mientras reconocemos que las acciones del individuo están directamente relacionadas y con base a una pertenencia social, a su participación en distintos escenarios y a la influencia que tienen sobre él diversas instituciones, sin olvidarnos que es un ser social por naturaleza y que por tanto piensa y actúa en consecuencia (Montiel y Buendía, 2012).

Figura 11

El esquema metodológico



Nota. Tomado de Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones por G. Montiel y G. Buendía, 2012, en *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones* (p. 63), por A. Rosas, y A. Romo, 2013, Lectorum.

En consecuencia, interesa identificar aquello que norma la actividad humana, lo que en la teoría epistemológica se conoce como práctica social, de la que surge el conocimiento matemático y norman la construcción del conocimiento matemático, “se hace necesario reconocer su manifestación a través de sus usos en distintos escenarios” (Montiel y Buendía, 2012, p. 63). Una vez identificada, se procede a plantear la problemática de estudio.

Para enmarcar una problemática o un fenómeno didáctico en la Socioepistemología, se debe problematizar el saber de manera explícita. Toda vez que haya sido enmarcada la problemática se debe plantear las preguntas de investigación como una forma de acercarse a ella. “Con el propósito de conocer, comprender y explicar procesos de construcción y transmisión del conocimiento matemático, la

Socioepistemología emprende un análisis de corte epistemológico" (Montiel y Buendía, 2012, p. 67).

Después de plantear el problema y una vez definidas las preguntas de investigación, así como los objetivos, se procede a realizar revisiones y los análisis pertinentes basados en las prácticas y en los usos del saber, además de lo que caracteriza la naturaleza del saber matemático y cómo se logra apropiarse de estos saberes a través de sus significados contextualizados y de su transmisión (Montiel y Buendía, 2012, 2013).

Estas revisiones pueden realizarse desde una o varias dimensiones que se articulan entre sí. Cada una de estas revisiones implica un tipo de investigación, e imperan métodos específicos para la obtención de datos.

Momento: Epistemología de Prácticas

El primer momento del esquema metodológico es la epistemología de prácticas, resultado de un análisis socioepistemológico que "pretende formular una explicación acerca de la problemática educativa en cuestión o dar una visión alternativa con relación al fenómeno didáctico que se estudia; pero, además, será la base para cualquier intervención didáctica" (Montiel y Buendía, 2012, p. 72).

Situación Problema

A continuación, en el esquema metodológico tenemos a la situación problema, la cual debe dar cuenta de la significación del conocimiento matemático. Podemos entender a una situación problema como una estructura o conjunto de elementos y condiciones de un fenómeno o preguntas que generen una problematización y sean el instrumento que permita el desarrollo de acciones en el sistema didáctico.

> El papel que tiene una situación problema para resignificar y revisar así el rol de las prácticas en el fenómeno didáctico […] exige que en su diseño y en lo que se busque con ella […] se empleen herramientas metodológicas adecuadas a cada caso. (Montiel y Buendía, 2012, p. 76)

Es decir, se debe elegir adecuadamente las herramientas mediante las cuales se realizará la recolección de datos para la presente investigación, ya que estas herramientas metodológicas marcarán el camino por el cual se conducirá el estudio. Para este caso, se hará dicha recolección de información a través de una situación problema, diseñada mediante ingeniería didáctica.

Hacia la Construcción del Conocimiento

Y finalmente, el último momento hacia la construcción del conocimiento:

> una situación problema da cuenta de la resignificación del conocimiento matemático. Si consideramos que esta resignificación busca referirse a la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, tendrá que considerarse plenamente al escenario y las condiciones institucionales para proponer, por ejemplo, la reorganización de la matemática escolar. (Montiel y Buendía, 2012, p 77)

Es importante señalar que para esta investigación será necesario considerar la naturaleza epistémica de la derivada, misma que se ha señalado anteriormente para esta situación didáctica en particular, así como la intencionalidad de las actividades que se diseñarán para lograr la construcción del saber en cuestión.

Elementos Claves de la Investigación

Esta investigación surge como respuesta a la necesidad de incorporar a la enseñanza del cálculo diferencial un enfoque tecnológico sobre la razón de cambio a través de fenómenos físicos con *Geogebra*, esto apoyado en la práctica social de predicción acuñada en la Socioepistemología.

La metodología elegida para esta investigación es el esquema metodológico de Buendía y Montiel (figura 12) que ya se ha descrito anteriormente, resaltando que la recolección de la información será a través de una situación problema diseñada en el marco de la ingeniería didáctica, que a su vez permitirá el análisis de los mismos. A continuación se describirán los elementos claves del esquema metodológico al tiempo que se relacionan con los concernientes a esta investigación.

A partir del esquema metodológico anterior se estructura la investigación, reconociendo cada momento de él como se muestra a continuación:

Problemática

La enseñanza convencional de cálculo, entendiendo como convencional aquella que no se apoya en elementos tecnológicos, dista mucho de facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje y abonar a la concepción del concepto de derivada comparada con aquel enfoque en el que sí se privilegia la tecnología como herramienta cognitiva en la utilización de problemas físicos contextualizados a la realidad del alumno. Se propone por lo tanto una serie de situaciones apoyadas en *Geogebra* como medio para lograr que el alumno logre un aprendizaje significativo de la razón de cambio y su relación con la derivada de una función.

La presente investigación se llevará a cabo con alumnos del 6º semestre del Telebachillerato núm. 100 Carlos Olmos, ubicado en el ejido Vicente Guerrero, perteneciente al municipio de Salto de Agua, Chiapas. Específicamente se trabajará con los 13 alumnos que pertenecen al área de físicos matemáticos. Del total de estudiantes, 9 son hombres y 4 mujeres, todos de ascendencia indígena, hablantes como primeras lenguas: tzeltal y chol. Dicha investigación se realizará a principios del semestre par del ciclo escolar 2023-2024, y la puesta en escena de la situación didáctica constará de 2 sesiones de 2 horas cada una.

Situación Problema

Debe tenerse en cuenta que el diseño de la situación didáctica representa un punto clave de esta investigación, puesto que será la herramienta que se utilizará para la obtención de la información, y sobre la cual partirá el análisis.

> El papel que tiene una situación problema para resignificar y revisar así el rol de las prácticas en el fenómeno didáctico […] exige que en su diseño y

> en lo que se busque con ella […] se empleen herramientas metodológicas adecuadas a cada caso. (Montiel y Buendía, 2012, p. 76)

Dicho diseño, como se mencionó anteriormente será realizado a través de la ingeniería didáctica, a continuación se describe dicha metodología.

Ingeniería Didáctica

La recolección de datos pertinentes a esta investigación será realizada a través de una situación problema apoyada en *Geogebra*. Dicha situación problema será diseñada en concordancia con el marco de la ingeniería didáctica, que será la herramienta que permita resignificar y revisar el rol de las prácticas en la problemática educativa, sin dejar de lado el cuerpo teórico del que se apoya el Esquema Metodológico propuesto por Montiel y Buendía.

En el campo de la didáctica de las matemáticas surgió en los años ochenta la noción de ingeniería didáctica. Denominada de esta manera por la similitud con el trabajo ingenieril, en el que el conocimiento científico propio de la disciplina se somete al control científico (Artigue et al., 1995).

La ingeniería didáctica está caracterizada por un esquema experimental basado en el proceso de creación de una situación didáctica, que comprende desde su concepción, hasta su análisis posterior. También se caracteriza por el registro en que se ubica y las formas de validación con las que se asocia (Artigue et al., 1995).

A continuación se describe la metodología de la ingeniería didáctica, distinguiendo las cuatro fases que componen a su proceso experimental. La primera de ellas es el análisis preliminar, la fase número dos se refiere a la concepción y al análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería, la tercera fase corresponde a la experimentación y la cuarta y última fase, es la de análisis *a posteriori* y evaluación.

Los Análisis preliminares

Los análisis preliminares constituyen la primera fase de la metodología de la ingeniería didáctica. En dicha fase se tienen en consideración cuerpos teóricos, conocimiento previo y el análisis de ciertas concepciones epistemológicas y didácticas. “La fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares” (Artigue et al., 1995, p. 38).

A continuación se enlista los que Arigue et al. (1995) señala como los análisis preliminares contemplados con mayor frecuencia:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza. Que básicamente se centra en analizar el contenido desde su origen y el tiempo que le ha tomado esa formulación, es decir que este análisis se centra en el concepto mismo.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos. Que es donde se analiza al concepto desde la forma en que se enseña, es decir la bibliografía utilizada, los programas institucionales, etc.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución. Es decir que se analizan las características de los sujetos a los que se va a dirigir el concepto, lo que podríamos categorizar como el diagnóstico del grupo al que vamos a dirigir nuestra metodología
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. Que básicamente se refiere a distinguir las restricciones que se oponen al desarrollo de los cuadros matemáticos, desde la dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica.

Dichos análisis se llevan a cabo sin perder de vista cuáles son los objetivos que persigue la investigación. Así pues la presente investigación se centra en analizar la noción geométrica y gráfica de la derivada desde su origen, cómo surge su concepción y evolución así como el tiempo que le ha tomado formularse como tal. También se describirá la forma de enseñanza tradicional en el nivel de Telebachillerato estatal, y la bibliografía existente para tal fin. Se realizará un diagnóstico de los sujetos sobre los que se centra la presente investigación, para determinar las dificultades existentes para la apropiación del concepto señalado.

Análisis a Priori

En esta fase de la metodología de la ingeniería didáctica es donde se realiza el diseño de la secuencia didáctica. "En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones" (Artigue et al., 1995, p. 42).

Este diseño de secuencia didáctica debe describirse puntualmente, por ejemplo definir cuál será la terea a realizar, el tiempo en que se llevará a cabo, el rol docente, variables, posibles errores, etc. Apoyado desde luego en el análisis preliminar descrito anteriormente. Esto permite que el proceso de validación de dicha metodología comience desde su propia concepción, ya que como se mencionó anteriormente, el diseño propio de la situación didáctica toma en consideración a la primera fase.

> Una de las originalidades de la metodología de la ingeniería didáctica […] reside en el modo de validación que es en esencia interna. Desde la misma fase de concepción se empieza el proceso de validación, por medio del análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería, directamente ligada a la concepción local de esta última. (Artigue et al., 1995, p. 44)

Se analiza lo que un estudiante podría aprender de esta situación didáctica, tomando en consideración lo que es posible que realice dado sus acciones, decisiones, etc. (Becerra et al., 2018).

Experimentación y Análisis a Posteriori

En la tercera fase, la situación didáctica es implementada, es decir, la secuencia didáctica es presentada a los sujetos de la investigación con la finalidad de que interactúen con ella, y a través de esta herramienta metodológica se puedan registrar diversos tipos de datos. Una vez obtenidos estos datos, se continúa con la cuarta fase de la ingeniería didáctica, que es el análisis de los datos obtenidos. Después de la fase de experimentación:

> sigue una de análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. (Artigue et al., 1995, p. 48)

Este análisis *a posteriori* se trata del contraste entre el análisis a *priori*, y la experimentación, es decir lo que se planteó y lo que se ha obtenido. La consonancia de este contraste será lo que le dará validación a la metodología, esto en concordancia con los objetivos de investigación (Becerra et al., 2018).

Diseño de la secuencia didáctica

Como se mencionó anteriormente, el proceso experimental de la Ingeniería Didáctica se compone de cuatro fases articuladas entre sí: la primera de ellas es el análisis preliminar que contempla al conocimiento previo, se describe la forma en cómo ha sido tratado, las características de los estudiantes y las restricciones existentes para llevar a cabo la secuencia; la fase número dos se refiere a la concepción y al análisis a *priori* de la situación didáctica, es donde se realiza el diseño; en la tercera fase se lleva a cabo la experimentación, se presenta pues la situación a los alumnos para que interactúen con ella. Y como fase final, se realiza el análisis *a posteriori* y la evaluación en donde se contrasta lo esperado con lo obtenido (Esqueda, 2014).

Fase de planeación. Análisis preliminares

En esta fase del proceso se tratan principalmente tres dimensiones: en primera instancia se centra en la didáctica, es decir en el análisis de los planes y programas de estudio del Telebachillerato estatal; la cognitiva que se asocia a los procesos de construcción del conocimiento de los alumnos y finalmente la dimensión histórica epistemológica, que se refiere a aquella relacionada con el saber en cuestión.

Programas de estudios

El Telebachillerato en Chiapas, subsistema de educación media superior del estado al cual pertenece el Telebachillerato núm. 100 Carlos Olmos, opera con el marco curricular común (MCC) para la educación media superior (EMS) desde 2009 a partir de la reforma integral de la educación media superior (RIEMS), sin embargo para el ciclo 2023-2024 se comienza un cambio en la EMS a través de la introducción de un nuevo marco curricular común para la educación media superior (NMCCEMS), como parte del enfoque propuesto por el proyecto de la Nueva Escuela Mexicana (NEM).

Actualmente el Telebachillerato en Chiapas funciona con ambos marcos curriculares, al MCC de la RIEMS le quedan aún un par de años puesto que ha comenzado su etapa de liquidación el presente ciclo escolar 2023-2024, al mismo tiempo que ha comenzado su implementación el NMCCEMS de la NEM. Lamentablemente este último aún continúa en etapa de construcción y no están disponibles los programas de estudios de la materia de matemáticas de los semestres tres, cuatro, cinco y seis, por lo que es imposible conocer el tratamiento que tendrá la materia de matemáticas durante los semestres avanzados. Para la presente investigación, bastará con el análisis de los programas de estudios de la materia de matemáticas en el MCC de la RIEMS, puesto que es el que está actualmente en operación en los semestres avanzados, sin embargo esto no excluye que el análisis realizado pueda ser usado como punto de partida para el diseño de la propuesta educativa para el contenido matemático del NMCCEMS en los semestres faltantes.

El marco curricular común basado en competencias es uno de los ejes que comprende la propuesta de la RIEMS diseñada en 2008, el segundo eje es el que define y regula las distintas modalidades de la EMS, mientras que el tercero plantea la mejora de la educación a través de la gestión y mejoramiento de infraestructura y profesionalización docente así como el libre tránsito entre subsistemas. Finalmente el cuarto eje está relacionado con la certificación nacional complementaria como búsqueda da la identidad compartida por todos los subsistemas de EMS (Razo, 2017).

A continuación, en la figura 12 se presenta el mapa curricular correspondiente al Telebachillerato estatal de Chiapas. En dicha figura se puede apreciar las materias correspondientes a cada semestre, tanto del tronco común como las de los últimos semestres que corresponden a las de asignaturas de especialidad. Posteriormente se analizarán los programas de estudio de la materia de matemáticas para rastrear las concepciones relacionadas al tema de investigación y de esta manera poder delimitarlo.

Figura 12

Mapa curricular del Telebachillerato en Chiapas (RIEMS)

PRIMER SEMESTRE		SEGUNDO SEMESTRE		TERCER SEMESTRE		CUARTO SEMESTRE		QUINTO SEMESTRE		SEXTO SEMESTRE	
ASIGNATURA	H/C	ASIGNATURA	H/C	ASIGNATURA	H/C	ASIGNATURA	H/C	ASIGNATURA	H/C	ASIGNATURA	H/C
MATEMÁTICAS I	5/8	MATEMÁTICAS II	5/8	MATEMÁTICAS III	5/8	MATEMÁTICAS IV	5/8				
QUIMICA I	5/8	QUIMICA II	5/8	FISICA I	5/8	FISICA II	5/8				
				BIOLOGIA I	3/6	BIOLOGIA II	4/6	GEOGRAFIA	4/8	ECOLOGIA Y MEDIO	3/6
ETICA Y VALORES I	3/6	ETICA Y VALORES II	3/6							FILOSOFIA	4/6
INTRODUCCION A LAS CIENCIAS SOCIALES	3/6	HISTORIA DE MEXICO I	3/6	HISTORIA DE MÉXICO II	3/6	ESTRUCTURA SOCIOECONÒMICA DE MÉXICO	3/6	HISTORIA UNIVERSAL CONTEMPORANEA	3/6	METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN	3/4
TALLER DE LECTURA Y	4/6	TALLER DE LECTURA Y	4/6	LITERATURA I	3/6	LITERATURA II	3/6				
INGLES I	3/6	INGLES II	3/6	INGLES III	3/6	INGLES IV	3/6				
INFORMATICA I	3/6	INFORMATICA II	3/6								
								HUMANIDADES Y CIENCIASOCIALES			
								PSICOLOGIA I	3/6	PSICOLOGIA II	3/6
								DERECHO I	3/6	DERECHO II	3/6
								CIENCIAS DE LA COMUNICACIÓN I	3/6	CIENCIAS DE LA COMUNICACIÓN II	3/6
								ETIMOLOGIAS GRECOLATINAS	3/6	SOCIOLOGIA	3/6
								QUIMICO – BIOLOGICO			
								TEMAS SELECTOS DE QUÍMICA I	3/6	TEMAS SELECTOS DE QUÍMICA II	3/6
								TEMAS SELECTOS DE BIOLOGÍA I	3/6	TEMAS SELECTOS DE BIOLOGÍA II	3/6
								CIENCIAS DE LA SALUD I	3/6	CIENCIAS DE LA SALUD II	3/6
								PROBABILIDAD Y ESTADISTICA	3/6	CALCULO DIFERENCIAL	3/6
								ECONOMICO-ADMINISTRATIVO			
								ECONOMIA I	3/6	ECONOMIA II	3/6
								ADMINISTRACION I	3/6	ADMINISTRACION II	3/6
								CONTABILIDAD I	3/6	CONTABILIDAD II	3/6
								PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA I	3/6	PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA II	3/6
								FISICO – MATEMATICO			
								CALCULO DIFERENCIAL	3/6	CALCULO INTEGRAL	3/6
								TEMAS SELECTOS DE FÍSICA I	3/6	TEMAS SELECTOS DE FISICA II	3/6
								TEMAS SELECTOS DE QUÍMICA I	3/6	DIBUJO	3/6
								PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA I	3/6	PROBABILIDAD Y ESTADISTICA II	3/6
				FORMACION PARA EL TRABAJO	4/6	FORMACION PARA EL TRABAJO	3/6	FORMACION PARA EL TRABAJO	7/8	FORMACION PARA EL TRABAJO	4/6
ACTIVIDADES PARAESCOLARES	2	ACTIVIDADES PARAESCOLARES	2	ACTIVIDADES PARAESCOLARES	2	ACTIVIDADES PARAESCOLARES	2	ACTIVIDADES PARAESCOLARES	2	ACTIVIDADES PARAESCOLARES	2
ORIENTACION EDUCATIVA	2	ORIENTACION EDUCATIVA	2	ORIENTACION EDUCATIVA	2	ORIENTACION EDUCTAIVA	2	ORIENTACION EDUCATIVA	2	ORIENTACION EDUCATIVA	2
	30/46		30/46		30/46		30/46		30/46		30/46

Nota. Tomado de *Mapa curricular del Telebachillerato en Chiapas,* por Departamento de educación terminal y telebachillerato, https://es.scribd.com/document/464172365/MAPA2-CURRICULAR-RIEMS

Como puede apreciarse en la figura 12, el mapa curricular que propone la RIEMS está dividido en dos partes. Los primeros cuatro semestres corresponden al tronco común del bachillerato, mientras que los dos últimos pertenecen al área de especialidad, llegados a este punto los alumnos deben elegir entre las cuatro opciones de formación terminal: humanidades y ciencias sociales, químico biológico, económico administrativo y físico matemático. En los seis semestres de duración del bachillerato cambian la cantidad de materias llevadas por los alumnos pero las horas y los créditos permanecen constantes a lo largo de toda su duración. El mapa curricular anteriormente descrito es puesto en escena desde el 2009 junto con la RIEMS.

A partir del ciclo 2008-2009 la Dirección General del Bachillerato (DGB) incorporó a sus planes de estudios los principios rectores plasmados en la RIEMS que tiene como propósito principal fortalecer y consolidar la identidad de este nivel educativo en todas sus modalidades y subsistemas. Se propone proporcionar educación de calidad, que además sea pertinente y de importancia para el alumno, para que este sea capaz de relacionar a través de su propio contexto a la escuela y su entorno. Además dicha reforma pretende a través del MCC facilitar el tránsito de los alumnos entre los distintos subsistemas que imparten EMS. (SEP, 2010a).

Para lograr lo anterior la RIEMS propone hacerlo a través del MCC que está basado en el logro de desempeños terminales y desarrollo de competencias. Dicho enfoque educativo permitirá "establecer en una unidad común los conocimientos, habilidades, actitudes y valores que el egresado de bachillerato debe poseer" (SEP, 2010a, p. 4). Se entiende por competencia a la "capacidad de movilizar recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones, con buen juicio, a su debido tiempo, para definir y solucionar verdaderos problemas" (SEP, 2010a, p. 4).

Dentro de las competencias a desarrollar se encuentran las genéricas, disciplinares y profesionales. Las primeras son aquellas que permiten al alumno influir en su entorno a través de su comprensión, le proporcionan la capacidad de hacerse cargo de su propio aprendizaje y favorecen el desarrollo de relaciones con los que convive durante este proceso. Las competencias disciplinares están divididas en básicas y extendidas. La competencias básicas se refieren a los conceptos mínimos necesarios de cada campo disciplinar para que los alumnos sean capaces de desarrollarse en los distintos contextos en los que está inmerso en su vida cotidiana, mientras que las extendidas indican la profundidad esperada según la trayectoria académica elegida por los alumnos. Finalmente las competencias profesionales preparan al estudiante para desempeñarse en el campo laboral y profesional para que tengan mayores posibilidades de éxito (SEP, 2010a).

A continuación, se analizarán los programas de estudios autorizados de la asignatura de matemáticas en sus diferentes semestres en los que se identificará el tratamiento que se le ha dado en la matemática escolar al desarrollo de las concepciones necesarias para construir el concepto de derivada a través de los distintos semestres.

Programa de Estudios de Matemáticas I. La asignatura de matemáticas I pertenece al campo disciplinar de matemáticas, el cual tiene la finalidad de:

> propiciar el desarrollo de la creatividad y pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven al despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trasciendan el ámbito escolar. La finalidad de la asignatura de Matemáticas I es la de permitir al estudiante utilizar distintos procedimientos algebraicos para representar relaciones entre magnitudes constantes y variables, y resolver problemas de la vida cotidiana. (SEP, 2010a, p. 5).

A continuación en la figura 13 se verán los bloques que componen al programa de la asignatura de matemáticas I, en donde se puede notar su fuerte contenido algebraico, que además es un recordatorio de lo visto en la educación básica. Se advierte que en el bloque II del programa aparece el tema de *razones*, el cual es importante por su relación con el tema de estudio, ya que conceptualiza a la razón como concepto matemático, mismo que es necesario para la comprensión de la derivada como razón de cambio. Se entiende como razón a aquella relación que se establece entre dos cantidades comparables entre sí, ya sea a través de una diferencia (razón aritmética) o como un cociente (razón geométrica) misma que asociada a la variación lineal en primer instancia, y sienta las bases para la comprensión y posterior utilización de la variación no lineal, como la clave del entendimiento de la derivada de una función.

Al analizar los objetos de aprendizaje del bloque II, así como los desempeños esperados por el alumno al finalizarlo se logra advertir que se espera que el alumno sea capaz de utilizar modelos de variación proporcional, además de utilizar el concepto de razón. En la figura 14 puede apreciarse dichos desempeños esperados y los objetivos de aprendizaje del bloque antes señalado.

Figura 13

Bloques que componen al programa de la asignatura de Matemáticas I

MATEMÁTICAS I

DISTRIBUCIÓN DE BLOQUES

Los bloques que componen el programa de la asignatura son:

Bloque I Resuelves problemas aritméticos y algebraicos
Bloque II Utilizas magnitudes y números reales
Bloque III Realizas sumas y sucesiones de números
Bloque IV Realizas transformaciones algebraicas I
Bloque V Realizas transformaciones algebraicas II
Bloque VI Resuelves ecuaciones lineales I
Bloque VII Resuelves ecuaciones lineales II
Bloque VIII Resuelves ecuaciones lineales III
Bloque IX Resuelves ecuaciones cuadráticas I
Bloque X Resuelves ecuaciones cuadráticas II

Nota. Tomado de Programa de estudios de matemáticas I (p. 8), por Secretaría de Educación Pública, 2010a, http://www.cobaev.edu.mx/docentes/riems/PRIMER_SEMESTRE/MATEMATICAS-I.pdf

La materia de matemáticas I, ubicada en el primer semestre consta de diez bloques, los primeros tres se relacionan con la aritmética y en menor medida, con la transición hacia lo algebraico. La segunda parte del curso se centra en álgebra, en primera instancia en ecuaciones lineales para posteriormente cerrar con aquellas de segundo grado.

Figura 14

Desempeños y objetivos de aprendizaje del estudiante al concluir el bloque II

MATEMÁTICAS I

Bloque	Nombre del Bloque	Tiempo asignado
II	UTILIZAS MAGNITUDES Y NÚMEROS REALES	6 horas

Desempeños del estudiante al concluir el bloque
Ubica en la recta numérica números reales y sus respectivos simétricos. Combina cálculos de porcentajes, descuentos, intereses, capitales, ganancias, pérdidas, ingresos, amortizaciones, utilizando distintas representaciones, operaciones y propiedades de números reales. Utiliza razones, tasas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa. Construye modelos aritméticos, algebraicos o gráficos aplicando las propiedades de los números reales.

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Números reales: representación y operaciones. Tasas Razones Proporciones y Variaciones	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente, las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo. Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.

Nota. Tomado de Programa de estudios de matemáticas I (p. 15), por Secretaría de Educación Pública, 2010a, http://www.cobaev.edu.mx/docentes/riems/PRIMER_SEMESTRE/MATEMATICAS-I.pdf

Entre las competencias a desarrollar destaca una que para la presente investigación resulta interesante, ya que se espera que el alumno analice las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural y a través de dicho análisis sea capaz de determinar o estimar su comportamiento, una habilidad necesaria para el cálculo diferencial.

Programa de Estudios de Matemáticas III. A continuación se analiza el programa de estudios de la materia de matemáticas III ubicada en el tercer semestre del mapa curricular, la cual pertenece al tronco común del subsistema (SEP, 2011a). El contenido principal del tercer semestre involucra a la rama de las matemáticas que relaciona a la geometría y al álgebra: La geometría analítica.

> Esencialmente lo que la geometría analítica proporcionó fue una manera de fusionar la geometría ordinaria con el álgebra, de manera que problemas de una disciplina pudieron ser traducidos en problemas correspondientes a la otra. La base de esa traducción fue la identificación de puntos con parejas ordenadas de números y de rectas o curvas con ecuaciones algebraicas apropiadas. (Cruse y Lehman, 1982, p.21)

El nacimiento de la geometría comúnmente se le atribuye a Rene Descartes, filósofo, matemático y físico Francés; por el apéndice *La geométrie* incluido en su *Discurso del Método*. En la matemática escolar la geometría analítica se encuentra ubicada en el tercer semestre, y en ella se sientan las bases para la comprensión de elementos y concepciones necesarias para el proceso enseñanza aprendizaje de la derivada.

> Un buen fundamento en Geometría Analítica del espacio es de gran valor para estudios posteriores de Matemáticas. Por ejemplo, un estudio razonado de intersección de superficies y curvas en el espacio será una gran ayuda para la comprensión de muchos temas de Cálculo infinitesimal. (Lehman, 2002, p.6)

Por tanto se analizará el programa de estudios de la materia matemáticas III de bachillerato, y como puede notarse en la figura 15 se encuentra distribuida en siete bloques con el afán de facilitar la formulación y resolución de situaciones didácticas.

Figura 15

Bloques que componen al programa de la asignatura de Matemáticas III

MATEMÁTICAS III

DISTRIBUCIÓN DE BLOQUES

Esta asignatura está organizada en siete bloques, con el objeto de facilitar la formulación y/o resolución de situaciones o problemas de manera integral en cada uno, y de garantizar el desarrollo gradual y sucesivo de distintas competencias en el estudiante. Los siete bloques para esta asignatura son los siguientes:

Bloque I Reconoces lugares geométricos.
En este bloque el alumnado alcanzará desempeños que le permiten reconocer las características matemáticas que definen un lugar geométrico.
Bloque II Aplicas las propiedades de segmentos rectilíneos y polígonos.
En este bloque el alumnado alcanzará desempeños que le permiten explorar las posibilidades analíticas para realizar cálculos métricos de segmentos rectilíneos y polígonos.
Bloque III Aplicas los elementos de una recta como lugar geométrico.
Bloque IV Utilizas distintas formas de la ecuación de una recta.
En los bloques III y IV el alumnado alcanzará desempeños que le permiten realizar un estudio de las propiedades geométricas de la recta y de sus posibilidades analíticas.
Bloque V Aplicas los elementos y las ecuaciones de una circunferencia.
En este bloque alumnado alcanzará desempeños que le permiten realizar un estudio de las propiedades geométricas de la circunferencia y de sus posibilidades analíticas.
Bloque VI Aplicas los elementos y las ecuaciones de la parábola.
En el bloque el alumnado logrará desempeños que le permiten realizar un estudio de las propiedades geométricas de la parábola y de sus posibilidades analíticas.
Bloque VII Aplicas los elementos y las ecuaciones de la elipse.
En el bloque el alumnado logrará desempeños que le permiten analizar las características de elipses e hipérbolas y se destacan los casos con ejes paralelos a los ejes cartesianos.

Nota. Tomado de Programa de estudios de matemáticas III (p. 8), por Secretaría de Educación Pública, 2011a, http://cobaev.edu.mx/docentes/riems/TERCER_SEMESTRE/MATEMATICAS-III.pdf

En los bloques III y IV aparece la línea recta, desde sus características y elementos como lugar geométrico, hasta sus distintas formas y aplicación. Sin duda representa una oportunidad de dirigir una situación que involucre fenómenos con magnitudes cambiantes en el tiempo, además de asentar las características geométricas y como se relacionan con sus objetos algebraicos para su posterior desarrollo en el cálculo diferencial. Así pues, en la figura 16 pueden apreciarse los aprendizajes esperados del bloque III.

Figura 16

Desempeños y objetivos de aprendizaje del estudiante al concluir el bloque III

MATEMÁTICAS III

Bloque	Nombre del Bloque	Tiempo asignado
III	APLICAS LOS ELEMENTOS DE UNA RECTA COMO LUGAR GEOMÉTRICO	10 horas

Desempeños del estudiante al concluir el bloque
Reconoce la recta como lugar geométrico. Reconoce la relación entre el ángulo de inclinación y la pendiente de una recta. Aplica los elementos de una recta como lugar geométrico en la solución problemas y/o ejercicios.

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Línea recta Definición Pendiente y ángulo de inclinación de una recta Ángulo formado por dos rectas Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o graficas. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiablidad. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos. Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Nota. Tomado de Programa de estudios de matemáticas III (p. 8), por Secretaría de Educación Pública, 2011a, http://cobaev.edu.mx/docentes/riems/TERCER_SEMESTRE/MATEMATICAS-III.pdf

Puede notarse en la figura 16 que el concepto de pendiente de la recta está anclado al ángulo de inclinación de la misma, sin embargo dicha pendiente puede y debe relacionarse a través de problemas que representen fenómenos físicos no solo al ángulo de inclinación, sino como una manera de permita adentrarse en el tema de razón de cambio, como una continuación de lo señalado en el bloque II del programa de estudios de la materia de matemáticas I.

Programa de Estudios de Matemáticas IV. Para el cuarto semestre, en la materia de matemáticas IV, la principal finalidad es la de desarrollar en los estudiantes habilidades, conocimientos y actitudes en relación con la comprensión y aplicación de funciones, en los distintos campos de estudio, como lo son el campo de las ciencias naturales, el económico administrativo y las ciencias sociales. Logrando lo anterior a través del conocimiento de los distintos tipos de funciones contempladas en el programa y sus características (SEP, 2011b).

El programa de estudios de esta materia que puede verse en la figura 17 está conformado por ocho bloques en los que se establecen las características que definen a cada tipo de función, no sin antes diferenciarlas de las relaciones. Además se estudian los distintos tipos de representación de las funciones, desde los enunciados que dan origen a las funciones, tablas de valores que representan la relación entre las variables, parejas ordenadas, conjuntos, gráficas de lugares geométricos, etc. Posteriormente se trabaja con las características de cada función, reconociendo patrones gráficos, propiedades geométricas, soluciones, identificación de dominios y rangos y la respectiva explicación de su comportamiento, esto es muy importante para el alumno, puesto que este acercamiento y manipulación de las funciones permite que las conozca y se vaya familiarizando con ellas, de tal suerte que pueda encontrarle sentido y utilidad a las funciones matemáticas, mismas que puede encontrarse o el mismo plantear a través de su cotidiano.

Figura 17

Bloques que componen al programa de la asignatura de matemáticas IV

MATEMÁTICAS IV

DISTRIBUCIÓN DE BLOQUES

El programa de Matemáticas IV está conformado por ocho bloques que se enuncian con una redacción dirigida a los estudiantes a continuación:

Bloque I Reconoces y realizas operaciones con distintos tipos de funciones.
En este bloque se establecen las características matemáticas que definen las relaciones entre dos magnitudes enfatizando las de carácter funcional.
Bloque II Aplicas funciones especiales y transformaciones de gráficas.
En este bloque se distinguen y describen diferentes tipos de funciones matemáticas, así como operaciones y trasformaciones algebraicas y/o geométricas.
Bloque III Empleas funciones polinomiales de grados cero, uno y dos.
En este bloque se determinan las situaciones de un modelo de cero, uno y dos grados, empleando criterios de comportamiento de datos.
Bloque IV Utilizas funciones polinomiales de grado tres y cuatro.
En este bloque se reconocen patrones gráficos, se describen propiedades geométricas y se obtienen soluciones de ecuaciones factorizables.
Bloque V Utilizas funciones factorizables en la resolución de problemas.
En este bloque se efectúa un análisis comparativo de las funciones polinomiales hasta grado cuatro profundizando en el análisis de las características de los modelos lineales y cuadráticos, y se desarrollan procedimientos numéricos, algebraicos y geométricos para la obtención de los ceros polinomiales, los cuales se definen como los cortes de la gráfica con el eje "x" y las raíces son las soluciones de la ecuación asociada.
Bloque VI Aplicas funciones racionales.
En este bloque se revisan las funciones Racionales y la existencia de posibles asíntotas.
Bloque VII Utilizas funciones exponenciales y logarítmicas.
En este bloque se obtienen valores de funciones exponenciales y logarítmicas, asimismo se aplican dichOs valores para modelar y resolver problemas.
Bloque VIII Aplicas funciones periódicas.
En este bloque se estudian las funciones exponenciales, logarítmicas y periódicas.

Nota. Tomado de Programa de estudios de matemáticas IV (p. 8), por Secretaría de Educación Pública, 2011b, http://www.cobaev.edu.mx/docentes/riems/CUARTO_SEMESTRE/Matematicas-IV.pdf

El bloque I es introductorio, se sientan las bases de funciones y relaciones, se describen sus características para que a través de ese conocimiento los estudiantes logren describir situaciones de su entorno. El bloque II continúa con el conocimiento y explicación de esos tipos de funciones y se adentra poco a poco a las funciones inversas.

A través de los siguientes bloques se profundiza en los demás tipos de funciones, polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y periódicas, como se puede apreciar a continuación. En este semestre es importante, dentro de las características de las funciones, sentar las bases del análisis de las funciones, sobre todo en la clasificación que involucra la representación gráfica de las mismas y su forma de crecimiento, que el alumno sea capaz de conectar el tratamiento de la función desde su representación en forma de tabla, hasta el análisis pertinente de continuidad, dominio, rango, crecimiento, etc.

Programa de Estudios de Cálculo Diferencial. Al llegar al quinto semestre los alumnos eligen un área de formación para cursar el último año. El cálculo diferencial se encuentra en el área de físicos matemáticos en su quinto semestre, mientras que aparece en sexto semestre para el área de químicos biológicos. La asignatura de Cálculo diferencial:

> tiene como finalidad analizar cualitativa y cuantitativamente la razón de cambio instantáneo y promedio, lo que permitirá dar soluciones a problemas del contexto real del estudiante al facilitarle la formulación de modelos matemáticos de problemas financieros, económicos, químicos, ecológicos, físicos y geométricos. Una segunda finalidad es la resolución de problemas de optimización. (SEP, 2010b, p. 5).

Un problema constante en la enseñanza del cálculo diferencial ha sido su alta carga algorítmica, mecanizada y descontextualizada. Con este programa de estudios se busca darle un nuevo enfoque en el cual el estudiante construya su propio conocimiento a partir de la resolución e interpretación de problemas pertenecientes a su propio contexto y que además sean de interés para él. Se parte de la resolución de límites de funciones, y la transformación de problemas cotidianos en ejercicios algebraicos para posteriormente transitar por el trabajo con fenómenos que involucren razones de cambio. Finalmente se trabaja con las aplicaciones comunes de la derivada. En la figura 18 puede verse el programa de estudios completo de la materia de cálculo diferencial.

Figura 18

Bloques que componen al programa de la asignatura de Cálculo Diferencial

CÁLCULO DIFERENCIAL PROGRAMA EN VALIDACIÓN

DISTRIBUCIÓN DE BLOQUES

BLOQUE I. ARGUMENTAS EL ESTUDIO DEL CÁLCULO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE SU EVOLUCIÓN, SUS MODELOS MATEMÁTICOS Y SU RELACIÓN CON HECHOS REALES.
En este bloque el estudiante se ubica y conoce los antecedentes históricos de la rama de las Matemáticas y cómo su nacimiento ha contribuido a los grandes avances de la humanidad.

BLOQUE II. RESUELVES PROBLEMAS DE LÍMITES EN SITUACIONES DE CARÁCTER ECONÓMICO, ADMINISTRATIVO, NATURAL Y SOCIAL.
Se busca que el estudiante resuelva problemas sobre límites en las ciencias naturales, económico-administrativas y sociales; mediante el análisis de tablas, gráficas y aplicación de las propiedades de los límites.

BLOQUE III. CALCULAS, INTERPRETAS Y ANALIZAS RAZONES DE CAMBIO EN FENÓMENOS NATURALES, SOCIALES, ECONÓMICOS, ADMINISTRATIVOS, EN LA AGRICULTURA, EN LA GANADERÍA Y EN LA INDUSTRIA.
En este bloque se estudiará la razón de cambio promedio e instantánea, el cambio de posición de un objeto en el tiempo y la interpretación geométrica de la derivada.

BLOQUE IV. CALCULAS E INTERPRETAS MÁXIMOS Y MÍNIMOS SOBRE LOS FENÓMENOS QUE HAN CAMBIADO EN EL TIEMPO DE LA PRODUCCIÓN, PRODUCCIÓN INDUSTRIAL O AGROPECUARIA.
Se trabajará sobre la obtención de máximos y mínimos absolutos y relativos y como ellos influyen en el éxito o fracaso de las producciones empresariales, industriales, agrícolas y en el comportamiento de los fenómenos naturales.

Nota. Tomado de Programa de estudios de cálculo diferencial (p. 8), por Secretaría de Educación Pública, 2010b, http://www.cobaev.edu.mx/docentes/riems/FORMACION_PROPEDEUTICA/5_SEMESTRE/calculo-diferencial.pdf

Logra apreciarse que aún en un nuevo enfoque de enseñanza del cálculo diferencial se opta por la resolución de límites de funciones, sin embargo en el bloque III se pretende que el alumnado trabaje tanto con la interpretación geométrica de la derivada como con la noción de razón de cambio, dos aspectos importantes para la construcción del concepto de derivada.

Construcción del Conocimiento. Esta dimensión ha sido descrita anteriormente en el marco de la Socioepistemología, por lo que no será necesario reescribirla.

Estudio Epistemológico de la Recta Tangente. Esta dimensión ha sido descrita anteriormente en el estado del arte, por lo que no será necesario reescribirla.

Capítulo IV. Resultados y discusión

El diseño de la situación a partir del análisis preliminar que contempla el estudio de los planes y programas de la materia; la descripción de la construcción del conocimiento por parte de los alumnos y el análisis epistemológico de la recta tangente es un primer resultado obtenido en esta investigación, la aplicación de dicha secuencia y su análisis es un segundo resultado, a continuación se detalla dicho diseño así como su puesta en escena y los resultados obtenidos.

Fase de diseño. Análisis a priori

En esta parte del proceso experimental se construye la secuencia didáctica. Se define el rol del investigador, la tarea a realizar por los alumnos, tiempos, variables, etc. El objetivo fundamental es determinar de qué manera las elecciones realizadas por los sujetos de estudio posibilitan controlar su conducta y lo que ella representa (Esqueda, 2014). Es decir que esta fase se sustenta en plantear una serie de hipótesis que serán contrastadas en la fase de análisis *a posteriori.*

La secuencia didáctica se ha planteado para estar compuesta por tres actividades. En la primera actividad, se propone que los alumnos realicen en *GeoGebra* la gráfica de una función siguiendo un video tutorial que el investigador ha elaborado para tal fin y que puede encontrarse en: https://youtu.be/udnMC0kn5p0. En este video se encuentran los pasos a seguir para construir la gráfica de la derivada de una función utilizando geometría animada, en donde a través del valor de la pendiente de la recta tangente a un punto animado de una curva, se puede visualizar la gráfica de la derivada de una función.

Acto seguido se modela y anima una ecuación abstracta para analizarla a través de preguntas guías planteadas por el investigador. Con ello se busca que el alumno desarrolle procesos de razonamiento matemático que le permitan vincular la información obtenida producto del análisis de la gráfica y el concepto previamente estudiado de razón de cambio. Así pues se pretende que el alumno obtenga información a partir de la representación gráfica de una función y de su derivada y que esta información le sirva para construir su propia resignificación del concepto de derivada.

Finalmente, los alumnos deberán trazar la gráfica de la derivada de una función sin realizar ningún cálculo ni conocer las ecuaciones de dichas funciones.

Secuencia didáctica.

En esta actividad los alumnos deben seguir un video tutorial para construir una gráfica que permita visualizar el lugar geométrico de la derivada de una función *f(x)* a través de la animación de un punto cuya ordenada representará el valor de la pendiente de la recta tangente a un punto de *f(x)*. La actividad a realizar se describe a continuación:

I. Con apoyo del tutorial para la sesión de hoy, construye la gráfica de la derivada de una función cúbica *f(x)*. El video *Derivada de una función* se encuentra en el siguiente enlace: https://youtu.be/udnMC0kn5p0, y debe utilizarse como guía para realizar lo siguiente:

- Traza la curva $f(x) = x^3$
- Sobre ella traza un punto *A* que pueda deslizarse sobre la curva
- Traza una recta tangente *g* a la curva $f(x)$ en el punto *A*.
- En la intersección de la tangente *g* y el eje *Y* coloca un punto *B*.
- Sea el número *m*, tal que *m* sea la razón de la diferencia de ordenadas entre la diferencia de abscisas de los puntos *A* y *B*.
- Sea el punto *C*, cuyas coordenadas sean la abscisa del punto *A*, y cuya ordenada sea el número *m*; (x(A), m).
- Activa el rastro del punto *C* y anima el punto *A*

II. Una vez hecho esto, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué forma dibuja el rastro del Punto *C*?

2. ¿Qué sucede con el número *m* conforme el punto *A* transita por la curva? ¿Tiene un valor constante?

3. Coloca el punto *A* tal que su abscisa se encuentra en $x = -0.5$. ¿Cuál es el valor del número *m* para este caso? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente *g*? ¿y para $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$?

4. ¿Qué puedes concluir acerca del número *m* y el término lineal de la ecuación de la recta tangente *g***,** cuál es la relación que guardan entre sí ambos términos?

5. ¿Qué representa el número *m*?

6. ¿Qué representa el lugar geométrico trazado por el punto *C*?

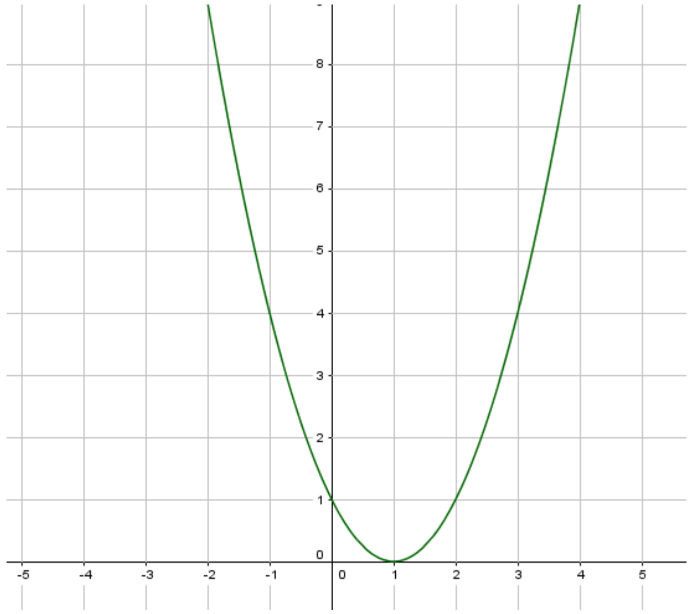
7. Sea $f'(x) = 3x^2$ la derivada de la función. Trázala en *Geogebra* y contesta las siguientes preguntas: ¿Qué forma tiene su gráfica? ¿Qué relación tiene con el rastro marcado por el punto *C*? ¿Qué puedes concluir al respecto?

8. Evalúa $f'(-0.5)$, coloca el punto *A* tal que su abscisa se encuentra en $x = -0.5$. Observa el valor de la pendiente de la recta *g*, ¿Qué puedes concluir al respecto?

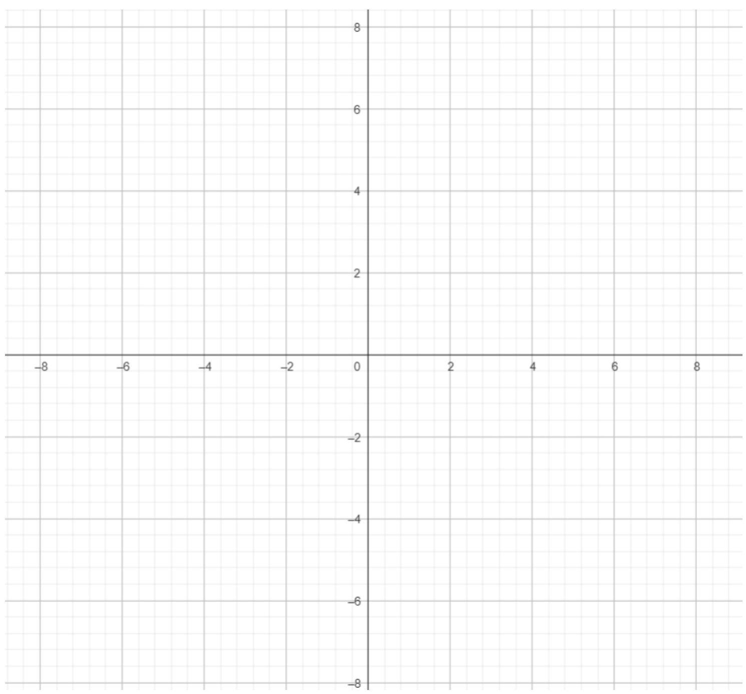
Una vez realizadas las actividades y resueltas las preguntas planteadas con la guía del docente, se puede proseguir analizando otros tipos de funciones.

III. Analizando la geometría de la función *f(x), dibuja la gráfica de la función f'(x)*.

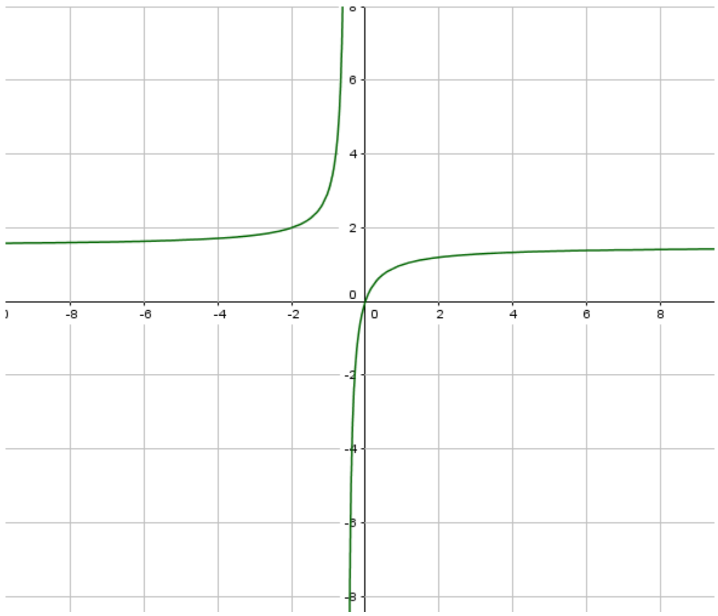
a) Sea la siguiente gráfica de una función $f(x)$



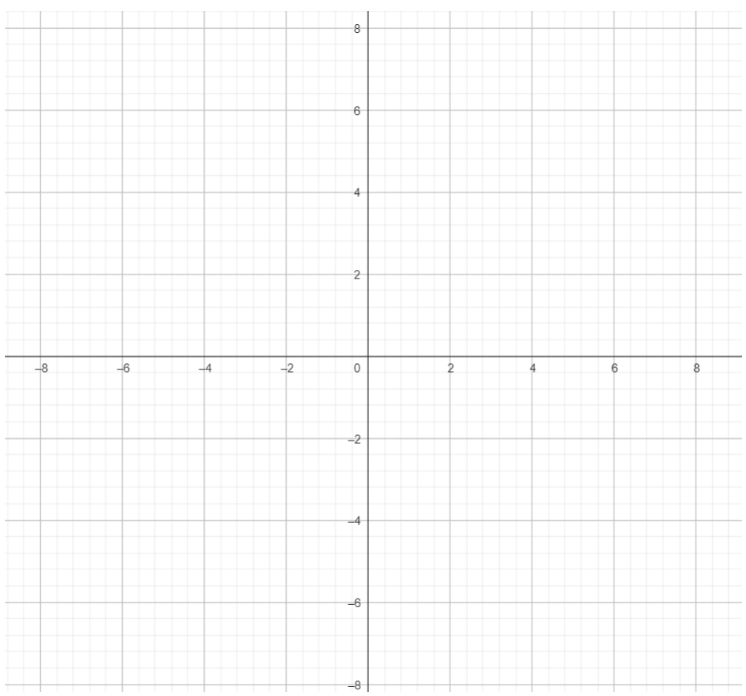
Dibuja la gráfica que corresponde a su derivada $f'(x)$



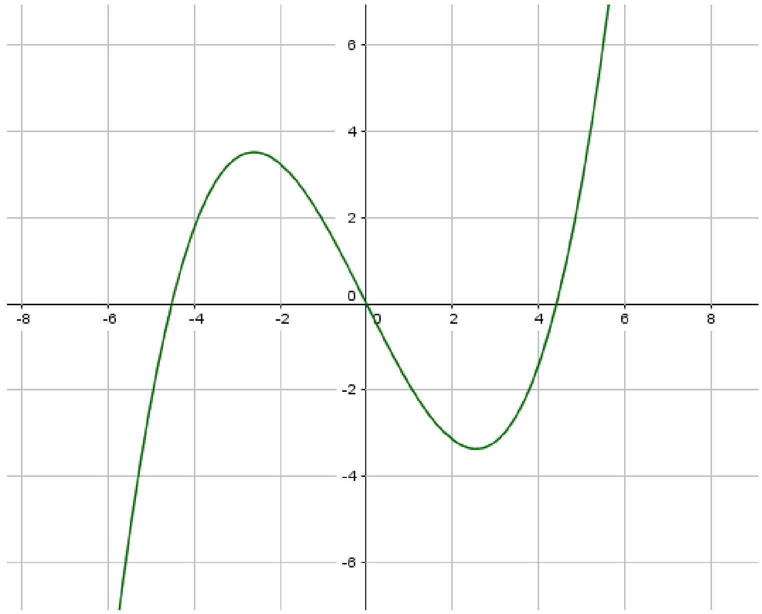
b) Sea la siguiente gráfica de una función $f(x)$



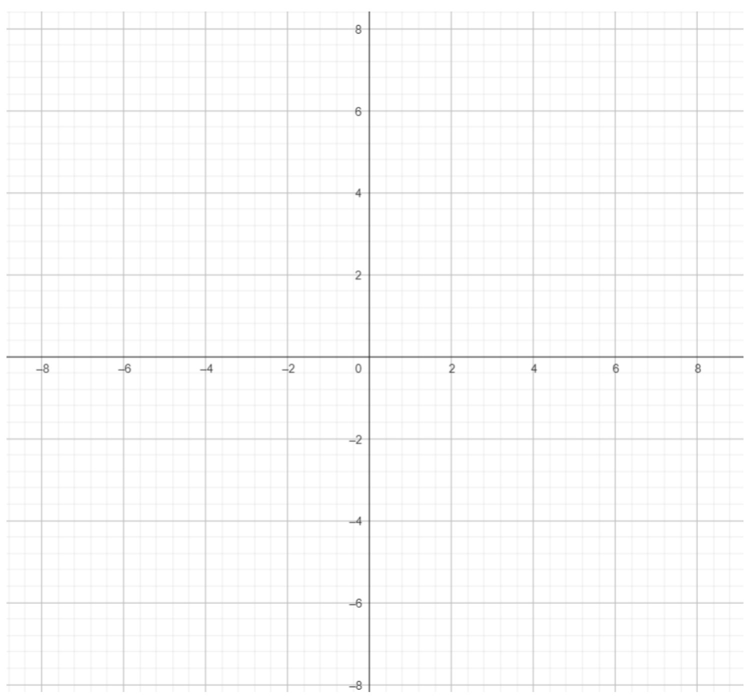
Dibuja la gráfica que corresponde a su derivada $f'(x)$



c) Sea la siguiente gráfica de una función $f(x)$



Dibuja la gráfica que corresponde a su derivada $f'(x)$



Fase de experimentación

Esta fase se encuentra integrada por tres aspectos: el primero de ellos es la puesta en escena de la secuencia didáctica, que es donde se realiza la aplicación de la actividad propuesta siguiendo los pasos descritos para tal fin; el segundo se refiere a los estudiantes, la descripción del grupo de estudio; y en el último ese considera a la dinámica a utilizar, es decir, el papel que desempeñarán tanto alumnos como investigador (Esqueda, 2014).

La puesta en escena, los alumnos y la dinámica a seguir.

Se realizó la puesta en escena de la secuencia didáctica el día 12 de febrero de 2024, en el ejido Vicente Guerrero, perteneciente al municipio de Salto de Agua, Chiapas, particularmente a los estudiantes del sexto semestre grupo C, que corresponden a 13 alumnos del área de físicos matemáticos del Telebachillerato núm. 100 Carlos Olmos. Se consideraron dos horas para la aplicación de la secuencia, de donde se obtuvo evidencia escrita y fotográfica, esto con pleno consentimiento del alumnado.

Debido a que la secuencia didáctica se apoya en el uso de la tecnología, fue necesario utilizar la sala de cómputo de la escuela. Previamente se instaló en cada computadora el *software GeoGebra* versión 6.0. A manera de precisión es importante mencionar que la secuencia didáctica también ha sido probada para la versión 5.0 del programa.

Como se mencionó anteriormente el programa puede ser utilizado en *smartphones* y *tablets*, sin embargo se optó por ocupar computadoras para este ejercicio porque resulta conveniente aprovechar el tamaño del monitor para el análisis gráfico, además es más cómodo el uso de teclado y mouse para el trazo e introducción de información a *GeoGebra*.

En cuanto a la organización del alumnado, como puede apreciarse en la figura 19, cada participante tomó una computadora para realizar la construcción del ejercicio en *GeoGebra* de manera individual, sin embargo no se aplicó restricción alguna para apoyarse entre compañeros y resolver las dudas de uso y captura de datos en el programa. Esto fue benéfico, puesto que entre pares se apoyaron para resolver sus dudas con respecto al manejo del programa aunque el video tutorial es claro y el programa muy intuitivo, además se contó en todo momento con la guía del docente para completar las instrucciones de la primera parte de la secuencia didáctica. Es importante recalcar que la toma de fotografías fue realizada con estricto consentimiento de los alumnos, y que en todo momento se protegieron sus identidades y su derecho a la privacidad.

Figura 19.

La dinámica de trabajo

Nota. En la imagen se muestra la dinámica de trabajo utilizada en la secuencia didáctica.

Durante la construcción del ejercicio en *GeoGebra* el estudiantado se mostró muy interesado a pesar de los obstáculos que encontraron para construir la secuencia, cuando tuvieron una dificultad con el uso del programa recurrieron al compañero más cercano para aclarar su duda, y en segunda instancia levantaron su mano para obtener asesoría del docente. Entre los errores más comunes se hallaron aquellos relacionados con la introducción de los datos al programa ya que en algunas computadoras estaba oculta la barra de herramientas del *software* utilizado, también hubo confusión para elegir los íconos que hacían referencia a los objetos matemáticos a construir y es que cabe mencionar que para todos en la sala fue la primera vez que tuvieron un acercamiento con el programa de modelado matemático. También es importante puntualizar que solo un alumno cuenta con *laptop*, por lo que el único contacto que ha tenido la mayoría del grupo con una computadora ha sido en el contexto escolar, esto fue muy evidente ya que cerca de la mitad de alumnos tuvieron dificultades con el manejo del *mouse*, en cuanto a falta de práctica, por lo que fue complicado para ellos mover los puntos sobre la curva, o realizar gráficamente la colocación de los objetos matemáticos. Sin embargo, a pesar de estas dificultades todos los alumnos lograron construir con éxito la secuencia en *GeoGebra* y estuvieron muy interesados en dicha actividad ya que no es común para ellos que en la materia de matemáticas se utilice este tipo de herramientas digitales para las clases.

En la segunda parte de la secuencia didáctica el alumnado contestó una serie de preguntas a partir del análisis de la gráfica que construyeron en *GeoGebra*. En este momento de la secuencia didáctica los alumnos estuvieron concentrados en lo que construyeron en la computadora, sin embargo hubo necesidad de recordarles algunos conceptos básicos de matemáticas, como por ejemplo los elementos que componen al plano cartesiano, y los elementos que conforman a una pareja ordenada que define a un punto en el espacio. También fue necesario hacer un breve repaso de lo que es la pendiente de una recta y lo que representa su inclinación y dirección. En esta etapa los estudiantes se mostraron cualitativamente más desenvueltos en sus participaciones, en la opinión del investigador, debido a la confianza ganada por concluir satisfactoriamente la primera etapa de la secuencia.

Finalmente se les pidió que trazaran la gráfica de la derivada de una función sólo estudiando su geometría. Para esta actividad final, los alumnos realizaron su trabajo de manera individual y la interacción entre pares fue prácticamente nula, pues todos estuvieron muy concentrados y atentos en el dibujo.

Resultados y discusión de la Aplicación de la Secuencia Didáctica.

La presentación de los resultados y la discusión de la puesta en escena de esta investigación se ha realizado en lo que en Ingeniería Didáctica se conoce como: fase de validación, en donde se realiza una confrontación entre las hipótesis propuestas en el análisis *a priori* y lo obtenido en el análisis *a posteriori*. Para clarificarlo, el análisis *a priori* se ha categorizado de la siguiente manera: conocimientos y habilidades, es decir lo que los alumnos deben de tener como parte de su conocimiento previo a la situación; las intenciones didácticas, lo que el investigador pretende conseguir con la secuencia y las consideraciones previas que contemplan aquello que se quiere lograr y aquello que puede considerarse como una dificultad para conseguirlo. En el caso del análisis *a posteriori* se contemplan los resultados de la fase experimental, obtenidos a través de la interacción de los alumnos con la secuencia didáctica. Para mayor claridad en la confrontación, se han elaborado las siguientes tablas basadas en Esqueda (2014):

Cabe mencionar que se pidió a los alumnos analizar lo que construyeron en *GeoGebra*, y a partir de dicho análisis contestaran las preguntas presentadas al lector anteriormente.

Tabla 1.

Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta uno.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Confrontación: Análisis a priori y a posteriori</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Descripción del ejercicio. Pregunta número uno.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. ¿Qué forma dibuja el rastro del Punto C?
Para contestar esta pregunta los alumnos deben de animar el punto A y analizar la forma que toma la trayectoria descrita por el punto. Se persigue que los estudiantes aprecien que se trata de una parábola.</td></tr>
<tr><td align="center">Análisis a priori</td><td align="center">Análisis a posteriori</td></tr>
<tr><td>Conocimientos y habilidades: Que los alumnos sean capaces de interpretar el lugar geométrico de una función. Además de utilizar la modelación y graficación</td><td>En esta pregunta todo el estudiantado coincidió que la gráfica</td></tr>
</table>

para interpretar la forma que describe el rastro del punto *C*. **Intenciones didácticas:** Con la finalidad de que los alumnos relacionen la gráfica obtenida con la de la derivada de una función, se busca que los alumnos reconozcan el tipo de gráfica que describe el punto *C*. **Consideraciones previas:** Se espera que los alumnos logren identificar la forma del rastro que se obtiene cuando el punto *C* transita por la curva *f(x)*, sin embargo si los alumnos no tienen claro la forma que tienen las ecuaciones cuadráticas podrían presentar dificultad para identificar el tipo de gráfica que se dibuja, el docente debe asegurarse previamente que los alumnos poseen este conocimiento.	descrita por el rastro que dibuja el punto *C* al realizar su movimiento es una parábola. Se observa que los alumnos interpretaron al lugar geométrico trazado por el punto *C* como el de una ecuación de segundo grado. También advirtieron que dicho movimiento está relacionado con el que realiza el punto *A.*

Nota. En esta tabla se presenta la confrontación del análisis *a priori* y el *a posteriori* de la pregunta número uno de la secuencia didáctica. Tabla basada en Esqueda (2014).

Tabla 2.

Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta dos.

Confrontación: Análisis *a priori* y *a posteriori*	
Descripción del ejercicio. Pregunta número dos.	
2. ¿Qué sucede con el número *m* conforme el punto *A* transita por la curva? ¿Tiene un valor constante? Para contestar esta pregunta los alumnos deben analizar el valor del número *m* conforme el punto *A* transita por la curva. Se persigue que los estudiantes concluyan que el valor de *m* es variable.	
Análisis a priori	**Análisis a posteriori**
Conocimientos y habilidades: Capacidad para construir e interpretar modelos matemáticos. Deben	En las respuestas obtenidas a esta pregunta

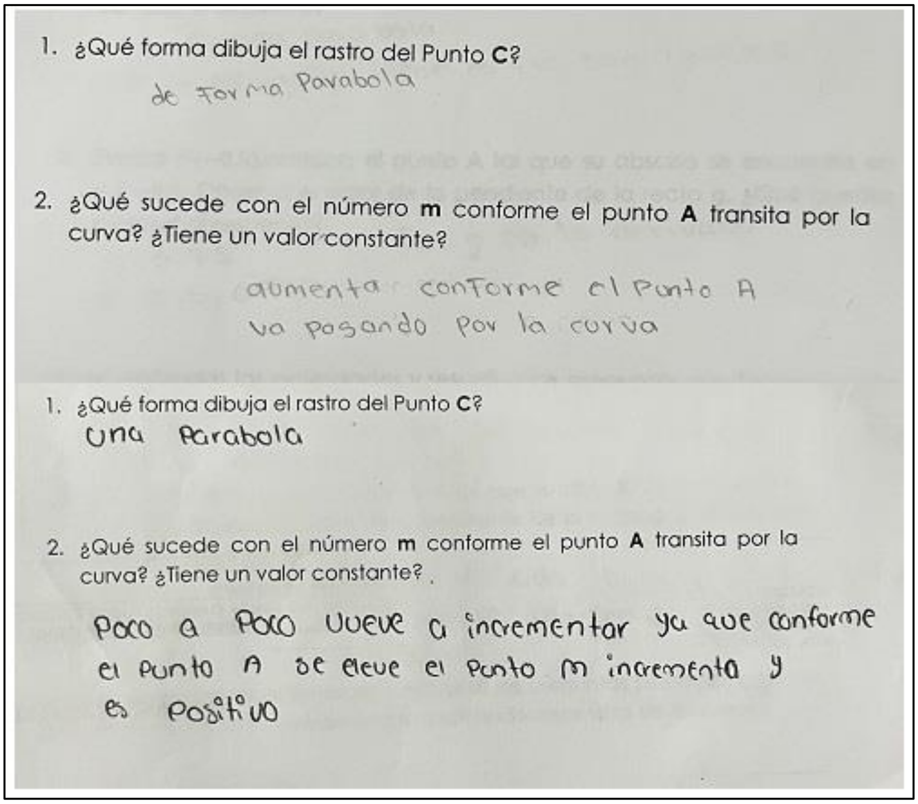
tener la capacidad de analizar las relaciones entre dos o más variables. Además ser capaces de interpretar gráficas para la obtención de conclusiones referentes a su comportamiento, estas habilidades están contempladas en el programa de estudios. **Intenciones didácticas:** A través del análisis de la curva y de los parámetros algebraicos presentes en *GeoGebra*, los alumnos concluyen que el número *m* es variable y su variación está relacionada con el movimiento del punto *A* sobre la curva. **Consideraciones previas:** Se espera que los alumnos logren identificar el comportamiento del número *m* a través de la observación de la gráfica en la que modelaron el ejercicio.	se encontró que los alumnos señalaron que el valor del número *m* es variable y que éste varía en relación al movimiento del punto *A*. Entre las respuestas se pueden leer: "Aumenta conforme el punto *A* va pasando por la curva", "el valor cambia", "su valor es positivo", "Su valor aumenta hasta pasar por *A*, luego disminuye y vuelve a aumentar".

Nota. En esta tabla se presenta la confrontación del análisis *a priori* y el *a posteriori* de la pregunta dos de la secuencia didáctica. Tabla basada en Esqueda (2014).

En la pregunta número dos, seis estudiantes notaron un cambio en la forma en la cual "crece" la curva, como botón de muestra entre las respuestas obtenidas mostradas en la figura 20 se destaca: "su valor aumenta hasta pasar por *A*, luego disminuye y vuelve a aumentar", lo que permite advertir que el estudiante ha notado que hay un punto de inflexión en la curva *f(x).* Cuando el punto *A* y la recta tangente *g* pasan por el origen, aunque se mantienen positivas, la razón de cambio decrece para posteriormente seguir aumentando, este es un aspecto del problema que ha sido posible advertirse gracias a *GeoGebra*, que como señala Carrillo (2012), permite visualizar ciertos detalles y relaciones que de otro modo no sería posible.

Figura 20.

Respuestas a preguntas uno y dos



1. ¿Qué forma dibuja el rastro del Punto **C**?

de forma Parabola

2. ¿Qué sucede con el número **m** conforme el punto **A** transita por la curva? ¿Tiene un valor constante?

aumenta conforme el Punto A
va pasando por la curva

1. ¿Qué forma dibuja el rastro del Punto **C**?

Una Parabola

2. ¿Qué sucede con el número **m** conforme el punto **A** transita por la curva? ¿Tiene un valor constante?

Poco a Poco vueve a incrementar ya que conforme
el Punto A se eleve el Punto m incrementa y
es Positivo

Nota. En la imagen se muestra dos ejemplos de respuestas realizadas a las preguntas uno y dos de la secuencia didáctica.

Como pudo apreciarse en la figura 20, los estudiantes restantes percibieron que el número *m* varía con relación al desplazamiento del punto *A* sobre la curva, sin embargo no notaron cómo esta naturaleza cambiante de la tangente tiene al mismo tiempo un cambio en su variación, es importante destacarlo puesto que de esta observación podría desprenderse la idea clave de razón de cambio. Puesto que a pesar de que el crecimiento es positivo, es decir que la magnitud continúa en aumento, ese aumento no es constante, sino que hay un decrecimiento en la manera en la cual "crece", para posteriormente volver a aumentar. Para lograr el alcance que se pretende con esta pregunta, será necesario reformularla con tal que el alumno pueda preguntarse no sólo si es variable o constante, sino cómo es esa variación.

Tabla 3.

Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta tres.

<table>
<tr><td colspan="2">Confrontación: Análisis a priori y a posteriori</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción del ejercicio. Pregunta número tres.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Coloca el punto A tal que su abscisa se encuentra en x=-0.5. ¿Cuál es el valor del número m para este caso? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente g? ¿Y para x=-1, x=0, x=1, x=3?
Los alumnos analizan el valor del número m conforme el punto A transita por la curva en puntos específicos. Se persigue que los estudiantes concluyan que el valor de m se correlaciona con la posición de la abscisa del punto A, y que dicho número se encuentra presente en la ecuación de la recta tangente a la curva.</td></tr>
<tr><td>Análisis a priori</td><td>Análisis a posteriori</td></tr>
<tr><td>Conocimientos y habilidades: Los alumnos deben tener la capacidad de analizar las relaciones entre dos o más variables para identificar la relación entre el comportamiento de una variable con respecto a otra.
Intenciones didácticas: A través del análisis de los parámetros algebraicos presentes en GeoGebra, el alumno concluye que el número m es variable y su variación está relacionada con el movimiento del punto A sobre la curva, además se espera que los alumnos noten que la línea tangente guarda una relación directa con el valor de m y su posición geométrica en la gráfica.
Consideraciones previas: Se espera que los alumnos logren identificar la relación del número m con la posición del punto A que transita sobre la curva. Un posible obstáculo es la precisión con la que deberán colocar el punto A sobre la curva, ya</td><td>La mayoría de los alumnos lograron posicionar al punto A en donde lo indicaba la instrucción. En estos casos, los alumnos identificaron tanto el valor que adquiere el número m como la ecuación de la recta tangente. Hallaron que al moverse el punto A sobre la curva, la inclinación de la recta tangente se modifica.
En los casos en los que no lograron realizar la identificación de los valores de los parámetros</td></tr>
</table>

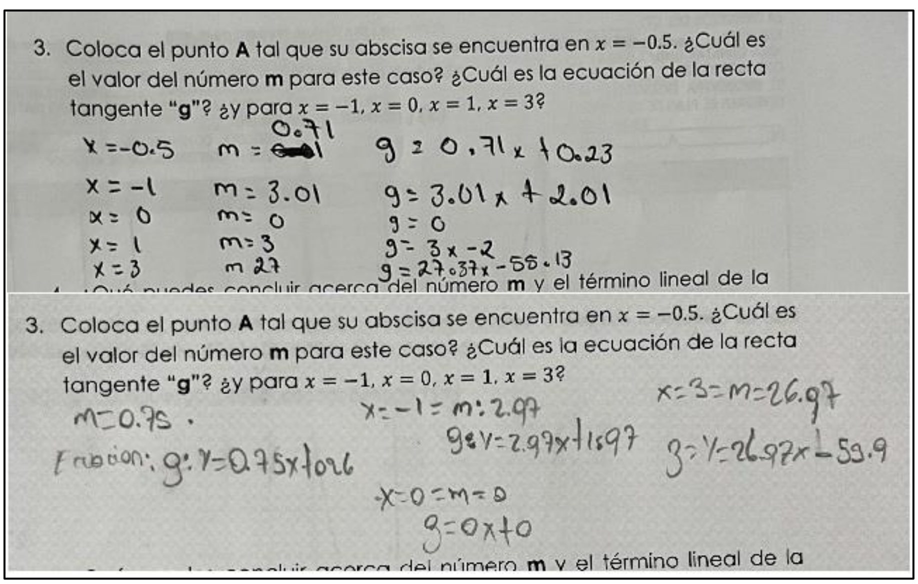
que si utilizan el *zoom* de la computadora muy alejado puede cometerse un error de colocación. El programa redondea los decimales, y si la colocación del valor de la abscisa no es exacta en los puntos marcados, en la barra algebraica (que es donde los valores de las funciones se presentan, ecuaciones, etc.) pueden haber inconsistencias numéricas que afectarán al ejercicio, por lo que el investigador deberá tener cuidado de que cada alumno realice la colocación correctamente.	antes mencionados, se debió a un error en la colocación del punto *A* sobre la curva, como se mencionó en las consideraciones previas esta era una posible fuente de error.

Nota. En esta tabla se presenta la confrontación del análisis *a priori* y el *a posteriori* de la pregunta tres de la secuencia didáctica. Tabla basada en Esqueda (2014).

Como botón de muestra, en la figura 21 se presentan algunos ejemplos de lo que se encontró como respuesta.

Figura 21.

Respuestas a pregunta tres.


3. Coloca el punto **A** tal que su abscisa se encuentra en $x = -0.5$. ¿Cuál es el valor del número **m** para este caso? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente "**g**"? ¿y para $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$?

x = -0.5 m = 0.71 g = 0.71x + 0.23
x = -1 m = 3.01 g = 3.01x + 2.01
x = 0 m = 0 g = 0
x = 1 m = 3 g = 3x - 2
x = 3 m 27 g = 27.037x - 55.13

3. Coloca el punto **A** tal que su abscisa se encuentra en $x = -0.5$. ¿Cuál es el valor del número **m** para este caso? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente "**g**"? ¿y para $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$?

m = 0.75 .
Ecuación: g: y = 0.75x + 0.26
x = -1 = m: 2.97
g: y = 2.97x + 1.97
x = 3 = m = 26.97
g: y = 26.97x - 53.9
x = 0 = m = 0
g = 0x + 0

Nota. En la imagen se muestran algunas de las respuestas a la pregunta tres de la secuencia didáctica.

Como puede notarse en los ejemplos de la figura 21, los alumnos anotaron los valores del número *m* correspondientes a la posición del punto *A* y escribieron las ecuaciones de la recta tangente *g* para dicho punto. Nueve estudiantes lograron advertir desde esa instancia que la posición del punto *A* y el valor que adquiere el número *m* están relacionados, además apreciaron visualmente que al mover al punto *A* sobre la curva, la inclinación de la recta tangente también cambia. Como menciona Elías (2017) el uso de tecnología en el aula de matemáticas mejora el análisis e interpretación de datos a través de fomentar la experimentación y manipulación de objetos matemáticos que de otro modo no habría sido posible. Así pues con la facilidad de la manipulación gráfica de los objetos matemáticos y con la oportunidad de ver en tiempo real la manera en la que también se recalculan los valores del número *m* y la ecuación de la recta *g* permitió a los alumnos notar la relación que guardan entre ellos. Sin embargo algunos estudiantes no anotaron correctamente lo solicitado debido a que no entendieron la instrucción. Para mejorar este aspecto de la secuencia didáctica se propone para plantear una tabla en la que el estudiantado vacíe los datos solicitados de manera sistemática y organizada reforzándola con un ejemplo.

Tabla 4.

Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta cuatro y cinco.

Confrontación: Análisis *a priori* y *a posteriori*	
Descripción del ejercicio. Pregunta número cuatro y cinco.	
4. ¿Qué puedes concluir acerca del número *m* y el término lineal de la ecuación de la recta tangente *g*, cuál es la relación que guardan entre sí ambos términos? 5. ¿Qué representa el número *m*? Los alumnos analizan la parte algebraica del programa, específicamente deben fijar particularmente su atención en el número *m* y la ecuación de la recta tangente, se busca que logren identificar que ambos valores son iguales y que el número *m* representa el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva construida.	
Análisis *a priori*	**Análisis *a posteriori***

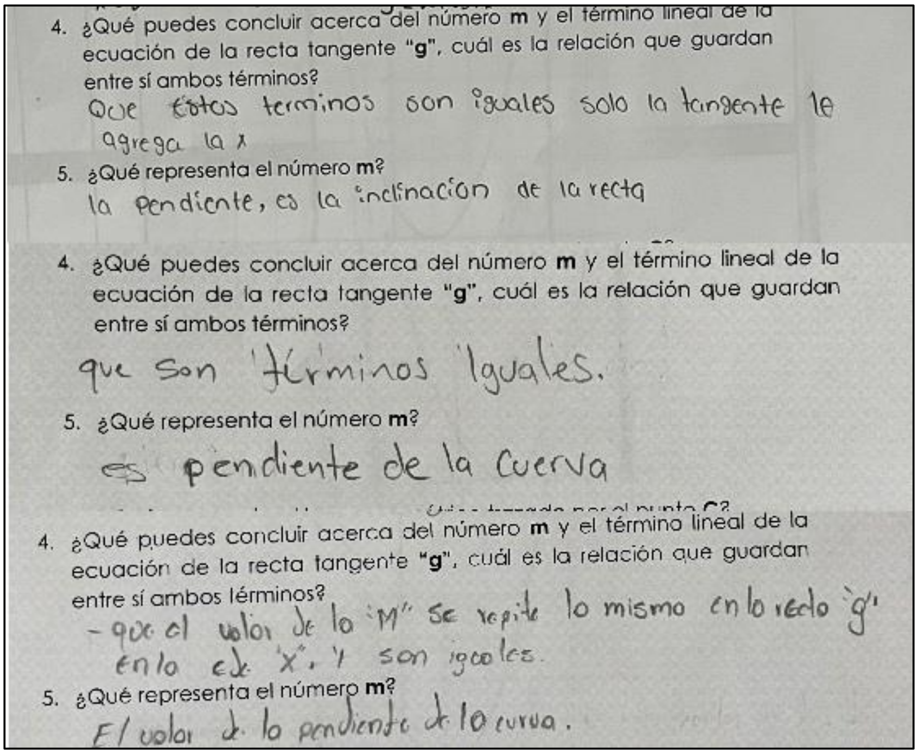
Conocimientos y habilidades: Los alumnos deben ser capaces de aplicar los elementos de una recta como lugar geométrico, además de construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. Estos conocimientos y habilidades están contemplados en el programa de estudios de la materia de Matemáticas. **Intenciones didácticas:** Los alumnos concluyen que el número *m* corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva construida. **Consideraciones previas:** Se espera que los alumnos logren identificar la relación del número *m* con el término lineal de la ecuación de la recta tangente, es decir, con la pendiente de la recta. Es posible que los alumnos se den cuenta de la igualdad entre los objetos antes mencionados, sin embargo una dificultad que puede presentarse es la debilidad en el conocimiento previo referente a los elementos de una recta como lugar geométrico y que no logren relacionar al número *m* y al término lineal de la ecuación de la recta *g* con el valor de la pendiente de dicha recta.	En la mayoría de los instrumentos se encontró que el estudiantado identificó como términos iguales al número *m* y al termino lineal de la ecuación de la recta tangente. En algunos casos comentaron "que estos términos son iguales, solo se le agrega la *x*", "que el valor de *m* se repite, lo mismo en la recta *g* y son iguales", "que son términos iguales". En la mayoría de los casos identificaron al número *m* como el valor de la pendiente de la recta tangente *g* a la curva *f(x).* Escribieron por ejemplo: "representa a la pendiente de la curva", "la pendiente, es la inclinación de la recta", "es la pendiente de la curva".

Nota. En esta tabla se presenta la confrontación del análisis *a priori* y el *a posteriori* de las preguntas cuatro y cinco de la secuencia didáctica. Tabla basada en Esqueda (2014).

En la figura 22, se observa lo que contestó el estudiantado referente a lo solicitado en las preguntas cuatro y cinco.

Figura 22.

Respuestas a preguntas cuatro y cinco.


4. ¿Qué puedes concluir acerca del número **m** y el término lineal de la ecuación de la recta tangente **"g"**, cuál es la relación que guardan entre sí ambos términos?

Que Estos terminos son iguales solo la tangente le agrega la x

5. ¿Qué representa el número **m**?

la pendiente, es la inclinacion de la recta

4. ¿Qué puedes concluir acerca del número **m** y el término lineal de la ecuación de la recta tangente **"g"**, cuál es la relación que guardan entre sí ambos términos?

que son términos iguales.

5. ¿Qué representa el número **m**?

es pendiente de la cuerva

4. ¿Qué puedes concluir acerca del número **m** y el término lineal de la ecuación de la recta tangente **"g"**, cuál es la relación que guardan entre sí ambos términos?

- que el valor de la "M" se repite lo mismo en la recta "g" en la eje "X", y son iguales.

5. ¿Qué representa el número **m**?

El valor de la pendiente de la curva.

Nota. En la imagen se muestran algunas de las respuestas a las preguntas cuatro y cinco de la secuencia didáctica.

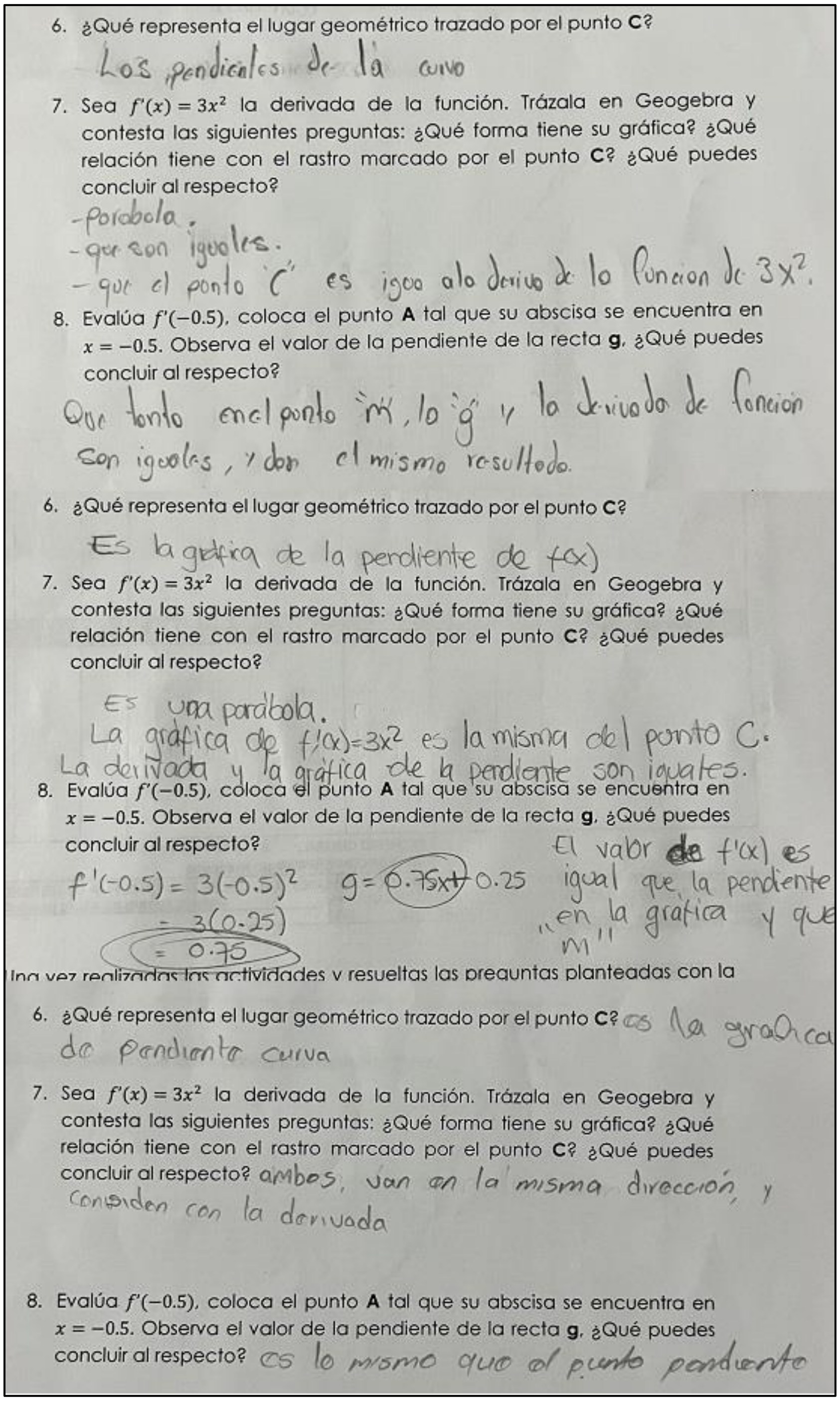
De acuerdo a lo esperado el estudiantado concluyó de manera unánime que el número *m* corresponde al término lineal presente en la ecuación de la recta tangente *g*, esto gracias a la claridad con la que *GeoGebra* es capaz de presentar y organizar los datos numéricos y algebraicos de lo que se presenta en la gráfica.

De igual manera, todos los estudiantes señalaron al número *m* como la pendiente de la recta tangente. Para contestar esta pregunta no era necesario observar la gráfica, sino que los alumnos tuvieron que recordar los elementos que componen a una línea recta estudiados en geometría analítica, es decir que tuvieron que hacer uso de su conocimiento previo a la situación, si esto no fuera suficiente, la instrucción para construir al número *m* es precisamente la fórmula de la pendiente adaptada al lenguaje del programa, y la nomenclatura "*m*" también es la habitual para describir a este concepto matemático. Es decir que el aspecto algebraico no debe despreciarse, y es necesario señalar que este conocimiento previo de pendiente debe estar bien cimentado en los alumnos para llevar a cabo esta situación didáctica. Se sugiere que previo a esta secuencia didáctica se haga una recapitulación de los temas de pendiente de una recta, parejas ordenadas, y ecuación de la recta.

En la figura 23 se presentan algunas de las respuestas obtenidas a las preguntas seis, siete y ocho. Es interesante señalar que los alumnos hallaron sus respuestas apoyados en la observación de la gráfica que construyeron. En las tablas cinco, seis y siete se presenta la confrontación de lo obtenido en dichas preguntas.

Figura 23.

Respuestas a preguntas seis, siete y ocho.



6. ¿Qué representa el lugar geométrico trazado por el punto **C**?

Los pendientes de la curva

7. Sea $f'(x) = 3x^2$ la derivada de la función. Trázala en Geogebra y contesta las siguientes preguntas: ¿Qué forma tiene su gráfica? ¿Qué relación tiene con el rastro marcado por el punto **C**? ¿Qué puedes concluir al respecto?

- porabola.
- que son iguales.
- que el punto "C" es igua alo derivo de la funcion de $3x^2$.

8. Evalúa $f'(-0.5)$, coloca el punto **A** tal que su abscisa se encuentra en $x = -0.5$. Observa el valor de la pendiente de la recta **g**, ¿Qué puedes concluir al respecto?

Que tanto en el punto "m", lo "g" y la derivada de funcion son iguales, y dan el mismo resultado.

6. ¿Qué representa el lugar geométrico trazado por el punto **C**?

Es la gráfica de la pendiente de f(x)

7. Sea $f'(x) = 3x^2$ la derivada de la función. Trázala en Geogebra y contesta las siguientes preguntas: ¿Qué forma tiene su gráfica? ¿Qué relación tiene con el rastro marcado por el punto **C**? ¿Qué puedes concluir al respecto?

Es una parábola.
La gráfica de $f'(x)=3x^2$ es la misma del punto C.
La derivada y la gráfica de la pendiente son iguales.

8. Evalúa $f'(-0.5)$, coloca el punto **A** tal que su abscisa se encuentra en $x = -0.5$. Observa el valor de la pendiente de la recta **g**, ¿Qué puedes concluir al respecto?

$f'(-0.5) = 3(-0.5)^2$
$= 3(0.25)$
$= 0.75$

$g = 0.75x + 0.25$

El valor de f'(x) es igual que la pendiente en la gráfica y que "m"

Una vez realizadas las actividades y resueltas las preguntas planteadas con la

6. ¿Qué representa el lugar geométrico trazado por el punto **C**? es la grafica de pendiente curva

7. Sea $f'(x) = 3x^2$ la derivada de la función. Trázala en Geogebra y contesta las siguientes preguntas: ¿Qué forma tiene su gráfica? ¿Qué relación tiene con el rastro marcado por el punto **C**? ¿Qué puedes concluir al respecto? ambos, van en la misma dirección, y coinciden con la derivada

8. Evalúa $f'(-0.5)$, coloca el punto **A** tal que su abscisa se encuentra en $x = -0.5$. Observa el valor de la pendiente de la recta **g**, ¿Qué puedes concluir al respecto? es lo mismo que el punto pendiente

Nota. En la imagen se muestran algunas de las respuestas a las preguntas seis, siete y ocho de la secuencia didáctica.

Tabla 5.

Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta seis.

Confrontación: Análisis *a priori* y *a posteriori*	
Descripción del ejercicio. Pregunta número seis.	
6. ¿Qué representa el lugar geométrico trazado por el punto *C*? Se pretende que a través del análisis que han realizado hasta el momento los alumnos puedan concluir que el lugar geométrico que describe el rastro del punto *C* es resultado de graficar a la pendiente de la recta tangente a *f(x).*	
Análisis *a priori*	**Análisis *a posteriori***
Conocimientos y habilidades: Los alumnos deben ser capaces de analizar las relaciones entre dos o más variables para identificar la relación entre el comportamiento de una variable con respecto a otra. Además, tienen que conocer los elementos de una recta como lugar geométrico, construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. Estos conocimientos y habilidades están contemplados en el programa de estudios de la materia de Matemáticas. **Intenciones didácticas:** Los alumnos analizan los parámetros que definen al punto *C,* y aprecian que la ordenada de dicho punto está determinada por el valor del número *m*, por lo que concluyen que el lugar geométrico que describe el rastro del punto *C* es resultado de graficar a la pendiente de la recta tangente a *f(x).* **Consideraciones previas:** Se espera que los	La mayoría de los alumnos identificaron que el lugar geométrico descrito por el rastro que deja el punto *m* es la gráfica de la pendiente de la recta tangente *g* a la curva *f(x)*. En otros casos se encontraron respuestas tales como: "es la gráfica dibujada por *m*", efectivamente lo que dibuja el rastro del punto *C*, representa a las ordenadas que toman su valor del número *m.* También se presentó la siguiente respuesta: "es la pendiente de la curva".

alumnos identifiquen a la gráfica de la pendiente de la recta tangente a la curva *f(x)*. Una posible fuente de error es que los alumnos no recuerden la forma en que se integran las parejas ordenadas que definen a un punto en el plano cartesiano, y que por lo tanto no logren visualizar la forma en cómo se construye el punto *C*, en donde su ordenada corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente.	

Nota: En esta tabla se presenta la confrontación del análisis *a priori* y el *a posteriori* de la pregunta seis de la secuencia didáctica. Tabla basada en Esqueda (2014).

Tabla 6.

Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta siete.

Confrontación: Análisis *a priori* y *a posteriori*	
Descripción del ejercicio. Pregunta número siete.	
7. Sea $f'(x)=3x^2$ la derivada de la función. Trázala en *GeoGebra* y contesta las siguientes preguntas: ¿Qué forma tiene su gráfica? ¿Qué relación tiene con el rastro marcado por el punto C? ¿Qué puedes concluir al respecto? Se pretende que el alumno construya con ayuda de *GeoGebra* la gráfica de la derivada de la función *f(x)*, y que pueda notar que coincida perfectamente con el lugar geométrico descrito por el rastro del punto *C*, que para esta altura del ejercicio, los alumnos deben identificar con la gráfica de la pendiente de la recta tangente a la curva. Lo que se persigue es que los alumnos identifiquen a la derivada de una función como una medida de la pendiente a dicha curva y que a su vez pueda relacionarse con la forma en cómo varían las ordenadas con respecto a las abscisas (razón de cambio).	
Análisis *a priori*	**Análisis *a posteriori***
Conocimientos y habilidades: Los alumnos deben tener la capacidad de identificar las	La mayoría de los alumnos coinciden en que la gráfica

características más importantes de la geometría de los modelos matemáticos presentados en el ejercicio. Además de poder relacionar los elementos que definen a las parejas ordenadas con lo realizado en *Geogebra*. **Intenciones didácticas:** Los alumnos analizan las gráficas descritas tanto por la derivada *f'(x)* y la que describe el rastro del punto *C*, y determinan que ambas son iguales. Por lo que concluyen que el lugar geométrico que describe el rastro del punto *C* es a su vez la gráfica de la derivada de *f(x).* Que finalmente representa una medida de cambio entre las ordenadas y las abscisas de dicha curva. **Consideraciones previas:** Se espera que los alumnos identifiquen a la gráfica de la pendiente de la recta tangente a la curva *f(x)* (la que deja el rastro del punto *C*) como la gráfica de la derivada de dicha función. Una posible fuente de error es que los alumnos no recuerden la forma en que se integran las parejas ordenadas que definen a un punto en el plano cartesiano, y que por lo tanto no logren visualizar la forma en cómo se construye el punto *C*, en donde su ordenada corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente.	que representa a la derivada *f'(x)* es también una parábola. Se identifican afirmaciones tales como: "es una parábola y tienen una relación igual al del punto *C*, las pendientes coinciden con la derivada $3x^2$", También afirman que: "la gráfica del punto *C* es igual a la derivada de la función $3x^2$".

Nota: En esta tabla se presenta la confrontación del análisis *a priori* y el *a posteriori* de la pregunta siete de la secuencia didáctica. Tabla basada en Esqueda (2014).

Tabla 7.

Confrontación: Análisis a priori y a posteriori. Pregunta ocho.

<table>
<tr><th colspan="2">Confrontación: Análisis a priori y a posteriori</th></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción del ejercicio. Pregunta número ocho.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Evalúa f'(-0.5), coloca el punto A tal que su abscisa se encuentra en x=-0.5. Observa el valor de la pendiente de la recta g, ¿Qué puedes concluir al respecto?
Se pretende que los alumnos evalúen la ecuación de la pendiente para x=-5, y que encuentre que su valor coincide con el de la pendiente de la recta g, que a su vez es el mismo que el valor del número m, esto sin dejar de observar lo que implica gráficamente la manera en cómo se comporta la curva f(x) con relación al comportamiento de su recta tangente (g). Se busca pues que los alumnos relacionen la perspectiva gráfica, analítica y geométrica de la derivada de una función para que a su vez puedan resignificar la concepción que tienen de ella.</td></tr>
<tr><th>Análisis a priori</th><th>Análisis a posteriori</th></tr>
<tr><td>Conocimientos y habilidades: Los alumnos deben tener la capacidad de evaluar funciones cuadráticas, e identificar la relación existente entre variables.
Intenciones didácticas: Los alumnos evalúan f'(x) y concluyen que el resultado coincide con el valor del número m, que a su vez representa la pendiente de la curva. Se persigue que los alumnos logren relacionar la perspectiva gráfica, analítica y geométrica de la derivada de una función.
Consideraciones previas: Debe considerarse que los alumnos podrían tener dificultades para evaluar una función. Si el valor obtenido no es el correcto, no lograrán</td><td>En las respuestas de esta pregunta se leen en la mayoría de los casos afirmaciones tales como: "que tanto la m, la g y la derivada de la función son iguales, dan el mismo resultado", "derivada es igual que la pendiente y lo mismo que la tangente". Los alumnos después de evaluar la función (sustituir los valores de x en f'(x) para obtener el valor de la derivada en ese punto) han encontrado que todos los valores coinciden. El número m que representa a la pendiente</td></tr>
</table>

identificar la perspectiva analítica con la gráfica de la derivada.	de la recta tangente, coincide con el valor de *f'(x)* evaluada para un determinado valor de *(x).* Y esta información se encuentra expresada en la parte algebraica de *GeoGebra* al colocar gráficamente el punto *A* en el valor de *x* evaluado en *f'(x)*.

Nota: En esta tabla se presenta la confrontación del análisis *a priori* y el *a posteriori* de la pregunta ocho de la secuencia didáctica. Tabla basada en Esqueda (2014).

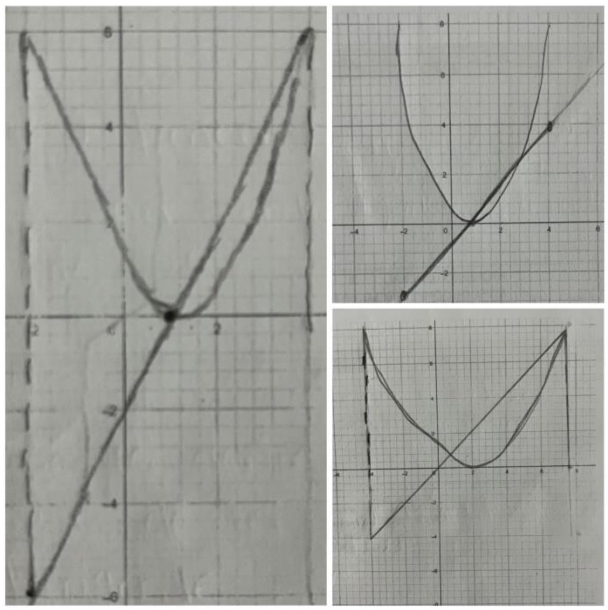
Anteriormente se mencionó que para construir el concepto de derivada Sánchez et al. (2008) señala que se deben considerar sus aspectos gráficos y analíticos. Como pudo apreciarse en la figura 23, los alumnos relacionaron a la gráfica de la derivada de la función *f(x)* con la gráfica que describe el rastro del punto *C*, que a su vez representa al lugar geométrico de la pendiente de la curva. También fueron capaces de calcular el valor de *f'(-0.5)* y concluir que dicho valor corresponde al valor de la pendiente de la curva *f(x)*, que dibuja a la gráfica de la pendiente. Es decir que los alumnos relacionan a la gráfica de la derivada de una función con la gráfica de la pendiente de la recta tangente a la curva.

En cuanto al trazo de la gráfica de la derivada de una función comprendida en la actividad III de la secuencia didáctica, en donde el estudiantado debió dibujar la derivada de una función analizando únicamente la geometría de *f(x),* se halló lo siguiente:

Como puede verse en la figura 24, en el inciso a) la mayoría de los alumnos trazó una línea recta que parte desde el tercer cuadrante del plano cartesiano, es decir desde la parte negativa. Dibujaron la línea tal que pasa hasta el tercer cuadrante positivo. Algunos estudiantes hicieron coincidir el cruce por cero de la recta con el punto más bajo de la curva. Sin embargo, también se presentaron respuestas en donde el cruce por cero se hizo coincidir con el origen del plano cartesiano, esto implica que no lograron advertir el valor cero de la pendiente de la recta en el punto mínimo de la curva.

Figura 24.

Gráficas elaboradas en el inciso a) de la parte III de la secuencia didáctica.

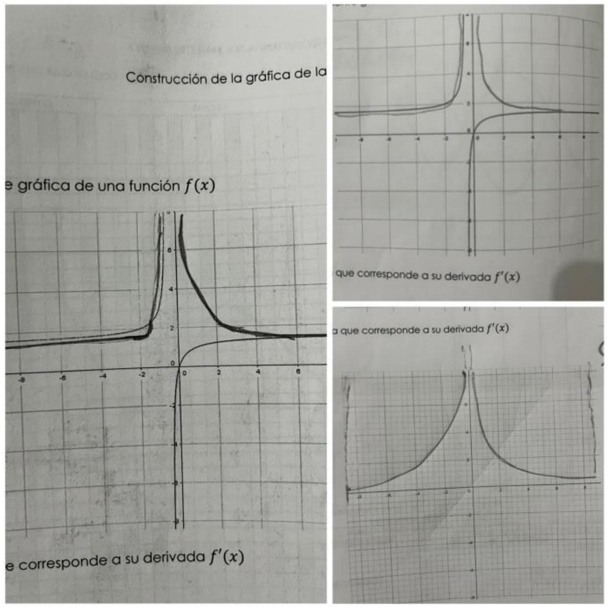


Nota: Se presentan algunas respuestas que corresponden al inciso *a)* de la tercera parte de la secuencia didáctica. Lo que se aprecia es el trazo de la gráfica de la derivada de *f(x)*.

En la figura 25, se presentan algunas de las respuestas obtenidas para el inciso *b)* de la secuencia didáctica, puede apreciarse que los estudiantes identifican la gráfica del comportamiento de la pendiente de la curva *f(x)*, y que algunos se apoyaron sobre la gráfica original para dibujar *f’(x)*.

Figura 25.

Gráficas elaboradas en el inciso b) de la parte III de la secuencia didáctica.

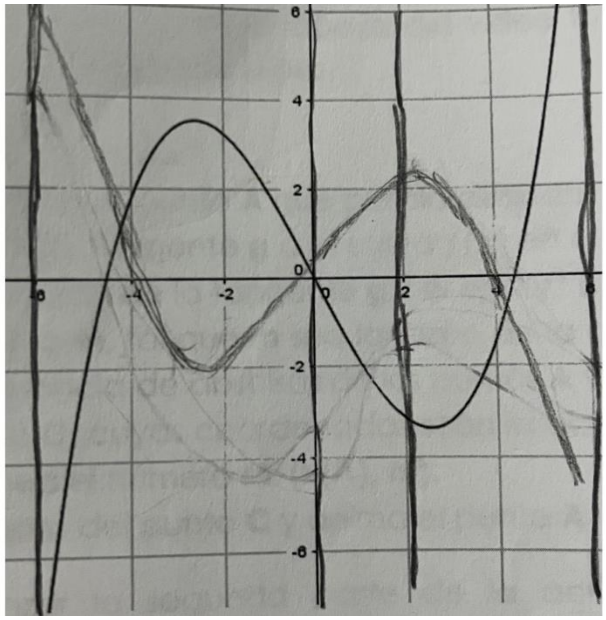


Nota: Se presentan algunas respuestas que corresponden al inciso *b)* de la tercera parte de la secuencia didáctica. Lo que se aprecia es el trazo de la gráfica de la derivada de *f(x)*.

Para el inciso *c),* la mayoría de los alumnos presentaron dificultad para trazar la gráfica de la derivada de una función, únicamente 3 alumnos lograron realizar de manera satisfactoria lo que se pidió en la instrucción. En la figura 26 se presenta el tipo de gráfica que con mayor frecuencia apareció en las respuestas de los alumnos.

Figura 26.

Gráfica elaborada en el inciso c) de la parte III de la secuencia didáctica.



Nota: Se presentan uno de los tipos de respuestas más comunes halladas en la situación didáctica, corresponde al inciso *c)* de la tercera parte de la secuencia.

Se aprecian algunas consideraciones que implican que los estudiantes si tienen noción de la magnitud positiva y negativa que adquiere la recta tangente a la curva mientras transita por *f(x)*, sin embargo para dibujar la gráfica de la derivada de la función la mayoría del estudiantado no contempló el momento en que la pendiente de la recta tangente a la curva tendría el valor de cero. Y se limitaron a repetir, dibujar en espejo por así decirlo, la forma geométrica de la curva *f(x)*. Es evidente que el concepto de razón de cambio no está claro aún, y es necesario señalar que aunque los alumnos identificaron a la pendiente de la recta tangente como la derivada de la función aún es un asunto inconcluso ayudar a los alumnos a construir su relación con la derivada. Puesto que para dibujar la gráfica de la derivada es imperativo tener claridad en el concepto de razón de cambio. Como señalan investigadores como Dolores (1996) y Serna (2007), los estudiantes tienen dificultad para apropiarse de este concepto y para relacionarlo con el de derivada. Por lo que la presente investigación está limitada a ayudar con la relación de los aspectos gráficos y analíticos pero aún está pendiente el tratamiento de la razón de cambio a través de la modelación en *GeoGebra.*

Esta secuencia debe estar articulada con una situación que modele un fenómeno físico que involucre a la variación del crecimiento o decrecimiento de una magnitud. Por ejemplo el crecimiento de una planta, el llenado de agua de un recipiente, el enfriamiento de una bebida, o el desplazamiento de un auto, para así ayudar a que el alumno construya primero la noción de razón de cambio y posteriormente sea posible relacionarla con la concepción de la derivada de una función.

Capítulo V. Conclusiones

Este trabajo tiene su origen en la necesidad de atender un problema encontrado en la matemática escolar: la desconexión entre las perspectivas gráficas y analíticas del concepto de derivada. De ahí la voluntad de diseñar una secuencia didáctica que ayude al estudiantado a construir dicha relación, con el objetivo de que ellos le atribuyan un nuevo significado a su concepción de derivada.

De la presente investigación se llega a la conclusión general que mediante esta secuencia didáctica apoyada en *GeoGebra* se logró que los alumnos pudieran unificar la perspectiva gráfica y analítica del concepto de derivada, así como también fueran capaces de identificar la relación existente entre la derivada de una función y la gráfica de su pendiente, por lo que el objetivo general fue alcanzado. A continuación se presentan al lector unas observaciones derivadas de esta investigación:

1. El *software* de uso libre *GeoGebra* representa una excelente opción para el desarrollo de situaciones didácticas en la asignatura de cálculo diferencial, pues ha demostrado ser un programa fácil de usar, novedoso y entretenido capaz de despertar el interés en los alumnos. Además facilita la atracción del interés de los estudiantes por el tema, y permite visualizar aspectos en las situaciones que de otro modo no serían posible, esto con un considerable ahorro de tiempo.
2. Los alumnos fueron capaces de identificar cambios en la variación de la tangente de una curva y asociarlo con el valor numérico y cambiante de la pendiente de la recta tangente, lo que abre la posibilidad de plantear una secuencia didáctica que recupere esta característica para ayudar a los alumnos a construir su concepción de razón de cambio.
3. A través de la secuencia didáctica propuesta los alumnos lograron identificar y relacionar el cambio de la pendiente de la recta tangente a una curva con la inclinación que geométricamente asume conforme esta se desplaza a través de dicha curva.

4. Los estudiantes fueron capaces de identificar a la gráfica de la derivada de una función con la gráfica que describe el valor de la pendiente de una recta tangente a dicha curva.
5. Los estudiantes lograron relacionar la perspectiva gráfica con la analítica de la derivada de una función, es decir que han conseguido relacionar a la gráfica de la derivada de una función con la gráfica de la pendiente de la recta tangente a la curva.
6. Los estudiantes pudieron conciliar la perspectiva gráfica, analítica y geométrica de la concepción de derivada.

La situación didáctica propuesta ayudó a los estudiantes a relacionar de una manera intuitiva la perspectiva gráfica y analítica de la derivada de una función; sin embargo, puede verse claramente la limitación que esta tiene, ya que en la actividad en la que los estudiantes debían construir la gráfica de la derivada de una función no fueron capaces de realizarla satisfactoriamente, pues para ello es muy importante tener un conocimiento claro del concepto de razón de cambio de una función, que está íntimamente relacionado con el de la derivada.

Como se mencionó anteriormente la presente investigación abre el camino para el desarrollo de secuencias didácticas que se preocupen por la razón de cambio, para que esta sea introducida al programa de estudios de manera temprana, para familiarizar a los alumnos con los fenómenos que involucran cambio variable, por ejemplo el llenado con agua a recipientes de distintas geometrías, el enfriamiento de bebidas analizando el cambio de la tasa de disminución de temperatura con respecto al tiempo, movimiento y velocidad variable de objetos, etc.

Cabe señalar que el uso de herramientas tecnológicas en la matemática escolar está llamado a tener un papel determinante no sólo como una herramienta novedosa que motiva a los alumnos, sino que facilita los procesos cognitivos por su poder visual y predictivo, y por la infinita gama de posibilidades que ofrece de plantear situaciones didácticas tangibles y significativas para los alumnos.

Además, la situación didáctica puesta en escena se inscribe en un proceso de retroalimentación y por lo tanto es susceptible a cambios y mejoras pero se concluye que es un buen comienzo que abre la puerta a la resignificación del concepto derivada como razón de cambio en alumnos de nivel medio superior.

Actualmente, el programa de estudios de la educación media superior está experimentando una importante modificación, y de momento no está terminado el contenido temático de la materia de matemáticas, por lo que la presente investigación representa al mismo tiempo una alternativa para plantear lo que todavía se encuentra pendiente por definir en cuanto al programa de estudios de la materia.

Referencias

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G., Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Comité,17,* 418-422. http://funes.uniandes.edu.co/6327/1/ArrietaLaspracticasAlme2004.pdf

Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo editorial Iberoamérica.

Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). *The development of student's graphical understanding of the derivate. Journal of Mathematical Behavior* [El desarrollo de la comprensión gráfica de la derivada por parte de los estudiantes]. *La revista de comportamiento matemático*, *16*(4), 399-431. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Becerra, M., Bermúdez, E., y Ochoa, J. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sofía*, *14*(2), 115-126 https://doi.org/10.18634/sophiaj.14v.2i.629

Caballero, M. (2015). *Pensamiento y lenguaje variacional: el principio estrella como un mecanismo de construcción social del conocimiento matemático*. 3er Coloquio de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. https://matedu.cinvestav.mx/~tercercoloquiodoctorado/memorias/art/037.pdf

Camacho, A. (2006, abril). Socioepistemologia y prácticas sociales. *Educación Matemática*. *18*(1), 133-160. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518106.

Cantor, G., (2002). La Triangulación Metodológica en Ciencias Sociales. Reflexiones a partir de un trabajo de investigación empírica. *Cinta de Moebio*, (13), http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10101305.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Gedisa.

Cantoral, R., (2016). Educación alternativa: matemáticas y práctica social. *Perfiles Educativos, 37*, 7-18. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13250921002.

Cantoral, R., Montiel, G., Reyes-Gasperini, D. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad*. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7* (3), 91-116. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274032530006

Cantoral, R., Montiel, G., Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa Socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18* (1), 5-17. DOI: 10.12802/relime.13.1810

Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra*. En Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *29*, 10-22. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/871/575

Cruse, A y Lehman, M. (1982). *Lectures on freshman Calculus.* [Lecciones de cálculo]. Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Daros, W. (2002). ¿Qué es un marco teórico? *Enfoques*, *16*(1), 73-112. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=25914108

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*. [Tesis de doctorado no publicada]. Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona”.

Elías, J. (2013). *Las TIC y las Matemáticas, avanzando hacia el futuro*. [Tesis de maestría, Universidad de Cantabria] Repositorio institucional-Universitat de Cantabria.

Esqueda, C. (2014). *Razón de cambio: Un estudio para analizar su construcción a través de las gráficas generadas por el modelo de llenado de recipientes.* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Chiapas.

Hernández, N. (2015). *Resignificación de la pendiente estática y pendiente dinámica en un contexto escolar.* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Chiapas.

Inzunza, S. (2014). *GeoGebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad.* [Artículo de congreso] Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. https://docplayer.es/38490613-Geogebra-una-herramienta-cognitiva-para-la-ensenanza-de-la-probabilidad.html

Jiménez, J. y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre Tecnología Educación y Sociedad*, *4*(7), 1-17, https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654/736

Jonapá, L. (2017). *Resignificación de la noción de derivada a partir de fenómenos variacionales. Una propuesta tecnológica.* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Chiapas.

Kline, M. (2007). *El fracaso de la matemática moderna, por qué Juanito no sabe sumar*. Siglo XXI.

Lafuente Ibáñez, C., y Marín Egoscozábal, A. (2008). Metodologías de la investigación en las ciencias sociales: Fases, fuentes y selección de técnicas. *Revista Escuela de Administración de Negocios,* (64). http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=206129810022.

Lehman, C. (2002). *Geometría Analítica*. Editorial Limusa, S.A. de C.V. Grupo Noriega Editores.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). Lectorum

Razo, A. (2017). La Reforma Integral de la Educación Media Superior en el aula: política, evidencia y propuestas. *Perfiles educativos*, *40*(159), 90-106. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982018000100090&lng=es&tlng=es.

Rendón, P. (2009). *Conceptualización de la Razón de Cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. [Tesis de maestría no publicada]. Universidad de Antioquia.

Rosas, A., Romo, A. (2013). *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones*. Lectorum. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/Archivos/ProgramaEditorial/LP/Libro%20B%20Metodologi%CC%81a%20en%20Matema%CC%81tica%20Educativa.pdf

Sánchez G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* *11*(2) 267-296. https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v11n2/v11n2a5.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2010a). Programa de estudios de matemáticas I. Subsecretaría de Educación Media. Dirección General del Bachillerato. http://www.cobaev.edu.mx/docentes/riems/PRIMER_SEMESTRE/MATEMATICAS-I.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2010b). Programa de estudios de cálculo diferencial. Subsecretaría de Educación Media. Dirección General del Bachillerato. http://www.cobaev.edu.mx/docentes/riems/FORMACION_PROPEDEUTICA/5_SEMESTRE/calculo-diferencial.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2011a). Programa de estudios de matemáticas III. Subsecretaría de Educación Media. Dirección General del Bachillerato. http://cobaev.edu.mx/docentes/riems/TERCER_SEMESTRE/MATEMATICAS-III.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2011b). Programa de estudios de matemáticas IV. Subsecretaría de Educación Media. Dirección General del Bachillerato. http://www.cobaev.edu.mx/docentes/riems/CUARTO_SEMESTRE/Matematicas-IV.pdf

Serna, L. (2007). *Estudio epistemológico de la tangente.* [Tesis de maestría no publicada]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Vygotski, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Crítica.

Yojcom, D. (2013). *La Epistemología de la Matemática Maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de prácticas*. [Tesis de doctorado no publicada] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, del IPN. https://www.researchgate.net/publication/271198554_LA_EPISTEMOLOGIA_DE_LA_MATEMATICA_MAYA_UNA_CONSTRUCCION_DE_CONOCIMIENTOS_Y_SABERES_A_TRAVES_DE_PRACTICAS