Universidad Autónoma de Chiapas

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

UNA MIRADA A LOS GRUPOS TOPOLÓGICOS DE TRANSFORMACIONES Y SUS APLICACIONES

TESIS

PARA OBTENER EL TíTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

OMAR PÉREZ SANTIBAÑEZ X120005

ASESOR DE TESIS:

DR. JAVIER SÁNCHEZ MARTÍNEZ

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS; DICIEMBRE 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
CONTROL ESCOLAR POSGRADO

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
23 de noviembre de 2020
Oficio No. FCFM/0410/20

Dr. Javier Sánchez Martínez
Presidente y Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"UNA MIRADA A LOS GRUPOS TOPOLÓGICOS DE TRANSFORMACIONES Y SUS APLICACIONES."

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestro en Ciencias Matemáticas del **Lic. Omar Pérez Santibañez** con matrícula escolar X120005.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

"Por la conciencia de la necesidad de servir"

U.N.A.C.H. FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Dra. Karen Salomé Caballero Mora DIRECCIÓN FCFM

Directora

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
KSCM /jmag

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
SECRETARÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE DESARROLLO BIBLIOTECARIO

Código: FO-113-09-05
Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) Omar Pérez Santibañez,
Autor (a) de la tesis bajo el título de "Una mirada a los grupos topológicos de transformaciones y sus aplicaciones",
presentada y aprobada en el año 2020 como requisito para obtener el título o grado de maestría en ciencias matemáticas, autorizo a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 23 días del mes de diciembre del año 2020.

Omar Pérez Santibañez

Nombre y firma del Tesista o Tesistas

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca recibida durante el periodo de formación de la maestría en ciencias matemáticas en la Universidad Autonóma de Chiapas (UNACH).

Agradezco a la UNACH por ser una parte importante de mi vida, han sido 8 largos años en esta universidad desde el comienzo de mi licenciatura en el año 2012. He crecido como persona y como matemático gracias a las grandes enseñanzas de los profesores que aquí laboran y que lo hacen con mucha pasión, es por esta razón que agradezco profundamente a cada uno de los profesores y personal que labora en la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas (FCFM-UNACH) por todo lo que he aprendido aquí.

Agradezco a mi asesor de tesis, el Dr. Javier Sanchéz Martínez, por el apoyo que me ha brindado y por hacerme parte de su propio conocimiento. Así mismo agradezco a los profesores que se han encargado de revisar el presente trabajo y que me han brindado consejos para mejorarlo, Dr. Florencio Corona Vázquez,Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella, Dr. Eli Vaney Roblero Méndez y Dr. David Maya Escudero.

Por último y no menos importante, agradezco a las personas que siempre estan ahí y que nos motivan a seguir adelante, a mi familia, amigos y compañeros que cuando más les he necesitado estan presentes, más aún, en momentos tan complicados como los que hemos enfrentado este año.

Le agradezo también a todos aquellos que alguna vez tomen el presente trabajo y lo lean, estudien. Espero esto los lleve a buscar conocer más sobre el tema y los adentre a una nueva área que cuenta con muchas grandes sorpresas en ella.

Índice General

Capítulos **Página**

Capítulos **Página**

§ Introducción

Gran parte de la belleza de las matemáticas se encuentra en las relaciones que se forman dentro de ella, en sus conceptos, ideas, áreas. Una habilidad importante y digna a destacar entre quienes la estudian y la trabajan es encontrar dichas relaciones y formar a partir de estas nuevas cuestiones. Nada en matemáticas estará nunca completo hasta haber agotado todas sus posibles relaciones, tanto dentro como fuera del área, lo cual es practicamente imposible según el conocimiento del mundo siga creciendo. Es un hito importante para los matemáticos encontrar dichas relaciones entre los conceptos que conoce, los nuevos que van aprendiendo y aquellos que empezaban a olvidar. El conocimiento del mundo y el hecho de vivir en él exige prestar atención a cada una de las relaciones que se pueden encontrar o crear, según sea el caso, aún cuando esta puedo resultar en algo maravillosamente bueno o terriblemente malo. En este trabajo se presenta una de estas relaciones entre dos importantes áreas de las matemáticas, la Topología y la Teoría de grupos, que nos permiten contruir una nueva área que se nutre de las anteriores. Los grupos topológicos son un conjunto en donde se combinan de buena manera las estructuras topológicas, dada en la colección de subconjuntos del conjunto, y la estructura de grupo, dada por una operación entre los elementos del conjunto. La existencia de una de las estructuras no excluye a la otra si no por el contrario, las propiedades de una de ellas guardan cierta relación que las complemente entre ellas.

Un grupo es un conjunto con una operación binaria entre sus elementos, la cual es asociativa y garantiza la existencia de inversos y un elemento neutro. Se piensa que la Teoría de grupos tiene su origen de la teoría de números y la Geometría, a manos de grandes matemáticos como Euler, Gauss, Lagrange, Abel y Galois. Lagrange en 1770 estudiaba ya al conjunto de permutaciones, sin embargo no considero el producto entre ellos. Para 1799, Paolo Ruffini sí trabajó con el producto de permutaciones sin embargo no mostró interés en la existencia de los inversos ni del elemento neutro. Fue Galois el primero en utilizar el término 'grupo' en matemáticas al desarrollar su trabajo en lo que hoy se conoce como la Teoría de Galois, alrededor de 1832, en donde relacionaba conjuntos asociados a la solución de ecuaciones con conjuntos de simetría, aunque utiliza propiedades importantes no logró formalizar el concepto abstracto de grupo. Más adelante, Cauchy primero y Jordan después, comenzaron a usar el término de grupo para trabajar con los conjuntos de permutaciones y sus subconjuntos finitos, sin concretar aún el ente abstracto.

Vinieron después intentos por parte de Cayley y Burniside a finales del siglo XIX de dar una definición de grupo abstracto, pero dichos intentos resultaron confusos y aún dejaban fuera conceptos importantes. Kronecker, en 1870, y Henrich Weber, en 1882, presentan las primeras definiciones historicamente correctas para grupos finitos, siendo que Kronecker exigia en ellos la conmutatividad y las leyes de cancelación. En su libro, Lehrbuch der Algebra publicado de 1895, Weber menciona la necesidad de exigir la existencia de inversos para casos infinitos, con lo que se presenta por primera vez la idea de un grupo infinito. Ese mismo año, S. Lie define un grupo como un conjunto de transformaciones cerrada bajo una operación asociativa, que admite un elemento unitario y elementos inversos. Finalmente, la definición axiomatica de grupo se atribuye a los trabajos de Kroenecker a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX.

La Teoría de grupos tiene entonces sus inicios entre la relación del conjunto de permutaciones y solución de ecuaciones. En el Capítulo I.1, se presenta un repaso de las definiciones y propiedades más importantes de un curso introductorio de la Teoría de grupos.

Un espacio topológico es una familia de subconjuntos de un conjunto dado que es cerrada bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Se piensa que la Topología tiene su origen al estudiar el concepto de limite e integral, mediante el metodo de exhaución de Arquímedes, ya que mostró la necesidad en que se formalizaran estos conceptos, junto al de continuidad, con la aparición del análisis matemático en el siglo XVII pues eran cuestiones que escapaban a la geometría. En 1679, Leibniz en su libro *Characteristica Geometrica* estudía propiedades de las figuras que escapan de las propiedades métricas, entendiendo la necesidad de un análisis estrictamente geométrico y lineal en donde se defina la posición relativa entre los puntos. En 1736, el problema de los 7 puentes de Königsberg por parte de Euler representa el primer problema que da lugar a planteamientos topológicos y a la denominada Teoría de grafos, en donde la geometría clásica ya no encuentra soluciones. A partir de este trabajo Euler desarrolla la fórmula de Euler que relaciona los vértices, aristas y número de caras de un poliedro dando inicio a un estudio más general de las figuras sin la necesidad de tener una medida involucrada. Poco después de esto, A. J. Lhuilier en 1813 demuestra que esta propiedad es falsa para sólidos con asas, convirtiendola así en el primer invariante topológico. En estudios más avanzados sobre estos temas, en 1865, Möbius publica una descripción sobre la banda que lleva su nombre en donde presenta la propiedad de una única cara de la banda en términos de no orientabilidad. El primero en usar la palabra topología fue J. B. Listing influenciado por su maestro, Gauss. Para ese entonces, en 1851 Riemann ya habia estudiado los conceptos de conexidad en las superficies. Para 1882, C. Jordan publica *Cours dÁnalyse* en donde presenta pruebas rigurosas de resultados topológicos sobre curvas en el plano. La idea de conexidad fue la piedra angular de esta revolución con trabajos de Listing, E. Betty y H. Poincare.

Otro camino por el cual se desarrolló la topología es a través de las ideas de convergencia por parte de B. Bolzano en 1817 al asociar la convergencia con un subconjunto acotado infinito de números reales. G. Cantor en 1872 introduce en 1872 el concepto de conjunto abiertos, siendo éste uno de los conceptos clave en toda la teoría. Algunos autores mencionan también que los conceptos topológicos llegan a las matemáticas a través del analisis funcional.

Un grupo topológico es, en esencia, un conjunto dotado con una topología y una operación que lo vuelve grupo, de tal manera que las funciones producto e inversión, propias de la parte algebráica, sean continuas, siendo éste último un concepto topológico. El estudio sobre grupos topológicos tiene su origen con los trabajos de Felix Klein acerca de transformaciones geométricas, y de Sophus Lie acerca de los grupos de transformaciones, que llevan su nombre y fueron introducidos en 1870. Schreirer trabajó ya con el concepto de grupo topológico en 1926 y un año despues, F. Leja en su artículo *Sur la notion du groupe abstrait topologique*, establece por primera vez su definición con lo que se afianzó el término y su uso con las aportaciones de Haar, Pontryagin, Freudenthal y Weil, a medidados de 1930. Los grupos topológicos cobraron relevancia a partir de la presentación de los 23 problemas propuestos por Hilbert en el congreso de París en el año 1900. Un grupo de Lie es un grupo abstracto que tiene estructura de variedad diferenciable (Hausdorff) bajo la cual las funciones producto e inversión son diferenciables. El quinto problema de la lista de Hilbert preguntaba bajo que condiciones se puede asegurar que un grupo topológico permite una estructura análitica que hace de él un grupo de Lie, o en otras palabras, si se puede establecer el concepto de grupo de Lie sin asumir la diferenciabilidad de las funciones mencionadas. En el camino a su demostración, en 1933, A. Haar prueba la existencia de una medida invariante por traslaciones en un grupo localmente compacto, metrizable y separable. Después, A. Weil demuestra la existencia de tal medida sin la necesidad de la metrizabilidad y separabilidad del espacio. Los trabajos de Haar y Weil permitieron definir entonces una integral invariante bajo traslaciones en grupos localmente compactos lo cual permitió usar estos conceptos y técnicas del análisis lo cual ayudo a que, en 1952, A. Gleason, D. Montgomery y L. Zippin demostraron el quinto problema que en términos simples, dice que un grupo topológico es de Lie si y sólo si es localmente euclídeo, o equivalentemente, si es localmente compacto y no contiene subgrupos 'pequeños', esto es, el elemento neutro posee una vecindad compacta que no contiene subgrupos no triviales.

Buena parte de la importancia en el estudio de los grupos topológicos se encuentra en sus aplicaciones dentro de las matemáticas y en otras áreas de estudio, como por ejemplo en el Análisis Harmonico (conocido usualmente como Análisis de Fourier), y en el área de Física teórica moderna con las simétrias continuas. La presente tesis es de carácter divulgativo, presentada de una manera que permita el fácil estudio de los temas involucrados. La notación y las ideas son parte del lenguaje conocido y usado en libros introductorios en las áreas de Teoría de grupos, Topología y Análisis matemático. La primera parte se dedica a la recopilación de resultados importantes utiles para los capítulos siguientes. Es importante mencionar que se omiten en su mayoría las demostraciones del primer capítulo pues estas se dan, generalmente, en cursos introductorios y cualquier estudiante interesado en estos temas las ha visto y trabajado en al menos una ocasión. Las demostraciones para los resultados presentados y las definiciones dadas en los capítulos posteriores han sido adaptadas para mantener una hegemonía en cuanto a la escritura y la forma durante todo el texto para el fácil entendimiento y fluidez de los temas tratados.

Como objetivo general para los capítulos siguientes, se pretende que el lector entienda y manipule la información tratada aquí con naturalidad al finalizar con la lectura del mismo, siendo que los temás presentados pueden entenderse como introductorios del área. En este sentido, en el Capítulo 2 se presentan los conceptos y resultados principales alrededor del concepto de grupo topológico que se deducen de manera inmediata de los resultados presentados en el capítulo anterior. En las primeras 5 secciones se trabajan resultados obtenidos de manera inmediata de los resultados de grupos y topología por separado y en la sección 6 se presenta una estructura como espacio de la que no gozan los espacios topológicos pero que se gana a partir de la estructura de grupo, la cual es denominada estructura uniforme, y que es una generalización de espacios en los que se ha definido la continuidad uniforme.

La teoría de grupos topológicos puede verse desde dos persepectivas distintas, lo cual determina el desarrollo de la teoría presentada. Una de ellas es verlo como un espacio topológico al cual se dota de una operación que lo vuelve grupo, bajo esta perspectiva el estudio de los mismos trata de encontrar las propiedades algebraicas de los mismos. La otra perspectiva, usada en el presente trabajo, es dotar a un grupo de una topología consistente de tal manera que el estudio de éstos se centre en las propiedades topológicas del grupo. De esto, las propiedades de un grupo topológico pueden separarse en sus propiedades como espacios, entre ellas que son espacio homogéneos y permiten tener una estructura uniforme. Propiedades de sus subconjuntos y como estas se mantienen bajo las operaciones de grupo, como lo son los productos de conjuntos compactos y conexos, y el hecho interesante de que la cerradura de todo subgrupo es a su vez un subgrupo. Algunas propiedades se encuentran entre sus funciones, como por ejemplo que las traslaciones e inversiones son homeomorfismos. Por último, es de especial interés las propiedades de sus elementos, resaltando la importancia del elemento neutro del grupo.

En el Capítulo 3, se toma el tema de las acciones de grupo para el caso en que el conjunto sobre el cual actúa el grupo es un espacio topológico y como afecta su estructura. Lo anterior se retoma en el Capítulo 4 para cuando el grupo que actúa es además un grupo topológico. En este capítulo, además, se presenta la integral de Haar y se rescatan algunas aplicaciones de la misma dentro del área de grupos topológicos. Para finalizar, es importante mencionar que lo tratado en la presente tesis son resultados conocidos por aquellos que trabajan en esta área, salvo por el orden establecido y la forma de demostrarse que presentan una escritura homogénea la cual prentende que nuevos estudiantes se familiaricen con los resultados como lo han hecho ya con las propiedades dadas en Teoría de grupos y Topología por aparte.

Capítulo I.

§ Preliminares

En este primer capítulo se dá un repaso por algunas de las definiciones y propiedades importantes dentro de las áreas de Topología y Teoría de grupos. Cualquier estudiante de cursos introductorios de estas áreas reconocerá inmediatamente la mayoría de los conceptos aquí descritos, por lo que no es necesario escribir la demostración de éstos encontrándose tales en los libros que se mencionan más adelante.

Se pretende que la escritura de esta primera parte de la presente tesis sea fluida y funcione únicamente como recordatorio de los conceptos y resultados más importantes y que serán de gran utilidad en los siguientes capítulos en donde se trabaja directamente a partir de ellos.

La naturaleza misma de los grupos topológicos permite llegar a ellos a partir de conocimientos básicos dados en las áreas de topología y álgebra avanzada, con lo que el presente trabajo puede entenderse como un curso introductorio de esta nueva área, encontrándose más adelante sobre este camino los anillos topológicos, álgebras topológicas, etc. Los resultados presentados en los capítulos posteriores son inmediatos de los presentados aquí, y puede verse esto claramente en la escritura de los mismos y su claro paralelismo.

El presente capítulo se compone de tres secciones entre las cuales pueden distinguirse las áreas de Teoría de grupos y Topología. Para evitar que el texto sea demasiado extenso se omiten las demostraciones de la mayoría de los resultados de estos capítulos pero se especifican más adelante los textos en donde pueden ser encontradas.

La Sección 1 está dedicada a dar una breve introducción a la Teoría de grupos. Los resultados aquí citados y las demostraciones de éstos pueden encontrarse en los libros [13], [14] y [15].

En la Sección 2 se encuentra las acciones de grupos, el cual podría considerarse como un tema más de la sección anterior sin embargo, dada su importancia para el Capítulo 3 se le dedica una sección propia. Los libros citados para esta sección corresponden a los mismos libros dados para la sección anterior de teoría de grupos, debido a que las acciones de grupos pueden entenderse como una consecuencia inmediata del Teorema de Cayley, Teorema I.1.49.

En la Sección 3 se estudian los espacios topológicos y sus propiedades más importantes. Lo visto en esta sección sirve como complemento a lo estudiado en la primera parte para el estudio de los grupos topológicos. Los libros citados para esta sección son [9], [10], [11] y [12].

No se han escrito todas las demostraciones a los resultados dados en el presente capítulo ya que éstas pueden encontrarse en cursos introductorios de estas áreas a nivel de licenciatura y en los libros antes mencionados. Las demostraciones que sí se dan son destinadas para resultados de niveles más avanzados o poco vistos en niveles introductorios.

S I.1. Teoría de grupos

Los grupos son una de las primeras y más importantes de las estrucutras algebraicas por ser una de las más básicas pero con una buena cantidad de propiedades que la convierten en objeto de estudio dentro del álgebra moderna. Un grupo se compone simplemente de un conjunto no vacío junto a una operación binaria asociativa en donde existe un elemento que deja invariante a los demás elementos y que sirve como eje central de la operación.

I.1.1 Definición. Un `grupo` es un conjunto no vacío G con una operación binaria denominada generalmente como `producto`
$G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$, que satisface:

G_1) Asociatividad,

$$g(hk) = (gh)k, \quad \forall\, g,h,k \in G.$$

G_2) Existencia del elemento neutro,

$$\exists\, e \in G \text{ tal que } eg = ge = g, \quad \forall\, g \in G.$$

G_3) Existencia de inversos,

$$\forall\, g \in G,\ \exists\, g' \in G \text{ tal que } gg' = g'g = e.$$

El grupo G se dice `conmutativo`, o Abeliano, si para cualesquiera $g, h \in G$ se tiene que $gh = hg$.

I.1.2 Ejemplo. *Sean X no vacío y $Biy(X)$ el conjunto de todas las biyecciones en X, esto es, $Biy(X) := \{\sigma : X \to X \mid \sigma \text{ es biyectiva }\}$. Luego, $Biy(X)$ es un grupo con la operación de composición entre funciones, en donde el elemento neutro está dado por la función identidad en X y el elemento inverso de cada elemento está dado por la inversa de dicha función, denominado* `el grupo simétrico de` *X y denotado por S_X. En el caso en que X es finito, con $|X| = n$, el grupo simétrico se denota por S_n y se denomina el* `grupo de permutaciones` *de n elementos.*

Notación. La composición de funciones $f \circ g$ se denotará como producto, esto es, fg.

I.1.3 Ejemplo. *$\mathbb{R}$ con la suma usual es un grupo abeliano con neutro 0. La operación se escribe como $a+b$ y el inverso de a como $-a$.*

En la definición de grupo no se pide que el neutro o los inversos sean únicos, sin embargo se concluyen de manera natural debido a que la cancelación, izquierda y derecha, se satisfacen en todo grupo.

I.1.4 Teorema. *En todo grupo G se valen las leyes de cancelación, esto es, si alguno de $xa = xb$ o $ax = bx$ se cumple entonces $a = b$.*

I.1.5 Corolario. *Si G es grupo se tienen entonces las siguientes propiedades*

i) El neutro es único.

ii) El inverso de un elemento g es único y se denota por g^{-1}.

iii) Si $g \in G$ entonces $(g^{-1})^{-1} = g$.

iv) Si $g, h \in G$ entonces $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

I.1.6 Definición. Sea G grupo. Para $g \in G$ se definen las potencias de g como sigue: $g^0 = e$, $g^1 = g$, y para $n \in \mathbb{N}$, $g^{n+1} = g^n g$ y $g^{-n} = (g^{-1})^n$.

Las leyes de exponentes de los reales son también válidas en los grupos.

I.1.7 Teorema. *Sean G grupo y $g, h \in G$. Si $m, n \in \mathbb{N}$ entonces $g^m g^n = g^{m+n}$, $(g^m)^n = g^{mn} = (g^n)^m$.*

Se pueden operar los subconjuntos de un grupo de la misma forma en que se hace con los elementos.

I.1.8 Definición. Sean G grupo y $A, B \subseteq G$. Se definen el `producto de` A `y` B como $AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$, y el `inverso de` A como $A^{-1} := \{a^{-1} \in G : a \in A\}$.

Si $A = \{a\}$, el producto se escribe aB y si $B = \{b\}$, se escribe Ab. El producto de n veces A se denota A^n, esto es,

$$A^n = \{a_1 \cdots a_n : a_i \in A, i = 1, \ldots, n\}.$$

I.1.9 Teorema. *Sean G grupo y $A, B \subseteq G$, se tienen entonces*

i) $AB = \bigcup_{b \in B} Ab = \bigcup_{a \in A} aB$.

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

El producto de elementos de un grupo es cerrado, por lo que cada elemento de un grupo determina una biyección del grupo en si mismo.

I.1.10 Definición. Sean G grupo y $x \in G$ fijo. Se definen la `traslación izquierda (bajo` x`)` como la función $L_x : G \to G$, dada por $g \mapsto xg$, y la `traslación derecha (bajo` x`)` como $R_x : G \to G$, dada por $g \mapsto gx$.

I.1.11 Teorema. *Si x y y son elementos fijos del grupo G, se tienen las siguientes propiedades de las traslaciones.*

A) L_x y R_x son biyecciones.

B) $L_{xy} = L_x L_y$ y $R_{xy} = R_x R_y$.

C) $L_x R_y = R_y L_x$.

Demostración.

A) Sean $g \in G$ y $h = x^{-1}g$. Se tiene $L_x(h) = L_x(x^{-1}g) = x(x^{-1}g) = g$, por lo que L_x es sobre. Si $g, h \in G$ son tales que $L_x(g) = L_x(h)$ entonces $xg = xh$ y por la ley de cancelación $g = h$, por lo que L_x es inyectiva.
Análogamente R_x es biyectiva.

B) Si $g \in G$, entonces $L_x L_y(g) = x(yg)$. Por la asociatividad en G, $x(yg) = (xy)g$ y por tanto $L_x L_y(g) = L_{xy}(g)$.
De manera similar, $R_y R_x(g) = R_y(gx) = gxy = R_{xy}(g)$.

C) Si $g \in G$, entonces $L_x R_y(g) = x(gy)$. Por la asociatividad en G, $x(gy) = (xg)y$ de donde $L_x R_y(g) = R_y L_x(g)$. □

Ss I.1.1. Subgrupos

Los subconjuntos de grupos que heredan dicha estructura son de especial interés en la teoría de grupos. Todo grupo es subgrupo de si mismo visto como conjunto que es contenido en sí mismo por lo que la familia de subgrupos es no vacía.

I.1.12 Definición. Sean G grupo y $H \subseteq G$. Se dice que H es un `subgrupo` de G si H es grupo con la operación definida en G. Esto se escribe como $H \leq G$.

La asociatividad de la operación se hereda para subconjuntos, por lo que los subgrupos H de G son aquellos conjuntos cerrados bajo el producto y la toma de inversos lo cual se denota, en términos de conjuntos, como $H^2 = HH \subseteq H$ y $H^{-1} \subseteq H$.

I.1.13 Definición. Sea G grupo y $A \subseteq G$. Si $e \in A$ y $A = A^{-1}$ se dice que A es un conjunto `simétrico` de G.

Los conjuntos simétricos no son grupos ya que el producto de dos elementos no se encuentra necesariamente en el conjunto. Sin embargo, los subgrupos son conjuntos simétricos y dado que son cerrados bajo productos entonces $H^n \subseteq H$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

I.1.14 Ejemplo. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ *con el producto usual en* $\mathbb{R}$ *es un grupo, donde 1 es el neutro y el inverso de un número* a *es* $\frac{1}{a}$. $\mathbb{Q}^* \leq \mathbb{R}^*$, *donde* $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$.

I.1.15 Ejemplo. *El subconjunto de números complejos* $\mathcal{C}^* := \mathcal{C} - \{0\}$ *son un grupo bajo la multiplicación compleja con neutro* $1 + 0i$ *y, para cada* $z = x + iy$, *inverso* $\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$, *donde* $\bar{z}$ *es el conjugado complejo de* z, *es decir,* $\bar{z} = x - iy$.
Por las propiedades del módulo complejo $\overline{z}\,\overline{w} = \overline{zw}$ *y* $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$, *el conjunto de números complejos módulo 1,* $S^1 = \{z \in \mathcal{C} : |z| = 1\}$, *forma un subgrupo de* $\mathcal{C}^*$ *denominado el* `grupo circular` *de* $\mathcal{C}$. *A su vez,* $\{1, -1, i, -i\}$ *es subgrupo de* S^1.

Para que un subconjunto del grupo sea subgrupo, necesita entonces que sea cerrada bajo la operación y la toma de inversos, además de contener al neutro del grupo. Esto se puede resumir como lo muestra el teorema siguiente, al pedirle simplemente que dados dos elementos el subconjunto sea cerrado bajo el producto de uno por el inverso del otro.

I.1.16 Teorema. *Sean* G *grupo y* $H \subseteq G$. H *es subgrupo de* G *si y solo si* $gh^{-1} \in H$, *para cualesquiera* $g, h \in H$.

La unión de subgrupos no necesariamente es un subgrupo y la intersección arbitraria de subgrupos es un subgrupo.

I.1.17 Teorema. *La intersección de cualquier familia* J *de subgrupos de* G *es un subgrupo de* G. *Esto es, si* $H_i \leq G$ *para cada* $i \in J$, *entonces*

$$\bigcap_{i \in J} H_i \ \leq \ G.$$

Dado un subgrupo, sus traslaciones bajo los elementos del grupo generan una serie de subconjuntos especiales y de especial interés.

I.1.18 Definición. Sean G grupo y H subgrupo de G. Para cada $g \in G$, el subconjunto $gH = \{gh : h \in H\}$ se denomina `la clase lateral izquierda de` H `que contiene a` g y el subconjunto $Hg = \{hg : h \in H\}$ de G es la `clase lateral derecha de` H `que contiene a` g. En cada caso el elemento g se denomina `representante` de la clase lateral gH.

Todo elemento de una clase lateral es un representante de dicha clase. Las clases laterales no son necesariamente un grupo ya que si G es grupo y $H \leq G$ entonces para $g \in G - \{e\}$ se sigue que $e \notin gH$. Las clases laterales izquierdas y derechas generan una partición de el grupo dadas por las relaciones de equivalencia $\sim_L$ y $\sim_R$, definidas por:

$$g \sim_L k \text{ si y solo si } g^{-1}k \in H,$$
$$g \sim_R k \text{ si y solo si } gk^{-1} \in H.$$

La partición no necesariamente es igual en ambos casos, ya que no todo grupo es necesariamente conmutativo. De que las clases formen una partición se sigue que dos clases distintas son necesariamente disjuntas.

I.1.19 Teorema. *Sea G grupo. Si H es subgrupo de G y $g,k \in G$ entonces $gH = kH$ si y solo si $k^{-1}g \in H$. En particular, $gH = H$ si y solo si $g \in H$.*

Análogamente, $Hg = Hk$ si y solo si $gk^{-1} \in H$.

I.1.20 Definición. Sea G grupo. El subgrupo N de G se dice `normal` a G, denotado $N \lhd G$, si $gng^{-1} \in N$, para todo $n \in N$ y todo $g \in G$.

I.1.21 Ejemplo. *Sean $M(n,\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas y $GL(n,\mathbb{R}) := \{A \in M(n,\mathbb{R} : \det(A) \neq 0)\}$. $GL(n,\mathbb{R})$ es un grupo, con el producto usual de matrices con neutro la matriz identidad e inversos las matrices inversas, denominado* ***`grupo general lineal de grado`*** *n. El grupo general lineal no es conmutativo ya que el producto de matrices no lo es.*
Si $SL(n,\mathbb{R}) := \{A \in M(n,\mathbb{R}) : det(A) = 1\}$ se sigue entonces que $SL(n,\mathbb{R}) \leq GL(n,\mathbb{R})$, ya que el producto y las inversas de matrices con determinante 1 tienen a su vez determinante 1, y se denomina ***`grupo especial lineal de grado`*** *n.*
Si $A \in SL(n,\mathbb{R})$ y $B \in GL(n,\mathbb{R})$, entonces

$$det(BAB^{-1}) = det(B)det(A)det(B^{-1}) = det(B)\frac{1}{det(B)} = 1$$

es decir, $BAB^{-1} \in SL(n,\mathbb{R})$ por lo que $SL(n,\mathbb{R})$ es normal a $GL(n,\mathbb{R})$.

I.1.22 Definición. Sean G grupo y $H \subseteq G$. Si $g \in G$, gHg^{-1} se dice el `conjugado` de H respecto de g.

I.1.23 Teorema. *Si H es subgrupo de G entonces todos los conjugados de H son también subgrupos de G. Si N es subgrupo normal de G entonces el único conjugado de N es N mismo.*

N es un grupo normal de G si el único conjugado de N es el mismo. Más aún, el siguiente teorema muestra que un subgrupo es normal si las clases izquierdas y derechas son iguales, de donde se tienen el mismo número de clases laterales izquierdas y derechas.

I.1.24 Teorema. *Sea N subgrupo de G. N es normal si y solo si $gN = Ng$ para todo $g \in G$.*

I.1.25 Corolario. *Si e es el neutro del grupo G, entonces $\{e\}$ es el subgrupo normal más pequeño de G.*

Los subgrupos $\{e\}$ y G son denominados subgrupos triviales de G.

Ss I.1.2. Homomorfismo

En general, una función que preserva la estructura dada en un conjunto recibe el nombre de transformación. En este sentido, los homomorfismos de grupos son transformaciones entre grupos ya que preservan la estructura del dominio mediante la relación de enviar al elemento neutro del dominio en el elemento neutro del contradominio, y dado un elemento, la imagen de su inverso es el inverso de su imagen. Si además, la función es biyectiva, esto es, la función envia a cada elemento a un único elemento del contradominio y todos los elementos de este último tienen una preimagen, se tiene entonces que los grupos son, en esencia, iguales.

I.1.26 Definición. Una función entre grupos $\varphi : G \to G'$ se dice `homomorfismo`, o `morfismo` de grupos, si para todo $g, h \in G$ se tiene $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$.
Si φ es inyectiva se denomina `monomorfismo` y `epimorfismo` si es sobre. Si φ es biyectiva se dice que es un `isomorfismo`. En el caso en que φ es un isomorfismo se dice entonces que G es `isomorfo` a G' y se denota por $G \simeq G'$.

I.1.27 Ejemplo. *La función determinante* $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} - \{0\}$ *es un homomorfismo entre el grupo general lineal de matrices y los reales distintos de cero con el producto usual, esto por la propiedad de los determinantes dada por*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

I.1.28 Teorema. *Todo subgrupo de G es isomorfo a cada uno de sus conjugados.*

Los isomorfismos preservan la estructura entre grupos dada por las respectivas operaciones por lo que preservan ciertas propiedades entre sus elementos.

I.1.29 Teorema. *Si $\varphi : G \to G'$ es un morfismo de grupos se tienen entonces las siguientes propiedades*

A) $\varphi(e) = e'$, donde e, e' son los neutros de G y G', respectivamente.

B) Si $g \in G$, entonces $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

C) Si $g \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$.

I.1.30 Definición. Sea $\varphi : G \to G'$ un morfismo de grupos. Se define el `kernel`, o `núcleo`, de φ como $ker\,\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e'\}$, donde e' es el neutro de G'.

Por el teorema anterior, el kernel de un homomorfismo es no vacío. El kernel ayuda a determinar si un morfismo es inyectivo.

I.1.31 Teorema. *Sea $\varphi : G \to G'$ un morfismo de grupos y e' el neutro de G'. φ es inyectivo si y solo si $ker\,\varphi = \{e'\}$.*

El kernel es cerrado bajo productos y toma de inversos dada la propiedad de separación de productos del respectivo homomorfismo.

I.1.32 Corolario. *El kernel es un subgrupo normal.*

Ss I.1.3. Producto directo

En el producto cartesiano de dos conjuntos puede definirse una operación a partir de las respectivas operaciones de tal forma que éste es un grupo siempre y cuando cada uno de los conjuntos sea grupo.

I.1.33 Definición. Dados dos grupos G_1 y G_2 , a la operación en $G_1 \times G_2$ dada por $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2)$ se le denomina `producto directo` de G_1 y G_2.

La operación dada en la definición anterior está bien definida pues cada entrada corresponde con las operaciones definidas en cada grupo factor.

I.1.34 Teorema. *El producto cartesiano de grupos es un grupo con la operación producto directo.*

I.1.35 Definición. Sean G_1 y G_2 grupos. El grupo $G_1 \times G_2$ con la operación producto directo se denomina `grupo producto` de G_1 y G_2.

I.1.36 Ejemplo. *El `Toro`, o Toroide, $\mathbb{T} := S^1 \times S^1$ es un grupo dado por el producto cartesiano bajo la operación dada por el producto directo del grupo circular S^1.*

Dados dos conjuntos no vacíos X_1 y X_2, las funciones

$$\begin{aligned} \pi_i : X_1 \times X_2 &\to X_i \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

$i = 1, 2$, se denominan proyecciones en la coordenada i.

I.1.37 Teorema. *Las proyecciones sobre el grupo producto de grupos son epimorfismos.*

El teorema anterior es válido para el producto arbitrario de la siguiente manera: si $\{G_\alpha\}$ una familia arbitaria de grupos, el producto cartesiano $\prod G_\alpha = \{(g_\alpha) : g_\alpha \in G_\alpha\}$ es un grupo respecto a la operación $(g_\alpha)(h_\alpha) = (g_\alpha h_\alpha)$.

Ss I.1.4. Grupo cociente

Dado un grupo, las clases laterales forman una partición del mismo. Tomando cada uno de estos conjuntos como elementos de la partición, se tiene que las clases laterales forman un grupo que depende de la operación dada en el grupo inicial. Más aún, en el caso en que el subgrupo es normal se define de manera natural una operación entre clases laterales de tal forma que el conjunto cociente es también un grupo.

I.1.38 Definición. Sean G grupo y H subgrupo de G. Se denotan por G/H al conjunto cociente de clases laterales izquierdas en G dada por H, esto es, $G/H := \{gH : g \in G\}$ y por $G\backslash H$ al conjunto de clases laterales en G dada por H, esto es, $G\backslash H = \{Hg : g \in G\}$.

Las clases laterales son subconjuntos del grupo, por lo que pueden operarse entre ellos como si se tratase de elementos del grupo, lo que permite definir un producto sobre las clases laterales. Si $N \lhd G$ y $g, h \in G$, entonces

$$NgNh = (gNg^{-1})gNh = gNNh = gNh = g(g^{-1}Ng)h = Ngh.$$

I.1.39 Teorema. *Si N es un subgrupo normal de G, entonces las clases laterales derechas forman un grupo con la operación dada por $Ng\,Nh = Ngh$.*

Demostración. Sean $g, h, k \in G$, entonces $Ng\,(Nh\,Nk) = Ng\,Nhk = Ng(hk)$ y por la propiedad asociativa en G se tiene que $Ng(hk) = N(gh)k = Ngh\,Nk = (Ng\,Nh)\,Nk$, por lo que la operación definida entre las clases laterales es asociativa. Para cualquier $g \in G$, se tiene que $Ng\,Ne = Nge = Ng$ con lo que Ne es el neutro en G/N, y $Ng\,Ng^{-1} = Ngg^{-1} = Ne$ de donde Ng^{-1} es el inverso del elemento Ng, esto es, $(Ng)^{-1} = Ng^{-1}$. $\square$

De manera similar, se define el producto en las clases laterales izquierdas como $gNhN = ghN$. Para cada clase lateral derecha se tiene una clase lateral izquierda, esto por la función $G/H \to G\backslash H$ dada por $gH \mapsto Hg$, por lo que se trabajará solamente con la notación G/H para el conjunto de clases laterales y se usará cualquiera de ellos sabiendo que para las clases laterales, ya sean izquierdas o derechas, se tienen definiciones y resultados análogos.

I.1.40 Definición. Sea N subgrupo normal de G. El grupo G/N con la operación dada por $NgNh = Ngh$ se denomina `grupo cociente` de G sobre N.

I.1.41 Ejemplo. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. La* `congruencia` *$a \equiv b \mod n$ (que se lee: a congruente con b módulo n) significa que n divide a $a - b$. Las congruencias generan una partición de los números enteros. Si $a \in Z$, sea $[a]$ la clase de a módulo n, esto es,*

$$\begin{aligned}[a] &= \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \mod n\} \\ &= \{a + kn : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

El conjunto $\mathbb{Z}_n$ de todas las congruencias mod n, esto es

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

es llamado el conjunto de `enteros módulo` *n. En $\mathbb{Z}_n$ definimos la suma módulo n dada por $[a] + [b] = [a + b]$. Con esta operación, $\mathbb{Z}_n$ es un grupo conmutativo en donde $[0]$ es el neutro. $\mathbb{Z}_n$ corresponde al grupo cociente del grupo $\mathbb{Z}$ y el subgrupo normal $n\mathbb{Z}$ dado por $n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$.*

I.1.42 Definición. Si G es grupo y N es subgrupo normal de G, se define la función `proyección natural` de G respecto a N como $\pi : G \to G/N$ dada por $\pi(g) = Ng$.

Dado que las clases laterales generan una partición del espacio, cada elemento del grupo pertenece a una clase lateral, es decir, la proyección es una función sobre.

I.1.43 Teorema. *La proyección natural, π, de G respecto a N es un epimorfismo tal que $ker\,\pi = N$.*

Demostración. Sean $g, h \in G$. Dado que $Ngh = NgNh$ se tiene que $\pi(gh) == \pi(g)\pi(h)$. Por otro lado, como $Ne = N$ es el neutro en G, $\pi(n) = N$ para todo $n \in N$ y $Ng \neq N$ si $g \notin N$, entonces se concluye $ker\,\pi = N$. $\square$

Ss I.1.5. Grupo de Transformaciones

En general, como se puede ver en Ejemplo I.1.2, el conjunto de biyecciones sobre un conjunto dado forman un grupo con la composición de funciones. Si el conjunto dado tiene una estructura, entonces el conjunto de aquellas biyecciones que preservan dicha estructura forman también un grupo con la composición, denominado grupo de transformaciones del conjunto.

Para un grupo, su grupo de transformaciones es el conjunto de isomorfismos del grupo en sí mismo.

I.1.44 Teorema. *Si G es un grupo y x es un elemento de G, la función $\varphi_x : G \to G$ dada por $\varphi_x(g) = xgx^{-1}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $g \in G$. Para $h = x^{-1}gx$ se tiene que $\varphi_x(h) = g$, por lo que φ_x es sobreyectiva. Por otro lado, $\varphi_x(g) = e$ si y solo si se tiene que $g = x^{-1}ex = e$, con lo que φ_x es inyectiva. Por último, si $g, h \in G$, entonces $\varphi_x(g)\varphi_x(h) = (xgx^{-1})(xhx^{-1}) = xghx^{-1} = \varphi_x(gh)$, con lo que φ_x es un homormorfismo. Se concluye entonces que φ_x es un isomorfismo. $\square$

I.1.45 Definición. Sea G grupo. Se denomina `Automorfismo de` G a todo isomorfismo de G en si mismo, y se denota por $Aut\,(G)$ al conjunto de todos los automorfismos, y `automorfimo interno` a las funciones $\varphi_x : G \to G$ definidas por las conjugaciones $x \mapsto xgx^{-1}$, y se denota por $Inn\,(G)$ al conjunto de todos los automorfismos internos.

La composición de isomorfismos es un isomorfismo ya que se preservan la biyectividad y la operación.

I.1.46 Teorema. *Sea G grupo. El conjunto de automorfismos forma un grupo con la operación composición y el conjunto de automorfismos internos es un subgrupo de él.*

Demostración. Para todo $\varphi : G \to G$ isomorfismo la función identidad en G, id_G, es un isomorfismo que satisface $\varphi\, id_G = \varphi = id_G\, \varphi$, con lo que id_G es el neutro de $Aut(G)$. Además, φ es invertible con inversa φ^{-1} tal que $\varphi\big(\varphi^{-1}(g)\varphi^{-1}(h)\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(g)\big)\varphi\big(\varphi^{-1}(h)\big) = gh = \varphi\big(\varphi^{-1}(gh)\big)$, de donde $\varphi^{-1}(gh) = \varphi^{-1}(g)\varphi^{-1}(h)$, es decir, φ^{-1} es un homomorfismo y por tanto isomorfimo. De lo anterior, $Aut\,(G)$ es un grupo.
Sean $x, y \in G$ y $\varphi_x, \varphi_y \in Inn(G)$. $\varphi_{y^{-1}}$ es el inverso de φ_y y para todo $g \in G$ se tiene que $\varphi_x\varphi_{y^{-1}}(g) = xy^{-1}gyx^{-1} = \varphi_{xy^{-1}}(g)$, es decir, $\varphi_x\varphi_{y^{-1}} \in Inn(G)$, de donde se sigue $Inn(G) \leq Aut(G)$. □

I.1.47 Definición. El grupo de automorfismos de un grupo G con la operación dada por la composición se denomina `grupo de transformaciones de` G.

Las traslaciones izquierdas (derechas) definidas en un grupo G forman un subgrupo conmutativo de las transformaciones del grupo en si mismo.

I.1.48 Teorema. *Sea G grupo. El conjunto de traslaciones forman un grupo con la operación composición.*

Demostración. Sean $x, y \in G$. Dado que las traslaciones son biyectivas, $L_{y^{-1}}$ es el inverso de L_y y $L_xL_{y^{-1}} = L_{xy^{-1}}$ es una traslación en G, se sigue que el conjunto de traslaciones es un subgrupo de $Biy(G)$. □

El siguiente es uno de los resultados más importantes de la teoría de grupos denominado Teorema de Cayley.

I.1.49 Teorema. *Todo grupo G es isomorfo a un grupo de permutaciones.*

Demostración. Sea $\gamma : G \to Biy(G)$ dada por $g \mapsto L_g$. Dado que las traslaciones forman un grupo y $L_{gh} = L_gL_h$ se tiene que γ es un homomorfismo. Cada traslación viene determinada por un único elemento de el grupo, con lo que γ es biyectiva y por tanto un isomorfismo. □

Las traslaciones definidas en un grupo inducen una traslación en el grupo cociente y constituyen un grupo, como en el caso de las traslaciones definidas en el grupo.

I.1.50 Teorema. *Sean G grupo, N subgrupo normal de G y G/N el grupo cociente. La función traslación en el cociente $L_x^* : G/N \to G/N$, dada por $L_x^*(gN) = (xg)N$ es biyectiva.*
El conjunto $\mathcal{L}^* = \{L_x^* : x \in G\}$ es un grupo, con la composición, homomorfo a G bajo la función $\varphi^* : G \to \mathcal{L}^*$ dada por $\varphi^*(x) = L_x^*$.

Demostración. Dado que $L_x^* = \pi L_x$, donde L_x es la traslación en G y π la proyección natural de G en G/N, entonces L_x^* está bien definida. Si $g_1, g_2 \in G$ son distintos y tales que $L_x^*(g_1N) = L_x^*(g_2N)$, entonces $(xg_1)N = (xg_2)N$ y así $xg_1(xg_2)^{-1} \in N$. Luego, $xg_1g_2^{-1}x^{-1} \in N$ y $g_1g_2^{-1} \in x^{-1}Nx \subseteq N$, por ser N normal. De lo anterior, $g_1g_2^{-1} \in N$ con lo que $g_1N = g_2N$ y así L_x^* es inyectiva. Claramente L_x^* es sobreyectiva pues $L_x^*(x^{-1}g) = gN$, para todo gN en G/N.
Dado que las funciones biyectivas sobre el grupo G/N forman un grupo y $L_x^*L_{y^{-1}}^* = L_{xy^{-1}}^*$ se sigue que $\mathcal{L}^*$ es un grupo.
Por último, $\varphi^*(xy) = L_{xy}^* = L_x^*L_y^* = \varphi^*(x) \circ \varphi(y)$ con lo que φ^* es un homomorfismo. □

S I.2. Acciones de grupo

Dado un conjunto conjunto no vacío y un grupo arbitrario, las acciones del grupo sobre el conjunto determinan transformaciones del conjunto en sí mismo.

I.2.1 Definición. Sean G grupo y X conjunto no vacío. Se dice entonces que G `actúa` por la izquierda en X si existe una función $\theta : G \times X \to X$, denotada por $\theta(g, x) = gx$, llamada `acción` de G en X, que satisface:

A_1) $ex = x$, para cada $x \in X$ y e el neutro de G.

A_2) $h(gx) = (hg)x$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

Si G actúa en X se dice entonces que X es un `G-conjunto`.

De manera similar se da la acción por la derecha sobre el conjunto X del grupo G como la función $\theta : X \times G \to X$, $(x, g) = xg$ que satisface $xe = x$ y $(xg)h = x(gh)$, para todo $x \in X$ y todo $g, h \in G$. Cada acción derecha determina una acción por izquierda definiendo $\theta'(x, g) = \theta(g^{-1}, x)$, y visceversa. Por lo tanto, se trabajará unicamente con acciones por izquierda, sabiendo que las definiciones y teoremas dados pueden obtenerse de la misma forma para las acciones por la derecha.

I.2.2 Ejemplo. *Dado un conjunto no vacío X, el grupo de permutaciones S_X actúa en X mediante evaluación.*

I.2.3 Ejemplo. *Sea $n \in \mathbb{N}$, el grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{R}^n$ mediante la multiplicación de una matríz por un vector.*

Toda grupo que actúa sobre un conjunto determina una acción de cualquier subgrupo sobre dicho conjunto ya que la operación es cerrada en los subgrupos.

I.2.4 Teorema. *Sean X un G-conjunto con acción θ y $H \leq G$, entonces $\theta|_{H\times X}$ es una acción de H en X.*

Los elementos del grupo que fijan al elemento x de un G-conjunto forman un subgrupo de G: si $g, h \in G$ son tales que $gx = x = hx$, entonces $h^{-1}x = x$, y así $(gh^{-1})x = g(h^{-1}x) = gx = x$, es decir gh^{-1} fija también a los elementos de X.

I.2.5 Definición. Sean X un G-conjunto y x un elemento de X. $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ se dice el `grupo de isotropía de` x.

El grupo de isotropía de un elemento x se denomina también el `estabilizador de` x.

Si $A \subseteq X$ se denota por G_A al subconjunto de elementos de G que fijan a todos los elementos de A, esto es, $G_A := \{g \in G : ga = a, a \in A\}$. G_A es también un subgrupo de G.

I.2.6 Definición. Si X es un G-conjunto y S es un subconjunto de G, se define el `conjunto` X^S `de puntos fijos` de X respecto a S como todos los puntos $x \in X$ tales que $gx = x$ para cada $g \in S$, esto es, $X^S = \{x \in X : S \subseteq G_x\}$.

I.2.7 Definición. Sea X un G-conjunto. Si $x \in X$, se define la `órbita` de x como el conjunto $Gx := \{gx : g \in G\}$.

Para cada elemento en el conjunto se tiene un grupo de isotropía asociado por lo que puede definirse el conjunto cociente a partir de ellos. Esto nos permite dar una relación entre las clases laterales en el cociente y los puntos de la órbita dada por el elemento. Más adelante se mostrará que las órbitas forman una partición del conjunto

I.2.8 Teorema. *Sean X un G-conjunto y x un elemento de X. Existe una biyección entre la órbita de x y las clases laterales de G_x en G.*

Demostración. Sea $\varphi : Gx \to G/G_x$ dada por $\varphi(gx) = gG_x$.
φ está bien definida y es inyectiva ya que $h, k \in G$ son tales que $hx = kx$ si y sólo si $k^{-1}hx = x$, es decir, $k^{-1}h \in G_x$ y por tanto están en la misma clase. Es claro que la función es sobreyectiva y por tanto biyectiva. $\square$

Puede distinguirse a una acción a partir de las propiedades del grupo de isotropía o de sus órbitas.

I.2.9 Definición. Sea X un G-conjunto. Se dice que la acción de G en X es:

· `Libre` si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$.

· `Efectiva` si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$.

· `Transitiva` si tiene una sola órbita.

En otras palabras, una acción θ de G en X es libre si todo elemento de G distinto de e mueve a los elementos de X a otro elemento, es efectiva si el único elemento de G que fija a todos los elementos de X es e y es transitiva si puede llevar cualquier elemento de X en cualquier otro mediante un elemento de G.

Si para cada elemento de el conjunto el único elemento del grupo que lo fija es el neutro entonces este es el único elemento en la intersección de todas las órbitas.

I.2.10 Teorema. *Toda acción libre es efectiva.*

I.2.11 Ejemplo. *Para el grupo $\mathbb{Z}_2$ y el conjunto dado por la esfera unitaria S^1 se tienen las siguientes acciones:*

- *La acción generada por la función antípoda $z \mapsto -z$, la cual está dada por*

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{Z}_2 \times S^1 &\to S^1 \\ (0, z) &\mapsto z \\ (1, z) &\mapsto -z \end{aligned}$$

La acción es libre ya que el único elemento que fija a los elementos de la esfera es 0, por tanto efectiva pero no transitiva ya que para cada $z \in S^1$ se tiene que su órbita está dada por $\mathbb{Z}_2 z = \{z, -z\}$. Esto último corresponde con el Teorema I.2.8, ya que $\mathbb{Z}_2/\big\{[0]\big\} \simeq \mathbb{Z}z$ tiene dos clases laterales.

- *La acción generada por la reflexión en el eje real $z \mapsto \bar{z}$, la cual está dada por la función*

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{Z}_2 \times S^1 &\to S^1 \\ (0, z) &\mapsto z \\ (1, z) &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

La acción no es libre, ya que 1 y -1 son puntos fijos y por tanto el grupo de isotropía de estos puntos son todo $\mathbb{Z}_2$, pero si es efectiva ya que el único elemento de Z_2 que fija a todos los puntos de S^n es el 0. La acción no es transitiva ya que las órbitas son $\mathbb{Z}_2 1 = \{1\}$, $\mathbb{Z}_2(-1) = \{-1\}$ y $\mathbb{Z}_2 z = \{z, \bar{z}\}$ para todo $z \notin \{1, -1\}$.

Una vez que se tiene una acción, se pueden operar elementos del grupo con elementos del conjunto. Podemos hacer esto mismo entre subconjuntos del grupo y subconjuntos del conjunto de manera natural.

I.2.12 Definición. Sea X un G-conjunto. Si $H \subseteq G$ y $A \subseteq X$ se define el `producto de` H `con` A como $HA := \{ha : h \in H, a \in A\}$.
Si $g \in G$ el producto $\{g\}A$ se denota gA, y si $x \in X$ el producto $H\{x\}$ se denota Hx.

Puede entenderse al conjunto gA como la traslación del subconjunto A mediante g. En el caso que para algún g se tenga que $gA = A$, si esto pasa se dice que g es un elemento absorbente por izquierda del conjunto A.

I.2.13 Definición. Sean X un G-conjunto y A un subconjunto de X. Se dice que A es un `conjunto invariante` con respecto a la acción dada si $GA = A$.

Siempre se tiene que $A \subset GA$ ya que si e es el neutro de G entonces $A \subset eA$, por lo que para demostrar que un conjunto es invariante basta probar que $GA \subset A$. No debe confundirse la definición de ser invariante de un subconjunto con la definición de propiedad invariante que mantienen ciertos grupos: una propiedad de un grupo que se mantiene bajo isomorfismos es llamada una `propiedad invariante`.

I.2.14 Teorema. *Sea X un G-conjunto. Las órbitas Gx son conjuntos invariantes*

Un conjunto es invariante si absorbe los conjuntos gA. Dada esta capacidad de absorción de un subconjunto invariante A de X la acción determina una acción de grupo en A.

I.2.15 Teorema. *Sean X un G-conjunto y $A \subseteq X$. Para todo conjunto invariante A se tiene que $\theta|_{G\times A}$ es una acción de G en A.*

I.2.16 Corolario. *Las órbitas de un G-conjunto son G-conjuntos.*

Ss I.2.1. Acciones sobre conjuntos arbitrarios

Sobre un conjunto no vacío cualquiera pueden definirse de manera inmediata ciertas acciones. Algunos ejemplos de ello son las funciones dadas por el grupo de permutaciones del conjunto y las funciones que dejan invariante a los elementos del conjunto.

I.2.17 Teorema. *Sean G un grupo arbitrario y X un conjunto no vacío. G actúa sobre X mediante la acción $\theta : G \times X \to X$ dada por $(g, x) \mapsto gx = x$ la cual se denomina `acción trivial`. En tal caso, X se dice G-espacio trivial.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x = y$, entonces $gx = gy$ y por tanto la acción θ esta bien definida. Dado que $ex = x$ y $g(hx) = x = (gh)x$ se tiene que, en efecto, θ es acción. □

I.2.18 Teorema. *Si X es un G-espacio y H es subgrupo de G, entonces la acción de H en X^H es trivial.*

Demostración. Sea $x \in X^H$. Si $h \in H$ entonces $hx = x$ ya que x es un punto fijo de X respecto a H. $\square$

I.2.19 Corolario. *Si G actúa trivialmente sobre X, entonces $G_x = G$, para todo $x \in X$.*

Usualmente, si una acción es tal que $G_x = G$, para todo $x \in X$, entonces se dice que la acción es trivial. Del resultado anterior se sigue que si la acción es trivial entonces para $A \subseteq X$ y $x \in A$, se tiene que $gx \in A$, es decir, las órbitas $Gx \subseteq A$.

I.2.20 Corolario. *Si G actúa trivialmente sobre X, entonces $G_A = A$, para todo $A \subseteq X$.*

I.2.21 Teorema. *Sea X un conjunto no vacío. El grupo de permutaciones sobre X actúa sobre el conjunto mediante la función $\theta : S_X \times X \to X$ dada por $\theta\big((\sigma, x)\big)\sigma x := \sigma(x)$, la cual se denomina* `Acción natural` *sobre X.*

Demostración. Sean $\sigma, \gamma \in S_X$ y $x, y \in X$ tales que $\sigma = \gamma$ y $x = y$. Se tienee que $\sigma(x) = \gamma(y)$ y por tanto θ está bien definida. Dado que $id_X(x) = x$ y la composición de funciones es asociativa se sigue que θ es acción. $\square$

Podemos notar que la condición A_1) de Definición I.2.1 asegura que las acciones son funciones sobreyectivas, por lo que la función constante $\theta : G \times X \to X$, dada por $\theta(g, x) = x_0$, con $x_0 \in X$, no es una acción.

Ss I.2.2. Acciones de un grupo sobre si mismo

La operación entre los elementos de un grupo pueden ayudar a definir acciones de un grupo sobre sí mismo, dando como resultado que un grupo es un G-conjunto de sí mismo.

I.2.22 Teorema. *Sea G grupo arbitrario, entonces G actúa sobre sí mismo mediante la función $\mu : G \times G \to G$ dada por $\mu\big((g, g')\big) = gg'$, denominada* `acción traslación izquierda`

Demostración. Sean $g, h, g', h' \in G$, con $g = h$ y $g' = h'$, entonces $gg' = hh'$, por lo que la función μ está bien definida y es acción pues $eg = g$, para toda $g \in G$, y la operación en G es asociativa. $\square$

De manera similar se define la acción traslación derecha. Las órbitas de G-conjuntos son entonces G-conjuntos bajo la acción restringida y también bajo las acciones traslación.

I.2.23 Corolario. *Si X es un G-conjunto, entonces G actúa sobre las órbitas bajo la acción traslación.*

I.2.24 Teorema. *La acción traslación de un grupo sobre sí mismo es libre y transitiva.*

Demostración. Sean G grupo y $x \in G$. Si $gx = x$ entonces $g = e$, con lo que el único elemento de G que fija a x es e y por tanto $G_x = \{e\}$, es decir, la acción es libre.
Sean $x, y \in G$. Si $g = yx^{-1}$ entonces $gx = y$, con lo que cualquier par de elementos de G se encuentran en la misma órbita y por tanto la acción es transitiva. □

La acción traslación puede definirse también a partir de subgrupos ya que la operación de sus elementos es cerrada en el conjunto, lo cual se deduce del Teorema I.2.4.

I.2.25 Corolario. *Todo subgrupo de G actúa por traslación sobre G y la órbita de cada elemento de G coincide con su clase lateral.*

La acción traslación en el grupo induce también una acción en el conjunto de clases laterales.

I.2.26 Corolario. *Para todo subgrupo H de G se tiene que la la función $\theta : G \times G\backslash H \to G\backslash H$ dada por $\theta\big((g', gH)\big) = g'\, gH := (g'g)H$ es una acción transitiva.*

I.2.27 Corolario. *Sean G grupo y N subgrupo normal de G. Si N actúa por traslación sobre G, entonces el conjunto de órbitas coincide con el grupo cociente G/N y la proyección orbital coincide con la proyección natural del grupo al grupo cociente.*

I.2.28 Teorema. *Sean G grupo y N subgrupo normal de G. G actúa por conjugación sobre N, es decir, la función $\mu : G \times N \to G$ dada por $\mu\big((g, n)\big) = gng^{-1}$ es una acción de G en N, denominada* ***acción conjugación****.*

Demostración. Sean $g, h \in G$ y $n_1, n_2 \in N$ tales que $g = h$ y $n_1 = n_2$, entonces $g^{-1} = h^{-1}$ y por tanto $gn_1g^{-1} = hn_2h^{-1}$, de donde, μ está bien definida.
Dado que $ene^{-1} = n$ y $hgng^{-1}h^{-1} = (hg)n(hg)^{-1}$ se sigue que μ es acción. □

Ss I.2.3. Acciones sobre producto cartesiano

En los siguientes teoremas se definen acciones sobre el producto cartesiano de G-conjuntos dados.

I.2.29 Teorema. *Si G actúa en una colección de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, entonces la función $\psi : G \times \prod\limits_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ dada por $\psi\big(g, (x_\alpha)\big) = g\,(x_\alpha) := (gx_\alpha)$ es una acción de G sobre el producto cartesiano denominada* ***acción diagonal****.*

Demostración. Sean $g, h \in G$ y $(x_\alpha), (y_\alpha) \in \prod X_\alpha$ tales que $g = h$ y $(x_\alpha) = (y_\alpha)$, entonces $x_\alpha = y_\alpha$ para todo $\alpha \in \Delta$. De lo anterior, se sigue que $(gx_\alpha) = (hy_\alpha)$ y por tanto ψ está bien definida.
Dado que $(ex_\alpha) = (x_\alpha)$ y $g(hx_\alpha) = (ghx_\alpha)$, para toda $(x_\alpha) \in \prod X_\alpha$, entonces ψ es acción de G sobre $\prod X_\alpha$. □

I.2.30 Teorema. *. Si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una familia de conjuntos tal que cada X_α es un G_α-conjunto, entonces la función $\psi : \prod\limits_{\alpha\in\Delta} G_\alpha \times \prod\limits_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ dada por $\psi\big((g_\alpha),(x_\alpha)\big) = (g_\alpha)(x_\alpha) := (g_\alpha x_\alpha)$ es una acción del producto directo $\prod G_\alpha$ sobre el producto cartesiano $\prod X_\alpha$ denominada* `Acción por cordenadas`.

Demostración. Sean $(g_\alpha),(h_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Delta} G_\alpha$ y $(x_\alpha),(y_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ tales que $(g_\alpha) = (h_\alpha)$ y $(x_\alpha) = (y_\alpha)$, entonces $g_\alpha = h_\alpha$ y $x_\alpha = y_\alpha$ para toda $\alpha\in\Delta$. Así, $g_\alpha x_\alpha = h_\alpha y_\alpha$, para toda $\alpha\in\Delta$, de donde $(g_\alpha x_\alpha) = (h_\alpha y_\alpha)$, con lo que ψ está bien definida.
Dado que $(e_\alpha x_\alpha) = (x_\alpha)$ y $(g_\alpha)(h_\alpha x_\alpha) = (g_\alpha h_\alpha x_\alpha) = (g_\alpha h_\alpha)(x_\alpha)$ se sigue que ψ es acción. □

Ss I.2.4. Acciones en el conjunto orbital

Las órbitas en un G-conjunto X determinan una partición del conjunto dada por la relación de equivalecia en X "pertenecer a la misma órbita": dos elementos $x, y\in X$ estan en la misma órbita si y solo si existe $g\in G$ tal que $x = gy$. En tal caso se tiene el conjunto cociente sobre el conjunto X dada por las órbitas en X

I.2.31 Definición. Sea X un G-conjunto. El conjunto cociente dado por las órbitas se denomina `conjunto de órbitas`, o `conjunto orbital`, y se denota por X/G, esto es, $X/G = \{Gx : x \in X\}$. La proyección natural definida sobre el conjunto cociente se dice `proyección órbital` y se denota por π, es decir, $\pi : X \to X/G$, donde $\pi(x) = Gx$

I.2.32 Teorema. *Sea X un G-conjunto. Si la acción es trivial entonces X/G coincide con X.*

Demostración. Dado que la acción es trivial, para cada $x \in X$ se tiene $Gx = \{x\}$ por lo que cada conjunto unipuntual es una órbita, es decir, $X/G = \big\{\{x\} : x \in X\big\}$. Se tiene entones la biyección $x \mapsto \{x\}$ por lo que X/G coincide con el X. □

I.2.33 Teorema. *Sea X un G-conjunto. Si la acción es transitiva entonces $X/G = \{X\}$.*

Demostración. Si la acción es transitiva entonces el espacio orbital solo tiene una órbita, es decir, el espacio orbital consta únicamente de un elemento, X. □

Se tienen de manera natural acciones en los conjuntos orbitales dados por el grupo y por el grupo cociente.

I.2.34 Teorema. *Sean X un G-conjunto y N subgrupo normal de G. La función dada por $\psi : G \times (X/N) \to X/N$ dada por $\psi\big((g, Nx)\big) = Ngx$ es una acción del grupo G en el conjunto orbital X/N.*

Demostración. Sean $g, h\in G$ y $Nx, Ny\in X/N$ tales que $g = h$ y $Nx = Ny$. Como x y y estan en la misma órbita, existe $n\in N$ de tal manera que $y = nx$, así $Nhy = Ngnx = N(gng^{-1})gx$ y como $N \lhd G$ entonces $gng^{-1}\in N$ y por tanto $\psi(h, Ny) = Ngx = \psi(g, Nx)$.
Dado $Nex = Nx$ y $Ng(hx) = Nghx$ se sigue que ψ es acción. □

I.2.35 Teorema. *Si X es G-conjunto y N es un subgrupo normal a G, entonces la función $\psi : (G/N) \times (X/N) \to X/N$ dada por $\psi\big((Ng, Nx)\big) = NgNx = Ngx$ es una acción del grupo cociente G/N en el conjunto orbital X/N. Además, hay una biyección*

$$\xi : (X/N)/(G/N) \to X/G$$

que satisface $\xi\pi''\pi' = \pi$, donde $\pi : X \to X/G$, $\pi' : X \to X/N$ y $\pi'' : X/N \to (X/N)/(G/N)$ son las proyecciones orbitales, es decir, ξ es tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"] & X/G \\ X/N \arrow[r, "\pi''"] & (X/N)/(G/N) \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}.$$

Demostración. Sean $Ng, Nh \in G/N$ y $Nx, Ny \in X/N$ tales que $Ng = Nh$ y $Nx = Ny$. Dado que g y h están en la misma clase lateral y, x y y están en la misma órbita, existen $n_1, n_2 \in N$ tales que $h = n_1 g$ y $y = n_2 x$, luego $Nhy = Nn_1gn_2x = Ngn_2x = N(gn_2g^{-1})gx$. Dado que $gn_2g^{-1} \in N$ por ser $N \lhd G$, se tiene $\psi(Nh, Ny) = Ngx = \psi(Ng, Nx)$, y por tanto ψ está bien definida.
Sean $g, h \in G$. Como $Ng\big(NhNx\big) = NgNhx = Nghx = NghNx$ y
$NeNx = Nex = Nx$, para todo $x \in X$, se sigue que ψ es acción.
Sea $\xi : (X/N)/(G/N) \to X/G$ dada por $\xi\big((G/N)Nx\big) = Gx$, se afirma que ξ es la función que hace conmutar al diagrama. Si $Nx, Ny \in X/N$ son tales que $(G/N)Nx = (G/N)Ny$, entonces existe $Ng \in G/N$ tal que $Nx = NgNy$, es decir, $Nx = Ngy$ y por tanto existe $n \in N$ tal que $x = ngy$. Como $ng \in G$ entonces $Gx = Gy$ y por tanto $\xi\big((G/N)Nx\big) = \xi\big((G/N)Ny\big)$, con lo que ξ está bien definida.
Sean $(G/N)Nx, (G/N)Ny \in (X/N)/(G/N)$ tales que $Gx = Gy$, entonces existe $g \in G$ tal que $x = gy$, de donde $Nx = Ngy = NgNy$ y por tanto $(G/N)Nx = (G/N)Ny$, es decir, ξ es inyectiva. Para $Gx \in X/G$, es claro que $\xi\big((G/N)Nx\big) = Gx$ y por tanto es sobre. □

Los elementos de X/N son las órbitas Nx, así $(G/N)Nx$ denota la órbita de el elemento Nx bajo la acción el grupo G/N. El teorema anterior señala que G/N actúa en X/N de manera que su conjunto de órbitas está en correspondencia con las órbitas generadas por el grupo G actuando en X.

Ss I.2.5. Grupo de transformaciones

I.2.36 Teorema. *Sea X un G-conjunto con acción θ. Para cada $g \in G$, la acción θ de G induce una permutación en X dada por la transición θ_g.*

Demostración. Si $g \in G$, sea $\theta_g : X \to X$ dada por $\theta_g(x) = gx$.
Sean $x, y \in X$ con $x = y$, entonces $gx = gy$ y por tanto la función θ_g está bien definida.
Si $x, y \in X$ son tales que $gx = gy$, entonces $y = g^{-1}gx = ex = x$ por lo que θ_g es inyectiva. Si $x = g^{-1}y$ entonces $\theta_g(x) = y$ y así la función se sobre. □

I.2.37 Definición. Sea X un G-conjunto con acción θ. La transformación $\theta_g : X \to X$, dada por la regla se asignación $x \mapsto gx$ se denomina `transición` de X respecto de g.

I.2.38 Teorema. *El conjunto de transiciones generado por la acción de un grupo G sobre un conjunto X es un grupo con la composición de funciones.*

Demostración. Dado que $\theta_g\big(\theta_h(x)\big) = \theta_g(hx) = (gh)x$, para toda $x \in X$, es claro que $\theta_g\theta_h = \theta_{gh}$ con lo que la composición de transiciones es una transición. La asociatividad es consecuencia inmediata de la propiedad asociativa de la composición. Por otro lado, para todo $g \in G$ y toda $x \in X$ se tiene $\theta_e\theta_g(x) = \theta_e gx = egx = gx = \theta_g(x)$ y $\theta_g\theta_e(x) = \theta_g ex = gx = \theta_g(x)$, de donde θ_e es el elemento neutro del conjunto de transiciones. Sea $g \in G$, entonces para cada $x \in X$ se tiene $\theta_g\theta_g^{-1}(x) = \theta_g g^{-1}x = g\,g^{-1}x = x = \theta_e$ y $\theta_g^{-1}\theta_g(x) = \theta_g^{-1}gx = g^{-1}\,gx = x = \theta_e$ de donde y $\theta_{g^{-1}}$ es el inverso de θ_g. Por lo anterior, el conjunto de transiciones es un grupo. □

Dado que el conjunto de biyecciones de todo conjunto es un grupo, se tiene entonces que el grupo de transiciones de un grupo G es subgrupo de su grupo de permutaciones. Todo grupo G actúa sobre si mismo por traslación y las transiciones corresponden con las traslaciones se tiene entonces una consecuencia inmediata del Teorema de Cayley, el cual se enuncia en Teorema I.1.49, que dice que toda acción induce un homomorfismo. Además, la relación inversa entre éstos también sucede, es decir, todo homomorfismo de un grupo en el conjunto de permutaciones de un conjunto induce una acción una acción del grupo sobre el conjunto.

I.2.39 Teorema. *Toda acción de un grupo G sobre un conjunto X induce un homomorfismo del grupo G en el grupo de permutaciones de X. Conversamente, cada homomorfismo $G \to Biy(X)$ define una acción la cual hace de X un G-conjunto.*

Demostración. Si X es un G-conjunto con acción θ entonces para la relación $\Theta(g) = \theta_g$ se tiene que $\Theta(hk) = \theta_{hk} = \theta_h\theta_k = \Theta(h)\Theta(k)$, por lo que Θ es un morfismo de grupos.
Por otro lado, dado un morfismo $\varphi : G \to Biy(X)$, se define la función $\tilde{\varphi} : G \times X \to X$ como $\tilde{\varphi}(g,x) = \varphi(g)\big(x\big)$. Sean $g,h \in G$ y $x,y \in X$ tales que $g = h$ y $x = y$, entonces $\varphi(g) = \varphi(h)$ y por tanto $\varphi(g)\big(x\big) = \varphi(h)\big(y\big)$, con lo que $\tilde{\varphi}$ está bien definida. Dado que φ es un homomorfismo se tienen que $\varphi(e) = id_X$, donde la función identidad de X, id_X, es el elemento neutro de S_X. De lo anterior se sigue que $\tilde{\varphi}\big(g, \tilde{\varphi}(h,x)\big) = \tilde{\varphi}\big(g, \varphi(h)\big(x\big)\big) = \varphi(g)\varphi(h)\big(x\big) = \varphi(gh)(x) = \tilde{\varphi}(gh,x)$ y $\tilde{\varphi}(e,x) = \varphi(e)\big(x\big) = id_X(x) = x$, por lo que $\tilde{\varphi}$ es una acción de G en X. □

I.2.40 Definición. Sea X un G-conjunto con acción θ. Se denominan `homomorfismo inducido por la acción` θ al homomorfismo $\Theta : G \to Biy(X)$ dado por $\Theta(g) = \theta_g$, `grupo de transformaciones`, denotado por la terna (G, X, θ), al grupo definido por el conjunto de transiciones bajo la composición de funciones y `acción inducida por el homomorfismo` $\varphi : G \to S_X$ a la acción $\Phi : G \times X \to X$ dada por $\varphi\big((g,x)\big) = \varphi(g)\big(x\big)$.

Como conscuencia del teorema anterior, se tiene otra representación de las acciones a través de homomorfismos.

I.2.41 Definición. Sean G grupo y X un conjunto no vacío. Se dice que G actúa en X si existe un homomorfismo de grupos $\varphi : G \to S_X$. En tal caso φ se denomina acción de G e X.

I.2.42 Ejemplo. *Un ejemplo de lo visto anteriormente esta dado por las matrices. Se sabe del algebra lineal que toda matriz A tiene asociada una transformación lineal T_A y visceversa, con lo que la acción de $GL(n,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$ puede verse como el homeomorfismo $A \to T_A$.*

I.2.43 Teorema. *Sean X un G-conjunto con acción θ y Θ el homomorfismo inducido por θ. Se tiene entonces que $ker\,\Theta = \bigcap\limits_{x\in X} G_x$.*

Demostración. Sea $g \in G$. $g \in ker\,\Theta$ si y solo si $\theta_g = \theta_e$, es decir $gx = x$ para toda $x \in X$, de donde $g \in G_x$ para toda $x \in X$. $\square$

Si la acción es efectiva entonces $\bigcap\limits_{x\in X} G_x = \{e\}$ y por tanto se tiene el siguiente corolario.

I.2.44 Corolario. *Sea X un G-conjunto. La acción es efectiva si y solo si el homomorfismo inducido por la acción es inyectivo.*

Si se tiene una acción trivial en un G-conjunto X entonces $G_x = G$, para toda $x \in X$, con lo que para toda $g \in G$ y toda $x \in X$ se tiene que $gx = x$, es decir, $\theta_g = \theta_e$, por tanto $\Theta(G) = \{e\}$. Así, la acción trivial es tal que el grupo de transiciones consta de un solo elemento, el neutro.

Una manera de obtener acciones triviales sobre un G-conjunto es mediante el kernel de el homomorfismo inducido.

I.2.45 Teorema. *Sea X un G-espacio con acción θ. Si Θ es el homomorfismo inducido por la acción, entonces $ker\,\Theta$ actúa trivialmente en X.*

Demostración. Sea $K = ker\,\Theta$. Si $g \in K$, entonces $\Theta(g) = \theta_e$ con lo que $\theta_g = \theta_e$ y así $gx = x$ para toda $x \in X$. Todo elemento de el kernel fija a los elementos de X, $K_x = K$, y por tanto $\theta|_{K\times X}$ es trivial. $\square$

Sea $x \in X$. Dado que K actúa trivialmente en X se tiene $gx = x$ para toda $g \in G$, es decir, el único elemento de la órbita de x es x misma, por lo que cada conjunto unipuntual $\{x\}$ es una órbita.

I.2.46 Corolario. *Sea X un G-espacio. Si Θ es el homomorfismo inducido por la acción y $K = ker\,\Theta$ entonces $X/K = X$.*

S I.3. Topología

Una topología es una estructura definida sobre un conjunto dado que pretende dar una idea, en primera instancia, sobre el concepto de proximidad entre sus elementos mediante al definir ciertas propiedades entre los conjuntos que los contienen.

I.3.1 Definición. Se X conjunto no vacío. Una `topología` sobre X es una familia de subconjuntos τ de X que satisfacen las siguientes condiciones

τ_1) $\emptyset, X \in \tau$.

τ_2) Sea $n \in \mathbb{N}$, si $U_1, \cdots, U_n \in \tau$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

τ_3) Si $\mathcal{A} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{U \in \mathcal{A}} U_j \in \tau$.

Al conjunto X con una topología τ se le llama `espacio topológico`.
Los elementos $U \in \tau$ se dicen conjuntos `abiertos` y sus complementos se denominan conjuntos `cerrados`.

I.3.2 Ejemplo. *Sea X un conjunto no vacío. Sobre X se definen trivialmente las siguientes topologías:*

A. *$\tau_I = \{\emptyset, X\}$ es llamada* ***topología indiscreta****. El conjunto X con esta topología se dice espacio indiscreto.*
τ_I es la topología más pequeña que puede definirse en un conjunto, en el sentido de inclusión, es decir, si τ es otra topología para X entonces $\tau_I \subseteq \tau$. $\emptyset$ y X son los únicos cerrados de τ_D.
Como los únicos abiertos de X son el conjunto mismo y el conjunto vacío puede entenderse, informalmente, que sus puntos son todos muy cercanos, es decir, que topológicamente son indistinguibles

B. *$\tau_D = P(X)$, donde $P(X)$ es el conjunto potencia de X, es llamada la* ***topología discreta*** *de X y X con dicha topología se denomina espacio discreto. Todos los subconjuntos de X son abiertos y cerrados.*
τ_D es la más grande de todas las topologías, esto es, si τ es una topología para X, entonces $\tau \subseteq \tau_D$.
Como todos los conjuntos unipuntuales son abiertos puede entenderse, informalmente, que sus puntos pueden separarse entre ellos.

De la definición de conjuntos cerrados se tiene de manera inmediata que la intersección arbitraria y la unión finita de cerrados es un conjunto cerrado. Dado la similitud entre el siguiente teorema y la definición anterior, y que de uno de ellos se tiene como consecuancia directa la otra, en algunos casos se toma el teorema como definición de topología.

I.3.3 Teorema. *Sea X un espacio, se tiene entonces lo siguiente:*

A) $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados.

B) Sea $n\in\mathbb{N}$, si $B_1,\cdots,B_n$ son cerrados entonces $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ es un conjunto cerrado.

- *Si $\{A_j\}_{j\in J}$ es una colección de cerrados, entonces $\bigcap_{j\in J} B_j$ es un conjunto cerrado.*

Ss I.3.1. Bases

En muchos casos, especificar los elementos de una topología puede ser muy complicado, es por esto que se hace uso de colecciones más pequeñas de subconjuntos que definen a una topología.

Las bases y subbases son familias de subconjuntos que generan a una topología de diferentes maneras a partir de unión de sus elementos en el caso de las bases y de unión de intersecciones finitas en el caso de una subbase. Más aún, las subbases son familias más generales que incluso son útiles para la construcción de bases por lo que puede considerarse a las subbases como el conjunto más pequeño que genera a una topología.

I.3.4 Definición. Sea X un conjunto no vacío. Una `base` para una topología en X es una colección β de subconjuntos de X, llamados `básicos`, que satisface

β_1) Para cada $x\in X$, hay al menos un elemento $B\in\beta$ tal que $x\in\beta$.

β_2) Si $x\in B_1\cap B_2$, con $B_1, B_2\in\beta$, entonces existe $B_3\in\beta$ con $x\in B_3$ tal que $B_3\subseteq B_1\cap B_2$.

Si β satisface estas dos condiciones, se define la `topologia` τ `generada por` β como sigue: $U\subseteq X$ se dice que es abierto en X, esto es $U\in\tau$, si para cada $x\in U$, existe $B\in\beta$ tal que $x\in B\subseteq U$.

Si X es un espacio topológico y se tiene una subfamilia de la topología en X que satisface las dos condiciones anteriores, es claro entonces que la topología está generada por esta familia de subconjuntos que además permite que muchas de las propiedades que se demuestran a partir de conjuntos abiertos, pueda simplemente demostrarse a partir de estos abiertos básicos.

I.3.5 Ejemplo. *Sea E un espacio normado con norma $||\cdot||$. El conjunto de bolas abiertas $\beta_{||\cdot||}=\{B_r(x) : x\in E, r>0\}$, donde $B_r(x) := \{y\in\mathbb{R}^n : ||y-x|| < r\}$ y $r>0$, es base para una topología $\tau_{||\cdot||}$ en E llamada* ***`topología inducida por la norma`***.

I.3.6 Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ *es un espacio topologíco con la topología generada por la norma usual en $\mathbb{R}^n$ dada por $||(x_1,\ldots,x_n)||^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.*

I.3.7 Ejemplo. *Si E es un espacio métrico con distancia d entonces el conjunto de bolas abiertas, donde cada bola abierta está dada por $B_r(x) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$, es base para una topología en E llamada* `topología inducida por la métrica`*.*
Si E es un espacio normado entonces la norma y la métrica inducida por la norma definen la misma topología.

No cualquier familia de subconjuntos de un conjunto no vacío puede ser una base para una topología. Una forma más sencilla para describir a la topología generada por una base está dada en el siguiente teorema.

I.3.8 Teorema. *Si β es una base para la topología τ sobre un conjunto X, entonces τ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de β.*

En algunos textos especializados puede encontrarse el teorema anterior como la definición de topología generada por una base y la definición dada aquí como su equivalencia. En el siguiente teorema, por el contrario a los casos anteriores, dada una topología y una familia de abiertos, se dan las condiciones necesarias para asegurar que es una base para dicha topología.

I.3.9 Teorema. *Sea X un espacio con topología τ. Si $\mathcal{C} \subseteq \tau$ es tal que para cada $x \in X$ y $U \in \tau$, con $x \in U$, existe $C \in \mathcal{C}$ con $x \in C \subseteq U$, entonces $\mathcal{C}$ es base para τ.*

I.3.10 Ejemplo. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ un conjunto con cuatro elementos distintos.*

A. La familia $\beta' = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$ no es base para alguna topología en X, esto pues a pesar de que cubre a todo el espacio y que todas las uniones de elementos pertenecen a la familia entonces, en caso de existir, la topología generada sería el mismo β', sin embargo, $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ no se encuentra en la familia.

B. La familia $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ es una topología en X y $\beta_1 = \{\{a\}, X\}$ es base para τ_1.

C. La familia $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ es una topología en X y, por su parte, la familia $\beta_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ es base para τ_2.

Pueden tenerse más de una base para una topología y no siempre una familia de conjuntos que cubre a todo el espacio es base para una topología. Si tenemos una familia de subconjuntos que cubren a todo el conjunto, una forma para generar una topología a partir de esta familia es, además de tomar las uniones como en el caso de las bases, tomar tambien las intersecciones finitas, con lo que se completan las propiedades para una topología.

I.3.11 Definición. Sea X un espacio. Una `subbase` $\mathcal{S}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X.
La `topología generada por una subbase` $\mathcal{S}$ se define como la colección τ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

I.3.12 Ejemplo. *La familia* $\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a < b\}$ *forman una base para una topología en* $\mathbb{R}$*, llamada la* **`topología usual en`** $\mathbb{R}$*. Además, las familias* $\big\{\{x \in \mathbb{R} : x < a\} : a \in \mathbb{R}\big\}$ *y* $\big\{\{x \in \mathbb{R} : x > a\} : a \in \mathbb{R}\big\}$ *son subbases para la topolgía usual en* $\mathbb{R}$*.*

El siguiente teorema relaciona los conceptos de base y subbase, y nos concluye que todo elemento subbásico es también un elemento básico para una base que genera a la topología, por lo que se tiene que toda base es a su vez una subbase para alguna topología.

I.3.13 Teorema. *Sea* X *un conjunto.* $\mathcal{S}$ *es subbase para una topología en* X *si y solo si la familia de intersecciones finitas de elementos de* $\mathcal{S}$ *es una base para dicha topología.*

Si se tiene un espacio topológico muchas veces nos interesa saber si cierta familia de subconjuntos es subbase para la topología definida.

I.3.14 Teorema. *La familia* $\mathcal{S} = \{S_\alpha : S_\alpha \subseteq X\}$ *es una subbase para la topología de el espacio* X *si y solo si para cada abierto* U *de* X *y cada* $x \in U$ *existen* $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_m} \in \mathcal{S}$ *tales que* $x \in S_{\alpha_1} \cap \cdots \cap S_{\alpha_m} \subseteq U$*.*

Ss I.3.2. Conceptos elementales

La topología de un conjunto se define a partir de una familia de conjuntos que satisfacen ciertas condiciones, sin embargo no siempre se presenta de manera explicita esta familia, como en el caso de tener bases y subbases. Es por ello que en muchas ocasiones, saber si un conjunto es abierto o cerrado no siempre es posible en términos de los conjuntos abiertos o cerrados que ya conocemos. Por esta razón, se vuelve de interés saber identificar estos conceptos en términos de los elementos del espacio topológico y sus propiedades respecto al conjunto en cuestión.

I.3.15 Definición. Sean X un espacio, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Se dice que x es `punto interior` de A si existe un abierto U de x tal que $U \subseteq A$, x está en la `cerradura` de A si para todo abierto U de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$ y x es `punto frontera` si para todo U abierto de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap (X - A)$.
El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama el `interior de` A y se denota por $int(A)$, la cerradura de A se denota por $\overline{A}$ y el conjunto de todos los puntos frontera de A se denomina `frontera de` A y se denota por $Fr(A)$

Para demostrar que un punto es de los definidos anteriores, basta con demostrarlo para abiertos básicos. El interior y la cerradura de conjuntos preservan la contenencia de conjuntos.

I.3.16 Teorema. *Sea* X *un espacio. Si* $A, B \subseteq X$*, entonces* $int(A) \subset int(B)$ *y* $\overline{A} \subset \overline{B}$*.*

Los puntos interiores de un conjunto A son elementos del conjunto que quedan completamente contenidos en él, con lo que es fácil ver que $int(A) \subseteq A$. De manera similar, todo elemento del conjunto A interseca a todo abierto que lo contenga, con lo que $A \subseteq \overline{A}$. Con esto se tienen las siguientes propiedades.

I.3.17 Teorema. *Sean X un espacio y $A \subseteq X$, se tienen entonces:*

A) A es abierto si y solo si $A = int(A)$.

B) A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

C) $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} = \overline{A} - int(A)$.

Para determinar si un subconjunto es abierto, basta mostrar que cada uno de sus puntos es un punto interior. Existen entonces conjuntos que contienen puntos en su interior pero que no son necesariamente abiertos.

I.3.18 Ejemplo. *En la topología generada por la norma, se define la bola cerrada centrada en $x \in E$ de radio $r > 0$ como*

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in E : ||y - x|| \leq r\}.$$

Las bolas cerradas centradas en x y de radio r corresponden a las cerraduras de las bolas abiertas centradas en x y de radio r, esto es, $\overline{B}_r(x) = \overline{B_r(x)}$ por lo que las bolas cerradas con conjuntos cerrados de E.
La frontera de la bola abierta son los conjuntos

$$S_r(x) := \{y \in E : ||y - x|| = r\}$$

llamada esfera de radio r y centro x.

I.3.19 Ejemplo. *En $\mathbb{R}$ con la topogía usual, se tienen*
$int\big([0,1]\big) = (0{,}1)$, $\overline{(0,1)} = [0,1]$ *y* $Fr\big((0,1)\big) = Fr\big([0,1]\big) = \{0,1\}$.

I.3.20 Definición. Sean X espacio y $x \in X$. Un subconjunto $A \subseteq X$ se denomina `vecindad de` x si $x \in int(A)$. Si A es abierto se dice que es una vecindad abierta de x.

Las vecindades de un punto en un espacio son una manera de describir el comportamiento local de la topología en cada uno de sus puntos.

I.3.21 Definición. Sea X un espacio. Una familia de vencindades de x, denotada $\mathcal{V}(x)$, que satisface que para cada vecindad V de x existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V_x \subseteq V$, se denomina `base local de` x. Si $\mathcal{V}(x)$ está compuesta solamente por vecindades abiertas, se dice que es una base local abierta de x.

I.3.22 Ejemplo. *En $\mathbb{R}$ con la topogía usual, se tiene que la familia $\big\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\big\}$ es una base local para 0.*

Los conceptos de base y base local estan íntimamente relacionados, tanto así que si tenemos una de ellas puede determinarse la otra.

I.3.23 Teorema. *Sean X un espacio y β una familia de abiertos. β es base para la topología en X si y solo si, para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{V}(x) = \{B \in \beta : x \in B\}$ es una base local en x.*

Si se necesita demostrar una propiedad a partir de abiertos de un punto, como en el caso de base para una topología en donde podia demostrarse una propiedad a partir de abiertos básicos, basta probar dicha propiedad para los elementos de una base local de abiertos del espacio.

Ss I.3.3. Funciones continuas y homeomorfismos

Algunos autores definen a la Topología como la rama de las matemáticas dedicada al estudio de las propiedades que se preservan bajo funciones continuas, entendiendo aquí el concepto intuitivo de la continuidad de una función como aquella en la que pequeñas variaciones en los puntos del dominio producen pequeñas variaciones en los valores de la función.

I.3.24 Definición. Sea $f : X \to Y$ una función entres espacios. f se dice `continua` si para cada abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

I.3.25 Ejemplo. *Todas las funciones polinómicas, racionales y trigonométricas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas, donde $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ tienen las respectivas topologías usuales.*

I.3.26 Ejemplo. *En el conjunto de matrices cuadradas $M(n, \mathbb{R})$, cada matriz $A = (a_{ij})$ puede identificarse con un punto de $\mathbb{R}^{n^2}$ colocando las filas, ordenadamente, una tras otra, mediante la biyección dada por $a_{ij} \mapsto a_{(i-1)n+j}$, por lo que se puede dotar al conjunto de matrices con la topología usual de $\mathbb{R}^{n^2}$, denominada topología usual para el espacio de matrices.*
Si se toma a $\mathbb{R}$ con la topología usual entonces la función determinante $det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es una función continua.
Dado que $GL(n, \mathbb{R}) = det^{-1}\big(\mathbb{R} - \{0\}\big)$ y $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ se tiene que el grupo general lineal es un subconjunto abierto de el espacio de matrices y el grupo especial lineal es cerrado.

Observación. En un sentido más estricto, los espacios $M(n, \mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son homeomorfos. Esto debido a que se puede construir una norma en el espacio de matrices a partir de la norma dada en $\mathbb{R}^{n^2}$. Todas las normas en el espacio de matrices son equivalentes por lo que la topología generada son la misma.

Las bases y las subbases son conceptos importantes en la definición de algunas topologías, esto pues para determinar la continuidad de una función basta probarla para esta familia de conjuntos.

I.3.27 Teorema. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios. Si β es una base para Y, la función f es continua si y solo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X para cualquier $U \in \beta$. De manera similar, f es continua si y solo si $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo S en la subbae $\mathcal{S}$.*

La continuidad se define a través de conjuntos abiertos, sin embargo dada la relación en la definición del término de conjuntos cerrados, existen equivalencias útiles para las funciones continuas.

I.3.28 Teorema. *Sea $f: X \to Y$ una función entre espacios, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) *f es continua.*

ii) *Para cada $A \subseteq X$, se tiene que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

iii) *Para cada conjunto cerrado B de Y se tiene que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

iv) *Para cada $x \in X$ y cada abierto V con $f(x) \in V$, existe un abierto U, con $x \in U$, tal que $f(U) \subseteq V$.*

Si se satisface *iv*), del teorema anterior, para un punto $x \in X$ se dice que f `es continua en` x.

I.3.29 Corolario. *Sea $f: X \to Y$ una función entre espacios. f es continua si y solo si lo es para cada punto de x.*

Si $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son funciones continuas con inversas f^{-1} y g^{-1} respectivamente, entonces $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, de donde si ambas funciones son continuas y U es abierto de Z, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto de Y y $f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$ es abierto en X.

I.3.30 Teorema. *Sean $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ fuciones continuas entre espacios, entonces la composición $g \circ f: X \to Z$ es continua.*

Un tipo de función que tiene mucha relación con el concepto de continuidad es el de función abierta, al estar definida a partir de conjuntos abiertos. De igual manera para las funciones cerradas.

I.3.31 Definición. Sea $f: X \to Y$ una función entre espacios. f se dice `abierta` si para cada abierto U de X se tiene que $f(U)$ es abierto en Y. f se dice `cerrada` si para cada cerrado B de X, se tiene que $f(B)$ es cerrado en Y.

Además de la continuidad, la composición de funciones abiertas y cerradas.

I.3.32 Teorema. *La composición de funciones abiertas es abierta y la composición de funciones cerradas es cerrada.*

Dada la relación en las definiciones de conjuntos abiertos y cerrados, puede concluirse que una función biyectiva es abierta si y solo si es cerrada. Es útil mencionar también que para demostrar si una función es abierta basta probar que la imagen de un abierto básico es un conjunto abierto, y para probar si una función es abierta o cerrada puede hacerse mediante el uso de el interior y la cerradura de los conjuntos.

I.3.33 Teorema. *Sea $f : X \to Y$ función entre espacios entonces f es abierta si y solo si $f(int(A)) \subset int(f(A))$, para todo $A \subset X$, y f es cerrada si y solo si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, para todo $A \subset X$.*

Un concepto más fuerte que el de continuidad y que da la idea de que dos espacios son esencialmene iguales son los homeomorfismos, funciones biyectivas que son continuas con inversa continua. Una propiedad que se preserva bajo homeomorfismos se dice que es una propiedad topológica.

I.3.34 Definición. Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios. Si f es biyectiva y continua, y la función inversa $f^{-1} : Y \to X$ es continua entonces f se denomina `homeomorfismo` y los espacios se dicen `homeomorfos`, lo cual se denota por $X \simeq Y$.

I.3.35 Ejemplo. *Los números complejos con la norma usual dada por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, donde $z = a + bi$, es un espacio topológico homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ mediante el homeomorfismo $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^2$ definido como $f(a + bi) = (a, b)$.*

I.3.36 Teorema. *Composición de homeomorfismos es un homeomorfismo.*

Las funciones abiertas y ceradas nos dan también una caracterización de los homeomorfismos sin hacer uso de la función inversa.

I.3.37 Teorema. *Sea $f : X \to Y$ una funciones biyectiva entre espacios topológicos. Las siguientes proposiciones son equivalentes*

A) f es un homeomorfismo.

B) f es continua y abierta.

C) f es continua y cerrada.

D) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Dos espacios son homeormorfos si son topológicamente iguales, es decir, si los abiertos de uno coinciden uno a uno con los abiertos del otro. Un concepto similar se da en la siguiente definición que se refiere al caso en que dos puntos son topologicamente iguales dentro de un espacio topológico, esto es, cuando los abiertos de uno coinciden con los abiertos del otro.

I.3.38 Definición. Sea X un espacio. X se dice `homogéneo` si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

I.3.39 Ejemplo. $\mathbb{R}$ *con la topología usual es un espacio homogéneo. Si $x, y \in \mathbb{R}$, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(z) = z + (y - x)$ es tal que $f(x) = y$ y además, f es un homeomorfismo ya que $f\big(B_r(x)\big) = B_r(y)$.*

Ss I.3.4. Subespacios y espacios producto

Dada una topología sobre el espacio X, puede definirse a partir de ella una topología sobre cualquier subconjunto de X al restringir los abiertos en estos subconjuntos.

I.3.40 Definición. Sean X un espacio con topología τ y $Y \subseteq X$. La colección $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$ es una topología sobre Y y se denomina la `topología de subespacio` o `topología relativa` de Y. Con esta topología, Y se dice `subespacio` de X.

Todo abierto en la topología relativa de un subconjunto abierto U de X es a su vez un abierto en X, es decir, si U es abierto en X, entonces $\tau_U \subseteq \tau$, esto ya que la intersección finita de abiertos es un abierto en X.

Dado un subconjunto de X, puede construirse una base para la topología de subespacio a partir de una base en X.

I.3.41 Teorema. *Sean Y subespacio de X y β una base para la topología en X. La colección $\beta_Y := \{B \cap Y : B \in \beta\}$ es una base para la topología de subespacio sobre Y.*

Los cerraduras de conjuntos en un subespacio pueden también determinarse a partir de las cerraduras en el espacio.

I.3.42 Teorema. *Sean Y subespacio de X y $A \subseteq Y$. La cerradura de A en Y es $\overline{A} \cap Y$.*

Las restricciones de una función continua a un subespacio es también continua.

I.3.43 Teorema. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre espacios y A subespacio de X. La restricción de f en A, $f|_A : A \to Y$, es una función continua.*

Al igual que en el caso de los subespacios, se tiene una manera natural para construir una topología sobre el producto cartesiano a partir de las topologías dadas en cada uno de los espacios.

I.3.44 Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Se denomina `topología producto` sobre $X \times Y$ a la topología que tiene como base la colección de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es abierto de X y V es abierto de Y.

De la definición anterior se sigue que un subconjunto W del espacio producto $X \times Y$ es abierto relativo a la topología producto si y solo si para cada $(x, y) \in W$ existen U abierto de x y V abierto de y tales que $(U \times V) \subseteq W$.

La topología producto se define de manera general en el producto arbitrario de espacios y está determinada por las proyecciones coordenada.

I.3.45 Definición. Sean $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios y ρ_α la proyección coordenada en la α-ésima coordenada, para cada α. La topología generada por la subbase $S = \bigcup\limits_\alpha S_\alpha$, donde $S_\alpha := \{\rho_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha$ es abierto en $X_\alpha\}$, se denomina `topología producto`, o `topología de Tychonoff`. El producto $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ con esta topología se denomina `espacio` producto o `espacio de Tychonoff`.

El siguiente teorema nos permite un mejor entendimiento sobre los abiertos en la topología producto, esto pues el producto de subespacios coincide con el subespacio producto.

I.3.46 Teorema. *Sean X y Y espacios, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. La topología producto sobre $A \times B$ coincide con la topología que $A \times B$ hereda como subespacio de $X \times Y$.*

Las bases para las topologías de los espacios factores nos aportan una base para la topología producto.

I.3.47 Teorema. *Sea $X \times Y$ el espacio producto de los espacios X y Y. Si β_X y β_Y son bases para la topología en X y Y, respectivamente, la colección $\beta = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \beta_X, B_2 \in \beta_Y\}$ es una base para la topología producto en $X \times Y$.*

En las condiciones del teorema anterior, dado que la imagen inversa de una unión de subconjuntos es la unión de las imagenes inversas de dichos subconjuntos entonces, si se tiene una base para la topología del espacio de llegada, para demostrar la continuidad de la función basta mostrar que la imagen inversa de cada elemento básico es abierta.

I.3.48 Teorema. *Las proyecciones en cada una de las coordenadas, $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$, son funciones sobre, continuas y abiertas.*

Las funciones sobre el producto cartesiano de dos conjuntos están determinadas por las funciones coordenadas cuyas imagenes se encuentran en cada uno de los conjuntos. En caso de tratarse de espacios topológicos, la continuidad de una función sobre el espacio producto está determinada por las funciones coordenadas.

I.3.49 Teorema. *Sea $f : X \to Y \times Z$ una función entre espacios dada por $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$, donde $f_1 : X \to Y$, $f_2 : X \to Z$ y $Y \times Z$ tiene la topología producto. La función f es continua si y solo si las funciones f_1 y f_2 son continuas.*

I.3.50 Definición. Sea $\varphi : X \to Y$ una función entre espacios, los subconjuntos $\varphi^{-1}(y)$ de X se denominan `fibras` de Y bajo φ.

Las fibras de las proyecciones de espacios producto son de la forma $\{x\} \times Y$ o $X \times \{y\}$, donde $x \in X$ y $y \in Y$.

Ss I.3.5. Axiomas de separación

Los axiomas de separación que se definen a continuación sirven en Topología para poder distinguir espacios topológicos ya que con la simple definición de la topología y lo visto hasta ahora no siempre es posible. Se dicen axiomas de separación pues implican la "separación" de ciertas clases de conjuntos por abiertos disjuntos y son muy útiles en el estudio de ciertos espacios y sus propiedades.

Por curiosidad, es interesante saber que se les asignan las letras T_I por la palabra alemana *Trenunngaxiome*, la cual se traduce como axioma de separación.

I.3.51 Definición. Sea X espacio topológico, se tienen las siguientes definiciones llamados `axiomas de separación` en X.

· X es T_0 o `Kolmogorov` si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe U abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$ (o $x \notin U$ y $y \in U$).

· X es T_1 o de `Frechet` si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$ existen abiertos U y V tales que $x \in U - V$ y $y \in V - U$.

· X es T_2 o `Hausdorff` si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V \neq \emptyset$.

· X es `regular` si para $B \subseteq X$ cerrado y $x \in X - B$ existen abiertos U y V tales que $B \subseteq U$, $x \in V$ y $U \cap V \neq \emptyset$.

· X es T_3 si X es T_1 y regular.

· X es `completamente regular` si para $B \subseteq X$ cerrado y $x \in X - B$ existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(B) = 1$.

· X es $T_{3\frac{1}{2}}$ o `Tychonoff` si es T_1 y completamente regular

· X es `normal` si para cada $A, B \subseteq X$ cerrados, con $A \cap B = \emptyset$, existen abiertos U y V tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

· X es T_4 si es T_1 y normal.

Algunas equivalencias de los axiomas de separación están dadas en el siguiente teorema.

I.3.52 Teorema. *En el espacio X se tienen entonces las siguientes propiedades:*

i) X es T_0 si y solo si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

ii) X es T_1 si y solo si los conjuntos unipuntuales $\{x\}$ son cerrados.

iii) X es regular si y solo si para V abierto de X y $x \in V$ existe U abierto de X tal que $x \in U$ y $\overline{U} \subseteq V$, es decir, cada punto tiene una base de conjuntos cerrados.

Dada la naturaleza de los axiomas de separación se tiene que algunos de ellos implican a otros.

I.3.53 Teorema. *Sea X un espacio, se tiene entonces la siguiente cadena de implicaciones:*

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow \textit{Hausdorff} \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

I.3.54 Teorema. *Si X es un espacio T_1 y regular entonces es Hausdorff.*

I.3.55 Ejemplo. *Los espacios normados con la topología generada por la norma son espacios de Hausdorff: Si E es un espacio normado y $x, y \in E$ son tales que $x \neq y$, entonces $||y - x|| > 0$. Si $r = ||y - x||$ se tiene que $B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y) = \emptyset$.*
Son también espacios normales y regulares.

I.3.56 Ejemplo. *Sea $X = \{0, 1\}$. La familia $\tau = \big\{\emptyset, X, \{0\}\big\}$ es una topología en X. El espacio X con esta topología es llamado el* `espacio de Sierpinski`*. $\beta = \{\{0\}, X\}$ es base para la topología de Sierpinski.*
El espacio de Sierpinski es T_0 pero no es T_1 ni Hausdorff, es un espacio normal pero no regular.

Los axiomas de separación que se preservan en los subespacios y al tomar producto de dos espacios con la misma estructura son los axiomas T_0, T_1, Hausdorff, Regular, completamente regular, Tychonoff. Un subespacio de un espacio normal es normal si este es cerrado y el producto de espacios normales no es necesariamente normal.

Los axiomas de separación no se preservan bajo funciones continuas, pero si bajo funciones cerradas. Este resultado se encuentra demostrado en [10], Teorema 1.5.20.

I.3.57 Teorema. *La imágen bajo una función cerrada de un espacio T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, regular o normal preserva el respectivo axioma de separación.*

Ss I.3.6. Compacidad y conexidad

La compacidad y la conexidad son conceptos fundamentales en los espacios topológicos. Son propiedades que se preservan bajo funciones continuas entre espacios topológicas, es decir, la imagen de un espacio compacto o conexo es compacto o conexo, respectivamente.

I.3.58 Definición. Sea X un espacio. Una colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos del espacio X se dice que es una `cubierta` de X, o que cubre a X, si $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = X$.
Si cada A_α es abierto, $\mathcal{A}$ se dice `cubierta abierta` de X.

I.3.59 Definición. Un espacio X se dice `compacto` si para cada cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X existe una subcolección finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que cubre a X, esto es, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I$ tales que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X$.

A veces es muy útil trabajar espacios compactos vistos como subconjuntos de un espacio más grande.

I.3.60 Definición. Sean X un espacio y K subconjunto de X. K se dice que es un `conjunto compacto` de X si K es un espacio compacto con la topología relativa de X.

I.3.61 Teorema. *Sea X un espacio topológico. Todo subconjunto finito de X es compacto.*

La compacidad no es una propiedad que se hereda de manera natural, esto es, no todo subconjunto de un espacio compacto es a su vez compacto.

I.3.62 Teorema. *Los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos son compactos.*

No siempre la unión o intersección de compactos preserva esta propiedad, en el caso de la unión es cierto para el caso finito.

I.3.63 Teorema. *La unión finita de conjuntos compactos es compacto.*

El siguiente teorema es un caso especial del denominado Teorema de Tychonoff, en este caso restringido a dos espacios, que dice que el producto cartesiano de una cantidad arbitraria de espacios compactos es compacto.

I.3.64 Teorema. *X y Y son compactos si y solo si $X \times Y$ es compacto, donde $X \times Y$ tiene la topología producto.*

La compacidad es una propiedad topológica.

I.3.65 Teorema. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.*

I.3.66 Definición. Sea X un espacio. X se dice `localmente compacto` si cada uno de sus puntos tiene al menos una vecindad con cerradura compacta, esto es, para cada $x \in X$ existe U abierto y K subconjunto compacto de X tales que $x \in U \subset K$.

Ser localmente compacto no es una propiedad que se preserve de manera directa bajo funciones continuas.

I.3.67 Teorema. *Si X es localmente compacto y $f : X \to Y$ es una función continua y abierta entre espacios entonces $f(X)$ es localmente compacto.*

Si el espacio es compacto entonces cada uno de sus puntos tiene una vecindad compacta.

I.3.68 Corolario. *Todo espacio compacto es localmente compacto.*

Una separación de X es un par U, V de conjuntos abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X. Existen ciertos espacios en los cuales no puede darse una separación de ellos.

I.3.69 Definición. Sea X un espacio. Un subconjunto C de X se dice `conexo` si no existe una separación de C. Si $C = X$ se dice que el espacio es conexo.

La conexidad es también una propiedad que se preserva bajo funciones continuas.

I.3.70 Teorema. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios. Si X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.*

I.3.71 Teorema. *Sean X un espacio y $A \subseteq X$ conexo. Si $B \subseteq X$ es tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ entonces B es conexo. En particular, $\overline{A}$ es conexo.*

I.3.72 Teorema. *X y Y son espacios conexos si y solo si $X \times Y$ es conexo, donde $X \times Y$ tiene la topología producto.*

I.3.73 Teorema. *Sea X un espacio. La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.*

I.3.74 Definición. Sea X un espacio. La `componente` de X, denotada C_x, es el subconjunto conexo de X contiene a x.

I.3.75 Teorema. *Sea X un espacio. La componente de x es igual la unión de todos los conexos que contienen a x.*

I.3.76 Corolario. *Las componentes de un espacio X son conjuntos conexos maximales respecto a la inclusión.*

I.3.77 Corolario. *Las componentes de un espacio X son cerrados.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como $C(x)$ es conexo, se sigue $\overline{C(x)}$ es conexo. Dado que $C(x)$ es maximal, con lo que $\overline{C(x)} \subseteq C(x)$. Así, $C(x)$ es cerrado. □

I.3.78 Teorema. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios. La imagen de cada componente de X debe vivir en una componente de Y. Más aún, si f es un homeomorfimo, entonces f induce una correspondencia 1 a 1 entre las componentes de X y las de Y donde las correspondientes componentes son homeomorfas.*

Demostración. Sea $x \in X$. Si f es continua entonces $f(C_x)$ es conexo y por tanto esta contenido en la componente que contiene a $f(x)$. Si f es homeomorfismo, es claro que se da la relación anterior en ambos sentidos con lo que se tiene la relación entre las componentes de ambos espacios. □

Las componentes generan una partición del espacio, donde la relación que la genera esta dada por: 'pertencer a la misma componente'.

En los espacios normados E, un conjunto A se dice acotado si existe $r > 0$ tal que $A \subseteq B_r(0)$. En estos espacios se tiene una equivalencia para los conjuntos compactos denominado el `Teorema de Heine-Borel`.

I.3.79 Teorema. *Si E es un espacio normado con la topología generada por la norma, entonces un conjunto $A \subseteq E$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

I.3.80 Ejemplo. *Los espacios finitos son compactos bajo cualquier topología. Todo espacio indiscreto es compacto y conexo.*

I.3.81 Ejemplo. *El espacio $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio conexo y localmente compacto, pero no es compacto. Los intervalos abiertos (a, b) son conjuntos abiertos y conexos. Los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ son conjuntos conexos no abiertos ni cerrados. Los intervalos cerrados $[a, b]$ son conjuntos conexos, cerrados y compactos.*

I.3.82 Ejemplo. *Como generalización de el ejemplo anterior se tiene que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es conexo y localmente compacto. Las bolas abiertas son conjuntos abiertos y conexos. Las bolas cerradas son conjuntos compactos y conexos. La esfera es un conjunto conexo y compacto.*

I.3.83 Ejemplo. *El conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ no es compacto ni conexo en el espacio de matrices con la topología usual de matrices*

I.3.84 Ejemplo. *La `recta de Sorgenfrey` o topología del límite inferior es la topología generada por la base $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.*
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ entonces $[a, b), [a, +\infty), (-\infty, a)$ son abiertos y cerrados. La recta de Sorgenfrey no es compacto, ni localmente compacto, y es `totalmente disconexo`, esto es, que la componente conexa de cada punto es él mismo.

Compacidad en espacios de Hausdorff

Contrario a la idea intutiva que pareciera indicar el Teorema de Heine-Borel, dado en Teorema I.3.79, no siempre existe una relación directa entre ser compacto y ser cerrado. Para asegurar que un comjunto compacto es cerrado se necesita tener un espacio de Hausdorff.

I.3.85 Teorema. *Todo subconjunto compacto K de un espacio de Hausdorff X es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X - K$, como X es de Hausdorff entonces para cada $y \in K$ existen U_y y V_y abiertos disjuntos tales que $x \in U_y$ y $y \in V_y$. La colección $\mathcal{V} = \{V_y : y \in K\}$ es una cubierta abierta de K, y dado que K es compacto existen $y_1, \ldots, y_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Sean $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Como cada U_{y_i} y V_{y_i} son disjuntos se sigue que U y V son disjuntos tales que $x \in U$ y $K \subset V$. Se sigue entonces que $x \in int(X - K)$, por lo que $X - K$ es abierto y K cerrado. □

I.3.86 Corolario. *Si $f : X \to Y$ es una biyección continua entre espacios, X es compacto y Y es de Hausdorff entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea U abierto de X. Dado que X es compacto entonces $X - U$ es compacto, y dado que f es continua entonces $f(X-U)$ es compacto en Y. Por el teorema anterior, $f(X-U)$ es cerrado en Y y como f es biyectiva se tiene que $Y - f(U) = f(X-U)$ es cerrado. Por tanto $f(U)$ es abierto y f es una función abierta, de donde al ser f biyección continua se tiene que f es homeomorfismo. □

La intersección arbitraria de compactos no es necesariamente un conjunto compacto, esto es válido en los espacios de Hausdorff.

I.3.87 Teorema. *La intersección arbitraria de conjuntos compactos en un espacio compacto es un conjunto compacto.*

La propiedad de los espacios de Hausdorff de separar puntos en abiertos disjuntos puede extenderse a separar puntos de conjuntos compactos debido a la cantidad de puntos finitos necesarios para cubrir al conjunto.

I.3.88 Teorema. *Si X es un espacio de Hausdorff y K un subconjunto compacto de X, entonces para cada $x \in X - K$ existen abiertos U y V disjuntos tales que $x \in U$ y $K \subset V$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como X es de Hausdorff entonces para cada $y \in X$ con $y \neq x$ existen abiertos disjuntos U_y y V_y tales que $x \in U_y$ y $y \in V_y$. La colección $\mathcal{V} = \{V_y : y \in K\}$ es una cubierta abierta de K, por lo que existen $y_1, \ldots, y_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Los conjuntos $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ son abiertos disjuntos tales que $x \in U$ y $K \subset V$. □

Si el espacio es compacto y de Hausdorff se tiene que pueden separarse puntos de cerrados ya que en ese caso los conjuntos cerrados son compactos.

I.3.89 Corolario. *Todo espacio compacto de Hausdorff es regular.*

I.3.90 Corolario. *Todo espacio compacto de Hausdorff es normal.*

Demostración. Sean A y B conjuntos cerrados de X con $A \cap B = \emptyset$. Para cada $x \in A$ existen abiertos disjuntos U_x y V_x tales que $x \in U_x$ y $B \subset V_x$.
La colección de los conjuntos U_x es una cubierta de A, y como A es cerrado del espacio compacto X es compacto, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ entonces U y V son abiertos disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. □

I.3.91 Teorema. *Sea X un espacio localmente compacto X es localmente compacto si y solo si cada punto tiene una vecindad de cerradura compacta.*

I.3.92 Teorema. *Todo espacio Hausdorff localmente compacto es regular.*

Ss I.3.7. Espacio cociente

Las fibras de las funciones sobreyectivas forman una partición del dominio, esto motiva la definición del espacio cociente, en donde se busca dotar de la misma estructura topológica del dominio al codominio a través de una función suprayectiva.

I.3.93 Definición. Sea $\rho : X \to Y$ una función suprayectiva entre espacios. ρ se dice `función cociente` o `identificación` siempre que un subconjunto $U \subseteq Y$ es abierto en Y si y solo si $\rho^{-1}(U)$ es abierto en X.
Si Y no es espacio topológico entonces existe exactamente una topología sobre Y relativa a X con la cual ρ es cociente, la cual se denomina `topología cociente` inducida por ρ.

La topología en el espacio cociente está dada por los subconjuntos W de Y para los cuales $\rho^{-1}(W)$ es abierto en X, y es una topología bien definida ya que las imágenes inversas preservan operaciones entre conjuntos. Es común cometer el error de creer que si un conjunto es abierto en X lo es entonces en Y, sin embargo no es así.

Una de las situaciones en donde es muy común encontrar la topología cociente es en los conjuntos cocientes, esto es, cuando se tiene una partición del espacio.

I.3.94 Definición. Sea X un espacio y X^* una partición de X. Si $\pi : X \to X^*$ es la función sobreyectiva que lleva a cada punto de X al elemento de X^* que lo contiene, esto es la función proyección. Con la topología cociente inducida por π, el espacio X^* se denomina `espacio cociente`de X.

Toda identificación es una función continua pero no necesariamente abierta, sin embargo toda función que sea sobre, continua y abierta es una identificación.

I.3.95 Teorema. *La composiciones de funciones cociente es una función cociente.*

Si f es una función continua y φ es una función cociente entonces $f \circ \varphi$ es continua, a continuación se prueba que si se tiene lo contrario, esto caracteriza a las funciones cocientes.

El siguiente teorema es un resultado fundamental que se denomina `Propiedad universal del cociente`.

I.3.96 Teorema. *Una función $\varphi : X \to Y$ entre espacios, continua y suprayectiva, es una función cociente si y solo si para cada espacio Z y cada función $f : Y \to Z$, la continuidad de $f \circ \varphi$ implica la continuidad de f.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, dashed, "f\circ\varphi"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Si φ es cociente y $f \circ \varphi$ es continua, para cada U abierto de Z se tiene que $(f \circ \varphi)^{-1}(U) = \varphi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)$ es abierto en X, y así $f^{-1}(U)$ es abierto en Y. Por tanto, f es continua.
Por otro lado, sea Y^* el conjunto Y con la topología cociente dada por φ, se tiene entonces el siguiente diagrama, en donde id_Y es la función identidad en Y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, dashed, "id_Y \circ \varphi"] & \\ Y \arrow[r, "id_Y"'] & Y^* \end{tikzcd}$$

Si U es abierto en Y', dado que $(id_Y \circ \varphi)^{-1}(U) = \varphi^{-1}\big(id_Y^{-1}(U)\big)$, $id_Y(U) = U$ y φ es continua se sigue que $(id_Y \circ \varphi)^{-1}(U)$ es abierto en X y por tanto $id_Y \circ \varphi$ es continua. Si se tiene la propiedad de que la continuidad de la composición $f \circ \varphi$, donde $f : Y \to Z$ es función arbitraria y Z es un espacio arbitrario, implica la continuidad de f, entonces id_Y es continua. Luego, si $U \subseteq Y$ es tal que $\varphi^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces se tiene $U = (id_Y \circ \varphi)\big(\varphi^{-1}(U)\big)$ es abierto en Y^* y dado que id_Y es continua, $U = id_Y^{-1}(U)$ es abierto en Y. Se concluye así que φ es una función cociente. $\square$

El siguiente teorema es una consecuencia de la Propiedad universal del cociente, denominado `Teorema de la transgresión`.

I.3.97 Teorema. *Sea $\rho : X \to Y$ una identificación. Toda función continua $f : X \to Z$ que envia cada fibra $\rho^{-1}(y)$ en un solo punto de Z, induce una única función continua $\tilde{f} : Y \to Z$ tal que $\tilde{f} \circ \rho = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

I.3.98 Ejemplo. *En el segmento $I := [0,1]$ se define la relación de equivalencia $\sim$ dada por: $0 \sim 1$ y para todo $x \in (0,1)$, x solo esta relacionado consigo mismo. El espacio cociente $I/\sim$ es homeomorfo a S^1, donde $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. La función $f : I \to S^1$ dada por $\big(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\big)$ es continua pero no biyectiva. Si $\rho : I \to I/\sim$ es la proyección, dado que $f(0) = f(1)$, la imagen de cada fibra de ρ es constante en S^1, por el Teorema de la transgresión entonces f induce una función continua φ de tal manera que $\varphi\pi = f$, la cual es biyectiva por lo que tiene función inversa. Los conjuntos $I/\sim$ y S^1 son conjuntos compactos, $I/\sim$ ya que es imagen continua de un compacto, de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente, así para $B \subset I$ cerrado se tiene que B es compacto, de donde $\varphi(B)$ es compacto, y así $\varphi(B)$ es cerrado. Se tiene entonces que φ es una función cerrada y por tanto es un homeomorfismo. Por tanto, ${}^{I}/_{\sim} \simeq S^1$.*

I.3.99 Ejemplo. *De manera similar se tiene que el toro* $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ *puede verse como un espacio cociente a partir de la relación de equivalencia* $\sim$ *dada por*

$$\begin{aligned} (x,0) &= (x,1) \quad \forall\, x \in I \\ (0,y) &= (0,1) \quad \forall\, y \in I \end{aligned}$$

y la función $f : I \times I \to \mathbb{T}$ *definida por* $f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ *dada por*

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \cos u\big(2 + \cos v\big) \\ y(u,v) &= \sin u\big(2 + \cos v\big) \\ z(u,v) &= \sin v \end{aligned}$$

Capítulo II.

§ Grupos topológicos

La teoría de grupos topológicos representa un caso exitoso de la unión de dos grandes áreas en matemáticas: Topología y Teoría de Grupos. Estas estructuras no son excluyentes entre sí ya que son definidas mediante distintos recursos, por su parte la topología se define como una estructura que distingue propiedaes entre los subconjuntos del conjunto y las propiedades dadas por la estructura de grupo está dada en la relación entre sus elementos. Sobre un conjunto cualquiera pueden definirse multiples topologías, siendo los primeros ejemplos de ello las topologías discreta e indiscreta, es así que sobre un grupo pueden definirse varias topologías, de entre las cuales pueden encontrarse algunas de tal manera que la nueva estructura que combina a las dos anteriores presente propiedades interesantes que involucren conceptos de ambas estructuras dadas.

En términos generales, un grupo G con una topología definida en él se dice grupo topológico si las funciones dadas por el producto y por la toma de inversos son continuas. Es interesante notar los conceptos involucrados en la condición de grupos con topología para ser grupos topológicos: se toman un par de funciones definidas a partir de la operación de grupo y de la toma de inversos, propiedades que definen la estructura del grupo, a las cuales se les pide ser continuas, concepto importante en la estructura de los espacios topológicos. Estas funciones continuas que definen a los grupos topológicos permiten que ambas estructuras presenten propiedades que no sería posible tener en otro caso.

El hecho de que la topología definida se encuentre dentro de un conjunto en el que se pueden operar sus elementos y tiene la existencia de inverso y un neutro, y de tener funciones basadas en ellos que sean continuas, permite trasladar conjuntos en el todo el espacio manteniendo sus propiedades. Dada esa capacidad de trasladar conjuntos manteniendo sus propiedades lleva al estudio de los subconjuntos que contiene al elemento neutro del grupo. Es por esta razón que el neutro se vuelve el elemento más importante no solo en el grupo, en donde lo es por definición, si no también en la topología pues basta saber que ocurre localmente al rededor de él para saber que ocurre en cualquier otro punto, y nos dice también que lo que pasa ahi pasa en todas partes.

En las secciones I.1 y I.3 del capítulo anterior se dá un rápido repaso por las propiedades básicas más importantes de los grupos y los espacios topológicos, como estructuras separadas. Estas propiedades serán de mucha ayuda en este capítulo, sin embargo algunos de los resultados encontrados aquí son completamente distintos a los que se tienen anteriormente aún cuando los conceptos son los mismos. Es muy notorio el hecho de que la cantidad de conceptos nuevos definidos es muy poca.

El presente capítulo se compone de 6 secciones. Los primeros cinco guardan similitud con los temas abordados en la Sección I.3 ya que se presentan resultados para estos conceptos.

En la Sección II.1, se presentan propiedades obtenidas directamente de la definición de los grupos topológicos mediante la continuidad de las funciones producto e inversión. El resultado principal de esta sección está dado por el Corolario II.1.13 que dice que todo grupo topológico es homogéneo.
En la Sección II.2 se estudia la contrucción de grupos topológicos a partir de ciertos dados, entre ellos se encuentra los subgrupos topológicos y el producto de grupos topológicos.
La Sección II.3 está dedicada a las propiedades topológicas de compacidad y conexidad. Se demuestra aquí que la operación del grupo preserva estas propiedades.
Los axiomas de separación en los grupos topológicos y sus propiedades se encuentran en la Sección II.4, en donde se demuestran que los axiomas T_0, T_1 y Hausdorff son equivalentes.
En la Sección II.5 se tienen algunas propiedades sobre los espacios y grupos cocientes.
Por ultimo, en la Sección II.6 se demuestra que los grupos topológicos son estructuras uniformes, que en términos generales son espacios en los que se define el concepto de continuidad uniforme, concepto generalizado de los espacios métricos.

En la parte final de este Capítulo se presentan algunos ejemplos extra a los ejemplos que van desarrollándose a lo largo del texto que ayudan a la comprensión de los conceptos de grupos topológicos.

En el presente Capítulo, G representa a un grupo con operación gh, neutro e e inversos denotados por g^{-1}. Si G es espacio topológico, τ denota a la topología en G. Toda base local de e se tomará como una base local de abiertos.

S II.1. Teoría de grupos topológicos

Un conjunto no vacío se puede dotar de una estructura algebraica de grupo, para operar entre sus elementos, y una estructura topológica, para operar en una familia de subconjuntos cerrada bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Para definir un grupo topológico no basta con tener ambas estructuras en un mismo conjunto, si no que se necesita una relación entre ellas que permita obtener una teoría consistente que englobe a las estructucturas dadas. La relación mencionada es la continuidad, el cual es un concepto topológico, sobre el producto y la toma de inversos, los cuales son conceptos algebraicos.

La función dada por la operación de elementos del grupo y la función que manda los elementos a sus respectivos inversos, están bien definidas ya que tanto el producto como la toma de inversos son operaciones cerradas en el grupo.

II.1.1 Definición. En el grupo G se definen la `función producto` $\upsilon : G \times G \to G$ dada por $\upsilon(g,h) = gh$, y la `función inversión` $\iota : G \to G$ dada por $\iota(g) = g^{-1}$.

Si G es además un espacio topológico, las funciones producto e inversión pueden ser continuas. Es en ese caso en el que las dos estructuras, tanto de grupo como topológica, se combinan en un solo concepto que integre las propiedades de ambas.

II.1.2 Definición. El grupo G se dice `grupo topológico` si existe una topología τ para G de tal manera que las funciones producto e inversión son continuas, donde $G \times G$ tiene la topología producto.
Si τ es una topología sobre G de tal manera que G es un grupo topológico entonces τ se dice `consistente` con la operación en el grupo.

Observación. En la definición de grupo topológico no se pide que $G \times G$ sea grupo, basta con tomar a G como espacio topológico.

El grupo $\mathbb{R}^n$ con la operación dada por la suma usual y la topología usual es un grupo topológico. Este es un caso particular de un grupo topológico dado por los espacios normados.

II.1.3 Ejemplo. *Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado. El grupo aditivo E es grupo topológico cuando se considera en E la topología inducida por la norma.*
Sean $x, y \in E$ y $r > 0$. Si $z \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ y $w \in B_{\frac{r}{2}}(y)$ se tienen que $-\frac{r}{2} < z - x < \frac{r}{2}$ y $-\frac{r}{2} < w - y < \frac{r}{2}$, de donde $|(z+w) - (x+y)| < r$, es decir, $z + w \in B_r(x+y)$, por lo que la suma es continua. Si $u \in B_r(-x)$ entonces $|-u-x| = |u-(-x)| < r$ y así $-u \in B_r(x)$ con lo cual se concluye que la función inversión es continua.

Las permutaciones sobre un conjunto X forman un grupo bajo la composición. Si X es un espacio topológico, la familia de homeomorfismos de X es también un grupo en el cual se tiene que la topología compacto abierta es consistente con la composición de funciones.

II.1.4 Ejemplo. *Sea X un espacio Hausdorff compacto, entonces $Homeo(X)$ es un grupo topológico con la operación dada por la composición de funciones y con la topología compacto abierta definida en Apéndice B.*
$Homeo(X)$ es un grupo ya que la composición de homeomorfismos y la inversa de un homeomorfimo es un homeomorfismo.
Como X es compacto, se tiene entonces que es localmente compacto, por lo que el Corolario B.9 asegura que la función producto dada por la composición es continua, por lo que falta mostrar únicamente que la inversión es continua.
Sea $[K,U]$ subbásico en $Homeo_c(X)$. Si $f \in [K,U]$ entonces $f(K) \subseteq U$ con lo cual $X-U \subseteq X-f(K) = f(X-K)$, esto último por ser f biyectiva. Se sigue que $f^{-1}(X-U) \subseteq X-K$, es decir, $f^{-1} \in [X-U, X-K]$. Por tanto, $f \in [K,U]$ si y solo si $f^{-1} \in [X-U, X-K]$.Como U es abierto, $X-U$ es cerrado y por ser X compacto, $X-U$ es compacto. Como K es compacto y X es de Hausdorff, entonces K es cerrado y así $X-K$ es abierto. De lo anterior, $[X-U, X-K]$ es un abierto subbásico de $C_c(X,X)$, por lo que $i^{-1}([K,U]) = [X-U, X-K]$ es abierto en $Homeo(X)$ y por tanto la inversión es continua.

II.1.5 Ejemplo. *El grupo general lineal $G(n,\mathbb{R})$ con la topología de subespacio heredada del espacio de matrices $M(n,\mathbb{R})$ es un grupo topológico. Para el producto, cada entrada de la matriz producto es una función polinomial con valores reales, por lo que es continua. Para la inversión, por la Regla de Cramer se tiene que la matriz inversa de $A = (a_{ij})$ esta dada por*

$$(a_{ij})^{-1} = \frac{1}{det(A)}(-1)^{i+j}C_{ij}$$

donde Cij es el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A, se tiene que cada entrada es una función racional con valores reales, por lo que es continua.

II.1.6 Teorema. *G es grupo topológico si y solo si la función*
$\iota_v : G \times G \to G$, dada por $\iota_v(g,h) = gh^{-1}$, es continua.

Demostración. Sean $g, h \in G$. Dado que $\upsilon(g,h) = gh = \iota_v\big(g, \iota_v(e,h)\big)$ y $\iota(g) = g^{-1} = \iota_v(e,g)$ se sigue entonces que si ι_v es continua las funciones υ e i son continuas. Por otro lado, si υ y ι son continuas, dado que $\iota_v(g,h) = \upsilon(g, i(h))$ entonces ι_v es continua. □

II.1.7 Ejemplo. *El conjunto de los números reales positivos, esto es, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, con el producto usual y la topología de subespacio respecto de $\mathbb{R}$ es un grupo topológico.*
Sean $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ y $\varepsilon > 0$ de tal manera que $|\frac{x}{y}| < \varepsilon$. Si $\delta = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{3|x|}, \frac{\varepsilon|y|}{3}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\}$ y $z, w \in \mathbb{R}$ son tales que $z = x + a$ y $\frac{1}{w} = \frac{1+by}{y}$, con $|a|, |b| < \delta$, esto es, $z \in (x-\delta, x+\delta)$ y $\frac{1}{w} \in (\frac{1}{y} - \delta, \frac{1}{y} + \delta)$, entonces $|\frac{z}{w} - \frac{x}{y}| < \frac{|a|}{|y|} + |b|\,|x| + |a|\,|b| < \frac{\delta}{|y|} + \delta\,|x| + \delta^2$, de donde se sigue que $|\iota_v(z,w) - \iota_v(x,y)| < \frac{\varepsilon|y|}{3|y|} + \frac{\varepsilon|x|}{3|x|} + \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \varepsilon$, por lo que se concluye que ι_v es continua y por tanto $\mathbb{R}^*$ es grupo topológico.

De manera similar se prueba que el conjunto de los reales positivos no cero, $\mathbb{R}^+$, es grupo topológico con la topología de subespacio heredada de $\mathbb{R}$. Esto no es simple casualidad, más adelante se prueba que todo subgrupo es a su vez un grupo topológico.

Para todo elemento en un grupo se tiene que el inverso del inverso es el mismo elemento, esto es, $(g^{-1})^{-1} = g$. Luego, $\iota\big(\iota(g)\big) = g$, y por tanto se concluye que la función inversa de la inversión es la misma inversión.

II.1.8 Corolario. *La función inversión es un homeomorfismo.*

Uno de los conceptos de la teoría de grupos que toma mayor relevancia en los grupos topológicos es el de las traslaciones, funciones dadas en Definición I.1.10.

Observación. Cada $x \in G$ determina una traslación izquierda L_x y una traslación derecha R_x con las mismas propiedades. Por esta razón, y para no redundar demasiado con las mismas ideas, se trabajará con alguna de las traslaciones sabiendo que se tienen los mismos resultados para las otras. En caso de que una propiedad se tenga solo para las traslaciones izquierdas o derechas será expresado en tal situación.

II.1.9 Teorema. *Las traslaciones son funciones continuas.*

Demostración. Sea $x \in G$. Para todo $g \in G$, $xg = \upsilon(x,g)$ por lo que $L_x = \upsilon|_{\{x\}\times G}$ y es, por tanto, continua. $\square$

Para cada abierto U de G, los conjuntos $\iota(U)$, $L_x(U)$ y $R_x(U)$ son abiertos.

II.1.10 Corolario. *Para cada abierto U de G y cada $g \in G$ los conjuntos U^{-1} y gU son abiertos.*

II.1.11 Teorema. *Las traslaciones son homeomorfismos.*

Demostración. Dado que la inversa de una traslación $(L_x)^{-1}$ es la traslación inversa $L_{x^{-1}}$, se sigue que $(L_x)^{-1}$ es continua. Se tiene entonces que tanto las traslaciones como sus inversas son continuas, por lo que cada traslación es un homeomorfismo. $\square$

La composición de traslaciones es tambien un homeomorfismo por lo que para un elemento $x \in G$ la función $f_x = R_{x^{-1}} L_x$ es continua.

II.1.12 Corolario. *Para cada elemento $x \in G$, la función conjugación $f_x : G \to G$ dada por $f_x(g) = xgx^{-1}$ es un homeomorfismo.*

II.1.13 Teorema. *Los grupos topológicos son espacios homogéneos.*

Demostración. Para $g, h \in G$ si $x = hg^{-1}$ entonces la traslación en x es un homeomorfismo tal que $L_x(g) = h$. $\square$

Observación. Por contrarrecíproca, para demostrar que una topología no es consistente con la operación en el grupo basta ver que dos puntos no son topológicamente iguales.

II.1.14 Ejemplo. *La recta de Sorgenfrey es un espacio homogéneo ya que las traslaciones* $[a,b) \mapsto [x+a, x+b)$ *son también homeomorfismos, pero no es grupo topológico ya que la función inversión no es continua pues* $\iota^{-1}\big([0,1)\big) = (-1,0]$ *no es abierto.*

El Teorema anterior es uno de los resultados más importantes en la Teoría de grupos topológicos pues nos permite estudiar las propiedades topológicas del grupo a partir de los abiertos en un solo punto, esto pues en los espacios homogéneos todos los puntos son topológicamente iguales. Los abiertos en cada punto estan caracterizados por los abiertos en el neutro, esto es:

los abiertos de g son los conjuntos gU, donde U es un abierto de e.

Muchas de las propiedades que se prueban para espacios topológicos basta demostrarlas para abiertos básicos, dada una base para la topología del espacio. Por ello la importancia de tener una base. Por la propiedad homogénea de los grupos topológicos, basta tener una base abierta local del neutro para construir una base para la topología consistente.

Si $\mathcal{V}(e)$ es una base local de abiertos del neutro e, entonces para cada $g \in G$ y $V \in \mathcal{V}(e)$, se sigue que gV es un abierto de g, de donde $\{gV : V \in \mathcal{V}(e)\}$ es una base local de g. Por el Teorema I.3.23, basta entonces una base local en e para generar una base para la topología en G.

II.1.15 Corolario. *Si* $\mathcal{V}(e)$ *es una base local de abiertos de* e*, entonces la familia* $\mathcal{V} := \{gU : g \in G, U \in \mathcal{V}(e)\}$ *es una base para la topología en* G.

Dada la importancia de las bases locales, es útil conocer sus propiedades. El siguiente teorema muestra propiedades de las base locales en el neutro que incluso caracterizan a las familias de conjuntos que generan una subbase y una base para una topología consistente en G.

II.1.16 Teorema. *Si* $\mathcal{V}(e)$ *es una base local de abiertos de* e *se tienen entonces las siguientes propiedades:*

i) *Para cada* $U \in \mathcal{V}(e)$*, existe* $V \in \mathcal{V}(e)$ *tal que* $V^2 \subseteq U$.

ii) *Para cada* $U \in \mathcal{V}(e)$*, existe* $V \in \mathcal{V}(e)$ *tal que* $V^{-1} \subseteq U$.

iii) *Para cada* $U \in \mathcal{V}(e)$ *y cada* $x \in U$*, existe* $V \in \mathcal{V}(e)$ *tal que* $xV \subseteq U$.

iv) *Para cada* $U \in \mathcal{V}(e)$ *y* $x \in G$*, existe* $V \in \mathcal{V}(e)$ *tal que* $xVx^{-1} \subseteq U$.

Demostración.

$i)$ Sea $U \in \mathcal{V}(e)$, dado que la función producto es continua en e, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(e)$ tales que $(eV_1)(eV_2) \subseteq eeU$, es decir, $V_1V_2 \subseteq U$. Si $V = V_1 \cap V_2$ entonces $V \subseteq V_1$ y $V \subseteq V_2$, de donde $V^2 \subseteq V_1V_2 \subseteq U$.

$ii)$ La inversión es continua en e por lo que para cada $U \in \mathcal{V}(e)$ existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $V^{-1}e^{-1} \subseteq e^{-1}U$, con lo que $V^{-1} \subseteq U$.

$iii)$ Sean $U \in \mathcal{V}(e)$ y $x \in U$. Como la traslación bajo x es continua, existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $xV \subseteq U$.

$iv)$ Sean $U \in \mathcal{V}(e)$ y $x \in G$. Como la función conjugación bajo x es continua, existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$. □

Observación. En general para cada $U \in \mathcal{V}(e)$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tales que $V^n \subseteq U$.

Definición. Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice que tiene la `propiedad de la intersección finita` si cada subcolección finita $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía, es decir, se tiene que $C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset$.

II.1.17 Teorema. *Sea G un grupo, y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G con la propiedad de la intersección finita para los cuales se tienen las propiedades $i) - iv)$ del teorema anterior. La familias de subconjuntos $g\mathcal{U} := \{gU : g \in G, U \in \mathcal{U}\}$ es una subbase para una topología en G. Con esta topología G es un grupo topológico.*
Si la familia $\mathcal{U}$ tambien satisface:

v) para cada $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subseteq U \cap V$,

entonces $g\mathcal{U}$ es base para la topología de G.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{U}$ satisfacen las propiedades $i) - iv)$ del Teorema II.1.16 existen $V, W \in \mathcal{U}$ tales que $V^2 \subseteq U$ y $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^{-1} \subseteq V$, de donde $VW^{-1} \subseteq VV = V^2$. Como $\mathcal{U}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces $V \cap W \neq \emptyset$. Sea $h \in V \cap W$, entonces $h \in V$ y $h^{-1} \in W^{-1}$ con lo que $e \in VW^{-1} \subseteq V^2 \subseteq U$, es decir, $e \in U$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Por tanto $g \in gU$, para cada $g \in G$, y así $G = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} gU$. Se concluye entonces que $g\mathcal{U}$ es subbase para una topología en G. La topología generada por la subbase no tiene por qué ser consistente con la operación en G, para demostrar esto haremos uso de una base y una base local construida a partir de esta subbase.
Sea $\mathcal{V} := \{\bigcap_{i=1}^{n} g_iU_i \,:\, g_i \in G,\, U_i \in \mathcal{U}\}$. Dado que $\mathcal{U}$ es subbase se sigue que $\mathcal{V}$ es base para la topología en G y la familia $\mathcal{V}(e) := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} U_i : U_i \in \mathcal{U} \right\}$ es base local abierta de e.
Para probar que G es grupo topológico, es necesario demostrar primero que la base local $\mathcal{V}(e)$ en G satisface $i) - iv)$ del teorema anterior aún cuando G no es grupo topológico, las cuales se han probado para bases locales en grupos topológicos.

Si $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, existen $V_1, V_2, \ldots V_n \in \mathcal{V}$ tales que $V_i^2 \subseteq U_i^2$, $i = 1, \ldots, n$. Luego, $\big(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\big)^2 \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_i^2 \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ de donde se tiene que $\mathcal{V}(e)$ satisface $i)$. Siguiendo el mismo razonamiento y dado que se valen $\big(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\big)^2 = \bigcap_{i=1}^{n} V_i^2$, $g\big(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\big) = \bigcap_{i=1}^{n} gV_i$ y $g\big(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\big)g^{-1} = \bigcap_{i=1}^{n} gV_ig^{-1}$, se satisfacen entonces las propiedades $ii), iii)$ y $iv)$, respectivamente.
Sean $g, h \in G$ y $U \in \mathcal{V}(e)$, por $i)$ existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $V^2 \subseteq U$ y por $iv)$ existe $W \in \mathcal{V}(e)$ tal que $h^{-1}Wh \subseteq V$. Luego, $(h^{-1}Wh)V \subseteq VV \subseteq U$ y $(gW)(hU) = (gWh)V \subseteq ghU$. Por lo anterior, la función producto es continua. Notese que W y V dependen únicamente de h.
Por otro lado, para $U \in \mathcal{V}(e)$ existen $V, W \in \mathcal{V}(e)$ de tal manera que $gVg^{-1} \subseteq U$ y $W^{-1} \subseteq V$, de donde $gW^{-1}g^{-1} \subseteq gV^{-1}g^{-1} \subseteq U$ y por tanto $W^{-1}g^{-1} \subseteq gU$, con lo que la función inversión es continua.
Se tiene entonces que la función producto e inversión en G son continuas y G es grupo topológico.
Por último, es claro que si $\mathcal{U}$ satisface $v)$ entonces $g\mathcal{U}$ es base para la topología definida en G y por el Teorema I.3.23 se tiene también que $\mathcal{U}$ es base local de e.

$\square$

Las traslaciones y la inversión son homeomorfismos, por lo que el inverso y la traslación de un conjunto abierto es abierto. En general, estos conjuntos mantienen esas propiedades topológicas que se mantienen bajo homeomorfismos.

II.1.18 Corolario. *Sea B subconjunto de G. Si B es cerrado, compacto o conexo entonces los conjuntos B^{-1} y gB son cerrados, compactos o conexos, respectivamente.*

Observación. Los abiertos en todo punto estan caracterizados por los abiertos en el neutro. El corolario anterior dice que tal propiedad se tiene también para los conjuntos cerrados, compactos y conexos locales de cada punto.

La función producto es continua pero no es necesariamente un homeomorfismo, por lo que preserva solo aquellas propiedades que se mantienen bajo funciones continuas. Se tiene así que el producto de compactos es compacto y el producto de conexos es conexo. Estas dos propiedades se enuncian en la Sección II.3 dedicada a estos conceptos.

El teorema siguiente muestra que basta con que alguno de los conjuntos sea abierto para que el producto lo sea, cuestión que no se tiene con los conjuntos cerrados. De hecho, tampoco puede asegurarse que el producto de cerrados es necesariamente cerrado.

II.1.19 Teorema. *Sea U un abierto de G. Si $A \subset G$ entoncess el producto AU es abierto.*

Demostración. Dado que A puede verse como la unión de los elementos que lo componen, entonces $AU = \big(\bigcup_{a\in A} a\big)U = \bigcup_{a\in A} aU$ y como aU es abierto para todo $a \in A$ se sigue que AU es abierto. $\square$

La imagen continua de un conjunto cerrado no es, en general, un cerrado, por lo que el producto de conjuntos cerrados no necesariamente lo es. De la demostración del teorema anterior, ya que el producto de dos conjuntos puede verse como la unión de las traslaciones de un conjunto con respecto a los elementos del otro, y dado que la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada, se sigue que el producto de un conjunto finito con un cerrado es cerrado.

II.1.20 Corolario. *Sea F un conjunto cerrado de G. Si B es un conjunto finito entonces el producto BF es cerrado.*

Dado la relación generada por las bases locales en e y las bases para la topología en G, las propiedades de las bases locales dadas en Teorema II.1.16 son usadas de manera natural en la demostración de los resultados obtenidos en grupos topológicos. Un ejemplo de esto se presenta en el siguiente teorema que caracteriza a la cerradura de conjuntos en G.

Observación. Sea $g \in G$, $g \in \overline{A}$ si y solo si para todo U abierto de e, $A \cap gU \neq \emptyset$, o equivalentemente, $g \in AU$, para todo abierto U de e.

II.1.21 Teorema. *Si $\mathcal{V}(e)$ es una base de abiertos en el grupo topológico G, para cada subconjunto A de G se tiene que $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(e)} AU$.*

Demostración. Sean $g \in \overline{A}$ y $U \in \mathcal{V}(e)$. Para U existe $V \in V(e)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$ y además, $A \cap (gV) \neq \emptyset$, con lo que existen $a \in A$ y $v \in V$ tales que $a = gv$, de donde $g = av^{-1} \in AV^{-1} \subseteq AU$ y por tanto $\overline{A} \subseteq AU$.
Por otro lado, si $g \notin \overline{A}$ entonces existe $W \in \mathcal{V}(e)$ de tal forma que $gW \cap A = \emptyset$. Sea $U \in \mathcal{V}(e)$ con $U^{-1} \subseteq W$, entonces $gU^{-1} \cap A = \emptyset$ de donde $g \notin AU$ pues si $g \in AU$, $g = au$ y $a = gu^{-1}$, lo que contradice que $gU^{-1} \cap A = \emptyset$. $\square$

Hay propiedades que los conjuntos conservan al tomar su cerradura. El siguiente teorema muestra el comportamiento de la cerradura de los conjuntos bajo las operaciones de grupo.

II.1.22 Teorema. *Si A y B son subconjuntos no vacíos de G, satisfacen entonces las siguientes propiedades:*

i) $\overline{A}\,\overline{B} \subseteq \overline{AB}$;

ii) $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$;

iii) $g\overline{A}h = \overline{gAh}$, *para todo* $g, h \in G$.

Demostración.

i) Sean $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$. Si $U \in \mathcal{V}(e)$ por la continuidad de la función producto, existe $V \in \mathcal{V}(e)$ de tal forma que $(aV)(bV) \subseteq abU$. Como $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$ existen $x, y \in G$ tales que $x \in (aV) \cap A$ y $y \in (bV) \cap B$ de donde $xy \in AB$ y $xy \in (aV)(bV) \subseteq abU$, es decir, $xy \in (abU) \cap AB$ y por tanto $(abU) \cap AB \neq \emptyset$. De esto, $a, b \in \overline{AB}$.

ii) Dado que la función inversión es un homeomorfismo se tiene que $i(\overline{A}) = \overline{i(A)}$ y por tanto $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

iii) Sean $g, h \in G$. Dado que las traslaciones son homeomorfismos se tiene entonces que $L_g(R_h(\overline{A})) = \overline{L_g(R_h(A))}$ y por tanto $g\overline{A}\,h = \overline{(gAh)}$. □

Observación. Una función entre grupos topológicos $f : G_1 \to G_2$ es continua si para todo abierto U del neutro de G_2 existe un abierto V de el neutro de G_1 tal que $f(gV) \subseteq f(g)U$, para todo $g \in G_1$.

En general, una función entre espacios es continua si lo es en cada uno de sus puntos. Por la homogeneidad, para un homomorfismo de grupos topológicos basta ser continua en el neutro para concluir que lo es en cada uno de los elementos del grupo.

II.1.23 Teorema. *Un homomorfismo entre grupos topológicos $f : G_1 \to G_2$ es continuo si y solo si lo es en el neutro de G_1.*

Demostración. Si f es continua entonces lo es en cada uno de los puntos de G, en particular en el neutro de G_1.
Por otro lado, si f es continua en el neutro, $\mathcal{V}(e_1)$ y $\mathcal{V}(e_2)$ son bases locales en los neutros de G_1 y G_2, respectivamente, entonces para cada $U \in \mathcal{V}(e_2)$ existe $W \in \mathcal{V}(e_1)$ tal que $f(W) \subseteq U$. De esto, por *iii*) del Teorema II.1.16 existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $gV \subseteq W$, de donde $f(gV) = f(g)f(V)$ por ser f homomorfismo, y así $f(gV) \subseteq f(g)U$, por lo que f es continua en g. □

Las propiedades de bases locales en el neutro han demostrado ser muy útiles para las pruebas de algunos resultados. Existen también bases locales en las que sus elementos presentan propiedades por sí mismos, un ejemplo de esto es la simetría que presentan algunos conjuntos de G. Recordando, un subconjuntos S de G se dice simétrico si $S = S^{-1}$. El siguiente Teorema prueba que en los grupos topológicos siempre es posible dar una base con tales características.

II.1.24 Teorema. *Todo grupo topológico G tiene una base local de abiertos en e que consta de conjuntos simétricos.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}(e)$ una base local de abiertos en e. Para cada $U \in \mathcal{V}(e)$ se define $V := U \cap U^{-1}$, de donde $V = V^{-1}$ y $e \in V \subseteq U$. Si $\mathcal{S}_{\mathcal{V}(e)} := \{V : V = U \cap U^{-1}, U \in \mathcal{V}(e)\}$ y $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}(e)}$ existen $S = U \cap U^{-1}$, para algún $U \in \mathcal{V}(e)$. Para U existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $V \subseteq U$, así $V^{-1} \subseteq U^{-1}$. Sea $S' = V \cap V^{-1}$ entonces $S' \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}(e)}$ y es tal que $S' \subseteq S$, por lo que $\mathcal{S}_{\mathcal{V}(e)}$ es base local en e. □

II.1.25 Definición. Si $\mathcal{S}(e)$ es una base local de abiertos simétricos de e, $\mathcal{S}(e)$ se dice `base simétrica de` e.

II.1.26 Ejemplo. *En el grupo aditivo $\mathbb{R}$ con la topología usual, los conjuntos $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ forman una base simétrica del neutro 0.*

Como se tiene que todo grupo topológico tiene una base local de abiertos simétricos pueden tomarse entonces abiertos simétricos para las demostraciones.

II.1.27 Teorema. *Si $\mathcal{S}(e)$ es una base simétrica de e, entonces para cada abierto U de e existe $V \in \mathcal{S}(e)$ tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

Demostración. Si U es un abierto de e, como $\mathcal{S}(e)$ es base local de e, existe $V \in \mathcal{S}(e)$ tal que $V^2 \subseteq U$. Sea $g \in \overline{V}$, entonces $gV \cap V \neq \emptyset$, de donde existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $gv_1 = v_2$. Luego, $g = v_2 v_1^{-1}$ y por tanto $g \in VV^{-1} = V^2 \subseteq U$. $\square$

Si S es un conjunto simétrico de G entonces $S = S^{-1}$ de lo cual se tiene que $\overline{S} = \overline{S^{-1}}$. Por el Teorema II.1.22, $\overline{S} = \overline{S}^{-1}$ y por tanto se tiene que la cerradura preserva la simétria.

II.1.28 Corolario. *La ceradura de todo conjunto simétrico es un conjunto simétrico.*

II.1.29 Teorema. *Para todo $g, h \in G$, $g \in \overline{\{h\}}$ si y solo si $h \in \overline{\{g\}}$.*

Demostración. Sea V abierto simétrico de e. Si $g \in \overline{\{h\}}$ entonces $g \in hV$ y por tanto $g = hv$, para algún $v \in V$, así $h = gv^{-1} \in gV$, de donde $h \in V$. $\square$

S II.2. Subgrupo y grupo producto

En la presente sección se busca definir una topología en grupos definidos a partir por grupos topológicos dados. Topologías consistentes con estos grupos se dan de manera natural, esto es, para los subgrupos una topología consistente está dada por la topología de subespacio, y para los grupos directos una topología consistente es la topología producto. En lo que resta del actual capítulo, G se considera grupo topológico.

II.2.1 Teorema. *Si H es subgrupo de G entonces H es grupo topológico respecto a la topología de subespacio.*

Demostración. Si H es subgrupo de G entonces $gh^{-1} \in H$, para todo $g, h \in H$, por lo que la función $\iota_v|_{H\times H}$ está bien definida y al ser restricción de una función continua sobre el subespacio H se tiene a su vez que es continua. Por tanto, H es grupo topológico. □

II.2.2 Definición. Bajo las condiciones anteriores, H se dice `subgrupo topológico` de G.

II.2.3 Ejemplo. *El conjunto $\mathbb{Z}$ es un grupo topológico como subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{R}$ con la topología de subespacio. El conjunto $\mathbb{Z}$ es un grupo topológico discreto de $\mathbb{R}$.*

De manera general, todo grupo dotado de la topología discreta es un grupo topológico.

II.2.4 Ejemplo. *Todo grupo con las topologías discreta e indiscreta son grupos topológicos.*
Si G es un grupo arbitrario con la topológia indiscreta y $gh \in G$, el único abierto que contiene a gh^{-1} es el abierto G y $\iota_v^{-1}(G) = G \times G$ es abierto, por lo que ι_v es continua.
Si G tiene la topología discreta, para cualquier abierto U de G que contenga al producto gh^{-1} se tiene que $\iota_v^{-1}(U)$ es abierto en $G \times G$ ya que el producto de espacios discretos es discreto.

II.2.5 Ejemplo. *El grupo especial lineal es un grupo topológico con la topología de subespacio heredada del espacio de matrices, esto ya que el grupo general lineal es un grupo.*

De la definición de base local y del hecho de que los abiertos de un punto g de G pueden verse como traslaciones de abiertos del neutro, se puede dar una base para la topología en H, usando Teorema I.3.23.

II.2.6 Corolario. *Si $\mathcal{V}(e)$ es una base local para $\{e\}$, entonces los conjuntos de la forma $V \cap H$, donde $V \in \mathcal{V}(e)$, forman una base local de e en H y $\beta_H := \{gV \cap H : V \in \mathcal{V}(e) : g \in G\}$ es una base para la topología de subespacio en H.*

En el Teorema II.1.22 se tiene que la cerradura de conjuntos preserva la toma de inversos, sin embargo no siempre preserva el producto. De estas propiedades se deduce que la cerradura mantiene la estructura de subgrupo.

II.2.7 Teorema. *Si H es un subgrupo de G entonces $\overline{H}$ es también un subgrupo de G. Más Aún, si $H \lhd G$ entonces $\overline{H} \lhd G$.*

Demostración. Si $H \leq G$ entonces $H^2 \subseteq H$ y $H^{-1} \subseteq H$. Al tomar cerradura, $\overline{H^2} \subseteq \overline{H}$ y $\overline{H^{-1}} \subseteq \overline{H}$ y por el Teorema II.1.22 se sigue que $\overline{H}^2 \subseteq \overline{H^2} \subseteq \overline{H}$ y $(\overline{H})^{-1} = \overline{H^{-1}} \subseteq \overline{H}$. Se concluye entonces que $\overline{H}^2 \subseteq \overline{H}$ y $(\overline{H})^{-1} \subseteq \overline{H}$ por lo que $\overline{H}$ es subgrupo de G.
Por otro lado, si $H \lhd G$, $g\overline{H}g^{-1} \subseteq \overline{gHg^{-1}} \subseteq \overline{H}$, de donde $\overline{H} \lhd G$. □

Por el Teorema I.1.25, $\{e\}$ es el subgrupo normal más pequeño de G, por lo que su cerradura también es un subgrupo. La homogeneidad en G permite dar una caracterización de la cerradura de los conjuntos unipuntuales.

II.2.8 Corolario. *El conjunto unipuntual $\overline{\{e\}}$ es el subgrupo cerrado normal más pequeño de G. Además, para cada punto $g \in G$, se tiene $\overline{\{g\}} = g\overline{\{e\}}$.*

Demostración. Sea $g \in G$. Dado que las traslaciones son homeomorfismos se tiene que $\overline{L_g(\{e\})} = L_g(\overline{\{e\}})$ y por tanto $\overline{\{g\}} = g\overline{\{e\}}$. □

Un subconjunto de un espacio topológico es abierto si cada uno de sus puntos es un punto interior. En los grupos topológicos basta que se tenga un punto interior para que todos sus puntos lo sean, en particular, basta que lo sea el elemento neutro.

II.2.9 Teorema. *Todo subgrupo de G es abierto si y solo si su interior es no vacío. Más aún, todo subgrupo abierto de G es también cerrado.*

Demostración. Sea H subgrupo de G. Si H es abierto, todos sus puntos son interiores, con lo que su interior es no vacío.
Si H tiene interior no vacío, entonces existe $h \in H$ tal que $h \in int(H)$. De esto, para h existe U abierto de e con $hU \subseteq H$. Si $g \in H$, entonces $gU = gh^{-1}hU \subseteq H$, esto último pue $gh^{-1} \in H$ y $hU \subseteq H$. Por tanto H es abierto.
Por otro lado, por ser H subgrupo de G se tiene $(G-H)H = GH - HH = G - H$, por lo que si H es abierto entonces $(G-H)H$ es abierto y así $G-H$ es abierto, es decir, H es cerrado. □

Si se tiene un conjunto abierto simétrico, se puede generar un subgrupo a partir de él al tomarse todos los productos de sus elementos para asegurar que la operación es cerrada.

II.2.10 Teorema. *Sea U un abierto simétrico de e. El conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} U^n$ es un subgrupo abierto y cerrado de G.*

Demostración. Sean $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} U^n$ y $g, h \in H$, entonces que $g \in U^m$ y $h \in U^n$, para algunos $m, n \in \mathbb{N}$. Como U^n es simétrico se tiene que $h^{-1} \in U^n$ y así $gh^{-1} \in U^m U^n = U^{m+n}$. Luego, $gh^{-1} \in H$ y por tanto se concluye que $H \leq G$.
Como U es abierto entonces H es abierto al ser unión de abiertos y por ser un subgrupo de G, por el teorema anterior, se sigue que es también cerrado. □

En Definición I.1.33 se tiene que el producto cartesiano de dos grupos es un grupo a partir de la operación dada en los grupos. Si ambos grupos factor son grupos topológicos entonces la topología producto es consistente con la operación dada en el producto directo.

II.2.11 Teorema. *Si G_1 y G_2 son grupos topológicos entonces la topología producto es consistente con el producto directo en $G_1 \times G_2$.*

Demostración. Sean υ_1 y υ_2 son las funciones producto en G_1 y G_2, respectivamente. La función producto definida en el producto cartesiano, $\upsilon : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2$, satisface que $\upsilon\big((g_1, g_2), (h_1, h_2)\big) = (g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2)$, de donde se tiene la igualdad $\upsilon\big((g_1, g_2), (h_1, h_2)\big) = \big(\upsilon_1(g_1, h_1), \upsilon_2(g_2, h_2)\big)$. Si $\pi_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$ y $\pi_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$ son las proyecciones en la primer y segunda coordenada, respectivamente, y por el Teorema I.3.49 las funciones $(\pi_i, \pi_i) = (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_i \times G_i$ son continuas, para $i = 1, 2$. De lo anterior se tiene que las funciones $\upsilon_i(\pi_i, \pi_i) : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_i$, con $i = 1, 2$, son también continuas por ser composición de funciones continuas, y por tanto $\upsilon = \big(\upsilon_1(\pi_1, \pi_1), \upsilon_2(\pi_2, \pi_2)\big)$ es continua.
Sean ι_1 y ι_2 las inversiones en G_1 y G_2, respectivamente. La inversión ι en $G_1 \times G_2$ está dada por $\iota\big((g, h)\big) = (g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$. Las inversiones ι_1 y ι_2 son continuas por lo que cada $\iota_i\pi_i$ es continua, para $i = 1, 2$, de donde $\iota = (\iota_1\pi_1, \iota_2\pi_2)$ es continua.
Las funciones producto e inversión son continuas en $G_1 \times G_2$ y por tanto el grupo directo de G_1 y G_2 es grupo topológico con la topología producto. $\square$

II.2.12 Definición. Bajo las condiciones anteriores, $G_1 \times G_2$ se dice `grupo topológico producto` de G_1 y G_2.

II.2.13 Ejemplo. *La esfera $S^1 = \{z \in \mathcal{C} : \bar{z} = 1\}$ es un grupo topológico:*

Si $z \in S^1$, entonces $z = e^{i\theta}$ para algun $\theta \in \mathbb{R}$. S^1 es grupo con el producto usual en $\mathcal{C}$ donde, si $z_1 = e^{i\theta_1}$ y $z_2 = e^{i\theta_2}$, se tiene que $z_1z_2 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Si β es el conjunto formado por 'arcos abiertos'de S^1, es decir,

$$\beta = \{z = e^{i\theta} : \theta \in (a, b), \ \textit{con } a < b\},$$

entonces β es base para una topología en S^1 la cual es inducida por la métrica dada por $d(z_1, z_2) = d(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = |\theta_1 - \theta_2| \ (mod\, 2\pi)$, donde $mod\, 2\pi$ es el módulo 2π.
Sean $z_1, z_2 \in S^1 \times S^1$, con $z_1 = e^{\theta_1}$ y $z_2 = e^{\theta_2}$, donde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, y $\varepsilon > 0$. Si $U = \{z \in S^1 : d(z_1, z) < \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{z \in S^1 : d(z_2, z) < \frac{\varepsilon}{2}\}$ y $(w_1, w_2) \in U$, con $w_1 = e^{i\omega_1}$ y $w_2 = e^{i\omega_2}$, donde $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, de la definición de la métrica se tiene

$$d(z_1z_2, w_1w_2) = \big|(\theta_1 + \theta_2) - (\omega_1 + \omega_2)\big| \leq |\theta_1 - \omega_1| + |\theta_2 - \omega_2| < \varepsilon,$$

con lo que la multiplicación es continua.

Sea $z \in S^1$*, con* $z = e^{i\theta}$*, y* $\varepsilon > 0$*. Si* $\delta = \varepsilon$ *y* $d(z, w) < \delta$*, donde* $w = e^{i\omega}$*, entonces dado que* $z^{-1} = e^{-i\theta}$ *y* $w^{-1} = e^{-i\omega}$*, se sigue* $d(z^{-1}, w^{-1}) = \big|(-\theta) - (-\omega)\big| = |\theta - \omega| < \varepsilon$*, con lo que la inversión es continua.*
Por el teorema anterior, se tiene que el Toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ *es un grupo topológico con la topología producto de* S^1*.*

Observación. De manera general se tiene que el producto directo de una familia de grupos topológicos $\{G_i\}$ es un grupo topológico al considerar en el producto la topología de Tychonoff.

S II.3. Compacidad y conexidad

La traslación de conjuntos compactos y conexos mantienen estas propiedades debido a la continuidad de las traslaciones. Más aún, la continuidad de las funciones producto e inversión implican que el producto y los inversos de conjuntos compactos o conexos lo sea también, como se muestra en esta sección.

Observación. Dada la caracterización de los abiertos en cada punto, se tiene una caracterización de los conjuntos compactos en grupos topológicos:
Un subconjunto K de G es compacto si y solo si para cualquier familia $\{g_i U_i : g_i \in K, U_i \in \mathcal{V}(e)\}$ existen $g_1, g_2, \ldots, g_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} g_n U_n$.

El producto de conjuntos cerrados no es necesariamente cerrado, sin embargo el producto de compactos si mantiene esta propiedad, esto es, producto de conjuntos compactos es compacto.

II.3.1 Teorema. *Sean F y K subconjuntos compactos de G entonces FK es compacto.*

Demostración. Dado que F y K son compactos entonces $K \times F$ es compacto en $G \times G$. Por ser KF la imagen de $K \times F$ bajo υ se concluye que KF es compacto. □

Según el Corolario II.1.20 el producto de un conjunto finito y un conjunto cerrado es cerrado. Puede extenderse dicho resultado de conjuntos finitos a conjuntos compactos, esto es, el producto de un conjunto compacto y un cerrado es cerrado.

II.3.2 Teorema. *Sea F y K subconjuntos compacto de G. Si F es cerrado y K es compacto, entonces FK es cerrado.*

Demostración. Se usará la teoría de redes, Apendice A, para demostrar que FK es cerrado. Sea Λ un conjunto dirigido y $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red en FK que converge a $g_0 \in G$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, $g_\lambda = x_\lambda y_\lambda$, con $x_\lambda \in F$ y $y_\lambda \in K$.

Por el Teorema A.6. *ii*), dado que K es compacto, existen $y_0 \in K$ y una subred $(y_\delta)_{\delta \in \Delta}$ de (y_λ), $\Delta \subseteq \Lambda$, tal que $(y_\delta) \to y_0$. Ya que $(g_\lambda) \to g_0$ se tiene que $(g_\delta) \to g_0$. Como $\iota_\upsilon\big((g,h)\big) = gh^{-1}$, por el Teorema A.3.*iii*). se sigue que $\iota^*\big((g_\delta, y_\delta)\big) \to g_0 y_0^{-1}$, es decir, $(x_\delta) = (g_\delta y_\delta^{-1}) \to g_0 y_0^{-1}$. Como F es cerrado y $x_\delta \in F$, para cada δ, se tiene que $x_0 = g_0 y_0^{-1} \in K$ y por tanto $g_0 = (g_0 y_0^{-1}) y_0 \in FK$, es decir, $g_0 \in \overline{FK}$ y FK es cerrado. □

En el Teorema II.1.16 se tiene que para cualquier abierto U y cualquier punto de g de G existe un abierto V de tal manera que el conjugado de V esta contenido en U. El siguiente teorema muestra que la dependencia de g no es necesaria para los conjugados de V dados por un compacto, por lo cual puede encontrarse un solo abierto para todos los elementos del compacto.

II.3.3 Teorema. *Si $\mathcal{V}(e)$ es una base local de abiertos de e entonces para cada $U \in \mathcal{V}(e)$ y cualquier compacto K de G existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $gVg^{-1} \subseteq U$, para todo $g \in K$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{V}(e)$ entonces existe W abierto simétrico de e tal que $W^3 \subseteq U$. Para la cubierta abierta $\{Wg\}_{g \in K}$ de K existen $g_1, \ldots, g_n \in K$ de tal manera que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Wg_i$. Si $V = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}Wg_i$ entonces V es abierto de e tal que $V \subseteq g_i^{-1}Wg_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, y por tanto $g_iVg_i^{-1} \subseteq W$. Para $g \in K$ y algún $i = 1, \ldots, n$, $g \in Wg_i$ y $g = wg_i$, con $w \in W$. Como W es simétrico, $w, w^{-1} \in W$ y así $gVg^{-1} = wg_iVg_i^{-1}w^{-1} \subseteq wWw^{-1} \subseteq W^3 \subseteq U$. □

De acuerdo a la Definición I.3.66, un espacio es localmente compacto si cada vecindad tiene una base local de conjuntos compactos. Al ser todo grupo topológico homogéneo, basta con tomar una base local de compactos en el neutro y trasladarla a cualquier punto para tener una base local de compactos para cada punto.

II.3.4 Teorema. *G es localmente compacto si y solo si $\{e\}$ tiene una base local de conjuntos compactos.*

Demostración. Si G es localmente compacto entonces todos sus puntos, en particular e, tiene una base local de compactos.
Si $\mathcal{K}(e)$ es una base local de compactos de e, dado que las traslaciones son homeomorfismos, para cada $g \in G$ y cada $K \in \mathcal{K}(e)$, se sigue que gK es compacto y así $\{gK\}_{K \in \mathcal{K}}$ es una base local de compactos de g por lo G es localmente compacto. □

II.3.5 Ejemplo. $\mathbb{R}$ *es localmente compacto ya que* $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ *es base local de conjuntos compactos en 0.*

Los conjuntos conexos también mantienen esta propiedad al tomar productos e inversos.

II.3.6 Teorema. *Si C y D son subconjuntos conexos de G entonces C^{-1} y CD son conexos.*

Demostración. Dado que la función inversión y la función producto son continuas, entonces $C^{-1} = \iota(C)$ y $CD = \upsilon(C \times D)$ son conexos. □

Similar a las bases locales en el neutro, la componente conexa más importante en un grupo topológico es aquella que contiene al elemento neutro.

II.3.7 Definición. Se define la `componente conexa` de G, denotada por $C(G)$, como la componente que contiene al elemento neutro de G.

II.3.8 Teorema. *La componente conexa de G es un subgrupo normal cerrado.*

Demostración. Dado que $e \in C(G)$ se tiene que $e = e^{-1} \in C(G)^{-1}$ y $e = e^2 \in C(G)^2$, es decir, $C(G)^{-1}$ y $C(G)^2$ son conexos que contienen a e. Como $C(G)$ es conexo maximal se sigue que $C(G)^{-1}, C(G)^2 \subseteq C(G)$, y por tanto C es subgrupo de G. Si $g \in G$, $gC(G)g^{-1}$ es conexo, por la continuidad de la función $a \mapsto gag^{-1}$, con $gC(G)g^{-1} \subseteq C(G)$, por lo que $C(G)$ es normal. Por el Teorema I.3.77, C es cerrado al ser componente de G. □

La componente de G caracteriza a las componentes de cada elemento de g.

II.3.9 Teorema. *Para cada elemento g de G, la componente de g es el conjunto $gC(G)$.*

Demostración. Dado que L_g es un homeomorfismo entonces, por el Teorema I.3.78, se sigue que $L_g\big(C(G)\big) = gC(G)$ es una componente en G. Dado que $e \in C(G)$, $g \in gC(G)$ por lo que $gC(G)$ es la componente de g. $\square$

Si el grupo es conexo entonces es cubierto por una cantidad numerable de abiertos de el neutro.

II.3.10 Teorema. *Para cada abierto U de e, $C(G) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. En particular, si G es conexo se tiene que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.*

Demostración. Sea S un abierto simétrico de e tal que $S^2 \subseteq U$, por el Teorema II.2.10 se tiene que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$ es abierto y cerrado, con lo que V y $G - V$ forman una separación del espacio. Como $C(G)$ es conexo de e y $e \in V$ entonces $C(G) \subseteq V \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. Si G es conexo entonces no tiene conjuntos propios que sean abiertos y cerrados, por lo que $G = V = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. $\square$

S II.4. Axiomas de separación

En esta sección se estudian algunas de las propiedades de separación de los grupos topológicos. Con respectos a estos, una de las propiedades más interesantes que se tiene es que los axiomas T_0, T_1 y Hausdorff son equivalentes, de lo cual separa puntos por abiertos es equivalente a que los conjuntos unipuntuales sean cerrados.

Observación. Según lo estudiado, si para cualesquiera $g, h \in G$ distintos existe U abierto de e tal que $h \notin gU$ (o $g \notin hU$) entonces G es T_0, G es T_1 si existen U y V abiertos de e de tal manera que $g \notin hV$ y $h \notin gU$, y G es de Hausdorff si existen U y V abiertos de e de tal manera que $gU \cap hV = \emptyset$.

Dado que en los espacios topológicos la propiedad de ser T_1 es equivalente a que los conjuntos unipuntuales sean cerrados, por la homogeneidad en los grupos topológicos basta que el conjunto unipuntual del neutro sea cerrado.

II.4.1 Teorema. *El grupo G es T_1 si y solo si $\{e\}$ es cerrado.*

Demostración. Si G es T_1 entonces todos los conjuntos unipuntuales son cerrados, por lo que $\{e\}$ es cerrado.
Sea $g \in G$. Si $\{e\}$ es cerrado entonces $\overline{\{g\}} = g\overline{\{e\}} = g\{e\} = \{g\}$, por lo que $\{g\}$ es cerrado. De esto se tiene que todo conjunto unipuntual es cerrado y por tanto G es T_1. □

En general, la propiedad de ser un espacio de Hausdorff implica que el espacio es T_1. En grupos topológicos, se tiene una equivalencia entre estas dos propiedades.

II.4.2 Teorema. *G es de Hausdorff si y solo si $\{e\}$ es cerrado.*

Demostración. Si $\{e\}$ es cerrado, como la función $\iota_v : G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ es continua, $\iota_v^{-1}(e) = \big\{(g,g) : g \in G\big\}$ es cerrado en $G \times G$. Sean $g, h \in G$, con $g \neq h$. Se tiene entonces $(g,h) \in G - \big(\iota_v^{-1}(e)\big)$, el cual es abierto, por lo que existen U y V abiertos de e tales que $gU \times hV \subseteq G - \big(\iota_v^{-1}(e)\big)$. De esto, $(gU) \cap (hV) = \emptyset$ pues $gu \neq hv$ para todo $u \in U$ y $v \in V$, y asi G es de Hausdorff.
Si G es de Hausdorff es entonces T_1 y así todos los conjuntos unipuntuales son cerrados, en particular $\{e\}$ es cerrado. □

II.4.3 Corolario. *G es de Hausdorff si y solo si es T_1.*

La equivalencia del teorema anterior no es la única para los grupos topológicos Hausdorff pero si una de las más importantes ya que todo se limita a probar que el conjunto unipuntual del neutro es cerrado. El siguiente teorema muestra que, de hecho, ser Hausdorff es equivalente a ser un espacio T_0, esto significa que todos aquellos grupos dotados con una topología que sean T_0 pero no T_1 o Hausdorff, y aquellos que sean T_1 pero no Hausdorff entonces no pueden ser considerados grupos topológicos.

II.4.4 Teorema. *Para el grupo topológico G las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) G *es* T_0,

ii) G *es* T_1,

iii) G *es Hausdorff,*

iv) $\bigcap_{U \in \mathcal{V}(e)} U = \{e\}$, *donde* $\mathcal{V}(e)$ *es una base local de* e.

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Sean $g, h \in G$ con $g \neq h$. Si G es T_0 entonces para alguno, digamos g, existe un abierto U de e tal que $h \notin gU$. Sea V abierto simétrico de e tal que $V \subseteq U$ entonces $g \notin hV$, esto pues si $g \in hV$ entonces $h^{-1}g \in V$ y al ser V simétrico $g^{-1}h \in V$, de donde se tendría que $h \in gV \subseteq gU$, lo cual contradice la elección de U. Se concluye entonces que $h \notin gU$ y $g \notin hV$, por tanto G es T_1.

$ii) \Rightarrow iii)$ Corolario II.4.3.

$iii) \Rightarrow iv)$ Sea $\mathcal{V}(e)$ base local de abiertos de e. Si G es de Hausdorff entonces $\{e\} = \overline{\{e\}}$. Por el Teorema II.1.21 se sigue que $\overline{\{e\}} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(e)} \{e\}U$, es decir, $\{e\} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(e)} U$.

$iv) \Rightarrow i)$ Sean $g, h \in G$. Si $g \neq h$ entonces $h^{-1}g \neq e$ y así existe $U \in \mathcal{V}(e)$ tal que $h^{-1}g \notin U$, de donde $g \notin hU$. De esto, G es T_0. □

II.4.5 Ejemplo. $\mathbb{Z}_2$ *con la topología de Sierpinski no es un grupo topológico dado que es un espacio* T_0 *que no es* T_1 *ni Hausdorff.*

Algunos axiomas de separación son entonces equivalentes en los grupos topológicos. El siguiente teorema prueba que la regularidad es una propiedad inherente de estos espacios.

II.4.6 Teorema. *Todo grupo topológico G es regular.*

Demostración. Por el Corolario II.1.27, para cada abierto U de e existe un abierto simétrico V de e tal que $\overline{V} \subseteq U$. Por la homogeneidad de G y el Teorema I.3.52. iii) se sigue que G es regular. □

II.4.7 Ejemplo. *En* $\mathbb{R}$, *la familia* $\beta = \{U - C : U \subset \mathbb{R} \text{ es abierto}, C \text{ es contable}\}$, *donde* U *es abierto en la topología usual, es base para una topología en* $\mathbb{R}$ *denominada* `topología de complementos contables`. *Con esta topología* $\mathbb{R}$ *es un espacio de Hausdorff pero no es regular, por lo que* $\mathbb{R}$ *no es grupo topológico.*

Dado que todo grupo topológico T_0 es un espacio regular y la equivalencia entre espacios T_3 y espacios regulares T_1, se tiene entonces que la equivalecia se da directamente entre ser T_1 y ser T_3.

II.4.8 Corolario. *Si un grupo topológico G es T_0 es entonces T_3.*

Las equivalencias entre otros axiomas de separación y ser Hausdorff no se limitan a las aquí presentadas. Puede demostrarse que ser T_2 es equivalente a ser completamente regular. Una prueba de lo anterior puede encontrarse en [[2], Teorema 8.4, Capítulo 2] en donde son necesarios conceptos como metrizabilidad, los cuales escapan de los propósitos de este escrito.

S II.5. Grupos cocientes

En las secciones anteriores se ha dotado de topologías consistentes con la estructura de grupo a los subgrupos y a los productos directos de grupos. En la siguiente sección se hace lo mismo con los grupos cocientes, lo cual es posible ya que las clases laterales generan una función sobreyectiva entre el espacio y el grupo cociente, dada por la proyección, con la cual definimos una topología cociente en el espacio cociente. En la presente sección, N es un subgrupo normal del grupo topológico G y $\pi : G \to G/N$ es proyección natural, dada por $\pi(g) = Ng$, y se dota a G/N con la topología cociente con respecto a la función π.

Los subconjuntos en G/N son de la forma $\{aN : a \in A\}$, donde $A \subseteq G$, el cual se denota AN para mayor comodidad, recordando que cada aN es un punto en G/N. No confundir el conjunto AN en G el cual es producto de los conjuntos A y N, con el conjunto AN en G/N el cual es el conjunto de puntos aN con $a \in A$.

Observación. Un subconjunto UN de G/N, donde $U \subseteq G$, es abierto si y solo si $\pi^{-1}\big(UN\big) = \bigcup\limits_{u \in U} uN = UN$ es abierto en G.

Las funciones cocientes son continuas, pero no siempre son abiertas. Estas funciones definidas en grupos cocientes obtenidos a partir de grupos topológicos son siempre abiertas.

II.5.1 Teorema. *La proyección natural π es abierta.*

Demostración. Si U es abierto de G entonces UN es abierto en G. Dado que $\pi^{-1}\big(\pi\big(U\big)\big) = UN$ se sigue que $\pi(U)$ es abierto en G/N. □

Los abiertos en G determinan abiertos en G/N. La relación entre los abiertos no es 1-1 ya que $\pi(U) = UN = \pi(UN)$.

II.5.2 Corolario. *Si U es abierto en G entonces UN es abierto en G/N.*

Demostración. Si U es abierto en G, como π es abierta, $\pi\big(U\big) = UN$ es abierto en G/N. □

Como π es un homomorfismo entre grupos, los abiertos de e en G determinan abiertos en cada punto de G/N.

II.5.3 Teorema. *Sean U abierto de e en G y $g \in G$. El conjunto gUN, dado por $(gU)N = \{hN : h = gu,\ \text{con } u \in U\}$, es un abierto del elemento gN en G/N.*

Demostración. Dado que π es un homomorfismo abierto y gU es un abierto de g entonces $\pi(gU)$ es abierto en G/N tal que $gN \in gUN$. □

II.5.4 Corolario. *Sea $\mathcal{V}(e)$ una base local de abiertos de e en G. La familia $\mathcal{V}(N) := \{UN : U \in \mathcal{V}(e)\}$ es una base local del elemento N en el espacio cociente G/N.*

Dado que G/N es un grupo se tienen definidas las traslaciones izquierdas o derechas, según se tenga el grupo de clases laterales izquierdas o derechas. Sea $xN \in G/N$, se denota por $L'_x : G/N \to G/N$ la traslación respecto de xN dada por $L'_x(gN) = xNgN = xgN$.

II.5.5 Teorema. *Las traslaciones en G/N son homeomorfismos.*

Demostración. Sea $x \in G$. La función L'_x hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "L_x"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/N \arrow[r, "L'_x"] & G/N \end{tikzcd}$$

esto es, $L'_x\pi = \pi Lx$. Dado que πL_x es continua y π es una identificación entonces por la propiedad universal del cociente, Teorema I.3.96, se tiene que L'_x es continua. La continuidad de la función traslación respecto a x es clara ya $(L'_x)^{-1} = L'_{x^{-1}}$. □

II.5.6 Corolario. *El espacio cociente G/N es un espacio homogéneo.*

II.5.7 Corolario. *Sea $\mathcal{V}(e)$ una base local de abiertos de $\{e\}$. La familia $\{gUN : g \in G, U \in \mathcal{V}(e)\}$ es base local de abiertos de gN.*

II.5.8 Teorema. *Si N es compacto entonces π es cerrada.*

Demostración. Sea B subconjunto cerrado en G. Dado que N es compacto entonces BN es también cerrado en G. Como π es continua y $\pi^{-1}\big(\pi(B)\big) = BN$ es cerrado en G se sigue que $\pi(B)$ es cerrado en G/N. Por lo tanto π es cerrada. □

II.5.9 Teorema. *G/N es discreto si y solo si N es abierto en G.*

Demostración. Si N es abierto se tiene que AN es abierto para todo $A \subseteq N$, por lo que todo conjunto unipuntual gN en G/N es abierto. Por tanto, G/N es discreto.
Si G/N es discreto en G/N entonces $\{N\}$ es abierto, por lo que $\pi^{-1}(N) = N$ es abierto en G. □

II.5.10 Teorema. *G/N es de Hausdorff si y solo si N es cerrado.*

Demostración. Sean $g, h \in G$ tales que $gN \neq hN$, entonces $gh^{-1} \notin N$. Dado que ι_v es continua y N es cerrado, $\iota_v^{-1}(N)$ es cerrado en $G \times G$ y por tanto su completemento es abierto. Como $(g, h) \in G \times \big(G - \iota_v^{-1}(N)\big)$ existen abiertos U, V abiertos de e con $gU, hV \subseteq G \times \big(G - \iota_v^{-1}(N)\big)$, de lo cual $gu(hv)^{-1} \notin N$, para todo $u \in U$ y todo $v \in V$. Dado que π es cociente, se tiene que gUN y hVN son abiertos en G/N tales que $gN \in gUN$ y $hN \in hVN$. $gUN \cap hVN = \emptyset$ pues en caso contrario existirían $u \in U$ y $v \in V$ tales que $guN = hvN$, de donde $gu(hv)^{-1} \in N$ lo cual no es posible por la elección de U y V. Por tanto $gUN \cap gVN = \emptyset$, y así G/N es de Hausdorff.

Si G/N es de Hausdorff entonces es T_1 y así $\{N\}$ es cerrado. Se sigue que $N = \pi^{-1}\big(N\big)$ es cerrado en G. $\square$

Hasta este punto no se ha necesitado la estructura de grupo en las desmostraciones anteriores, por lo que no es necesario que N sea normal. Si N es normal entonces G/N tiene una estructura de grupo y es grupo topológico con la topología cociente.

Se denotan por $\upsilon' : G/N \times G/N \to G/N$, $\iota' : G/N \to G/N$ las funciones producto e inversión en el espacio cociente G/N dadas por $\upsilon'\big((gN, hN)\big) = ghN$ y $\iota'(gN) = g^{-1}N$.

II.5.11 Teorema. *La topología cociente respecto a la proyección natural es consistente con la operación en el grupo cociente G/N.*

Demostración. Sean $g, h \in G$ y $ghUN$ abierto de gN en G/N. Como $e \in UN$ y el producto es continuo en G, existen V, W abiertos de e tales que $(gV)(hW) \subseteq ghU$. Dado que π es abierta, $\pi\big((gV)(hW)\big)$ es abierto en G/N y $(gV)(hW)N \subseteq ghUN$. Por la operación del grupo se tiene $(gV)(hW)N = (gVN)(hWN)$, $gN \in gVN$ y $hN \in hWN$ se sigue que el producto en G/N es continuo.
La función ι' esta completamente determinada por la función ι de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/N \arrow[r, "\iota'"'] & G/N \end{tikzcd}$$

es decir, $\iota'\pi = \pi\iota$. Dado que $\pi\iota$ es continua y π es cociente, por la propiedad universal del cociente, se sigue que ι' es continua.
El producto y la inversión en G/N son continuas y por tanto G/N es un grupo topológico. $\square$

II.5.12 Definición. Bajo las condiciones anteriores, G/N se dice `grupo topológico cociente` de G en N.

II.5.13 Ejemplo. *Dado que $\mathbb{R}$ con la suma y la topología usual es un grupo topológico y $\mathbb{Z}$ es normal a $\mathbb{R}$ se tiene entonces que el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un grupo topológico. Dicho grupo topológico es el grupo S^1.*

S II.6. Estructuras uniformes

Una estructura uniforme sobre un conjunto X es un familia no vacía $\mathcal{V}$ de subconjuntos de $X \times X$, llamados vecindades, en donde pueden definirse los conceptos uniformes como continuidad, convergencia, etc. El conjunto X con la estructura uniforme se denomina `espacio uniforme`. Los espacios uniformes generalizan conceptos que se han definido para espacios métricos y que son muy similares a algunos definidos en los espacios topológicos.

En análisis matemático, si (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos, y $A \subseteq X$, una función $f : A \to Y$ se dice `uniformemente continua` en A si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_X(x, y) < \delta$ implica que $d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$, para todo $x, y \in X$. Estos conceptos se dicen uniformes ya que pueden aplicarse a cualesquiera dos puntos de G. En topología no se tiene el concepto de continuidad uniforme ya que no se tiene el concepto de cercanía relativa entre puntos, dada la estructura de topología definida sobre la familia de subconjuntos, se tiene solamente la idea de cercanía de un punto a un conjunto. En grupos topológicos es posible definir tal "cercanía" ente dos puntos haciendo uso de las traslaciones: para $g \in G$, un elemento $h \in G$ es U-cercano a g si $L_{g^{-1}}(h) \in U$. Dado que $L_{g^{-1}}(g) = e$, se entiende que $g^{-1}h$ y e son tan cercanos como lo indica U.

II.6.1 Definición. Sea U un abierto simétrico de e. Dos puntos $g, h \in G$ son U-cercanos, en el sentido de traslación izquierda, si $g^{-1}h \in U$. De igual manera, si $hg^{-1} \in U$, g y h se dicen U-cercanos en el sentido de traslación derecha.

A partir de la definición de cercanía entre elementos se pueden definir conceptos de uniformidad en G: ya que se ha definido una cierta cercanía entre dos puntos g y h en G, se busca cercanía en un espacio conocido, en este caso $\mathbb{R}$; así una función $f : G \to \mathbb{R}$ se dirá uniformemente continua izquierda si existe U abierto simétrico de e tal que $|f(g) - f(h)| < \varepsilon$, siempre que g y h son U-cercanos en el sentido de traslación izquierda.

II.6.2 Definición. Sea $f : G \to \mathbb{R}$, se dice que f es `uniformemente continua izquierda` si para cada $\varepsilon > 0$ existe U abierto simétrico de e de tal manera que $|f(g) - f(gu)| < \varepsilon$, para todo $g \in G$ y todo $u \in U$.
De manera similar, f es `uniformemente continua derecha` si para cada $\varepsilon > 0$ existe U abierto simétrico de e tal que $|f(g) - f(ug)| < \varepsilon$, para todo $g \in G$ y todo $u \in U$.

II.6.3 Definición. Para cada $U \in \mathcal{V}(e)$, sean $L_U = \{(g, h) \in G \times G : g^{-1}h \in U\}$ y $R_U = \{(g, h) \in G \times G : hg^{-1} \in U\}$ los conjuntos de elementos U-cercanos en el sentido de traslación izquierda y derecha en G, respectivamente. Se definen las familias $\mathcal{S}_l := \{L_U : U \in \mathcal{V}(e)\}$ y $\mathcal{S}_r := \{R_U : U \in \mathcal{V}(e)\}$ llamadas `estructuras uniformes izquierda` y `derecha` de G, respectivamente.

A continuación se presentan algunos resultados inmediatos que denotan ciertas relaciones entre los elementos cercanos izquierdos y derechos.

Sean $g, h \in G$ y $U \in \mathcal{V}(e)$, se tienen entonces las siguiente propiedades sobre los conjuntos L_U y R_U.

i) $(g,h) \in L_U$ si y solo si $(h^{-1}, g^{-1}) \in R_U$, esto pues en ambos casos $g^{-1}h \in U$.
Análogamente, $(g,h) \in R_U$ si y solo si $(h^{-1}, g^{-1}) \in L_U$.

ii) $(g,h) \in L_U$ si y solo si $(h,g) \in L_{U^{-1}}$, pues $(h^{-1}g)^{-1} = g^{-1}h \in U$ si y solo si $h^{-1}g \in U^{-1}$.
De manera similar, $(g,h) \in R_U$ si y solo si $(h,g) \in R_{U^{-1}}$

iii) Sea $k \in G$, $(kg, kh) \in L_U$ si y solo si $(g,h) \in L_U$, ya que $(kg)^{-1}kh \in U$ si y solo si $g^{-1}h \in U$.
De manera similar, $(gk, hk) \in R_U$ si y solo si $(g,h) \in R_U$.

Ya que se tiene definido el concepto de cercanía, para definir la continuidad uniforme se construye una estructura uniforme. Si embargo, dado que para un grupo topológico se tiene U-cercanía izquierda y derecha, se definen entonces estructuras con estas propiedades.

Las estructuras uniformes se definen sobre un conjunto cualquiera, para lo cual se construyen vecindades en cada uno de sus puntos apartir de las cuales puede construirse una topología. Si el conjunto es en sí un espacio topológico y la topología inducida por la uniformidad coincide con la topología del espacio, la topología se dice `consistente` con la estructura uniforme. Dado un grupo topológico pueden construirse en él dos estructuras uniformes sobre las bases locales en el neutro a partir de las cercanías izquierdas y derechas, de tal manera que la topología del grupo es consistente con las topologías inducidas por las estructuras uniformes, por lo que se dice que todo grupo topológico es `uniformizable`.

Una vez definida una estructura uniforme en el espacio se procede a definir el concepto de continuidad uniforme para funciones entre grupos topológicos cualesquiera. Es importante mencionar que las estructuras no son necesariamente iguales, por lo que es necesario señalar para que par de estructuras se define la continuidad uniforme.

II.6.4 Definición. Sean G_1, G_2 grupos topológicos, $f : G_1 \to G_2$ y $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ bases abiertas en los neutros e_1 de G_1 y e_2 de G_2, respectivamente. Si para cada $U \in \mathcal{V}_2$ existe $V \in \mathcal{V}_1$ tales que $\big(f(g_1), f(g_2)\big) \in L_U$, para todo $(g_1, g_2) \in L_V$, entonces f se dice `función uniformemente continua` para el par de estructuras uniformes $\big(\mathcal{S}_l(G_1), \mathcal{S}_l(G_2)\big)$.

De manera análoga a la anterior, se definen las funciones uniformemente continuas para las parejas de estructuras uniformes dadas por $\big(\mathcal{S}_l(G_1), \mathcal{S}_r(G_2)\big)$, $\big(\mathcal{S}_r(G_1), \mathcal{S}_l(G_2)\big)$ y $\big(\mathcal{S}_r(G_1), \mathcal{S}_r(G_2)\big)$. Dadas las propiedades de las bases locales, la continuidad uniforme de f es independiente de la elección de las bases V_1 y V_2.

Toda función uniformemente continua para una pareja directa de estructuras topológicas lo es también para la otra.

II.6.5 Teorema. *Una homomorfismo $f : G \to G$ es uniformemente continuo para $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ si y solo si lo es para $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{V}(e)$, si f es uniformente continua para la pareja $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ entonces existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $(g, h) \in L_V$ implica que $\big(f(g), f(h)\big) \in L_U$. Si $(g, h) \in R_V$ entonces $(h^{-1}, g^{-1}) \in L_V$ y por ser f homomorfismo $\big(f(h)^{-1}, f(g)^{-1}\big) = \big(f(h^{-1}), f(g^{-1})\big) \in L_U$ y por tanto $\big(f(g), f(h)\big) \in R_U$. La otra parte de la equivalencia es similar. $\square$

Si G es conmutativo, las estructuras izquierda y derecha en G cocinciden, lo cual no se tiene en general para grupos no conmutativos. Esto motiva el concepto de equivalencia entre estructuras. Es claro que la identidad en G, 1_G, es uniformemente continua para las parejas directas de estructuras uniformes $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ y $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$ pues lllevan un abierto de e en si mismo.

II.6.6 Definición. Si la identidad en G, $1_G : G \to G$, es uniformemente continua para las parejas $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$ y $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$, las estructuras uniformes $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G)$ se dicen `equivalentes`.

En el caso en que las estructuras $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G)$ sean equivalentes entonces toda función uniformemente continua en algún par de estructuras lo es en todas las definidas anteriormente, por lo que f se dice simplemente uniformemente continua.

II.6.7 Teorema. *Si $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G)$ son equivalentes y $f : G \to G$ es un homomorfismo uniformemente continuo para algún par de estructuras, lo es entonces para las demás.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongase f es uniformemente continuo para $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$. Si $g, h \in G$ se tienen entonces:
Para $U \in \mathcal{V}(e)$ existen $W, V \in \mathcal{V}(e)$ satisfaciendo $(g, h) \in L_V$. De esto $\big(f(g), f(h)\big) \in L_W$ y $\big(f(g), f(h)\big) \in R_U$, por la continuidad uniforme de f en $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ y 1_G en $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$, respectivamente. Por tanto, f es uniformemente continua en $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$.
Para $U \in \mathcal{V}(e)$ existen $W, V \in \mathcal{V}(e)$ satisfaciendo $(g, h) \in R_V$. De esto se tiene que $(g, h) \in L_V$ y $\big(f(g), f(h)\big) \in L_U$, por la continuidad uniforme de 1_G en $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ y f en $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$, respectivamente. Por tanto, f es uniformemente continua en $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$.
Para $U \in \mathcal{V}(e)$ existen $W_1, W_2, V \in \mathcal{V}(e)$ tales que $(g, h) \in R_V$. De esto se tiene que $(g, h) \in L_{W_1}$, $\big(f(g), f(h)\big) \in L_{W_2}$ y $\big(f(g), f(h)\big) \in R_U$, por la continuidad uniforme de 1_G en $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$, de f en $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ y de 1_G en $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$, respectivamente. Por tanto, f es uniformemente continua en $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$. $\square$

En la definición de equivalencia entre estructuras se pide que la identidad en G para ambas parejas de estructuras cruzadas. El siguiente teorema muestra que basta con tener solamente una de las parejas para tener la otra y con ello la equivalenia entre dichas estructuras.

II.6.8 Teorema. *Si 1_G es uniformemente continua para uno de los pares $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$ o $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$, entonces es uniformemente continua para el otro y por tanto $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G)$ son equivalentes.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongase 1_G es uniformemente continua para $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ entonces para cada $U \in \mathcal{V}(e)$ existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que para todo $(g,h) \in R_V$ se tiene que $(g,h) \in L_U$. Para V, si $(g,h) \in L_V$ entonces $(h^{-1}, g^{-1}) \in R_V$, por la uniformemente continuidad de 1_G, $(h^{-1}, g^{-1}) \in L_U$ y por tanto $(g,h) \in R_V$, de donde 1_G es uniformemente continua para $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$. Por lo tanto, la identidad en G es continua en las parejas cruzadas de estructuras uniformes y por tanto éstas son equivalentes. $\square$

Las traslaciones son funciones continua, más aún, son homeomorfismos. El siguiente teorema muestra que las traslaciones son también funciones uniformemente continuas.

II.6.9 Teorema. *Las funciones traslación en G son uniformemente continuas para las parejas $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ y $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$.*

Demostración. Sean $x \in G$ y $U \in \mathcal{V}(e)$. Si $g, h \in G$ son tales que $(g,h) \in L_U$ entonces $\big(L_x(g), L_x(h)\big) = (xg, xh) \in L_U$. Por lo tanto, L_x es uniformemente continua para $(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G))$. Por otro lado, sean $U \in \mathcal{V}(e)$ y $x \in G$ existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $x^{-1}Vx \subseteq U$. Por tanto, si $(g,h) \in R_V$ entonces $hg^{-1} \in xVx^{-1}$ y así $xhg^{-1}x^{-1} \in U$, de donde $\big(L_x(g), L_x(h)\big) = (xg, xh) \in R_U$.
De manera similar se prueba que las traslaciones derechas son uniformemente continuas para las parejas de estructuras izquierdas y derechas. $\square$

La función producto no es, en general una función uniformemente continua. Sin embargo la inversión si lo es.

II.6.10 Teorema. *La inversión es uniformemente continua para las parejas $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$ y $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{V}(e)$. Si $V = U^{-1}$ y $(g,h) \in L_V = L_{U^{-1}}$ entonces $(h,g) \in L_U$ y por tanto $\big(\iota(g), \iota(h)\big) = (g^{-1}, h^{-1}) \in R_U$.
De manera similar, si $(g,h) \in R_{U^{-1}}$ se tiene $(h,g) \in R_U$ y así $\big(\iota(g), \iota(h)\big) = (g^{-1}, h^{-1}) \in L_U$. $\square$

Puede probarse también la equivalencia entre estructuras a traves de la continuidad uniforme de la inversión en alguna de las parejas directas de estructuras uniformes.

II.6.11 Teorema. *Las estructuras $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G))$ son equivalentes si y solo si la inversión en G es uniformemente continua para la pareja $\big(\mathcal{S}_l(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ o $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_r(G)\big)$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea $U \in \mathcal{V}(e)$, si $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G))$ son equivalentes entonces 1_G es continua para $\big(\mathcal{S}_r(G), \mathcal{S}_l(G)\big)$ y así existe $W \in \mathcal{V}(e)$ tal que $(g,h) \in R_W$ implica que $(g,h) \in L_U$. Si se toman $V = W^{-1}$ y $(g,h) \in L_V = L_{W^{-1}}$ entonces $(h,g) \in L_W$ y $(g^{-1}, h^{-1}) \in R_W$.

Por la uniformemente continuidad de id_G, $\big(\iota(g),\iota(h)\big) = (g^{-1},h^{-1}) \in L_U$, es decir, ι es continua para la pareja $\big(\mathcal{S}_l(G),\mathcal{S}_l(G)\big)$. De manera similiar se prueba que lo es para la pareja $\big(\mathcal{S}_r(G),\mathcal{S}_r(G)\big)$.
$\Leftarrow\rfloor$ Si ι es uniformemente continua para $\big(S_l(G),S_l(G)\big)$ entonces para cada $U\in\mathcal{V}(e)$ existe $W\in\mathcal{V}(e)$ tal que $(g,h)\in L_W$ implica que $\big(\iota(g),\iota(h)\big)\in L_U$. Si $V=W^{-1}$ y $(g,h)\in R_V=R_{W^{-1}}$ entonces $(h,g)\in R_W$ y $(g^{-1},h^{-1})\in L_W$. Por la uniformemente continuidad de ι se tiene que $(g,h)\in R_U$, por lo que 1_G es uniformemente continua para $\big(S_l(G),S_r(G)\big)$ y por tanto estas estructuras son equivalentes. De manera similar se prueba que si ι es uniformemente continua para $\big(S_r(G),S_r(G)\big)$ entonces las estructuras cruzadas son equivalentes. $\square$

II.6.12 Teorema. *Las estructuras $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G))$ son equivalentes si y solo si para cada $U\in\mathcal{V}(e)$ existe $V\in\mathcal{V}(e)$ tal que $xVx^{-1}\subseteq U$ para todo $x\in G$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Para $U\in\mathcal{V}(e)$, si $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G))$ son equivalentes entonces 1_G es continua para $(\mathcal{S}_l(G),\mathcal{S}_r(G))$, por lo que existe $V\in\mathcal{V}(e)$ tal que $(g,h)\in L_V$ lo cual implica que $(g,h)\in R_U$. Si $v\in V$ se tiene que $(e,v)\in L_U$, ya que $e^{-1}v=v\in V$. De esto, para todo $x\in G$ se tiene que $(x,xv)\in L_V$ y por tanto $(x,xv)\in R_U$, es decir, $xvx^{-1}\in U$.
$\Leftarrow\rfloor$ Para $U\in\mathcal{V}(e)$ existe $V\in\mathcal{V}(e)$ de tal manera que $xVx^{-1}\subseteq U$, para todo $x\in X$. Si $(g,h)\in L_V$ entonces $g^{-1}h\in V$, de donde $h(g^{-1}h)h^{-1}\in U$, es decir $hg^{-1}\in U$ y por tanto $(g,h)\in R_U$. De esto, 1_G es uniformemente continua para $\big(\mathcal{S}_l(G),\mathcal{S}_r(G)\big)$ de lo que se concluye que $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G))$ son equivalentes. $\square$

El siguiente resultado se obtiene de manera inmediata del Teorema II.3.3.

II.6.13 Corolario. *Si G es compacto entonces las estructuras $\mathcal{S}_l(G)$ y $\mathcal{S}_r(G)$ son equivalentes.*

Similar al resultado en espacios métricos, en grupos topológicos se tiene que una función uniformemente continua es continua.

II.6.14 Teorema. *Toda función $f: G_1\to G_2$ uniformemente continua es continua.*

Demostración. Si $U\in\mathcal{V}_2$ y f es uniformemente continua para las estructuras $\big(\mathcal{S}_l(G_1),\mathcal{S}_l(G_2)\big)$, existe $V\in\mathcal{V}_1$ de tal manera que $(g,h)\in L_V$ implica que $\big(f(g),f(h)\big)\in L_U$. Para $x\in G$, si $v\in V$ entonces $(e,v)\in L_V$ y $(x,xv)\in L_V$, por lo que $\big(f(x),f(xv)\big)\in L_U$ y así $f(x)^{-1}f(xv)\in U$, es decir, $f(xV)\subseteq f(x)U$. De lo anterior se sigue que f es continua en x, para todo $x\in G$, y por tanto es continua.
De manera similar, $(x,vx)\in R_V$ por lo que si f es uniformemente continua para las estructuras $\big(\mathcal{S}_r(G_1),\mathcal{S}_r(G_2)\big)$ entonces $\big(f(x),f(vx)\big)\in R_U$ y así $f(vx)f(x)^{-1}\in U$, de donde $f(Vx)\in Uf(x)$ por lo que f es continua en x, para todo $x\in G$, y por tanto es continua.
Dado que $(x,xv)\in L_V$, si f es uniformemente continua para las estructuras $\big(\mathcal{S}_l(G_1),\mathcal{S}_r(G_2)\big)$ entonces $\big(f(x),f(xv)\big)\in R_U$ y $f(xV)\subseteq Uf(x)$, por lo que f es continua en x, para todo $x\in G$, y por tanto continua. De manera similar se tiene que f es continua si es uniformemente continua para las estructuras $\big(\mathcal{S}_r(G_1),\mathcal{S}_l(G_2)\big)$. $\square$

II.6.15 Teorema. *Todo morfismo de grupos $f : G_1 \to G_2$ continuo es uniformemente continuo para cualquier par de estructuras uniformes izquierdas y derechas.*

Demostración. Sean $g, h \in G$ y $U \in \mathcal{V}(e)$. Dado que f es continua en e, entonces existe $U \in \mathcal{V}(e)$ de tal manera que $f(U) \subseteq V$.
Si $(g,h) \in L_V$ entonces $g^{-1}h \in V$ y así $f(g)^{-1}f(h) = f(g^{-1}h) \in U$, por ser f morfismo. De lo anterior, $\big(f(g), f(h)\big) \in L_U$ y por tanto f es uniformemente continua para $\big(\mathcal{S}_l(G_1), \mathcal{S}_l(G_2)\big)$.
Si $(g,h) \in R_V$ entonces $hg^{-1} \in V$ y así $f(h)f(g)^{-1} = f(hg^{-1}) \in U$, por ser f morfismo, y por tanto $\big(f(g), f(h)\big) \in R_U$, de donde f es uniformemente continua para $\big(\mathcal{S}_r(G_1), \mathcal{S}_r(G_2)\big)$. $\square$

Como en el caso de los espacios métricos, los conceptos de continuidad y continuidad uniforme son equivalentes cuando G es un grupo compacto.

II.6.16 Teorema. *Si G es un grupo topológico compacto, toda función continua $f : G \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en K.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua, para todo $g \in G$ existe un abierto V_g de e tal que si $x \in gV_g$ entonces $|f(x) - f(g)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, existe W_g abierto de e con $W_g^2 \subset V_g$. Para la cubierta abierta $\{gW_g : g \in K\}$, como G es compacto, existen $g_1, \dots, g_n \in K$ tales que $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} g_i W_{g_i}$. Sean $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_{g_i}$, abierto de e y $x, y \in G$ tales que $x \in yV$. Dado que $y \in g_i W_{g_i}$, para algún $i = 1, \dots, n$, entonces $|f(y) - f(g_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, $yV \subset \big(g_i W_{g_i}\big) W_{g_i} \subset g_i V_{g_i}$ por lo que $x \in yV$ implica que $|f(x) - f(g_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De esta manera se concluye que $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(g_i)| + |f(g_i) - f(y)| < \varepsilon$, de donde f es uniformemente continua por izquierda. Analogamente se prueba que f es continua por derecha. $\square$

Capítulo III.

§ Acciones en espacios topológicos

En el capítulo anterior se han trabajado las estructuras de grupo y topología sobre un mismo conjunto de tal manera que dichas estructuras interactuen de tal forma que las propiedades de una estructura maximicen las de la otra y se obtengan interesantes resultados. En el Capítulo I, Sección I.2, sobre acciones de grupo, se da una interacción entre un grupo y un conjunto arbitrario, esto permite la oportunidad de combinar nuevamente las dos estructuras pero en diferentes conjuntos, en este caso, cuando el grupo actúa en un conjunto que tiene una estructura topológica.

Similar a lo planteado en el caso de los grupos topológicos, en donde se buscaba una topología de tal manera que las funciones producto e inversión fuesen continuas, al tomar un espacio en donde actúa un grupo se busca una acción que involucre de cierta manera el concepto de continuidad. Es así que la condición para que una acción de grupo sobre un espacio topológico sea considerada ‘buenaés la continuidad de las transiciones, esto debido a que las transiciones estan definidas sobre el espacio topológico. Las transiciones harán la función de relacionar las propiedades entre ambas estructuras.

En los grupos topológicos se buscaba una topología que permitiera tener dicha estructura en un conjunto con ambas estructuras, esto debido a que la estructura de grupo es más rígida ya que un conjunto es o no un grupo pero pueden definirse varias topologías en él. Ahora, al tener una función y un único espacio topológico de salida y llegada, esto vuelve rígida la estructura topológica definida, por lo que se busca una función que permita combinar las dos estrucutras dadas.

Este Capítulo se compone de cuatro secciones, en el primero se define el concepto de G-espacio y las propiedades que se tienen en estos espacios. En la sección III.2 se estudian los espacios orbitales como espacios topológicos cocientes. La Sección III.3 está dedicada a los G-espacios inducidos por G-espacios dados. Por último, en la Sección III.4 se definen los conceptos de funciones equivarianza entre G-espacios para dar cierto concepto de igualdad entre estos espacios.

S III.1. G-ESPACIOS

En la Sección I.2 se definen las acciones de grupo sobre conjuntos no vacíos. En esta sección, se retoma el concepto de acción, dado en Definición I.2.1, ahora actuando sobre un espacio topológico. Es claro que si un grupo actúa sobre un espacio, entonces el espacio es un G-conjunto, sin embargo se busca que la acción y la topología puedan relacionarse como se tiene en el caso de los grupos topológicos. En este Capítulo, G representa un grupo con operación gh y X a un espacio topológico. Si G actúa en X la acción es denotada por θ.

III.1.1 Definición. Se dice que el G-espacio X es un G-`espacio` si la acción θ satisface:

A_3) $\theta_g : X \to X$ es continua para todo $g \in G$.

En tal caso, se dice que la acción θ es `consistente` con la topología en X.

La definición anterior es independiente de si la acción es derecha o izquierda. Como en el Capítulo anterior, se trabajará con acciones izquierda recordando que hay una relación estrecha entre ambas acciones no necesitandose así aclarar en cada resultado que las acciones derechas se trabajan de manera similar a las izquierdas.

Observación. Algunos autores denominan G-espacio a la acción continua de un grupo topológico G sobre un espacio topológico. En el presente trabajo, solo se pide que las transiciones sean continuas. El caso en que se tiene un grupo topológico se presenta en la Sección IV.1 y es una generalización de lo visto aquí en el sentido de que todo grupo puede considerarse un grupo topológico con la topología discreta.

III.1.2 Ejemplo. *El espacio $\mathbb{R}$, con la topología usual, es un $\mathbb{Z}$-espacio con la acción dada por la traslación $x \to zx$ ya que las traslaciones son continuas en $\mathbb{R}$.*
De manera similar, la acción del grupo $\mathbb{Z}^2 = \{(m,n) : m,n \in \mathbb{Z}\}$ sobre $\mathbb{R}^2$ dada por $(x,y) \mapsto (x+m, y+n)$ es consistente con la topología usual en $\mathbb{R}^2$.

III.1.3 Ejemplo. *La acción traslación $\theta : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ no es consistente con la topología de Sierpinski ya que $\theta_1^{-1}\big(\{0\}\big) = \{1\}$ el cual no es abierto. El siguiente teorema muestra que $\mathbb{Z}^2$ con la topología de Sierpinski no es grupo topológico, pues en caso de serlo dicha acción debería ser consistente.*

A continuación se presentan resultados respecto a los G-espacios obtenidos como consecuencia directa de los dados para G-conjuntos.

El Teorema I.2.22 muestra que todo grupo G es un G-conjunto de si mismo bajo la acción traslación. Si G es un grupo topológico, ya que las transiciones corresponden a las traslaciones, esto es, $\theta_g = L_g$, y estas son continuas entonces las transiciones son continuas.

III.1.4 Proposición. *Sea G un grupo topológico entonces la acción traslación en $G \times G$ es consistente con la topología en G.*

Si $H \leq G$ entonces todo G conjunto es también un H-conjunto, Teorema I.2.4, y las transiciones θ_h son continuas, para todo $h \in H$.

III.1.5 Proposición. *Si $H \leq G$ y X es un G-espacio entonces X es un H-espacio.*

Para un subconjunto invariante A de X, $\theta|_{G\times A}$ es una acción, Teorema I.2.15. Si A tiene la topología de subespacio entonces $\theta_g|_A$ es continua si θ_g lo es.

III.1.6 Proposición. *Si $A \subseteq X$ es un conjunto invariante y X es un G-espacio entonces la acción de G es consistente con la topología de subespacio en A.*

Dado que las órbitas en X son conjuntos invariantes, se tiene entonces que la acción sobre las órbitas es consistente con la topología relativa.

III.1.7 Corolario. *Las órbitas de G-espacios son a su vez G-espacios.*

Los homeomorfismos son aquellas funciones con inversas continuas, que en general preservan las propiedades topológicas. En el caso en que se tiene un homeomorfismo entre G-espacios, éstos preservan también dicha estructura.

III.1.8 Teorema. *Si X es un G-espacio, para cualquier espacio topológico Y homeomorfo a X, se cumple que Y es un G-espacio.*

Demostración. Si $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo, sea $\psi : G \times Y \to Y$ la función definida por $\psi(g, y) = \varphi\big(g\,\varphi^{-1}(y)\big)$, donde la acción de G en X está dada en el producto $g\,\varphi^{-1}(y)$. Si $(g_1, y_1), (g_2, y_2) \in G \times X$ son tales que $(g_1, x_1) = (g_2, x_2)$ entonces $g_1 = g_2$ y $x_1 = x_2$. Como φ es un homeomorfismo, entonces $\varphi^{-1}(x_1) = \varphi^{-1}(x_2)$, de donde $g_1\,\varphi^{-1}(x_1) = g_2\,\varphi^{-1}(x_2)$ y así $\varphi\big(g_1\,\varphi^{-1}(x_1)\big) = \varphi\big(g_2\,\varphi^{-1}(x_2)\big)$, es decir ψ está bien definida.
Dado que $\psi\big(g, \psi(h, y)\big) = \varphi\Big(g\,\varphi^{-1}\big(\varphi(h\,\varphi^{-1}(y))\big)\Big) = \varphi\big(gh\,\varphi^{-1}(y)\big)$ y $\varphi\big(e\,\varphi^{-1}(y)\big) = y$ se tiene que ψ es acción de G sobre Y. $\square$

III.1.9 Definición. Bajo las condiciones anteriores, la acción $\psi : G \times Y \to Y$ dada por $\psi(g, y) = \varphi\big(g\,\varphi^{-1}(y)\big)$ se denomina `acción inducida por el homeomorfismo`.

En el Teorema I.2.38 se prueba que el conjunto de trancisiones forman un grupo con la composición de funciones. Si el conjunto sobre el cual se define la acción es realmente un G-espacio, las transiciones son continuas teniendo así que (G, X, θ) es un grupo de transformaciones continuas. Más aún, dado que el inverso de una transición es una transición, se sigue entonces que las transiciones son homeormorfismos, es decir, (G, X, θ) es un grupo de homeomorfismos.

Si se denota por $Homeo(X)$ el conjunto de todos los homeomorfismos de X entonces el homomorfismo inducido por θ, dado en Definición I.2.40, se escribe ahora como

$$\Theta : G \to Homeo(X), \quad g \mapsto \theta_g.$$

Cada transición está determinada por un elemento de G, y el conjunto de transiciones es un grupo de homeomorfismos, por lo que para tener un isomorfismo entre el grupo y el conjunto de transiciones basta asegurar que el homomorfismo inducido sea inyectivo. El siguiente resultado representa un análogo al Teorema de Cayley, enunciado en el Teorema I.1.49.

III.1.10 Teorema. *Sea X un G-espacio. Si θ es efectiva entonces G es isomorfo a un grupo de homeomorfismos de X.*

Demostración. Sean $g, h \in G$ tales que $\Theta(g) = \Theta(h)$, de esto se tiene $\theta_g(x) = \theta_h(x)$, para todo $x \in X$. Como $gx = hx$ se tiene $gh^{-1}x = x$ y por tanto gh^{-1} es un elemento de G que fija a todos los elementos de X, es decir, $gh^{-1} \in \bigcap_{x\in X} G_x$. Dado que la acción es efectiva se sigue que $gh^{-1} = e$, de donde $g = h$. Por lo tanto, Θ es inyectiva y con esto es un isomorfismo entre G y el grupo de transiciones. □

Los grupos topológicos son espacios homogéneos mediante las traslaciones, las cuales son homeomorfismos. Estas funciones trasladan un elemento en otro. Una acción es transitiva si lleva un elemento en otro al tener una única órbita.

III.1.11 Teorema. *Si la acción de un G-espacio X es transitiva, el espacio es homogéneo.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Como θ es transitiva entonces $G_x = G_y$, así existe $g \in G$ tal que $gx = y$. De esto, $\theta_g(x) = y$ y por ser θ_g un homeomorfismo se sigue que X es homogéneo. □

Es común encontrar en algunos textos que un G-espacio se dice homogéneo si la acción es transitiva y el teorema anterior explica por qué, ya que muestra la relación entre las traslaciones en grupos topológicos y las acciones transitivas.

III.1.12 Teorema. *Sean X un G-espacio, $g \in G$ y $A \subseteq X$. El conjunto gA es abierto (cerrado) si y solo si A es abierto (cerrado).*

Demostración. Para cada $g \in G$, dado que θ_g es un homeomorfismo y $\theta_g(A) = gA$ se sigue que gA es abierto (cerrado) si y solo si A lo es [Teorema I.3.37]. □

Si $S \subseteq G$ y $A \subset X$, entonces el producto de S y A está dado por $SA = \{sa : s \in S, a \in A\}$, de donde $SA = \bigcup_{s\in S} sA$.

III.1.13 Corolario. *Sea X un G-espacio. Para todo S subconjunto de G se tiene que si U es abierto de X entonces SU es abierto de X. Si S es finito y B es cerrado en X, entonces SB es cerrado en X.*

S III.2. Espacio de órbitas

Las órbitas de un G-conjunto forman una partición de éste, denominado conjunto orbital [Definición I.2.31]. Se tiene de manera natural una función sobreyectiva del G-conjunto en el conjunto orbital dado por la proyección orbital $x \mapsto Gx$, con lo que si el G-conjunto es un espacio topológico, puede dotársele entonces al conjunto de órbitas de la estructura de espacio cociente, definida en Definición I.3.94. Si X es un G-espacio, X/G representa al conjunto orbital y $\pi : X \to X/G$ a la proyección orbital.

III.2.1 Definición. El `espacio de órbitas` o `espacio orbital` de un G-espacio X es el conjunto de órbitas X/G provisto de la topología cociente respecto a la proyección orbital $\pi : X \to X/G$.

Observación. Los subconjuntos en X/G están determinados por conjuntos en el grupo. El conjunto $\{Gx : x \in A,\ A \subset X\}$ se denota por GA. Dado que π es cociente y $\pi^{-1}(GA) = \bigcup_{x\in A} Gx = GA$ se tiene que GA es abierto en X/G si y solo si GA es abierto en X.

III.2.2 Ejemplo. *Para la acción antípoda definida en el Ejemplo I.2.11, el espacio orbital $S^n/\mathbb{Z}_2$ se denomina el n-`espacio proyectivo real` $\mathbb{P}^n$ el cual resulta de identificar en S^n los puntos diametralmente opuestos . Para la acción reflexión,*

Del hecho de que X y X/G sean ahora espacios topológicos permite dar más propiedades a la proyección orbital.

III.2.3 Teorema. *La proyección orbital π de un G-espacio X es abierta. Si G es finito, entonces π es también cerrada.*

Demostración. Sea U abierto en X. Dado que $\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = \bigcup_{x\in U} Gx$, entonces $\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = GU$. Como U es abierto, GU es abierto en X y por ser π cociente se sigue que $\pi(U)$ es abierto en X/G. Si G es finito y B es un conjunto cerrado de X, entonces $\pi^{-1}\big(\pi(B)\big) = GB$ es cerrado y por tanto $\pi(B)$ es cerrado en X/G. □

Observación. Si G es grupo topológico entonces la proyección natural, $\pi : G \to G/G$, y la proyección orbital coinciden ya que el espacio de órbitas consta únicamente del conjunto unipuntual G, bajo la acción traslación. En general, si $H \leq G$, el espacio orbital G/H de la acción $H \times G \to G$, coincide con el espacio de clases laterales G/H.

La proyección orbital es entonces continua y abierta, y dado que $\pi(Gx) = \{Gx\}$, entonces $\{Gx\}$ es abierto en X/G si y solo si Gx es abierto en X.

III.2.4 Corolario. *Las órbitas Gx de un G-espacio X son abiertas si y solo si X/G es discreto.*

Si la acción es trivial los conjuntos X y X/G son iguales.

III.2.5 Corolario. *Un G-espacio trivial X es discreto si y solo si el espacio orbital lo es.*

La compacidad y la conexidad son propiedades que se mantienen bajo funciones continuas, mientras que la compacidad local se preserva bajo funciones continuas y abiertas.

III.2.6 Corolario. *Si X es un G-espacio conexo, compacto o localmente compacto entonces también lo es X/G.*

Los axiomas de separación no se mantienen bajo funciones continuas y, en general, no se preservan en los espacios cocientes. En el caso de G-espacios, estos se preservan cuando el grupo sea finito ya que en este caso la proyección orbital es cerrada y los axiomas de separación se preservan bajo funciones continuas [Teorema I.3.57].

III.2.7 Corolario. *Cuando G es finito, si X es un G-espacio T_1, Hausdorff, regular o normal entonces X/G también lo es.*

S III.3. Acciones inducidas

Las acciones sobre G-conjuntos inducen acciones sobre producto de G-conjuntos y sobre los espacios orbitales. En la presente sección se muestran algunos ejemplos en los cuales las acciones inducidas son consistentes con la topología producto y cociente.

III.3.1 Teorema. *Si X_1 es G_1-espacio y X_2 es G_2-espacio entonces la acción por coordenadas es consistente con la topología producto en $X_1 \times X_2$. Además*

$$(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) \simeq (X_1/G_1) \times (X_2/G_2).$$

Demostración. La acción por coordenadas en $X_1 \times X_2$ se define por $\theta\big((g_i),(x_i)\big) \mapsto (g_i x_i)$. Si las acciones en X_1 y X_2 estan dadas por θ_1 y θ_2, respectivamente, entonces $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ y las transiciones de θ estan dadas por $\theta_{(g_1,g_2)} = \big((\theta_1)_{g_1}, (\theta_2)_{g_2}\big)$, lo cual se tiene ya que $(g_1, g_2)(x_1, x_2) = (g_1x_1, g_2x_2)$. De esto, $\theta_{(g_1,g_2)}$ es continua para todo $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$.
Si $\pi_i : X_i \to X_i/G_i$, $i = 1, 2$, y $\pi : X_1 \times X_2 \to (X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2)$ son las respectivas proyecciones orbitales, se define la función

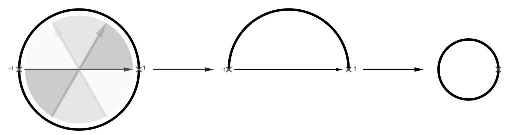
$$\begin{gathered} \xi : (X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) \to (X_1/G_1) \times (X_2/G_2) \\ \big(G_1 \times G_2\big)(x_1, x_2) \mapsto (G_1x_1, G_2x_2). \end{gathered}$$

La imagen de la órbita $\big(G_1 \times G_2\big)(x_1, x_2)$ en $X_1 \times X_2$ bajo ξ es el punto (G_1x_1, G_2x_2) del espacio $(X_1/G_1) \times (X_2/G_2)$, por lo que ξ hace conmutar el diagrama

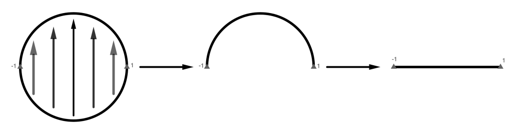
$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[rr, "\pi_1 \times \pi_2"] \arrow[d, "\pi"'] & & ({}^{X_1}/_{G_1}) \times ({}^{X_2}/_{G_2}) \\ {}^{(X_1 \times X_2)}/_{(G_1 \times G_2)} \arrow[urr, "\xi"'] & & \end{tikzcd}$$

Si $\big(G_1 \times G_2\big)(x_1, x_2)$ y $\big(G_1 \times G_2\big)(y_1, y_2)$ son dos órbitas iguales en el espacio orbital producto $(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2)$, existe (g_1, g_2) en $G_1 \times G_2$ tal que $(y_1, y_2) = (g_1, g_2)(x_1, x_2) = (g_1x_1, g_2x_2)$. Luego, x_1 está en la misma órbita de y_1 y x_2 lo está en la de y_2, es decir, $G_1x_1 = G_1y_1$ y $G_2x_2 = G_2y_2$, de donde $(G_1x_1, G_2x_2) = (G_1y_1, G_2y_2)$ y por tanto ξ está bien definida.
Si $\xi\big(\big(G_1 \times G_2\big)(x_1, x_2)\big) = \xi\big(\big(G_1 \times G_2\big)(y_1, y_2)\big)$ se tiene entonces que $(G_1x_1, G_2x_2) = (G_1y_1, G_2y_2)$, de donde $G_1x_1 = G_1y_1$ y $G_2x_2 = G_2y_2$, y así existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $x_1 = g_1y_1$ y $x_2 = g_2y_2$. De lo anterior, $(x_1, x_2) = (g_1y_1, x_2y_2) = (g_1, g_2)(y_1, y_2)$, es decir (y_1, y_2) está en la misma órbita de (x_1, x_2) bajo $G_1 \times G_2$, por lo que se concluye que $\big(G_1 \times G_2\big)(x_1, x_2) = \big(G_1 \times G_2\big)(y_1, y_2)$ y por tanto ξ es inyectiva. Claramente se sigue que ξ es sobre.
La función ξ satisface que $\xi\pi = \pi_1 \times \pi_2$, dado que π es una función cociente y $\pi_1 \times \pi_2$ es continua, por la propiedad universal del cociente se sigue que ξ es continua.
Por otro lado se tiene que $\xi^{-1}(\pi_1 \times \pi_2) = \pi$ y dado que $\pi_1 \times \pi_2$ es una función sobre, continua y abierta es entonces una identificación y como π es continua, por la propiedad universal del cociente se sigue que ξ^{-1} es continua y por tanto ξ es un homeomorfismo. $\square$

III.3.2 Ejemplo. *Para la acción antípoda, dada en Ejemplo I.2.11, el espacio orbital $S^1/\mathbb{Z}_2$ se denomina el* `espacio proyectivo real` *$\mathbb{P}^1$ el cual resulta de identificar en S^1 los puntos diametralmente opuestos. La función antípoda es la rotación de 180º alrededor del origen y es claro que al identificar los puntos en la rotación se obtiene que $\mathbb{P}^1 \simeq S^1$.*



La acción reflexión identifica a los puntos del semicírculo superior con sus respectivos inversos con respecto a el eje real con lo que se tiene $(S^1/\mathbb{Z}_2) \simeq [-1,1]$.



Del teorema anterior se sigue que el espacio orbital generado por la acción de $Z_2 \times Z_2$ sobre el toro $\mathbb{T}$ es homeomorfo al tubo $S^1 \times I$.

Si $N \lhd G$ entonces G/N es un grupo y actúa sobre el espacio de órbitas X/N mediante la acción dada en Teorema I.2.35, en donde se tiene una biyección de $(X/N)/(G/N)$ en X/G.

III.3.3 Teorema. *Sea N subgrupo normal de G. La acción $\theta : (G/N) \times (X/N) \to X/N$, dada por $\theta\big((Ng, Nx)\big) = Ngx$, es consistente con la topología cociente en X/N. Más aún, $(X/N)/(G/N) \simeq X/G$.*

Demostración. Para cada $Ng \in G/N$ la transición asociada está dada por $\theta_{Ng}(Nx) = Ngx$, para todo $Nx \in X/N$. Si $\pi : X \to X/N$ es la proyección orbital se tiene que $\theta_{Ng} = \pi\,\theta_g$ y por tanto es continua.
La biyección $\xi : (X/N)/(G/N) \to X/G$, dada por $\big(G/N\big)Nx \mapsto Gx$, satisface la igualdad $\xi\pi''\pi' = \pi$, donde $\pi : X \to X/G$, $\pi' : X \to X/N$ y $\pi'' : X/N \to (X/N)/(G/N)$ son las proyecciones orbitales. De la propiedad universal del cociente, Teorema I.3.96, dado que $\pi''\pi'$ es cociente y π es continua se sigue que ξ es continua.
Por último, de la igualdad $\xi^{-1}\pi = \pi''\pi'$ y de la propiedad universal del cociente se sigue que ξ^{-1} es continua. Por lo tanto ξ es homeomorfismo. □

Si la acción θ de un G-espacio X es efectiva, por el Teorema III.1.10, induce un isomorfismo entre el grupo y un grupo de homeomorfismos de X. Si la acción no es efectiva, induce una acción efectiva del grupo cociente $G/ker\,\Theta$ en el espacio X. Más aún, el espacio de órbitas generado por la acción del grupo $G/ker\,\Theta$ es homeomorfo al conjunto de órbitas generado por G.

III.3.4 Teorema. *Si Θ es el homomorfismo inducido por la acción θ del G-espacio X entonces θ induce también una acción efectiva del grupo cociente $G/ker\,\Theta$ en X de manera que*

$$X/G \simeq X/(G/ker\,\Theta).$$

Demostración. Sea $K = ker\,\Theta$. Por el Teorema I.2.45 se tiene que K actúa trivialmente en X, por lo que $X/K = X$. Dado que K es subgrupo normal de G, por el Teorema I.2.35, el grupo cociente G/K actúa en el conjunto orbital $X/K = X$ mediante la acción dada por $\psi : G/K \times X \to X$ y definida como $\psi(Kg, x) = gx$. Las transiciones $\psi_{Kg} = \theta_g$ son continuas y así X es un (G/K)-espacio.

Sean $Kg \in G/K$ y $x \in X$ tal que $(Kg)x = x$, entonces $gx = x$. Luego, $\theta_g = \theta_e$ y así, por el Teorema I.2.43, $g \in \bigcap_{x \in X} G_x$ con lo que $Kg = K \in G/K$ y por tanto ψ es efectiva.
Del Teorema I.2.35 se tiene la función $\xi : X \times G/N \to X/G$ dada por $\xi\big((G/N)x\big) = Gx$ la cual cumple que $\xi\pi' = \pi$, donde $\pi : X \to X/G$ y $\pi' : X \to X/(G/K)$ son las proyeccionnes orbitales y hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ X/(G/K) \arrow[r, "\xi"'] & X/G \end{tikzcd}$$

De la propiedad universal del cociente, Teorema I.3.96, dado que π' es cociente y $\pi = \xi\pi'$ es continua entonces ξ es continua y de la igualdad $\xi^{-1}\pi = \pi'$ se sigue que ξ^{-1} es continua, por lo que ξ es homeomorfismo. $\square$

S III.4. Equivalencia de espacios

Un homomorfismo de grupos es una función que separa los productos correspondientes, lo cual permite mantener una similitud entre los conjuntos involucrados. Esto motiva la definición de función equivariante bajo la cual se busca asegurar una cierta similitud entre los G-espacios involucrados. La definición de dicha función debe satisfacer la uniformidad del espacio, esto es, la imagen del producto de un elemento del grupo con un elemento es igual al producto del elemento del grupo con la imagen del elemento del espacio.

III.4.1 Definición. Una función continua $\varphi : X \to Y$ definida entre G-espacios se dice `equivariante` si $\varphi(gx) = g\varphi(x)$, para todo $x \in X$ y todo $g \in G$.

III.4.2 Ejemplo. *La función identidad de un G-espacio X en si mismo es una función equivariante, esto pues es una función continua y $1_X(gx) = gx = g\,1_X(x)$, para toda $g \in G$.*

Las funciones equivariantes entre G-espacios permiten construir funciones continuas entre los espacios orbitales, esto ya que permite llevar órbitas en órbitas, es decir, para cada y en el codominio existe un único x en el dominio tal que la imagen de Gx es Gy. En el siguiente teorema se prueba que las funciones equivariantes entre espacios inducen funciones continuas entre los G-espacios orbitales.

III.4.3 Teorema. *Una función equivariante $\varphi : X \to Y$ induce una única función continua ${}^{\varphi}\!/_{G}$ tal que $({}^{\varphi}\!/_{G})\,\pi = \pi'\varphi$, donde $\pi : X \to X/G$ y $\pi' : Y \to Y/G$ son las proyecciones orbitales.*

Demostración. Sea ${}^{\varphi}\!/_{G} : X/G \to Y/G$ dada por ${}^{\varphi}\!/_{G}\,(Gx) = G\varphi(x)$, es claro que ${}^{\varphi}\!/_{G}$ hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\ X/G \arrow[r, dotted, "{}^{\varphi}\!/_{G}"'] & Y/G \end{tikzcd}$$

Si $x, y \in X$ son tales que $Gx = Gy$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Dado que φ es equivariante se sigue que $g\varphi(x) = \varphi(gx)$, de donde $G\varphi(x) = G\varphi(gx) = G\varphi(y)$, con lo que $\big({}^{\varphi}\!/_{G}\big)(x) = \big({}^{\varphi}\!/_{G}\big)(y)$, es decir, la función ${}^{\varphi}\!/_{G}$ está bien definida.

Si $Gx \in X/G$, las fibras de X/G bajo π son las órbitas Gx y $\pi'\varphi(Gx) = \pi'(G\varphi(x)) = \{G\varphi(x)\}$, es decir, las fibras $\pi^{-1}(Gx)$ son constantes en Y/G bajo π. Dado que π es una identificación y $\pi'\varphi$ es continua, por el Teorema de la transgresión, Teorema I.3.97, se concluye que ${}^{\varphi}\!/_{G}$ es continua. $\square$

III.4.4 Definición. Bajo las condiciones anteriores, ${}^{\varphi}\!/_{G}$ se denomina `función inducida por` φ en los espacios orbitales.

La composición de funciones equivariantes es una función equivariante y la función inducida por dicha composición depende de las fiunciones inducidas en cada uno de los espacios orbitales.

III.4.5 Teorema. *Sean $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ funciones equivariantes entre G-espacios. La función $\psi\varphi : X \to Z$ es equivariante y su función inducida entre los G-espacios orbitales satisface que $\psi\varphi/G = (\psi/G)(\varphi/G)$, de donde se tiene el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rr, bend left, "\psi\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "\pi'"] & Z \arrow[d, "\pi''"] \\
X/G \arrow[r, dashed, "\varphi/G"] \arrow[rr, dotted, bend right, "\psi\varphi/G"'] & Y/G \arrow[r, dashed, "\psi/G"] & Z/G
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $x \in X$. Dado que las funciones φ y ψ son equivariantes, entonces $\psi\big(\varphi(gx)\big) = \psi\big(g\varphi(x)\big) = g\psi\big(\varphi(x)\big)$ por lo que $\psi\varphi$ es equivariante.
Sea $Gx \in X/G$. Se tiene $\big(\psi/G\big)\big(\varphi/G\big)(Gx) = \big(\psi/G\big)(G\varphi(x)) = G\psi(\varphi(x))$, de donde se concluye que $\psi\varphi/G = (\psi/G)(\varphi/G)$. $\square$

Si se tiene un homomorfismo equivariante entonces la función inducida por esta es un homeomorfismo entre los espacios orbitales.

III.4.6 Teorema. *Sea $\varphi : X \to Y$ un homeomorfismo equivariante entre G-espacios. La función inversa $\varphi^{-1} : Y \to X$ es equivariante, $\varphi^{-1}/G = (\varphi/G)^{-1}$ y $X/G \simeq Y/G$, con lo que se tiene el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\
X/G \arrow[r, dashed, "\varphi/G"] & Y/G \arrow[l, dotted, bend left, "\varphi^{-1}/G"]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $y \in Y$. Dado que φ es una función equivariante, se sigue entonces que $\varphi^{-1}(gy) = \varphi^{-1}(g\varphi(\varphi^{-1}(y))) = \varphi(\varphi(g\varphi^{-1}(y))) = g\varphi^{-1}(y)$, y por tanto φ^{-1} es equivariante.
Sea $Gy \in Y/G$. Como $y \in Y$ y φ es un homeomorfismo, existe un único $x \in X$ de tal manera que $\varphi(x) = y$, de lo cual se sigue que $\varphi/G(Gx) = G\varphi(x) = Gy$, y así φ/G es biyectiva. De lo anterior, la función inversa de φ/G está bien definida.
Si $Gy \in Y/G$ se tiene $\big(\varphi/G\big)\big(\varphi^{-1}/G\big)(Gy) = \big(\varphi/G\big)(G\varphi^{-1}(y)) = G\varphi(\varphi^{-1}(y)) = Gy$, por lo que φ^{-1}/G es la inversa de φ/G y así $\varphi^{-1}/G = (\varphi/G)^{-1}$. Además, como φ^{-1} es invariante entonces la inducida φ^{-1}/G es continua por lo que φ/G es homeomorfismo. $\square$

III.4.7 Definición. Si $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo equivariante entonces φ se dice `equivalencia` entre G-espacios y los espacios X y Y se dicen equivalentes.

Si los espacios son equivalentes, además de ser homeomorfos son copias uno de otro.

Dado un homeomorfismos entre un G-espacio X y un espacio abitrario Y, puede contruirse una acción en Y de tal manera que los espacios orbitales sean homeomorfos.

III.4.8 Teorema. *Si $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfimo entre G-espacios, donde Y tiene la acción inducida por el homeomorfismo, entonces φ es equivariante.*

Demostración. Sean $g \in G$ y $x \in X$. Como φ es homeomorfismo entonces entonces existe un único $y \in Y$ tal que $\varphi(x) = y$ y si Y es un G-espacio con la acción inducida por φ dada en Definición III.1.9, se sigue que $gy = \varphi\big(g\varphi^{-1}(y)\big)$ y así $g\varphi(x) = \varphi(gx)$, por lo que φ es equivariante. □

El teorema anterior muestra que se pueden construir espacios equivalentes a partir de espacios homeomorfos dotando a el espacio con la acción inducida por el homeomorfismo.

Algunos ejemplos de funciones equivariantes estan dadas por las proyecciones coordenadas bajo el producto cartesiano.

III.4.9 Teorema. *Sean X_α una familia de G-espacios. Si G actúa en el producto $\prod X_\alpha$ bajo la acción diagonal entonces las proyecciones coordenadas son equivariantes.*

Demostración. Sean $g \in G$ y $(x_\alpha) \in \prod X_\alpha$. Si $\rho_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ es la proyección en la coordenada β entonces $\rho_\beta\big((gx_\alpha)\big) = g\,x_\beta = g\,\rho_\beta\big((x_\alpha)\big)$ por lo que las proyecciones coordenadas, al ser funciones continuas, son equivariantes. □

Dado que las proyecciones coordenadas ρ_β son equivariantes, inducen funciones continuas sobre los espacios orbitales dadas por ${}^{\rho_\beta}/_{G} : (\prod X_\alpha)/G \to X_\beta/G$, $({}^{\rho_\beta}/_{G})\big(G(x_\alpha)\big) = Gx_\beta$. Estas funciones permiten definir una función continua entre el espacio orbital del producto de G-espacios y el producto de espacios orbitales.

III.4.10 Teorema. *Sean X_α una familia de G-espacios. Si G actúa en el producto $\prod X_\alpha$ bajo la acción diagonal entonces la función definida por*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : (\prod X_\alpha)/G &\to \prod (X_\alpha/G) \\ G(x_\alpha) &\mapsto = (Gx_\alpha) \end{aligned}$$

es sobreyectiva y continua.

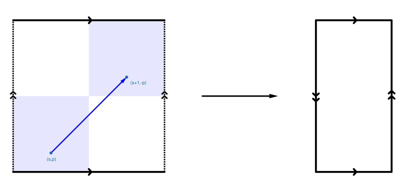
Demostración. Es claro que $\mathcal{V}$ es sobre ya que cada (Gx_α) está definido por la órbita $G(x_\alpha)$. Cada proyección coordenada ρ_β determina la función continua ${}^{\rho_\beta}/_{G}$. Dado que $\mathcal{V} = \prod({}^{\rho_\beta}/_{G})$ y cada función ${}^{\rho_\beta}/_{G}$ es continua se sigue que $\mathcal{V}$ es continua. □

El teorema anterior nos permite relacionar las acción diagonal y la acción por coordenadas de un mismo grupo actuando sobre un producto de espacios, sin embargo la función $\mathcal{V}$ no es necesariamente inyectiva, como se muestra en el siguiente ejemplo.

III.4.11 Ejemplo. *Sean $X_1 = S^1 = X_2$ y $G = \mathbb{Z}_2$. Se toman las acciones definidas por la función antípoda y la función reflexión dadas en Ejemplo III.3.2.*
Si se dota al espacio $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ con la acción por coordenadas respecto al producto $Z_2 \times Z_2 = Z_2^2$, entonces la órbita de $(w,z) \in \mathbb{T}$ está dada por $Z_2^2(w,z) = \{(w,z), (-w,z), (w,\overline{z}), (-w,\overline{z})\}$. Por el ejemplo mencionado anteriormente se tiene que el espacio orbital está dado por el tubo $S^1 \times I$.
Por otro lado, si se tiene la acción diagonal de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{T}$ entonces la órbita de $(w,z) \in \mathbb{T}$ esta dada por $\mathbb{Z}_2(w,z) = \{(w,z), (-w,\overline{z})\}$. Para $z \neq \pm 1$, (w,z) y $(-w,z)$ no están en la misma órbita, sin embargo sus imagenes bajo $\mathcal{V}$ son iguales:

$$\mathcal{V}\big(\mathbb{Z}_2(-w,z)\big) = (Z_2(-w), \mathbb{Z}_2 z) = (Z_2 w, \mathbb{Z}_2 z) = \mathcal{V}\big(\mathbb{Z}_2(w,z)\big)$$

De hecho, el espacio $\mathbb{T}/\mathbb{Z}_2$ es homeomorfo a la botella de Klein, como se muestra a continuación. Considerando a $\mathbb{T}$ como el espacio cociente del cuadrado $C = I_1 \times I_1$ respecto a la función $\rho(s,t) = (e^{i\pi s}, e^{i\pi t})$, la cual identifica los lados opuestos de C. Dada la acción diagonal de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{T}$ se tiene que $g(e^{i\pi s}, e^{i\pi t}) = (ge^{i\pi s}, ge^{i\pi t}) = (e^{i\pi(s\pm 1)}, \overline{e^{i\pi t}}) = (e^{i\pi(s\pm 1)}, e^{-i\pi t})$, de donde $g\rho(s,t) = \rho(s\pm 1, -t)$ y por tanto las órbitas quedan de la forma $\mathbb{Z}_2\rho(s,t) = \{\rho(s,t), \rho(s\pm 1, -t)\}$, es decir, al identificar los puntos de las órbitas entonces el espacio $(-1,0) \times [-1,1]$ se traslada y se refleja respecto al eje X en el espacio $(0,1) \times [-1,1]$. Los segmentos $\{-1\} \times [-1,1]$ y $\{1\} \times [-1,1]$ se identifican con en segmento $\{0\} \times [-1,1]$ de manera inversa, como se muestra en la siguiente figura.



El espacio cociente de identificar los extremos de la figura anterior corresponde a la Botella de Klein.

Cualquier acción de un grupo G sobre un espacio X determina una acción de cada subgrupo H de G, por lo que pueden considerarse conjuntos invariantes y funciones equivariantes respecto a la acción de H.

III.4.12 Definición. Sea X un G espacio y H subgrupo de G. Un subconjunto A de X se dice H-`invariante` si satisface que $HA \subseteq A$, o equivalentemente, $ha \in A$ para todo $h \in H$ y $a \in A$. Si H actúa también en el espacio Y, decimos que una función continua $f : X \to Y$ es H-`equivariante` si $f(hx) = hf(x)$ para todo $h \in H$ y $x \in X$

Si el grupo base es G, entonces los conjunto G-invariante son los conjuntos definidos como invariantes. Como H es subgrupo de G contiene entonces al elemento neutro del grupo, por lo que se tiene de manera natural que $A \subseteq HA$. Si φ es una función equivariante entre G-espacios entones es H-equivariante para cada H subgrupo de G.

El siguiente teorema relaciona los conceptos de conjunto H-invariante con el de función equivariante, en el sentido que las funciones equivariantes permiten mantener la propiedad invariante de los conjuntos.

III.4.13 Teorema. *SI $\varphi : X \to Y$ es una función equivariante entre G-espacios entonces para cualquier subgrupo H de X se tiene*

i) $\varphi(X^H) \subseteq Y^H$.

ii) Si $A \subseteq X$ es H-invariante entonces $\varphi(A)$ es H-invariante de Y.

iii) Si $B \subseteq Y$ es H-invariante entonces $\varphi^{-1}(B)$ es H-invariante en X.

Demostración.

i) Sean $x \in X^H$. Si $h \in H$, dado que φ es equivariante es entonces H-equivariante y entonces $h\varphi(x) = \varphi(hx) = \varphi(x)$, con lo que se tiene $\varphi(x) \in Y^H$.

ii) Sean $a \in A$ y $h \in H$. Dado que A es H-invariante entonces $ha \in A$, de donde se sigue que $h\varphi(a) = \varphi(ha) \in \varphi(A)$, con lo que $\varphi(A)$ es H-equivariante.

iii) Sean $b \in B$ y $h \in H$. Dado que B es H-invariante entonces $hb \in B$, de donde se sigue que $\varphi(h\varphi^{-1}(b)) = h\varphi\big(\varphi^{-1}(b)\big) = hb \in B$, con lo que $h\varphi^{-1}(b) \in \varphi^{-1}(B)$, y por tanto $\varphi^{-1}(B)$ es H-invariante en X. $\square$

Una propiedad topológica importante del conjunto de puntos fijos se encuentra en los G-espacios de Hausdorff.

III.4.14 Teorema. *Sea X un G-espacio de Hausdorff. El conjunto X^S es cerrado en X para todo $S \subseteq G$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Si $x \notin X^S$ entonces existe $s \in S$ tal que $xs \neq x$. Como X es de Hausdorff, existen U y V abiertos de X tales que $xs \in U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sea $W = U \cap s^{-1}V$, dado que $sW = sU \cap V$ es claro que $W \cap sW = \emptyset$. Para cada $w \in W$, $sw \in sW \subseteq V$ con lo que $w \neq sw$ y por tanto $W \subseteq X - X^S$. $\square$

Si un conjunto en un G-espacio es H-invariante, para algún H subgrupo de G, entonces el interior y la cerradura del conjunto preservan esta propiedad.

III.4.15 Teorema. *Sean X un G-espacio y H subgrupo de G. Si A subconjunto de X es H-invariante entonces también lo son $int(A)$ y $\overline{A}$.*

Demostración. Dado que $int(A) \subseteq A$ y A es H-invariante, entonces $H\left(int(A)\right) \subseteq HA = A$. Por el Teorema III.1.13, el conjunto $H\left(int(A)\right)$ es abierto y por estar contenido en A entonces $H\left(int(A)\right) \subseteq int(A)$ y por tanto $int(A)$ es H-invariante.
Sean $h \in H$ y $x \in \overline{A}$. Si U es abierto de hx, entonces $h^{-1}U$ es abierto de x y como $x \in \overline{A}$ se sigue que $(h^{-1}U) \cap A \neq \emptyset$. Sea $a \in (h^{-1}U) \cap A$, como A es H invariante entonces $ha \in A$ y dado que $ha \in h(h^{-1}U) = U$ se sigue que $ha \in U \cap A$, es decir, $U \cap A \neq \emptyset$ y por tanto $hx \in \overline{A}$. $\square$

Si N es un subgrupo normal de G el cual actúa en el espacio X, entonces para todo $g \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que si x es un punto fijo de X respecto de N entonces $g^1 ngx = n_1 x = x$, por lo que $ngx = gx$, es decir, el conjunto de puntos fijos de un G-espacio X respecto al subgrupo normal N es G-invariante.

III.4.16 Corolario. *Sean X un G-espacio y $N \lhd G$ entonces X^N es invariante.*

Capítulo IV.

§ Integral de Haar

De lo visto hasta ahora se tiene que las estructuras de grupo y topología pueden coexistir, e incluso maximizar las propiedades de cada una de ellas a través de la otra, para esto basta tener una condición de continuidad sobre la operación del grupo, ya sea entre sus elementos en el caso de grupos topológicos, o entre sus elementos y los elementos del espacio, en el caso de los G-espacios. Se tienen mucho más propiedades que las presentadas hasta ahora que pueden determinarse de manera inmediata a partir de los resultados de los capítulos anteriores. Aunque en un principio parezcan ideas tomadas al azar, cada una de las partes de este capítulo funcionan como un anexo de los temas vistos, es decir, son un ejemplo de aprendizajes inmediatamente posteriores a lo que se ha trabajado y que de alguna manera nos ayudan a dar un cierre a los mismos.

En la Sección IV.1 se retoma el tema de acciones de grupo sobre espacios topológicos, tomando al grupo con una topología que lo vuelve grupo topologíco. En este caso, tanto grupo como conjunto tienen una estrctura topológica, por lo que el producto cartesiano es un espacio topológico. De esta manera, la acción que es una función del espacio producto en el espacio topológico puede ser continua, lo cual es la condición necesaria para estos nuevos conjuntos.
En la Sección IV.2, brevemente, se da una aplicación de las funciones equivariantes en espacios triviales, denominadas funciones invariantes.
En la Sección IV.3 se define una integral en grupos topológicos Hausdorff compactos, denominada integral de Haar. Dicha integral puede definirse, de manera más general, en grupos Hausdorff localmente compactos, sin embargo para los propositos de la sección siguiente se define tomando solamente la compacidad. Ya en el Capítulo II, Sección II.6, se habia definido un concepto del análisis matemático para los grupos topológicos, en este se retoma esta misma idea.
En la Sección IV.4 se dan algunas aplicaciones de la integral de Haar como una función invariante en espacios Hausdorff compactos.

A lo largo de este Capítulo, G es un grupo con operación gh, X un espacio topológico con topología τ y $\pi : X \to X/G$ la proyección orbital. Si X es G espacio, se denota la acción por θ y la operación por $\theta(g, x) = gx$ y el espacio orbital X/G se tomará con la topología cociente respecto a la proyección orbital.

S IV.1. Acciones de grupos topológicos

Se ha estudiado hasta ahora la acción de un grupo G sobre un espacio topológico X, sin embargo puede pedirse que G tenga también una estructura topológica de tal manera que sea un grupo topológico, estudiados en el capítulo anterior. Como se pedia al definir un G-espacio, Definición III.1.1, al dotar al grupo de una topología se pedira una condición de continuidad, en este caso dada sobre la acción.

IV.1.1 Definición. Se dice que el grupo topológico G actúa continuamente, o de manera continua, sobre el espacio topológico X si la acción definida es continua, donde $G \times X$ tiene la topología producto.

En particular, si G actúa de manera continua sobre el espacio X dado que $\theta_g = \theta_{\{g\}\times X}$ entonces las transiciones son continuas, por lo que todo espacio en el que actúa G continuamente es un G-espacio.

Observación. Si el grupo topológico G actúa en el espacio X y para cada $x \in X$ se tiene que las funciones $\varphi_x : G \to X$, dadas por $\varphi_x(g) = gx$, son continuas entonces se dice que la acción es `fuertemente continua`. De esta definición se tiene que si la acción es continua entonces es fuertemente continua, sin embargo el regreso no se satisface.

IV.1.2 Teorema. *Todo grupo topológico G actúa de manera continua sobre sí mismo.*

Demostración. El grupo G actúa sobre sí mismo, como se ve en el Ejemplo III.1.4. Al ser G un grupo topológico, la función producto es continua por lo que la acción traslación es continua. □

Si $H \leq G$, entonces G actúa sobre el espacio cociente G/H con la acción inducida por la traslación en el grupo, Corolario I.2.26, dicha acción es también continua ya que $\theta(g', gH) = \theta(g', \pi(g))$

IV.1.3 Corolario. *Sea $H \leq G$. G actúa de manera continua sobre el espacio cociente G/H.*

Si se tiene un G-espacio X de tal manera que la acción θ es continua, entonces $Homeo_c(X)$ forman un grupo topológico como se muestra en el Ejemplo II.1.4. Es claro que si la acción es continua entonces las transiciones $\theta_g = \theta_{\{g\}\times X}$ son homeomorfismos.

IV.1.4 Definición. La terna (G, X, θ), donde G es un grupo topológico, X es un espacio y la acción θ es continua, se dice `grupo topológico de transformaciones`.

En el resto de la presente sección G representa un grupo topológico, X a un espacio topológico y θ a la acción dada por $\theta(g, x) = gx$.

La acción θ induce un homomorfismo entre el grupo y el grupo de homeomorfimos de X, dado en Definición I.2.40. En el siguiente teorema se dota al grupo de homeomorfismos de X con la topología compacto-abierta.

IV.1.5 Teorema. *El homomorfismo $\Theta : G \to Home_c(X)$ inducido por la acción continua $\theta : G \times X \to X$ es continuo.*

Demostración. Sea $[K,U]$ un abierto subbásico de $Homeo_c(X)$. Si $g \in \Theta^{-1}\big([K,U]\big)$ entonces $\theta(g,x) = \Theta(g)\big(x\big) \in U$, para todo $x \in K$. Dado que la acción es continua, para cada $x \in K$ existen abiertos V_x de x y W_x abierto de g tal que $\theta(W_x \times V_x) \subseteq U$. Como K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_x$. De esto, $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_x$ es abierto de g y satisface que $\theta(W \times K) \subseteq [K,U]$, es decir, $\Theta(W) \subseteq [K,U]$. Por lo tanto, $\Theta^{-1}\big([K,U]\big)$ es abierto. □

Del Ejemplo II.1.4, si el G-espacio es Hausdorff compacto entonces $Home_c(X)$ es un grupo topológico.

IV.1.6 Corolario. *Sea X un G-espacio de Hausdorff compacto que actúa de manera continua bajo la acción θ entonces el homomorfismo $\Theta : G \to Homeo_c(X)$ inducido por θ es un morfismo de grupos topológicos.*

La siguiente propiedad de las acciones recuerda al resultado expuesto en el Teorema III.2.3 sobre la proyección orbital de un G-espacio en donde se demuestra que las proyecciones naturales en grupos topológicos son funciones continuas y abiertas, y si el grupo es finito entones la proyección es también cerrada. En este caso se tienen las mismas propiedades para las acciones continuas de un grupo topológico.

IV.1.7 Teorema. *Si G actúa de manera continua en X entonces la acción es abierta. Si G es finito, la acción es también cerrada.*

Demostración. Sea $\theta : G \times X \to X$ la acción continua de G sobre X. Para todo $S \subseteq G$ y todo $E \subseteq X$ se tiene la igualdad $\theta(S \times E) = \bigcup\limits_{g \in S} gE$. Por el Teorema III.1.12, si E es abierto en X entonces gE es abierto en X para todo $g \in G$, y por tanto $\bigcup\limits_{g \in S} gE$ lo es. Si $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ y E es cerrado en X entonces g_iE es cerrado para todo $i = 1, \ldots, n$ y por tanto $\bigcup\limits_{i=1}^{n} g_iE$ es cerrado en X. □

De manera análoga a la definición de transición dada en Definición I.2.37, en donde cada elemento del grupo define una función del G-espacio en sí mismo. En este caso, cada elemento del G-espacio define una función entre el grupo y la órbita de dicho elemento.

IV.1.8 Definición. Sea $\theta : G \times X \to X$ acción. Para cada $x \in X$ se define la función $\theta^x : G \to Gx$ dada por la relación $g \mapsto gx$ denominada `movimiento`.

Dado que la imagen de cada movimiento es una órbita, éstos nos son útiles para demostrar propiedades de las órbitas. Se puede reescribir a los movimientos como $\theta^x = \theta|_{G \times \{x\}}$, por lo que es claro que toda función movimiento es continua y $\theta^x(G) = Gx$, es decir, la imagen de todo G es la órbita de x. Así, los movimientos mantienen las propiedades topológicas de el grupo en las órbitas.

IV.1.9 Corolario. *Si G es compacto o conexo y actúa de manera continua sobre X entonces las órbitas de X son compactas o conexas, respectivamente.*

IV.1.10 Teorema. *Si X es T_1 entonces los grupos de isotropía son cerrados y si además θ es efectiva, $G/ker(\Theta)$ es de Hausdorff.*

Demostración. Si X es T_1 entonces $\{x\}$ es cerrado en X por lo que $G_x = (\theta^x)^{-1}(x)$ es cerrado en G. Si además θ es efectiva, por el Teorema I.2.43, $ker(\Theta) = \bigcap_{x \in X} G_x$ es cerrado por lo que, por el Teorema II.5.10, es también de Hausdorff. □

Por el Corolario I.2.23 se tiene que G opera sobre las órbitas bajo la acción traslación. Si se dota ambos espacios de topología esta acción es continua.

IV.1.11 Teorema. *Si G actúa de manera continua sobre X entonces G actúa de manera continua sobre cada una de las órbitas de X.*

Demostración. Sea $x \in X$, por el Corolario I.2.23 se tiene que Gx es un G-conjunto bajo la acción traslación μ. Si U es abierto de Gx entonces para el abierto $G \times U$ de $G \times X$ se tiene $\mu(G \times U) = GU \subseteq U$ y por tanto μ es continua. □

Los movimientos de acciones de grupo continuas son un ejemplo más de funciones equivariantes.

IV.1.12 Corolario. *Si G actúa de manera continua sobre X, entonces el movimiento $\theta^x : G \to Gx$ es equivariante.*

Demostración. Sea $x \in X$, por el Teorema anterior G actúa de manera continua tanto en G mismo como en Gx a través de la acción traslación $\mu(h, gx) = (hg)x$, la cual es continua. Por otro lado, el movimiento μ^x es continua y es una función entre G-espacios al ser el grupo G-espacio de si mismo. Dado que $\mu^x(hg) = (hg)x = h(gx) = h\mu^x(g)$ se concluye que μ^x es equivariante. □

Los movimientos no son funciones biyectivas, para que lo fuesen es necesario identificar todos los elementos de G cuya imagen es igual en la órbita en un solo punto. Como $\theta^x(g) = \theta^x(h)$ si y solo si $gx = hx$, entonces los puntos a identificar son los puntos tales que $h^{-1}gx = x$, es decir, los puntos $g, h \in G$ con $h^{-1}g \in G_x$. De esta manera, θ^x induce una función biyectiva entre el espacio cociente G/G_x y la órbita Gx, al restringir el grupo G al conjunto G/G_x. Está restricción no es un grupo ya que el grupo de isotropía de x no es necesariamente normal. Dado que G actúa de manera continua sobre el espacio cociente G/G_x, Corolario IV.1.3, entonces la función inducida por el movimiento es una función entre G-espacios.

IV.1.13 Teorema. *La función $\overline{\theta^x} : G/G_x \to Gx$ dada por la relación $\overline{\theta^x}(gG_x) = gx$ es una biyección equivariante.*

Demostración. Sean $g, h \in G$, entonces $gG_x = hG_x$ si y solo si $h^{-1}g \in G_x$ lo cual ocurre si y solo si $h^{-1}gx = x$, es decir $gx = hx$, por lo que $\overline{\theta^x}$ es inyectiva y está bien definida. Es claro que $\overline{\theta^x}$ es sobre.
Si $\pi_x : G \to G/G_x$ es la proyección orbital con respecto a la acción traslación de G sobre G_x, es entonces identificación al tomar G/G_x como espacio cociente respecto a π_x, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta^x"] \arrow[d, "\pi_x"'] & Gx \\ G/G_x \arrow[ur, "\overline{\theta^x}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir $\overline{\theta^x}\,\pi = \theta^x$ y por el Teorema de la transgresión, dado que θ^x es continua se sigue que $\overline{\theta^x}$ es continua.
Por último, $\overline{\theta^x}\big(h(gG_x)\big) = \overline{\theta^x}(hgG_x) = hgx = h\overline{\theta^x}(gG_x)$, por lo que $\overline{\theta^x}$ es equivariante. □

IV.1.14 Corolario. *Si G es compacto y X es de Hausdorff entonces la función inducida por el movimiento θ^x, $\overline{\theta^x} : G/G_x \to Gx$, es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $F \subset G/G_x$ cerrado. Dado que π^x es abierta se sigue que $\pi^{-1}(F)$ es cerrado de G, y al ser G compacto entonces $\pi^{-1}(F)$ es compacto. Como el movimiento θ^x es una función continua, Corolario IV.1.12, $\theta^x\big(\pi^{-1}(F)\big)$ es compacto en Gx, el cual es de Hausdorff por lo que todo compacto es cerrado, Teorema I.3.85 . Por el teorema anterior, $\overline{\theta^x} = \theta^x\pi^{-1}$ y así $\overline{\theta^x}(F)$ es cerrado en Gx, es decir $\overline{\theta^x}$ es una función cerrada. □

Ss IV.1.1. Acciones de grupos compactos

IV.1.15 Teorema. *Si G actúa de manera continua sobre X entonces para K compacto de G y $S \subseteq X$ se tiene que la restricción de la acción $K \times S \to KS$ es una función cerrada.*

Demostración. Sean $F \subseteq K \times S$ cerrado y θ' la restricción de la acción a $K \times S$. Si $x \in \overline{\theta'(F)}$ entonces existe una red (g_α, x_α) en F tal que $\theta'\big((g_\alpha, x_\alpha)\big) = (g_\alpha x_\alpha)$ converge a x. Como K es compacto, se tiene una subred (g_{λ_δ}) que converge a un punto $g \in K$, de donde $(g_{\lambda_\delta}^{-1})$ converge a g^{-1} y así $x_{\lambda_\delta} = g_{\lambda_\delta}^{-1}(g_{\lambda_\delta} x_{\lambda_\delta})$ converge a $g^{-1}x$. Por tanto, se tiene que $(g_{\lambda_\delta}, x_{\lambda_\delta}) \to (g, g^{-1}x)$, y dado que $(g, g^{-1}x) \in F$ se concluye que $x = \theta'(g, g^{-1}x) \in \theta'(F)$, es decir, $\overline{\theta'(F)} = \theta'(F)$. □

En esta sección, G es compacto y actúa de manera continua en X bajo la acción θ.

El resultado anterior, tomando a todo G como el conjunto compacto y a todo X, muestra que el Teorema IV.1.7 puede extenderse de grupos finitos a grupos compactos.

IV.1.16 Corolario. *La acción continua θ es cerrada.*

Dado que el producto cartesiano de cerrados es un conjunto cerrado y la acción es cerrada, entonces el producto de un cerrado del grupo y un cerrado del espacio es un conjunto cerrado, extendiendo así el Corolario III.1.13 de conjuntos finitos a compactos.

IV.1.17 Corolario. *Sean K cerrado de G y $C \subseteq X$. Si C es cerrado o compacto entonces KC es cerrado o compacto de X, respectivamente.*

Dado que los conjuntos unipuntuales son compactos, la acción θ es continua y $Gx = \theta(G \times x)$ entonces se mantiene la compacidad en las órbitas.

IV.1.18 Corolario. *Las órbitas de X son conjuntos compactos.*

Puede extenderse la proiedad de compacidad incluso a los grupos de isotropía.

IV.1.19 Corolario. *Si X es un espacio de Hausdorff entonces las órbitas y los grupos de isotropía son conjuntos cerrados y compactos de X y G, respectivamente.*

Demostración. Las órbitas son compactas y como X es de Hausdorff son también cerradas, además si X es hausdorff es T_1 con lo que los conjuntos unipuntuales en X son cerrados y ya que $(\theta^x)^{-1}(x) = G_x$ y θ^x es continua se tiene que G_x es cerrada y al ser G compacto, G_x es compacto. □

El Teorema III.2.3 muestra que si el grupo es finito, entonces la proyección orbital es cerrada. Un resultado análogo se tiene cuando G es compacto.

IV.1.20 Teorema. *La proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es cerrada.*

Demostración. Sea F cerrado de X, como G es compacto entonces GF es cerrado y ya que $\pi^{-1}\big(\pi(F)\big) = GF$ entonces $\pi(F)$ es cerrado en X/G. □

El siguiente resultado es una extensión del Teorema III.2.7 de grupos finitos a grupos compactos ya que en ambos casos la proyección órbital es cerrada.

IV.1.21 Corolario. *Si X es un espacio T_1, Hausdorff, regular o normal entonces X/G también lo es, respectivamente.*

IV.1.22 Teorema. *Si A es un conjunto invariante de X, entonces toda abierto de A contiene un abierto invariante de A.*

Demostración. Sea V abierto de A. $X - V$ es cerrado en X y ya que π es cerrada entonces el conjunto $U = X/G - \pi(X - V)$ es abierto en X/G tal que $X/G - \pi(X - A) \subset X/G - \pi(X - V)$ de donde $\pi(A) \subset U$. Dado que $\pi^{-1}(U) \subset \pi^{-1}\big(X/G - \pi(X - V)\big) = X - (X - V)$ se sigue que $\pi^{-1}(U) \subset V$. Si $x \in \pi^{-1}(U)$ entonces $\pi(x) \in U$ y así se tiene que $Gx = \pi^{-1}(x) \subset \pi^{-1}(U)$ de donde $\pi^{-1}(U)$ es invariante. □

S IV.2. Funciones invariantes

Las funciones invariantes son funciones definidas de G-espacios a espacios en las cuales todos los elementos de la misma órbita poseen la misma imagen, dichas funciones son casos particulares de funciones equivariantes definidas en Definición III.4.1.

IV.2.1 Definición. Se dice que una función $f : X \to Y$ entre el G-espacio X y el espacio topológico Y es `invariante` si para cada $g \in G$ y cada $x \in X$ se tiene $f(gx) = f(x)$.

Equivalentemente a la definición anterior, las funciones invariantes son funciones equivariantes respecto a la acción trivial en Y, esto pues $f(x) = gf(x) = f(gx)$. Con esto, Y es un G-espacio con la acción trivial y la función f es equivariante.

IV.2.2 Teorema. *Una función invariante $f : X \to Y$ induce una función $f/G : X/G \to Y$ que cumple $(f/G)\,\pi = f$, donde π es la proyección orbital, es decir, f/G hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/G \arrow[ur, dotted, "f/G"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Si la función f es invariante, se dota a Y con la acción trivial de G, y la función f es equivariante con esta accion. Dado que la acción es trivial, por el Ejemplo **??**, se tiene que los espaicos Y y Y/G coinciden, y por tanto, por el Teorema III.4.3, f induce una única función continua f/G de tal manera que $(f/G)\,\pi = f$. $\square$

S IV.3. Integral de Haar

Como se menciona en la introducción, Haar demostró que existe una medida invariante bajo traslaciones para grupos localmente compactos, metrizables y separables y más adelante Weil demuestra que dicha medida existe, en general, para grupos localmente compactos sin la necesidad de que estos sean metrizables y separables. Tal medida se denomina Medida de Haar. Existen distintas formas de contruir dicha medida siendo las principales las de Haar, Weil y Cartan. Por su parte, Haar y Weil dan construcción en base a conjuntos compactos haciendo uso del axioma de elección, mientras que Cartan la construye definiendo un funcional positivo sobre el conjunto de funciones continuas con soporte compacto sin necesidad de hacer uso del axioma de elección. A partir de dicha medida se construye una integral invariante bajo traslaciones única salvo producto por escalar para grupos localmente compactos denominada Integral de Haar.
Para los fines del presente trabajo se da una contrucción de la integral de Haar para el caso en que el grupo es compacto y de Hausdorff. En esta sección, el grupo G representa a un conjunto compacto y Hausdorff.

Para contruir la integral de Haar, se hará uso del enfoque de Daniell, presentado en el Apendice C, de tal forma que se defina una integral sin la necesidad de tener una medida definida en el espacio. Lo presentado en dicho Apendice es para el caso general de tener un espacio de Riesz en el cual puede definirse cierto funcional lineal. Aunque la teoría no es muy dificil en cuanto a la contrucción de dicha integral, la complicación viene de construir el funcional lineal conocido en ésta teoría como integral elemental.

IV.3.1 Definición. Sea X un espacio normado. Una sucesión (x_n) es de `Cauchy` si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$ se tiene $||x_n - x_m|| < \varepsilon$.

En el análisis funcional, un espacio de Banach es un espacio vectorial normado donde toda sucesión de Cauchy es convergente.

IV.3.2 Proposición. *Si X es un espacio topológico Hausdorff compacto, entonces el espacio $C(X, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach completo con las operaciones de suma usual de funciones y producto por escalar puntual, y con la* `norma máxima`*, $|| \cdot ||$, dada por $||f|| = \max_{x \in X} f(x)$.*

Observación. En un espacio topológico general, la norma máxima se denomina `norma del supremo` ya que está definida en el espacio de funciones continuas como $||f||_\infty = \sup_{x \in X} f(x)$. En el caso visto aquí se toma como el máximo ya que al ser el espacio compacto, el conjunto de imagenes es compacto y f alcanza en él sus valores máximo y mínimo.

De la proposición anterior se tiene que $C(G, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach completo, y dado que las funciones continuas de valor real sobre espacios compactos son acotadas, se tiene entonces que también un espacio de Riesz con el orden puntual, esto es, $f \leq g$ si $f(g) \leq h(g)$ para todo $g \in G$.

IV.3.3 Corolario. *El espacio $C(G,\mathbb{R})$ es un espacio de Riesz.*

Se denota por $F(G)$ la colección de subconjuntos finitos no vacíos de G y por $||\cdot||$ a la norma del supremo.

Para $f \in C(G,\mathbb{R})$, $M(f)$ denota a $\max\{f(g) : g \in G\}$ y $m(f)$ denota a $\min\{f(g) : g \in G\}$.

IV.3.4 Definición. Sea $f \in C(G,\mathbb{R})$, se define la `variación de` f, denotado por $V(f)$, como la diferencia entre los valorres máximo y mínimo de f, esto es, $V(f) = M(f) - m(f)$.

De la definición de variación, una función f es constante si y solo si $V(f) = 0$.

IV.3.5 Teorema. *La variación V es una función continua sobre $C(G,\mathbb{R})$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $f, h \in C(G,\mathbb{R})$ con $||f-h|| < \frac{\varepsilon}{2}$. De esto, para todo $g \in G$, se tiene $m(f)-\frac{\varepsilon}{2} < f(g)-\frac{\varepsilon}{2} < h(g) < f(g)+\frac{\varepsilon}{2} < M(f)+\frac{\varepsilon}{2}$. Por las propiedades de máximos y supremos, $m(f)-\frac{\varepsilon}{2} < m(h) < M(h) < M(f)+\frac{\varepsilon}{2}$. De esto, $M(h)-M(f) < M(f)-\frac{\varepsilon}{2}+m(f)-\frac{\varepsilon}{2}$, es decir, $V(h) - V(f) < \varepsilon$. De manera similar, $V(f) - V(h) < \varepsilon$, y por tanto $|V(f) - V(h)| < \varepsilon$. □

IV.3.6 Definición. Sean $F \in F(G)$ y $f \in C(G,\mathbb{R})$. Se define el `valor promedio de` f `respecto a` F (por derecha), denotado $\nu_F f$, como la función

$$\nu_F f(g) := \frac{1}{|F|}\sum_{a\in F} f(ga),$$

para todo $g \in G$.

Por las propiedades de la sumatoria, la función $I_F : f \mapsto \nu_F f$ es un operador lineal, para todo $F \in F(G)$. I_F es además continuo, para probar esto basta mostrar que es un operador acotado, esto pues en los espacio de Banach, para un operador ser continuo, continuo en 0 y acotado son propiedades equivalentes.

IV.3.7 Proposición. *Sean X y Y dos espacios normados. Un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si y solo si existe $M > 0$ tal que $||Tx|| \leq M||x||$, para todo $x \in X$.*

IV.3.8 Teorema. *Sea $F \in F(G)$. Para todo $f \in C(G,\mathbb{R})$, se tiene* $||\nu_F f|| \leq ||f||$.

Demostración. Dado que $\max\limits_{g\in G}\left|\frac{1}{|F|}\sum\limits_{a\in F} f(ga)\right| \leq \frac{1}{|F|}\sum\limits_{a\in F}\max\limits_{g\in G}|f(ga)|$ y $\max\limits_{g\in G}|f(ga)| = \max\limits_{g\in G}|f(g)|$ se sigue que $||\nu_F f|| = \max\limits_{g\in G}|\nu_F f(g)| \leq ||f||$. □

IV.3.9 Corolario. *Para cualquier $F \in F(G)$, el operador I_F es continuo.*

La diferencia entre los valores máximo y mínimo de una función siempre es más grande la diferencia de estos valores para el valor promedio de la función respecto a cualquier conjunto finito.

IV.3.10 Teorema. *Para todo $F \in F(G)$ y $f \in C(G, \mathbb{R})$ se tienen las desigualdades $m(f) \leq m(\nu_F f) \leq M(\nu_F f) \leq M(f)$ y $V(\nu_F f) \leq V(f)$.*

Demostración. Dadas las propiedades de mínimos y máximos, se tienen entonces las desigualdades $\frac{1}{|F|} \sum\limits_{a \in F} \min\limits_{g \in G} f(ga) \leq \min\limits_{g \in G}\big(\frac{1}{|F|} \sum\limits_{a \in F} f(ga)\big)$ y $\max\limits_{g \in G}\big(\frac{1}{|F|} \sum\limits_{a \in F} f(ga)\big) \leq \frac{1}{|F|} \sum\limits_{a \in F} \max\limits_{g \in G} f(ga)$, de donde $m(f) \leq m(\nu_F f)$ y $M(\nu_F f) \leq M(F)$, respectivamente.
De las desigualdades anteriores, $M(\nu_F f) - m(\nu_F f) \leq M(f) - m(f)$, y así $V(\nu_F f) \leq V(f)$. □

Sea $f \in C(G, \mathbb{R})$, se denota por Γ_f el conjunto de todos los valores promedio (por derecha) de f, esto es,

$$\Gamma_f := \{\nu_F f : F \in F(G)\}.$$

IV.3.11 Definición. Si X es un espacio topológico, un conjunto $K \subset C(X, \mathbb{R})$ se dice `equicontinuo` si para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ existe una vecindad U de x tales que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $y \in U$ y $f \in S$, y se dice acotado puntualmente si para todo $x \in X$ existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $f \in K$, y se dice relativamente compacto si $\overline{K}$ es compacto.

En el espacio normado de funciones sobre un compacto X, la compacidad del espacio no se preserva necesariamente.. El siguiente teorema da una condición suficiente para saber si un conjunto es relativamente compacto por medio de propiedades de las funciones que la componen, este resultado es conocido como el Teorema de Arzelá-Ascoli.

IV.3.12 Proposición. *Un conjunto $K \subset C(X, \mathbb{R})$ es relativamente compacto si es puntualmente acotado y equicontinuo.*

IV.3.13 Teorema. *Para $f \in C(G, \mathbb{R})$, Γ_f es uniformemente acotada y equicontinua.*

Demostración. Del teorema anterior, dado que para cualquier $F \in F(G)$ se tiene que $m(\nu_F f) \leq \nu_F f \leq M(\nu_F f)$, entonces $m(f) \leq \nu_F f \leq M(f)$, por lo que Γ_f es uniformemente acotada. Por el Teorema II.6.16, f es uniformemente continua, por lo que para todo $\varepsilon > 0$ existe U abierto de e tal que $|f(g) - f(h)| < \varepsilon$, si $gh^{-1} \in U$. Esto implica, si $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$, que $(ga_i)(ha_i)^{-1} = gh^{-1} \in U$ y así se tiene

$$\frac{1}{|F|}\Big|\sum_{i=1}^{n}\big(f(ga_i) - f(ha_i)\big)\Big| \leq \frac{1}{|F|}\sum_{i=1}^{n}\big|f(ga_i) - f(ha_i)\big| < \varepsilon,$$

por lo que $|\nu_F f(g) - \nu_F f(h)| < \varepsilon$, para $g \in hU$. De esto, Γ_f es equicontinua. □

Por el Teorema IV.3.12, de Arzelá-Ascoli, y del hecho de que la topología de la convergencia puntual y la convergencia uniforme coinciden, se concluye entonces que $\overline{\Gamma_f}$ es compacto.

IV.3.14 Corolario. *Para $f \in C(G,\mathbb{R})$, Γ_f es relativamente compacto en $C(G,\mathbb{R})$.*

Si f es constante, $\nu_F f = f$, para todo $F \in F(G)$, es decir, el valor promedio de una función constante es el valor de dicha constante.

IV.3.15 Teorema. *Si $f \in C(G,\mathbb{R})$ no es una función constante, existe $F \in F(G)$ tal que $V(\nu_F f) < V(f)$.*

Demostración. Como f no es contante, $m(f) < M(f)$, y así existe $c \in \mathbb{R}$ con $m(f) < c < M(f)$. Por la continuidad de f, existe V abierto en G tal que $f(g) \leq C$, para todo $g \in V$. Para $\{Va : a \in G\}$, por la compacidad de G, existe $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ tal que $\{Va_i : a_i \in F\}$ es una cubierta abierta de G. Para todo $g \in Va_i^{-1}$ se tiene $ga_i \in V$ y $f(ga_i) \leq c$. Por tanto, como

$$\frac{1}{n}\big(f(ga_j) + \sum_{i \neq j} f(ga_i)\big) \leq \frac{1}{n}\big(c + (n-1)M(f)\big) < M(f)$$

se sigue que $\nu_F f(g) = \frac{1}{|F|}\sum\limits_{a \in F} f(ga) < M(f)$ y $M(\nu_F f) < M(f)$. Dado que $m(f) \leq m(\nu_F f)$, para todo $F \in F(G)$, se sigue $V(\nu_F f) = M(\nu_F f) - m(\nu_F f) < M(f) - m(f) = V(f)$. □

El valor promedio de una función respecto al producto de dos conjuntos finitos es igual a tomar el valor promedio de la función primero respecto a uno y despues respecto al otro, manteniendo el orden del producto.

IV.3.16 Teorema. *Si $f \in C(G,\mathbb{R})$ y $F_1, F_2 \in F(G)$ entonces se tiene $\nu_{F_1}\nu_{F_2} f = \nu_{F_2F_1} f$.*

Demostración. Si $F_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $F_2 = \{b_1, \ldots, b_m\}$, dado que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nu_{F_2} f(ga_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(ga_ib_j)\big) = \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(ga_ib_j)$$

se concluye que $\nu_{F_1}\nu_{F_2} f = \nu_{F_2F_1} f$. □

IV.3.17 Teorema. *Para toda $f \in C(G,\mathbb{R})$, $\overline{\Gamma_f}$ contiene una función constante.*

Demostración. Dado que $\overline{\Gamma_f}$ es compacto y V es continua entonces V alcanza su valor mínimo para algún $\varphi \in \overline{\Gamma_f}$. Si φ no es contante, existe $F_1 \in F(G)$ tal que $V(\nu_{F_1}\varphi) < V(\varphi)$. Sea $\varepsilon = V(\varphi) - V(\nu_{F_1}\varphi) > 0$, por la continuidad de V y I_{F_1}, existen $\delta > 0$ y $F_2 \in \overline{\Gamma_f}$ tal que para todo $\nu_{F_2}h \in \overline{\Gamma_f}$ con $||\varphi - \nu_{F_2}h|| < \delta$ se tiene $\big|V(\nu_{F_1}\varphi) - V(\nu_{F_1}\nu_{F_2}h)\big| < \varepsilon$. De esto, $V(\nu_{F_1}\nu_{F_2}h) < V(\nu_{F_1}\varphi) + \varepsilon = \big(V(\varphi) - \varepsilon\big) + \varepsilon = V(\varphi)$. Por tanto, $V(\nu_{F_2F_1}h) < V(\varphi)$ lo que contradice que $V(\varphi)$ sea el valor mínimo de V.
Se concluye que φ es una función constante y $V(\varphi) = 0$. □

De manera similar a lo visto anteriormente, se define el valor promedio de f respecto a F por izquierda como la función
$$\mu_F f = \frac{1}{|F|}\sum_{a\in F} f(ag).$$

Sea $f \in C(G,\mathbb{R})$, se denota por Υ_f el conjunto de todos los valores promedio (por izquierda) de f, esto es,
$$\Upsilon_f := \{\mu_F f : F \in F(G)\}.$$
Siguiente la demostración del teorema anterior se tiene el mismo resultado para los valores promedio izquierdos de la función.

IV.3.18 Corolario. *Para toda $f \in C(G,\mathbb{R})$, $\overline{\Upsilon_f}$ contiene una función constante.*

Las funciones de valor promedio izquierdo y derecho son conmutativas.

IV.3.19 Teorema. *Para todo $f \in C(G,\mathbb{R})$ y todo $F_1, F_2 \in F(G)$ se tiene $\nu_{F_1}\mu_{F_2} f = \mu_{F_2}\nu_{F_1} f$.*

Demostración. Si $F_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $F_2 = \{b_1, \ldots, b_m\}$, dado que
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{F_2} f(a_i g) = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(a_i g b_j) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\nu_{F_1} f(g b_j)$$
se concluye que $\nu_{F_1}\mu_{F_2} f = \mu_{F_2}\nu_{F_1} f$. $\square$

De todo lo anterior se concluye entonces el siguiente resultado.

IV.3.20 Teorema. *Para toda $f \in C(G,\mathbb{R})$, $\overline{\Gamma_f}$ contiene una única función constante que coincide con la única función constante de $\overline{\Upsilon}$.*

Demostración. Sean φ y ψ dos funciones constantes de $\overline{\Gamma_f}$ y $\overline{\Upsilon_f}$, respectivamente. Por estar en la cerradura de estos conjuntos, para todo $\varepsilon > 0$, existen $F_1, F_2 \in F(G)$ tales que $||\nu_{F_1} f - \varphi|| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $||\mu_{F_2} f - \psi|| < \frac{\varepsilon}{2}$.
De la linealidad de μ_{F_2} y, dado que φ es constante, se satisface $\mu_{F_2}\nu_{F_1} f - \varphi = \mu_{F_2}\nu_{F_1} f - \mu_{F_2}\varphi = \mu_{F_2}(\nu_{F_1} f - \varphi)$. De la continuidad de μ_{F_2} se concluye
$$||\mu_{F_2}\nu_{F_1} f - \varphi|| = ||\mu_{F_2}(\nu_{F_1} f - \varphi)|| \leq ||\nu_{F_1} f - \varphi|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
De manera similar, $||\nu_{F_1}\mu_{F_2} f - \psi|| < \frac{\varepsilon}{2}$ y, del Teorema anterior,
$$||\varphi - \psi|| \leq ||\mu_{F_2}\nu_{F_1} f - \varphi|| + ||\nu_{F_1}\mu_{F_2} f - \psi|| < \varepsilon,$$
lo que implica que $\varphi = \psi$. Por lo tanto, toda función constante en Γ_f es igual a ψ. $\square$

De los valores promedio derecho puede entonces definirse un valor principal dado por la función constante determinado por éstos en Γ_f.

IV.3.21 Definición. Si $f \in C(G, \mathbb{R})$ entonces el valor de la única función constante en $\overline{\Gamma_f}$ es denotado por νf y se denomina valor promedio de f sobre G.

En este punto se tiene entonces todo lo necesario para definir la integral de Haar en G de manera natural a partir del valor promedio de una función.

El valor promedio de una función es una función constante y todos los valores promedio de las funciones valor promedio por derecha coinciden con dicha función constante.

IV.3.22 Teorema. *Sea $f \in C(G, \mathbb{R})$, para todo $F \in F(G)$ se tiene $\nu \nu_F f = \nu f$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, existe $F_1 \in F(G)$ tal que $||\mu_{F_1} f - \nu f|| < \frac{\varepsilon}{2}$, lo que implica, dado que νf es una función constante sobre G, que $||\mu_{F_1}(f - \nu f)|| = ||\mu_{F_1} f - \mu_{F_1} \nu f|| = ||\mu_{F_1} - \nu f|| < \varepsilon$, y de la continuidad de ν_F, para todo $F \in F(G)$, se sigue entonces

$$||\nu_F \mu_{F_1}(f - \nu f)|| \leq \mu_{F_1}(f - \nu f) < \varepsilon.$$

De esto, $||\mu_{F_1} \nu_F (f - \nu f)|| < \varepsilon$ y por tanto

$$||\mu_{F_1} \nu_F f - \nu f|| = ||\mu_{F_1}(\nu_F - \nu f)|| = ||\mu_{F_1} \nu_F (f - \nu f)|| < \varepsilon.$$

Por tanto, fijando F, se concluye que $\nu f \in \overline{\Upsilon_{\nu_F f}}$ y así νf es la constante que determina el valor promedio de $\nu_F f$. $\square$

El valor promedio es el funcional lineal que se estaba buscando definir para el espacio de Riesz de funciones continuas.

IV.3.23 Teorema. *La función valor promedio, ν, es un funcional lineal positivo sobre $C(G, \mathbb{R})$.*

Demostración. Sean $f, h \in C(G, \mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $\nu f \in \overline{\Gamma_f}$, existe $F \in F(G)$ tal que $||\nu_F f - \nu f|| < \frac{\varepsilon}{2}$. De esto, y la continuidad de ν, $||\nu_{F_1} \nu_F f - \nu f|| = ||\nu_{F_1}(\nu_F f - \nu f)|| < \frac{\varepsilon}{2}$, para $F_1 \in F(G)$ arbitrario.
Por otro lado, $\nu \nu_{F_1} h = \nu h$, por lo que existe $H \in F(G)$ de tal manera que se tiene la igualdad $||\mu_{FH} h - \nu h|| = ||\mu_H \mu_F h - \nu h|| < \frac{\varepsilon}{2}$. De lo anterior, se sigue

$$||\nu_{FH} - (\nu f + \nu h)|| \leq ||\nu_{FH} f - \nu f|| - ||\nu_{FH} - \nu h|| < \varepsilon,$$

por lo que $\nu f + \nu h \in \overline{\Gamma_{f+h}}$, es decir, es el valor promedio de $\nu(f + h)$ y por tanto $\nu(f + h) = \nu f + \nu h$. Es así que ν es aditiva.
Sea $c \in \mathbb{R}$ y $f \in C(G, \mathbb{R})$, por las propiedades de la sumatoria y del hecho de que no la constante no se evalua en la función, se tiene $\nu_F c f = c \nu_F f$, para todo $F \in F(G)$. Esto implica que $\Gamma_{cf} = c \Gamma_f$ y por tanto que la constante que determina a $\nu(cf)$ es $c\nu(f)$. De esto y la parte anterior, ν es, en efecto, un funcional lineal.

Sea $f \in C(G, \mathbb{R})$ tal que $f(g) \geq 0$, para todo $g \in G$. Por las propiedades de la sumatoria, dado que cada término es positivo, se tiene $\nu_F f(g) \geq 0$ para todo $F \in F(G)$ y todo $g \in G$. De esto, toda función φ en Γ_f satisface ser positiva, lo que implica que toda función en $\overline{\Gamma_f}$ es, a su vez, positiva y por tanto νf lo es. □

IV.3.24 Teorema. *La función ν es un funcional lineal continuo sobre $C(G, \mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $f \in C(G, \mathbb{R})$, dado que $-||f|| \leq f(g) \leq ||f||$ se tiene

$$-||f|| \leq \nu(-||f||)\nu(f) \leq \nu(||f||) \leq ||f||,$$

por lo que $||\nu f|| \leq f$. □

La función valor promedio es entonces un funcional lineal continuo sobre el espacio de Banach completo $C(G, \mathbb{R})$. Si una sucesión decreciente de funciones continuas (f_n) converge a 0 entonces $||f_n|| \to 0$ y así $\nu f_n \to 0$.

IV.3.25 Corolario. *Si $f_n \in C(G, \mathbb{R})$ es una sucesión decreciente de funciones tal que $f_n \to 0$ entonces $\nu f_n \to 0$.*

Recapitulando, $C(G, \mathbb{R})$ es un espacio de Riesz, ν es un funcional lineal en $C(G, \mathbb{R})$ que satisface las dos propiedades de Daniell.

IV.3.26 Corolario. *La terna $\big(G, C(G, \mathbb{R}), \nu\big)$ es un espacio de Daniell.*

El funcional ν es entonces una integral sobre G definido en el espacio de funciones continuas de varlor real.

IV.3.27 Definición. La `integral de Haar` se define como el valor de νf y se denota por $\int_G f dg$, o simplemente $\int f$, esto es $\nu f = \int_G f dg$.

Dado que $C(G, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach completo, toda sucesión creciente de funciones convergente lo hace en el espacio, por lo que el espacio $\big(G, C(G, \mathbb{R}), \in_G\big)$ es, de hecho, un espacio de Banach completo.

Para finalizar esta sección, se prueba que la integral de Haar es invariante bajo traslaciones.

IV.3.28 Teorema. *Sea $f \in C(G, \mathbb{R})$ y $x \in G$, entonces se tiene que ν es biinvariante, esto es*

$$\nu f R_x = \nu f = \nu f L_x.$$

Demostración. Sea $F = \{x\}$, entonces $\nu_F f(g) = f(gx) = fR_x(g)$, para todo $g \in G$, es decir, $\nu_x f = fR_x$. De esto, $\nu f R_x = \nu \nu_x f = \nu f$.
De manera similar se tiene la otra igualdad. □

La integral de Haar determina una medida en G mediante la Teoría de la integral de Daniell. Dicha medida es una forma de definir una medida normalizada e invariante sobre G. El desarollo de dicha teoría no se presenta en este trabajo, ya que se da solamente una muestra de lo que puede llegar a ser definir integrales sin definir una medida previamente.

El proceso para la integral de Haar en un grupo Hausdorff localmente compacto es mucho más complejo que el visto aquí, y puede hacerse también mediante el desarrollo de Daniell.

IV.3.29 Ejemplo. *La integral de Haar definida en el conjunto* $[0, 1]$ *coincide con la integral de Lebesgue restringida en el intervalo.*
De manera general, la integral de Haar sobre $\mathbb{R}$ *es la integral de Lebesgue.*

IV.3.30 Ejemplo. *Si* G *es un grupo finito, la integral de Haar está definida por*

$$\int f = \frac{1}{G} \sum_{g \in G} f(g).$$

IV.3.31 Ejemplo. *En el grupo circular con la topología de subespacio de* $\mathcal{C}$*, la integral de Haar está dada por*

$$\int_G f df = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt,$$

donde la integral de la derecha es la integral de Lebesgue.

S IV.4. Aplicaciones de la integral de Haar

La integral de Haar satisface ser una función invariante bajo traslaciones definida en grupos Hausdorff localmente compactos. Cuando se habla de aplicaciones de la integral de Haar se refiere al uso de ésta como función invariante.
En la siguiente sección, G es un grupo de Haussdorf compacto, así $\int$ representa a la integral de Haar normalizada.

Se puede construir, como en la sección anterior, una integral invariante bajo traslaciones normalizada en los grupos topológicos compactos, es decir, tenemos que existe un funcional lineal de G llamado integral de Haar, $C(G) \to \mathbb{R}$, al cual denotamos por $\int$, tal que dicha integral satisface las siguientes condiciones

H_1) Linealidad.

$$\int (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)(g)dg = c_1 \int \phi_1(g)dg + c_2 \int \phi_2(g)dg.$$

H_2) Invariante bajo traslaciones.

$$\int \phi(gh)dg = \int \phi(g)dg = \int \phi(hg)dg.$$

H_3) Positividad.

$$\phi \geq 0, \quad \int \phi(g)dg \geq 0.$$

H_4) Condición de normalización.
Si $1 : G \to G$ es la función constante 1, entonces

$$\int 1(g)dg = 1.$$

Observación. La propiedad de normalización nos da inmediatamente que si $c \in R$ y $c : C(G) \to \mathbb{R}$ denota a la función constante c, se tiene

$$\int c(g)dg = c.$$

La integral de Haar es acotada, mantiene monotonía y, en caso de que una función positva no sea siempre cero, ésta es estrictamente positiva.

En las pruebas de las siguientes propiedades podemos notar que la compacidad de G se encuentra implicita en la condición de normalización de la integral de Haar.

IV.4.1 Teorema. *Sean $\phi, \phi_1, \phi_2 \in C(G)$, se tienen las siguientes propiedades.*

i) $\phi_1 \geq \phi_2$, *entonces* $\int \phi_1(g)dg \geq \int \phi_2(g)dg$.

ii) $|\int \phi(g)dg| \leq \sup\{|\phi(g)| : g \in G\}$.

iii) Si $\phi \geq 0$ *pero* $\phi \neq 0$ *entonces* $\int \phi(g)dg > 0$.

Demostración.

i) Si $\phi_1 \geq \phi_2$ entonces $\phi_1 - \phi_2 \geq 0$. Luego, por la positividad y la linealidad de la integral se tiene que $\int \phi_1(g)dg - \int \phi_2(g)dg \geq 0$, de donde $\int \phi_1(g)dg \geq \int \phi_2(g)dg$.

ii) Sea $\alpha = \sup\{|\phi(g)| : g \in G\}$. Para cualquier $g \in G$, por la propiedad del supremo, se tiene $|\phi(g)| \leq \alpha$ y así $-\alpha \leq \phi(g) \leq \alpha$. Por la monotonia de la integral se sigue

$$-\alpha = \int -\alpha dg \leq \int \phi(g)dg \leq \int \alpha dg = \alpha$$

y así $|\int \phi(g)dg| \leq \alpha$.

iii) Sea $g_0 \in G$ tal que $\phi(g_0) > 0$. Por la continuidad de ϕ en g_0 existe U abierto de e de tal forma que $\phi(g_0 U) > 0$. Como G es compacto, si $\{gU\}_{g \in G}$ es una cubierta abierta de G entonces existen $g_1, \ldots, g_n \in G$ de tal manera que $\{g_i U\}_{i=1}^n$ cubre a G.
Sea $h_i = g_0 g_i^{-1}$, dado que cada g pertenece a alguna $g_j U$ se tiene que $gh_j \in g_0 U$ y así $\phi(gh_j) > 0$, de donde $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi(gh_i) > 0$, pues la función ϕ es no negativa. Dado que la integral es invariante bajo traslaciones entonces $\int \phi(g)dg = \int \phi(gh_i)dg$, para cada i, y así

$$\begin{aligned} n \int \phi(g)dg &= \int \phi(g)dg + \cdots + \int \phi(g)dg \\ &= \int \phi(gh_1)dg + \cdots + \int \phi(gh_n)dg \\ &= \int (\phi(gh_1) + \cdots \phi(gh_n))\, dg \\ &= \int \sum_{i=1}^{n} \phi(gh_i)dg. \end{aligned}$$

Por la positividad de la integral $\int \sum_{i=1}^n \phi(gh_i)dg > 0$ y por lo anterior $\int \phi(g)dg > 0$.

□

Dada una función real continua desde un G-espacio, la propiedad invariante de la integral de Haar determina una función real continua e invariante. Antes de dar dicho resultado, se prueba que aún sin tener una acción basta con tener una aplicación del producto del grupo con el espacio.

IV.4.2 Teorema. *Si la función $\psi : G \times Z \to \mathbb{R}$ es continua para Z un espacio arbitrario entonces también lo es la función $\Psi : Z \to R$ dada por*

$$\Psi(z) = \int \psi(g, z)dg.$$

Demostración. Para $z \in Z$ fijo, sea $\psi_z : G \to \mathbb{R}$ la función dada por $\psi_z(g) = \psi(g, z)$. Por la continuidad de ψ se sigue que ψ_z es continua. Aplicando la integral de Haar a ψ_z se obtiene la función $\Psi : Z \to \mathbb{R}$ dada por $\Psi(z) = \int \psi_z(g)dg = \int \psi(g, z)dg$. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de ψ, para cada $g \in G$ existen U_g abierto de g y V_g abierto de z tales que $\psi(U_g \times V_g) \subseteq (\psi(g, z) - \frac{\varepsilon}{2}, \psi(g, z) + \frac{\varepsilon}{2})$. Dado que $\{U_g\}_{g \in G}$ es una cubierta abierta de G, por la compacidad existen $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ tales que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, se tiene

$$\psi(U_{g_i} \times V_{g_i}) \subseteq \left(\psi(g_i, z) - \frac{\varepsilon}{2},\ \psi(g_i, z) + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Si $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ entonces $|\psi(g, z') - \psi(g, z)| < \varepsilon$ para todo $z' \in V$, y por tanto

$$|\Psi(z') - \Psi(z)| = |\int \phi(g, z')dg - \int \phi(g, z)dg\,| < \int \varepsilon dg = \varepsilon,$$

es decir, Ψ es continua en z y dado que z es arbitrario se concluye que Ψ es continua. $\square$

IV.4.3 Teorema. *Sean X un G-espacio y $\phi : X \to \mathbb{R}$ continua, se tiene que la función $\Phi : X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Phi(x) = \int \phi(gx)dg$$

es continua y satisface $\Phi(hx) = \Phi(x)$, para toda $h \in G$. Además, si E es un conjunto invariante de X tal que $\phi(E) \subseteq [a, b]$, entonces $\Phi(E) \subseteq [a, b]$.

Demostración. Sea $\psi : G \times X \to \mathbb{R}$ la función $(g, x) \mapsto \phi(gx)$.
ψ es claramente continua por serlo ϕ y por el teorema anterior induce la función continua $\Phi : X \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \int \psi(g, x)dg = \int \phi(gx)dg$.
Si $h \in G$ y $\phi_x : G \to \mathbb{R}$ es la función continua $\phi_x(g) = \phi(gx)$, se tiene que $\Phi(x) = \int \phi_x(g)dg$ y por la invarianza de la integral de Haar

$$\Phi(x) = \int \phi_x(g)dg = \int \phi_x(gh)dg = \int \phi(ghx)dg = \Phi(hx).$$

Por último, si $\phi(E) \subseteq [a, b]$ y E es invariante entonces para cada $g \in G$ y $x \in E$ se tiene $a \leq \phi(gx) \leq b$ de donde $\int adg \leq \int \phi(gx)dg \leq \int bdg$, y por tanto $a \leq \Phi(x) \leq b$. $\square$

Observación. Si el grupo G actúa en el conjunto $\mathbb{R}$ mediante la acción trivial, entonces el teorema anterior concluye que toda función real continua del G-espacio X induce una función real equivariante del G-espacio por medio de la integral.

Si se tiene una función de un G-espacio en el intervalo unitario de tal manera que separa conjuntos invariantes puede encontrarse entonces una función invariante que lo haga.

IV.4.4 Teorema. *Sean X un G-espacio y $\phi : X \to [0,1]$ continua tales que $\phi(A) = 0$ y $\phi(B) = 1$ para A y B conjuntos invariantes de X, entonces existe $\Phi : X \to [0,1]$ continua e invariante tal que $\Phi(A) = 0$ y $\Phi(B) = 1$.*

Demostración. Sea $\Phi(x) = \int \phi(gx)dg$. Como $0 \leq \phi(x) \leq 1$ entonces $0 \leq \Phi(x) \leq 1$, para toda $x \in X$, de donde $\Phi : X \to I$ es invariante. Si $x \in A$, como A es invariante entonces $gx \in A$ para todo $g \in G$, de lo cual $\int \phi(gx)dg = \int 0dg = 0$, es decir $\Phi(A) = 0$. De la misma manera, si $x \in B$ entonces $gx \in B$ y así $\int \phi(gx)dg = \int 1dg = 1$, es decir, $\Phi(B) = 1$. $\square$

Por el Teorema III.4.3, ϕ a su vez induce una única función continua entre los espacios orbitales, $\phi/G : X/G \to \mathbb{R}$. Para mostrar que la propiedad de ser completamente regular se preserva en los espacios orbitales se hace uso del siguiente lema que afirma que en los espacios completamente regulares pueden separarse compactos de cerrados.

IV.4.5 Lema. *Sea X un espacio completamente regular. Si F es un subconjunto cerrado y K es compacto en X son ajenos entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(K) = 0$ y $f(F) = 1$.*

Demostración. Como X es completamente regular, para cada $x \in X$ existe una función continua $f_x : X \to [0,1]$ de tal manera que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$. Para todo $x \in K$, sea $U_x = f_x^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$, como K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

Sea $g : X \to [0,1]$ dada por $g(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)$ entonces g es continua y $g(K) \subset [0, \frac{1}{2})$, esto pues si $y \in K$ entonces $y \in U_{x_i}$, para algún $i = 1, \ldots, n$, y así $f_{x_i}(y) \in [0, \frac{1}{2})$, es claro que el producto de las $f_{x_i}(x)$ es cerrado en $[0, \frac{1}{2})$.

Sea $h : X \to [\frac{1}{2}), 1]$ dada por $h(x) = \text{máx}\{\frac{1}{2}, g(x)\}$, la cual es continua y por como se ha definido a g se tiene $h(A) = \frac{1}{2}$ y $h(F) = 1$.

Si $r : [\frac{1}{2}, 1] \to [0,1]$ está dada por $r(s) = 2(s - \frac{1}{2})$ y $f : X \to [0,1]$ por $f(x) = rh(x)$ entonces f es continua, $f(K) = 0$ y $f(F) = 1$. $\square$

Gracias a la integral de Haar se puede entonces probar que las propiedades de ser completamente regular y Tychonoff se preservan de los G-espacios en los espacios orbitales, siempre que el grupo sea compacto y de Hausdorff.

IV.4.6 Teorema. *Si X es un G-espacio completamente regular entonces también lo es X/G.*

Demostración. Sean p un punto y F cerrado en X/G tal que F no contiene a p. Como G es compacto, $\pi^{-1}(p)$ es una órbita, por lo que es compacto e invariante y $\pi^{-1}(F)$ es cerrado y por ser unión de órbitas es invariante. Si X es completamente regular, por el lema anterior, existe una función continua $\phi : X \to [0,1]$ tal que $\phi\big(\pi^{-1}(p)\big) = 0$ y $\phi\big(\pi^{-1}(F)\big) = 1$ de lo cual, por el Teorema anterior, se obtiene la función invariante $\Phi : X \to [0,1]$ que induce la función continua ${}^{\Phi}/_{G} : X/G \to [0,1]$. Dado que ${}^{\Phi}/_{G}(p) = \Phi\big(\pi^{-1}(p)\big) = 0$ y ${}^{\Phi}/_{G}(F) = \Phi\big(\pi^{-1}(F)\big) = 1$, por lo que X/G es completamente regular. $\square$

Si el espacio X es T_1 entonces también lo es X/G, Teorema IV.1.21, por lo que con el teorema anterior se sigue que la proyección orbital mantiene también el axioma de Tichonoff.

IV.4.7 Corolario. *Si X es de Tychonoff entonces también lo es X/G.*

§ Conclusiones

Se presentan a continuación algunos de los resultados principales que se buscaba fueran del entendimiento de todo lector interesado en la presente tesis.

La estructura algebraica de grupos y la de topología son consistentes para formar una sola teoría debido a que la existencia de una no afecta el desarrollo de la otra. Muchas de las propiedades que pueden obtenerse de elementos y conjuntos dentro de los grupos y de los espacios topológicos pueden verse enriquecidas al unir ambas estrucutras en una sola al definir los grupos topológicos. Se ha visto a lo largo de este trabajo que la operación de grupo potencia a los espacios topológicos volviendoles un espacio homogéneo y al darle mayor peso a uno de los conceptos que se pierden al desarrollar la teoría no local de espacios topológicos, las bases locales en un punto, lo cual le da a su vez una gran relevancia a la existencia del elemento neutro del grupo. Estas propiedades solo son posibles al pedir la continuidad de la operación del grupo y la toma de inversos, lo que elimina la idea de que todo conjuntos dotado de una operación de grupo y una topología puede ser definido como grupo topológico, ya que en estos casos no se tendría una estrucutra consitente.

La propiedad de los grupos topológicos de ser espacios homogéneos permite darle bastante importancia al elemento neutro dentro de la topología del espacio, en particular, el hecho de poder determinar una base del espacio a partir de bases locales en él, y visceversa.

En los grupos topológicos se utilizan conceptos que de otra manera no se tendrían en las estructuras por separado, conceptos que a su vez surgieron como consecuencia del extenso trabajo realizado por los matemáticos en los espacios euclidianos los cuales, como se muestra, son grupos topológicos bajo la suma y la topología usuales (Ejemplo II.1.3), y que incluso generalizan propiedades estudiadas en estos espacios como por ejemplo, la continuidad uniforme.

Muchas de las funciones propias en grupos, como la función inversión y las traslaciones, son continuas e incluso homeomorfismos. En base a esto se tiene también que muchas de las propiedades topológicas de los conjuntos se preservan bajo traslaciones y productos de conjuntos. Una de las propiedades más interesantes en cuanto a relación entre conjuntos dice que la cerradura de un grupo es a su vez un grupo, esta aseveración es una pequeña muestra de lo bien que se relacionan estas áreas. Esta consistencia entre grupo y topología es más clara cuando se descubre que el producto directo es un grupo topológico con la topología producto, a su vez lo son los subgrupos con la topología de subespacio y el grupo cociente bajo la topología cociente. Puede parecer simple casualidad, pero no lo es. Las estructuras son complementarias una a la otra.

Respecto a los axiomas de separación, la propiedad de ser T_0 es natural y muchas otras son equivalentes entre si, lo que nos sugiere que la nueva estructura compacta los conceptos y, de alguna manera, distribuye consistenmente los puntos en el espacio. Dentro de los espacios topológicos los Corolarios I.3.86 y I.3.90 muestran una curiosa relación entre compacidad y la propiedad de ser un espacio de Hausdorff, relación que incluso nos dan dos de interesantes resultados sobre grupos topológicos: los homeomorfismos sobre un espacio Hausdorff compacto forman un grupo topológico con la composición de funciones y la topología compacto abierta (Ejemplo II.1.4) y la construcción de una integral normalizada invariante bajo traslaciones, y que con ello se tiene una generalización de la integral de Lebesgue para grupos Hausdorff compactos.

Una de las principales cualidades de los grupos es que pueden ser vistos como un grupo de permutaciones lo que motiva su uso para operar sobre un conjunto. Para que haya una buena relación entre un grupo (no necesariamente topológico) y un espacio topológico se pide la continuidad, necesaria como en el caso de los grupos topológicos, que cada una de estas permutaciones de un elemento sobre el conjunto sea continua. Esto nos muestra algo muy importante, la buena relación entre los conceptos de grupo y topología viene determinada de la continuidad de las funciones que determinan la operación entre los elementos del grupo entre sí o con los elementos del conjunto donde operan. Si esto pasa en grupo con una topología se tiene un grupo topológico, y si esto pasa en la acción de un grupo sobre un espacio se tiene entonces un G-espacio.

Se presentan acciones consistentes sobre subespacios, espacios producto y espacio cociente, incluso se tiene que los espacios homeomorfos a G-espacios. El espacio de órbitas definidas de un G-espacio obtiene grandes propiedades a través de las propiedades que adopta la proyección orbital, entre ellas la de ser abierta en el caso general, y ser también cerrada en el caso de tener un grupo finito, lo cual hace que se preserven propiedades del G-espacio en el espacio orbital.

Dos de las resultados más destacados estan dados por el Teorema III.1.10 y el Teorema III.1.11. El primero muestra la condición necesaria para que un grupo que actúa sobre un espacio topológico sea isomorfo a un grupo de homeomorfismos, y la segunda da la condición necesaria para que el G-espacio sea un espacio homogéneo.

Como en el caso del isomorfismo de grupos y el homeomorfismo de espacios topológicos, para el caso de los G-espacios se define la equivalencia de los mismos. El morfismo en este caso está dado por una función continua con un comportamiento similar a los morfismos de grupos. Una vez más, esto muestra la estrecha relación entre la continuidad y la operación definida entre los elementos.

Si se tiene que el grupo que actúa sobre un espacio es un grupo topológico, además de ser consistente con la topología, se pide que la acción, que parte de un espacio topológico producto dado por el grupo y el espacio, sea también continua. Aún cuando no parezca tan necesario ésto, dada la gran cantidad de propiedades interesantes que se obtienen solo con la acción sobre el espacio, la continuidad de la acción permite generar un grupo topológico de homeomorfismos y definir un homeomorfismo continuo entre el grupo topológico y el grupo de homeomorfismos.

Por último, pero no menos importante, en los grupos topológicos Hausdorff localmente compactos se puede definir una integral que se comporte como la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$, siendo así positiva, lineal e invariante bajo traslaciones. La demostración de esto no es del todo sencilla, por lo que no se hace en este trabajo. Sin embargo, se da la contrucción de una integral para el caso en que el grupo es Hausdorff compacto, lo cual hace uso de la construcción de Daniell de integrales invirtiendo el orden en cuanto a la contrucción primero de una medida y de la integral después.

Una de las principales palabras a lo largo de estas conclusiones, e implicita en muchas partes del texto salvo cuando se da por definición, es 'consistencia.' Se espera que ésta tesis goce de dicha propiedad y de cierta uniformidad al decir y hacer las cosas, todo esto para que el lector pueda fluir junto con el texto y evitar con ello que se detenga a preguntarse de que se esta hablando. Hay partes que requieren de ser un poco más precavidos de tomarlo con calma para entender, por lo que la lectura no debe ser un impedimento para ello. Las ideas presentadas aquí son sencillas y esa es la intención principal, pero no la única. Esta es una presentación introductoria de conceptos interesantes, es por ello que se insta a los lectores nuevos en estos temas que, si esto le ha causado curiosidad, se adentre en conceptos más avanzados a los que aquí puede encontrar.

Apéndice A.

§ Redes

Si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X entonces un elemento x de X se dice punto de acumulación de A si para cualquier abierto U de x se tiene que $A \cap (U - \{x\}) \neq \emptyset$. Estos puntos caracterizan a los conjuntos cerrados: un subconjunto B de X es cerrado si y solo si B contiene a todos sus puntos de acumulación. Otro concepto útil que caracteriza a los cerrados son las redes, las cuales son una generalización de las sucesiones de tal manera que no necesariamente tenga una cantidad numerable de elementos y son utilizadas para dar caracterizaciones de conceptos como cerradura, compacidad y ser un espacio de Hausdorff, resultados que pueden encontrarse en este Capítulo.

En el presente apéndice, X representa un espacio topológico y $\mathcal{V}(x)$ a la colección de todos los abiertos que continen al punto x.

A.1 Definición. Sean Λ un conjunto no vacío y $\leq$ una relación en Λ tal que

i) $\lambda \leq \lambda, \ \forall \lambda \in \Lambda$.

ii) Si $\lambda \leq \lambda'$ y $\lambda' \leq \lambda$ entonces $\lambda = \lambda'$.

iii) Para cada $\lambda', \lambda'' \in \Lambda$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda' \leq \lambda$ y $\lambda' \leq \lambda$.

A la pareja $(\Lambda, \leq)$ se le llama `conjunto dirigido`.

Si $x \in X$ entonces $\mathcal{V}(x)$, base local de x, con la relación dada por la inclusión inversa es un conjunto dirigido: si $A, B \subset X$, decimos que $A \leq B$ si $B \subseteq A$. La relación se obtiene de las propiedades de inclusión de conjuntos:

i) Para todo $U \in \mathcal{V}(x)$, dado que $U \subseteq U$ se sigue que $U \leq U$.

ii) Sean $U, V \ n\mathcal{V}(e)$ tales que $U \leq V$ y $V \leq U$, entonces $V \subseteq U$ y $U \subseteq V$, por lo que $U = V$.

iii) Sean $U, V \in \mathcal{V}(x)$, entonces $x \in U \cap V$, $U \cap V \subseteq U$ y $U \cap V \subseteq V$, es decir, $U \leq U \cap V$ y $V \leq U \cap V$, donde $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

A.2 Definición. Una `red` en el espacio X es una función $\xi : \Lambda \to X$, donde $(\Lambda, \leq)$ es un conjunto dirigido. Si $\lambda \in \Lambda$, se denota $\xi(\lambda)$ por x_λ y a la red por $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ o simplemente (x_λ).
La red (x_λ) `converge` al punto $x \in X$, denotado por $x_\lambda \to x$, si para cada U abierto de x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda_0 \leq \lambda$ se tiene $x_\lambda \in U$. Si la red (x_λ) converge a un único punto x se escribe $x = \text{lím}(x_\lambda)$.

Ser de Hausdorff, la cerradura de un conjunto y la continuidad de funciones entre espacios topológicos son algunos de los conceptos que pueden definirse por medio de redes como puede verse de las equivalencias siguientes. Más adelante se muestra también que la compacidad puede definirse de igual manera. Las redes estan indexadas por $\mathcal{V}(x)$ con el orden de inclusión inversa.

A.3 Teorema. Sea X y Y espacios topológicos. Se tienen entonces las siguientes propiedades.

i) X es un espacio de Hausdorff si y solo si toda red convergente lo hace a lo más a un único punto.

ii) Sea $A \subset X$. $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una red de puntos en A que converge a x.

iii) Si $f : X \to Y$, se tiene que f es continua en x si y solo si para cada red convergente (x_λ) en X que converge a x, la red $\big(f(x_\lambda)\big)$ converge a $f(x)$.

Demostración.

i) Si X es de Hausdorff, sean $x, y \in X$ tales que la red (x_λ) converge tanto a x como a y. Dados los conjuntos abiertos U de x y V de y existen λ_1 y λ_2 en Λ tales que $x_{\lambda'} \in U$, para todo $\lambda' \geq \lambda_1$, y $y_{\lambda''} \in V$, para todo $\lambda'' \geq \lambda_2$. Como Λ es un conjunto dirigido existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \lambda_1$ y $\lambda \geq \lambda_2$ por lo que $x_\lambda \in U \cap V$, es decir, $U \cap V \neq \emptyset$. Como X es de Hausdorff se concluye que $x = y$.
Si X no es de Hausdorff entonces hay dos puntos distintos x y y en X tales que $U \cap V \neq \emptyset$ para todo V abierto de x y todo W abierto de y. Si $\mathcal{U}$ es la colección de todas las intersecciones no vacias $U = V \cap W$ entonces $\mathcal{U}$ es un conjunto dirigido por inclusión inversa. Si para cada $U \in \mathcal{U}$ se elige $x_U \in U$ se obtiene la red (x_U) con índices en $\mathcal{U}$. Si $U' \geq U$, dado que $U = V \cap W$ entonces $x_{U'} \in V$ y $x_{U'} \in W$ de donde se concluye que la red (x_U) converge tanto a x como a y.

ii) Si $x \in \overline{A}$ entonces todo abierto de x intersecta a A, así para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ se elige un punto $x_V \in V \cap A$. Se tiene que (x_V) es una red en A y es claro que dicha red converge a x.
Si (x_λ) es una red en A que converge a un punto x, entonces para cada λ existe un abierto V de x que contiene a $x_{\lambda'}$ para $\lambda' \geq \lambda$ por lo que $V \cap A \neq \emptyset$, es decir $x \in \overline{A}$.

iii) Sea $x \in X$. Si f es continua en x entonces para un abierto V de $f(x)$ se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto de x y si x_λ es una red que convege a x entonces existe λ_0 tal que $x_\lambda \in f^{-1}(V)$, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, de lo cual $f(x_\lambda) \in V$, por lo que $\big(f(x_\lambda)\big)$ es una red en Y que converge a $f(x)$.
Si f no es continua en x existe V abierto de $f(x)$ tal que $f^{-1}(V)$ no es abierto de x. En cada abierto U de x existe $x_U \in U$ tal que $f(x_U) \in V$, por lo que $x_\lambda \to x$ pero $f(x_\lambda) \not\to f(x)$. $\square$

A.4 Definición. Si Λ es un conjunto ordenado, un subconjunto $\Delta \subset \Lambda$ se dice que es `Cofinal` en Λ si para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\delta \in \Delta$ tal que $\lambda \leq \delta$.

Es claro que si Λ es un conjunto dirigido y Δ es un conjunto cofinal entonces Δ es también un conjunto dirigido.

A.5 Definición. Sea $\xi : \Lambda \to X$ una red y $\xi(\lambda) = x_\lambda$. Si $(\Delta, \leq_\Delta)$ es un conjunto dirigido y $\beta : \Delta \to \Lambda$ es una función tal que

i) $\delta' \leq_\Delta \delta$ entonces $\beta(\delta') \leq \beta(\delta)$,

ii) $\beta(\Delta)$ es cofinal en Λ,

entonces $\xi\beta : \Delta \to X$ se dice que es una `subred` de (x_λ), denotada por $(x_{\xi(\delta)})$ o (x_{λ_δ}).

Si una red (x_λ) converge a x entonces cualquiera de sus subredes también converge a dicho punto y existen redes no convergentes que contienen subredes convergentes.

A.6 Teorema. Sea X un espacio. X es compacto si y solo si toda red en X tiene una subred convergente.

Demostración. Suponga que X es compacto y (x_λ) es una red que no contiene subredes convergentes, entonces para cada $x \in X$ existen U_x abierto de x y $\lambda_x \in \Lambda$ tales que si $\lambda \geq \lambda_x$ entonces $x_\lambda \notin U_x$. Sea $\{U_{x_i}, i = 1, \ldots, n\}$ es una subcubierta finita de $\{U_x : x \in X\}$, si $\lambda \geq \lambda_{x_1}, \ldots, \lambda_{x_n}$, entonces $x_\lambda \notin X$ pues $x_\lambda \notin U_{x_i}$ para $i = 1, \ldots, n$ lo cual contradice la compacidad de X.
Suponga ahora que toda red tiene al menos una subred convergente. Si X no es compacto, considerese $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X que no admite una subcubierta finita, entonces la colección de cerrados no vacíos $\mathcal{C} = \{X - U : U \in U\}$ tiene al propiedad de la intesercción finita pues si alguna $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$ entonces $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ cubre a X lo cual contradice la elección de $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las intersecciones finitas de $\mathcal{C}$ es un conjunto dirigido con la inclusión inversa, pues si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Para cada $F \in \mathcal{F}$ se elige x_F en F, por lo que se tiene la red (x_F) la cual tiene una subred (x_{λ_δ}) convergente. Si $x_{\lambda_\delta} \to x$ entonces para toda vecindad V de x, existe λ_0 tal que $x_{\lambda_\delta} \in V$, para todo $\lambda_\delta \geq \lambda_0$, por lo que $F \cap V \neq \emptyset$, y así $x \in \overline{F}$ de donde $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \bigcap \mathcal{C}$. Por tanto, $x \notin \bigcup \mathcal{U} = X$, lo cual contradice que x_{λ_δ} converge en X. $\square$

Apéndice B.

§ Topología compacto abierta

La topología compacto-abierta es una topología definida en el conjunto de funciones continuas entre espacios topológicos y como su nombre lo indica, es aquella que envia conjuntos compactos del dominio en abiertos del codominio. Con esto, se busca definir la 'cercania' de dos funciones a partir de la 'cercania' sobre los conjuntos compactos del dominio, es decir, si $f : X \to Y$ es una función entre espacios de tal manera que $f(A) \subset V$, donde $A \subset X$ es compacto y $V \subset Y$ es abierto, entonces las funciones 'cercanas' a f están obligadas a satisfacer la misma condición.

Sean X y Y conjuntos no vacíos. Se denota por Y^X el producto cartesiano $\prod\limits_{x \in X} Y_x$, donde $Y_x = Y$, el cual corresponde con el conjunto de todas las funciones de X en Y pues cada sucesión $(y_x)_{x\in X}$ representa una posible imagen de el conjunto X (indexado por cada $x \in X$) bajo alguna función, esto es, $Y^X = \{f : X \to Y \mid f \text{ es función }\}$.

La proyección sobre la x-coordenada $\rho_x : Y^X \to Y$ está definida por $\rho_x(f) = f(x)$. Si Y es un espacio topológico, la topología producto en Y^X es la generada por la subbase

$$\{\rho_x^{-1}(U) : U \text{ es abierto de } Y\},$$

donde $\rho_x^{-1} = \{f : X \to Y \mid f(x) \in U\}$.

Dada esta ambivalencia del espacio de funciones como producto de espacios, se puede definir en dicho espacio la topología de Tychonoff, definida en Definición I.3.45. Dicha topología se caracteriza por ser la topología más chica que hace continua a cualquier proyección $\pi_x : Y^X \to Y$, las cuales son también abiertas y satisface que para todo espacio arbitrario Z, una función $f : Z \to Y^X$ es continua si y solo si la composición $\pi_x f$ lo es, para cada $x \in X$.

Para los espacios X y Y, $C(X, Y)$ denota la familia de funciones continuas de X en Y, esto es, $C(X, Y) = \{f \in Y^X : f \text{ es continua}\}$.

B.1 Definición. Sean X y Y espacios. A la topología de Tychonoff en Y^X restringida al espacio $C(X,Y)$ se denomina `topología de la convergencia puntual` y se denota por $C_p(X,Y)$.

El témino convergencia puntual usado en la definición de la anterior topología es justificado en el siguiente resultado.

B.2 Teorema. Sea $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en $C_p(X,Y)$, entonces $f_\lambda \to f$ en $C_p(X,Y)$ si y solo si $f_\lambda(x) \to f(x)$, para cada $x \in X$.

Para definir algunas de las topologías en el espacio de funciones se necesitan definir ciertos conjuntos de funciones.

B.3 Definición. Sean X y Y espacios. Si $A \subset X$ y $B \subset Y$, se define como $[A,B]$ al conjunto de funciones continua f cuya imagen de A está contenida en B, es decir, $[A,B] = \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset B\}$.

La topología de la convergencia puntual es conocida también por el nombre de topología punto-abierta, esto pues dicha topología en $C(X,Y)$ corresponde a la generada por la subbase dada por

$$\mathcal{S}_p = \{[x,U] \in C(X,Y) : x \in X,\ U \text{ es abierto de } Y\},$$

donde x representa al conjunto unipuntual $\{x\}$. Un abierto básico de $C_p(X,Y)$ es de la forma $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \rho_{x_i}^{-1}(U_i)$.

Si se extiende el conjunto de partida de un conjunto unipuntual a un compacto, puede definirse también una topología en el espacio de funciones continua de manera similar a la topología punto abierta.

B.4 Teorema. La familia de subconjuntos en $C(X,Y)$ dada por

$$\mathcal{S}_c = \{[K,U] \in C(X,Y) : K \text{ es compacto de } X,\ U \text{ es abierto de } Y\}$$

es subbase para una topología en $C(X,Y)$,

Demostración. Sean $f \in C(X,Y)$ y $x \in X$. Dado que $f(x) \subset Y$, el conjunto unipuntual $\{x\}$ es compacto en X y Y es abierto en Y se sigue que $f \in \mathcal{S}_c$. $\square$

De la demostración anterior se sigue que $S_p \subset S_c$, por lo que la topología generada por S_c contiene a la topología de la convergencia puntual.

B.5 Definición. Se define la `topología compacto-abierta` en el espacio de funciones continuas de los espacios X y Y como la generada por la subbase S_c.
Se denota a la familia de funciones continuas de X en Y con la topología compacto-abierta como $C_c(X,Y)$.

Es muy complicado trabajar, incluso imaginar, los conjuntos abiertos de la topología compacto abierta, aún en espacios ampliamente conocidos. Por lo que suelen buscarse propiedades de ésta topología a partir de propiedades de los espacios involucrados.

Si X es un espacio de Hausdorff entonces puede construirse una subbase para la topología compacto abierta sobre $C_c(X,Y)$ a partir de una subbase en Y.

Observación. En la demostración del siguiente teorema se hace uso de el Teorema I.3.14, en donde se pide que U sea un abierto de X, en este caso la topología compacto abierta está definida a partir de una subbase, puede cambiarse el abierto por un abierto subbásico ya que la intersección finita de estos es un abierto básico y si tomamos a U como un abierto básico la demostración se seguiría manteniendo.

B.6 Teorema. Sea X un espacio de Hausdorff. Para cualquier subbase $\mathcal{S}_Y$ de Y se tiene que el conjunto

$$\mathcal{S}' = \{[K,U] \in C(X,Y) : K \text{ es compacto en } X,\ U \in \mathcal{S}_Y\}$$

es una subbase para $C_c(X,Y)$.

Demostración. Para probar que $\mathcal{S}'$ es subbase para $C_c(X,Y)$ basta mostrar que para un elemento de $\mathcal{S}_c$, esto es, un compacto K de X y U es abierto de Y, y para $f \in [K,U]$ existen $K_1,\ldots,K_m$ compactos de X y $U_1,\ldots U_m \in \mathcal{S}_Y$, tales que $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{m}[K_i,U_i] \subset [K,U]$.
Sean $[K,U] \in \mathcal{S}_c$, $f \in [K,U]$ y $\mathcal{S}$ subbase de Y. Si $x \in K$, entonces $f(x) \in U$ y como U es abierto en Y existen $(U_x)_1,\ldots,(U_x)_m \in \mathcal{S}$ tales que para el abierto básico $U'_x = \bigcap\limits_{i=1}^{m}(U_x)_i$ se tiene que $f(x) \in U'_x \subset U$. Además, f es continua para cada x por lo que existe V_x abierto de X tal que $x \in f^{-1}(V_x) \cap K$ el cual es un abierto de Kf. Como K es compacto, y por tanto localmente compacto, y Hausdorff entonces es regular, por lo que existe una vecindad W_x tal que $\overline{W}_x \subset f^{-1}(V_x) \cap K$. $K_x := \overline{W}_x$ es un subconjunto cerrado del compacto K, se sigue que es compacto y cumple que $f(K_x) \subset U'_x$. Dado que $\{W_x : x \in K\}$ es una cubierta abierta, por la compacidad de K, existen $x_1,\ldots,x_m \in K$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}$, más aún, $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} K_{x_j}$.
Recapitulando, para cada $j = 1,\ldots,n$ se tiene $K_{x_j} \subset K$ es compacto, $U'_{x_j} \subset U$ es abierto y si $f \in [K,U]$ entonces $f \in [K_{x_j}, U'_{x_j}]$, para cada $j = 1,\ldots,n$, de donde se tiene que $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{n}[K_{x_j}, U'_{x_j}] = \bigcap\limits_{j=1}^{n}[K_{x_j}, \bigcap\limits_{j=1}^{n}(U_x)_j]$.
Sea $g \in C(X,Y)$. $g \in [K_x, \bigcap\limits_{i=1}^{m}(U_x)_i]$ si y solo si $g(K_x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{m}(U_x)_i$, es decir, si $g(K_x) \subset (U_x)_i$ para $i = 1,\ldots,m$, con lo que $g \in \bigcap\limits_{i=1}^{m}[K_x,(U_x)_i]$, por tanto $[K_x, \bigcap\limits_{i=1}^{m}(U_x)_i] = \bigcap\limits_{i=1}^{m}[K_x,(U_x)_i]$.
De lo anterior $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{n}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{m}[K_{x_j},(U_{x_j})_i]\right)$, de donde fijando a algún $j \in \{1,\ldots,n\}$ se tiene $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{m}[K_{x_j},(U_{x_j})_i] \subset [K,U]$. □

B.7 Corolario. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Para cualquier subbase $\mathcal{S}_Y$ de Y, si β es una base de abiertos con cerradura compacta de X, entonces la siguiente colección es

$$\mathcal{S}'' = \{[A, U] \in C(X, Y) : \overline{A} \in \beta,\ U \in S_Y\}$$

es subbase de $C_c(X, Y)$.

Demostración. Basta tomar en la demostración del teorema anterior a $K_x = \overline{B}_x \cap K$ con $x \in B_x \in \beta$, para probar que $\mathcal{S}''$ es subbase de $C_c(X, Y)$. □

B.8 Teorema. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. La composición en $C_c(X, X)$, $\mu : C_c(X, X) \times C_c(X, X) \to C_c(X, X)$ dada por $\mu(f, g) \mapsto fg$, es continua.

Demostración. Sea $[K, U]$ abierto subbásico de $C_c(X, X)$. Para ver que μ es continua, basta ver que $\mu^{-1}\big([K, U]\big)$ es abierto.
Sea $(f, g) \in \mu^{-1}\big([K, U]\big)$, entonces $f(g(K)) \subset U$. Luego, como f es continua y U es un subbásico de $C_c(X, X)$ se sigue que $f^{-1}(U)$ es un abierto de $C_c(X, X) \times C_c(X, X)$ de tal manera que $g(K) \subset f^{-1}(U)$ y como X es localmente compacto se tiene que para cada $x \in K$ existe un abierto V_x con cerradura compacta tal que $\overline{V_x} \subset f^{-1}(U)$. Por otro lado, dado que K es compacto y g es continua se tiene que $g(K)$ y así existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $g(K) \subset V_{x_1}, \ldots, V_{x_n} =: V$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, $\overline{V_{x_i}}$ es compacto, por lo que $\overline{V}$ es compacto y $f(\overline{V}) \subset U$, de donde $[\overline{V}, U] \times [K, V]$ es un abierto de (f, g), ya que por el teorema y corolario anteriores se tienen que tanto $[\overline{V}, U]$ como $[K, V]$ son subbásicos de $C_c(X, X)$. Por último, si $f' \in [\overline{V}, U]$ y $g' \in [K, V]$ entonces $\big(\mu(f, g)\big)(K) = f'\big(g'(K)\big) \subset f'(V) \subset U$, por lo que $\mu\big([\overline{V}, U] \times [K, V]\big) \subset [K, U]$ y así $[\overline{V}, U] \times [K, V] \subset \mu^{-1}([K, U])$ de donde se concluye que $\mu^{-1}(K, U]$ es abierto. □

B.9 Corolario. Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto. Si $\mathcal{F}_c$ es una familia de funciones tal que $\mathcal{F} \subset C_c(X, X)$ entonces $\mu|_{\mathcal{F}}$ es continua.

Apéndice C.

§ La integral de Daniell

En el análisis matemático, y en particular en teoría de integración, el enfoque tradicional para construir una integral es a partir de definir una medida para subconjuntos con lo cual se define una función del conjunto en el valor que representa su tamaño. La integral de Daniell es una manera de generalizar el concepto de integral a través de su axiomatización. Para esto, a partir del concepto en $\mathbb{R}^n$ de la integral de Lebesgue, como un funcional lineal no negativo e invariante bajo traslaciones. Este metodo permite introducir a la integral y al espacio de funciones integrables directamente, sin ningún otro tipo de construcción.

Un estudio más completo sobre la integral de Daniell puede encontrarse en [16], en donde se demuestran muchas más propiedades.

La idea principal es comenzar en una familia básica de funciones sobre la cual pueda definirse la integral de una manera razonable, para después poder definirla a un conjunto más amplio.

C.1 Definición. Un `espacio de Riesz`, o `látice vectorial`, es un espacio vectorial $\mathcal{U}$ cerrado bajo las operaciones $u \vee v := \max(u, v)$ y $u \wedge v := \min(u, v)$.

Si u es un elemento de algún espacio de Riesz $\mathcal{U}$ entonces $|u| \in \mathcal{U}$, pues $|u| = u \vee 0 - u \wedge 0$, donde 0 es el elemento cero del espacio vectorial.

Notación: $f_n \downarrow f$ denota a una sucesión decreciente de funciones que converge puntualmente a f y $f_n \uparrow f$ a una sucesión creciente de funciones que converge puntualmente a f.

C.2 Definición. Una terna $(X, \mathcal{U}, I)$ es un `espacio de Daniell` si X es un conjunto no vacío, $\mathcal{U}$ es un espacio de Riesz de funciones real-valuadas sobre X e $I : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que

i) si $f \geq 0$ entonces $I(f) \geq 0$,

ii) $I(f_n) \downarrow 0$, para toda sucesión decreciente de funciones $f_n \in \mathcal{U}$ tales que $f_n(x) \downarrow 0$, para todo $x \in X$.

Las funciones $f \in \mathcal{U}$ son denominadas `funciones elementales` e I como `integral elemental`.

De la propiedad i) se concluye inmediatamente que si $g \leq f$ entonces $I(g) \leq I(f)$.

Observación. La propiedad ii) de la definición anterior es equivalente a la siguiente proposición: si $f_n \in \mathcal{U}$ es una sucesión decreciente de funciones tales que $f_n \downarrow f$, para todo $x \in X$, entonces $I(f_n) \downarrow I(f)$.

Un espacio de Daniell consta entonces de un espacio 'elemental' de funciones en donde se define una integral. A partir de este momento, se pretende definir dicha integral elemental a un espacio mucho más grande de funciones que preserven las propiedades de $\mathcal{U}$ y que sea cerrada bajo ciertas operaciones, a saber, la colección de funciones real-valuadas sobre X que pueden verse como el límite de una sucesión creciente de funciones de $\mathcal{U}$.

C.3 Definición. Dado un espacio de Riesz de funciones real-valuadas sobre X, sea $\mathcal{U}^*$, como el espacio de todas las funciones real-valuadas f sobre X para las cuales existe una sucesión creciente de funciones $(f_n) \in \mathcal{U}$ tales que $f_n \uparrow f$.
En tal caso, $\mathcal{U}^*$ se dice que es un `espacio de Riesz completo`.

De las propiedades de funciones límite se tiene que $\mathcal{U}^*$ es un espacio vectorial cerrado bajo operaciones de Látice, esto es, un espacio de Riesz.

C.4 Definición. Dado un espacio de Daniell, $(X, \mathcal{U}, I)$ se define la `integral` en el espacio $\mathcal{U}^*$ como $I^*(f) = \lim_{n \to \infty} I(f_n)$, donde f_n es una sucesión creciente tal que $f_n \uparrow f$.

La integral extendida está bien definida y es independiente de la sucesión que define a f.

C.5 Teorema. Si (f_n) y (g_m) son sucesiones crecientes en $\mathcal{U}$ y $\lim_{m \to \infty} g_m \leq \lim_{n \to \infty} f_n$ entonces $\lim_{m \to \infty} \int g_m \leq \lim_{n \to \infty} \int f_n$.

Demostración. Si $h \in \mathcal{U}$ es tal que $h \leq \lim_{n \to \infty} f_n$, entonces $h \wedge f_n \leq f_n$ y $h \wedge f_m = h$ para algún $m \in \mathbb{N}$. De esto, $I(h \wedge f_n) \leq I(f_n)$ para todo $n \geq m$, por lo que $\lim_{n \to \infty} I(h \wedge f_n) \leq \lim_{n \to \infty} I(f_n)$. Dado que $h \wedge f_n$ es creciente y $h \wedge f_n \uparrow h$ se tiene que $I(h) = \lim_{n \to \infty} I(h \wedge f_n)$ y así $I(h) \leq \lim_{n \to \infty} I(f_n)$. Tomando $h = g_m$, $\lim_{m \to \infty} I(g_m) \leq \lim_{n \to \infty} I(f_n)$.

□

Del teorema anterior, la igualdad $\lim_{m \to \infty} g_m = \lim_{n \to \infty} f_n$ implica que $\lim_{m \to \infty} I(g_m) = \lim_{n \to \infty} I(f_n)$, por lo que la definición de la integral en $\mathcal{U}^*$ no depende de la sucesión si no solamente del valor de la función límite.

De las propiedades de la función límite, tomando en cuenta que $+\infty$ es un valor posible para I^*, se tienen as siguientes propiedades.

· Si $f \in \mathcal{U}$, dado que $f_n = f$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que la integral definida en $\mathcal{U}^*$ es, en efecto, una extensión de la integral en $\mathcal{U}$, esto es, $I^*(f) = I(f)$ para toda $f \in \mathcal{U}$. Debido a esto, se denota simplemente por I a I^*.

· Si $f, g \in \mathcal{U}^*$ entonces $I(f + cg) = I(f) + cI(g)$, para $c \geq 0$.
La restricción a números positivos se debe a su propia definición pues si se toma un escalar negativo, la sucesión no sería creciente.

· Si $f, g \in \mathcal{U}^*$ son tales que $g \leq f$ entonces $I(g) \leq I(f)$.

C.6 Definición. Un espacio de Daniell $(X, \mathcal{U}, I)$ se dice `completo` si para toda sucesión creciente f_n tal que $f_n \uparrow f$, se tiene que $f \in \mathcal{U}$ y $I(f_n) = I(f)$.

Todo espacio de Daniell puede ser extendido a un espacio de Daniell completo.

C.7 Teorema. Si $(X, \mathcal{U}, I)$ es un espacio de Daniell entonces $(X, \mathcal{U}^*, I)$ es un espacio de Daniell completo.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión creciente de funciones en $\mathcal{U}^*$ con $f_n \uparrow f$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión creciente de funciones (g_m^n) en $\mathcal{U}$ tal que $g_m^n \uparrow f_n$, cuando $m \to \infty$. Si $h_n = g_n^1 \wedge \cdots \vee g_n^n$ entonces (h_n) es una sucesión creciente de funciones en $\mathcal{U}$ con $g_n^i \leq h_n \leq f_n$. Cuando $n \to \infty$, de la desigualdad anterior se tiene $f_i \leq \lim_{n\to\infty} h_n \leq f$, y cuando $i \to \infty$, $f \leq \lim_{n\to\infty} h_n \leq f$, por lo que $h_n \uparrow f$ y así $f \in \mathcal{U}^*$. De la misma manera, para $I(g_n^i) \leq I(h_n) \leq I(f_n)$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} I(f_i) \leq I(f) \leq \lim_{n\to\infty} I(f_n)$, de lo cual $I(f_n) \uparrow I(f)$. $\square$

Sea $-U^*$ la familia de valores negativos de las funciones en U^*, esto es, $-U = \{f : -f \in \mathcal{U}^*\}$. Si $f \in -U^*$, se define la integral de f como $I(f) = -I(-f)$. De las propiedades de $\mathcal{U}^*$, se tienen las siguientes propiedades en $-\mathcal{U}^*$.

· Si $f \in \mathcal{U}^*$ entonces $I(-f) = -I(f)$.

· La familia $-\mathcal{U}^*$ es cerrada bajo límite de sucesiones decrecientes, operaciones de Látice, suma y producto por escalar no negativo.

· Si $f, g \in -\mathcal{U}^*$ y $c \geq 0$ entonces $I(f + cg) = I(f) + cI(g)$.
Si $g \leq f$ entonces $I(g) \leq I(f)$.

·Si $g \in -\mathcal{U}^*$, $h \in \mathcal{U}^*$ y $g \leq h$ entonces $h - g \in \mathcal{U}^*$ y $I(h) - I(g) = I(h - g) \geq 0$.

Observación. La familia $-\mathcal{U}^*$ no representa valores negativos y $\mathcal{U}^*$ valores positivos, solo se tiene que cada uno de ellos representa negativo del otro conjunto.

Para una función f se define la `integral inferior`, denotada $\underline{I}(f)$, como $\underline{I}(f) := \sup\{I(g) : g \in -\mathcal{U}^*\}$, y la `integral superior`, como $\overline{I}(f) := \inf\{I(h) : h \in \mathcal{U}^*\}$.

C.8 Definición. Una función f se dice `sumable respecto a` I, o simplemente sumable, si para todo $\varepsilon > 0$ existen $g \in -\mathcal{U}^*$ y $h \in \mathcal{U}^*$ tales que $g \leq f \leq h$, $I(g)$ y $I(h)$ son finitos, y $I(h) - I(g) < \varepsilon$.
Se denota por $\mathcal{L}(I)$, o simplemente $\mathcal{L}$ a la familia de todas las funciones sumables.

Si f es una función sumable entonces $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Para toda función sumable f, se define la integral de f como $I(f) = \underline{I}$. Si $f \in \mathcal{U}^*$ y $I(f) < \infty$ se tiene que f es sumable y la integral en $\mathcal{L}$ coincide con la integral en $\mathcal{U}^*$. Si $f \in \mathcal{U}^*$ y no es sumable entonces se define la integral como $+\infty$ y si $f \in -\mathcal{U}^*$ y no es sumable su integral de define como $-\infty$.

C.9 Teorema. El espacio $\mathcal{L}$ tiene todas las propiedades de $\mathcal{U}$.

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{L}$, $\varepsilon > 0$ y $\cdot$ alguna de las operaciones $+$, $\vee$ o $\wedge$. Si $g_1, g_2 \in -\mathcal{U}^*$ y $h_1, h_2 \in \mathcal{U}^*$ son tales que $g_i \leq f_i \leq h_i$ y $I(h_i) - I(g_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, para $i = 1, 2$. Luego, se tiene que $g_1 \cdot g_2 \leq f_1 \cdot f_2 \leq h_1 \cdot h_2$ y $h_1 \cdot h_2 - g_1 \cdot g_2 \leq (h_1 - g_1) + (h_2 - g_2)$, por tanto $I(h_1 \cdot h_2) - I(g_1 \cdot g_2) < \varepsilon$. De esto, $\mathcal{L}$ es cerrado bajo suma y las operaciones de Látice.
Dado que I es aditiva en $\mathcal{U}^*$ y $-\mathcal{U}^*$, de lo anterior se tiene que $|I(f_1 + f_2) - I(f_1) - I(f_2)| < \varepsilon$ y como ε es arbitrario se sigue que $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$. □

El operador lineal es entonces una integral en el sentido más puro de la integral de Lebesgue ya que cumple las propiedades de ésta, es decir, se obtienen los mismos principales resultados bajo la integral de Daniell. A continuación se presentan algunos de estos resultados que pueden entenderse como su contraparte de los resultados propios de la integral de Lebesgue.

El primero de estos resultados se denomina Teorema de la convergencia monótona.

C.10 Teorema. Si (f_n) es una sucesión creciente de funciones en $\mathcal{L}$ con $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ entonces $f \in \mathcal{L}$ exactamente cuando $\lim_{n\to\infty} I(f_n) < \infty$, en tal caso, $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$.

Demostración. Primero, como se mencionó anteriormente, si $f \in \mathcal{L}$ entonces la integral coincide con la integral en $\mathcal{U}^*$ y está definido como el limite de las integrales.
Por otro lado, si $\lim_{n\to\infty} I(f_n) < \infty$, se define $g = f - f_1$ y, dado que $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1} - f_n$, se tiene $\overline{I}(g) \leq \lim_{n\to\infty} I(f_n) - I(f_1)$. De esto, $I(f) \leq \lim_{n\to\infty} I(f_n)$. La otra desigualdad se da al notar que $\underline{I} \geq \lim_{n\to\infty} I(f_n)$. □

El siguiente resultado es denominado el Lema de Fatou.

C.11 Teorema. Si (f_n) es una sucesión de funciones no negativas en $\mathcal{L}$ entonces $\inf f_n \in \mathcal{L}$ con $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}$ siempre que $\lim_{n\to\infty} f_n < \infty$. En este caso, $I(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I(f_n)$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$, entonces (g_n) es una sucesión en $\mathcal{L}$ que decrece a $\text{ínf}\, f_n$. De esto, $(-g_n)$ es una sucesión creciente cuyo límite es $-\text{ínf}\, f_n$, por lo que del teorema anterior, $\text{ínf}\, f_n \in L_1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n := \text{ínf}\{f_k : k \geq n\}$ la cual nos da una sucesión creciente no negativa en $\mathcal{L}$ cuyo límite, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, está en $\mathcal{L}$, pues $\lim_{n\to\infty} I(h_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I(f_n) < \infty$. Del teorema de la convergencia monótona se tiene la igualdad $I(\lim_{n\to\infty} h_n) = \lim_{n\to\infty} I(h_n)$ y dado que este límite coincide con $\lim_{n\to\infty} f_n$ se tiene la desigualdad buscada. $\square$

El último de los resultados que se prensentan es denominado Teorema de la convergencia dominada.

C.12 Teorema. Sea (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{L}$ con $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y algún $g \in \mathcal{L}$, entonces $I(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$.

Demostración. La sucesión no negativa $(f_n + g)$ se encuentra en $\mathcal{L}$, con $I(f_n + g) \leq 2I(g)$. De esto se tiene que $\lim_{n\to\infty} f_n + g \in \mathcal{L}$, con $I(\lim_{n\to\infty} f_n + g) \leq \liminf_{n\to\infty} I(f_n) + I(g)$. Por tanto, $I(\lim_{n\to\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I(f_n)$. Como $(g - f_n)$ es también una sucesión no negativa que satisface $I(g - \lim_{n\to\infty} f_n) \leq I(g) - \limsup I(f_n)$, entonces $I(\lim_{n\to\infty} f_n) \geq \limsup I(f_n)$.
Dado que los límites superior e inferior coinciden se tiene la igualdad buscada. $\square$

§ Bibliografía

[1] de Neymet Urbina, S. (2005). Introducción a los grupos topológicos de transformaciones (Vol. 23). UNAM.

[2] Hewitt, E., & Ross, K. A. (2012). Abstract Harmonic Analysis: Volume I Structure of Topological Groups Integration Theory Group Representations (Vol. 115). Springer Science & Business Media.

[3] Loomis, L. H. (2013). Introduction to abstract harmonic analysis. Courier Corporation.

Grupos topológicos

[4] Arhangel'skii, A., & Tkachenko, M. (2008). Topological Groups and Related Structures, An Introduction to Topological Algebra (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

[5] Montgomery, D. (1945). What is a Topological Group? The American Mathematical Monthly, 52(6), 302-307. doi:10.2307/2305290

[6] Tkachenko, M., García, C. H., Silva, L. M. V., & Rendón, O. (1997). Grupos topológicos. Universidad UAM, Iztapalapa.

[7] Tkachenko, M. G. (2001). Topological features of topological groups. In Handbook of the History of General Topology (pp. 1027-1144). Springer, Dordrecht.

Topología

[8] Bourbaki, N. (2013). General Topology: Chapters 1–4 (Vol. 18). Springer Science & Business Media.

[9] Dugundji, J. (1966). Topology. Allyn and Bacon, inc., Boston.

[10] Engelking, R. (1989). General topology.

[11] Kelley, J. L. (2017). General topology. Courier Dover Publications.

[12] Munkres, J. R. (1975). Topology: a first course (Vol. 23). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Teoría de Grupos

[13] Fraleigh, J. B. (2003). A first course in abstract algebra. Pearson Education India.

[14] Herstein, I. N. (1990). Abstract algebra.

[15] Rotman, J. J. (2012). An introduction to the theory of groups (Vol. 148). Springer Science & Business Media.

Análisis

[16] Blackstone, E., & Mikusinski, P. (2014). The Daniell Integral.

[17] Bourbaki, N. (2004). Elements of Mathematics: 6. Integration. Berlin: Springer.

[18] Daniell, P. J. (1918). A general form of integral. Annals of mathematics, 279-294.

[19] Miličić, D. (2016). Notes on representations of compact gorups.

[20] Morrison, T. J. (2011). Functional analysis: An introduction to Banach space theory (Vol. 43). John Wiley & Sons.