



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS



Facultad de Ingeniería

Campus I

Coordinación de Investigación y Posgrado

Título

“Un estudio socioepistemológico sobre las fracciones, sus representaciones y significados”

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Ing. Manuel Fernando Alva Alejos PS1099

Director de tesis

Dr. Miguel Solís Esquinca

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; mayo de 2023



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
24 de mayo del 2023
Oficio No. F.I.01.751/2023

C. MANUEL FERNANDO ALVA ALEJOS
ALUMNO DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS CON
ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
PRESENTE.

Con base en el Reglamento de Evaluación Profesional para los egresados de la Universidad Autónoma de Chiapas, y habiéndose cumplido con las disposiciones en cuanto a la aprobación por parte de los integrantes del jurado en el contenido de su Tesis Titulada:

“UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO SOBRE LAS FRACCIONES, SUS REPRESENTACIONES Y SIGNIFICADOS”.

CERTIFICO el VOTO APROBATORIO emitido por este jurado, y autorizo la impresión de dicho trabajo para que sea sustentado en su Examen Profesional para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

“POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR”


DR. OMAR ANTONIO DE LA CRUZ COURTOIS
ENCARGADO DE DIRECCIÓN



Ccp. Dr. Humberto Miguel Sansebastián García. Coordinador de Investigación y Posgrado. Facultad de Ingeniería, Campus I. UNACH.
Archivo/minutario
OACC/HMSG/snv*



Código: FO-113-05-05

Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) Manuel Fernando Alba Alejos,
Autor (a) de la tesis bajo el título de "Un estudio socioepistemológico sobre las fracciones, sus representaciones y significados,"

presentada y aprobada en el año 20 23 como requisito para obtener el título o grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, autorizo licencia a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), para que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para su consulta, reproducción parcial y/o total, citando la fuente, que contribuya a la divulgación del conocimiento humanístico, científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.
- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 25 días del mes de mayo del año 20 23.

Manuel Fernando Alba Alejos

Nombre y firma del Tesista o Tesistas

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por el tiempo de vida... para concluir un objetivo más durante el transitar en este mundo.

Al Dr. Miguel Solís Esquinca (director de tesis,) por confiar, creer, brindar y dar la oportunidad en desarrollar las ideas para la presente investigación. A los asesores de tesis; de manera personal al Dr. German Muñoz Ortega, por impulsarme a estudiar la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de esta honorable institución, a quien debo mi formación académica superior. Así como al Dr. Eriván Velasco Núñez y al Dr. Edgar Javier Morales Velasco, por sus aportaciones constructivas en pro a la investigación realizada (comentarios y sugerencias).

A la maestra Zuleyma Mateos Morales, por el apoyo brindado con el grupo, a fin de poner en escena la secuencia (situación escolar de la socialización), a sus alumnos por sus aportaciones significativas (producciones desarrolladas) para la conclusión de la presente investigación.

A mi esposa por ser el motor y apoyo para desarrollarme profesionalmente, a hija (Carmen Itzel) por el apoyo incondicional en las pruebas pilotos de las actividades.

A mis padres (Melchor Alva) y madre (Martha Alejos) a quienes debo mi existencia, mis estudios básicos para ser una mejor persona y ser humano.

Índice

Introducción	1
<i>Problemática</i>	1
Capítulo 1.- Aspectos preliminares	4
<i>Antecedentes</i>	4
<i>Justificación</i>	8
<i>Pregunta de investigación</i>	11
<i>Objetivo principal</i>	12
Objetivos específicos.....	13
<i>Contexto de la investigación</i>	14
Capítulo 2.- Referentes teóricos y metodológicos	18
<i>Teoría Socioepistemológica</i>	18
<i>Metodología</i>	24
Problemática o fenómeno didáctico.....	26
Análisis socioepistemológico.....	26
Epistemología de las prácticas.....	27
Situación problema.....	27
Hacia la construcción del conocimiento.....	28
Capítulo 3.- Estado del Arte	29
<i>Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado</i>	29
<i>Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido</i>	31
<i>Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas</i>	32
<i>Nociones de Representación y Comprensión en Educación Matemática</i>	34
<i>Diferentes representaciones en matemática: una entrevista</i>	35
<i>Las fracciones y las representaciones de Llinares y Sánchez</i>	37

Capítulo 4.- Desarrollo de la investigación	42
<i>Una socioepistemología de las fracciones</i>	<i>42</i>
Origen de las fracciones	42
Algunas civilizaciones que emplearon las fracciones	44
Sobre las representaciones de las fracciones	48
Representación Semiótica sobre las fracciones de Duval.....	51
Representaciones matemáticas de Marshall, Castro y Canty.....	54
La evolución de la educación de México	55
Las fracciones en los Planes y programas de estudio (2011 y 2017).....	68
Análisis de las fracciones en los libros de textos 2011 y 2017	78
Hacia un rediseño del discurso matemático escolar de las fracciones.....	82
<i>Caso práctico de una secuencia diseñada.....</i>	<i>87</i>
Diagnóstico grupal de la maestra	87
Esbozo de la secuencia.....	89
Puesta en escena.....	91
Capítulo 5.- Conclusiones.....	111
Bibliografía	113
Anexos.....	117

Introducción

Se realiza una investigación de las fracciones; considerando el origen del mismo, los diferentes significados que tienen las fracciones -de acuerdo con Fandiño (2009)- las distintas maneras de representar (numérica, literal, geométrica y discreta) de acuerdo con Llinares y Sánchez (1997), aunque no son las únicas, en la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (2006) se pueden apreciar otras representaciones como la figural, algebraico, aritmético y para el caso del geométrico se puede considerar como gráfico o pictogramas. Por ello se plantea como hipótesis: "la representación empleada en la fracción, dota de significado a la fracción"; es decir que los distintos significados dependen de la representación utilizada.

Problemática

La problemática que se aborda en la presente investigación se fundamenta en cómo se enseña y aprenden las fracciones en México, al considerar -desde un punto de vista personal- como primer acercamiento al tema, es la representación forman de las fracciones (a/b) con el mismo denominador; pero sólo utilizan los medios, cuartos y octavos; es decir es una enseñanza segmentada. No se aborda un enfoque global o integral del concepto matemático (fracciones) desde su origen, los diferentes significados de las fracciones y las formas en cómo se pueden representar.

Se considera que, sin importar cómo se defina la fracción -concepto matemático (formal o informal)- en esencia, se relaciona con la acción de repartir "algo" (unidad) (siendo un objeto (casa, terreno, entre otros.) alimento (pastel, pizza, paella, por citar algunos ejemplos) objeto matemático (número, figura geométrica, etc.).

Dicha acción (repartir) se puede representar en formas distintas; dando así el surgimiento del concepto matemático denominado "fracción", pero existe la posibilidad de la confusión en los alumnos para distinguir a la fracción versus la división, al momento de resolver un problema de reparto. Por ello se pregunta **¿cuál es la diferencia entre dividir y fraccionar?**

Se plantea que las fracciones surgen por la necesidad de repartir (tierras, cosecha, herencia, etc.) y determinar las porciones respectivas (de acuerdo a la necesidad). Aunque al repartir, se puede emplear la división para representar la parte del todo que le corresponde a alguien.

Para el primer caso se desprecia el residuo, dando importancia a la parte entera (cociente). Sin embargo, en la fracción no sucede lo mismo; siempre está presente el residuo (sobrante). Pues al mencionar "un medio" ($\frac{1}{2}$) se tiene de manera implícita la contraparte (residuo o sobrante).

De acuerdo con Gómez y Pérez (2016) las fracciones se pueden representar en forma geométrica, discreta, numérica y literal. Las representaciones geométricas se realizan en un contexto continuo (diagramas circulares, rectangulares y recta numérica). Son discretas en un conjunto de datos (discretos), numéricas al utilizar los números para indicar la relación parte-todo y la representación literal al escribirla (tres quintos, proporción de tres a cinco, etc.). Estos son algunas representaciones asociados con las fracciones; sin embargo, más adelante se profundizará sobre ello. (Llinares et al, 1997)

El documento consta de cinco capítulos (aspectos preliminares, aspectos teóricos metodológicos, estado del arte, desarrollo de la investigación y conclusiones) que a su vez se subdividen acorde al capítulo.

En el capítulo I, se abordan los antecedentes de la investigación (origen) e investigaciones que aportan cuáles son las problemáticas que tienen los alumnos con el tema de las fracciones en el aprendizaje y la enseñanza. También se evidencian las limitaciones que tuvo la investigación, pues se desarrolló durante la contingencia sanitaria del covid-19.

Después se abordan los aspectos teóricos-metodológicos de la investigación, el por qué se emplea a la socioepistemología y no la teoría de los registros de representación semiótica, pese a trabajar con las distintas representaciones asociadas a las fracciones, así como el esquema metodológico empleado; que impacta de manera directa en los diferentes artículos recuperados y expuestos en el estado de arte (capítulo III).

Al concluir el capítulo III, se da inicio al desarrollo de la investigación, dividido en dos subcapítulos: Epistemología y caso práctico de la secuencia diseñada. En el primero es la investigación sobre el origen de las fracciones, las distintas representaciones -de manera general y las representaciones en matemática- el discurso matemático escolar (dME) en México. En el subcapítulo dos se explica el desarrollo de la secuencia y el análisis de las producciones de los alumnos de primero de secundaria.

En el capítulo final se exponen las conclusiones de la investigación con base en el análisis de las producciones de los alumnos. Además, de realizar una aproximación en cómo abordar las fracciones en la enseñanza-aprendizaje de forma integral (el origen, significados y representaciones).

Capítulo 1.- Aspectos preliminares

Antecedentes

El principal antecedente de esta investigación es Alva (2018) quien a bordo de manera indirecta la representación de las fracciones; al trabajar con los significados parte-todo, cociente, medida y número racional de las fracciones.

Los resultados obtenidos, permitió determinar que los alumnos, antes de pasar a las fracciones mantenían la conceptualización de la unidad. Se vislumbró que los alumnos no logran desprenderse de la parte entera. Es decir, emplean los números naturales al mencionar "una rebanada de pizza" y no la porción que representa $1/8$ (fracción). En dicha investigación se empleó a la teoría de Situaciones Didáctica y a la Ingeniería Didáctica como metodología.

Otras investigaciones como la desarrollada Fandiño (2009), Lamon (1999), Flores (2010), Llinares et al (1997), Gómez et al (2016), Rizo y Campistrous (2014), por citar algunos antecedentes importantes para la presente investigación, abordan distintos enfoques: la enseñanza-aprendizaje, problemáticas de los alumnos para comprender, los significados asociados a las fracciones, por citar algunos ejemplos.

Sin embargo, a pesar de tener su propio interés de manera particular o específico, cada una de las investigaciones al conjuntarlas abonan a los diferentes aspectos considerados en la presente investigación (las representaciones de las fracciones, los significados de las fracciones y el concepto matemático).

De forma general se considera que las fracciones tienen diferentes significados -mismo que serán listados a continuación- ya sean los doce (Lamon, 1999) o los catorce (Fandiño, 2009) planteados por cada autor. Sin importar cuáles sean estos significados, se considera que la representación privilegia al significado (como hipótesis de la presente investigación).

- La fracción como parte de una unidad-todo (continua o discreta).
- La fracción como cociente.
- La fracción como relación.
- La fracción como operador.
- La fracción como probabilidad.
- La fracción en los puntajes.
- La fracción como número racional.
- La fracción como punto de una recta orientada.
- La fracción como medida.
- La fracción como indicador de cantidad de elección.
- La fracción como porcentaje.
- La fracción en el lenguaje cotidiano.
- La conceptualización de las fracciones y la teoría de Gerard Vergnaud.
- La conceptualización de la fracción: signo-objeto de Duval.

Además, algunos significados como la unidad-todo, cociente, puntajes, punto en una recta numérica... pueden ser fácil de enseñar, explicar, entender y asimilar para el alumno. Pero, existen otros (la fracción como probabilidad, número racional, por citar algunos.) donde su enseñanza y por ende la comprensión no sea tan clara para el alumno. Algunos son más complejos para el alumno o docente (maestro frente a grupo) a tal grado de ser comprensibles para el investigador (en matemática educativa) como la conceptualización de las fracciones y la teoría de Gerard Vergnaud o la conceptualización de la fracción: signo-objeto de Duval.

Fandiño (2009) argumenta el por qué considera a la conceptualización de las fracciones y la teoría de Gerarg Vergnaud o la conceptualización de la fracción signo-objeto de Duval. Para el primer caso ejemplifica con el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, donde no tiene sentido estudiar a la multiplicación como operación para resolver cierta clase de problemas; cuando en realidad la multiplicación está conectada con la división, las fracciones, relaciones, números racionales, etc. Es decir, los conceptos matemáticos son interdependientes debido a que están todos presentes desde los primeros problemas que los alumnos deben resolver.

De manera particular se concuerda la autora, ya que los conocimientos desarrollados por el ser humano (de manera general) están asociados directa o indirectamente. Pero, al ser un cúmulo de conocimientos amplios; son segmentados y clasificados en distintas ciencias (matemáticas, física, química, biología). Por ejemplo, en química se estudian los compuestos basados en carbono e hidrógeno (química orgánica) y la química inorgánica estudia los compuestos sin dichos elementos (el carbono e hidrógeno). En la matemática se tiene el álgebra lineal y no lineal, geometría analítica y trigonometría, por citar algunos ejemplos.

En relación al signo-objeto de Duval, Fandiño (2009) menciona que el objeto matemático "fracción" tiene múltiples funciones y remite a una multiplicidad de signos, cada uno de los cuales pertenece a distintos sistemas de signos. Esto abona a los objetivos de la investigación (determinar las representaciones asociadas a las fracciones, que tienen los alumnos) y que se toman a modo de ejemplificar las distintas las representaciones en la matemática, de manera específica de las fracciones.

Cuando se enuncia un concepto matemático se emplea una representación, porque no existen objetos para exhibir. La conceptualización (del concepto matemático) debe pasar a registros representativos. Por tanto, no hay un concepto matemático sin signo y cada concepto matemático no sólo remite a un objeto mental -que la sociedad y la matemática tradicional ha construido- sino a distintos signos de los sistemas elaborados para representarlo; es decir, a un sistema de signos (D'Amore, 2005).

De manera específica esto se puede apreciar con las diferentes maneras de representar a la fracción, para Linares et al (1997) se pueden representar en forma geométrica, discreta, numérica y literal... pero no son la únicas. Las diferentes representaciones, ya sea cuáles son o cómo se denominan; dependerá de los autores o las dimensiones que se aborden (desde el punto de vista teórico) por ejemplo: Pimm (1999) dice que la matemática emplea distintos tipos de símbolos y los clasifica en cuatro grupos: 1) logogramas (estos sustituyen a las palabras completas, los denomina signos), 2) pictogramas (se refiere a la parte geométrica de la matemática y las considera como imágenes esterilizadas), 3) símbolos de puntuación (son los símbolos que emplean en la ortografía convencional) y 4) símbolos alfabéticos (como el griego o el romano).

Más adelante se explicará cada una de las distintas representaciones consideradas para la investigación, todo en función a las fracciones. Adicional se espera recuperar el origen de las fracciones (necesidad) para dotar al significado matemático (objeto matemático) con la finalidad de que los alumnos (estudiantes) puedan diferenciar la fracción de la división ante un problema de reparto. No desde el procedimiento mismo y la obtención del resultado específico (división o fracción); sino por la utilidad (uso).

Justificación

Ya se mencionó la complejidad inmersa en las fracciones (origen, concepto, significados y representaciones), mismo que motivo a trabajar con las fracciones la presente investigación. Adicional a ello se consideró un tema relevante para trabajar, por ser un tema transversal en los niveles educativos de México (básico, medio y superior).

Se puede constatar en los diferentes planes y programas de estudio en México, de la Secretaría de Educación Pública (SEP) ha publicado (2009, 2011 y 2017) del nivel básico (preescolar, primaria y secundaria). Estos (planes y programas de estudio) mantienen una estrecha relación con las Reformas Educativas en el cómo y cuándo se abordan los diferentes temas de cada materia contemplada en la formación de los alumnos.

En México el primer acercamiento se da en el nivel básico (primaria y secundaria), lo anterior acorde a los planes y programas de estudios del 2011 y 2017; pero más adelante se realizará un análisis para comparar las similitudes y diferencias entre ambos. Por el momento, bastará con saber que el tiempo previsto para el desarrollo de las fracciones es de igual (tres años) es decir, a partir del tercer grado de primaria se aborda.

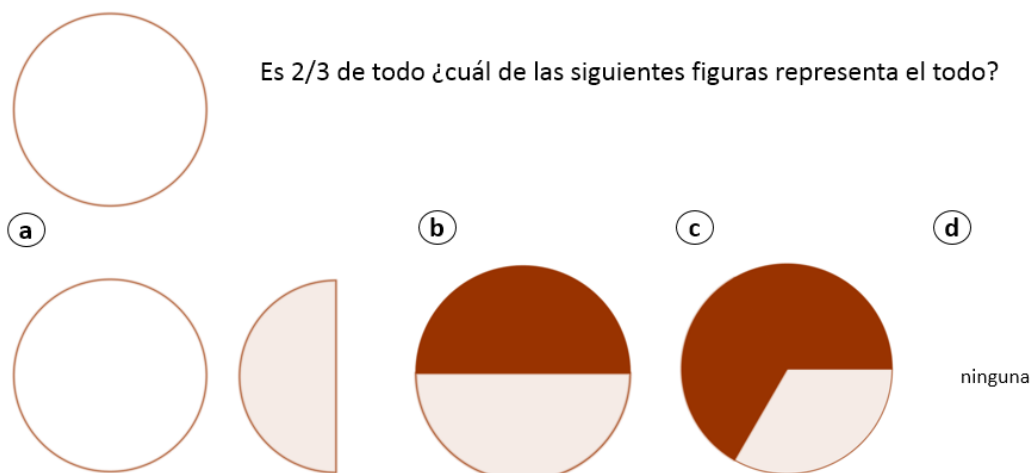
Por otro lado, se tiene la existencia de la dificultad en la enseñanza-aprendizaje de los alumnos al poder reconocer; que se habla de proporcionalidad comparando dos medidas, equivalencia, razón, cociente, números racionales en un mismo tema (fracciones) es complejo... para el alumno o el docente (Gómez y Pérez, 2016).

Otra dificultad importante es la que plantea Valdemoros y Perera (2009) es el comienzo (inicio) del aprendizaje del concepto matemático, cuando el niño se enfrenta al estudio de las fracciones, sin tener los conocimientos previos requeridos. Aunado a esto, si consideremos los estadios de Piaget (1998) los alumnos están en el periodo de las operaciones concretas, que va de los 7 a los 11 años. Si bien emplea el uso adecuado de la lógica, también menciona que; el pensamiento hipotético y abstracto aún no se ha desarrollado. Por tanto, los niños solo pueden resolver los problemas que se aplican a eventos u objetos concretos.

En la investigación realizada por Acevedo, López, Guerrero y Morales (2013) titulada "La fracción parte-todo a través de una mirada gráfica", menciona como dificultades o problemática; la representación asociada a las fracciones. A pesar de haberse desarrollado en Colombia, en un ejercicio de aula al interpretar a las fracciones en su forma gráfica (figura 3) para dar respuesta a la pregunta "... es $\frac{2}{3}$ de todo. ¿Cuál de las siguientes figuras presenta el todo?", la mayoría erro la respuesta correcta a pesar de ser estudiantes del nivel superior (universitarios).

Figura 3.

Ejercicio del caso práctico, realizado en el aula.



Fuente: Elaboración propia 2022.

Nota: Realizado en base a la imagen de Acevedo (2013)

En base a las respuestas, se infirió que las fracciones no se enseñan de manera gráfica; por tanto, no se tenían claros aspectos como: la existencia de representaciones gráficas en contextos continuos y discretos o que el todo de una fracción se puede representar como una unidad o un conjunto de cosas, además de poder operar las fracciones de forma gráfica (Acevedo, 2013).

Además, en el trabajo realizado (Alva, 2018) se denota este hecho en particular (interpretación gráfica) cuando los alumnos contestan: “una rebanada de pizza” previa representación (gráfica) de la solución da (repartir una pizza). Sin lograr desprenderse de la parte entera, para priorizar al elemento, ante el todo.

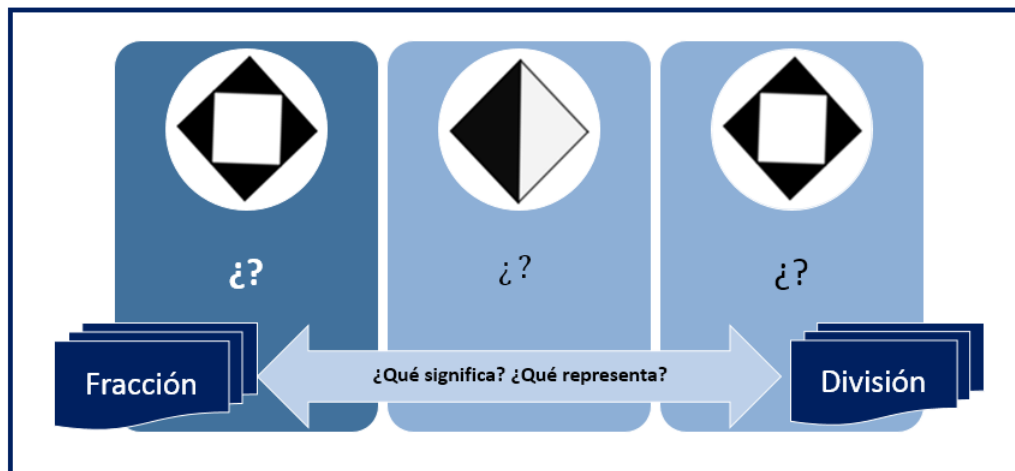
El asociar los diferentes elementos que se abordan de manera aislada en las investigaciones (significados, representaciones, origen del concepto, problemáticas en la enseñanza o aprendizaje) es lo relevante de la presente investigación. Para dar una visión global sobre las fracciones a los alumnos, el docente (maestro) y quizás al investigador en matemática educativa.

Por ende, se parte de la hipótesis (supuesto) “las representaciones y significados están asociados de manera directa”; es decir, una representación (geométrica, discreta, numérica o literal) favorece (privilegia) a un significado específico asociado a la fracción. Sin priorizar los doce significados de Lamon (1999) o los catorce significados que Fandiño (2009).

Por ello, se puede considerar como ejes principales de la investigación, los conceptos matemáticos fracción versus división, al momento de repartir. Así como los elementos que intervienen (representación, significados y concepto) para conceptualizar de manera correcta y distinguir el uso de la fracción o división como herramienta matemática (figura 4).

Figura 4.

Elementos que intervienen en la hipótesis planteada en la investigación, sobre la representación de la fracción parte-todo o segmentación de la división.



Fuente: Elaboración propia 2022.

Pregunta de investigación

Cuando se realiza una investigación referente a las fracciones en México, se tiene un abanico amplio de estudio en función de los estudiantes. Ya que se enseña en el nivel básico (primaria y secundaria), por tal motivo se acotó a los alumnos que cursan el primer año de secundaria. Para determinar si son capaces de diferenciar el uso (aplicación) de la fracción versus la división al momento de resolver un problema de reparto (figura 1). Al considerar que tienen conocimientos de las fracciones (se abordó desde el tercer grado de primaria) serán capaces de **diferenciar** la **fracción** de la **división** en un problema de reparto.

Figura 1.

Acción de repartir, al momento de fraccionar o dividir.



Fuente: Elaboración propia 2022.

Objetivo principal

El objetivo principal es identificar cuáles son los argumentos de los alumnos de primero de secundaria (de acuerdo a su comprensión) para explicar la diferencia entre la fracción y la división. Además de saber cuáles son las representaciones y significados que tienen los alumnos asociados con las fracciones.

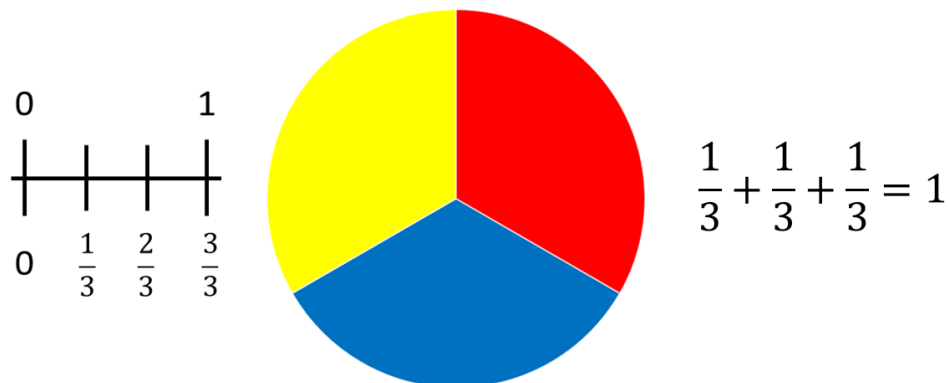
Esto es importante, por lo general no se emplean todas las representaciones disponibles al abordar o ejemplificar una repartición. Para contextualizar lo anterior, si consideremos un objeto "x" se reparte en tres (personas, montones, cosas) la representación ideal -a la que se recurre- será la geométrica (pictórica para Bruno D'Amore) por facilitar la comprensión de manera clara y precisa de la suma de cada una de las partes, con esto se evita la periodicidad de los números decimales.

Quizás otra alternativa sea la forma fraccional $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Caso contrario a la representación racional (decimales) donde se obtienen periodos; es decir; $0.\hat{3} + 0.\hat{3} + 0.\hat{3} = 0.\hat{9}$

Por ello, resulta fácil explicar 3 partes iguales, con el uso de la representación geométrica o en su defecto fraccional (figura 2).

Figura 2.

Formas de representar la repartición en tres partes.



Fuente: Elaboración propia 2022.

Objetivos específicos

De manera específica se pretende que los alumnos de primero de secundaria asimilen el concepto matemático de la fracción a través de un problema de reparto, que permita diferenciar a la fracción de la división.

También se desea lograr que los alumnos de primero de secundaria perciban el concepto de fracción y su relación con las magnitudes de manera natural e intuitiva. A fin de poder tener una noción y percibir la equivalencia que puede existir.

Por último, se asocian la repartición de un elemento cualesquiera (objeto matemático, cosa, alimento, etc.) como unidad. Por medio de una serie de actividades que se les solicitará a través de una secuencia, misma que será diseñada para la presente investigación.

Contexto de la investigación

Para el desarrollo de la investigación, se tuvo limitaciones (todo trabajo), pero en particular existió un factor externo; que impacta en mayor o menor medida (por el tipo de investigación realizada y propuesta) dicho factor es la pandemia del virus SARS Cov 2, más conocido como la enfermedad del COVID-19.

Afectó el desarrollo de la investigación (fase de experimentación) en la producción o puesta en escena por el tipo de teoría y metodología empleada, ya que se aborda (propone) una secuencia que deben desarrollar los alumnos del primer año de secundaria (producción de los estudiantes).

Se limitó la aplicación de la secuencia en primera instancia, porque se tenía previsto realizar la puesta en escena (experimentación) con un grupo completo, a fin de validar o refutar los supuestos previstos en cada una de las producciones de los alumnos. A través de las respuestas dadas por cada alumno y tener así elementos para responder la pregunta de investigación, en base al análisis de las producciones de cada alumno.

Otro factor importante es la nueva modalidad implementada en la educación de México y a nivel mundial durante la pandemia. Esto originó la necesidad de migrar de las clases presenciales a las virtuales o bien en algunos casos el esquema mixto (presencial y virtual) afectando de manera directa o indirecta la enseñanza-aprendizaje en los alumnos que cursan y cursaron el sexto grado de primaria, mismos que se incorporaron a primero de secundaria.

De inicio, no fue posible aplicar la puesta en escena a los grupos de primero de secundaria. Por la falta de consentimiento (permiso) de los padres de familia para que sus hijos (alumnos) asistieran a la escuela a fin de llevarse la actividad extraescolar, pese a ser tomado en cuenta en la calificación final (un punto sobre la calificación final)- no fue posible el consentimiento de los padres de familia- aunque al final se llevó acabo, pero implico una pausa en el desarrollo de la investigación.

Además, la falta de planes y programas de estudio actualizados -acorde con la actual Reforma Educativa vigente- por el rezago ocasionado por las diferentes reformas educativas (Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica, que va de Miguel de la Madrid hasta Carlos Salinas de Gortari; la Reforma Integral de la Educación Básica y Media (RIEB) implementada con Vicente Fox Quesada y Felipe Calderón Hinojosa; la actual reforma con la Nueva Escuela Mexicana con Andrés Manuel López Obrador) ocasionado la desactualización y la falta de continuidad de un modelo educativo.

La no continuidad de una Reforma Educativa, afecta de manera directa los planes y programas de estudio que se han tenido en México en las últimas décadas (2009, 2011 y 2017). Ya que, de acuerdo con Ley General de Educación; la Secretaría de Educación Pública (SEP) es la responsable de la implementación y regulación de la educación pública.

Dicha ley menciona que la función de la Federación es normar la educación básica, definir los lineamientos, planes y programas de estudio, en concurrencia con las autoridades educativas locales, confirmar el calendario escolar, la elaboración y producción de libros de texto gratuito, entre otras funciones.

Durante el desarrollo de la investigación los planes y programas de estudio, no estaban acorde con la actual reforma educativa. Por tanto, se tuvo una enseñanza híbrida en los niveles educativos (primaria y secundaria) entre los planes y programas 2011 y 2017 (figura 5 y 6). Derivado de los cambios vertiginosos entre modelos educativos, provocan la falta de continuidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los alumnos. Para el caso de los maestros (docentes) deben adaptarse al modelo educativo propuesto por la SEP metodología de enseñanza, los libros y el contenido del mismo, los planes y programas de estudios, por citas alguno ejemplos.

Figura 5.

Planes y programas de estudios de acuerdo al grado, para el nivel educativo de primaria.

Plan y Programas de Estudio de Primaria – 2017 para 1° y 2° grado. 2011 para 3° a 6° grado		
Grado y nivel educativo	Plan y programas de estudio 2011	Plan y programas de estudio 2017
1° de primaria		
2° de primaria		
3° de primaria		
4° de primaria		
5° de primaria		
6° de primaria		

Fuente: Secretaria de Educación Pública (SEP, 2019)

Figura 6.

Planes y programas de estudios de acuerdo al grado, para el nivel educativo de secundaria.

Plan y Programas de Estudio de Secundaria – 2017 para 3° grado. 2011 para 1° y 2° grado		
Grado y nivel educativo	Plan y programas de estudio 2011	Plan y programas de estudio 2017
1° de secundaria		
2° de secundaria		
3° de secundaria		

Fuente: Secretaria de Educación Pública (SEP, 2019)

El formato híbrido entre los planes y programas de estudio del 2011 y 2017, está avalada por la Secretaría de Educación Pública (SEP) y previsto en el acuerdo 15/06/2019 que modifica al número 12/10/2017 por el que se estable el plan y programas de estudio para la educación básica (aprendizajes clave para la educación integral) y que a la letra dice:

Que los transitorios Tercero y Cuarto del ACUERDO 12/10/17 previeron su implementación gradual, lo que permitió que para el ciclo escolar 2018-2019 éste conviviera armónicamente en las aulas con el ACUERDO 592 por lo que hace a los grados de tercero, cuarto, quinto y sexto de educación primaria y el segundo y tercer grado de educación secundaria para su generalización total en el ciclo escolar 2019-2020.

Que en tanto se revisa y se elabora un nuevo planteamiento curricular que dé cabal cumplimiento a lo mandado en el DECRETO, resulta necesario mantener para los grados de tercero, cuarto, quinto y sexto de educación primaria y tercero de educación secundaria la convivencia de los planes y programas de estudio establecidos en los ACUERDOS 592 y 12/10/17 (SEP, 2019)

Estos son algunos elementos que determinaron (limitaron) la investigación durante el desarrollo del mismo, a modo de contextualizar cómo se realizó.

Capítulo 2.- Referentes teóricos y metodológicos

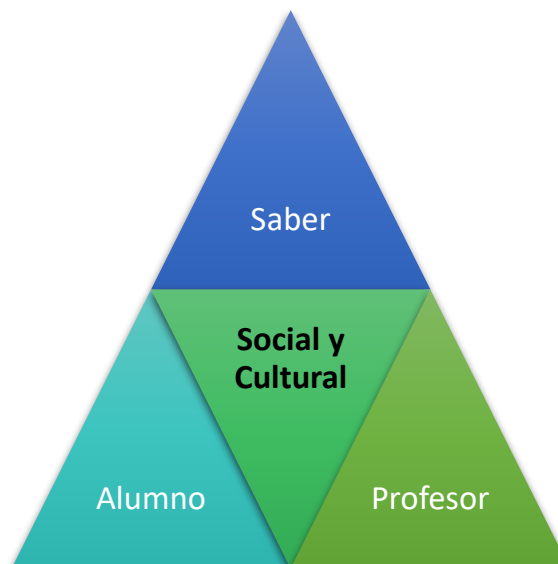
Teoría Socioepistemológica

El referente teórico para la investigación es la Socioepistemología (Cantoral, 2016), por permitir explorar formas de pensamiento matemático dentro y fuera de la escuela; mismos que pueden difundirse socialmente para el uso efectivo entre la población. Al incorporar la dimensión social y cultural, considera el origen del conocimiento matemático (cómo surge) y el uso (conocimiento matemático) en los entornos de los que se aprende. Por tanto, al recuperar el origen de las fracciones, saber cuáles son los significados y representaciones asociados por los alumnos es una teoría que permite compaginar dichos elementos.

Con esto la triada didáctica tradicional del aprendizaje es ampliada, al considerar una cuarta dimensión, tal como se aprecia en la siguiente figura.

Figura 7.

Conformación de la triada didáctica, de acuerdo con la teoría Socioepistemológica.



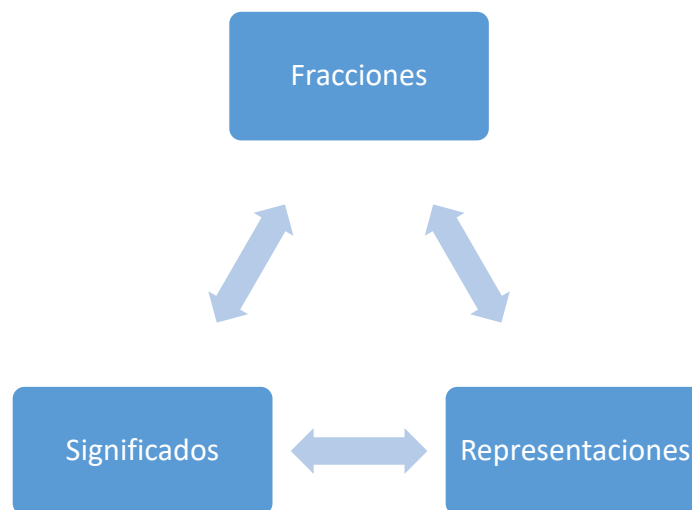
Fuente: Elaboración propia 2022.

Nota: Imagen tomada y adaptada de Cantoral (2016).

Lo anterior es relevante en la investigación, porque se estudia a las fracciones, las representaciones, así como los significados del mismo como un ente. Y no de manera independiente, por esta razón no se puede separar; es decir, la fracción conlleva a los significados y las diferentes representaciones (figura 8).

Figura 8.

Propuesta de estudio del objeto matemático (la fracción).



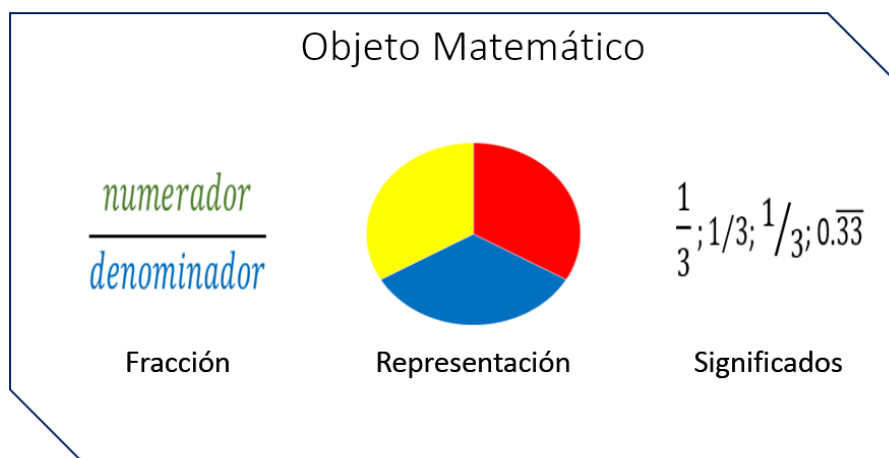
Fuente: Elaboración propia 2022.

En la presente investigación se plantea, que la manera de representar (numérica, geométrica, literal, etc) a las fracciones dota de significado (objeto matemático) y este a su vez depende del cómo emergen las fracciones (considerando el origen epistemológico) para determinar la representación empleada (utilizada) que, al mismo tiempo da un significado en particular.

Por eso no se emplea la Teoría de los registros de representación semiótica (TRRS) de Duval (1995), si bien es cierto que permite analizar diversos tipos de representaciones, el cómo se da la comprensión, las transformaciones del mismo en los diferentes registros semióticos, no recupera el origen del objeto matemático representado y esto último es considerado e importante la investigación (figura 9).

Figura 9.

Elementos considerados en la investigación y que la Socioepistemología permite integrar.

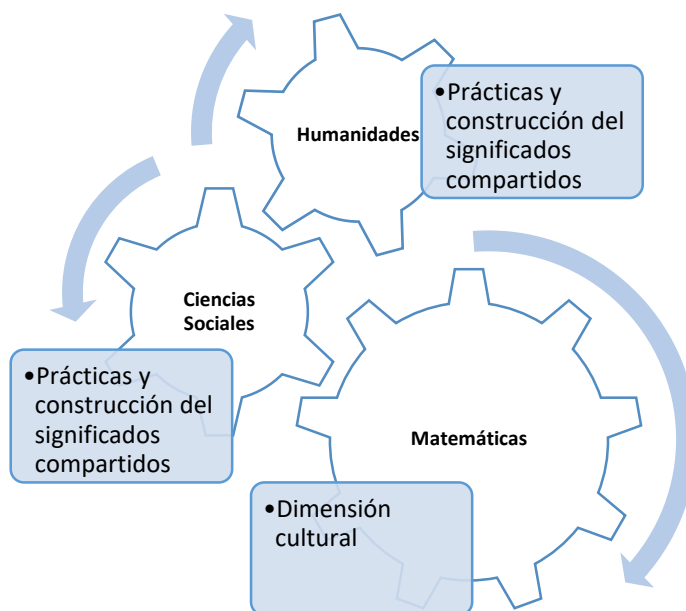


Fuente: Elaboración propia 2022.

De acuerdo con el autor (Cantoral, 2016) la Socioepistemología es un cruce de las matemáticas, las ciencias sociales y las humanidades lo que permite exponer la relación entre el saber, mente y cultura hacia las matemáticas (figura10).

Figura 10.

Construcción del conocimiento, de acuerdo a la teoría Socioepistemológica.



Fuente: Elaboración propia 2022.

Además, considera que el saber de la humanidad (sabiduría humana) está conformada por el saber popular, técnico y culto. Por tanto, es un saber construido en un ambiente no escolar que al introducirse a un sistema educativo tiende a modificaciones (dicho saber o conocimiento) repercutiendo en la estructura y funcionamiento; que a su vez afecta la relación entre el o los estudiantes y el profesor.

Esto se da en el discurso escolar; es decir, cuando se tiene un proceso ante el qué y cómo enseñar un conocimiento específico (saber matemático) se despersonaliza y descontextualiza provocando así la pérdida del sentido y significado original del saber: la Socioepistemología lo denomina discurso matemático escolar (dME).

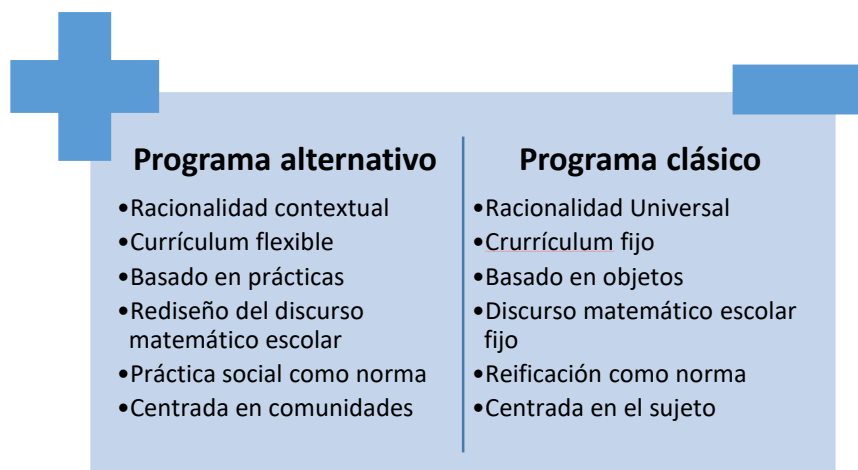
Se requiere precisar que el "saber culto" (como término) en la Socioepistemología se refiere a las acciones, actividades, prácticas en distintos ámbitos de la actividad humana, incluyendo la construcción de artefactos, innovaciones tecnológicas y artesanías. Es decir, actividades a las que denomina "prácticas sociales compartidas".

Por ello, el saber matemático tendrá una concepción alterna de las matemáticas, de aquella que provoca la regulación del discurso Matemático Escolar; es decir, las propuestas en el rediseño del discurso Matemático Escolar carecerán de la institucionalización del objeto matemático explícito (Cantoral, 2016).

Es así que; el aprendizaje, contrato didáctico y milieu (medio o ambiente) están en un ámbito no escolar. En la Socioepistemología se habla de un programa clásico versus un programa alternativo (figura 11). De acuerdo con su autor (Cantoral, 2016) el objetivo de la Matemática educativa es democratizar el aprendizaje de las matemáticas, esto último se puede lograr con el Rediseño del discurso Matemático Escolar. Pero no significa rediseñar los libros de texto, currículos, programas de estudio, evaluaciones nacionales, etc. Se deben considerar como estructuras objetivables -en un sentido amplio- a través de un programa alternativo como se ilustra a continuación.

Figura 11.

Programa alternativo de Socioepistemológica, versus un programa clásico.



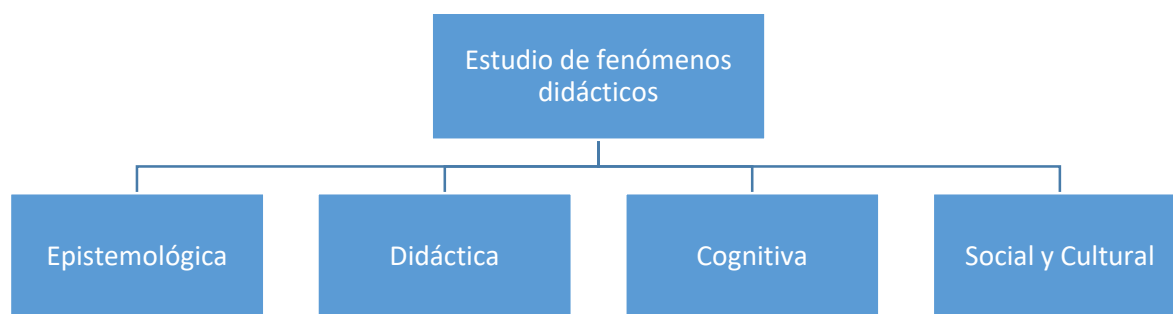
Fuente: Cantoral 2016.

Nota: Adaptación propia (2022)

A su vez asevera necesario saber qué significa mejorar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, cuáles son las condiciones que lo favorecen. Para responder estas preguntas es necesario emplear cuatro dimensiones (epistemológica, didáctica, cognitiva y la social y cultura) al momento de estudiar los fenómenos didácticos relativos al saber (figura 12).

Figura 12.

Dimensiones a considerar en un estudio (fenómeno didáctico).



Fuente: Elaboración propia 2022.

Nota: Realizado en base Cantoral (2016)

Dicha teoría considera que la humanidad ha desarrollado la capacidad de construir explicaciones sobre el mundo que lo rodea (en que vive) empleando complejos procesos de construcción de significados compartidos. Siendo el punto de partida (referencia) para la construcción de saberes la actividad normada a través de *emergentes* de la naturaleza social llamadas "prácticas sociales". Que a su vez regulan el ejercicio de prácticas compartidas, donde se relacionan los sujetos (individual o colectivamente) inter e intra psicológicamente

Para la Sociopistemológica, el término "emergentes" se refiere a que existe una realidad con diferentes niveles (emergentes), resultado de su evolución. Ejemplifica lo anterior con el agua, cuyos elementos por separado (H y O) tienen características muy distintas (Explosivo y flamable respectivamente) pero en conjunto forman el líquido vital para la vida (H_2O).

Se requiere acotar que, el conocimiento matemático no siempre proviene de sucesivas abstracciones o generalizaciones empíricas. Es decir, no significa que siempre obedezca a una necesidad de naturaleza práctica inmediata. Pero si establece una relación (filiación) entre la naturaleza del conocimiento que los seres humanos producen con las actividades mediante las cuales son producidos. Por ello se establece que el saber matemático no puede ser considerado sólo en su definición formal, declarativa o relacional. Para Cantoral (2016) se requiere la historización y dialectización como mecanismos necesarios (fundamentales) para construir el conocimiento matemático, en pocas palabras el saber debe ser concebido como una construcción social.

Metodología

De acuerdo a la metodología de Montiel y Buendía (2013) existen nodos, los cuales permiten realizar investigaciones con un nodo o la combinación de algunos nodos (figura 13). Además de problematizar el saber matemático y la re-significación que se propone en cada componente.

Figura 13.
Esquema metodológico utilizado en la investigación.



Fuente: Montiel y Buendía 2013.
Nota: Adaptación propia (2022)

Como la socioepistemología se aboca a estudiar el conocimiento situado; es decir, escenarios socioculturales particulares (interacción entre la epistemología y factores sociales). Es importante identificar: aquello que norma la actividad humana, de la que emerge conocimiento matemático y es denominado como práctica social; en otras palabras, es "aquello que nos hace hacer lo que hacemos" (Covian 2005).

Para Montiel y Buendía (2013) es importante la problematización del saber matemático y se logra al cuestionar el estatus del saber institucional -aquello que se debe aprender- reconocer las prácticas sociales que norman la construcción del conocimiento matemático. Saber las manifestaciones a través de sus usos en distintos escenarios (histórico, cotidiano, profesional e incluso el escolar cuando se experimentan con diseños no tradicionales).

Puede identificar las significaciones del saber, que se diluyen o pierden al configurar un discurso escolar. Que lo caracteriza como un saber funcional en escenarios específicos. Por ello, se deben considerar las significaciones como una construcción del conocimiento en la organización de lo humano; que se desea favorecer. Estará normada por las prácticas sociales en la que se ha involucrado e involucra el humano al hacer matemáticas. Por ello se habla de resignificar, haciendo alusión al proceso continuo de dar significado al saber matemático a través de los usos.

En relación con la investigación es de vital recuperar los significados y las representaciones que los alumnos del primero de secundaria tienen asociados con las fracciones (aspecto cotidiano) así como el conocimiento que adquieren en los últimos tres años de primaria (en la escuela) y cómo recuperar el origen del concepto matemático (histórico).

Para ello se emplearán los nodos establecidos por la metodología -mismos que se serán explicados de manera breve a continuación- en mayor o menor medida, para conjugarse a fin de dar respuesta a la pregunta de investigación, validar la hipótesis planteada y determinar el cumplimiento o no de los objetivos pretendidos.

Problemática o fenómeno didáctico

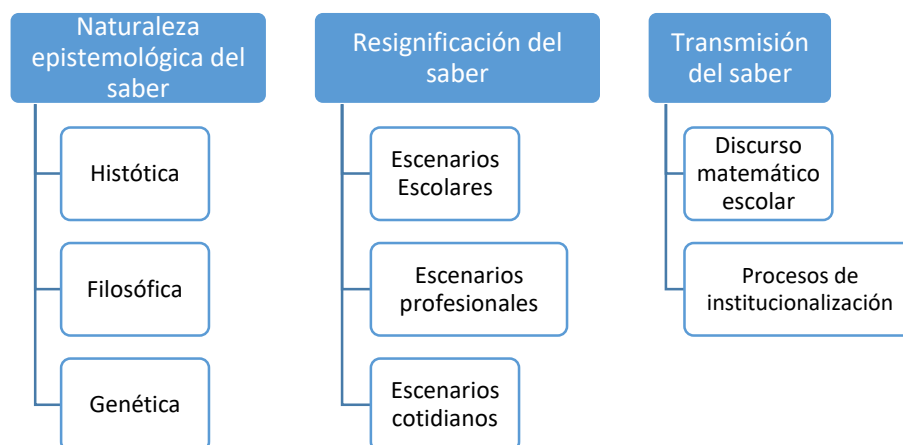
En esta etapa se debe problematizar el saber (matemático) considerando las problemáticas y fenómenos didácticos. Desde la comunidad que propone programas de investigación, atendiendo situaciones específicas que ocurren dentro o fuera del aula. Para la presente investigación la problematización está centrada en que los alumnos no distinguen la fracción de la división; por ende, existen problemas en el aprendizaje de las fracciones y repercute de manera directa en la falta de conceptualización del mismo.

Análisis socioepistemológico

Se realizan revisiones para los análisis respectivos, basados en las prácticas y usos del saber -lo que caracteriza la naturaleza del saber matemático- el cómo se logra dicha aprehensión, a través de sus significados contextualizados (¿por qué hace lo que hace? o ¿qué sabe de lo sabe?). Se puede realizar en tres vertientes: 1) naturaleza socioepistemológica del saber, 2) Resignificación del saber y 3) Transmisión del saber; además, una peculiaridad (de la metodología) es que puede realizarse con una o varias dimensiones (Montiel et al 2013) como se ilustra en la siguiente figura.

Figura 14.

Elementos a considerar para realizar un análisis Socioepistemológica, en una investigación.



Fuente: Elaboración propia 2022.

Nota: Realizado en base a la metodología de Montiel et al (2013)

Epistemología de las prácticas

Como resultado del análisis socioepistemológico, se tiene la propuesta epistemológica de prácticas, formula una explicación acerca de la problemática educativa en cuestión o da una visión alternativa con relación al fenómeno didáctico y será la base para la intervención didáctica. Este nodo da cuenta de la construcción social del conocimiento matemático, lo social será entendido como la relación epistemológica entre las prácticas del hombre al hacer matemáticas y saber matemático que genera.

Situación problema

Se refiere a la relación que existe entre las prácticas y la generación de conocimiento matemático, reconoce el carácter social de las matemáticas; dando así una base para la significación distinta a la matemática escolar. Con esto las prácticas infieren y forman una epistemología para reinterpretarse a fin de incidir en otros contextos.

Para clarificar lo anterior Montiel et al (2013) ejemplifican con el contexto escolar, al momento de realizar una revisión histórica. Dicha revisión (histórica) no es con el fin de reproducir en el aula o como cultura general. Sirve para recuperar los elementos propios del quehacer de las comunidades, que en su momento resultaron significativos y reinterpretarlos (para tener un sentido y den significación al saber matemático a desarrollar).

Por ello, se debe proponer un diseño de situaciones-problemas que ayuden o incidan en comunidades específicas y deben contener las prácticas previamente identificadas para favorecer la resignificación del saber matemático, lo que permite la construcción del conocimiento.

Hacia la construcción del conocimiento.

Como la resignificación busca referirse a la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano (normado por lo institucional), se tendrá que considerar al escenario y las condiciones institucionales para proponer; por ejemplo, la reorganización de la matemática escolar (Montiel et al, 2013).

Consideran como escenario particular el aula de clases, por ello importa analizar asuntos de reproductividad, el papel del profesor, el ambiente escolar, por citar algunos. Para enriquecer las epistemologías de las prácticas propuestas, las explicaciones del fenómeno o problemática y analizar la intencionalidad impresa a los diseños de la situación problema.

Con estos elementos se puede desarrollar una investigación Socioepistemológica mesurada, para el caso particular se abordan para determinar el saber fuera del aula... pero a la vez se considera el origen de las fracciones para dotar de significado y se aborda el rediseño del discurso escolar en México.

Capítulo 3.- Estado del Arte

En este apartado se abordan trabajos e investigaciones relacionados con las representaciones en matemáticas de manera general (geometría, álgebra o cálculo) y particular de las fracciones (geométrica, numérica, literal, discreta, etc.) como las representaciones desde el enfoque semiótico y desde la perspectiva de la matemática educativa. Para tener elementos suficientes a fin de realizar un análisis de las producciones que realicen los alumnos de primero de secundaria y determinar cuáles son las representaciones asociadas a las fracciones.

Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado

Pecharromán (2013) menciona que la representación de un objeto matemático surge como forma de expresión de la funcionalidad que representa; considera, que la razón de la existencia de los objetos matemáticos es la de ser o representar una funcionalidad en un contexto. Por ello se debe considerar la naturaleza de los objetos matemáticos en relación con su origen; es decir, la causa de su origen.

En su investigación emplea diferentes marcos teóricos (ontología, semiótica y semántica) todos desde la perspectiva de objetos matemáticos, para entender (los objetos matemáticos) y considerar que tienen existencia real, pero no material. Por tanto, su descubrimiento no radica en función a una experiencia física o sensitiva; es necesario que intervenga la razón. Por ello son producto de la razón y esta percepción hace que se consideren reales. Así, se tiene que el objeto matemático es una cualidad que se abstrae del contexto; por ejemplo: se tiene el hecho de interpretar y simplificar la representación del mundo físico (esto pudo motivar la abstracción con la forma del contorno, superficie limitada) y surgen diversos objetos matemáticos como las formas geométricas y áreas. En ocasiones un objeto matemático es una acción o proceso, como los operadores (adición, sustracción y multiplicación) pues al relacionarse con otros objetos sobre los que actúan representan una acción (Pecharromán ,2013).

Por ello la existencia funcional y no material de los objetos matemáticos hace necesaria una representación externa o un signo que permita su expresión o su reconocimiento. Dicha representación está asociada con el contexto en que se descubre (el objeto matemático). Sin embargo, la expresión del objeto matemático depende de su representación y del contexto en que se usa, por ello admiten diversas representaciones según la naturaleza de los signos. En ocasiones una misma representación (Pecharromás, 2013) puede ser utilizada para representar distintos objetos matemáticos, lo anterior se ilustra con la derivada (figura 15)

Figura 15.

Formas de representar la derivada (objeto matemático) de acuerdo al momento histórico y cultural.

Notación de Newton (1671 aproximadamente)

$$\dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}, \dots \text{ ó } \dot{f}(x), \ddot{f}(x), \dddot{f}(x), \dots$$

$$\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \dots \text{ ó } \dot{y}(x), \ddot{y}(x), \dddot{y}(x), \dots$$

Notación de Leibniz (1684)

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \dots \text{ ó } \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \dots \text{ ó } \frac{df}{dx}(x), \frac{d^2f}{dx^2}(x), \frac{d^3f}{dx^3}(x)$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots \text{ ó } \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \frac{d^3y(x)}{dx^3}, \dots \text{ ó } \frac{dy}{dx}(x), \frac{d^2y}{dx^2}(x), \frac{d^3y}{dx^3}(x)$$

Notación de Arbogast (1800)

$$Df, D^2f, D^3f, \dots \text{ ó } Df(x), D^2f(x), D^3f(x), \dots$$

Notación de Lagrange (finales del siglo XVIII)

$$f', f'', f''', f^{IV}, \dots \text{ ó } f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), \dots$$

$$f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, \dots \text{ ó } f^1(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), \dots$$

$$y', y'', y''', y^{IV}, \dots \text{ ó } y'(x), y''(x), y'''(x), y^{IV}(x), \dots$$

$$y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}, \dots \text{ ó } y^1(x), y^2(x), y^3(x), y^4(x), \dots$$

Fuente: Elaboración propia 2022.

Nota: Realizada en base a una imagen recuperada de internet 2021

Pecharromán (2013) menciona que cada representación ofrece información distinta sobre el objeto y se enfatizan ciertos aspectos en detrimento de otros, por ello sólo tiene sentido en un contexto. A modo de ilustrar esto con la investigación sobre las representaciones de las fracciones se puede expresar lo siguiente de manera general.

$$\frac{\text{numedor}(a)}{\text{denominador}(b)} \text{ o } \frac{a}{b} = a/b \text{ Para todos los casos } a \in N, b \in N - \{0\}$$

Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido

D'Amore (2006) comenta que el matemático puede no interrogarse sobre el sentido de los objetos matemáticos que usa o sobre el sentido que tiene el conocimiento matemático, pero la didáctica de la matemática no puede obviar dicha cuestión.

Menciona (D'Amore, 2006) que los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas que van evolucionando con el tiempo.

Se realiza en ciertas instituciones que generan determinadas prácticas, dando origen a la emergencia progresiva de los objetos matemáticos y que el significado de estos (objetos matemáticos). Están ligados con problemas y la actividad realizada para la resolución. Por ello, no se puede reducir este significado del objeto a su mera definición (D'Amore 2006).

Al trabajar con los objetos matemáticos, significados y representaciones semióticas, realiza una aproximación semiótica antropológica de Radford. Por ello el objeto conceptual del objeto matemático está directamente ligado con el contexto histórico-cultural. Entendiendo por este (objeto matemático) a todo lo que está indicado, señalado y nombrado cuando se construye, comunica o aprende

matemáticas. Desde la semiótica a la representación realizada por medio de signos (D'Amore, 2006).

Realiza una clasificación de estos objetos matemáticos en: lenguaje (términos, expresiones, notaciones, etc), situaciones (problemas, aplicaciones, ejercicios), acciones (operaciones, algoritmos o procedimientos), conceptos (definiciones o descripciones como recta, función), propiedad o atributo (enunciados sobre conceptos) y argumentos (los que se usan para validar o explicar enunciados). Y estos se pueden organizar en entidades más complejas como Sistemas y Teorías. (D'Amore, 2006).

Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas

De acuerdo al trabajo de Rojas (2012) menciona que es diferente la representación de un objeto y el objeto propiamente dicho. Para entender esto menciona: que una cosa es Juan, como sujeto concreto y otra una fotografía, caricatura o descripción verbal. Es así, que el trabajo se centra sobre las representaciones matemáticas y el uso de tales representaciones.

Además, Rojas (2012) comenta que en las matemáticas el aprendizaje de los objetos es conceptual; es decir, no se entra en contacto directo con un determinado objeto, sino con una representación particular de este objeto matemático, entonces todo objeto matemático remite un no-objeto. Para entender lo que menciona ejemplifica con el número seis, menciona que se representa con el signo "6", pero que dicho signo o marca no es el número seis, ya que sólo es una de las diversas maneras de representarlo (figura 16).

Figura 16.

Representaciones del objeto matemático, número 6.



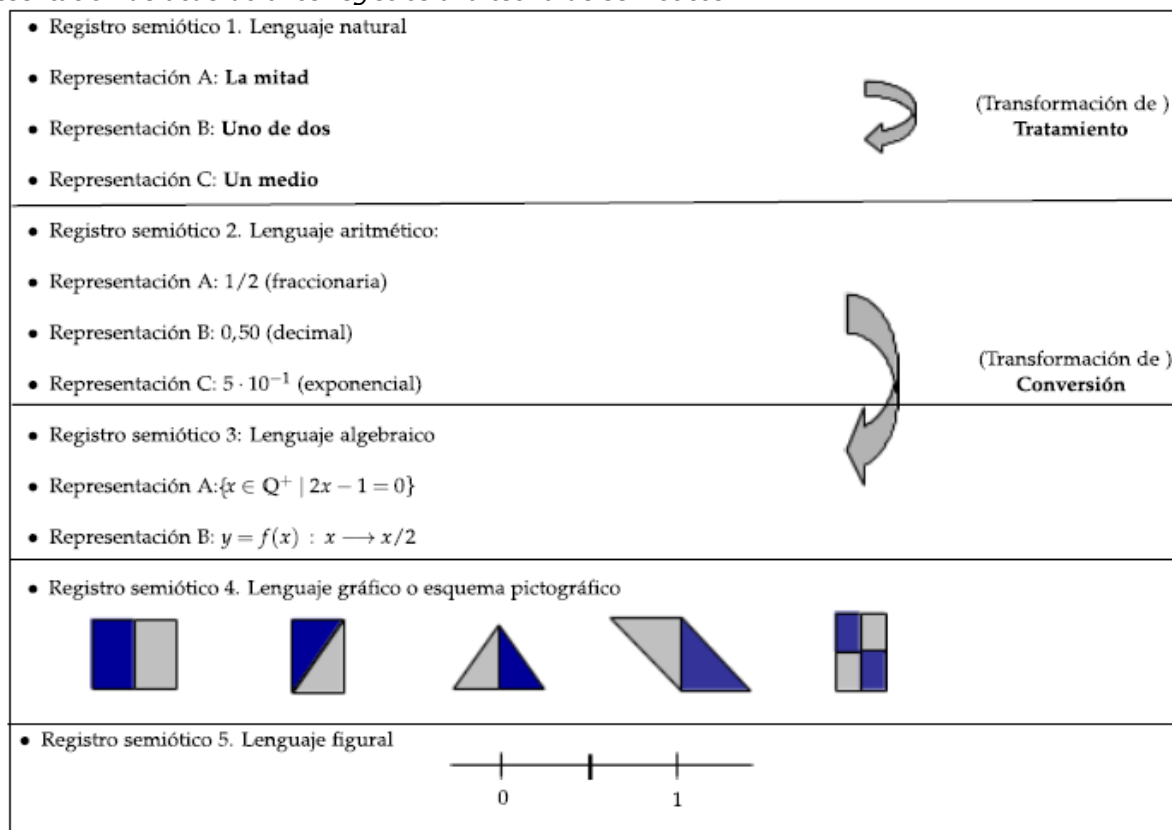
Fuente: Imagen tomada de Rojas (2012).

Destaca que las representaciones de un objeto no son neutras y dichas representaciones pueden destacar distintas características del objeto. Así, en su ejemplo (figura 16) menciona que la tercera representación puede sugerir la descomposición de este número: $2+2+2$ o en el caso de Juan no es lo mismo una caricatura a una fotografía, pues en la caricatura se pueden resaltar ciertos rasgos (Rojas, 2012).

Considera tres constructos en una representación -desde el punto de vista de Duval (2001)- el objeto representado, el contenido de la representación (lo que una representación representa) y la forma de representación. Aunado a esto se considera a las representaciones con dos enfoques: discursivos (lenguaje formal o natural) o no discursivos como las figuras geométricas o sistema de coordenadas (figura 17).

Figura 17.

La representación de acuerdo a los registros a la teoría de semióticos.



Fuente: Imagen tomada de Rojas (2009).

Nociones de Representación y Comprensión en Educación Matemática

En la investigación de Rico (2009) se abordan las representaciones con un enfoque de qué se entiende por representación; además, analiza la complejidad de la noción de representación y la reflexión en torno a la investigación en Educación Matemática. Habla sobre funciones epistémicas, objetividad y paradojas.

Se parte del hecho de conocer; es decir, tener una idea o noción de alguna cosa -llegar a saber por el uso de las facultades intelectuales la naturaleza, cualidad y relación de las cosas- en palabras sencillas: tener en la mente la representación de alguien o algo... percibir el objeto.

Da una aproximación sobre "el conocer" y la representación, retoma a Kring, Baumgather y Wild (1979) al mencionar que, conocer es una actividad intencional, dirigida a un estado de cosas que debe aprenderse y tiene como resultado la que se denomina saber disponible intersubjetivo, organizado y estructurado mediante representaciones (Rico, 2009). Con esta asociación de conocer y representación da un acercamiento con la epistemología de cómo entendemos e interpretamos los seres humanos (para conocer y comprender). La tradición racionalista postula una entidad intermedia entre el sujeto y el objeto, a la que llama representación; misma que puede ser intelectual o imaginativa.

En cuanto a la representación en Educación Matemática (Rico, 2009) menciona que en la década de los 80, el concepto de representación se toma equivalente a una señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático. Puede ser un signo, marca e incluso esquemas o imágenes mentales con las que trabaja la mente sobre ideas matemáticas.

De manera formal se tendría que las representaciones matemáticas se entienden en un sentido amplio, como aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos; los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático. Es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas (Rico, 2009).

Diferentes representaciones en matemática: una entrevista

En este trabajo de Martínez (2008) plantea un punto de vista formal a la representación, menciona que la matemática es un lenguaje y sirve para representar aspectos del mundo que nos rodea. Además, se tiene la notación matemática que puede considerarse como traducción del lenguaje cotidiano y no ha sido atendido por parte de los educadores.

Plantea, existen diferentes representaciones que ofrecen aspectos de un concepto o relaciones más complejas; por eso los estudiantes necesitan una variedad de representaciones para reforzar su comprensión sobre un tópico particular. Se puede afirmar que un estudiante entiende una idea, si es capaz de reconocerla en diferentes sistemas de representación y puede manipular esta idea dentro de un sistema de representación dado y puede traducir la idea de un sistema a otro (Martínez, 2008).

Cita a Orey (2005) al mencionar que la matemática es un lenguaje que tiene sus propios símbolos, sintaxis, gramática y una variedad de representaciones. Así, se tendría un lenguaje escrito y los símbolos usados en matemáticas para representar operaciones y números.

Aunque estas representaciones van enfocadas a nociones que ayudan a los estudiantes a pensar acerca de un problema, en el proceso (de pensar y reflexionar) se hace más profunda su comprensión. Por ende (la comprensión de las relaciones entre las diferentes representaciones del mismo concepto) se debe entender como pensamiento matemático efectivo.

Menciona cinco tipos representaciones (caracteres basados en la experiencia, modelos manipulativos, dibujos de diagramas, lenguaje hablado y símbolos escritos) en el aprendizaje matemático y solución de problemas. Además, puede existir una traducción entre sistemas cuando se establece una relación desde un sistema de representación a otro... un estudiante entiende una idea, si es capaz de reconocerla en diferentes sistemas de representación (Martínez, 2008).

Para determinar las habilidades en la traducción entre diferentes sistemas de representación usados en matemáticas, Martínez (2008) aplicó la misma entrevista a cuatro estudiantes de secundaria. Todas de sexo femenino (tres con 13 años de edad y una con edad de 16 años) las primeras tres cursaban el octavo año, la mayor se encontraba en el undécimo año, en un programa de estudios avanzados.

A pesar de no compartir los reactivos de manera completa, ni los resultados de las producciones realizado por las estudiantes, si ilustra las preguntas más representativas -como se muestra en la siguiente figura-.

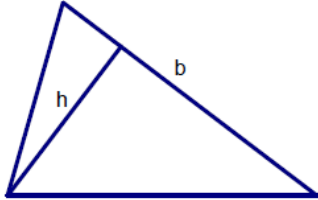
Figura 18.

Reactivos considerados en la entrevista realizada a las cuatro estudiantes.

Marcos tiene 5 chocolates más que Daniel. El cuadrado amarillo representa los de Daniel. Las piezas pequeñas representan un chocolate cada una. ¿Cómo se puede representar los de Marcos?

Si x representa los chocolates de Daniel, ¿cómo se representan los de Marcos?

¿Sabes qué significa la fórmula $A = \frac{bh}{2}$ en esta figura?



Fuente: Imagen tomada de Martínez (2008).

Los resultados obtenidos de las entrevistas realizadas a las estudiantes no fueron suficientes para concluir acerca de las habilidades que tienen (los estudiantes). Sin embargo, un dato a destacar es que todas las estudiantes prefirieron anotar sus respuestas (aun cuando las verbalizaron), además cuando un estudiante usa símbolos de manera correcta, puede suponer que este acto devuelve significado y significancia; lo anterior de acuerdo con Martínez (2008).

Por citar un ejemplo. de manera específica (María) tiene carencias de habilidades de representación, lo que refleja resultados pobres en las matemáticas y se debe al poco interés por las matemáticas. De ahí la importancia de conocer a los estudiantes, para decidir cuál representación será de ayuda o traerá más complicaciones a ellos.

Las fracciones y las representaciones de Llinares y Sánchez

De acuerdo con Llinares et al (1997) en su trabajo "Las fracciones: diferentes interpretaciones" aborda de manera indirecta algunas representaciones asociadas a las fracciones y la interpretación del concepto de acuerdo a:

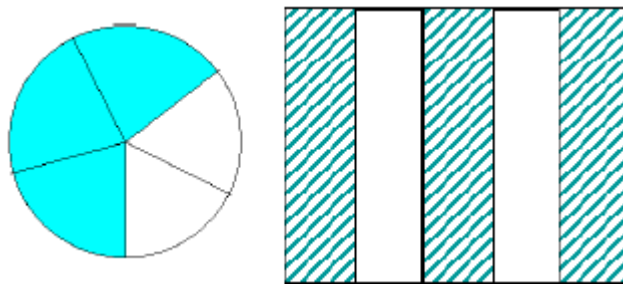
- 1) Relación parte-todo y medida
 - a. Representaciones en contexto continuo y discreto
 - b. Decimales
 - c. Recta numérica
- 2) Como cociente
 - a. División indicada
 - b. Elemento de un cuerpo cociente
- 3) Como razón
 - a. Probabilidades
 - b. Porcentaje
- 4) Como Operador

Dichas interpretaciones se abordan de manera breve en la presente investigación, pero se considera lo más relevante y que abonan al trabajo.

Cuando la fracción indica la relación existente entre un número de partes y el número total de partes. Es decir, representaciones continuas (áreas) y discretas tienden a ser diagramas circulares o rectangulares de dos dimensiones (figura 19).

Figura 19.

Uso de los diagramas en la representación continua.

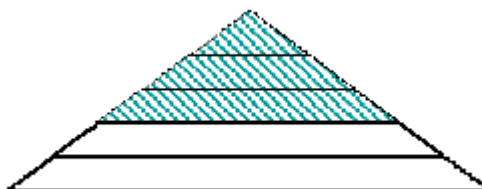


Fuente: Ilustración tomada de Llinares et al (1997).

Adicional a ello, menciona que la noción de partes congruentes debe ser vital, para escribir $3/5$; es decir, no se hace alusión a que midan igual. Así la siguiente ilustración (figura 20) puede ser válida cuando $3/5$ equivale a 3 partes de la superficie total.

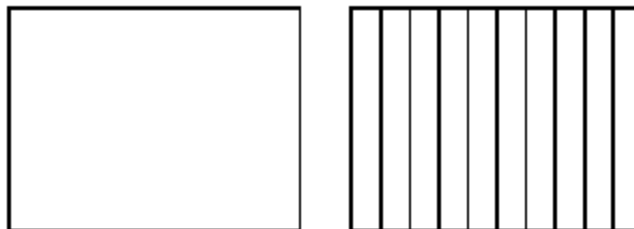
Figura 20.

Representación discreta de $3/5$.

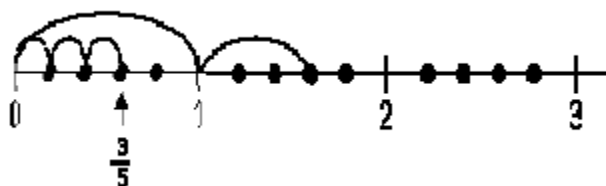


Fuente: Ilustración tomada de Llinares et al (1997).

La estandarización de la relación parte-todo con el sistema decimal; da como resultado la introducción de los números decimales. Por ejemplo, al hacer referencia a un rectángulo como unidad y a cada división (parte) es la décima parte del todo (figura 21).

Figura 21.*Representación la parte-todo y el sistema decimal.***Fuente:** Ilustración tomada de Llinares et al (1997).

También se tiene la representación asociada a las fracciones de un punto de la recta numérica, donde cada segmento se ha dividido en "n" partes congruentes. Dicha interpretación asocia un punto (fracción) como se ilustra a continuación (figura 22).

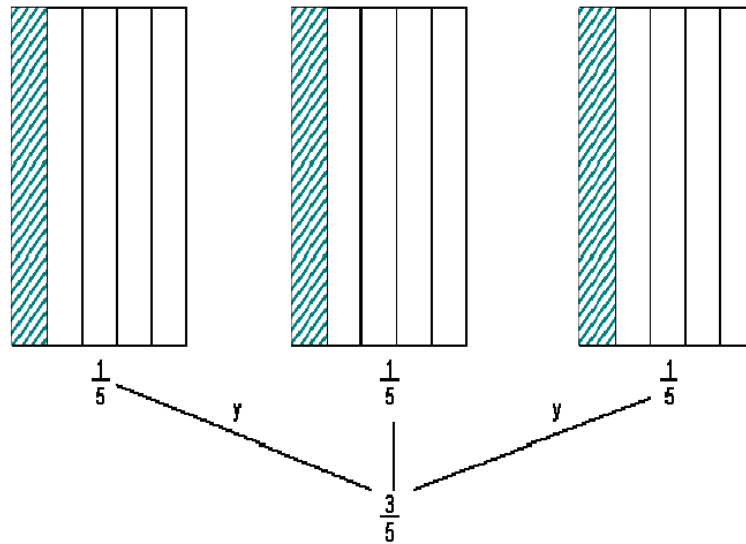
Figura 22.*Representación de la fracción en un punto de la recta.***Fuente:** Ilustración tomada de Llinares et al (1997).

Por este motivo el conjunto de fracciones forma una extensión del conjunto de los números naturales. Cuando se habla de las fracciones como cociente, la interpretación se asocia (a la fracción) con la operación de dividir un número natural por otro (división indicada $a \div b = a/b$). en palabras sencillas un reparto (Llinares et al, 1997).

De esto se puede citar el ejemplo tomado del mismo trabajo; en donde menciona dividir 3 barras de chocolate en 5 niños (figura 23).

Figura 23.

Representación de la fracción como cociente.

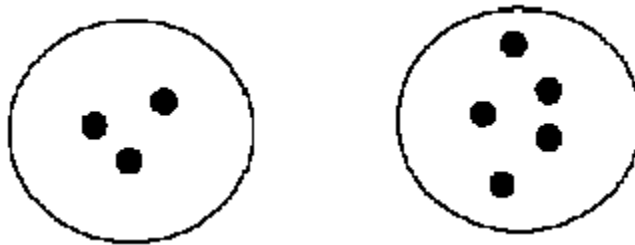


Fuente: Ilustración tomada de Llinares et al (1997).

También se tiene la representación de las fracciones como razón (figura 24) al ser un par ordenado de números. Así expone la interpretación de subconstructos de las fracciones cuando se habla de la relación entre dos puntos (A y B).

Figura 24.

Representación de la fracción como razón (la relación entre los puntos de A y B es de $3/5:3\div 5$).

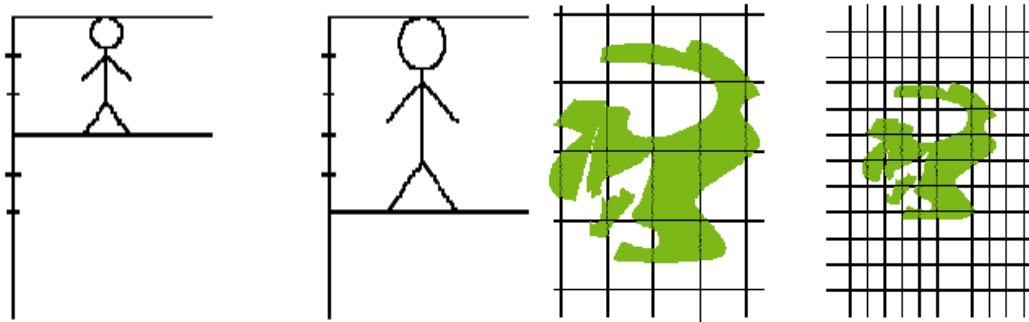


Fuente: Ilustración tomada de Llinares et al (1997).

Existe la relación de las figuras o escalas entre números, un claro ejemplo de representación de las fracciones como razón se aprecia en la figura 25.

Figura 25.

Ejemplo de la razón en forma de figuras (escala).



Fuente: Ilustración tomada de Llinares et al (1997).

Para concluir con las relaciones entre las distintas interpretaciones que tienen las fracciones, expuestas por Llinares et al (1997). Así como las diversas perspectivas de concebir el concepto fracción. Es importante mencionar que lo denominan mega concepto, debido a que está constituido por diferentes subconceptos; los cuales denominaron interpretaciones.

Los trabajos mencionados son un ejemplo de las distintas maneras de concebir y definir la representación enfocada con las matemáticas, dependerá del enfoque teórico. Pero ejemplifican de manera particular las representaciones asociadas a las fracciones.

Capítulo 4.- Desarrollo de la investigación

Los trabajos expuestos en el Estado de Arte muestran diferentes elementos asociados a la representación. Pues intervienen de manera directa o indirecta con las posibles representaciones (asociadas en las fracciones) consideradas en la presente investigación, que permitirá realizar un análisis (adecuado) de las producciones realizadas por los alumnos del primer año de secundaria.

Una socioepistemología de las fracciones

Origen de las fracciones

El significado etimológico de "fracción" es roto o quebrado y proviene del latín frāctus, fractiō -ōnis. Además, Fandiño (2009) en su libro "Las fracciones, aspectos conceptuales y didácticos" menciona datos importantes que abonan a cómo surgen las fracciones.

Se asocia a la diagonal (/) o línea horizontal (-) y los números en medio ($\frac{\text{número}}{\text{número}}$ o número/número), de manera burda para contextualizar a la fracción. Dichos números se denominan como numerador y denominador; así se enseña en la escuela, pero no siempre fue así. De acuerdo con su investigación (Fandiño, 2009) el símbolo m/n tiene un origen incierto, pero fue usado por Leonardo Fibonacci Pisano en su libro llamado "Liber Abaci" en 1202; los números fraccionarios son llamados "rupi" (rotos) o "fracti" (pedazos).

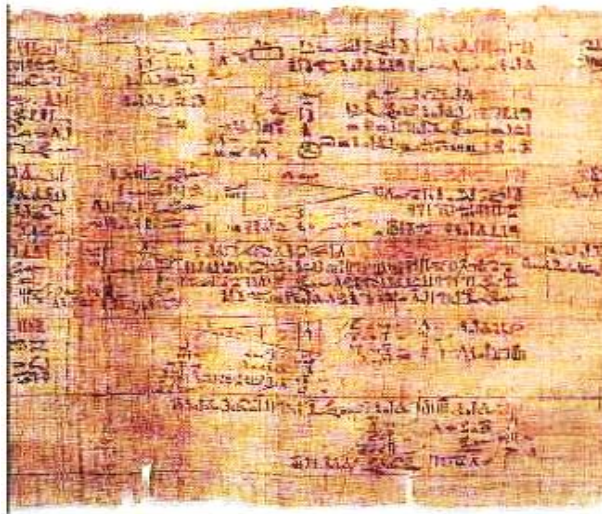
Además, la raya o línea horizontal entre el numerador y denominar es llamado "vírgula" o "bastoncillo". Este bastoncillo fue utilizado por el árabe Abu Zakhariya Muhammad ibn Abdallah al-Hassar (más conocido como al-Hassar) casi un siglo antes que Leonardo Fibonacci Pisano. Pero no siempre fue así, los griegos conocían las fracciones, pero no utilizaban ningún bastoncillo entre el numerador y denominador.

Otro dato interesante es sobre la palabra "numerador" y "denominador" con un origen incierto, pero se emplearon en el siglo XV en Europa. Así como la utilización del término reducción de fracciones o cuándo se empleó el término simplificación de fracciones, cuándo se hizo la distinción entre fracciones propias e impropias. Información relevante, pero no se profundizará por no ser relevantes en la investigación. Pero si abonan para contextualizar que las fracciones no siempre han sido como las conocemos en la matemática actual.

Pero es necesario precisar que las fracciones surgen por la necesidad de medir y repartir de manera intuitiva algo (terrenos, alimentos, herencia) como se constata en el papiro de Ahmes, que data del 1650 a. C, ahí se plantean 87 problemas (Imagen 1). También está el papiro de Moscú y contiene 25 problemas triviales, siendo de autor desconocido. Además de existir otros rollos de cuero con 26 operaciones de sumas con numerador 1 donde existe evidencia sobre el uso de las fracciones.

Figura 26.

Papiro de Ahmes o Rhind *donde se mencionan problemas de reparto.*



Fuente: Ilustración tomada de Pulpón (2012)

En el mismo documento se encuentra la imagen (figura 27) se aprecian problemas de reparto. Un dato curioso es la manera de resolver dichos problemas, pues los números los descomponían; por ejemplo: $2/47$ lo expresan como $1/30+1/141+1/470$. Quizás a simple vista no se pueda apreciar dicha equivalencia, pero al determinar el número decimal cambia este hecho ($2/47=0.42553199$, $1/30=0.333333$, $1/141=0.0070922$ y $1/470=0.00212766$)

Figura 27.

Contenido de los diferentes problemas descritos en el Papiro de Ahmes o Rhind.

El contenido del papiro Rhind, publicado por Richard J. Gillins en "Mathematics in the Time of the Pharaohs" es el siguiente:

Problemas	
1 - 6	Reparto de 1,2,6,7,8 y 9 barras entre 10 hombres
7 - 20	Multiplicación de fracciones
21 - 23	Sustracción

Fuente: Ilustración tomada de Pulpón (2012).

Algunas civilizaciones que emplearon las fracciones

Los egipcios

Se considera a los egipcios como pioneros en el uso de las fracciones en la forma $1/n$, es decir:

$$1/2; 1/4; 1/8; 1/16; 1/32; 1/64$$

Empleaban como unidad el "heqat", esto de acuerdo con Fandiño (2009) y la notación jeroglífica era llamado "udjat" cuyo significado es "ojo humano" (figura 28), un dato relevante es que, a pesar de no contar con un sistema decimal dividían.

Figura 28.

El hegat empleado por los egipcios para representar a las fracciones.



Fuente: Ilustración tomada de Stewart (2008).

Otro aspecto importante a considerar es que la unidad el "heqat" no equivale a una unidad (sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 0.984375$) le falta un $\frac{1}{64}$ (0.015625) para completar. Al seguir la secuencia se tendría que sumar $\frac{1}{128} + \frac{1}{264}$ para completar $\frac{1}{64}$.

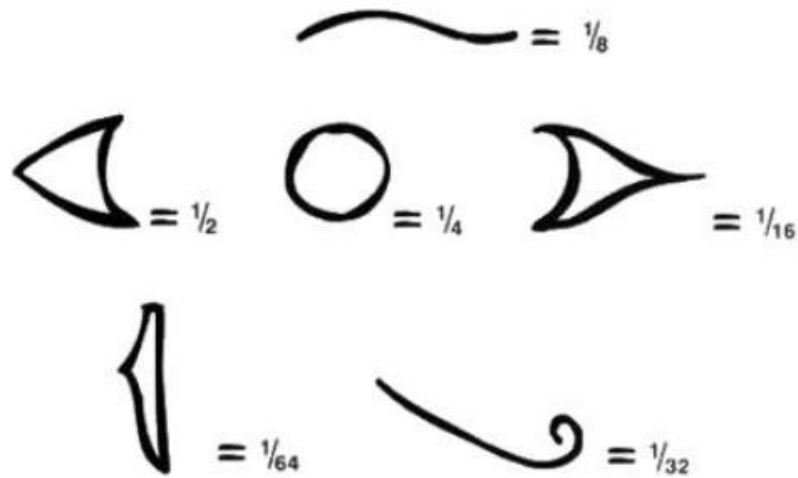
$$\frac{1}{128} + \frac{1}{264} = 0.0078125 + 0.00378787878787879; \frac{1}{64}; 0.015625$$

Entonces la necesidad de fraccionar a la unidad y que todas las partes resultantes de tal acción sean iguales contrastaría con los egipcios (figura 29). Fandiño (2009) dice que es erróneo dar por entendido que al fraccionar sean iguales todas las partes.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 0.98$$

Figura 29.

El hegat descompuesto y su equivalencia fraccional.



Fuente: Ilustración tomada de Stewart (2008).

Los babilónicos

Se considera que los babilonios emplearon las fracciones de manera eficaz, al lograr aproximaciones a números decimales con exactitud. La notación del sistema era sencilla y fue de las mejores hasta antes de la época del Renacimiento (figura 30).

Figura 30.

Símbolos babilónicos del sistema sexagesimal.

1	∩	11	∩∩	21	∩∩∩	31	∩∩∩∩	41	∩∩∩∩∩	51	∩∩∩∩∩∩
2	∩∩	12	∩∩∩	22	∩∩∩∩	32	∩∩∩∩∩	42	∩∩∩∩∩∩	52	∩∩∩∩∩∩∩
3	∩∩∩	13	∩∩∩∩	23	∩∩∩∩∩	33	∩∩∩∩∩∩	43	∩∩∩∩∩∩∩	53	∩∩∩∩∩∩∩∩
4	∩∩∩∩	14	∩∩∩∩∩	24	∩∩∩∩∩∩	34	∩∩∩∩∩∩∩	44	∩∩∩∩∩∩∩∩	54	∩∩∩∩∩∩∩∩∩
5	∩∩∩∩∩	15	∩∩∩∩∩∩	25	∩∩∩∩∩∩∩	35	∩∩∩∩∩∩∩∩	45	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	55	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
6	∩∩∩∩∩∩	16	∩∩∩∩∩∩∩	26	∩∩∩∩∩∩∩∩	36	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	46	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	56	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
7	∩∩∩∩∩∩∩	17	∩∩∩∩∩∩∩∩	27	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	37	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	47	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	57	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
8	∩∩∩∩∩∩∩∩	18	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	28	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	38	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	48	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	58	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
9	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	19	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	29	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	39	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	49	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	59	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩
10	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	20	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	30	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	40	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩	50	∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩		

Fuente: Ilustración tomada de Stewart (2008).

Stewart (2008) menciona que los estudiosos denotan el equivalente babilónico de la coma decimal por un punto y coma (;) es una «coma sexagesimal» y los múltiplos a su derecha son múltiplos de $1/60$, $(1/60 \times 1/60) = 1/3600$ y así de manera sucesiva.

Entonces los números 12, 59; 57, 17 significan: $12 \times 60 + 59 + 57/60 + 17/3600$ y es aproximadamente 779,955. Por lo tanto 25,47, significa 2 decenas + 5 unidades + 4 décimas + 7 centésimas.

Las tres repeticiones del símbolo cuneiforme para el 7 se escribirán como 7, 7, 7. El 23, 11, 14 indica el valor numérico $(23 \times 60 \times 60) + (11 \times 60) + 14$, que da como resultado 83.474 en la notación numérica actual (base 10).

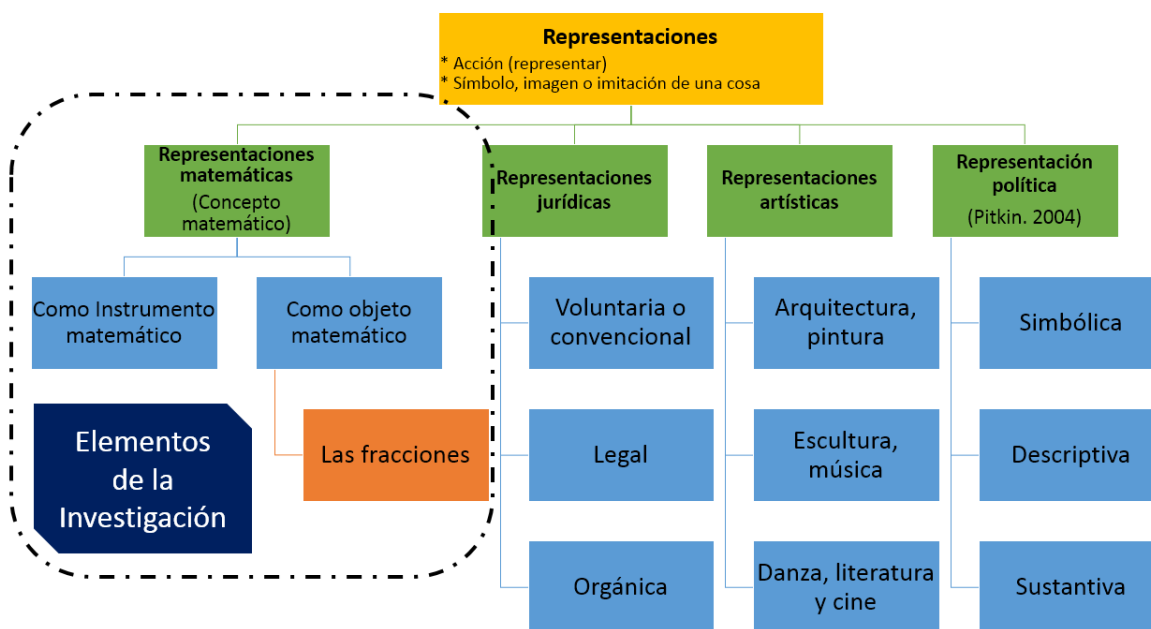
Al respecto Fandiño (2009) menciona que si bien los asirios y babilónicos no crearon los símbolos específicos para las fracciones; pero se limitaron a lo análogo de nuestros números decimales, aunque para ellos son números sexagesimales. Por ello al expresar el 0; 0; 30 en nuestro sistema lo expresaríamos como $30/3600$ ó $0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{60} + 30 \times \frac{1}{3600}$.

Sobre las representaciones de las fracciones

La palabra representación proviene del latín "representatio" y se refiere a la acción o efecto de simbolizar. La acción de "representar" amplía el significado, hay diferentes palabras asociadas como: representable, representador y representativo. Lo anterior, da como resultado diferentes tipos de representaciones en distintos ámbitos y ramas del conocimiento (ciencias sociales y exactas). En derecho existe la representación voluntaria o convencional, legal y orgánica. Para las representaciones del lenguaje visual están las físicas, por función visual e inclusive las imágenes acordes al contexto. Por otro lado, tenemos las representaciones sociales, las representaciones cartográficas... por citar algunos ejemplos (figura 31).

Figura 31.

Elementos de la representación y tipos de representaciones.



Fuente: Elaboración propia (2022).

Por tal motivo la Real Academia Española (RAE) no tiene una definición (figura 32) en particular para definir a la "representación". Se aplica en casi cualquier tipo de ámbito (académico, cultural, social, por citar algunos ejemplos).

Figura 32.

Definición de la Real Academia Española, de la palabra representación.

representación

Del lat. *repraesentatio*, -ōnis.

1. f. Acción y efecto de representar.
2. f. Imagen o idea que sustituye a la realidad.
3. f. Conjunto de personas que representan a una entidad, colectividad o corporación.
4. f. Cosa que representa otra.
5. f. Categoría o distinción social. *Juan es hombre de representación en Madrid.*
6. f. Obra dramática que en la Edad Media trataba de temas varios, principalmente religiosos.
7. f. *Der.* Derecho de una persona a ocupar, para la sucesión en una herencia o mayorazgo, el lugar de otra persona difunta.
8. f. *Psicol.* Imagen o concepto en que se hace presente a la conciencia un objeto exterior o interior.
9. f. *desus.* Súplica o proposición apoyada en razones o documentos, que se dirige a un príncipe o superior.

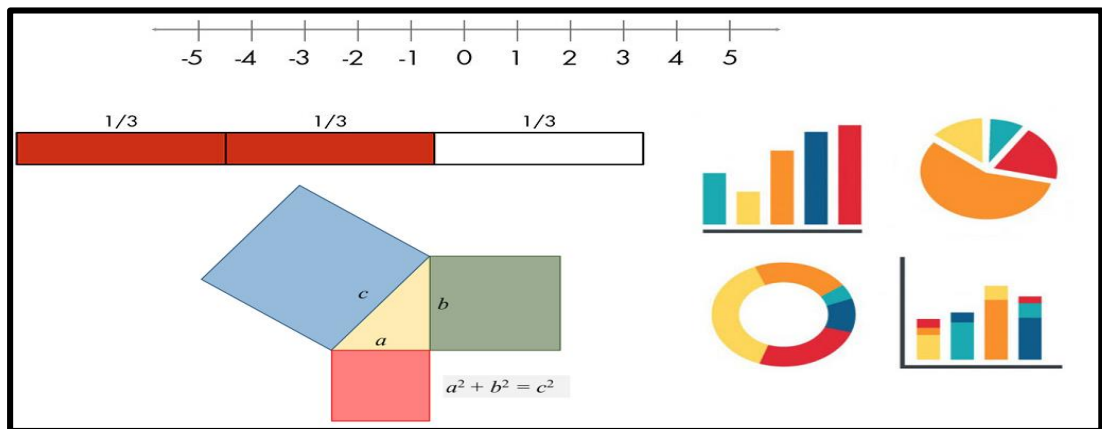
Fuente: Real Academia Española (2022).

Nota: captura de pantalla de la página oficial de la RAE en Internet (<https://dle.rae.es/representación>).

En las matemáticas las representaciones pueden ser: geométrica, literal y numérica. Sin embargo, existen otras como el tabulado, las gráficas, la recta numérica e inclusive los diagramas de tiras (ver figura 33). Cada una de estas se utiliza en temas diversos o específicos, según sea el caso. De manera general la representación literal va asociada con álgebra, la geometría con la trigonometría y la numérica en toda la matemática; por ser la ciencia que estudia las propiedades de los números y las relaciones entre ellos (Llinares et al, 1997).

Figura 33.

Ejemplo de las distintas representaciones en matemáticas.



Fuente: Elaboración propia 2022.

Nota: Imagen realiza a partir de distintas imágenes de Internet.

Al tener un abanico de representaciones en matemáticas, surge la pregunta; cuáles son las representaciones en función a las fracciones y aún más importante cuáles son las representaciones que los alumnos asocian con las fracciones. Por último, habría que preguntarse si empleamos dichas representaciones (como docentes) de manera correcta al momento de enseñar a los alumnos.

El poder denominar las representaciones de manera correcta, sería de utilidad para determinar con exactitud cuáles son, cómo se llaman y cómo enseñarlas al momento de abordar las fracciones. Hecho importante para Martínez (2008) al respecto afirma que un estudiante entiende una idea, si es capaz de reconocerla en diferentes sistemas de representación; pero no sólo esto, es capaz de manipular esta idea dentro de un sistema de representación dado y puede traducir la idea a otro sistema dado.

Linares et al (1997) comentan que la comprensión de las diferentes representaciones de los números es fundamental para que los estudiantes puedan comunicar e interpretar con el lenguaje matemático y resuelvan una variedad de problemas. Además, cada representación ofrece ventajas y desventajas para analizar o entender situaciones; por tanto, los estudiantes deben utilizar diversos tipos de representación de fracciones, decimales y porcentajes.

Las distintas representaciones y cómo se denomina a cada una, depende del enfoque (área de estudio) considerado. De manera específica será de acuerdo a la teoría empleada en la matemática educativa –si es para definir los procesos del aprendizaje, el cómo se comprende, aprende, el objeto matemático o hasta cómo es asimilado (por el estudiante) dicho objeto matemático (concepto). – Por ejemplo, en algunas ocasiones a la representación basada en las figuras geométricas; se denomina representación geométrica, pero hay quienes consideran dicha representación del tipo pictórica. Cuál es la correcta o cuál es la mejor denominación, debe ser en función del alumno y no de la teoría.

A continuación, se mencionan los tipos de representaciones disponibles en la teoría semiótica de Raymond Duval.

Representación Semiótica sobre las fracciones de Duval

La semiótica se refiere a los diferentes sistemas de signos, acorde a la representación de objetos matemáticos; además, de considerar la forma en cómo funcionan y cómo se trabaja con ellas. Por ello menciona Duval (1999) que:

A diferencia de otras ciencias (astronomía, geología, química...) los objetos de conocimientos (números, funciones, propiedades...) no son accesibles físicamente, a través de evidencias sensoriales directas o mediante el uso de instrumentos. La única forma de acceder y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióticas.

Los signos constituyen un registro; como símbolo, trazo, ícono, entre otros. Que están organizados de manera interna (según las particularidades del contexto y de pertenencia a un campo semántico determinado) y externa (con las normas para formular expresiones propias al campo semántico).

De acuerdo con Duval (citado por Calderón, 2020) las matemáticas son un campo disciplinar que tiene su particularidad en el uso de representaciones semióticas, ya que se pueden utilizar una amplia gama de sistemas semióticos.

Un ejemplo de esto es el lenguaje cotidiano, los sistemas inherentes (empleados) en las matemáticas como: los signos aritméticos, algébricos o expresiones formales. Duval (2006) precisa que el uso del signo no se limita sólo en representar objetos matemáticos, sino también es usado para trabajar en ellos, con ellos y para reemplazar un signo por otro.

Al transitar de un sistema semiótico a otro, significa cambiar el contenido de representación; pero sin modificar las propiedades matemáticas representadas. Los sistemas semióticos se utilizan para operar. Por tanto, sino hay mediación semiótica... no hay actividad matemática. Para que exista (se desarrolle) la comprensión matemática, debe motivarse diversas representaciones, a fin de que los estudiantes tengan la capacidad de relacionar diversas formas de representación de los objetos o contenidos matemáticos (Duval, 2006).

En el trabajo de investigación titulado "Formas de representación matemática de fracciones de los estudiantes de cuarto grado de primaria", realizado por Calderón (2020). Y pese a estar enfocado en determinar la influencia de la aplicación de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones de cuarto grado de primaria (En Perú). Realiza una síntesis sobre la teoría Semiótica de Duval, así como en la prueba escrita (cuestionario) y utiliza diferentes formas de representar de las fracciones, con el fin de poner en práctica los dos requisitos necesarios para desarrollar una actividad matemática. 1) las representaciones semióticas deben ser usadas, incluso si se elige el tipo de representación semiótica. 2) los objetos matemáticos representados no deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas; esto de acuerdo con planteados por Duval (2006).

La parte central de esta teoría es el aprendizaje y contempla tres actividades cognitivas (representación identificable, tratamiento y conversión), la primera se relaciona con la expresión de una representación mental, las otras dos están ligadas con la transformación de las representaciones en otras representaciones... esto de acuerdo con Castro, González, Flores, Ramírez, Cruz y Fuentes (2017) quienes citan a Duval en su trabajo.

Se trabaja con diferentes representaciones semióticas, llamados registros... algunos ejemplos de estos registros se listan a continuación y no se explican por no trabajar teoría. Basta con saber que el proceso de transformación va en función a la conversión y tratamiento.

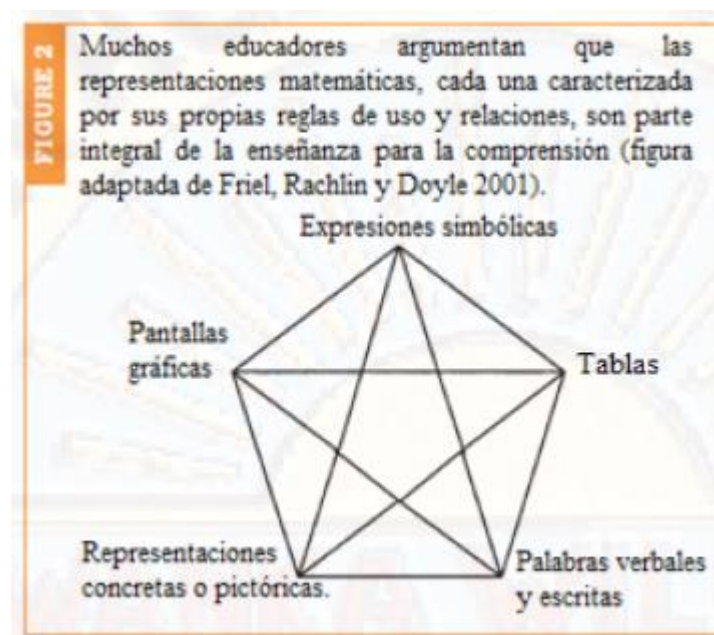
- Lenguaje común
- Lenguaje aritmético
- Lenguaje algebraico
- Lenguaje gráfico
- Lenguaje figural

Representaciones matemáticas de Marshall, Castro y Canty

En el 2010 Marshall, Castro y Canty plantean 5 tipos de representaciones (expresiones simbólicas, tablas, palabras escritas y verbales, así como las representaciones pictóricas o concretas y las pantallas gráficas) para sustentar su propuesta pedagógica, como se muestra a continuación.

Figura 34.

Representaciones de acuerdo con Marshall, Castro y Canty.



Fuente: Marshall, Castro y Canty, 2010.

Consideran que las representaciones en matemáticas son palabras, imágenes, dibujos pantallas gráficas y expresiones simbólicas; inclusive las representaciones concretas. Así resaltan que cada categoría se caracteriza por sus propias reglas de uso y relaciones (Marshall, Castro y Canty, 2010).

Hasta aquí se concluye algunos enfoques y cómo se denominan a las representaciones disponibles en matemáticas. No existe una clasificación específica sobre las representaciones en matemáticas o su denominación correcta manera, pero basta para contextualizar la complejidad de las representaciones.

La evolución de la educación de México

En este tenor –desde un punto de vista particular- el discurso escolar en México, se plantea como excluyente. No por el tipo de escuela: pública o privada y que influye si se considera que la última va enfocada a un estrato específico de alumnos. Donde se puede considerar que el nivel de enseñanza en la escuela pública es laxo versus las escuelas privadas. Al mencionar excluyente, nos referimos a elitista, porque privilegia sólo algunos aspectos importantes (temas específicos) en las distintas materias (Español, Civismo, Historia, por citar algunos ejemplos) y de manera particular en matemáticas con las fracciones.

Si bien, es cierto que el maestro puede definir el rumbo a seguir dentro del aula y cómo enseñar (pedagogía, recursos disponibles, material complementario, por citar algunos ejemplos). Se debe acatar al plan de estudios, a los programas disponibles, así como a los libros de texto oficiales vigentes y disponibles.

Resulta importante saber que los planes y programas de estudio autorizados en los ciclos escolares 2020-2021 y 2021-2022 fueron los correspondientes al 2011 y 2017; es decir, se tuvo una enseñanza híbrida. Por ello, se realizará un análisis en dichos planes; a fin de ver similitudes o discrepancias entre sí, para después realizar una crítica constructiva entre dichos planes y programas de estudio.

Pero antes de empezar con el análisis se hace una síntesis de las reformas concebidas en México ya que de estas se desprende el discurso escolar a seguir, por sentar las bases o directrices para los planes de estudio, programas de estudio, libros, criterios de evaluación, entre otros. No se considera la reforma actual del presidente en turno (Andrés Manuel López Obrador) por no tener elementos suficientes para aunar al respecto.

Otro aspecto a considerar es que la investigación y estudio se realizó durante la pandemia del covid-19.

En teoría las reformas educativas permean sobre los planes y programas de estudios, así como en el currículo escolar. Sin embargo, no siempre sucede debido a que los cambios son actualizaciones o modificaciones y muy pocas veces existen verdaderos cambios sustanciales. Y de ser así, los cambios importantes son en el exterior, pero en el trasfondo se mantiene una similitud (como se verá más adelante con los planes y programas de estudios del 2011 y 2017).

Sobre cuántas o cuáles han sido las distintas reformas educativas llevadas a cabo en México, dependerá del autor consultado. Por ejemplo, para Schemlkes (2015) la primera reforma educativa llevada a cabo es la del presidente Lázaro Cárdenas, que pretendía asegurar una educación popular, laica, orientada hacia el trabajo y la productividad (obreros y campesinos). La segunda reforma educativa da como resultado el Plan de los Once Años, diseñado por Jaime Torres Bodet durante el mandato del presidente Adolfo López Mateos; enfocado hacia la educación primaria para extender dicho nivel educativo a toda la población. Después, se tiene la reforma educativa en el periodo de Luis Echeverría para la modernización del currículum correspondiente al nivel educativo de la primaria (programa de alfabetización) y secundaria (enseñanza por áreas).

Después se tiene la reforma del 2013, con previos pactos (acuerdos) firmados, en su mayoría por el titular de poder ejecutivo (presidente en turno de México), el titular del Sindicato Nacional de Trabajadores (SNTE) y en ocasiones por otros actores como: gobiernos Estatales o diversos sectores de la población. El acuerdo de "Modernización de la educación Básica y Normal" abordó cuatro transformaciones (descentralización de la educación básica y normal, reformulación de contenidos y materiales educativos, la revaloración magisterial y participación social en la educación). El pacto Compromiso Social por la Calidad de la Educación en el 2001 y la Alianza por la Calidad de la Educación, firmado en el 2008.

Dichos pactos y acuerdos, junto con la reforma educativa del 2013 pretendían aumentar la cobertura del Sistema Educativo Nacional (SEN), para mejorar la equidad de la educación en los diversos sectores poblacionales y entidades federativas del país.

Por su parte Hernández (2018) en su libro titulado "Reformas educativas en México (1917-2016) una evaluación pedagógica" recupera una parte fundamental sobre las reformas educativas, de dónde se derivan dichas reformas. Y es de las modificaciones realizadas en el artículo 3° de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos (CPEUM). De acuerdo con el autor la primera modificación se realizó 1934 y la décima fue realizada en el 2016; sin considerar la del presidente en turno actual (Andrés Manuel López Obrador).

Al tomar en cuenta las modificaciones realizadas al artículo tercero se puede realizar una línea de tiempo, para ver cómo repercute o influye en los planes y programas de estudio, los libros de textos, en los métodos de enseñanza; en pocas palabras en una **Reforma Curricular**. Por ejemplo: José Vasconcelos promocionó las Bellas Artes, la educación Popular (Rural) a través de las misiones culturales, las escuelas normales, escuelas tecnológicas, centrales agrícolas y las escuelas regionales campesinas. También fue una educación de acuerdo a la geografía. En las comunidades se enseñaban actividades de producción agrícola, en urbanas actividades fabriles e intelectuales. Lázaro Cárdenas se enfocó en una educación socialista, excluyendo la doctrina religiosa. Con Torres Boret se da fin a la educación socialista, dando pauta al "Plan de Once años". Luis Echeverría estableció el marco normativo (nueva Ley Federal de Educación) así como una renovación a la formación continua de los maestros. Hasta estas reformas se puede considerar que existieron cambios significativos entre los planes y programas de estudios vigentes, por tener distintos enfoques (Hernández, 2018).

Con el presidente Carlos Salinas de Gortari, a pesar de no realizar una reforma; si hace cambios significativos en los planes y programas de estudios, en la metodología de enseñanza y aprendizaje. Los cambios entraron en vigor en 1992-1993.

De manera particular en la materia de matemáticas, los programas pretendían reforzar a lo largo del ciclo el aprendizaje de las matemáticas de acuerdo a la capacidad para relacionar y calcular las cantidades con precisión, fortalecer el conocimiento de la geometría, la habilidad para plantear problemas y resolverlos. Sin embargo, desecha el enfoque lógico matemático (Hernández, 2018).

Hernández (2018) menciona que las primeras cinco reformas constitucionales realizadas al artículo tercero correspondientes al periodo de 1934 a 1993 y tenían como objetivo mejorar la educación y las últimas cinco reformas (2002-2016) el objetivo fue ajustarse a estándares internaciones, pasando a segundo término la parte nacional. En su trabajo existe realiza una tabla, misma que se empleó para realizar el siguiente cuadro comparativo.

Figura 35.*Cuadro-1, modificaciones del artículo tercero y las reformas educativas.*

Año	Reforma constitucional	Reforma educativa	Reforma curricular
Art. 3 (1934)	Educación socialista, educación primaria obligatoria.	Impulsa el conocimiento como medio de desarrollo rechazando la educación religiosa.	Influencia socialista, actividades y métodos regidos por la experimentación y observación.
Art. 3 (1946)	Educación laica, desarrollo armónico de las facultades humanas	Plan de once años, busca la unidad nacional, formación a docentes, creación de libros de textos gratuitos	No hubo cambios
Art. 3 (1980)	Otorga autonomía y delimitan las funciones universitarias. Ratifica el papel de coordinador y administrativo del estado para la educación	Empieza la descentralización a través de las delegaciones SEP.	No se observan cambios
Art. 3 (1992/1993)	La educación primaria y secundaria se vuelve obligatoria. Se establece el proceso científico como criterio rector de la educación. Se establecen los criterios (democracia, nacional, convivencia humana, respecto a la dignidad humana).	Promueve el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica.	Enfocada a la calidad educativa.

Fuente: Hernández 2018.

Nota: Elaboración propia en base a la información de Hernández (2018)

Figura 36.*Cuadro-2, modificaciones del artículo tercero y las reformas educativas.*

Año	Reforma constitucional	Reforma educativa	Reforma curricular
Art. 3 (2002)	La educación preescolar se vuelve obligatoria	Se incluyen las recomendaciones de PISA (educación por aptitudes y competencias)	Contenidos guiados por las competencias (inicia en secundaria)
Art. 3 (2011)	Amplía los criterios de educación (derechos humanos y conciencia de la solidaridad internacional)	Ofertó un currículo que posibilite el desarrollo al máximo las competencias profesionales	Impulsa la evaluación formativa y la creación de situaciones desafíos para los alumnos.
Art. 3 (2012)	La educación media superior se vuelve obligatoria. Los criterios de la educación promueven evitar la discriminación.	La educación media superior se organiza en un esquema por competencias.	Busca unificar las pedagogías de la educación básica.
Art. 3 (2016)	Delimita la regulación del proceso de ingreso, permanencia y promoción de servicio docente (INEE).	Promueve el diseño de un nuevo modelo educativo (aprendizajes clave, por competencias)	Destaca el desarrollo socioemocional, la educación en valores y enfoque humanista.

Fuente: Hernández 2018.

Nota: Elaboración propia en base a la información de Hernández (2018)

Figura 37.*Cuadro-3. Reformas constitucionales para la Modernización de la Educación Básica.*

Año	Características
1980	Fracción VIII dota del marco legal para la autonomía universitaria.
1992	Subraya que la educación debe sustentarse de los resultados del progreso científico, luchar contra la ignorancia y sus efectos, las servidumbres, fanatismos y prejuicios.
1993	Se especifican los niveles ofertados por el estado (preescolar, primaria y secundaria) y la obligatoriedad. Que todos los niveles educativos se rijan por el progreso científico y desarrollo tecnológico.

Fuente: Hernández 2018 y Schmelkes (2015).

Nota: Elaboración propia en base a la información de Hernández (2018) y Schmelkes (2015)

Figura 38.*Cuadro-4. Acuerdos Nacionales para la Modernización de la Educación Básica.*

Acuerdos	Integrantes	Características
Modernización de la educación Básica y Normal	Ernesto Zedillo, gobiernos Estales y el SNTE.	Descentralización de la educación básica y normal. Reformulación de contenidos. Materiales educativos. Revaloración magisterial y participación social en la educación. Da origen a la Ley General de Educación (LGE)
Compromiso Social por la Calidad de la Educación (2001)	Diversos sectores de la población, Autoridades educativa y Sindicato.	Elevar los niveles de aprendizaje de los alumnos.
Alianza por la Calidad de la Educación (2008)	Felipe Calderón, titular de la SNTE	Elevar los niveles de aprendizaje de los alumnos.

Fuente: Hernández 2018 y Schmelkes (2015).

Nota: Elaboración propia en base a la información de Hernández (2018) y Schmelkes (2015)

Figura 39.

Cuadro-5. Reformas educativas en México (1917-2016).

Impulsor	Reforma constitucional	Reforma Educativa	Reforma Curricular	Etapas	Materias	Comentarios
José Vasconcelos (Proyecto cultural de la revolución)	Educación libre, laica, gratuita y sujeta a la vigilancia oficial. Art. 3 de 1917.	Impulso las bellas artes, la educación popular o rural.	No hubo cambio en los planes y programas	Jardín de niños, primaria y Educación técnica.	Lengua nacional, aritmética, estudio de la naturaleza, geografía de México y general, trabajos manuales (niños), economía doméstica (niñas)	Educación según la ubicación geográfica. Comunidades rurales: producción agrícola, Escuelas urbanas: fabril e intelectuales. Creo bibliotecas en poblaciones con más de 3000 mil habitantes.
Lázaro Cárdenas (En el marco de la Reforma Agraria)	Popular, centralizada, rechazo a la religión, educación pro-estado y nacionalista. Art. 3 modificado en 1934.	La formación de los planes, programas y métodos de enseñanza corresponden al Estado.	Educación socialista. Los procesos de enseñanza se adaptan a las condiciones personales, sociales y económicas. Incluía: metas, justificaciones, temas, recursos a utilizar, y estrategias de evaluación recomendadas.	Primaria	Cuatro ejes (contenido, fabricación de herramientas útiles, conocimiento de la estructura social, conocimientos básicos en matemáticas y expresión)	Se planteó 3 ciclos de formación (1, 3 y 5 formación introductoria; 2, 4 y 6 se complejizan los temas abordados). Actividades académicas por medio del método científico (observación y experimentación)

Impulsor	Reforma constitucional	Reforma Educativa	Reforma Curricular	Etapas	Materias	Comentarios
Jaime Torres Boret (Plan de los once años y Unidad Nacional).	La educación la impartirá el estado... desarrollar. El ser humano, amor a la patria solidaridad internacional, independencia y justicia. Art. 3 modificado en 1946.	Apertura democrática y modernización económica.	Se crean nuevos planes y programas de estudios; además se distribuyen libros de texto gratuitos.	Primaria		
Luis Echeverría Álvarez	Mantiene la versión legislativa de 1946.	Considera la educación para la apertura democrática y modernización económica nacional.				Se crean unidades regionales de la SEP. Se crea el CONAFE. Educación básica en comunidades rurales y marginales.

Impulsor	Reforma constitucional	Reforma Educativa	Reforma Curricular	Etapas	Materias	Comentarios
	1980, se establece la autonomía universitaria.					Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica.
	1992, la educación debe sustentarse de los resultados del progreso científico.					
	1993, niveles oficiales y obligatoriedad (preescolar, primaria y secundaria). Los niveles se regirán por el progreso científico y tecnológico.					

Impulsor	Reforma constitucional	Reforma Educativa	Reforma Curricular	Etapas	Materias	Comentarios
<p>Carlos Salinas de Gortari</p> <p>(Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica)</p>		<p>Reorganización del sistema educativo. Reformulación de los contenidos y materiales educativos.</p> <p>Revaloración de la función magisterial.</p>	<p>Implementa los Programas Emergentes de Reformulación de Contenidos y Materiales Educativos.</p> <p>Promueve la calidad educativa en la escuela básica.</p>	Primaria	<p>Los conocimientos básicos son: Matemática, lectura y escritura.</p> <p>En segundo nivel están las naturales y sociales.</p>	Los planes, programas y metodologías eran obsoletos después de 20 años.
	<p>Obligatoriedad de la educación preescolar a secundaria.</p> <p>El Estado era el único agente social de proponer Reformas Curriculares. Art. 3 modificado en 2002.</p>		Incorpora las competencias como paradigma de enseñanza y aprendizaje.			Transformar la práctica educativa para mejorar el aprendizaje de todos los estudiantes.

Impulsor	Reforma constitucional	Reforma Educativa	Reforma Curricular	Etapas	Materias	Comentarios
	Facultades humanas, amor a la Patria, derechos humanos, solidaridad y justicia. Art. 3 modificado en 2011.					Las reformas constitucionales realizadas fueron posterior a la prueba de PISA (2006).
	La Educación Media Superior es obligatoria. Art. 3 modificado en 2012.	Diversidad cultural, dignidad humana, integridad de la familia				
	La Educación debe ser de calidad a criterio del estado. Art. 3 modificado en 2013.		Da como resultado "El Nuevo Modelo Educativo". Contemplan materias similares y habilidades socioemocionales.			

Impulsor	Reforma constitucional	Reforma Educativa	Reforma Curricular	Etapas	Materias	Comentarios
	Regulaciones en materia administrativa (Será de calidad, con base en el mejoramiento contante y máximo logro académico de los educandos). Art. 3 modificado en 2016.		Da como resultado "El Nuevo Modelo Educativo". Contemplan materias similares y habilidades socioemocionales.			La reforma constitucional realizada fue posterior a la prueba de PISA (2006).
Felipe Calderón Hinojosa. (Reforma Integral de la Educación Básica) -RIEB-			Lenguaje y comunicación, pensamiento matemático, exploración y comprensión del mundo natural y social, además del desarrollo personal para convivencia.	Primaria, Secundaria y Preparatoria		Se organiza en estándares curriculares dividido en cuatro periodos (3 grados por periodo). Aprendizajes clave

Fuente: Hernández 2018 y Schmelkes (2015).

Nota: Elaboración propia en base a la información de Hernández (2018) y Schmelkes (2015)

Con lo descrito en los párrafos anteriores, se aprecia que las modificaciones plasmadas en el artículo tercero de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos (CPEUM) repercuten de manera directa en cómo (Planes de estudio, programas de estudio, libros de texto, enfoque pedagógico, entre otros) se lleva a cabo la educación en México.

Lo que conlleva a cambios significativos -por del impacto- modificaciones realizadas en periodos cortos, dando así origen a la desactualización en los planes de estudio y programas de estudios acorde a la reforma educativa, mismo que será abordado a continuación.

Las fracciones en los Planes y programas de estudio (2011 y 2017)

La importancia de realizar una confronta entre ambos planes y programas de estudio (2011 y 2017) es mostrar que, no se logró permear dicha transformación en los libros de textos gratuitos. Es decir, se contemplan distintos objetivos – acordes a la reforma – pero el cómo lograrlo, cuando sólo cambian las portadas en los libros; pero el desarrollo de los temas, así como los ejercicios propuestos son los mismos.

Por otra parte, se realiza la confronta (análisis) para demostrar que el enfoque pedagógico contrasta, implicando así un aprendizaje híbrido y discontinuo en los alumnos al transitar de un grado a otro; de manera particular entre las etapas contempladas en la educación inicial (segunda, tercera y cuarta etapa) al cursar la primaria y el ingreso a la secundaria.


Sin más preámbulo se iniciará con el análisis el mapa curricular entre el plan de estudios del 2011 (figura 40) y 2017 (figura 41). Se aprecia que no existe un cambio sustancial en relación a la asignatura de Matemáticas, en ambas se considera el pensamiento matemático en el primer grado escolar (preescolar) y en los siguientes se considera como matemáticas.

Figura 40.
 Mapa curricular de la Educación Básica 2011.

ESTÁNDARES CURRICULARES ¹		1 ^{er} PERIODO ESCOLAR			2 ^o PERIODO ESCOLAR			3 ^{er} PERIODO ESCOLAR			4 ^o PERIODO ESCOLAR		
HABILIDADES DIGITALES	CAMPOS DE FORMACIÓN PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA	Preescolar			Primaria						Secundaria		
		1°	2°	3°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	1°	2°	3°
	Lenguaje y comunicación	Lenguaje y comunicación			Español						Español I, II y III		
	PENSAMIENTO MATEMÁTICO	Pensamiento matemático			Matemáticas						Matemáticas I, II y III		
		Segunda Lengua: Inglés ²		Segunda Lengua: Inglés ²						Segunda Lengua: Inglés I, II y III ²			

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011).
 Nota: Recorte del mapa curricular.

Figura 41.
 Mapa curricular de la Educación Básica 2017.

Componente Curricular		Nivel Educativo											
		Preescolar			Primaria						Secundaria		
		Grado escolar			Grado escolar						Grado escolar		
		1°	2°	3°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	1°	2°	3°
 Formación académica	Campos y Asignaturas	Lenguaje y comunicación			Lengua Materna (Español/lengua indígena)						Lengua Materna (Español)		
					Segunda Lengua(Español/lengua indígena)								
		Inglés			Lengua Extranjera (Inglés)						Lengua Extranjera (Inglés)		
		Pensamiento Matemático			Matemáticas						Matemáticas		

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2017).
 Nota: Adaptación en base al mapa curricular de la SEP.

Para los estándares curriculares, en la figura 40 se aprecian cuatro etapas o periodos escolares de acuerdo a la SEP. Dichos periodos escolares distan entre ambos planes y programa de estudio (2011 y 2017). Existe variación entre el término e inicio del segundo y tercer periodo escolar. Es decir, para el programa de estudios 2011 se concluye la segunda etapa (periodo escolar) en el tercer grado de primaria; para el plan y programa de estudio del 2017 concluye en el segundo grado de primaria. Respecto al inicio del tercer periodo de da en cuarto de primaria y en tercero de primaria; respectivamente.

Esto influye –en forma teórica– por las transiciones (etapas) en las que pasa el alumno en su aprendizaje (conocimiento matemático) al tener una mezcla de programas y planes de estudio (2011 y 2017) determinada por parte de la SEP durante la contingencia sanitaria del Covid-19. La diferencia entre las etapas se aprecia entre las figuras (42 y 43).

Figura 42.

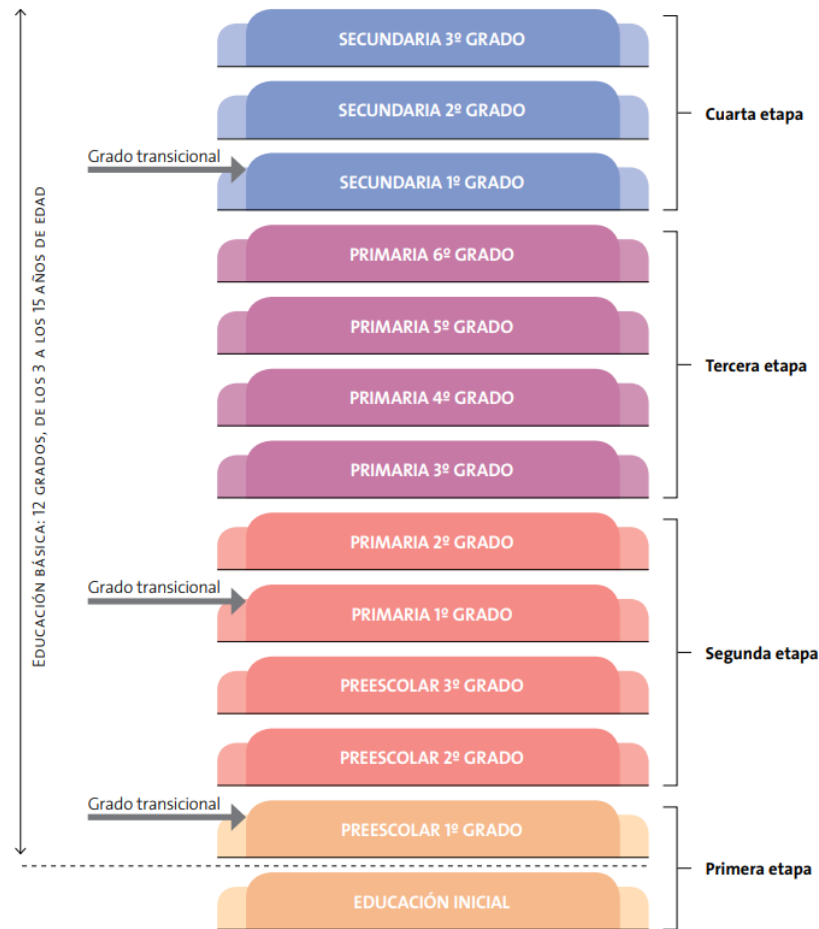
Estándares curriculares y periodos escolares, del plan de estudios 2011.

ESTÁNDARES CURRICULARES		
PERIODO ESCOLAR	GRADO ESCOLAR DE CORTE	EDAD APROXIMADA
Primero	Tercer grado de preescolar	Entre 5 y 6 años
Segundo	Tercer grado de primaria	Entre 8 y 9 años
Tercero	Sexto grado de primaria	Entre 11 y 12 años
Cuarto	Tercer grado de secundaria	Entre 14 y 15 años

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011).

Además, se existe una mayor organización y claridad en el plan de estudios 2011, en la figura 42 adicional a al periodo escolar y grados; se contempla de manera específica la edad del alumno –en la que estaría– siempre y cuando el alumno sea regular. Es decir, no esté inscrito a una edad temprana (antes de cumplir los 5 años) o sea alumno que recursó algún grado escolar en la primaria.

Mientras que el plan de estudios del 2017 no se puede apreciar dicha transición, sólo contemplada la edad en forma general para la educación básica va a partir de los 3 años a los 15 años.

Figura 43.*Etapas de la educación inicial a la educación secundaria 2017.***Fuente:** Secretaría de Educación Pública (2017).

Para el tercer grado de primaria, ambos planes y programas de estudio (2011 y 2017) se abordan las fracciones. Pero cada uno comprende aprendizajes específicos. Los propósitos del estudio de las matemáticas para la educación primaria varía acorde al plan y programa de estudios. Para el primero se pretende utilicen el cálculo mental para la estimación de resultados (operaciones de suma, resta y multiplicativos) con números fraccionarios y decimales; mientras que en el 2017 se espera utilizar la estimación del cálculo mental y escrito en operaciones con fracciones y decimales (figura 44)

Figura 44.

Cuadro 6.- Propósitos del plan y programas de estudio de la asignatura de matemáticas.

2011	2017
Conozcan y usen las propiedades del sistema decimal de numeración para interpretar o comunicar cantidades en distintas formas. Expliquen las similitudes y diferencias entre las propiedades del sistema decimal de numeración y las de otros sistemas, tanto posicionales como no posicionales.	Utilizar de manera flexible la estimación del cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números naturales, fraccionales y decimales .
Utilicen el cálculo mental , la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y la resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos.	Identificar y simbolizar conjuntos de cantidades que varían proporcional mente, y saber calcular valores faltantes y porcentajes en diversos contextos.
Conozcan y usen las propiedades básicas de ángulos y diferentes tipos de rectas, así como del círculo, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares e irregulares, prismas, pirámides, cono, cilindro y esfera al realizar algunas construcciones y calcular medidas.	Usar e interpretar representaciones para la orientación en el espacio, para ubicar lugares y para comunicar trayectos.
Usen e interpreten diversos códigos para orientarse en el espacio y ubicar objetos o lugares.	Conocer y usar las propiedades básicas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculos y prismas.
Expresen e interpreten medidas con distintos tipos de unidad, para calcular perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares e irregulares.	Calcular y estimar el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros, y estimar e interpretar medidas expresadas con distintos tipos de unidad.
Emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos contenidos en imágenes, textos, tablas, gráficas de barras y otros portadores para comunicar información o para responder preguntas planteadas por sí mismos o por otros. Representen información mediante tablas y gráficas de barras.	Buscar, organizar, analizar e interpretar datos con un propósito específico y luego comunicar la información que resulte de este proceso.
Identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, calculen valores faltantes y porcentajes, y apliquen el factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos	Reconocer experimentos aleatorios y desarrollar una idea intuitiva de espacio muestral.

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011 y 2017).

Lo anterior se plasma a través de los ejes contemplados en los planes y programas de estudio del 2011 y 2017 de la SEP (figura 45). En el primer eje se cambia el pensamiento algebraico y pasa a ser algebra, se integra un tercer elemento denominado variación, en el segundo eje no existen cambios significativos, para el tercer eje existe un cambio radical; del manejo de la información para al análisis de datos. Por último, se elimina el cuarto eje en el plan y programa de estudios del 2017.

Figura 45.

Cuadro 7.- Ejes contemplados en la asignatura de matemáticas, para los aprendizajes esperados.

Planes y programas de estudio		
Ejes	2011	2017
1	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Número, algebra y variación
2	Forma, espacio y medida	Forma, espacio y medida
3	Manejo de la información	Análisis de datos
4	Actitud hacia el estudio de las matemáticas	

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011 y 2017).

El cómo cambia y repercute en la formación del alumno de primaria (del tercer grado) se observa en cada bloque, para la presente investigación nos enfocaremos a partir del bloque III del plan y programa de estudios del 2011, por ser el comienzo del aprendizaje para el alumno de tercero (de primaria) en las fracciones; sin embargo, se puede consultar los bloques I y II en el apartado de anexos.

El aprendizaje esperado para el alumno en el bloque III (figura 46), es la resolución de problemas que involucre el reparto y tenga como resultado una fracción de la forma $m/2$. Es decir, medios, cuartos, octavos, etc. Contemplado con el primer eje (sentido numérico y pensamiento algebraico).

Figura 46.

Aprendizajes esperados del bloque III del plan y programa de estudios del 2011, de la asignatura de matemáticas.

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente		
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES	
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $m/2^n$. Utiliza el algoritmo convencional para resolver sumas o restas con números naturales. 	<p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> Uso de fracciones del tipo $m/2^n$ (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas. Uso de fracciones del tipo $m/2^n$ (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos. Identificación de la regularidad en sucesiones con números, ascendentes o descendentes, con progresión aritmética para continuar la sucesión o encontrar términos faltantes. <p>PROBLEMAS ADITIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Estimación del resultado de sumar o restar cantidades de hasta cuatro cifras, a partir de descomposiciones, redondeo de los números, etcétera. Determinación y afirmación de un algoritmo para la sustracción de números de dos cifras. <p>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Resolución de problemas de división (reparto y agrupamiento) mediante diversos procedimientos, en particular el recurso de la multiplicación. 	<p>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información explícita de diversos portadores.

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011).

También se debe recalcar que, en el plan y programa del 2011, busca a lo largo de la educación básica (primaria y secundaria) los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de sus saberes previos partir de formular y validar conjeturas, plantear nuevas preguntas, comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución, buscar argumentos para validar procedimientos y resultados, encontrar diferentes formas de resolver los problemas, así como manejar técnicas de manera eficiente; todo lo anterior sobre la asignatura de matemáticas.

En el plan y programa de estudios del 2017 (figura 47) no se realiza el desglose por bloque de los aprendizajes esperados, es general. Pero se aprecia en el eje de "número, álgebra y variación" se espera que el alumno use fracciones con denominador dos, cuatro y ocho; para expresar relaciones parte-todo, medidas, así como resultados de reparto. Además de resolver problemas de suma y resta de fracciones con el mismo denominador (medios, cuartos y octavos).

Figura 47.

Aprendizajes esperados del plan y programa de estudios del 2017, de la asignatura de matemáticas.

MATEMÁTICAS. PRIMARIA. 3º		
EJES	Temas	Aprendizajes esperados
NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN	Número	<ul style="list-style-type: none"> • Lee, escribe y ordena números naturales hasta 10 000. • Usa fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.
	Adición y sustracción	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas de suma y resta con números naturales hasta 10 000. Usa el algoritmo convencional para restar. • Calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas con números hasta de tres cifras. • Resuelve problemas de suma y resta con fracciones del mismo denominador (medios, cuartos y octavos).
	Multiplicación y división	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas de multiplicación con números naturales cuyo producto sea hasta de tres cifras. • Calcula mentalmente multiplicaciones de números de una cifra por números de una cifra y por múltiplos de 10, así como divisiones con divisores y cocientes de una cifra. • Resuelve problemas de división con números naturales hasta 100, con divisores de una cifra (sin algoritmo).

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2017).

Se analizó de manera sintetizada, pero sustancial cómo se aborda o es el primer contacto con las fracciones en ambos planes y programas de estudios, pero falta analizar cómo se concluye el tema de las fracciones al término de la primaria.

Los bloques completos (I, II, III y IV) del plan y programa de estudios 2011 se pueden consultar en el apartado de anexo, basta por lo pronto con ilustrar el bloque IV (figura 48), a diferencia del tercer grado de primaria; se contemplan tres ejes (1.- Sentido numérico y pensamiento algebraico, 2.- Forma, espacio y medida, 3.- manejo de la información) pero sólo en el primer y tercer eje contempla el aprendizaje con la conversión de las fracciones a decimal y viceversa, la aplicación de sucesiones con números (fraccionarios, decimales y naturales), la resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, empleando la expresión "a/b de n", así como la comparación de razones mediante un número de veces, fracción o porcentaje.

Figura 48.

Aprendizajes esperados del bloque final (IV) del plan y programa de estudios del 2011, de la asignatura de matemáticas.

Bloque IV

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> Explica las características de diversos cuerpos geométricos (número de caras, aristas, etc.) y usa el lenguaje formal. 	<p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad. <p>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión "a/b de n". 	<p>FIGURAS Y CUERPOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Anticipación y comprobación de configuraciones geométricas que permiten construir un cuerpo geométrico. <p>MEDIDA</p> <ul style="list-style-type: none"> Cálculo de la longitud de una circunferencia mediante diversos procedimientos. Cálculo del volumen de prismas mediante el conteo de unidades. 	<p>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> Comparación de razones del tipo "por cada n, m", mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011).

En contraparte se tienen los aprendizajes esperados del plan y programa de estudios del 2017 (figura 49), de manera específica en el eje “número, álgebra y variación” al leer, escribir y ordenar números fraccionarios y decimales. Resolver problemas con números al situarlos en la recta numérica, este punto es importante para entender la relación de las fracciones y los números decimales. Suma y resta con números naturales, decimales y fraccionarios; emplear algoritmos convencionales para sumar y restar decimales, así como cálculos mentales exactos y aproximados al sumar y restar decimales; multiplicar con fracciones y decimales, comparar razones expresadas con una fracción (m/n).

Figura 49.

Aprendizajes esperados del plan y programa de estudios del 2017, de la asignatura de matemáticas.

MATEMÁTICAS. PRIMARIA. 6°		
EJES	Temas	Aprendizajes esperados
NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN	Número	<ul style="list-style-type: none"> • Lee, escribe y ordena números naturales de cualquier cantidad de cifras, fracciones y números decimales. • Estima e interpreta números en el sistema de numeración maya. • Lee y escribe números romanos. • Resuelve problemas que impliquen el uso de números enteros al situarlos en la recta numérica, compararlos y ordenarlos.
	Adición y sustracción	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones. • Usa el algoritmo convencional para sumar y restar decimales. • Calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas de decimales.
	Multiplicación y división	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, con multiplicador número natural, y de división con cociente o divisores naturales.
	Proporcionalidad	<ul style="list-style-type: none"> • Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m). • Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con un número natural como constante. • Resuelve problemas de cálculo de porcentajes y de tanto por ciento. • Calcula mentalmente porcentajes (50%, 25%, 10% y 1%) que sirvan de base para cálculos más complejos.

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2017).

En pocas palabras las diferencias entre los planes y programas de estudios 2011 y 2017 en la enseñanza de las fracciones es significativo. Por tal motivo, los ejercicios contemplados en los libros de texto oficial deben ser distintos.

Análisis de las fracciones en los libros de textos 2011 y 2017

En relación con los libros de texto gratuito oficiales (2011 y 2017) del nivel educativo de primaria (tercer y sexto grado) se realiza un análisis para ver cambios o similitudes entre ambos. Se muestra la portada y el primer ejercicio del libro (tercer grado), así como el último ejercicio del sexto grado de primaria; aunque se pueden consultar en el apartado "anexos" para mejor detalle y calidad. Los libros actuales y vigentes están disponibles en la página oficial de la "Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos" (CONALITEG).

Por medio de las portadas (figura 50) se aprecia que no existe una continuidad entre los libros, pero al ver el primer ejercicio propuesto en relación al tema de las fracciones y el aprendizaje esperado para el alumno; se visualiza que es el mismo ejercicio (figura 51).

Figura 50.

Portada del libro de texto oficial del tercer grado de primaria de los planes y programas de estudio 2011 y 2017.



Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011 y 2017).

Una posible explicación se debe a que, en ambos planes y programas de estudio 2011 y 2017 se interactúa con la fracción en la forma $m/2$, por ello se emplea el mismo ejercicio. Sin embargo, al realizar un cambio en los planes y programas de estudio sería conveniente modificar los ejercicios, partiendo de la premisa: por algo se realizó el cambio en los planes y programas de estudio.

Figura 51.


Primer ejercicio sobre fracciones del libro de texto oficial de los planes y programas de estudio 2011 y 2017.

30 Medios, cuartos y octavos

Consigna

En equipos, realicen lo que se solicita.


1. Señalen en cada vaso, de acuerdo con la cantidad que se indica, hasta dónde debe llegar el nivel del agua.



vaso lleno $\frac{1}{2}$ vaso $\frac{1}{4}$ vaso $\frac{1}{8}$ vaso

2. El siguiente dibujo representa una tira completa. Debajo de ésta dibujen las fracciones de tira que se indican:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$

Tira completa 

70 | Desafíos matemáticos

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011 y 2017).

Se puede considerar que la permanencia del ejercicio se debe al conocimiento (aprendizaje) generado en el alumno, por la manera de mostrar e ilustrar las fracciones y la repartición de la unidad en partes. Además, muestra la representación formal de las fracciones; es decir, la forma "numerador/denominador", así como la representación figural por medio de la tira. A semejando una recta numérica, este último fundamental para generar el énfasis requerido para asociar las fracciones con los números decimales.

Respecto a cómo se concluye el tema de las fracciones en el sexto grado de primaria, se realiza el mismo enfoque -mostrar las portadas y el ejercicio de los libros de ambos planes y programas- (figura 52 y 53).

Figura 52.

Portada del libro de texto oficial del sexto grado de primaria de los planes y programas de estudio 2011 y 2017.



Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011 y 2017).

Aunque se dice: no es bueno juzgar un libro por su portada, es de utilidad en este análisis; al mostrar que existen cambios entre dichos libros de manera superficial; pero se mantienen todos los ejercicios en su interior (figura 53). Esta situación prevalece en todos los ejercicios y se puede concluir el mal manejo del recurso ejercido, debido a sólo se cambió la portada y el interior es una impresión idéntica al libro anterior.

Un aspecto crucial e importante es que, a diferencia del libro del tercer grado, en donde los aprendizajes esperados coincidían entre los planes y programas de estudio 2011 y 2017. No sucede lo mismo para el sexto grado de primaria existe una discrepancia.

Para el 2011 se espera la conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa, la aplicación de sucesiones números naturales empleando la expresión "a/b de n" y la comparación de razones del tipo "por cada n, m". y en el 2017 se espera que los alumnos ordenen los números de cualquier cifra (fracciones y decimales) resuelvan problemas con el uso de enteros al situarlos en una recta numérica para compararlo y ordenarlo; realicen cálculos mentales (exacta y aproximada) de sumas y restas decimales; así como resuelvan problemas de tipo multiplicativo y divisorio con fracciones y decimales; así como el empleo de números naturales para el multiplicador, cociente y divisor.

Figura 53.

Último ejercicio del libro del sexto grado de primaria de los planes y programas de estudio 2011 y 2017.

85 Hablemos de nutrición

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas con base en los datos de la tabla. Si lo consideran necesario pueden usar su calculadora.

1. Si comparamos el arroz, los frijoles y las tortillas, ¿cuál alimento es el más rico en carbohidratos?
2. Si consideramos el huevo, la carne de res y el pescado, ¿cuál alimento es el más rico en proteínas?
3. ¿Cuál es el alimento más rico en lípidos?

Alimento	Gramos	Carbohidratos	Proteínas	Lípidos
Arroz	100	80	7	1
Huevo	50	3	11	10
Carne de res	90	0	18	18
Pescado	50	0	12	2
Frijoles	120	60	22	2
Tortillas	25	15	2	1

152 | Desafíos matemáticos

85 Hablemos de nutrición

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas con base en los datos de la tabla. Si lo consideran necesario pueden usar su calculadora.

1. Si comparamos el arroz, los frijoles y las tortillas, ¿cuál alimento es el más rico en carbohidratos?
2. Si consideramos el huevo, la carne de res y el pescado, ¿cuál alimento es el más rico en proteínas?
3. ¿Cuál es el alimento más rico en lípidos?

Alimento	Gramos	Carbohidratos	Proteínas	Lípidos
Arroz	100	80	7	1
Huevo	50	3	11	10
Carne de res	90	0	18	18
Pescado	50	0	12	2
Frijoles	120	60	22	2
Tortillas	25	15	2	1

152 | Desafíos matemáticos

Fuente: Secretaría de Educación Pública (2011 y 2017).

A pesar de sólo plasmar el primer y último ejercicio, se verificó el índice de cada libro de texto oficial (plan y programas de estudio 2011 y 2017) y se determinó no existe un cambio verdadero y sustancial.

Entonces, no se puede esperar mejor la educación en México y con ello la enseñanza del conocimiento en las escuelas (educación básica) para formar mejores alumnos. Cuando los cambios se hacen en forma superficiales a través del uso de los decretos, reformas educativas, acuerdos. Pero la parte central y sustancial que repercute de manera directa en los alumnos por el conocimiento adquirido durante su transitar de la primaria (segunda y tercera etapa escolar) no se da el énfasis necesario para modificar o actualizar el contenido de los libros.

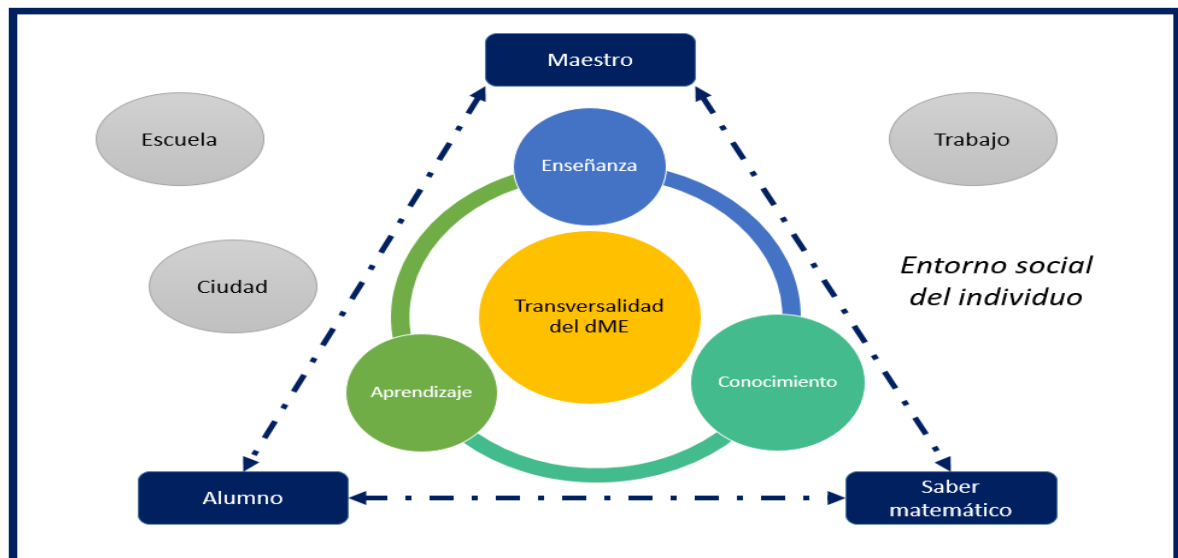
Hacia un rediseño del discurso matemático escolar de las fracciones

Todo lo descrito a partir de la sección: “La educación en México” permea sobre el discurso escolar, de manera específica sobre el tema que nos atañe en la presente investigación, las fracciones. Así como a la asignatura de matemáticas en forma general. Es decir, no es un caso específico del tema en cuestión (las fracciones) sino una generalidad sobre el discurso vigente en México y quizás se aplique en algunos otros países dicha problemática.

Derivado a la creciente globalización y a la universalización del conocimiento, se tiene una homogenización de aquello que debe saber y aprender el alumno. Si sólo nos enfocamos a México, se tienen problemas que no han sido subsanados a pesar de los grandes esfuerzos –en ocasiones con verdaderas intenciones y otras sólo con simulación de intenciones– de resolver la problemática, misma que ha evolucionado en el transcurso del tiempo. Al inicio fue atender el analfabetismo existente en la población mexicana, luego se vuelve inclusiva al ser obligatoria, libre y gratuita; pero existe la carencia de aulas, escuelas y maestros de primaria... la necesidad de universidades, etc. Pero todo ello tiene una transversalidad en la enseñanza, el conocimiento y el aprendizaje (figura 54).

Figura 54.

Variables a considerar en el rediseño del discurso escolar en México.



Fuente: Elaboración propia (2022).

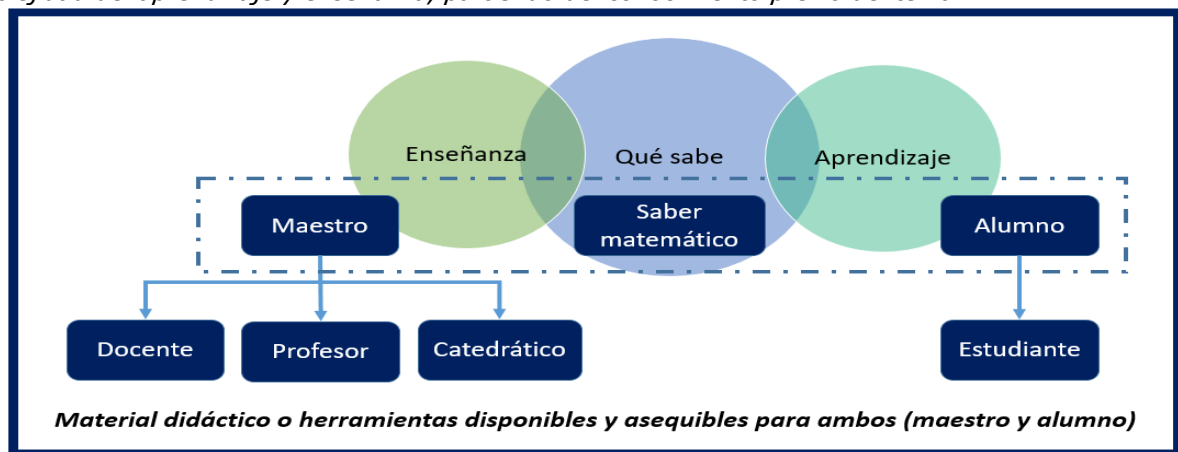
Se realiza una inclusión de elementos descritos por Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015) sobre la enseñanza y el aprendizaje, adicional se incorpora el saber matemático; a la vez que se interpola con el triángulo didáctico para identificar cómo están relacionados de manera directa en el entorno educativo y se integran los marcos de referencia en la construcción del conocimiento (saber), no necesariamente implica sean los únicos.

Cordero et al (2015) hablan de tres aspectos fundamentales cuando no se considera a la gente, ya que también usan el conocimiento matemático en donde viven y se desarrollan (escuela, trabajo y ciudad) estos elementos son: la adherencia, la exclusión y la opacidad, que impactan en el discurso matemático escolar; que a su vez da por consiguiente una necesidad de rediseñar el Discurso Matemático Escolar (RdME). El un punto de inflexión propuesto es "qué conocimiento se debe enseñar" y una manera de saberlo sería a través de estudios que cuestionen el uso del conocimiento matemático en las niñas, los niños, universitarios, profesores, ciudadanos, por citar algunos ejemplos; pero no existen dichos estudios.

En este mismo contexto podríamos preguntarnos: dónde inicia el uso, aplicación o utilidad de las fracciones –en la escuela, trabajo o en la cotidianidad del día a día (entorno) como la ciudad– se concuerda con los autores (Cordero et al, 2015) sobre la complejidad del aprendizaje y enseñanza. Es necesario saber “lo que se sabe” del tema matemático en cuestión, de manera particular de las fracciones; en ambos polos, ya sea el alumno o el maestro. Pero esto aplica en cualquier tema de las matemáticas, así como cualquier asignatura (figura 55).

Figura 55.

La complejidad del aprendizaje y enseñanza, partiendo del conocimiento previo del tema.



Fuente: Elaboración propia (2022).

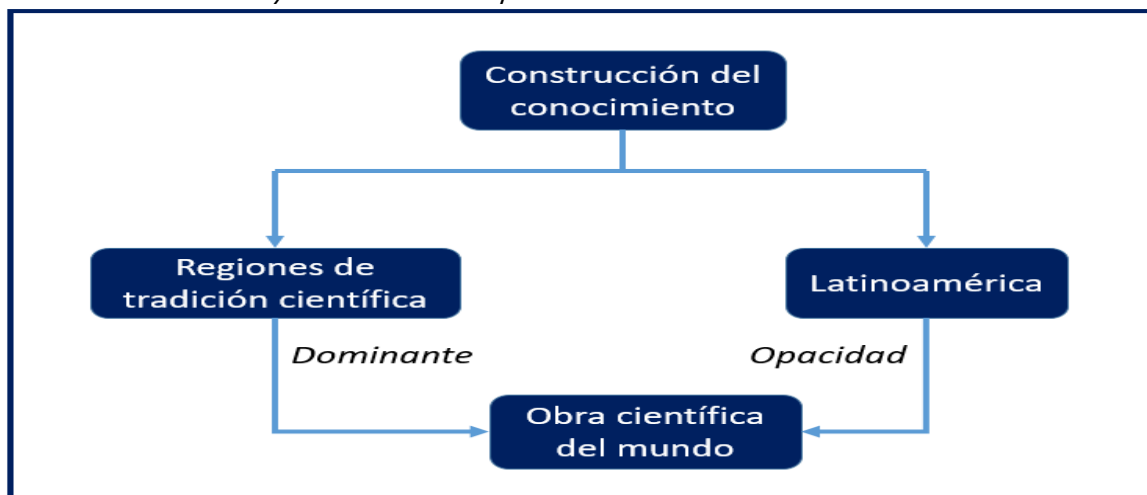
Nota: Basado en Cordero et al (2015).

Comentan que existe preocupación por entender lo que saben, pero no en saber cómo usan ese conocimiento, existen complicaciones cuando se habla de manera concreta de las matemáticas. La exclusión se da, cuando se considera al conocimiento unilateral; sólo se toma en cuenta el conocimiento correcto (el discurso vigente) por imposición y ejemplifican con la metáfora del elefante. Cuando existe una epistemología del elefante, dada por las personas que pueden ver; por tanto, entiende y asimilan qué es un elefante. Pero, qué pasa cuando las personas no pueden ver (invidentes)... emplean otros sentidos para entender el mundo que los rodea -qué es un elefante para ellos-. Es así que, se tiene una epistemología correcta y otra incorrecta –a esto se denomina exclusión social– un discurso aprobado y validado, el otro no es aceptado.

Así como se da la exclusión del conocimiento (correcto) generado por expertos, científicos, eruditos, etc., sucede algo similar en la construcción global del conocimiento. Es sabido de la existencia del discurso dominante versus el conocimiento generado por quienes no pertenecen o no son considerados generadores del conocimiento; de manera específica Latinoamérica, se da la opacidad del conocimiento. No significa que se deseche el conocimiento, sólo que no existe esa resonancia que logre permear en el discurso escolar; tal como se ilustra a continuación (figura 56).

Figura 56.

Construcción del conocimiento y el fenómeno de opacidad.



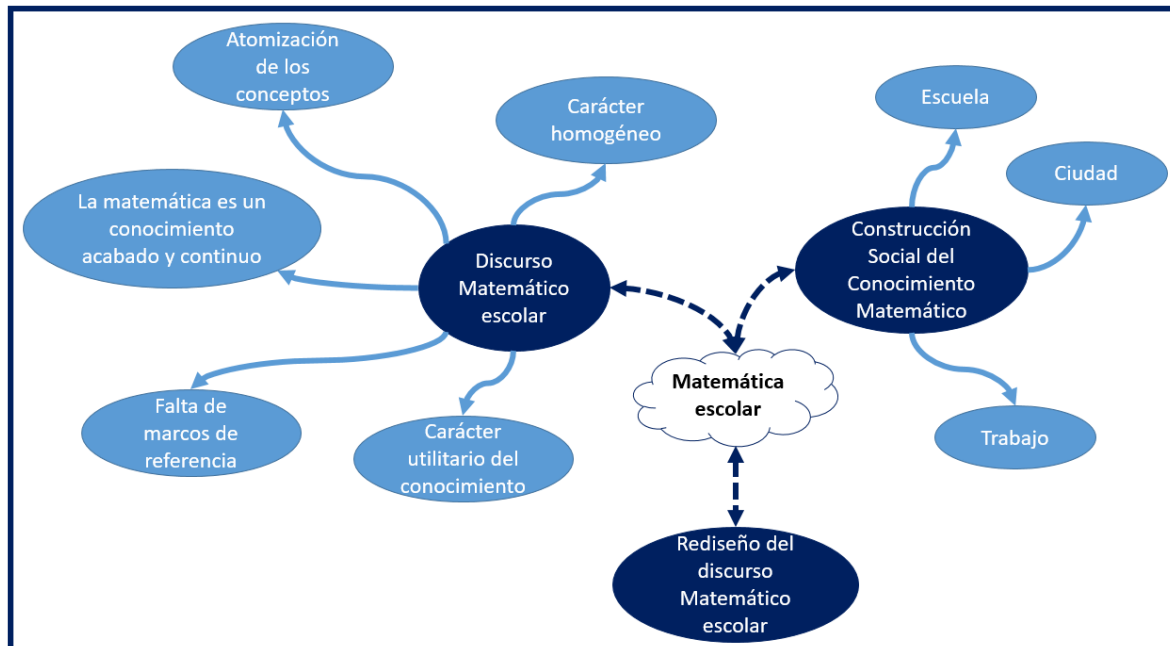
Fuente: Cordero et al (2015).

Por consiguiente, la dicotomía existe por problematizar ciertas costumbres de la cultura latinoamericana, a tal grado que parecen ser invisibles en el cotidiano, dando así de manera implícita una supremacía al pensamiento de culturas dominantes y una carga peyorativa a las expresiones culturales de Latinoamérica, en pocas palabras debilita los diferentes ámbitos del quehacer disciplinar de la matemática educativa en Latinoamérica; a esto le denominan fenómeno de adherencia (Cordero et al, 2015).

Se tienen distintos elementos (figura 57) considerados en el discurso matemático escolar (dME) que influyen y a la vez permiten hacer un análisis mesurado sobre la necesidad de reformular la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Figura 57.

Elementos considerados en la Matemática Escolar.



Fuente: Elaboración propia (2022).
 Nota: Basado en Cordero et al (2015).

Adicional a ello se conjugan las reformas al artículo tercero de la constitución política de los estados unidos mexicanos, las reformas educativas, los planes y programas de estudio, los libros de texto oficial, por citar algunos ejemplos. Que van a permean de manera directa e indirecta sobre el discurso matemático escolar en México, ya sea que se mantenga (sin cambios significativos) o se rediseñe (actualizaciones superficiales) sin lograr una continuidad en la generación del conocimiento. Por no recuperar las buenas prácticas, en donde se tuvo éxito y sólo reforzar, modificar o cambiar en aquellos aspectos donde no hubo avance significativo.

Caso práctico de una secuencia diseñada

Antes de exponer los resultados de la puesta en escena, se dará a conocer cómo se diseñó la secuencia; aunque no se emplea a la teoría de Situaciones Didácticas (TSD), ni la Ingeniería Didáctica (ID) se toman algunos elementos que aportan robustez a la investigación.

También se expondrá el diagnóstico de la maestra, pues se solicitó realizar una breve síntesis grupal; partiendo del hecho formativo, debido a que la puesta en escena se llevó a cabo a inicios del 2023. En el regreso a la normalidad escolar, terminan las clases virtuales y se acude con regularidad a clases de manera presencial, así como la conclusión de la enseñanza-aprendizaje híbrida con el uso de los planes y programas del 2011 y 2017.

Diagnóstico grupal de la maestra

Los alumnos que ingresaron al primer grado de secundaria, de manera presencial al ciclo 2022-2023, presentan diversas barreras de aprendizaje que están presentes como: las actitudinales, curriculares y físicas, que de manera general existen alumnos:

- ✓ Con bajo significado y sentido de la educación, el cual tiene un impacto en su proyecto de vida, problemas de lecto-escritura en donde no hay acompañamiento en casa.
- ✓ Alumnos con disminución visual, que no cuenta con el apoyo de sus padres, factor que ha impactado en sus emociones de manera negativa; suelen ser retraídos, distraídos y sumamente callados.

En cuanto a lo pedagógico curricular, las alumnas y alumnos del 1º E son capaces de entender literalmente la información puntual de los textos, siempre y cuando estén muy localizables en el propio texto.

Se les dificulta captar la idea principal y la finalidad del mismo, siempre y cuando el texto tenga una estructura explícita (con apartados e imágenes). Sin embargo, tengo un grupo considerable de alumnos que presentan problemas de lecto-escritura. Tengo que prestar mucha atención para que no se rezaguen demasiado, por ello he tenido que diversificar los textos para que sean de su interés y que no generen dificultad para comprender los conceptos básicos, propios de la asignatura.

Además, presentan deficiencias en el sentido numérico y con ello, dificultad en la interpretación de gráficas, datos estadísticos, así como el uso de otros sistemas de numeración como el romano. Importantes en asignaturas como: la Historia, Formación Cívica y Ética para establecer: siglos, capítulos de alguna ley o los artículos numerados de esta manera. Y son necesarios para entender el espacio histórico de las situaciones que se presentan, a modo de estudio.

Por último, en cuanto a las interacciones dentro del aula, se les dificulta trabajar en equipos, no comprenden los roles que cada uno debe desarrollar (estrategia de organización), lo cual puedo atribuir como un factor el trabajo a distancia -a propósito de la pandemia- con ello la noción y sentido de la forma de organización existente en las escuelas secundarias ha sido complicado, que el alumnado se adapte a la forma de enseñanza y trabajo (que debe desarrollar) con cada uno de sus profesores.

En definitiva, es diferente a la primaria, en dicho nivel se trabaja con un docente, lo cual es completamente distinto a la organización con la secundaria, impactando incluso el horario de ingreso a esta pues las jornadas pedagógicas inicia a las 07:00 am hasta las 2:10 pm.

Esbozo de la secuencia

De acuerdo con el análisis epistemológico realizado (origen de las fracciones, las distintas representaciones y significados, así como los planes y programas de estudios, los libros de texto gratuito y el discurso escolar vigente, por citar algunos elementos) se vislumbró desarrollar una secuencia que contemple la necesidad de repartir en una situación real (caso práctico) para lograr emerger el conocimiento sobre el uso de las fracciones a través de la necesidad misma.

Con esto, se podría dar énfasis a la fracción versus la división; pues en ambos casos se realiza una repartición. El cómo se realiza dicha repartición y el resultado obtenido es una de las peculiaridades que dista entre dichos conceptos matemáticos.

Para el primer caso (fracción) es fácil reconocer el sobrante, no así en la división; al realizar una repartición que no sea exacta. Además, de acuerdo con la etimología (Serrano, 2020) del término fracción (del latín *frangere*; romper, quebrar) no necesariamente deben ser partes iguales, pues se rompe algo (objeto, terreno, alimentos, etc.) en sentido metafórico. Por ello, se optó en problematizar una repartición entre hermanos (herencia familiar de un terreno) considerando que al hermano más grande le debe tocar la mayor parte y al menor la superficie más pequeña. Para garantizar el surgimiento de las fracciones se considera a tres hermanos a fin de no tener una repartición exacta. Durante el desarrollo de la actividad, se realizan preguntas para inducir la reflexión sobre el concepto matemático (las fracciones).

Lo anterior se refuerza en la segunda actividad propuesta, pero se cambia la forma de la superficie; con las mismas preguntas. Para finalizar se toman distintos elementos como la recta numérica, el significado de la representación de una figura geométrica para crear la reflexión sobre la fracción y división; a fin de que los alumnos puedan discernir entre ambos conceptos matemáticos.

A continuación, se realiza un breve esquema (figura 58 y 59) de la conformación (estructura) de la situación escolar de la socialización (actividad o secuencia) para sintetizar lo descrito. Las secuencias diseñadas, desarrolladas y aplicadas se pueden consultar en la sección de anexos (tipo A y B).

Figura 58.

Actividades consideradas en la situación escolar de la socialización (Tipo A).

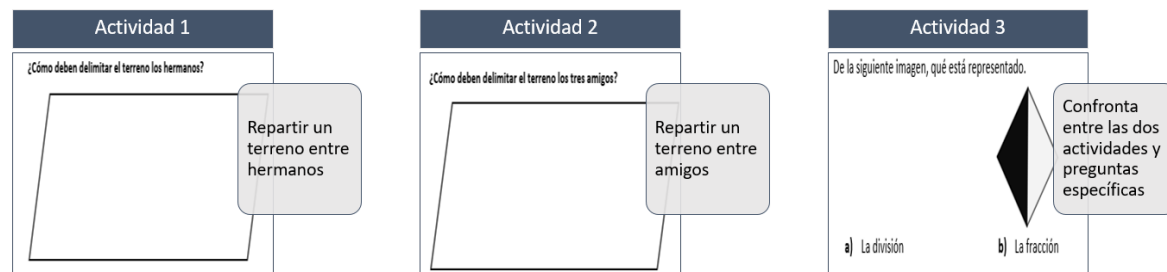


Fuente: Elaboración propia (2022).

La diferencia sustancial entre las dos situaciones es el cambio de escenario; es decir, para el primero se buscaron imágenes satelitales a fin de contextualizar la realidad del problema. Para el segundo se problematiza en base a figuras geométricas o pictogramas, se contextualiza al inicio con la repartición de los hermanos (actividad 1) y en la actividad 2 con la repartición de un terreno entre amigos. Sin embargo, la actividad 3 es la misma para ambas (tipo A y B).

Figura 59.

Actividades consideradas en la situación escolar de la socialización (Tipo B).



Fuente: Elaboración propia (2022).

Puesta en escena

Se llevó a cabo en la Escuela Secundaria Técnica No. 134 (figura 60) con el primer grado de secundaria, grupo "E" la conformación grupal es veintinueve alumnos (17 hombres y 12 mujeres) con edad promedio escolar de 12 años.

Figura 60.

Fachada de la escuela secundaria técnica No. 134.



Fuente: Imagen tomada de internet (2023).

Al momento de llevar a cabo la actividad, se inició con la prueba diagnóstica elaborada para determinar si los alumnos contaban con el conocimiento previo y necesario para resolver un problema de reparto aplicando como herramienta resolutoria el uso de las fracciones. Los tiempos previstos para el desarrollo (tiempo estimado y real) de las producciones de los alumnos se ilustra en la siguiente figura.

Figura 61.

Cuadro 8.- tiempos previstos (estimado y real) en el desarrollo de las producciones de los alumnos

Etapa	Tiempo estimado (min.)	Tiempo real (min.)
Prueba diagnóstica	10	15
Secuencia tipo-A	40	45
Secuencia tipo-B	40	45

Fuente: Elaboración propia (2022).

Análisis de la prueba diagnóstica

Aunque el análisis realizado de la prueba diagnóstica y la situación de aprendizaje de la socialización no se llevó a cabo en la forma tradicional de evaluación (aciertos versus errores) por los objetivos pretendidos de la investigación –saber cuáles son los argumentos de los alumnos para diferenciar a la fracción de la división, que los alumnos asocien la repartición de un elemento (objeto matemático, cosa, alimento, etc.) como unidad– se realizó un análisis híbrido en cuanto a la medición de los parámetros en forma cuantitativa y cualitativa.

Para el caso de la prueba diagnóstica se tomó el número de reactivos (8 en total) para generar los parámetros establecidos y determinar si contaban con elementos o no para resolver un problema de reparto con la aplicación de las fracciones como herramienta resolutoria. Dando surgimiento a la tabla de la figura 62, para denominar o segmentar el nivel de conocimiento en los alumnos se establecieron criterios: excelente, bueno y regular. Pues se entregó los resultados a la maestra con una retroalimentación grupal e individual. Viendo así la viabilidad de no emplear el término malo o deficiente.

Figura 62.

Cuadro 9.- Elementos considerados en el diagnóstico de la prueba realizada.

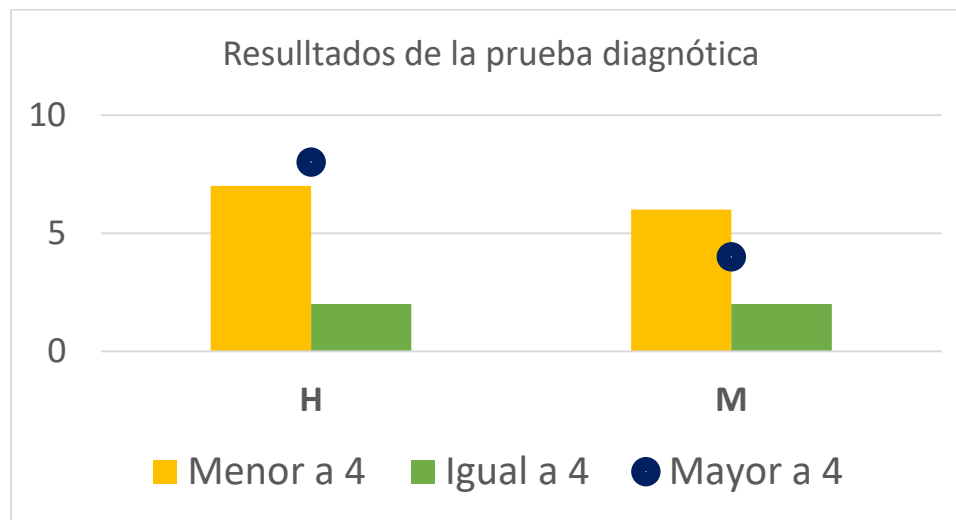
Ponderación	Aciertos	Criterio	Descripción
Mayor a 4	5 a 8	Excelente	Cuentan con los elementos para resolver un problema de reparto, a través del uso de las fracciones.
Igual a 4	4	Bueno	Tiene elementos necesarios para resolver un problema de reparto, pero no logran distinguir la fracción de la división.
Menor a 4	0 a 3	Regular	Carecen de elementos suficiente para resolver un problema de reparto.

Fuente: Elaboración propia (2022).

Con la ponderación y criterios se realizó un concentrado (tabla) en la que se incluyó el género a fin de tener una segmentación más específica para la interpretación de los datos, lo que permitió generar la gráfica (figura 63).

Figura 63.

Gráfico 1.- Resultados obtenidos de la prueba diagnóstica.



Fuente: Elaboración propia (2022).

Como se aprecia en la figura 63, los alumnos cuentan con elementos suficientes para llevar a cabo la resolución de un problema de reparto, con el uso de las fracciones. Se incluyó una pregunta detonadora, a fin de saber si contaban con elementos para diferenciar a la fracción versus la división... en la cual se vislumbró la carencia del mismo, pues al preguntar de manera explícita no todos los alumnos argumentaron de manera correcta.

Se puede apreciar (figura 64) donde se toman distintos ejemplos para constatar la variedad en sus respuestas e inferir que la pregunta es ambigua. De ahí las distintas respuestas. Sin embargo, se deseaba recurrir el uso de dicho conocimiento en su entorno -escuela y ciudad (en su día a día)- de acuerdo con Cordero et al (2015) -el uso del conocimiento matemático de donde vive y desarrolla (escuela, ciudad y trabajo)-.

Figura 64.

Respuestas de los alumnos, al contestar la prueba diagnóstica.

8. Cuándo empleas la división.

cuando tenemos que repartir un número igual a todos

9. Cuándo empleas a la fracción.

la fracción cuando se refiere a una parte del entero como el pollo una figura o un pastel o una tira de tela.

8. Cuándo empleas la división.

cuando haces operaciones o para repartir alguna cosa

9. Cuándo empleas a la fracción.

cuando quieres algo en partes iguales

8. Cuándo empleas la división.

se da en partes iguales

9. Cuándo empleas a la fracción.

es la cierta cantidad de algo

8. Cuándo empleas la división.

cuando necesito dividir las cosas en partes iguales

9. Cuándo empleas a la fracción.

cuando se compra carne verduras etc.

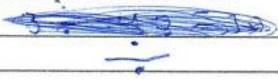
8. Cuándo empleas la división.

es un poco fácil a serlo

9. Cuándo empleas a la fracción.

un poco difícil

8. Cuándo empleas la división.



9. Cuándo empleas a la fracción.

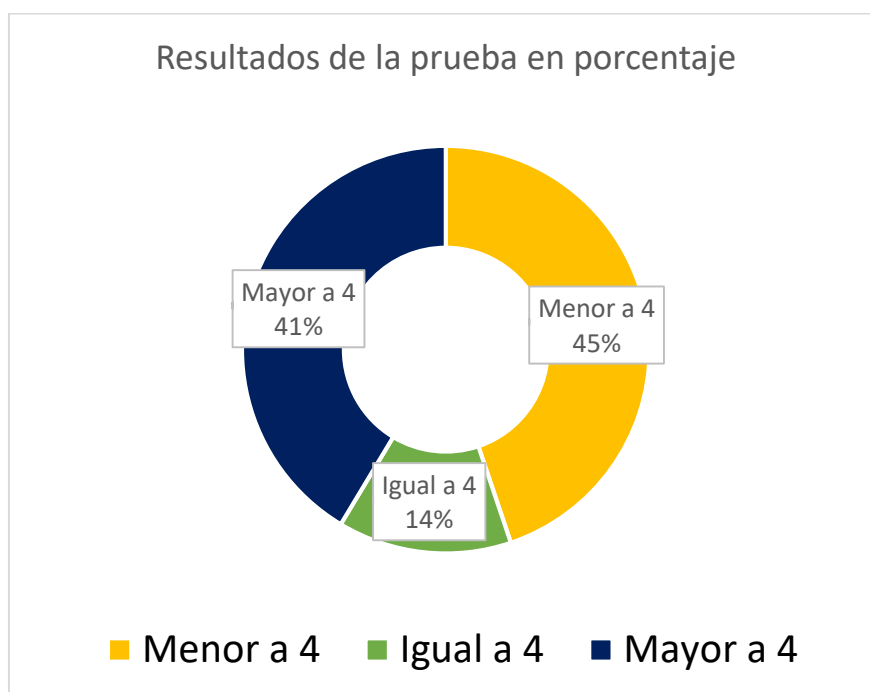
por x

Fuente: Producción de estudiantes 2023.

Sólo se logró obtener poco más de la tercera parte de los alumnos (41% de acuerdo a la figura 65) con el conocimiento necesario para resolver de manera mesurada las actividades. Es decir, contestar sino al 100% las respuestas correctas con los argumentos correctos; si con ideas más claras, precisas y sin divagar en sus argumentos.

Figura 65.

Gráfico 2.- Resultados obtenidos de la prueba diagnóstica, de acuerdo con el universo.



Fuente: Elaboración propia (2022).

Con lo anterior se concluye el análisis de la prueba diagnóstica y se complementa el cuadro de la figura 62 para integrar la información de manera sintetizada (criterios, alumnos y porcentaje).

Figura 66.

Cuadro 10.- Elementos considerados en el diagnóstico de la prueba realizada.

Ponderación	Aciertos	Criterio	Descripción	Hombres	Mujeres	%
Mayor a 4	5 a 8	Excelente	Cuentan con los elementos para resolver un problema de reparto, a través del uso de las fracciones.	47 % (8)	33 % (4)	41 % (12)
Igual a 4	4	Bueno	Tiene elementos necesarios para resolver un problema de reparto, pero no logran distinguir la fracción de la división.	12 % (2)	17 % (2)	14 % (4)
Menor a 4	0 a 3	Regular	Carecen de elementos suficiente para resolver un problema de reparto.	41 % (7)	50 % (6)	45 % (11)

Fuente: Elaboración propia (2022).

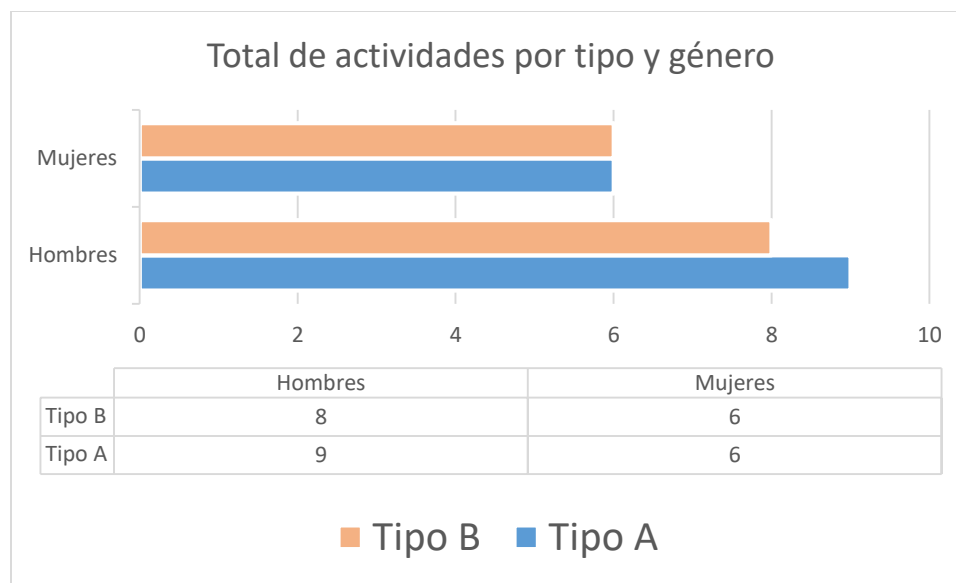
Análisis de las producciones de los alumnos

Se realizó un análisis de las producciones de los alumnos del primer año de secundaria y se integró de manera simultánea las actividades (Tipo A y B) para la primera se empleó imágenes satelitales y en la segunda figuras geométricas o pictogramas, para determinar con cuál elemento se realizaba un mejor desarrollo en las producciones de los alumnos.

Se estableció que las producciones de los alumnos fueran intercaladas; es decir, al primero le toco tipo A, al segundo tipo B, al tercero tipo A... de manera sucesiva. Lo que generó una homogeneidad en el número de actividades obtenidas, con un total de 15 producciones tipo A y 14 tipo B (figura 67).

Figura 67.

Gráfico 3.- Tipo de actividad desarrollada por estudiante, del universo total de alumnos.



Fuente: Elaboración propia (2022).

El número de reactivos por actividad fue de 15 y 13, respectivamente (tipo A y tipo B), se tomó el rango máximo de aciertos, siendo este de 8 y como mínimo el 0 a fin de crear una tabla para poder analizar los resultados; dichos parámetros son los establecidos en tabla de la figura siguiente.

Figura 68.

Cuadro 11.- Elementos considerados para el análisis de las producciones de los alumnos.

Ponderación	Aciertos	Criterio	Descripción
Mayor a 4	5 a 8	Excelente	El desarrollo de las actividades fue acorde a lo esperado, logran realizar la repartición, emplean el lenguaje fraccional; aunque no logran realizar la repartición acorde a lo solicitado. Proponen argumentos para distinguir la fracción de la división.
Igual a 4	4	Bueno	Las producciones de los alumnos en su mayoría emplean la división, aunque no asimilaron la repartición de manera correcta, emplean números enteros para indicar la cantidad de terreno que recibe cada uno. No logran argumentar cuál es la diferencia de fraccionar y dividir.
Menor a 4	0 a 3	Regular	Presentan dificultades para desarrollar lo solicitado en cada una de las actividades, no hacen el intento de representar la parte del terreno a través de un símil a la recta numérica. Consideren que empearon la división para resolver la actividad.

Fuente: Elaboración propia (2022).

Con lo anterior se realizó un concentrado de cada una de las actividades (tipo A y tipo B) de los alumnos, así como la ponderación correspondiente de cada producción del mismo. Se expondrán los resultados de ambas actividades en forma general con los criterios de la figura 68 a fin de ver qué tan factible fue emplear un problema real con imágenes reales versus un problema real con terrenos imaginarios; es decir, al sólo proponer el contorno del terreno a través de las figuras geométricas o pictogramas.

De acuerdo con la figura 69, se aprecia la disminución del porcentaje obtenido en el criterio "excelente" con respecto a la prueba diagnóstica; es decir, en la prueba diagnóstica se tenía el 41% de alumnos con el conocimiento necesario para el desarrollo de la actividad de manera correcta, pero al momento de llevar a cabo la secuencia, disminuye un 13%. Dicho porcentaje se incorpora en el tercer criterio, donde los alumnos presentan dificultades no sólo de distinguir a la fracción de la división; adicional a ello emplean la división para la repartición y no es correcta. Un dato curioso es que se mantuvo el porcentaje de los alumnos que tiene conocimientos para desarrollar la actividad, pero no son capaces de distinguir el uso (aplicación) de las fracciones versus la división en un problema de reparto.

Figura 69.

Cuadro 12.- Elementos considerados para el análisis de las producciones de los alumnos.

Ponderación	Aciertos	Criterio	Hombres	Mujeres	Porcentaje
Mayor a 4	5 a 8	Excelente	4	4	28 %
Igual a 4	4	Bueno	2	2	14 %
Menor a 4	0 a 3	Regular	11	6	59 %

Fuente: Elaboración propia (2022).

Para ver el contraste con mayor claridad se retoma el resultado de la prueba diagnóstica y el resultado de las producciones de los alumnos de primero de secundaria en el desarrollo de la actividad (situación escolar de la socialización) con la siguiente figura.

Figura 70.

Cuadro 13.- Criterios para el análisis de las producciones y el resultado obtenido por los alumnos.

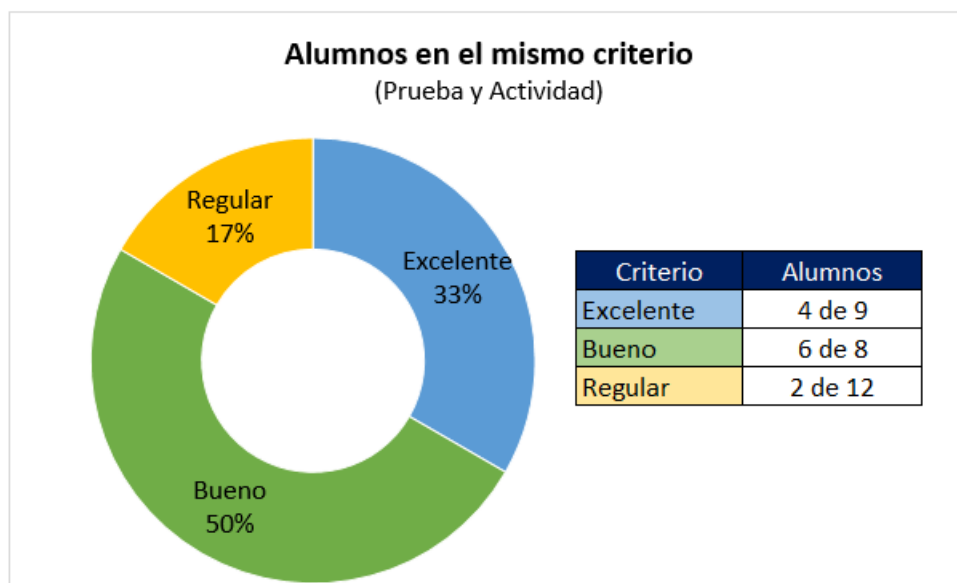
Ponderación	Aciertos	Criterio	Descripción	Porcentaje Prueba	Porcentaje actividad
Mayor a 4	5 a 8	Excelente	Cuentan con los elementos para resolver un problema de reparto, a través del uso de las fracciones.	41 %	28 %
Igual a 4	4	Bueno	Tiene elementos necesarios para resolver un problema de reparto, pero no logran distinguir la fracción de la división.	14 %	14 %
Menor a 4	0 a 3	Regular	Carecen de elementos suficiente para resolver un problema de reparto.	45 %	59 %

Fuente: Elaboración propia (2022).

Al ver la disminución en el criterio “excelente” se realizó un comparativo para determinar cuántos de los alumnos se habían mantenido en el mismo parámetro (excelente, bueno o regular), obteniendo así los siguientes resultados (figura 71) en ambas etapas (1.- prueba diagnóstica y 2.- desarrollo de la actividad).

Figura 71.

Resultado de los alumnos que mantuvieron en el mismo criterio.



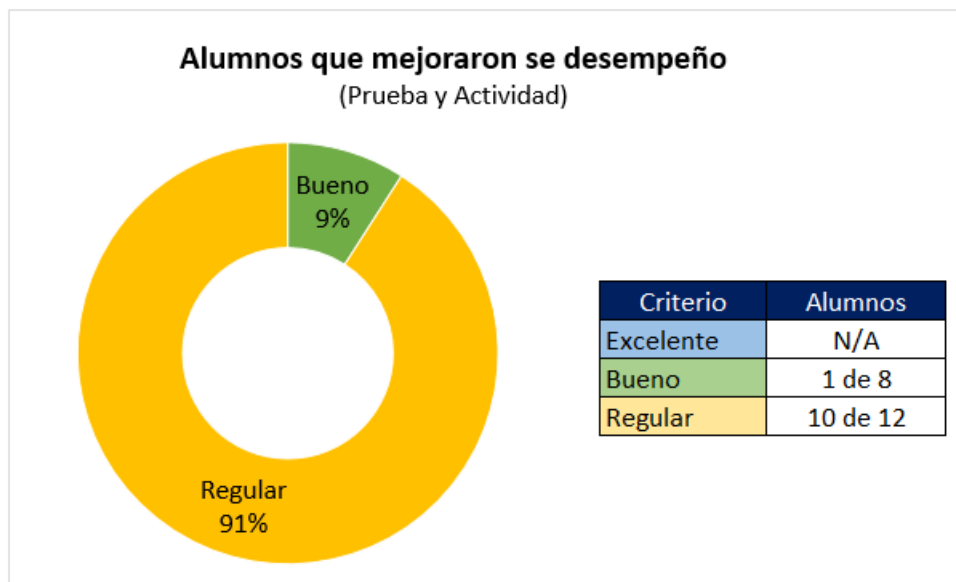
Fuente: Elaboración propia (2022).

De acuerdo a la figura 71, vemos una disminución considerable en el rango (criterio) denominado “bueno”; es decir, el conocimiento previo no fue lo suficiente para resolverla actividad. Se puede inferir entonces, que dicho saber matemático no estaba asimilado al 100%, tienen nociones porque lo vieron; pero no interiorizaron el conocimiento adquirido sobre las fracciones durante su aprendizaje en los grados de quinto y sexto de primaria –durante la pandemia de sanitaria del Covid-19–.

Pero no todo fue malo, teniendo la información del tabulado; se realizó el procedimiento inverso, cuántos de los alumnos que se encontraban en un criterio inferior (bueno y regular) durante el desarrollo de la actividad lograron mejorar (figura 72).

Figura 72.

Resultado de los alumnos que mejoraron de criterio en al realizar la actividad.



Fuente: Elaboración propia (2022).

Se puede inferir como primer punto, que los alumnos no tuvieron tiempo suficiente para resolver la prueba diagnóstica, pero al momento de tener mayor tiempo para la resolución de la secuencia; pueden analizar de manera más profunda y, por ende, tienen un mejor desempeño en el desarrollo de la secuencia; a tal grado de mostrar contar con el conocimiento necesario para resolver problemas que impliquen reparto. El conocimiento adquirido respecto a las fracciones es asimilado con mayor grado; no fue memorizado, existió esa adhesión del conocimiento.

Otra deducción –con cierta incertidumbre– es que las preguntas aplicadas en la prueba diagnóstica fueron suficientes para generar una reflexión en el alumno, que interiorizó y al momento de resolver la actividad impacto en el desarrollo del mismo en forma positiva.

Respecto a qué actividad fue mejor, a través de los resultados obtenidos (figura 73), se puede inferir por medio de las diferencias significativas y el análisis de los datos muestra que, si bien existe un mejor desempeño en emplear las figuras geométricas o pictogramas, se debe a la asimilación por el discurso matemático escolar vigente.

Pero la aplicación del conocimiento en situaciones reales y la resolución del mismo, siguen siendo una carencia real en los alumnos de primaria. Se puede atribuir al dME, pero también es cierto que, se justifica por las medidas que se tomaron durante a contingencia sanitaria del Covid-19.

Figura 73.

Cuadro 13.- Resultado de los alumnos en relación a las actividades tipo A y Tipo B.

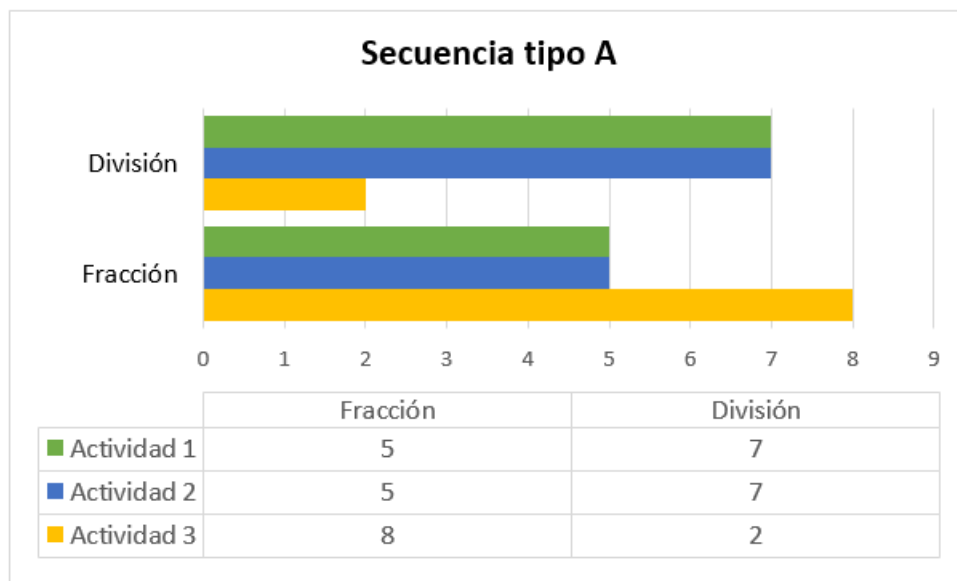
Ponderación	Aciertos	Criterio	Descripción	Hombres		Mujeres	
				Tipo A	Tipo B	Tipo A	Tipo B
Mayor a 4	5 a 8	Excelente	El desarrollo de las actividades fue acorde a lo esperado, logran realizar la repartición, emplean el lenguaje fraccional; aunque no logran realizar la repartición acorde a lo solicitado. Proponen argumentos para distinguir la fracción de la división	1	3	0	4
Igual a 4	4	Bueno	Las producciones de los alumnos en su mayoría emplean la división, aunque no asimilaron la repartición de manera correcta, emplean números enteros para indicar la cantidad de terreno que recibe cada uno. No logran argumentar cuál es la diferencia de fraccionar y dividir,	0	2	0	2
Menor a 4	0 a 3	Regular	Presentan dificultades para desarrollar lo solicitado en cada una de las actividades, no hacen el intento de representar la parte del terreno a través de un símil a la recta numérica. Consideren que empearon la división para resolver la actividad.	8	3	6	0

Fuente: Elaboración propia (2022).

En cada una de las secuencias (tipo A y tipo B) se cuestionó al estudiante mediante pregunta directa ¿qué empleaste al repartir el terreno? La división / la fracción, además de solicitar argumentar su respuesta. Los resultados son contrastantes al desarrollo de las producciones; en la actividad “tipo A” sólo hubo un estudiante en el segmento de excelente, mientras que en el tipo B existieron 4 alumnos en el mismo rubro. Pero la percepción de los alumnos respecto al recurso matemático empleado (fracción o división) la mayoría de alumnos –por diferencia de uno- consideran a la fracción y en el “tipo B” la mayoría –diferencia de dos alumnos- consideran a la división durante el desarrollo de la secuencia (figura 74 y 75).

Figura 74.

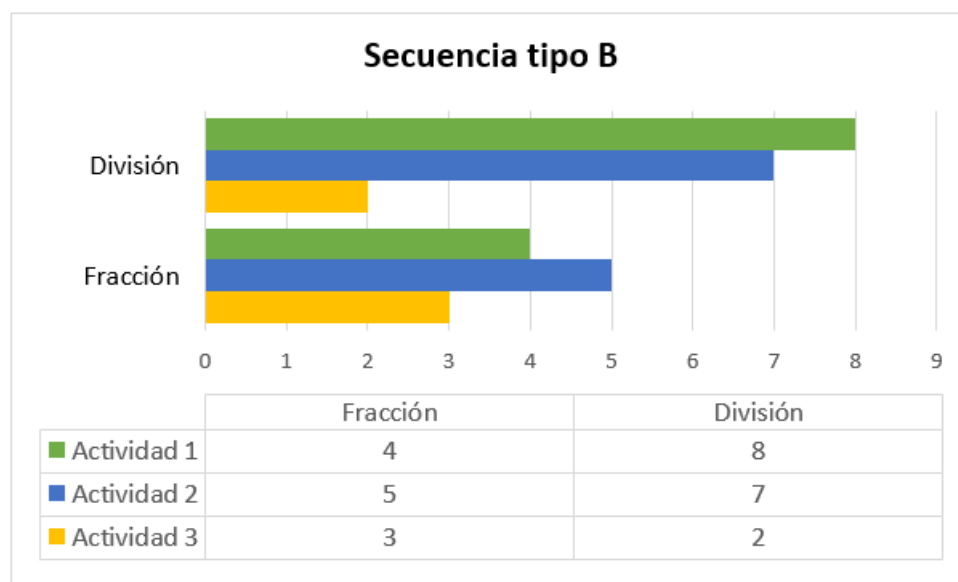
Relación de alumno respecto al uso de la fracción o división en la resolución del problema de reparto.



Fuente: Elaboración propia (2022).

Figura 74.

Relación de alumno respecto al uso de la fracción o división en la resolución del problema de reparto.



Fuente: Elaboración propia (2022).

Para determinar la tendencia de las respuestas de los alumnos en la secuencia (tipo A y tipo B) se calculó el promedio, dicha diferencia es mínima. Ya que sólo se contabilizó a quienes contestaron la pregunta (figura 76).

Figura 76.

Cuadro 14.- Respuesta de los alumnos en la resolución de la secuencia tipo A y Tipo B.

Reparto por	Tipo A		Tipo B	
	ABS	%	ABS	%
Fracción	6	50	4	33
División	5	44	6	47

Fuente: Elaboración propia (2022).

Producciones de los alumnos

A continuación, se ilustran algunas producciones de los alumnos del primer año de secundaria; se toman ejemplos en donde existió un buen desarrollo, así como los casos donde fue el idóneo. Para dar sustento al análisis realizado en los apartados de la prueba diagnóstica y producción de los alumnos, por tal motivo sólo se anexan; más no se profundiza –debido a que se realizó previamente.

Figura 77.

Producción de los alumnos de la prueba diagnóstica aplicada.

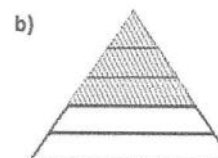
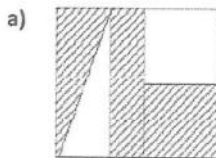
7. Es válido decir que ambas figuras representan $3/5$.



Argumenta:

Si por que son los mismos

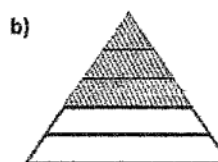
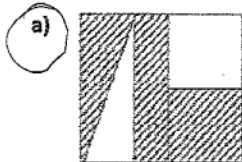
7. Es válido decir que ambas figuras representan $3/5$.



Argumenta:

no por que el primero tiene diferentes divisiones de sus partes.

7. Es válido decir que ambas figuras representan $3/5$.



Argumenta:

el a) parece correcto por 3 están pintado

7. Es válido decir que ambas figuras representan $3/5$.



Argumenta:

si porque son mismos

Fuente: Producción de estudiantes 2023.

Figura 78.

Producción de los alumnos de la actividad 1, en la secuencia tipo A.

Una familia desea repartir **un terreno** a sus **tres hijos** de la siguiente manera: al primer hijo le corresponde la mayor parte del terreno y el menor tendrá el terreno más pequeño. En la siguiente imagen se visualiza el terreno a repartir.



i. Qué cantidad de terreno recibe cada hijo.

Hijo	Terreno
Manuel (Mayor)	4 m
Erika	8 m
David (Menor)	el terreno pequeño 20 m

ii. Realiza una representación del terreno que recibe cada hijo.



Una familia desea repartir **un terreno** a sus **tres hijos** de la siguiente manera: al primer hijo le corresponde la mayor parte del terreno y el menor tendrá el terreno más pequeño. En la siguiente imagen se visualiza el terreno a repartir.



i. Qué cantidad de terreno recibe cada hijo.

Hijo	Terreno
Manuel (Mayor)	$\frac{2}{3}$
Erika	$\frac{1}{3}$
David (Menor)	$\frac{1}{3}$

ii. Realiza una representación del terreno que recibe cada hijo.

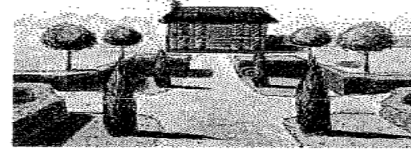
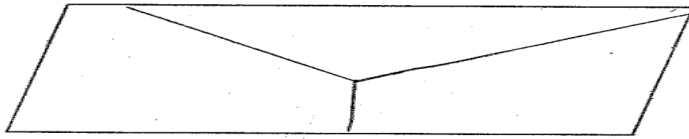


Fuente: Producción de estudiantes 2023.

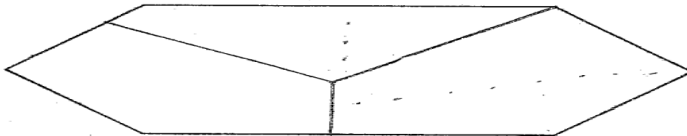
Figura 79.

Producción de los alumnos de la actividad 1, en la secuencia tipo B.

¿Cómo deben delimitar el terreno los hermanos?



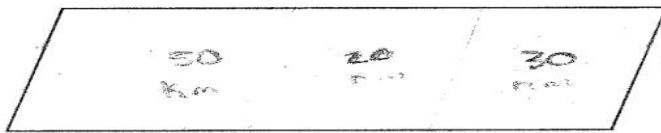
Si la forma del terreno fuera distinta, cómo de limitarías el terreno.



Anota en la siguiente tabla la cantidad de terreno que tiene cada uno (considera una hectárea el terreno total)

Hermano	Cantidad de Terreno (figura 1)	Cantidad de Terreno (figura 2)
Mayor	6.0 cm	7.8 cm
Menor	4.5 cm	4.0 cm
Padres	7.8 cm	4.5 cm

¿Cómo deben delimitar el terreno los hermanos?



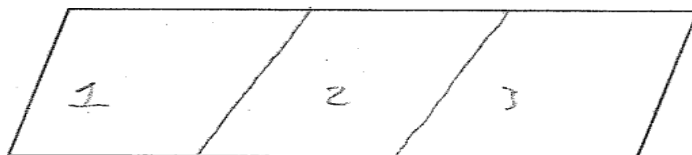
Si la forma del terreno fuera distinta, cómo de limitarías el terreno.



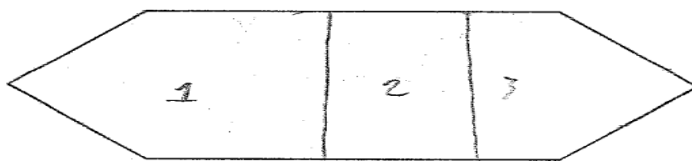
Anota en la siguiente tabla la cantidad de terreno que tiene cada uno (considera una hectárea el terreno total)

Hermano	Cantidad de Terreno (figura 1)	Cantidad de Terreno (figura 2)
Mayor	50 km	35 km
Menor	20 km	15 km
Padres	30 km	30 km

¿Cómo deben delimitar el terreno los hermanos?



Si la forma del terreno fuera distinta, cómo de limitarías el terreno.



Anota en la siguiente tabla la cantidad de terreno que tiene cada uno (considera una hectárea el terreno total)

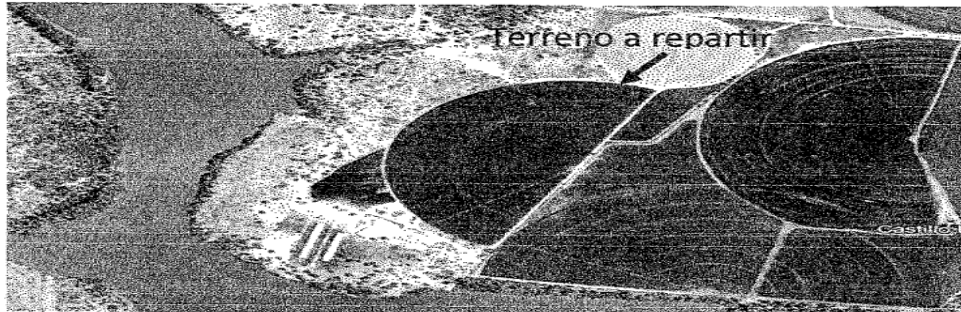
Hermano	Cantidad de Terreno (figura 1)	Cantidad de Terreno (figura 2)
Mayor		
Menor		
Padres		

Fuente: Producción de estudiantes 2023.

Figura 80.

Producción de los alumnos de la actividad 2, en la secuencia tipo A.

Una familia desea repartir una hectárea a sus tres hijos de la siguiente manera: al mayor le corresponde una parte más grande del terreno y el menor el terreno más pequeño. En la siguiente imagen visualiza el terreno a repartir.



i. Qué cantidad de terreno recibe cada hijo.

Hijo	Terreno
Manuel (Mayor)	$\frac{1}{3}$
Erika	$\frac{1}{4}$
David (Menor)	$\frac{1}{5}$

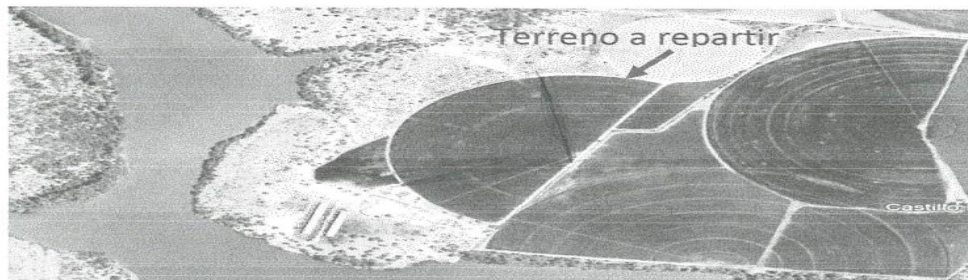
ii. Realiza una representación del terreno que recibe cada hijo.



iii. Describe de manera breve cómo realizarte la repartición del terreno.

siendo una fracción simple

Una familia desea repartir una hectárea a sus tres hijos de la siguiente manera: al mayor le corresponde una parte más grande del terreno y el menor el terreno más pequeño. En la siguiente imagen visualiza el terreno a repartir.



i. Qué cantidad de terreno recibe cada hijo.

Hijo	Terreno
Manuel (Mayor)	$\frac{1}{3}$
Erika	$\frac{1}{3}$
David (Menor)	$\frac{1}{3}$

ii. Realiza una representación del terreno que recibe cada hijo.



iii. Describe de manera breve cómo realizarte la repartición del terreno.

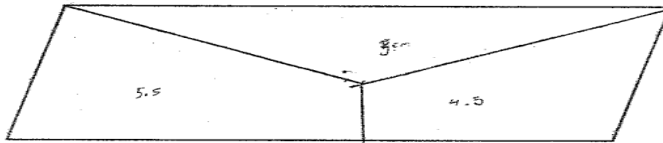
por que le tocava una parte del terreno y lo repartir en tres partes.

Fuente: Producción de estudiantes 2023.

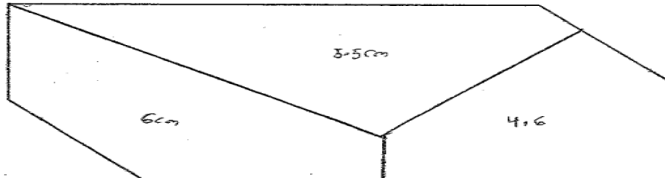
Figura 81.

Producción de los alumnos de la actividad 2, en la secuencia tipo B.

¿Cómo deben delimitar el terreno los tres amigos?



Si la forma del terreno fuera distinta, cómo de limitarías el terreno



Anota en la tabla la cantidad de terreno que tiene cada uno (considera una hectárea el terreno total)

Personas	Cantidad de Terreno (figura 1)	Cantidad de Terreno (figura 2)
Amigo 1	7.5 cm	4.6
Amigo 2	5.0 cm	5.5
Amigo 3	5.5 cm	6.0 cm

Qué empleaste para repartir el terreno.

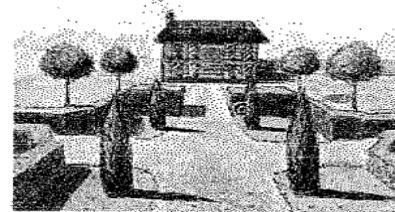
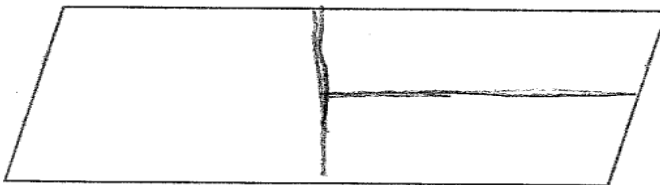
a) La división

La fracción

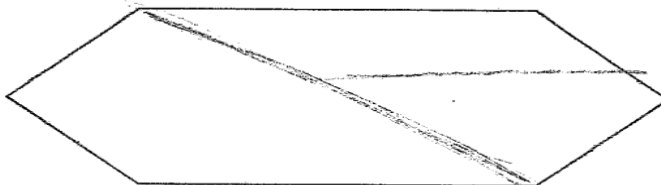
Explica de manera breve tu respuesta (por qué).

para que se lo usen la fracción

¿Cómo deben delimitar el terreno los hermanos?



Si la forma del terreno fuera distinta, cómo de limitarías el terreno.



Anota en la siguiente tabla la cantidad de terreno que tiene cada uno (considera una hectárea el terreno total)

Hermano	Cantidad de Terreno (figura 1)	Cantidad de Terreno (figura 2)
Mayor	3/4	1/5
Menor	1/2	3/4
Padres	3/5	1/2

Qué empleaste para repartir el terreno.

a) La división

La fracción

Explica de manera breve tu respuesta (por qué).

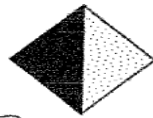
dividiendo mitad y mitad

Fuente: Producción de estudiantes 2023.

Figura 82.

Producción de los alumnos de la actividad 3, en la secuencia tipo A.

4. La siguiente imagen, qué está representado.



a) La división

b) La fracción

c) Ambas

Argumenta tu respuesta.

5. De la siguiente imagen qué opción corresponde a la relación de hombres, respecto a las mujeres.



a) 6 hombres / 3 mujeres b) 6/9 son hombres y 3/9 son mujeres

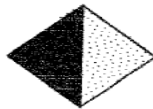
Argumenta tu respuesta

Porque tres mujeres aparecen

¿Cuántos hombres y mujeres hay? mujeres

6 hombres

4. La siguiente imagen, qué está representado.



a) La división

b) La fracción

c) Ambas

Argumenta tu respuesta.

mi respuesta es ambas

5. De la siguiente imagen qué opción corresponde a la relación de hombres, respecto a las mujeres.



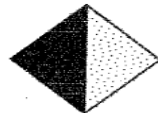
a) 6 hombres / 3 mujeres b) 6/9 son hombres y 3/9 son mujeres

Argumenta tu respuesta

Porque hombre hay 6 hombres y 3 mujeres

¿Cuántos hombres y mujeres hay?

4. La siguiente imagen, qué está representado.



a) La división

b) La fracción

c) Ambas

Argumenta tu respuesta.

el un Petagala

5. De la siguiente imagen qué opción corresponde a la relación de hombres, respecto a las mujeres.



a) 6 hombres / 3 mujeres b) 6/9 son hombres y 3/9 son mujeres

Argumenta tu respuesta

6 hombre 3 mujeres

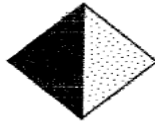
¿Cuántos hombres y mujeres hay?

Fuente: Producción de estudiantes 2023.

Figura 83.

Producción de los alumnos de la actividad 3, en la secuencia tipo B.

4. De la siguiente imagen, qué está representado.



a) La división

b) La fracción

c) Ambas

Argumenta tu respuesta.

Por que la figura esta partida

5. De la siguiente imagen qué opción corresponde a la relación de hombres, respecto a las mujeres.



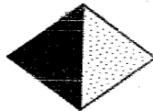
¿Cuántos hombres y mujeres hay?

a) 6 hombres / 3 b) 6/9 son hombres y 3/9 son mujeres

Argumenta tu respuesta

Por que hay mas hombres en la imagen

4. De la siguiente imagen, qué está representado.



a) La división

b) La fracción

c) Ambas

Argumenta tu respuesta.

esta a la mitad

5. De la siguiente imagen qué opción corresponde a la relación de hombres, respecto a las mujeres.



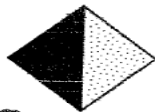
¿Cuántos hombres y mujeres hay?

a) 6 hombres / 3 b) 6/9 son hombres y 3/9 son mujeres

Argumenta tu respuesta

esta en fraccion y tambien cuantos hay en total

4. De la siguiente imagen, qué está representado.



a) La división

b) La fracción

c) Ambas

Argumenta tu respuesta.

Por en la figura a $\frac{1}{2}$

5. De la siguiente imagen qué opción corresponde a la relación de hombres, respecto a las mujeres.



¿Cuántos hombres y mujeres hay?

a) 6 hombres / 3 b) 6/9 son hombres y 3/9 son mujeres

Argumenta tu respuesta

Por que ay 6 hombres y 3 mujeres

Fuente: Producción de estudiantes 2023.

Capítulo 5.- Conclusiones

El acierto o no de las secuencias (tipo A y tipo B) para determinar cuáles son los significados que los alumnos tienen sobre las fracciones, sus representaciones o cómo distinguir la fracción de la división. Para abordar lo anterior, se realizó un diseño de una secuencia -caso práctico- para los estudiantes a fin de recuperar el origen de dicho conocimiento matemático (las fracciones) extrapolando a una realidad contemporánea y fundamentada con el análisis histórico-epistemológico realizado. Por ejemplo, los Egipcios realizaban la repartición de los alimentos (granos de trigo y cebada), así como la medición de tierras; el primero era importante no sólo para saber cuánto repartir, inclusive predecir para determinar cuánto les alcanzaba la cosecha (cuántas familias podrían alimentarse o cuántas tierras deberían cosechar para obtener cierta cantidad de granos) recordando que tenían periodos de sequía y era importante garantizar los alimentos.

Los resultados de la puesta en escena (lo ideal) para realizar un análisis objetivo de la propuesta ad hoc, se debe asegurar un enfoque crítico para resolver problemas apegados a la realidad versus problemas reales con elementos matemáticos. Para ello, es necesario mantener las mismas preguntas y sólo cambiar las imágenes satelitales por las figuras geométricas. Aunque al final del análisis se vislumbró que era optimo no cambiar el tipo de preguntas entre una actividad y otra a fin de poder realizar un comparativo más objetivo.

Por otra parte, sobre el objetivo específico de "lograr que los alumnos de secundaria asimilen el concepto de fracción a través de un problema de reparto" se puede considerar cumplido. Esto de acuerdo con el análisis realizado en la producción de los alumnos en la secuencia "tipo B" ya que la mayoría (47 %) consideró a la fracción como artilugio matemático para resolver el problema de reparto.

Además, de acuerdo con la investigación socioepistemológica realizada; se debe enseñar (sin importar el enfoque teórico o pedagógico) la existencia de las distintas maneras de representar a la fracción y cómo se da un significado específico de acuerdo a dicha representación. Para que el alumno pueda argumentar de acuerdo a su criterio cuándo se emplea la fracción, el por qué se utiliza en el día a día. Sin importar el nombre de la representación (geométrico, pictograma o figural, símbolos alfabéticos o literal, por citar algunos).

Las representaciones están asociadas de manera directa con el significado (usos) que se dan a las fracciones, pero no todos los significados propuestos por Fandiño (2009), son aplicables en el día a día del conocimiento adquirido en la escuela. De manera particular las fracciones vistas con el enfoque de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud y la conceptualización de la fracción como signo-objeto de Duval no pueden ser aplicables en el entorno escolar, salvo en el académico y de manera particular para el investigador.

Sin importar las reformas en el sector educativo, se debe realizar un verdadero rediseño en el discurso escolar de México enfocado en los libros de texto oficiales. Ya que no se pueden utilizar los mismos ejercicios esperando aprendizajes distintos y acordes con el plan y programa de estudios vigente. Es una realidad que se requiere y consume tiempo hacer un verdadero cambio, pero debe ser más importante el aprendizaje de las matemáticas (bases para el estudio posterior en los niveles educativos subsecuentes) para transformar nuestra sociedad.

Bibliografía

- Acevedo, D., López, M., Guerrero, Y., & Morales, L. (2013). La fracción parte - todo a través de una mirada gráfica. *Educación científica y tecnológica*,.
- Alva, M. (2018). *Fortalecimiento de la conceptualización y conocimiento de las fracciones en alumnos a través de situaciones de aprendizaje [Tesina de Especialidad]*. Universidad Autónoma de Chiapas.
- Calderón, M., & Quiroz, K. (2020). *Formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones de los estudiantes del cuarto de primaria [tesis de maestría no publicada]*. Huancavélica: Perú. <https://es.scribd.com/document/593922225/TESIS-FED-2020-CALDERON-CASTANEDA#>
- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. ciudad de México: Gedisa.
- Castro, M., González, M., Flores, S., Ramírez, O., Cruz, M., & Fuentes, M. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I. *Entreciencias: diálogos en la Sociedad del Conocimiento*, 5(13), 1-23. <https://www.redalyc.org/journal/4576/457651376007/457651376007.pdf>
- Codero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., & Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona, España: gedisa.
- Covian, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la cultura Maya [Tesis de maestría no publicada]*. México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Cuarez, M., & García, K. (2014). *LENGUAJE MATEMÁTICO SIMBÓLICO ESCRITO USADO POR ESTUDIANTES DE 1ER AÑO DIVERSIFICADO DE EDUCACIÓN GENERAL*. [Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad de Carabobo].

- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones, semiótica y sentido. *Número especial*, págs. 177-195. Relime. <http://funes.uniandes.edu.co/9706/>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2001). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Cali: Universidad del Valle.
- Fandiño, I. (2009). *LAS FRACCIONES: Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogota: MAGISTERIO.
- Flores, R. (2010). *SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LA NOCIÓN DE FRACCIÓN EN LA ESCUELA SECUNDARIA*. D.F: [tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional].
- García, K., & Cuarez, M. (2014). *LENGUAJE MATEMÁTICO SIMBÓLICO ESCRITO USADO POR ESTUDIANTES DE 1ER AÑO DIVERSIFICADO DE EDUCACIÓN GENERAL*. [Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad de Carabobo].
- Gómez, A., & Pérez, A. (2016). TRES ENFOQUES PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES. *Redalyc*, 1-10.
- Hernández, M. (2018). *Reformas Educativas en México (1917-2016)*. Academia Española.
- Krings, H., Baumgartner, H., & Wild, C. (1979). *Conceptos fundamentales de filosofía*. España: Herder.
- Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Llinares, S., & Sánchez, V. (1997). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. 97-120. Granada, España: Comares.

- Marshall, A., Castro, A., & Canty, R. (2010). Discover strategies to engage young math students in competently using multiple representations. *The National Council of Teachers of Mathematics*, 38-47.
- Martínez, M. (2008). *Diferentes representaciones en matemática: una entrevista*. Palmares, Costa Rica. <https://www.cientec.or.cr/matematica/2010/ponenciasVI-VII/Margot-2.pdf>
- Montiel, G., & Buendia, G. (2013). *Un esquema metodológico para la Investigación Socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones*. México: Lectorum.
- Orey, D. (2005). *Mathematics as a Universal Language or Mathematics as a Collection of Dialets*. http://www.csus.edu/indiv/o/oreyd/ACP.htm_files/Alg.html
- Pecharromás, C. (2013). NATURALEZA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS: REPRESENTACIÓN Y SIGNIFICADO. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, 31(3), 121-134. <https://core.ac.uk/download/pdf/38990814.pdf>
- Piaget, J. (1998). *Introducción a Piaget: Pensamiento, Aprendizaje y Enseñanza*. México: Longman, S.A.
- Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Pulpón, A. (2012). *Matematicas.uclm.es*. http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf
- Real Academia Española. (2022). *Real Academia Española*. <https://dle.rae.es/representaci%C3%B3n>
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *4*(1), 1-14.
- Rizo, C., & Campistrous, L. (2014). Una experiencia sobre el tratamiento de las fracciones en la escuela primaria Cubana. *XV Congreso de enseñanza y*

aprendizaje de las matemáticas: El sentido de las matemáticas. Matemáticas con sentido (págs. 518-524). Baeza: Thales.

Rojas, P. (2012). Sistemas de representación y aprendizaje en las matemáticas. *Revista digital Matemática*, 12(1), 1-5. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v12i1.1686>.

Schmelkes, S. (2015). *Reforma de la educación*. <https://archivos.juridicas.unam.mx/www/bjv/libros/11/5084/18.pdf>

Secretaría de Educación Pública. (2009). *Planes de estudio*. Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Planes de estudio*. Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Planes de estudio*. Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (2019). *Planes de estudio*. Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2022). *CONALITEG*. https://www.conaliteg.sep.gob.mx/primaria_2020.html

Serrano, E. (2000). Etimología de algunos términos matemáticos. *SUMA*, 87-96. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/35/SUMA_35.pdf

Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas, en los últimos 10 mil años*. Barcelona: CRITICA.

Valdemoros, M. &. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. 21(1), 29-61.

Anexos




Mapa Curricular completo del Plan de Estudios 2011

MAPA CURRICULAR DE LA EDUCACIÓN BÁSICA 2011

ESTÁNDARES CURRICULARES ¹	1 ^{er} PERIODO ESCOLAR			2 ^o PERIODO ESCOLAR			3 ^{er} PERIODO ESCOLAR			4 ^o PERIODO ESCOLAR		
	CAMPOS DE FORMACIÓN PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA	Preescolar			Primaria						Secundaria	
	1°	2°	3°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	1°	2°	3°
LENGUAJE Y COMUNICACIÓN	Lenguaje y comunicación			Español						Español I, II y III		
			Segunda Lengua: Inglés ²	Segunda Lengua: Inglés ²						Segunda Lengua: Inglés I, II y III ²		
PENSAMIENTO MATEMÁTICO	Pensamiento matemático			Matemáticas						Matemáticas I, II y III		
EXPLORACIÓN Y COMPRENSIÓN DEL MUNDO NATURAL Y SOCIAL	Exploración y conocimiento del mundo			Exploración de la Naturaleza y la Sociedad			Ciencias Naturales ³			Ciencias I (énfasis en Biología)	Ciencias II (énfasis en Física)	Ciencias III (énfasis en Química)
	Desarrollo físico y salud						La Entidad donde Vivo			Geografía ³		
				Historia ³								
Desarrollo personal y social			Formación Cívica y Ética ⁴						Asignatura Estatal			
DESARROLLO PERSONAL Y PARA LA CONVIVENCIA	Desarrollo personal y social			Formación Cívica y Ética ⁴						Formación Cívica y Ética I y II		
	Expresión y apreciación artísticas			Educación Física ⁴						Tutoría		
	Expresión y apreciación artísticas			Educación Artística ⁴						Educación Física I, II y III		
	Expresión y apreciación artísticas			Educación Artística ⁴						Artes I, II y III (Música, Danza, Teatro o Artes Visuales)		

Mapa (primera parte) curricular del plan de estudios 2017

MAPA CURRICULAR

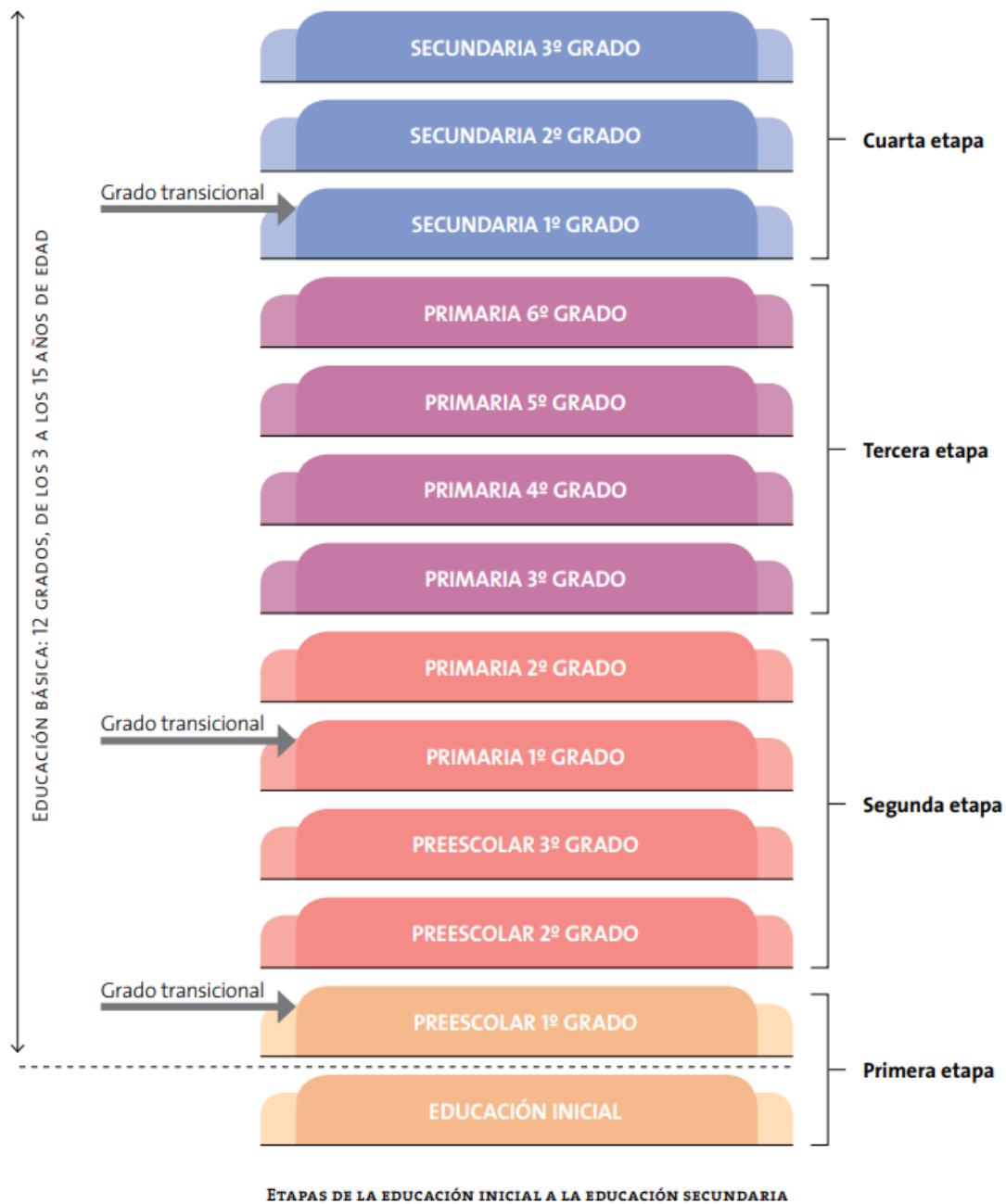
COMPONENTE CURRICULAR		Nivel educativo					
		PREESCOLAR			PRIMARIA		
		Grado escolar					
		1°	2°	3°	1°	2°	3°
 <p>Formación académica</p>	CAMPOS Y ASIGNATURAS	Lenguaje y Comunicación			Lengua Materna (Español/Lengua Indígena)		
					Segunda Lengua (Español/Lengua Indígena)		
				Inglés	Lengua Extranjera (Inglés)		
		Pensamiento Matemático			Matemáticas		
		Exploración y Comprensión del Mundo Natural y Social			Conocimiento del Medio		Ciencias Naturales y Tecnología
 <p>Desarrollo personal y social</p>	ÁREAS	Artes			Artes		
		Educación Socioemocional			Educación Socioemocional		
		Educación Física			Educación Física		
 <p>Autonomía curricular*</p>	ÁMBITOS	Ampliar la formación académica			Ampliar la formación académica		
		Potenciar el desarrollo personal y social			Potenciar el desarrollo personal y social		
		Nuevos contenidos relevantes			Nuevos contenidos relevantes		
		Conocimientos regionales			Conocimientos regionales		
		Proyectos de impacto social			Proyectos de impacto social		

Mapa (segunda parte) curricular del plan de estudios 2017

MAPA CURRICULAR

Nivel educativo					
PRIMARIA			SECUNDARIA		
Grado escolar					
4°	5°	6°	1°	2°	3°
Lengua Materna (Español/Lengua Indígena)			Lengua Materna (Español)		
Segunda Lengua (Español/Lengua Indígena)					
Lengua Extranjera (Inglés)			Lengua Extranjera (Inglés)		
Matemáticas			Matemáticas		
Ciencias Naturales y Tecnología			Ciencias y Tecnología:		
			Biología	Física	Química
Historia			Historia		
Geografía			Geografía		
Formación Cívica y Ética			Formación Cívica y Ética		
Artes			Artes		
Educación Socioemocional			Tutoría y Educación Socioemocional		
Educación Física			Educación Física		
Ampliar la formación académica			Ampliar la formación académica		
Potenciar el desarrollo personal y social			Potenciar el desarrollo personal y social		
Nuevos contenidos relevantes			Nuevos contenidos relevantes		
Conocimientos regionales			Conocimientos regionales		
Proyectos de impacto social			Proyectos de impacto social		

Etapas o periodos escolares del plan de estudios 2017



Aprendizajes esperados del tercer grado de primaria, del plan y programa de estudios 2011, bloque I y II.

Bloque I

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> Produce, lee y escribe números hasta de cuatro cifras. Resuelve problemas que implican el cálculo mental o escrito de productos de dígitos. Resuelve problemas que implican la lectura y el uso del reloj. 	<p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> Uso de la descomposición de números en unidades, decenas, centenas y unidades de millar para resolver diversos problemas. <p>PROBLEMAS ADITIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Desarrollo de procedimientos mentales de resta de dígitos y múltiplos de 10 menos un dígito, etc., que faciliten los cálculos de operaciones más complejas. <p>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Desarrollo de estrategias para el cálculo rápido de los productos de dígitos necesarios al resolver problemas u operaciones. Uso de caminos cortos para multiplicar dígitos por 10 o por sus múltiplos (20, 30, etcétera). 	<p>MEDIDA</p> <ul style="list-style-type: none"> Lectura y uso del reloj para verificar estimaciones de tiempo. Comparación del tiempo con base en diversas actividades. 	<p>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Representación e interpretación en tablas de doble entrada, o pictogramas de datos cuantitativos o cualitativos recolectados en el entorno.

Bloque II

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> Resuelve problemas que implican multiplicar mediante diversos procedimientos. 	<p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> Relación de la escritura de los números con cifras y su nombre, a través de su descomposición aditiva. <p>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Resolución de multiplicaciones cuyo producto sea hasta del orden de las centenas mediante diversos procedimientos (como suma de multiplicaciones parciales, multiplicaciones por 10, 20, 30, etcétera). 	<p>MEDIDA</p> <ul style="list-style-type: none"> Estimación de longitudes y su verificación usando la regla. 	<p>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Lectura de información contenida en gráficas de barras.

Aprendizajes esperados del tercer grado de primaria, del plan y programa de estudios 2017

MATEMÁTICAS. PRIMARIA. 3º		
EJES	Temas	Aprendizajes esperados
NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN	Número	<ul style="list-style-type: none"> • Lee, escribe y ordena números naturales hasta 10 000. • Usa fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.
	Adición y sustracción	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas de suma y resta con números naturales hasta 10 000. Usa el algoritmo convencional para restar. • Calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas con números hasta de tres cifras. • Resuelve problemas de suma y resta con fracciones del mismo denominador (medios, cuartos y octavos).
	Multiplicación y división	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas de multiplicación con números naturales cuyo producto sea hasta de tres cifras. • Calcula mentalmente multiplicaciones de números de una cifra por números de una cifra y por múltiplos de 10, así como divisiones con divisores y cocientes de una cifra. • Resuelve problemas de división con números naturales hasta 100, con divisores de una cifra (sin algoritmo).
FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	Ubicación espacial	<ul style="list-style-type: none"> • Representa y describe oralmente la ubicación de seres u objetos, y de trayectos para ir de un lugar a otro en su entorno cercano (aula, casa, escuela).
	Figuras y cuerpos geométricos	<ul style="list-style-type: none"> • Construye y analiza figuras geométricas, en particular triángulos, a partir de comparar sus lados y su simetría.
	Magnitudes y medidas	<ul style="list-style-type: none"> • Estima, compara y ordena longitudes y distancias, pesos y capacidades usando metro, kilogramo, litro y medios y cuartos de estas unidades, y en el caso de la longitud, el centímetro. • Compara y ordena la duración de diferentes sucesos usando la hora, media hora, cuarto de hora y los minutos; lee relojes de manecillas y digitales.
ANÁLISIS DE DATOS	Estadística	<ul style="list-style-type: none"> • Recolecta, registra y lee datos en tablas. • Lee pictogramas sencillos.

Aprendizajes esperados del sexto grado de primaria, del plan y programa de estudios 2011, bloque I y II.

Bloque I

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación. Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones. Describe rutas y calcula la distancia real de un punto a otro en mapas. 	<p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación. <p>PROBLEMAS ADITIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales. <p>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales. 	<p>FIGURAS Y CUERPOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Identificación de los ejes de simetría de una figura (poligonal o no) y figuras simétricas entre sí, mediante diferentes recursos. <p>UBICACIÓN ESPACIAL</p> <ul style="list-style-type: none"> Elección de un código para comunicar la ubicación de objetos en una cuadrícula. Establecimiento de códigos comunes para ubicar objetos. <p>MEDIDA</p> <ul style="list-style-type: none"> Cálculo de distancias reales a través de la medición aproximada de un punto a otro en un mapa. 	<p>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> Cálculo del tanto por ciento de cantidades mediante diversos procedimientos (aplicación de la correspondencia "por cada 100, n", aplicación de una fracción común o decimal, uso de 10% como base). <p>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Lectura de datos contenidos en tablas y gráficas circulares, para responder diversos cuestionamientos.

Bloque II

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> Calcula porcentajes e identifica distintas formas de representación (fracción común, decimal, %). 	<p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. Por ejemplo, se quieren representar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera. <p>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Construcción de reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100, 1000, etcétera. 	<p>FIGURAS Y CUERPOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Definición y distinción entre prismas y pirámides; su clasificación y la ubicación de sus alturas. 	<p>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> Resolución, mediante diferentes procedimientos, de problemas que impliquen la noción de porcentaje: aplicación de porcentajes, determinación, en casos sencillos, del porcentaje que representa una cantidad (10%, 20%, 50%, 75%); aplicación de porcentajes mayores que 100%. <p>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</p> <ul style="list-style-type: none"> Lectura de datos, explícitos o implícitos, contenidos en diversos portadores para responder preguntas.

Aprendizajes esperados del sexto grado de primaria, del plan y programa de estudios 2011, bloque III y IV

Bloque III

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> • Utiliza el sistema de coordenadas cartesianas para ubicar puntos o trazar figuras en el primer cuadrante. • Resuelve problemas que implican conversiones del Sistema Internacional (SI) y el Sistema Inglés de Medidas. • Resuelve problemas que involucran el uso de medidas de tendencia central (media, mediana y moda). 	<p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales. • Determinación de múltiplos y divisores de números naturales. Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco. 	<p>UBICACIÓN ESPACIAL</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representación gráfica de pares ordenados en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas cartesianas. <p>MEDIDA</p> <ul style="list-style-type: none"> • Relación entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y las unidades más comunes del Sistema Inglés. • Comparación del volumen de dos o más cuerpos, ya sea directamente o mediante una unidad intermedia. 	<p>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comparación de razones en casos simples. <p>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Uso de la media (promedio), la mediana y la moda en la resolución de problemas.

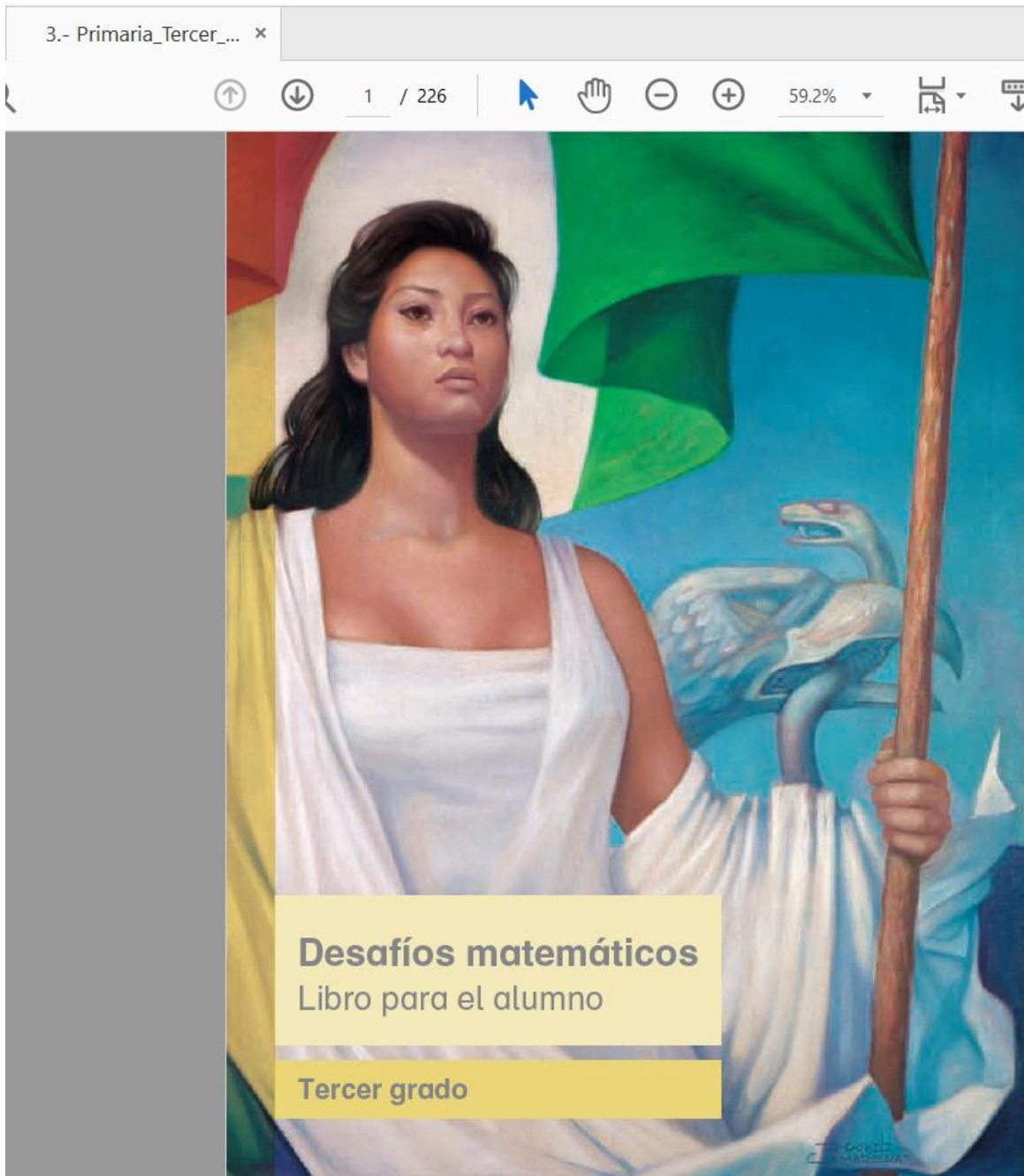
Bloque IV

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> • Explica las características de diversos cuerpos geométricos (número de caras, aristas, etc.) y usa el lenguaje formal. 	<p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. • Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad. <p>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión "a/b de n". 	<p>FIGURAS Y CUERPOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Anticipación y comprobación de configuraciones geométricas que permiten construir un cuerpo geométrico. <p>MEDIDA</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de la longitud de una circunferencia mediante diversos procedimientos. • Cálculo del volumen de prismas mediante el conteo de unidades. 	<p>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comparación de razones del tipo "por cada n, m", mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.

Aprendizajes esperados del sexto grado de primaria, del plan y programa de estudios 2017.

MATEMÁTICAS. PRIMARIA. 6°		
EJES	Temas	Aprendizajes esperados
NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN	Número	<ul style="list-style-type: none"> • Lee, escribe y ordena números naturales de cualquier cantidad de cifras, fracciones y números decimales. • Estima e interpreta números en el sistema de numeración maya. • Lee y escribe números romanos. • Resuelve problemas que impliquen el uso de números enteros al situarlos en la recta numérica, compararlos y ordenarlos.
	Adición y sustracción	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones. • Usa el algoritmo convencional para sumar y restar decimales. • Calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas de decimales.
	Multiplicación y división	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, con multiplicador número natural, y de división con cociente o divisores naturales.
	Proporcionalidad	<ul style="list-style-type: none"> • Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m). • Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con un número natural como constante. • Resuelve problemas de cálculo de porcentajes y de tanto por ciento. • Calcula mentalmente porcentajes (50%, 25%, 10% y 1%) que sirvan de base para cálculos más complejos.
	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	<ul style="list-style-type: none"> • Analiza sucesiones de números y de figuras con progresión aritmética y geométrica.
FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	Ubicación espacial	<ul style="list-style-type: none"> • Lee, interpreta y diseña planos y mapas para comunicar oralmente o por escrito la ubicación de seres, objetos y trayectos. • Resuelve situaciones que impliquen la ubicación de puntos en el plano cartesiano.
	Figuras y cuerpos geométricos	<ul style="list-style-type: none"> • Construye triángulos con regla y compás, traza e identifica sus alturas. • Construye prismas y pirámides rectos cuya base sea un rectángulo o un triángulo a partir de su desarrollo plano.
	Magnitudes y medidas	<ul style="list-style-type: none"> • Calcula y compara el área de triángulos y cuadriláteros mediante su transformación en un rectángulo. • Estima, compara y ordena el volumen de prismas rectos rectangulares mediante el conteo de cubos.
ANÁLISIS DE DATOS	Estadística	<ul style="list-style-type: none"> • Lee gráficas circulares. • Usa e interpreta la moda, la media aritmética y el rango de un conjunto de datos.
	Probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> • Determina los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Portada del libro de matemáticas del tercer grado de primaria, del plan y programa de estudios 2011.



Índice del libro de matemáticas del tercer grado de primaria, del plan y programa de estudios 2011


Herramientas		3.- Primaria_Tercer_... x	
Índice			
25. Con mucha precisión	57	50. Moños	109
26. Cuatro estaciones	59	51. De varias formas	111
27. La temperatura	61	52. ¿Y los que faltan?	112
28. Las mascotas de la escuela.....	64	53. De cuánto en cuánto	115
29. Y tú, ¿a qué juegas?	66	54. La dulcería	117
Bloque III		55. La fiesta.....	118
30. Medios, cuartos y octavos.....	70	56. ¿Cuál de todas?.....	120
31. Con el metro	72	57. Los números perdidos	122
32. ¿Qué parte es?.....	73	58. La fábrica de carritos	123
33. En partes iguales.....	75	59. Hacer problemas.....	124
34. ¿A quién le tocó más?	76	60. El robot	126
35. Flores y colores	80	61. Una coreografía	129
36. El laberinto	82	62. Una vuelta por México	131
37. Los juegos.....	85	63. México y sus ángulos	134
38. Ahorro constante	88	64. Una regla circular	137
39. Precisión	90	Bloque V	
40. ¡A estimar!	91	65. ¿Qué parte es?.....	142
41. Serpientes.....	93	66. ¿Cómo eres?.....	145
42. ¿Cómo lo hizo?	95	67. ¿Estás seguro?.....	148
43. Sumas y restas.....	96	68. ¿Me sobra o me falta?	149
44. Repartos equitativos.....	99	69. Más fracciones.....	150
45. Repartos agrupados.....	101	70. ¿Por cuánto multiplico?	153
46. Cajas de té	103	71. Campaña de salud	156
47. Las matemáticas en los envases	104	72. Descomposición de números	158
Bloque IV		73. ¡Qué pesados!	159
48. Reparto de manzanas	106	74. Las apariencias engañan	160
49. Dosis de medicamento	108	75. Hazlo de igual tamaño	161
		76. Arma una con todos.....	162
		Material recortable	163

Primer ejercicio del libro de matemáticas del tercer grado de primaria, del plan y programa de estudios 2011

Herramientas
3.- Primaria_Tercer_... x

71 / 226
59.1%

Bloque III




30 Medios, cuartos y octavos

Consigna

En equipos, realicen lo que se solicita.

- Señalen en cada vaso, de acuerdo con la cantidad que se indica, hasta dónde debe llegar el nivel del agua.



vaso lleno
 $\frac{1}{2}$ vaso
 $\frac{1}{4}$ vaso
 $\frac{1}{8}$ vaso

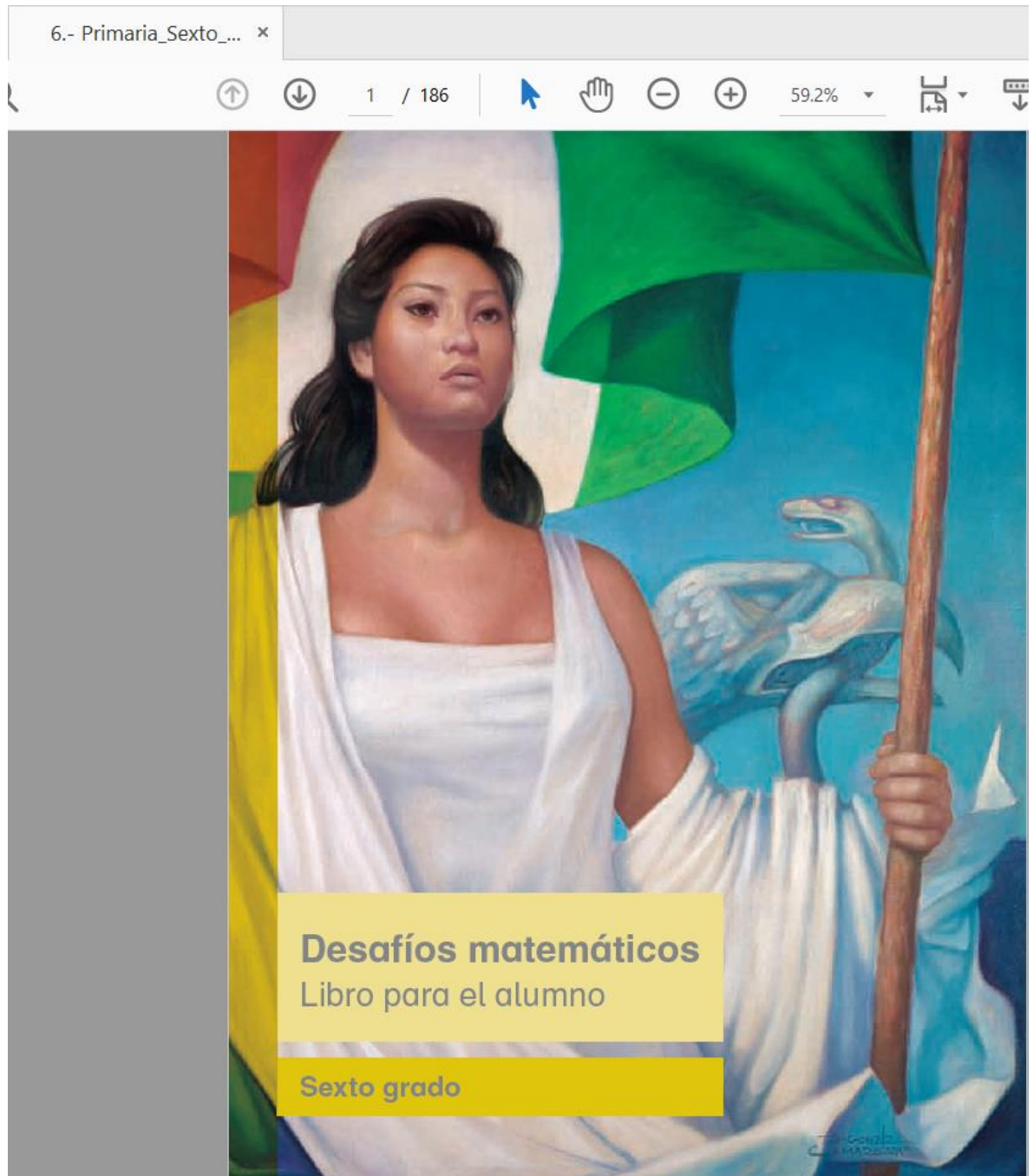
- El siguiente dibujo representa una tira completa. Debajo de ésta dibujen las fracciones de tira que se indican:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{8}$

Tira completa

70 | Desafíos matemáticos

Portada del libro de matemáticas del sexto grado de primaria, del plan y programa de estudios 2011.



Índice del libro de matemáticas del sexto grado de primaria, del plan y programa de estudios 2011

Herramientas		6.- Primaria_Sexto_... x	
<p>30. Tantos de cada 100 59</p> <p>31. Ofertas y descuentos 60</p> <p>32. El IVA 61</p> <p>33. Alimento nutritivo 62</p> <p>34. Nuestro país 66</p>		<p>59. Así aumenta 116</p> <p>60. Partes de una cantidad 117</p> <p>61. Circuito de carreras 118</p> <p>62. Plan de ahorro 120</p> <p>63. Cuerpos idénticos 121</p> <p>64. El cuerpo oculto 122</p> <p>65. ¿Cuál es el bueno? 123</p> <p>66. ¿Conoces a π? 125</p> <p>67. ¿Para qué sirve π? 126</p> <p>68. Cubos y más cubos 127</p> <p>69. ¿Qué pasa con el volumen? 128</p> <p>70. Cajas para regalo 129</p> <p>71. ¿Qué música prefieres? 130</p> <p>72. ¿Qué conviene comprar? 131</p>	
<p>Bloque III</p> <p>35. ¿Quién es el más alto? 72</p> <p>36. ¿Cuál es el sucesor? 73</p> <p>37. Identifícalos fácilmente 75</p> <p>38. ¿De cuánto en cuánto? 79</p> <p>39. La pulga y las trampas 83</p> <p>40. El número venenoso y otros juegos 84</p> <p>41. ¿Dónde están los semáforos? 90</p> <p>42. Un plano regular 91</p> <p>43. Hunde al submarino 92</p> <p>44. Pulgada, pie y milla 95</p> <p>45. Libra, onza y galón 96</p> <p>46. Divisas 97</p> <p>47. ¿Cuántos de éstos? 98</p> <p>48. ¿Cuál es más grande? 100</p> <p>49. ¿Cuál es el mejor precio? 101</p> <p>50. ¿Cuál está más concentrado? 102</p> <p>51. Promociones 103</p> <p>52. La edad más representativa 104</p> <p>53. Número de hijos por familia 105</p> <p>54. México en números 107</p>		<p>BLOQUE V</p> <p>73. Los medicamentos 134</p> <p>74. Sin cortes 136</p> <p>75. Paquetes escolares 139</p> <p>76. Estructuras secuenciadas 140</p> <p>77. Incrementos rápidos 142</p> <p>78. Números figurados 144</p> <p>79. Para dividir en partes 145</p> <p>80. Repartos equitativos 146</p> <p>81. ¿Cuánto cuesta un jabón? 147</p> <p>82. Transformación de figuras 149</p> <p>83. Juego con el tángram 150</p> <p>84. ¡Entra en razón! 151</p> <p>85. Hablemos de nutrición 152</p>	
<p>Bloque IV</p> <p>55. Los jugos 112</p> <p>56. Los listones 1 113</p> <p>57. Los listones 2 114</p> <p>58. ¿Cómo va la sucesión? 115</p>		<p>Material recortable 153</p>	

Último ejercicio del libro de matemáticas del sexto grado de primaria, del plan y programa de estudios 2011

Herramientas 6.- Primaria_Sexto_... x

🔄 🖨️ 🔍 ⬆️ ⬇️ 154 / 186 🖱️ 👤 ⊖ ⊕ 59.5% 🖨️ ⬇️ 💬 ✍️ 🗑️

84 ¡Entra en razón!

Consigna


En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

- En dos localidades hay habitantes que hablan una lengua distinta al español: en El Cerrito son 3 de cada 4, mientras que en El Paseo son 5 de cada 7.
 - ¿En cuál de las dos localidades hay un número mayor de hablantes de una lengua distinta del español?

 - ¿De cuánto es la diferencia entre las dos localidades?

- En una escuela primaria del poblado El Cerrito, de los 30 alumnos del grupo 6° A, 18 aprobaron el examen de matemáticas, mientras que de los 40 alumnos de 6° B aprobaron 32.
 - De acuerdo con esos resultados, ¿qué grupo tuvo mejor aprovechamiento en matemáticas?

 - ¿De cuánto es la diferencia en el aprovechamiento de los grupos?



85 Hablemos de nutrición

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas con base en los datos de la tabla. Si lo consideran necesario pueden usar su calculadora.

- Si comparamos el arroz, los frijoles y las tortillas, ¿cuál alimento es el más rico en carbohidratos?

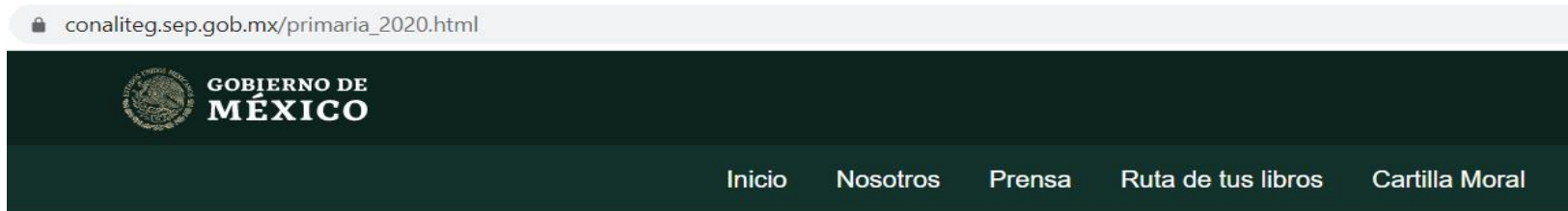
- Si consideramos el huevo, la carne de res y el pescado, ¿cuál alimento es el más rico en proteínas?

- ¿Cuál es el alimento más rico en lípidos?

Alimento	Gramos	Carbohidratos	Proteínas	Lípidos
Arroz	100	80	7	1
Huevo	50	3	11	10
Carne de res	90	0	18	18
Pescado	50	0	12	2
Frijoles	120	60	22	2
Tortillas	25	15	2	1

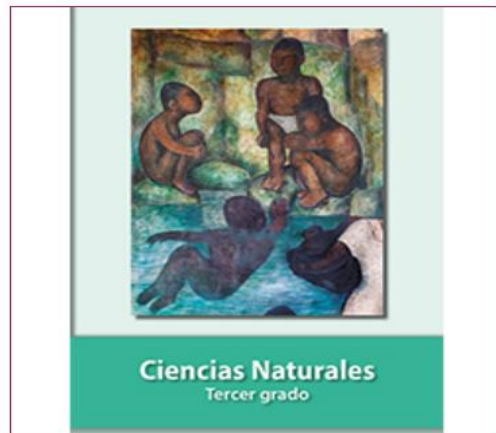
Sexto grado | 151
152 | Desafíos matemáticos

Portada del libro de matemáticas del tercer grado de primaria, del plan y programa de estudios 2017.



Ciclo Escolar 2020-2021

- Primer Grado - 2020
- Segundo Grado - 2020
- Tercer Grado - 2020



Índice del libro de matemáticas del tercer grado de primaria, del plan y programa de estudios 2017

libros.conaliteg.gob.mx/20/P3DMA.htm?#page/4

Índice	Índice		
Introducción	7	25. Con mucha precisión	57
Bloque I		26. Cuatro estaciones	59
1. Los chocolates de don Justino	10	27. La temperatura	61
2. Según la posición	11	28. Las mascotas de la escuela	64
3. Tablero de canicas	12	29. Y tú, ¿a qué juegas?	66
4. Rapidez mental	15	Bloque III	
5. El maquinista	17	30. Medios, cuartos y octavos	70
6. Memorama de multiplicaciones	18	31. Con el metro	72
7. ¿Cuántos son?	20	32. ¿Qué parte es?	73
8. Un resultado, varias multiplicaciones	22	33. En partes iguales	75
9. Multiplicaciones rápidas	23	34. ¿A quién le tocó más?	76
10. Los camiones con frutas	24	35. Flores y colores	80
11. Programas de televisión	25	36. El laberinto	82
12. Líneas de autobuses	29	37. Los juegos	85
13. Elaboración de galletas	31	38. Ahorro constante	88
14. ¿Cuánto tiempo dura?	35	39. Precisión	90
15. La ballena azul	36	40. ¡A estimar!	91
16. Figuras y colores	38	41. Serpientes	93
17. La papelería	39	42. ¿Cómo lo hizo?	95
Bloque II		43. Sumas y restas	96
18. Diferentes representaciones	42	44. Repartos equitativos	99
19. ¿Cuál es el mayor?	43	45. Repartos agrupados	101
20. Baraja numérica	44	46. Cajas de té	103
21. Siempre hay un camino	47	47. Las matemáticas en los envases	104
22. Diferentes arreglos	48	Bloque IV	
23. Orden por tamaño	51	48. Reparto de manzanas	106
24. Diferentes bordados	53	49. Dosis de medicamento	108

Primer ejercicio del libro de matemáticas del tercer grado de primaria, del plan y programa de estudios 2017

libros.conaliteg.gob.mx/20/P3DMA.htm?#page/70

30 Medios, cuartos y octavos

Consigna

En equipos, realicen lo que se solicita.

1. Señalen en cada vaso, de acuerdo con la cantidad que se indica, hasta dónde debe llegar el nivel del agua.



vaso lleno $\frac{1}{2}$ vaso $\frac{1}{4}$ vaso $\frac{1}{8}$ vaso

2. El siguiente dibujo representa una tira completa. Debajo de ésta dibujen las fracciones de tira que se indican:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$

Tira completa 

Bloque III

3. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ de litro se pueden llenar con 3 litros de leche?



4. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{2}$ de litro se pueden llenar con la siguiente cantidad de agua de naranja?




5. ¿Cuántos pedazos de $\frac{1}{8}$ de metro se pueden cortar de 4 metros de cable?



70 | Desafíos matemáticos
Tercer grado | 71

Portada del libro de matemáticas del sexto grado de primaria, del plan y programa de estudios 2017.


conaliteg.sep.gob.mx/primaria_2020.html

 **GOBIERNO DE MÉXICO**

Inicio Nosotros Prensa Ruta de tus libros Cartilla Moral

Ciclo Escolar 2020-2021

- Primer Grado - 2020
- Segundo Grado - 2020
- Tercer Grado - 2020
- Cuarto Grado - 2020
- Quinto Grado - 2020
- Sexto Grado - 2020



Ciencias Naturales
Sexto grado



Desafíos Matemáticos
Sexto grado



Español
Sexto grado

Índice del libro de matemáticas del sexto grado de primaria, del plan y programa de estudios 2017

libros.conaliteg.gob.mx/20/P6DMA.htm?#page/6

		Introducción
59. Así aumenta	116	
60. Partes de una cantidad	117	
61. Circuito de carreras	118	
62. Plan de ahorro	120	
63. Cuerpos idénticos	121	
64. El cuerpo oculto	122	
65. ¿Cuál es el bueno?	123	
66. ¿Conoces a π ?	125	
67. ¿Para qué sirve π ?	126	
68. Cubos y más cubos	127	
69. ¿Qué pasa con el volumen?	128	
70. Cajas para regalo	129	
71. ¿Qué música prefieres?	130	
72. ¿Qué conviene comprar?	131	
BLOQUE V		
73. Los medicamentos	134	
74. Sin cortes	136	
75. Paquetes escolares	139	
76. Estructuras secuenciadas	140	
77. Incrementos rápidos	142	
78. Números figurados	144	
79. Para dividir en partes	145	
80. Repartos equitativos	146	
81. ¿Cuánto cuesta un jabón?	147	
82. Transformación de figuras	149	
83. Juego con el tangram	150	
84. ¡Entra en razón!	151	
85. Hablemos de nutrición	152	
Material recortable	153	
		<p>Este libro se hizo para que tus compañeros, tu maestro y tú tengan un texto con desafíos interesantes, atractivos, útiles, ingeniosos, divertidos y hasta misteriosos, para que los resuelvan juntos, en equipo o individualmente.</p> <p>Los desafíos son actividades cuya solución será construida en clase. El reto constante que se plantea, y al que te enfrentarás en cada uno, será buscar los procedimientos para darles respuesta.</p> <p>Los desafíos se deben trabajar en el orden propuesto, ya que, a medida que avances, te plantearán retos mayores para los que necesitarás emplear gran parte de lo que aprendiste en los anteriores.</p> <p>Cada vez que trabajes con un desafío:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conversa con tus compañeros lo que entiendes sobre lo que hay que hacer. Es probable que surjan confusiones que sea necesario aclarar antes de continuar. • Comenta cómo piensas que se puede resolver. • Escucha lo que dicen los demás sobre cómo creen que es posible solucionarlo. • Pónganse de acuerdo en qué harán para resolverlo y traten de encontrar la solución. • Mientras trabajan en la resolución, su profesor pasará a los equipos para escuchar cómo están abordando el problema. Algunas veces les hará preguntas que les ayudarán a avanzar. No se vale pedir la solución o un procedimiento para resolverlo. • Participa con todo el grupo cuando se discuta una pregunta planteada por el profesor o por alguno de tus compañeros, y responde las preguntas que te hagan. • Esfuérzate en entender lo que hicieron otros equipos. Si tu procedimiento tiene algunas fallas, corrige lo que sea necesario; así podrás avanzar y aprender más.
		Sexto grado 7

Último ejercicio del libro de matemáticas del sexto grado de primaria, del plan y programa de estudios 2017

libros.conaliteg.gob.mx/20/P6DMA.htm?#page/152

85 Hablemos de nutrición

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas con base en los datos de la tabla. Si lo consideran necesario pueden usar su calculadora.

- Si comparamos el arroz, los frijoles y las tortillas, ¿cuál alimento es el más rico en carbohidratos?
- Si consideramos el huevo, la carne de res y el pescado, ¿cuál alimento es el más rico en proteínas?
- ¿Cuál es el alimento más rico en lípidos?

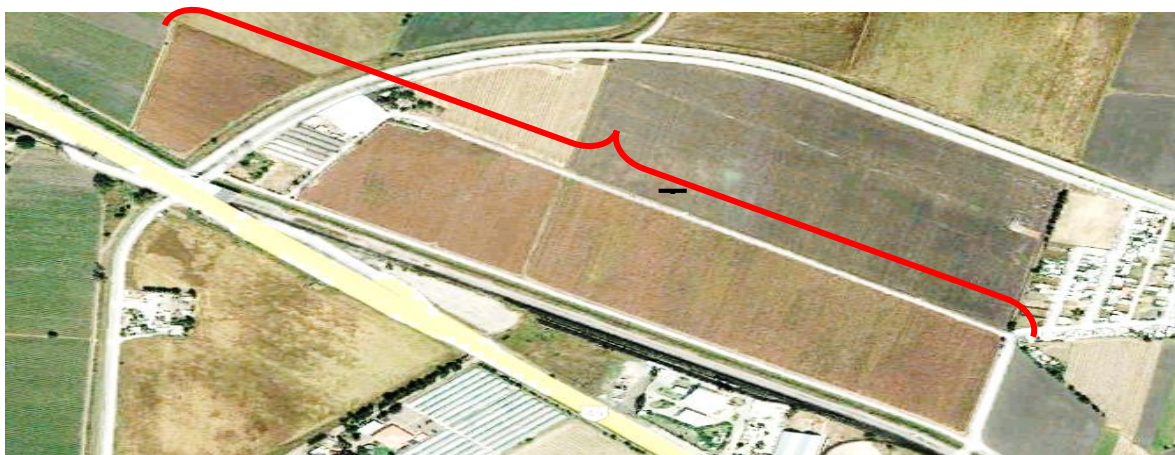
Alimento	Gramos	Carbohidratos	Proteínas	Lípidos
Arroz	100	80	7	1
Huevo	50	3	11	10
Carne de res	90	0	18	18
Pescado	50	0	12	2
Frijoles	120	60	22	2
Tortillas	25	15	2	1

Material recortable

152 | Desafíos matemáticos

Actividad 1

Una familia desea repartir **un terreno** a sus **tres hijos** de la siguiente manera: al primer hijo le corresponde la mayor parte del terreno y al menor tendrá el terreno más pequeño. En la siguiente imagen visualiza el terreno a repartir.



i. Qué cantidad de terreno recibe cada hijo.

Hijo	Terreno
Manuel (Mayor)	
Erika	
David (Menor)	

ii. Realiza una representación del terreno que le recibe cada hijo.

iii. Describe de manera breve cómo realizarte la repartición del terreno.

iv. De qué otra manera puedes representar la parte que recibe cada hijo -sin considerar la forma del terreno-.

v. Qué empleaste para repartir el terreno.

a) La división

b) La fracción

Explica de manera breve tu respuesta (por qué).

Actividad 2

Una familia desea repartir **una hectárea** a sus **tres hijos** de la siguiente manera: al **mayor** le corresponde una parte **más grande** del terreno y al **menor** el terreno **más pequeño**. En la siguiente imagen visualiza el terreno a repartir.



i. Qué cantidad de terreno recibe cada hijo.

Hijo	Terreno
Manuel (Mayor)	
Erika	
David (Menor)	

ii. Realiza una representación del terreno que le recibe cada hijo.

iii. Describe de manera breve cómo realizarte la repartición del terreno.

iv. De qué otra manera puedes representar la parte que recibe cada hijo -sin considerar la forma del terreno-.

v. Qué empleaste para repartir el terreno.

c) La división

d) La fracción

Explica de manera breve tu respuesta (por qué).

Actividad 3

1. Si el terreno se representará por medio de una línea recta, cómo representarías lo que recibe cada hijo de la **actividad 1**.

Terreno

2. Si el terreno se representará por medio de una línea recta, cómo representarías lo que recibe cada hijo de la **actividad 2**.

Terreno

Cómo podrías definir a la división.

Cómo podrías definir a la fracción.

3. Consideras que existe diferencia entre dividir y fraccionar.

a) Si

b) No

Cómo distingues la división de la fracción, al momento de realizar una repartición.

4. De la siguiente imagen, qué está representado.



a) La división

b) La fracción

c) Ambas

Argumenta tu respuesta.

5. De la siguiente imagen qué opción corresponde a la relación de hombres, respecto a las mujeres.



¿Cuántos hombres y mujeres hay?

a) 6 hombre / 3 mujeres

b) 6/9 son hombres y
3/9 son mujeres

Argumenta tu respuesta

Actividad 1

Un hermano desea **delimitar el terreno que heredaron**, requiere saber cómo hacerlo. ¿Puedes ayudarlo? Considera lo siguiente:

1. El hermano mayor por ser quien trabajó y ayudó más a sus padres, deberá tener la cantidad más grande del terreno.
2. El menor por no poder trabajar las tierras para sembrar, tendrá el terreno más pequeño.
3. Los padres continuarán estando en la casa, que está en el interior del terreno; pero ya no van a sembrar las tierras.

Nota: La cantidad de terreno que recibe el hermano menor, será del tamaño de la casa. Considerando la construcción de la casa y el patio (imagen).

¿Cómo deben delimitar el terreno los hermanos?



Si la forma del terreno fuera distinta, cómo de limitarías el terreno



Anota en la siguiente tabla la cantidad de terreno tiene cada uno (considera **una hectárea el terreno total**)

Hermano	Cantidad de Terreno (figura 1)	Cantidad de Terreno (figura 2)
Mayor		
Menor		
Padres		

Qué empleaste para repartir el terreno.

- e) La división f) La fracción

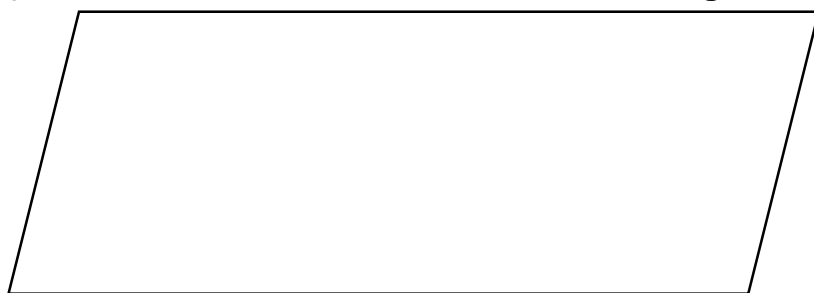
Explica de manera breve tu respuesta (por qué).

Actividad 2

Tres amigos compraron un terreno, cada uno aportó una cantidad distinta de dinero. Según la aportación será el terreno asignado ¿Puedes ayudarlos?

1. El primero aportó la mayor cantidad.
2. El segundo aportó la menor cantidad, que el primero y el tercero.
3. El tercero aportó una cantidad intermedia entre el primero y el segundo.

¿Cómo deben delimitar el terreno los tres amigos?



Si la forma del terreno fuera distinta, cómo de limitarías el terreno



Anota en la tabla la cantidad de terreno tiene cada uno (considera **una hectárea el terreno total**)

Hermano	Cantidad de Terreno (figura 1)	Cantidad de Terreno (figura 2)
Mayor		
Menor		
Padres		

Qué empleaste para repartir el terreno.

- a)** La división **b)** La fracción

Explica de manera breve tu respuesta (por qué).

Actividad 3

1. Si el terreno se representará por medio de una línea recta, cómo representarías lo que recibe cada hijo de la **actividad 1**.

Terreno

2. Si el terreno se representará por medio de una línea recta, cómo representarías lo que recibe cada amigo de la **actividad 2**.

Terreno

Cómo podrías definir a la división.

Cómo podrías definir a la fracción.

3. Consideras que existe diferencia entre dividir y fraccionar.

c) Si

d) No

Cómo distingues la división de la fracción, al momento de realizar una repartición.

4. De la siguiente imagen, qué está representado.



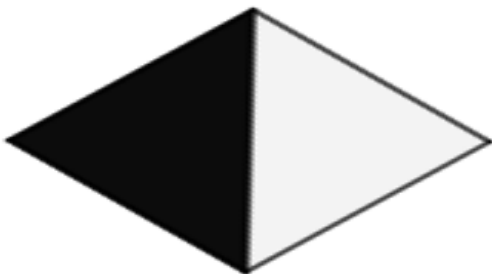
d) La división

e) La fracción

f) Ambas

Argumenta tu respuesta.

5. De la siguiente imagen qué opción corresponde a la relación de hombres, respecto a las mujeres.



a) 6 hombre / 3 mujeres **b)** 6/9 son hombres y 3/9 son mujeres

Argumenta tu respuesta
