UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE INGENIERÍA
CAMPUS I

COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Razón de Cambio en la simulación de fenómenos de vaciado de recipientes con geometría dinámica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA

ING. HUMBERTO MANUEL GÓMEZ. C121108

DIRECTOR DE TESIS

M.E. CRISTÓBAL CRUZ RUIZ

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS; FEBRERO DEL 2020

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.
18 de febrero de 2020.
Oficio No. F.I.01.123/2020.

Ing. Humberto Manuel Gómez
Alumno de la Maestría en Ciencias con
Especialidad en Matemática Educativa
Universidad Autónoma de Chiapas
P r e s e n t e:

Por este medio comunico a usted, que se autoriza la impresión de su trabajo de tesis denominado: **"Razón de cambio en la simulación de fenómenos de vaciado de recipientes con geometría dinámica"** para que pueda continuar con los trámites de titulación para la obtención del grado.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR"

Dr. Arcadio Zebadúa Sánchez
Encargado de dirección

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS
DIRECCIÓN DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

C.c.p. Dra. Daisy Escobar Castillejos. Coordinadora de Investigación y Posgrado. Facultad de Ingeniería.
C.c.p. M.I. Fredy Humberto Caballero Rodríguez. Coordinador de la Maestría en Ingeniería. Facultad de Ingeniería.
C.c.p. Archivo/minutario
AZS/DEC/amj

Código: FO-113-09-05
Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) Humberto Manuel Gómez,
Autor (a) de la tesis bajo el título de "Razón de Cambio en la simulación de fenómenos de vaciado de recipientes con geometría dinámica"
presentada y aprobada en el año 2020 como requisito para obtener el título o grado de maestro en ciencias con especialidad en matemática educativa autorizo a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 6 días del mes de Octubre del año 2020.

Humberto Manuel Gómez
Nombre y firma del Tesista o Tesistas

Tuxtla Gutiérrez Chiapas; a 10 de febrero del 2020.

Dr. Arcadio Zebadúa Sánchez
Encargado de Dirección
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Chiapas.
Presente.

Por este medio me permito informarle a usted que he concluido con la dirección de la **tesis** que, para obtener el **Grado de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa**, presenta el alumno **C. Humberto Manuel Gómez,** titulada: **"Razón de Cambio en la simulación de fenómenos de vaciado de recipientes con geometría dinámica",** por lo que doy mi voto aprobatorio para que pueda seguir con los trámites correspondientes.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE.

M. E. Cristóbal Cruz Ruiz
Director de tesis

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a 10 de febrero del 2020.

Dr. Arcadio Zebadúa Sánchez
Encargado de Dirección
Facultad de Ingeniería, Campus I
Universidad Autónoma de Chiapas
Presente.

En nuestra calidad de sinodales del examen para obtener el Grado de la **Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa** del (a) alumno (a) **C. Humberto Manuel Gómez,** nos permitimos manifestarle la aceptación del trabajo escrito de **Tesis** titulada: **"Razón de Cambio en la simulación de fenómenos de vaciado de recipientes con geometría dinámica".** Quedamos enterados de que formaremos parte del jurado del examen de grado, en la fecha y hora que se nos comunique.

ATENTAMENTE
"POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR"

M. E. CRISTÓBAL CRUZ RUÍZ
DIRECTOR DE TESIS

DR. HIPÓLITO HERNÁNDEZ PÉREZ
ASESOR DE TESIS

DR. MIGUEL SOLÍS ESQUINCA
ASESOR DE TESIS

***Archivo/Minutario.**

AGRADECIMIENTOS

A DIOS:

Por permitirme disfrutar de la vida y por guiarme por el buen camino para poder realizar este logro.

A MI FAMILIA:

Por siempre ser mi ejemplo a seguir, por el apoyo y amor incondicional y sobre todo por provocar en mi ese deseo de superación que me llevo a estudiar esta maestría. Agradezco y dedico este trabajo a mis padres: Alba y Uriel; y a mi hermano Orlando.

A MI FACULTAD Y MAESTROS:

Por ser la fuente de mis conocimientos y enseñanzas. Agradezco especialmente a mi director de tesis: M.E. Cristóbal Cruz Ruiz por su tiempo, paciencia, conocimientos y dedicación para la realización de la tesis.

A MIS COMPAÑEROS DE MAESTRÍA:

Por todas las enseñanzas compartidas y el apoyo mutuo dando cada uno algo de si mismo para salir adelante en esta etapa y lograr nuestro objetivo.

Índice

Introducción

Esta investigación está enfocada a la forma en que se abordan algunos temas de Cálculo Diferencial en los semestres iniciales en la licenciatura en Ingeniería Civil de la UNACH, ya que el discurso dominante utilizado en la mayoría de las clases, ha venido causando que los estudiantes no encuentren una aplicación relacionada a la formación ingenieril a la que se aproximan. Por consecuencia los estudiantes tienen dificultades cuando se encuentran frente a problemas aplicados dentro de las materias más avanzadas en cuanto a su formación académica. Es por esto que se propone utilizar herramientas tecnológicas que coloquen en el contexto ingenieril estos temas de Cálculo Diferencial, específicamente la noción de Razón de Cambio. Es muy importante que los estudiantes construyan esta noción porque es la base para el estudio de ciertos fenómenos a los que el tendrá que dar solución como profesional, como por ejemplo los fenómenos hidráulicos.

Se propone en esta investigación, construir la noción de Razón de Cambio utilizando como pretexto al fenómeno hidráulico de vaciado de recipientes. Utilizaremos la simulación de este fenómeno ya que con el uso de la geometría dinámica (GeoGebra) se pueden manipular las variables que en la experimentación pueden ser un factor que impida llegar a los resultados esperados. Dado que la simulación nos permite también generar las gráficas, nosotros pretendemos que el estudiante la interprete y argumente lo que sucede en relación al vaciado del recipiente que observa.

El uso de la simulación en el fenómeno de vaciado de recipientes, contribuirá principalmente a la construcción de la noción de variación y al desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), y esto se logrará a través de tres acciones que se deben involucrar en el diseño de las actividades didácticas:

1. Medición del cambio.
2. Análisis de la forma en como esa medida evoluciona.
3. Reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen.

Tomando en cuenta las acciones mencionadas anteriormente, se realiza el diseño de las actividades didácticas y se presentan ante el grupo en tres fases diferentes en donde observamos a través de los argumentos de los estudiantes la construcción de la noción de variación y por consecuencia la construcción de la noción de Razón de Cambio. Esto lo podemos identificar ya que entre las respuestas de los estudiantes encontramos que identifican ciertos elementos del fenómeno asociados con las graficas que construyen o las que se proporcionan en la actividad. Encontramos frases como: “crece/decrece cada vez más/menos” en relación a las gráficas; o “es más/menos rápido” en relación al llenado o vaciado del recipiente y su geometría.

Capítulo 1. Contextualización

1.1. Problemática

El discurso escolar de la razón de cambio en la facultad de Ingeniería Civil de la UNACH, carece de un sistema de referencia para su resignificación en el estudio del Cálculo. Debido a que el discurso tanto en Cálculo Diferencial como en Cálculo Integral se ha remitido a lo algorítmico, muy poco a lo conceptual, y mucho menos al estudio del saber en uso.

Se ha observado que en los cursos de cálculo diferencial no se abordan temas estrechamente relacionados con la Ingeniería Civil, y en ocasiones definitivamente no se aborda el concepto de Razón de Cambio. Es por esto que los estudiantes, al continuar con su carrera universitaria, generalmente tienen problemas en las materias aplicadas cuando en el contenido de éstas hay que abordar temas relacionados con el cálculo diferencial.

El desarrollo de una perspectiva variacional del Cálculo es un punto de partida para la construcción de significados de objetos matemáticos como derivada, pendiente y razón de cambio, por lo que comprender como los estudiantes se apropian de la noción de variación es un aspecto necesario en el aprendizaje del Cálculo (Caballero, 2018).

El análisis variacional es un aspecto fundamental para la construcción de la noción de Razón de Cambio y uno de los fenómenos en donde es posible estudiar a profundidad la noción de variación es el de vaciado de recipientes, ya que por ser un fenómeno hidráulico se considera relevante para que la formación del estudiante sea dirigida hacia la Ingeniería Civil.

En el fenómeno hidráulico de vaciado de recipientes se comenzó por apreciar tres escenarios: experimentación, simulación y modelación. Por lo que se seleccionó la simulación como el escenario para trabajar ya que en este puede incluirse la modelación y graficación, y según Liliana Suárez (2014) la simulación es una estrategia que permite imitar problemas complejos en el mundo real y además cuando el alumno usa una simulación de computadora puede manipular un modelo que ya ha sido creado intencionalmente para los objetivos que se pretenden.

Tomando en cuenta también que desde la experimentación podemos llegar a la modelación y graficación del fenómeno, haciendo un balance consideramos a la simulación como el escenario ideal ya que en la experimentación se pueden presentar factores que nos puedan distanciar de los objetivos esperados, y que en la simulación se establecen como condiciones iniciales, por ejemplo, el coeficiente de descarga, la forma y medidas del recipiente, el radio uniforme de salida, etc.

Considerando que en la investigación se realizaran ciertas actividades utilizando la simulación del fenómeno de vaciado de recipientes, se esperaba tener como objeto de estudio a las ecuaciones diferenciales, ya que son indispensables para la realización de dicha simulación. Pero recordando que los estudiantes tienen poco conocimiento del “lenguaje gráfico”, preferimos comenzar con la construcción de la noción de Razón de Cambio para inculcar el lenguaje variacional y por consecuencia obtener un dominio gráfico para los alumnos a través de la predicción.

Con la problemática planteada nos formulamos las preguntas de investigación, que servirán de guía para nuestra investigación.

Pregunta general de investigación

- ¿Cómo construyen los estudiantes la Razón de Cambio a partir de la simulación de vaciado de recipientes con geometría dinámica?

Preguntas específicas de investigación

- ¿Cuáles son las concepciones previas que tienen los estudiantes sobre el lenguaje grafico a partir de una actividad especifica?

- ¿Cómo poner en escena una situación didáctica que involucren la predicción y la simulación de fenómenos de vaciado de recipientes?

- ¿Cuáles son los argumentos de los estudiantes sobre la construcción de la noción de Razón de Cambio a partir de la Modelación-Graficación basados en la predicción y simulación de fenómenos de vaciado de recipientes con diferentes geometrías?

1.2. Objetivos: general y específico

Respondiendo a las preguntas de investigación nos planteamos los objetivos de la investigación.

Objetivo general

Construir la noción de razón de cambio a partir de la simulación de vaciado de recipientes con geometría dinámica.

Este objetivo se pretende alcanzar mediante tres momentos u objetivos específicos.

Objetivos específicos

- Conocer las concepciones previas que tienen los estudiantes sobre el lenguaje gráfico a partir de una actividad especifica.
- Diseñar una situación a partir de las concepciones previas que tienen los estudiantes que involucren la predicción y la simulación de fenómenos de vaciado de recipientes.

- Analizar los argumentos de los estudiantes sobre la construcción de la noción de Razón de Cambio a partir de la modelación–graficación basados en la predicción y simulación de fenómenos de vaciados de recipientes con diferentes geometrías.

1.3. Justificación

La Razón de Cambio no se aborda en los cursos de Cálculo Diferencial por diferentes factores entre los que se puede destacar el hecho de que los profesores supongan que ese conocimiento ya está construido en su formación de preparatoria. Otro factor es que el tiempo que se le da para abordar ciertos temas de Cálculo Diferencial, es muy poco lo que da pie a solo recordar el concepto para que se puedan estudiar todos los temas presentados en el programa de estudios.

Es por esto que se pretende incorporar la Razón de Cambio en la enseñanza del Cálculo porque el análisis variacional es importante para la formación del ingeniero civil y la tecnología será la herramienta que nos permitirá la construcción de la noción de Razón de Cambio a través de la simulación, que a su vez contiene de forma implícita la modelación y graficación. Los elementos epistemológicos de la modelación y de la graficación contribuyen a concebir actividades para resignificar los objetos asociados a la matemática del cambio y la variación (Suárez, 2014).

La tecnología se está usando cada vez más en el ámbito educativo, por lo que en esta investigación se busca una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial visto desde la perspectiva de la ingeniería civil, ya que una problemática importante es que, en la enseñanza del cálculo diferencial, se siguen utilizando las mismas estrategias didácticas desde cuando no se tenían al alcance los medios tecnológicos que hoy en día podemos utilizar a favor de la enseñanza en la Matemática Educativa.

Se debe hacer también un uso reflexivo de la tecnología, ya que podría ser perjudicial para los estudiantes reemplazar procesos matemáticos necesarios con el uso de algún software o una calculadora especializada, es por esto que debería existir un equilibrio entre el uso de la tecnología y la enseñanza tradicional.

Se pretende utilizar un software que permita realizar simulaciones que puedan servir para que el cálculo diferencial tenga una aplicación directa, para fines didácticos, en el ámbito ingenieril específicamente en la construcción de la noción de Razón de Cambio, ya que, en el análisis variacional es muy necesario en la formación del Ingeniero Civil. Para esto utilizaremos la simulación del fenómeno de vaciado de recipientes con geometrías diferentes, recordando que, al tratarse de un fenómeno hidráulico, se encuentra dentro del contexto de lo que probablemente sea su trabajo al terminar su formación.

Generalmente los alumnos cuentan con una computadora, o en su defecto la facultad de ingeniería cuenta con laboratorios de cómputo en donde se puede trabajar con un software que permita simular el fenómeno, específicamente GeoGebra. Este software es compatible con cualquier teléfono celular actual al que tiene acceso un estudiante, lo cual hace que su uso sea práctico para alcanzar los objetivos esperados en esta investigación.

1.4. Estado del arte

En las investigaciones que se han realizado respecto a la forma en que se aborda la razón de cambio con los estudiantes de los semestres iniciales de ingeniería civil, se hace evidente que estos carecen de una construcción del conocimiento ya que cuando tiene que aplicar dichos conocimientos, no sabe cómo hacerlo y por lo tanto tiene problemas al continuar en su formación como profesional como ya se mencionó anteriormente.

En esta investigación se pretende analizar la construcción de la noción de Razón de Cambio mediante el modelo de vaciado de recipientes utilizando la graficación para la representación del fenómeno, y en base a esto diseñar una situación didáctica que permita al estudiante resignificar el conocimiento que por alguna razón no construyó anteriormente.

En la revisión bibliográfica encontramos que el fenómeno de llenado de recipientes se ha utilizado anteriormente para fines didácticos, particularmente para la construcción de la noción de razón de cambio, sin embargo, el fenómeno de vaciado no se ha utilizado para este propósito, es por esto que decidimos trabajar con este fenómeno ya que, a diferencia del llenado de recipientes, se presentan gráficas con características peculiares que ayudarán al estudiante a construir la noción de razón de cambio.

En dicha revisión bibliográfica recopilamos y analizamos diversas investigaciones que nos permiten establecer ciertas características y consideraciones que se deben tomar para la realización de nuestra investigación. En esta revisión nos encontramos las siguientes investigaciones:

Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula

Aunque la investigación de Arrieta (2003) se ha quedado atrás en el tiempo, para nuestra investigación es un antecedente importante ya que marca, en el inicio, el enfoque que se le da a la matemática escolar y desde la perspectiva de nuestra investigación, se pretende enfocar a esta matemática escolar desde el punto de vista ingenieril.

En esta investigación Arrieta nos explica que aprender se refiere a las formas en que el conocimiento, construido por el ser humano, es movilizado en las interacciones sociales, es decir; es muy importante que el alumno construya el concepto de derivada, pero también nos interesa saber cuál es la utilidad que le da en su vida profesional o cotidiana.

> Así, de alguna forma nuestra investigación esta insertada en el proceso de búsqueda sobre las formas de interacción de los conocimientos matemáticos de los estudiantes en diversos contextos, extraescolares o no, como lo son el trabajo u la interacción con otras ramas de la ciencia (Arrieta, 2003, p. 4).

Cabe mencionar que esta investigación está desarrollada desde una perspectiva socioepistemológica ya que hace énfasis en las prácticas sociales de matematización en donde los estudiantes y el profesor participen en actividades en las que las construcciones relacionadas al saber matemático desempeñen un papel fundamental, por lo tanto, los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales que surgen a partir de prácticas y que también son reproducidos por comunidades.

En la problemática también expone la ausencia de problemas reales en el discurso matemático escolar, lo cual es un problema que también se da en el tema de la Razón de Cambio, y según Arrieta en ocasiones diversas nociones y procedimientos matemáticos han surgido de comprender y transformar fenómenos “reales”, que es parte de los objetivos de nuestra investigación, incorporar un fenómeno real al discurso matemático escolar para la enseñanza del cálculo diferencial dirigido hacia la formación de un ingeniero civil.

Aunque también al utilizar fenómenos reales abre la posibilidad de manejar grandes cantidades de datos instrumentalmente ventajosas, pero para eso optamos por realizar la investigación utilizando una simulación para evitar que datos que no son relevantes nos desvíen de los objetivos esperados, y así nos permita desarrollar un pensamiento y lenguaje variacional.

> Nuestro interés especifico consiste en investigar las interacciones entre estudiantes y profesores con fenómenos modelables mediante relaciones lineales y no lineales, en un proceso de matematización en el aula, y como coadyuva a desarrollar nociones matemáticas ligadas a procesos cambio y variación, donde busquemos predecir estados futuros de un proceso de cambio con base en datos que provienen de la empiria y de la matematización del fenómeno en sí. Así, nuestra intención es investigar las prácticas donde se combina la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática y las construcciones al ser ejercidas dichas prácticas (Arrieta, 2003, p. 8).

Esta investigación tiene como referencia los trabajos del Dr. Carlos Imaz, que estaban enfocados en la construcción de objetos matemáticos continuos a partir de entidades discretas que tendrían como base el tratamiento hiperdiscreto de observables; lo que llevo a la idea de incorporar fenómenos, “problemas reales”, al discurso matemático escolar, o de plantear un modelo a partir de ciertos datos.

Como se mencionó anteriormente, la investigación de Arrieta se desarrolla desde una perspectiva socioepistemológica, aunque la socioepistemología aún se encontraba en el proceso de construcción, pero explica claramente que, a diferencia de las otras teorías, esta se conforma de cuatro dimensiones: la epistemológica, cognitiva, didáctica y social.

Esta investigación comienza situando al aprendizaje desde una actividad humana en un contexto social, en donde los actores ejercen prácticas usando y construyendo herramientas. Por este motivo continua la investigación explicando que se entiende por contexto social y su importancia en la construcción social del conocimiento ya que las prácticas que ejercen y las construcciones que hacen determinados grupos en un contexto social nos brindan una diversidad de posibilidades de construcciones ya que los actores toman conocimientos previamente construidos y lo resignifican para su uso.

Posteriormente se describen las prácticas de modelación como prácticas sociales de matematización en el aula, en donde argumentan cual es el sentido de considerar a la modelación en el diseño de secuencias didácticas ya que las prácticas que se eligieron se desarrollan en relación con fenómenos (físicos, químicos, sociales, etc.), realizando predicciones de ellos utilizando modelos. En nuestra investigación se pretende utilizar el fenómeno de vaciado de recipientes realizando predicciones sobre el comportamiento del modelo utilizando la simulación como herramienta para lo construcción del conocimiento, es por esto que este antecedente es de gran importancia.

Las secuencias didácticas realizadas se diseñan bajo esta perspectiva. Estos diseños no se centran en los contenidos matemáticos como tal, sino en la forma en que los participantes construyen el conocimiento y las prácticas que ejercen utilizando las herramientas que de alguna manera son posibles para su contexto social.

Los diseños de las secuencias didácticas fueron llamados: “Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil” y “Las matemáticas del movimiento”.

La idea principal de estas secuencias es que entre los estudiantes y el profesor construyan argumentos y herramientas relacionados a un fenómeno, tratando de evitar que las actividades se centren en los modelos algebraicos.

Los participantes de las secuencias referidas fueron dos profesores y diecisiete alumnos de un grupo de tercer semestre de la carrera de Ingeniería Bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco que se organizaron en tres equipos de cuatro estudiantes y un equipo de cinco. Dichos estudiantes cursan Ecuaciones Diferenciales en el momento de la puesta en escena.

De ante mano Arrieta incorporo un estudio acerca de la identidad de los participantes aplicando un cuestionario en donde se toman en consideración tres aspectos, su situación socioeconómica, su desarrollo escolar y sus concepciones acerca de las matemáticas y de su papel social, cabe mencionar que no se aborda de como esta identidad influye, pero plantea realizar investigaciones futuras en donde si lo exponga.

En total se pusieron en escena las didácticas en ocho sesiones que se diseñaron bajo las características mencionadas anteriormente y que se presentan en la siguiente tabla.

Sesión	Secuencia	Duración	Fecha (2002)
Primera	Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil	Dos horas y media	24 de septiembre
Segunda	Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil	Dos horas y media	25 de septiembre
Tercera	Las matemáticas del movimiento: movimiento uniforme	Dos horas y media	2 de octubre
Cuarta	Las matemáticas del movimiento: movimiento uniforme	Tres horas	3 de octubre
Quinta	Exploraciones	Tres horas	4 de octubre
Sexta	Las matemáticas del movimiento: movimiento uniforme disforme	Tres horas	7 de octubre
Séptima	Las matemáticas del movimiento: movimiento uniforme disforme	Tres horas	8 de octubre
Octava	Exploraciones	Tres horas	9 de octubre

Imagen 1. Tabla de las secuencias puestas en escena (Arrieta, 2003, p. 139)

Como conclusión nos presenta que en los fenómenos de aprendizaje el todo tiene características que las partes, por separado, no tienen y que la importancia no está en el análisis de las partes, sino en las relaciones que establecen las partes. Como un ejemplo claro de esto es la estrecha relación que existe entre los modelos lineales y cuadráticos pues se constituyen en mismo movimiento y no por separado y esto se evidencia con las secuencias aplicadas.

También hace énfasis en el estudio de las interacciones de los actores en el aula en la construcción de conocimientos de un individuo en un contexto social, es decir, que esto se logra desde los argumentos individuales hasta los grupales llegando a una conclusión y al mismo tiempo una significación del conocimiento.

> La interacción es lo característico del socio; es decir, el profesor no transmite el conocimiento al alumno, el alumno tampoco construye individualmente su conocimiento. El carácter discursivo de estas interacciones, construyendo, proponiendo y argumentando diferentes versiones (lo individual) y llegando a consenso (lo colectivo) es una distinción en esta investigación (Arrieta, 2003, p. 312).

Elementos del Cálculo

En la revisión bibliográfica nos encontramos con el libro Elementos del Cálculo (Salinas, y otros, 2002) en donde analiza procesos variacionales y se centra en el análisis de la Razón de Cambio utilizando actividades del fenómeno de llenado de recipientes cuando esta Razón de Cambio es constante y cuando no es constante utilizando tablas de datos y la graficación como herramienta para construir la noción de variación y desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional.

Este libro se creó como una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo que abarca desde el Cálculo de Varias Variables hasta las Ecuaciones Diferenciales. La razón de la creación de este libro fue el fracaso de las propuestas tradicionales de la enseñanza del Cálculo que están basadas en libros de texto de autores estadounidenses que llevan por lo menos 50 años dentro del discurso matemático escolar, sabiendo que las herramientas de hoy existen una diversidad extensa de herramientas que sirven para la enseñanza.

La revisión de este libro nos llevó a pensar en una forma innovadora para la enseñanza-aprendizaje utilizando fenómenos con características similares, pero en el caso de nuestra investigación utilizaremos el fenómeno de vaciado de recipientes, obviamente utilizando actividades distintas a este libro, pero también aportando la herramienta de la simulación.

Una característica importante de este libro es que los conceptos están en un orden creciente de tal manera que al inicio se tratan los temas más simples que se dirigen hasta los más complejos, a diferencia de los de texto tradicionales que tienen un orden en donde no consideran el nivel de complejidad de los conceptos, por lo tanto, los estudiantes no comprenden estos conceptos. Y surgen problemas como por ejemplo cuando los estudiantes saben “derivar e integrar” pero no saben cuándo puede resultar útil realizar tales procesos. Otro ejemplo son los diferenciales, que mientras en física es una noción muy importante, en los libros de texto de Cálculo se presenta un discurso confuso en donde las aplicaciones están muy distanciadas a la formación del estudiante.

Los autores de este libro proponen actividades en donde se presentan situaciones que serán discutidas que generen un ambiente propicio para la construcción del cálculo, como por ejemplo la predicción de la posición de un objeto que se mueve en línea recta con cierta velocidad; deducir la fórmula de la distancia recorrida por un objeto en caída libre; calcular la masa de una varilla conociendo su densidad; etc. Conforme el estudiante avance en el análisis de este libro, comprenderá de mejor forma la relación que tienen estas situaciones entre si respecto a las magnitudes, las gráficas y la deducción de las fórmulas.

La estructura del libro comienza analizando problemas cuando la razón de cambio es constante, en donde se abordan temas como el movimiento rectilíneo uniforme y como cambian las magnitudes respecto al tiempo, variable que vamos a encontrar en la mayoría de las actividades de este libro. En esta parte utiliza ejemplos con automóviles en movimiento y la tabulación de datos para identificar los cambios de posición con respecto al tiempo, es decir, cual es la razón de cambio.

Continúa analizando problemas cuando la razón de cambio no es constante, esta parte la divide en dos secciones, la primera cuando hace un análisis cuantitativo, es decir, cuando no importan las magnitudes sino su comportamiento en relación a la velocidad que crecen o decrecen; y la segunda cuando hace un análisis cuantitativo, es decir, cuando ya realiza un modelo cuadrático para representar el fenómeno. Es aquí en donde comienza a utilizar el fenómeno de llenado de recipientes en conos y a representarlos por gráficas en donde se muestra el comportamiento y las variaciones de velocidad según la geometría del repiente correspondiente.

Posteriormente realiza una conceptualización de las ideas fundamentales en donde define a la derivada como la razón instantánea de cambio y también conceptualiza a la antiderivada, es decir, a la integral como el cambio acumulado. Es en donde surgen cuatro conceptos claves del cálculo: la derivada, el diferencial, la antiderivada y la integral; y también la representación algebraica para una magnitud cuya razón de cambio corresponde con un polinomio. Es importante señalar que al desarrollar este proceso nos abrirá las puertas para tener acceso a las soluciones de problemas de optimización para obtener el valor máximo o mínimo de una magnitud. Estos temas se abordan utilizando problemas de caída libre en donde si influye una variable que antes no se había tratado, la gravedad; variable que de alguna manera también influye en el fenómeno de vaciado de recipientes y aún más cuando se trata de representarlo mediante su ecuación diferencial.

También expone que la razón de cambio se encuentra en diferentes contextos en donde están presentes las ideas de cambio y variación. Cabe mencionar que en este libro al utilizar la integral (antiderivada), se entiende como el proceso inverso de la derivada, y con todo esto llegar hasta el teorema fundamental del cálculo.

Finalmente concluye con la algoritmia en el cálculo de derivadas y antiderivadas en donde se muestran las reglas de derivación y se realiza el cálculo de derivadas en diversas situaciones, así como también se calculan integrales o antiderivadas. Los problemas finales son relacionados a la graficación de funciones y como lo mencione anteriormente, a la optimización de magnitudes.

Este libro fue muy importante para la elección del tema de tesis y también para mostrarnos como debe ser el proceso para desarrollar las nociones de variación para así lograr una construcción del conocimiento en las materias de Cálculo, además de utilizar fenómenos hidráulicos para explicar la relación entre variables, la forma en que cambian y la medición de este cambio; el análisis de como esta medida evoluciona así como también el reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen. La estructura de este libro ayuda a que el estudiante encuentre un significado de estos temas que son necesarios para el cálculo pero que también la algoritmia hace que esta importancia no se vea reflejada en el discurso matemático escolar.

Modelación-Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico

Continuando con la búsqueda de investigaciones que pudieran aportar a nuestro trabajo de investigación nos encontramos con la tesis de Suárez (2014) que posteriormente se hizo libro en la que al igual que las investigaciones mencionadas anteriormente, se plantea la construcción social del conocimiento del cálculo asociado a la variación y el cambio, haciendo que la modelación genere un conocimiento útil a través del uso de las gráficas.

Esta modelación está ha llamado fuertemente la atención dentro de la Matemática Educativa por la diversidad de concepciones que desarrolla ciertos conceptos conceptuales dentro de los que se encuentran: el lenguaje de herramientas y el lenguaje de los objetos (Suárez, 2014). Este desarrollo obliga a debatir entre la actividad matemática y la actividad humana como marco de referencia del conocimiento matemático. Esta investigación es relevante en el caso del fenómeno de vaciado de recipientes ya que se busca debatir entre una actividad del ingeniero civil y la actividad matemática que implica el análisis de este fenómeno, así como también la construcción de la noción de variación al desarrollar la ecuación diferencial que describe al fenómeno.

Según Suárez (2014) una característica importante de la modelación es que se pueden hacer ajustes para no desviarnos del resultado, es por esto que como ya se mencionó anteriormente para nuestra investigación se utiliza la simulación para no desviarnos del resultado que pretendemos obtener.

> Dentro de nuestra investigación se adopta a la modelación como una construcción teórica que un individuo realiza al enfrentar una tarea matemática en la que pone en juego sus conocimientos. Y como características propias de esta construcción, la modelación posee su propia estructura, está

> constituida por un sistema dinámico, la simulación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un resultado deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones. En pocas palabras, modelación es la selección del lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos (Suárez, 2014, p. 18)

Cabe destacar que en el discurso matemático escolar la modelación es considerada como una actividad que le da un sentido de aplicación a los conocimientos que se abordan en los cursos de matemáticas, sin embargo, aún existe un distanciamiento hacia la realidad. La investigación de Suárez hace énfasis en acercar la realidad a la matemática utilizando estrategias con ayuda de la tecnología para el estudio de las gráficas que se generan a partir de la modelación y así exista una resignificación de la variación asociada a los fenómenos de cambio.

Mediante estudios relacionados con el estudio de fenómenos de cambio y variación con una práctica de modelación; Suárez conforma una epistemología para la modelación escolar que se basa en las gráficas y que la llamo **socioepistemología de la Modelación–Graficación (M-G)**, y que brindara a los alumnos un marco de referencia para que comprendan la importancia de la variación en el cálculo a través de un uso de las gráficas diferente al que conoce por el discurso matemático escolar. Para esto se necesita la modelación gráfica del cambio y de la variación, como un caso especial toma la modelación del movimiento, ya que es más factible ver los elementos que nos interesan para la resignificación del conocimiento.

La hipótesis principal para el diseño de la situación didáctica es que **la variación se resignifica a través de la modelación – graficación** (Suárez, 2014), es decir que una situación en donde se estudian fenómenos de cambio a través de gráficas contribuye a establecer relaciones entre el la Razón de Cambio y las gráficas donde esta variación tiene un sentido específico en donde no es necesario hacer el análisis algebraico. Es por esto que en nuestra investigación proponemos una situación en donde se involucren fenómenos relacionados con la ingeniería civil ya que pretendemos que, al tratarse de un fenómeno hidráulico, el alumno se interese por analizar el cambio que existe en el movimiento del agua y establecer una relación con las gráficas.

La tecnología juega un papel muy importante en esta investigación, ya que como señala Suárez (2014) las computadoras, calculadoras y hoy en día los teléfonos celulares han pasado de ser herramientas de unos pocos a tener un uso masivo y se ha abaratado su costo. Este tipo de tecnología hace más práctica la modelación y simulación de ciertos fenómenos ya que el desarrollo de softwares especializados va a pasos agigantados.

> En términos educativos la simulación es una estrategia que permite imitar problemas complejos del mundo real para analizar el comportamiento de los sistemas, así como de su progreso. La modelación por computadora proporciona un contexto educativo que ha atraído la atención en años recientes. Los avances en tecnología y en el desarrollo de interfases que se manipulan directamente la han hecho accesible a estudiantes de un amplio rango de edades. Hace no mucho tiempo para poder modelar con computadora era necesario aprender lenguajes de programación lo que restringía el rango de alumnos que podían usarla (Suárez, 2014, p. 31).

Es importante distinguir la modelación y la simulación ya que cuando los estudiantes usan la simulación por computadora manipulan un modelo que ha sido creado para ciertos objetivos, ahora bien, cuando ellos modelan crean sus propias representaciones, lo que nos lleva a una resignificación del conocimiento. En la investigación de Suárez (2014) utiliza un software llamado MathCars en donde se manipula un vehículo en movimiento en una gráfica cartesiana, el usuario puede manipular la velocidad del vehículo y esta aparece en el tablero simulado. Los detalles de las situaciones diseñadas las comentaremos más adelante. Otra forma de generar representaciones es utilizando sensores, en donde es posible manipular la información para obtener representaciones gráficas, tabulares y algebraicas de las cantidades y su Razón de Cambio.

En trabajos anteriores realizados por Suárez expone que los estudiantes diferencian entre razones de cambio constantes y variables, y el desarrollo de estrategias para calcular la cantidad a partir de sus razones de cambio variables y para el cálculo del máximo valor de una función. Esto se logra mediante una actividad que consiste en una situación de movimiento en donde los estudiantes cuentan con calculadoras y sensores la intención es que los estudiantes transiten por un ciclo de exploraciones que van de la situación a la simulación y de nuevo a la situación (Suárez, 2014). En estas investigaciones se observó que las representaciones gráficas que realizan los alumnos interactúan con las representaciones que son proporcionadas por la tecnología utilizada.

Suárez explica el sentido del uso de las gráficas en esta investigación y los elementos que le dan soporte. Se distinguen dos grupos en los que se identifican las gráficas: las que son de interpretación y las que son de construcción. Tomando en cuenta esas acciones, analizan y encuentran ejemplos de cuatro tareas típicas: de predicción, de clasificación, de traducción y de escala (Suárez, 2014).

La intención de la realización de la investigación de Suárez es que el conocimiento que obtenga el alumno en la escuela le sea útil en la vida fuera de la escuela, en el caso de nuestra investigación pretendemos que el conocimiento que construya el alumno dentro del aula de clases le sea útil no solo para aprobar las materias que se relacionan con los conocimientos en cuestión, sino que también le sea útil en su vida profesional. Toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiera en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla (Suárez, 2014).

Es por esto que Suárez aborda la Modelación-Graficación desde una perspectiva socioepistemológica para la construcción de las ideas de cambio y variación, que son fundamentales para construir la noción de Razón de Cambio que es el objetivo de nuestra investigación. Es por esto que serán retomados algunos elementos importantes de ésta tesis doctoral.

En la primera etapa del diseño de la situación didáctica de Suárez se presenta una situación de movimiento en la que el profesor pide que los estudiantes realicen una gráfica que representa el movimiento. Con esto los estudiantes se verán en la necesidad de recurrir a sus conocimientos sobre gráficas para modelar la situación de movimiento.

En la siguiente etapa se organiza el grupo en equipos de tres o cuatro estudiantes para realizar un bosquejo de la gráfica del movimiento y se observan las decisiones que se toman en cada equipo. En una tercera etapa los equipos exponen sus gráficas a todo el grupo y explican cuál es la relación con la situación del movimiento, también es válido comentar y discutir las gráficas de otros equipos. En esta etapa los estudiantes, en equipo, simulan físicamente la situación de movimiento usando calculadoras y sensores para obtener las gráficas, se recomienda que los estudiantes realicen ajustes en la simulación para obtener las gráficas deseadas. Se espera que con los datos obtenidos con la tecnología realicen una confrontación con las gráficas hechas anteriormente.

En la última etapa el alumno será capaz, en base a los argumentos construidos, de predecir el comportamiento de las gráficas según las características del movimiento correspondiente.

Los participantes en esta situación didáctica fueron estudiantes de bachillerato que recibieron una invitación de sus profesores de matemáticas a participar de forma voluntaria en un taller extracurricular de modelación de cuatro sesiones con duración de tres horas cada una. Participaron estudiantes que cursan las materias de algebra, geometría analítica y cálculo integral en los semestres correspondientes de cada alumno. Se organizaron en equipos y con ayuda de un auxiliar para el manejo de las calculadoras y sensores, llegaron a una conclusión para presentarla a la clase completa. Con esto los alumnos identificaron los diferentes momentos de la situación didáctica como se presenta en la siguiente tabla.

Diseño de Situación de Modelación del Movimiento	Tareas asignadas a los estudiantes
Momento I. Establecimiento de la forma del nuevo funcionamiento de las gráficas en la modelación	El profesor les presenta una situación de variación y se les pide hacer un modelo gráfico a lápiz y papel
Momento II. Construcción de argumentos del uso de las gráficas en la modelación.	Los integrantes del equipo llegan a un acuerdo sobre la descripción gráfica y la exponen a la clase completa. Nuevamente en equipo, los estudiantes realizan la simulación de la situación y obtienen gráficas con el uso de las calculadoras y los sensores. Discuten y explican las diferencias entre su modelo gráfico y las gráficas obtenidas en la simulación
Momento III. Puesta en funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación	Los estudiantes usan los argumentos construidos para coordinar el comportamiento de las gráficas con las características del movimiento.

Imagen 2. Diseño de situación vs tareas (Suárez, 2014, p. 124)

A manera de conclusión Suárez establece que el uso de las gráficas que de alguna manera está determinado por un problema real, promueve el interés por el estudio del cambio, y por lo tanto existe una resignificación de la variación.

> Las gráficas de las funciones son herramientas para modelar el cambio intrínseco a las funciones de posición, velocidad y aceleración donde podrían intervenir conceptos como la razón de cambio, la relación de una función con su derivada, manejo simultaneo de dos o más ordenes de variación, máximos y mínimos o la acumulación de una función (Suárez, 2014, p. 165).

Esta investigación marca un avance en el estudio del Cálculo desde una perspectiva Socioepistemológica basado en prácticas sociales al considerar al binomio modelación–graficación como elemento necesario para la resignificación de la variación.

El hecho de hacer preguntas sobre el comportamiento de una gráfica propicia la creación de argumentos que establecen relaciones entre el fenómeno que observa (movimiento) y las características de la gráfica (creciente, decreciente, concavidad, etc.). Con un diseño tomando en cuenta estas consideraciones e incluyéndolo al discurso matemático escolar se puede establecer que el estudiante va dar un significado a la variación mediante el uso de las gráficas.

Cabe destacar que esta investigación ha contribuido a generar un marco de referencia que integra la modelación, con la graficación y el uso de la tecnología (Suárez, 2014), característica muy importante ya que el estudio de esta combinación es muy importante para nuestra investigación ya que se pretende incorporar la tecnología para construir ciertas nociones, pero en un contexto diferente pero no muy alejado a la investigación de Suárez ya que también se utilizaran situaciones de movimiento.

Razón de Cambio: Un estudio para analizar su construcción a través de las gráficas generadas por el modelo de llenado de recipientes

La investigación de Esqueda (2014), se centra en la construcción de un tema en específico, la Razón de Cambio, a través de las gráficas generadas por un modelo, este análisis se lleva a cabo con alumnos de primer semestre de Ingeniería Civil que cursan la materia de Cálculo Diferencial. A diferencia de las investigaciones anteriores en donde también abordan la construcción de la noción de variación, pero de una forma más general.

El problema principal que expone Esqueda (2014) es que el discurso matemático escolar que se utiliza en el aula se enfoca en su mayoría a procesos algorítmicos sin tomarle al concepto central la importancia que se debería, como por ejemplo la razón de cambio. En base a esto Esqueda plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo construyen la noción de Razón de Cambio los estudiantes de IC a través de la representación gráficas del modelo de llenado de recipientes?

Esqueda expone en su investigación que existe un problema en la enseñanza del Cálculo Diferencial en donde se enseña el concepto de derivada, idea que se concibe con la concepción de variación o cambio, y que en su mayoría se enfocan en la mecanización como por ejemplo calcular el valor numérico de la pendiente de la recta tangente, sin considerar que la recta tangente tiene una estrecha relación con el concepto de variación en una curva y que también toma un valor diferente en cada punto.

En investigaciones revisadas se encontró que algunos estudiantes son capaces de resolver ejercicios de derivadas aplicando las reglas de derivación, sin embargo, tienen problemas cuando se les pregunta el significado de la noción de Derivada, en cualquiera de sus formas posibles, así como también en analizar gráficas que representan modelos físicos donde está presente el concepto de Razón de Cambio.

También se encontró que, en la Ingeniería, la enseñanza de las matemáticas se inclina por la matemática como tal, sin considerar el conocimiento ingenieril, esto provoca que se ignoren los usos de las matemáticas y origina problemas en el aprendizaje de los estudiantes. En esta parte Esqueda mostro un avance en cuanto a la problematización del saber tomando en cuenta las características de los estudiantes proponiendo así incorporar temas relacionados con la ingeniería para la enseñanza del Cálculo Diferencial.

Es por esto que dentro de rediseño del discurso matemático escolar, Esqueda propone incorporar el modelo de llenado de recipientes con diferentes geometrías a través de su representación gráfica, fenómeno que se presenta en la formación del ingeniero, y con esto analizar la construcción de la noción de Razón de Cambio (constante o variable). Esto implica que los estudiantes se sientan familiarizados con los conceptos y de alguna manera entiendan que lo que están aprendiendo tiene una utilidad en problemas reales dentro de su profesión, así como también se sientan atraídos al análisis del Cálculo Diferencial desde una perspectiva ingenieril.

Revisando los planes o programas de estudio de la materia de Cálculo Diferencian de la licenciatura en Ingeniería Civil de la UNACH, Esqueda encontró que en estos se presenta la Razón de Cambio como una introducción a la Derivada, restando la importancia que debería darse a la construcción de las nociones de variación para el entendimiento del Cálculo Diferencial.

Ahora bien, para dar sustento a la pregunta de investigación y objetivos, Esqueda (2014) se basó en los siguientes supuestos:

- Los estudiantes no logran construir de forma correcta la noción de Razón de Cambio, lo cual contribuiría a facilitar la comprensión del Cálculo Diferencial.

- El diseño de una secuencia didáctica que involucre la representación gráfica del modelo de llenado de recipientes, podría favorecer la comprensión de la noción de Razón de Cambio en estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil.

- En los programas de Estudio de la materia de Cálculo Diferencial, la enseñanza del concepto de Razón de Cambio es poco abordado y por consiguiente el profesor se enfoca en la mecanización de reglas de derivación.

Contestando la pregunta de investigación se plantea el objetivo que es: Analizar e interpretar, a través de la representación gráfica del modelo de llenado de recipientes, la construcción de la noción de Razón de Cambio que poseen los estudiantes que cursan el primer semestre de la carrera de Ingeniería Civil de la UNACH (Esqueda, 2014).

En la revisión realizada por Esqueda (2014) se han encontrado algunos trabajos de investigación en donde se aborda la noción de Razón de Cambio a través de representaciones gráficas del modelo de llenado de recipientes, ejemplo de ello es el libro Elementos del Cálculo el cual describimos anteriormente, pero en la búsqueda de Esqueda encontró otros trabajos relacionados al tema, los cuales se enlistan a continuación.

- Conceptualización de la Razón de Cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión (Rendón, 2009).

- Interpretación de la noción de Derivada como Razón de Cambio instantánea en contextos matemáticos (Vidal, 2012).

- Una propuesta para la enseñanza de la Derivada como Razón de Cambio a estudiantes de grado undécimo (Cardona, 2012).

- Estudio de la Derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico–epistemológico (Vrancken & Adriana, 2013).

Por otro lado, la Teoría de Situaciones sirvió como marco teórico para la realización de la investigación de Esqueda, debido a su enfoque constructivista en el aprendizaje, en esta parte expone una breve reseña histórica donde nos explica que tuvo su origen en Francia y fue desarrollada por Brousseau, y que fue concebida para el campo particular de la Matemática Educativa, sin embargo, se busca que abarque otros dominios del conocimiento en los diferentes niveles educativos.

> Esta Teoría se adaptó mejor a nuestra investigación, por la forma en la que la producción de conocimientos es planteada, por medio de interacciones; en nuestro caso, el medio lo constituye la situación didáctica que aplicamos a través de las actividades relacionadas con la noción de Razón de Cambio en los estudiantes de primer semestre de Ingeniería Civil, los cuales desarrollaron el papel de sujeto; además, esta teoría fue concebida estructurándose en el concepto de noción que precisamente fungió como el objetivo de nuestra investigación: analizar la construcción de la noción de Razón de Cambio, la cual representa el conocimiento matemático que se pretende enseñar (Esqueda, 2014, p. 71).

Con base en esta Teoría se diseñó la secuencia didáctica apoyados en la metodología de la Ingeniería Didáctica, la cual se caracteriza por un esquema que considera, en la experimentación en clase, una forma de registro de datos y por las fases de validación. Al igual que en la Teoría de Situaciones Esqueda hace una breve reseña historia sobre la Ingeniería Didáctica en donde expone que esta metodología surgió a principios de los años ochentas y se nombró así debido a la comparación que se realiza con el trabajo de un ingeniero para realizar un proyecto.

Ahora bien, el término Ingeniería Didáctica se utiliza en Didáctica de las Matemáticas con un doble sentido: como Metodología de Investigación y como productor de Situaciones de Enseñanza y Aprendizaje; en el proyecto de Esqueda se utiliza a la Ingeniería Didáctica como metodología y la Teoría de Situaciones proveerá el marco teórico para las realizaciones didácticas (Esqueda, 2014). La Ingeniería Didáctica se compone de cuatro fases, estas son: análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación.

Esta metodología es la base para el diseño de la situación didáctica, comenzando por la planeación, donde se realizan los análisis preliminares y se centra en tres dimensiones fundamentales: la didáctica (funcionamiento del sistema de enseñanza, libros de texto, análisis del plan y programas de estudio de la licenciatura en Ingeniería Civil), la cognitiva (asociada a las características cognitivas de los estudiantes) y la histórica–epistemológica (asociada a la construcción del saber en juego: Razón de cambio).

Continuando con la metodología esta la fase de diseño en done se estructura el análisis a priori cuyo propósito es determinar un conjunto de hipótesis que consideren las variables que puedan surgir en la situación y también las restricciones para que los estudiantes no se desvíen del objetivo. En el caso de la investigación de Esqueda se estructuraron dos actividades con sus respectivos ejercicios, todos basados en el modelo de llenado de recipientes con diferentes geometrías, los cuales se retomaron del libro Elementos del Cálculo de (Salinas, y otros, 2002) mencionado anteriormente.

En la primera actividad Esqueda (2014) les presenta a los estudiantes tres recipientes con geometrías diferentes (cilindro, cono, cono truncado invertido) con sus respectivas alturas, radios y gastos. Esto con el objetivo de que los estudiantes comiencen a argumentar acerca de la Razón de Cambio, de tal suerte que ellos identifiquen de forma cuantitativa cuales son constantes y cuales son variables, y además si estas son crecientes o decrecientes. En una primera etapa se les realiza un cuestionario sobre cómo cambia una variable con respecto a otro. En la segunda etapa se presenta una tabla con ciertos valores en donde se tiene que predecir la diferencia de alturas con respecto al tiempo de llenado. Y en una última etapa se presentan las gráficas que representan el comportamiento llenado con la finalidad de que en base a todo el análisis puedan elegir la gráfica correcta.

En la segunda actividad únicamente se presentan dos recipientes con diferentes geometrías, pero ahora con geometrías diferentes a las de la actividad anterior (esfera y una especia de esfera invertida) con sus respectivas alturas y gastos, pero ahora con el objetivo de sólo bosquejar las gráficas que representan el modelo de llenado de estos recipientes respecto al tiempo. En esta ocasión no se les proporcionan las gráficas, los estudiantes tienen que realizarlas.

Siguiendo la metodología Esqueda continua con la fase de experimentación que se compone de tres aspectos: la puesta en escena de la situación, las características de los estudiantes y la dinámica seguida para realizar la situación. La secuencia aplicada tuvo una duración de dos horas en donde se recopilo evidencia escrita y algunas fotografías, dicha secuencia se aplicó a un total de 34 estudiantes que contestaron la secuencia en parejas, los cuales ya habían cursado Cálculo Diferencial en preparatoria y también en la licenciatura (en ese momento estaban terminando el curso).

La última fase de esta metodología es la de validación que consiste en la confrontación de las hipótesis realizadas en el análisis a priori, con el análisis a posteriori que son los resultados obtenidos en la experimentación. En esta fase

Esqueda organiza los datos en tablas para facilitar su visualización y expone sus análisis correspondientes y agrega los datos que surgieron en la fase de experimentación de cada ejercicio y actividad propuesta en el diseño de la situación didáctica.

A manera de conclusión partiendo de la problemática, Esqueda (2014) nos explica que, a través de la representación gráfica del modelo de llenado de recipientes, se ha encontrado que manera los estudiantes de ingeniería construyen la noción de Razón de Cambio. En la bibliografía revisada se encontró que no hay trabajos realizados que estén basados en la noción de Razón de Cambio a través de un modelo físico en particular (en este caso el modelo de llenado de recipientes), sino que se basan en cada uno de estos elementos, pero de manera separada, sin embargo, sirvieron en los fundamentos de la investigación.

Dentro de la fase de validación en la confrontación se obtuvo lo siguiente:

- En los ejercicios de la primera actividad, al pedir a los estudiantes que identificaran la Razón de cambio constante al llenar un recipiente cilíndrico, la mayoría de ellos no presentaron dificultades, ya que se basaron en observaciones referentes a que el nivel de agua aumentaba la misma cantidad en un tiempo determinado por la forma del recipiente y también porque el gasto es constante. Al cambiar la forma del recipiente a un cono, muchos de ellos concluyeron que no importaba la forma del recipiente, siempre y cuando el gasto de llenado de la llave fuera constante la Razón de Cambio también lo seria. De la misma forma con el cono truncado, los estudiantes concluyeron que no influía la forma del recipiente en el cambio de la altura del líquido con respecto al tiempo.

- En la segunda actividad se vieron en la necesidad de utilizar las conclusiones de las actividades anteriores, haciendo algunas combinaciones tratando de llegar al bosquejo correcto de las gráficas, algunos de ellos intentaron bosquejar las gráficas de una forma numérica, debido a que están familiarizados con los procesos algorítmicos en sus cursos de cálculo (Esqueda, 2014).

Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional

La investigación doctoral de Caballero (2018) surge de la problemática que existe en el aprendizaje del Cálculo en los estuantes y en ocasiones también en los profesores, tomando en cuenta que el Cálculo infinitesimal es una rama de las Matemáticas presente en la educación media y que estudia de alguna manera el cambio relativo de variables, característica que le permite incursionar en otras ramas, así como la Física, Biología, diversas ingenierías, entre otros. Dentro de los planes y programas de estudio, el Cálculo infinitesimal es tratado en las materias asociadas el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, asignaturas que se presentan a la mitad o al final del bachillerato y al inicio de la licenciatura.

La intención de la investigación es dotar de un carácter dinámico al Cálculo, aspecto que ha sido estudiado en otros trabajos, y que pueda desarrollarse mediante el estudio de la naturaleza variacional de los fenómenos, aspecto que no siempre se le da la debida importancia en el discurso matemático escolar, lo cual provoca que los estudiantes no comprendan completamente algunos conceptos del Cálculo.

> Lo anterior deja ver que la problemática acerca del aprendizaje del Cálculo es abordado desde diferentes posturas, pero encontramos que una idea central es la de desarrollar una comprensión dinámica del Cálculo desde una perspectiva variacional, es decir, a partir del estudio y el análisis de cómo cambian las variables. El desarrollo de una perspectiva variacional del Cálculo es un punto de partida para la construcción de significados de objetos matemáticos como derivada y pendiente, por lo que comprender como los estudiantes se apropian de la noción de variación es un aspecto necesario en el aprendizaje del Cálculo (Caballero, 2018, p. 15).

En particular para los objetivos de nuestra investigación, Caballero aclaro varias ideas respecto al desarrollo de una perspectiva variacional del Cálculo y la importancia que tiene para desarrollar las nociones de variación y cambio y el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), que de alguna manera son aspectos generales que contienen la noción de Razón de Cambio que es el saber matemático en cuestión en nuestra investigación.

Ahora bien, se podría entender que cambio y variación son sinónimos, afirmación que no es correcta. Se entiende por cambio a toda modificación que tiene el valor de una variable como por ejemplo el cambio de posición de un objeto respecto a un punto de referencia, la diferencia de temperatura que experimenta un café que esta al aire libre, etc., estos cambios son percibidos por los sentidos. Mientras que la variación se encuentra de manera implícita en los fenómenos, por lo tanto no son percibidos de manera directa por los sentidos, como por ejemplo cuando un vehículo cambia su posición que está en movimiento no podemos percibir su velocidad, sin embargo podemos hacer referencia comparándolo con otro vehículo (es más rápido o más lento que el otro), o con el movimiento mismo (avanza más rápido o más lento que antes), incluso se puede estimar un valor numérico de su velocidad pero no se observa directamente.

> De modo que, aunque el cambio y variación son nociones que están relacionadas, no significan lo mismo. El cambio alude a una cualidad que experimenta una transformación, en tanto que la variación consiste en una abstracción de las propiedades y características del cambio que se percibe (Caballero, 2018, p. 16).

Aunque también dentro del término variación se incluye el de covariación, debido a que las cantidades no cambian de manera independiente, se requiere de otra cantidad para determinar que la primera ha cambiado, es decir, la variación involucra al menos dos variables.

Según Cantoral (2016), para entender, comprender y construir la noción de variación no basta observar el cambio ni ser consiente de él. Es por esta razón que Caballero considera que tipos de escenarios favorece su construcción, de qué manera las personas perciben esta noción en diferentes fenómenos y como la representan.

Para analizar la problemática acerca de la construcción de la variación, el trabajo de Caballero (2018) se apoya en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, pero en esta ocasión específicamente en la línea de investigación Pensamiento y el Lenguaje Variacional (PyLV). El cual consiste en el estudio de las formas en como las personas reconocen el cambio y la variación en un fenómeno, como usan estas nociones para resolver situaciones problemáticas, como comunican el cambio y la variación, así como la manera en cómo estas nociones intervienen y contribuyen en la construcción social del conocimiento (Caballero, 2018). Es decir, consiste en el estudio de las formas de pensar y argumentar matemáticamente el cambio y la variación en situaciones en la que sea necesario utilizar la predicción.

Anteriormente, Caballero (2012) realizo una investigación de maestría en la que experimenta con actividades de variación en profesores, en donde reporta que una parte del profesorado que participo no recurre en sus respuestas al análisis variacional, sino a lo que están acostumbrados en el discurso matemático escolar, teoremas, fórmulas para construir sus respuestas. Este trabajo de Caballero (2018) estudia estas dificultades apoyado en su investigación anterior.

> Reconocemos una problemática ubicada en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática del cambio que consiste en que, aunque profesores y alumnos traten con una situación que involucra de manera explícita el estudio del cambio, y que ellos reconozcan el cambio, esto no es condición suficiente para que la variación sea construida en esas situaciones (Caballero, 2018, p. 21)

Es por esto que se requiere del desarrollo de prácticas para generar un aprendizaje del Cálculo, pero también la falta de construcción de la noción de variación influye para que estas prácticas no se desarrollen.

Las preguntas de investigación planteadas por Caballero (2018) son las siguientes:

- ¿Cuáles son las condiciones necesarias para favorecer la construcción de la noción de variación en el pensamiento humano?

- ¿Qué elementos sociales, cognitivos o epistemológicos permiten evidenciar que la noción de variación ha sido construida por un individuo?

Una característica importante es que la noción de variación en esta investigación tiene una estrecha relación a fenómenos de cambio con fines predictivos, esta característica permitió establecer una hipótesis de investigación acerca de la construcción de la variación, la cual consiste en el desarrollo de dos nociones propias de la psicogenética: la causalidad y la temporización. La articulación de una causalidad y una temporización en escenarios predictivos conforman un emergente que denominamos *sistema de referencia variacional*, el cual permite explicar como la variación es construida (Caballero, 2018).

Para el desarrollo de la investigación y el análisis de la hipótesis, Caballero considero los siguientes objetivos:

- Proponer una caracterización socioepistemológica de la noción de variación, que permita identificar y explicar aspectos claves de su constitución.

- Caracterizar el sistema de referencia variacional con base a una revisión de investigaciones asociadas al estudio del cambio y la variación, así como de trabajos relativos a la causalidad y temporización.

- Diseñar e implementar situaciones de predicción con el fin de evidenciar la variación que es construida por estudiantes de bachillerato, y con ello analizar nuestra hipótesis de investigación.

Como ya se mencionó anteriormente, al realizar la investigación Caballero (2018) tomó como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, cuyo objetivo es explorar formas del pensamiento matemático fuera y dentro de la escuela, así como modelar las dinámicas de la construcción social del conocimiento matemático a través del conjunto de prácticas que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2016), normadas a su vez por prácticas sociales.

> Es claro que la noción de práctica se encuentra ligada a las bases de la actividad humana, pero cabe aclarar que no toda actividad humana es una práctica, sino aquellas realizadas de manera consiente e intencional, no los actos instintivos o inconscientes. En ese sentido, el desarrollo de prácticas es normado por prácticas sociales las cuales se entienden no como la acción efectuada (por ejemplo, medir) sino la orientación estratégica de la práctica (por qué medimos y por qué lo hacemos de esa manera); entendemos a la práctica social como aquello que regula las actividades en la construcción social del conocimiento matemático (Caballero, 2018, p. 33).

Como parte de la metodología se apoyaron en el *esquema metodológico para la investigación socioepistemológica* (Montiel & Buendía, 2012), misma que utilizaremos para la investigación debido a las características que van de acuerdo a dicha investigación y que explicaremos a detalle más adelante.

Esta metodología señala los diversos momentos a través de los cuales se desarrolla una investigación desde la Socioepistemología, así como las acciones que los relacionan. El esquema consta de cuatro momentos que están encerrados en óvalos y cuatro acciones relacionantes indicadas por flechas. Cabe mencionar que en una investigación no es necesario abarcar todos los momentos y acciones, dependiendo de los objetivos que se deseen alcanzar se puede hacer una adecuación combinando algunos de los momentos con las acciones. Este esquema se describe más adelante ya que también se adecua perfectamente para los objetivos de nuestra investigación.

En el caso de esta investigación Caballero considero los momentos problemática/fenómeno didáctico, epistemología de prácticas, situación problema, y las acciones estudio socio epistemológico, desarrollo intencional de prácticas y consideraciones del escenario y las condiciones institucionales.

En particular *la problemática* de esta investigación, es decir, el primer momento del esquema, esa asociada a la caracterización de la variación, de la forma en que se construye y opera con fines predictivos, en concreto, que permita explicar su construcción mediante componentes específicos (Caballero, 2018). La acción relacionante es el *estudio socioepistemológico* que es una revisión y análisis a los conceptos de causalidad y el tiempo desde una perspectiva psico genética, a parir de los cuales se estableció una hipótesis que se comentaba anteriormente.

Continuando con la metodología se encuentra el momento *epistemología de prácticas* en donde propone una relación entre los sistemas de referencia variacionales con elementos del marco teórico, con su acción relacionante el *desarrollo intencional de prácticas*, que en esta investigación está dirigida al desarrollo de la *situación-problema* (siguiente momento en el esquema), en donde la variación debe ser un elemento importante para su resolución. Y la última acción relacionante son las consideraciones del escenario y las condiciones institucionales en donde se centraron en tipificar, a partir de las respuestas a las actividades, como la variación es construida, las características que presenta y como esta construcción se relaciona con el sistema de referencia variacional.

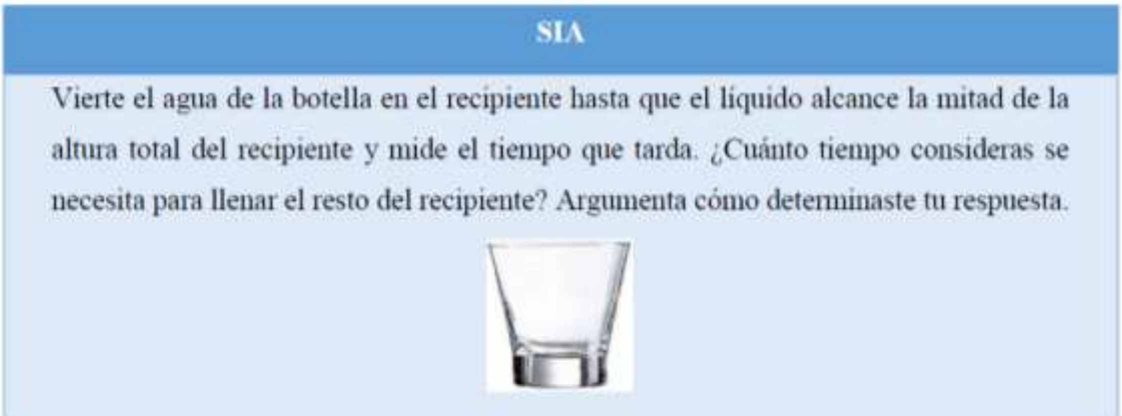
Por otro lado, la investigación se realizó con estudiantes de bachillerato pertenecientes al tercer semestre del Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios No. 50 (CETIS 50), quienes en ese momento habían realizado un curso de matemáticas enfocado al estudio de funciones con una introducción al Cálculo Diferencial, este CETIS se localiza en la delegación Iztapalapa de la Ciudad de México, una zona conocida por sus altos índices delictivos.

Para analizar la hipótesis de investigación Caballero diseño un cuestionario con el objetivo de identificar si la noción de variación se muestra en las respuestas formuladas por los estudiantes enfrentándose a situaciones de predicción. Este cuestionario consta de cinco actividades en dos escenarios diferentes, uno donde el tiempo se muestra de manera explícita y otro donde se muestra de manera implícita. La razón de esta diferenciación se fundamenta en que asumimos a la noción de variación como el estudio de la evolución del cambio en un fenómeno, donde el cambio es entendido como una modificación de estados y el tiempo la duración de esa modificación. Por tanto, asumimos que el tiempo siempre está presente en los fenómenos de cambio, ya sea de manera explícita o implícita, siendo nuestra intención analizar como las personas actúan en estos dos escenarios (Caballero, 2018).

Con el tiempo como variable explicita seleccionaron situaciones de llenado de recipientes con un gasto constante, donde se estudia la relación tiempo–altura. Estas actividades diseñadas consisten en preguntas sobre la predicción de estados futuros y la construcción de gráficas que correspondan al fenómeno.

Para el caso donde el tiempo se encuentra de forma implícita, se propone una situación de movimiento donde se trata con la relación distancia–velocidad. Para cada uno de los escenarios se consideraron dos situaciones de cambio diferentes, uno de experimentación física y otro de análisis hipotético. Todo esto se llevó a cabo en dos sesiones de una hora treinta minutos cada una.

En la primera sesión se tenían que resolver las actividades de experimentación física, para lo cual se repartió a cada grupo el material necesario y se conformaron equipos de 5 o 6 estudiantes. En la segunda sesión se implementaron las actividades experimentación hipotética la cual fue realizada de manera individual mediante hojas de trabajo entregadas a cada estudiante. A continuación, se presentan las actividades diseñadas por Caballero (2018).


S1A

Vierte el agua de la botella en el recipiente hasta que el líquido alcance la mitad de la altura total del recipiente y mide el tiempo que tarda. ¿Cuánto tiempo consideras se necesita para llenar el resto del recipiente? Argumenta cómo determinaste tu respuesta.

Imagen 3. Situación S1A: Experimentación física del llenado de un recipiente (Caballero, 2018, p. 103).

S2A

Un recipiente vacio de forma cilindrica es llenado mediante una llave que deja salir agua a flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanzó el cuerpo del agua al transcurrir 1.5 segundos. ¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justifica tu respuesta

Imagen 4. Situación S2A: Predicción del tiempo de llenado de un recipiente cilíndrico (Caballero, 2018, p. 104).

S2B

Un recipiente es llenado a flujo constante y genera la siguiente gráfica de la altura del cuerpo del líquido respecto al tiempo. Bosqueja el recipiente que podría generar dicha gráfica.

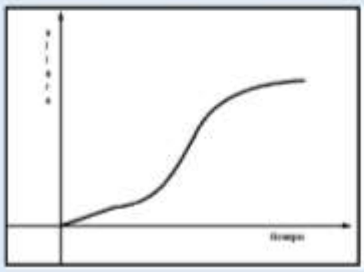


Imagen 5.Situación S2B: Bosquejo de la forma de un recipiente (Caballero, 2018, p. 105).

S2C

Bosqueja la gráfica de la altura del cuerpo de un liquido respecto al tiempo para los siguientes recipientes que son llenados a flujo constante y tienen la misma altura, pero diferente volumen. Dibuja ambas gráficas en el plano cartesiano que se te proporciona y explica ampliamente cómo las construiste.

Recipiente A Recipiente B

Imagen 6. Situación S2C: Bosquejo de la gráfica de llenado de dos recipientes *(Caballero, 2018, p. 105)*.

S2D

Un piloto de fórmula 1 registra en la siguiente tabla las velocidades durante su segunda vuelta en una pista cerrada. Realiza un bosquejo de la pista de carreras que recorre el piloto, considerando que la distancia recorrida se mide a partir de la línea salida.

Distancia recorrida m	Rapidez km/h	Distancia recorrida m	Rapidez km/h
50	320	800	241
100	318	850	263
150	314	900	284
200	303	950	305
250	290	1000	308
300	299	1050	311
350	312	1100	309
400	317	1150	286
450	319	1200	273
500	318	1250	272
550	309	1300	282
600	288	1350	309
650	267	1400	314
700	245	1450	318
750	230	1500	319

Imagen 7. Situación S2D: Bosquejo de una pista de carreras (Caballero, 2018, p. 106).

Cabe mencionar que la situación S1A (primera sesión) es la única actividad de experimentación mientras que las restantes (S2A, S2B, S2C y S2D) son de experimentación hipotética (segunda sesión). Obteniendo los resultados se utilizó la siguiente tabla para organizar los datos recopilados.

Categorías de análisis	Indicadores	Descripción	
Desarrollo de prácticas	Acción		
	Actividad		
	Práctica socialmente compartida		
Noción de variación	Órdenes de variación		
	Carácter estable del cambio		
Sistema de referencia	Relación de variables	Variables	
		Relación	
	Temporización		
	Elemento de referencia		
	Unidad de medida		

Imagen 8. Instrumento para el análisis de datos (Caballero, 2018, p. 108).

A manera de conclusión, Caballero reconoce que proveer de situaciones específicas que involucren de manera explícita el estudio del cambio, desarrollar habilidades necesarias para operar con los conceptos del Cálculo e incluso, percibir el cambio en una situación específica, no son condiciones suficientes para que la variación sea construida.

A partir de los resultados obtenidos, llegaron a las siguientes conclusiones que se organizaron en los siguientes puntos, de los cuales mencionó los más importantes.

- Sin un sistema de referencia variacional, la variación no es construida en situaciones de cambio con fines predictivos.

- Sin el establecimiento de una temporización para explicar la evolución de las variables, el cambio no es cuantificado y la variación no se construye.

- Es a través del sistema de referencia variacional que se reconoce y organiza el cambio dentro de un esquema lógico, a partir del cual se construye la variación para ser operada mediante prácticas variacionales.

- La construcción de una temporización conformada por estados intermedios muy cercanos entre si es una condición para que la variación sucesiva se construya.

- Se requiere un rediseño del Discurso Matemático Escolar que propicie un escenario para que el estudiante reconozca las variables que se pretenden trabajar y relacione a estas de la forma en cómo se espera y de acuerdo con los objetivos que se busquen.

1.4.1. Modelación y simulación

Después de realizar un análisis de las diferentes investigaciones que se han realizado entorno al uso del binomio modelación–graficación para la construcción de la noción de variación, así como también la construcción de la noción de Razón de Cambio como tal, en este apartado exponemos de manera general el uso de la tecnología en relación a la modelación y la simulación, dado que en nuestra investigación se pretende utilizarla como herramienta.

La modelación como objeto de estudio en la Matemática Educativa

En la actualidad las calculadoras, computadoras y los procesadores matemáticos (algebraicos, geométricos, numéricos y gráficos) tienen un uso masivo ya que su desarrollo ha perfeccionado su técnica y abaratado su costo, aunque anteriormente eran herramientas que solo estaban al alcance de unos cuantos.

En particular existe un problema debido al avance acelerado de la tecnología relativa a la educación, ya que los profesores actuales no aprendieron matemáticas con el uso de la tecnología, y hoy en día se debe enseñar de esta forma. Es por esto que se ha incrementado el interés por construir modelos matemáticos en otras áreas del conocimiento, particularmente en educación ya que las matemáticas también se relacionan con otras ciencias.

> El desarrollo de modelos se ha visto reflejado en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de forma diferente. Existen grupos de investigación (por ejemplo, la Comunidad Internacional de profesores de modelación matemática y aplicaciones, ICTMA, por sus siglas en inglés: *The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*), que han centrado su interés en avanzar hacia este desarrollo en el campo de la educación matemática. Para la ampliación del rango de cobertura hasta los niveles de educación básica y media, el énfasis de la modelación se ha desplazado hacia la interacción dinámica entre el mundo real y las matemáticas, es decir al proceso de traducir una situación real a un modelo matemático y viceversa (Blum et al, 1989, citado por Suárez, 2014, p. 31).

Es así como la modelación ya forma parte en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, ya que se ha desarrollado material didáctico y libros e incluso se ha incluido el concepto de modelación matemática en algunos programas de estudio. Según Suárez (2014) las matemáticas que se construye con actividades basadas en la modelación, cobran un nuevo sentido y el interés es caracterizarlo en lo que respecta a las ideas principales del Cálculo.

La simulación como modelación con tecnología

La simulación es una estrategia que permite imitar problemas complejos del mundo real para analizar el comportamiento de los sistemas, así como de su progreso (Suárez, 2014). El avance tecnológico y los softwares especializados cada vez están más accesibles para los estudiantes de distintos niveles educativos, cuando hace algunos años era más difícil modelar con computadora ya que era necesario aprender lenguajes de programación, ahora ya existe tutoriales de como operar con programas en los que se puede simular fenómenos del mundo real.

> Es importante en este momento hacer una distinción entre la modelación y el uso de simulaciones por computadora. Cuando los alumnos usan una simulación de computadora pueden manipular un modelo que ya ha sido creado; cuando ellos modelan, crean sus propias representaciones y aprenden algo sobre su naturaleza. Los términos “exploratorio” y “expresivo” han sido usados para describir los dos modos en que se usan

> los ambientes de aprendizaje por computadora (Mellar, Bliss, Boohan, Ogborn, & Tompsett, 1994). En la práctica, una tarea puede involucrar uno u otro modelo. Al usar una simulación por computadora en la cual el modelo subyacente es inaccesible por simple inspección se trata de un modelo puramente "exploratorio". Un alumno que comienza con una hoja de cálculo en blanco y crea un modelo "comenzando de cero" es un ejemplo de un modelo puramente "expresivo", es decir, una tarea en la cual un modelo es usado desde el inicio como una simulación, y más tarde el modelo es examinado, evaluado y modificado (Suárez, 2014).

Para fines de nuestra investigación, las simulaciones serán realizaciones en las que se pretende actuar sobre un fenómeno real, particularmente el vaciado de recipientes, sabiendo que se está trabajando con un modelo con condiciones y características particulares en donde se establece la relación entre la situación original y la simulación.

Capítulo 2. Marco teórico

2.1. Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

Para la realización de nuestra investigación nos apoyamos en la Teoría Socioepistemológica, ya que por la naturaleza del fenómeno que servirá de herramienta para la construcción de la noción de Razón de Cambio, es necesario considerar la predicción que según Cantoral (2016) es una noción propia de las ciencias físicas e ingeniería, pero en el contexto de nuestra investigación, la predicción en la problemática teórica tiene que considerarse como práctica social. Una investigación de corte socioepistemológica identifica como prácticas el medir, predecir, modelar y convenir, además la predicción aparece como una respuesta ante la incapacidad humana de controlar el tiempo a voluntad (Cantoral, 2016), variable indispensable para el análisis de fenómenos de vaciado de recipientes.

Utilizaremos la Teoría Socioepistemológica ya que su objetivo es explorar formas del pensamiento matemático fuera y dentro de la escuela (Caballero, 2018), y uno de los propósitos de esta investigación es que también el alumno encuentre cierta utilidad de lo que se enseña en la escuela, específicamente en la Ingeniería Civil que es para lo que se está formando académicamente. Este objetivo se consigue modelando las dinámicas de la construcción social del conocimiento matemático a través del conjunto de prácticas sociales que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2016), normadas a su vez por prácticas sociales.

> Es claro que la noción de práctica se encuentra ligada a las bases de la actividad humana, pero cabe aclarar que no toda actividad humana es una práctica, sino aquellas realizadas de manera consiente e intencional, no los actos instintivos o inconscientes. En ese sentido, el desarrollo de prácticas es normado por *prácticas sociales*, las cuales se entienden no como la acción efectuada (por ejemplo, medir) sino la orientación estratégica de la práctica (por qué medimos y por qué lo hacemos de esa manera); entendemos a la *práctica social* como aquello que regula las actividades en la construcción social del conocimiento matemático (Caballero, 2018, p. 33).

Desde esta perspectiva podemos decir que la Socioepistemología centra la atención no solo en los objetos matemáticos, sino principalmente en las prácticas que los acompañan y dan origen. Es por esto que la Socioepistemología considera que la apropiación del objeto matemático (por ejemplo, la noción de limite, derivada, función) no es posible sin el acompañamiento del proceso objetivable (Caballero, 2018).

> Por tanto, el saber matemático tiene un tratamiento particular: Se le construye, reconstruye, significa y resignifica, se le ubica en el tiempo y el espacio, se le explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien usa (Cantoral, 2016), en concreto, se problematiza (Caballero, 2018, p. 33).

Dado que la teoría Socioepistemológica surgió enfocándose en la enseñanza de nociones y procesos variacionales, se entiende que existe una estrecha relación con la noción de Razón de Cambio. Con esta mirada nuestra investigación propone la construcción de dicha noción con las ideas de cambio y variación haciendo uso de la simulación por computadora (geometría dinámica) del fenómeno de vaciado de recipientes, en el cual estamos abordando aspectos importantes para la Socioepistemología como lo son la modelación y la graficación.

Cabe mencionar que "la Socioepistemología tiene un aporte fundamental: modela la construcción social del conocimiento matemático conjuntamente con su difusión institucional, esto es, modelizar las dinámicas del saber o conocimiento puesto en uso (Cantoral, 2016)."

Se consideró específicamente el fenómeno de vaciado de recipientes para la construcción de la noción de Razón de Cambio, buscando de alguna manera problematizar el saber desde una perspectiva ingenieril incorporando aspectos fundamentales para la formación profesional del ingeniero tomando en cuenta que el alumno pueda obtener en el curso de Cálculo Diferencial un aprendizaje significativo, que con el discurso "dominante" eventualmente no se logra en un semestre escolar.

> Actualmente la Socioepistemología, en tanto teoría, postula que, para atender la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento al nivel cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos, deberá problematizar al saber en el más amplio sentido del término, situándole en el entorno de la vida del aprendiz (individual o colectivo) lo que exige del rediseño compartido, orientado y estructurando, al discurso Matemático Escolar (Cantoral, 2016, p. 51).

El desarrollo de las prácticas se realiza considerando la forma en cómo se relacionan entre si las dimensiones del saber (didáctica, epistemológica, cognitiva, y social), en donde según Cantoral (2016), la dimensión didáctica es relativa a los procesos de enseñanza e institucionalización del conocimiento matemático, propios del ámbito escolar y fuera de él, incluyendo la vida cotidiana y el ámbito de lo profesional.

La dimensión epistemológica se ocupa fundamentalmente de los análisis sobre problematización del saber a través del análisis de las circunstancias que hicieron posible su construcción del conocimiento matemático y las formas en que este puede ser conocido. La dimensión cognitiva del saber analiza las formas de apropiación y significación que experimentan quienes se encuentran en situación de construcción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento situado en su acción de significar y resignificar. La dimensión social y cultural del saber está centrada en los roles que juegan los actores y el papel que tiene el saber en la construcción de consensos, la elaboración y adaptación de instrumentos mediadores y los usos del saber en situaciones específicas.

Por otro lado, Cantoral (2016) establece que la Socioepistemología descansa en cuatro principios, que no necesitan tener una secuenciación lineal, sin embargo, se debe formar una red nodal. Estos principios se describen a continuación.

a) Principio normativo de la práctica social

Es el eslabón fundamental para el funcionamiento de la teoría, en donde se asume que las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen, por así decirlo, en las generadoras del conocimiento. En tanto su función identitaria (produce identidades mediante la auto confirmación del rol del individuo o grupo en el mundo), su función reflexiva-discursiva (la construcción de argumentos sobre las prácticas efectuadas) y su función pragmática (orienta y organiza la actividad humana hasta alcanzar la expertez) (Caballero, 2018).

b) Principio de la racionalidad contextualizada

Hace énfasis en que la relación del sujeto al saber es una función del contexto, es decir, enuncia que la racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado, de modo que la construcción del conocimiento es un producto sociocultural (Caballero, 2018).

c) Principio del relativismo epistemológico

Es el concepto que sostiene que los puntos de vista no tienen verdad ni validez universal, sino que, en todo caso, solo poseen una validez subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia, sin embargo es importante mencionar que no se está diciendo que existan en todo momento diversidad de opiniones ante los mismos hechos, esto es un hecho conocido, se dice algo más: que el valor de la verdad para el relativismo asume que dichas opiniones son verdaderas para esas personas, no hay una verdad única.

d) Principio de la resignificación progresiva

Establece que los significados son puestos en funcionamiento en situaciones nuevas y, bajo el mismo esquema constructivo, se resignifica, produciendo conocimientos. Este saber es el punto de partida para una nueva etapa de significación, donde se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber (Caballero, 2018).

La metodología que sirve de guía para la realización de esta investigación es el Esquema Metodológico para la investigación Socioepistemológica de Montiel y Buendía (2012), del cual hablaremos más adelante y que también contiene como una acción relacionante: *El desarrollo intencional de prácticas,* que se articula mediante el esquema de anidación progresiva, en donde según Cantoral (2016) se establece una jerarquía en cuanto a las prácticas que componen la construcción social del conocimiento matemático mediante la problematización del saber matemático transversal a ellas.

Imagen 9. Esquema de la anidación de prácticas (Cantoral, 2016, p. 338).

Este esquema nos explica el proceso de construcción social del conocimiento matemático, y puede se puede interpretar de dos formas. Cuando revisamos la estructura de “abajo hacia arriba”, la construcción social del conocimiento comienza por la acción del sujeto sobre el medio. Y de “arriba hacia abajo” la construcción social del conocimiento comienza por la norma que regula el quehacer de los individuos en colectividad, Cantoral (2016) expresa estas ideas de la siguiente manera.

> Se pasa de la acción, directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones (material o entorno, organizacional o contexto, social o normativo), esto se organiza como una actividad humana (situada socioculturalmente), para perfilar una práctica (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una práctica de referencia que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural, las que a su vez son normadas mediante sus cuatro funciones por la práctica social (normativa, identitaria, pragmática, discursiva-reflexiva) (Cantoral, 2016, p. 159).

Para la Socioepistemología las prácticas sociales son fundamentales para la construcción del conocimiento ya que permiten salir de un dominio propiamente matemático para incorporar otras prácticas de referencia (Ingeniería, Medicina, los procesos de alterización, etc.) que permiten dar sentido y significado a los conceptos que son estudiados (Caballero, 2018).

Por lo tanto, el análisis que se realiza en los distintos contextos favorece al que exista una significación o resignificación de un determinado concepto o noción, en este caso es la de Razón de Cambio.

Ahora bien, al simular el fenómeno de vaciado de recipientes se inicia con el desarrollo de un proceso en términos concretos y en la medida en que el alumno se familiariza con los procesos, estos toman la forma de una serie de operaciones que pueden ser desarrolladas y coordinadas en su pensamiento. El alumno habrá adquirido entonces un pensamiento operacional con respecto a ese concepto (Cantoral, 2016), en este caso la noción de Razón de Cambio. De esta manera incentivar el proceso de pensamiento en el alumno haciendo que utilice variables (por ejemplo, medir el nivel de agua) que sean útiles en su vida profesional del futuro, y que le permita enfrentarse a situaciones nuevas y proponer soluciones. Como lo menciona Liliana Suárez (2014): “Toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiera en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla.”

Nos interesa la matemática funcional (Buendía & Cordero, 2005), es decir aquel conocimiento matemático que deberá integrarse a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente (Suárez, 2014).

2.2. Socioepistemología de la Modelación–Graficación

Esta investigación está basada en ciertos principios importantes que son fundamentales para la construcción de la noción de Razón de Cambio, como lo son la modelación – graficación, pero en esta ocasión hablaremos un poco sobre el uso de las gráficas en la modelación desde una perspectiva socioepistemológica.

Para el estudio socioepistemológico nos basamos en el trabajo de Suárez (2014) en donde realiza un análisis de la constitución del uso de las gráficas en la modelación mediante el uso de las gráficas de la Figuración de las Cualidades de Oresme, ya que aquí se presentan evidencias de modelación aplicando la matemática para explicar los cambios en las cantidades físicas, lo se establece al final de la edad media. El estudio de la Figuración de las Cualidades nos proporciona datos epistemológicos sobre el uso de las figuras geométricas y las proporciones para modelar el mundo físico aportando así nuevas herramientas matemáticas para el estudio del cambio y la variación (Suárez, 2014).

> Este estudio de uso de las gráficas en la Figuración de las Cualidades se realizó principalmente a partir de la traducción y los comentarios de Clagett del *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* de Oresme, 1323–1382. También se consultaron como fuentes impresas: *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII* de González de Urbaneja (1992), *La historia del Cálculo y su desarrollo conceptual* de Carl Boyer (1959), *Del Cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910. Una*

> *introducción Histórica* de Grattam–Guinness, I. (1980), *Desarrollo Conceptual del Cálculo* de Cantoral y Farfán (2004), la sección *Todo cae: El desarrollo del concepto de movimiento desde Aristóteles hasta Galileo* de Waetofsky (1968) y la sección sobre *La física matemática al final de la edad media* de Crombie (1983). Y en fuentes en línea se consultó a Souffrin, P, y Weiss, J. (Suárez, 2014, p. 80).

La idea principal de Oresme es que las figuras geométricas y las proporciones matemáticas nos proporcionan elementos para entender fenómenos en donde se producen cambios en las cantidades. Podemos ver en este Tratado la utilidad de la geometría y las proporciones para modelar situaciones de variación, esta transformación que existe nos permite obtener una resignificación del conocimiento, lo que nos proporciona un marco de referencia. Con esta mirada surgió la idea de estudiar fenómenos con una práctica de modelación.

Según Suárez (2014) , quien realizó un estudio sobre el Tratado de Oresme, con los resultados de este se aporta información epistemológica del desarrollo del uso de las gráficas en la modelación en las siguientes tres direcciones:

- Elementos de pertinencia: La justificación se basa en datos epistemológicos, es decir aspectos propios del conocimiento identificados en el Tratado de Oresme, que dan información sobre el uso integrado del conocimiento matemático de las formas geométricas y de proporciones para obtener una funcionalidad en situaciones de variación.

- Elementos de construcción: Se define una construcción epistemológica del desarrollo del uso de las gráficas en la Figuración de las Cualidades. El desarrollo esta descrito en términos del debate entre el funcionamiento y forma del uso que Oresme hace de las figuras Geométricas para modelar el cambio y la variación.

- Elementos de integración: En esta dirección se identifica la relación entre los datos epistemológicos aportados en el estudio del uso de las gráficas en Oresme con los elementos fundamentales del binomio modelación–graficación.

Estos tres elementos establecen una epistemología para la modelación que está basada en el uso de las gráficas, esto es a lo que Suárez (2014) le llama socioepistemología de la modelación–graficación, y que proporciona un marco de referencia para entender como los estudiantes logran una resignificación de sus conocimientos matemáticos.

A continuación, se presentan algunas explicaciones de Oresme y de sus comentadores, de las relaciones que se establecen entre las figuras geométricas y proporciones y los fenómenos de variación, particularmente los del movimiento que finalmente es lo que nos interesa para los objetivos de nuestra investigación.

La Figuración de las Cualidades en la obra *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* de Oresme

Oresme fue un matemático muy importante de la Edad Media que, dentro de sus aportes en los estudios sobre el movimiento, se encuentra la representación de las características de las “cosas” que cambian y que se nombran como “cualidades”. La palabra misma “cualidad” tiene, para Oresme, incorporada la noción de variación, como se puede advertir en “Sobre la continuidad de las intensidades”, cuando menciona la cosa “intensible”, que cambia de intensidad, y la llama “cualidad” (Suárez, 2014). Es importante señalar que, en la traducción del documento de Oresme, se considera la continuidad como un elemento esencial de las cualidades.

La intención de Oresme es representa el modo en que las cualidades varían a través de figuras geométricas. Estas figuras adquieren un significado asociado a la variación y capturan la esencia de la cualidad de cantidad continua, es decir, que la variación que representa la figura geométrica es ininterrumpida. Oresme establece un nuevo uso de las figuras geométricas para representar situaciones de variación.

En Suárez (2014) se analizan algunos fragmentos de la obra “*Tratactus de configurationibus qualitatum et motum”* y expone los datos epistemológicos de la resignificación del uso de las figuras geométricas para modelar el movimiento.

El Tratado contiene 93 capítulos divididos en tres partes. En la primera, se formula la doctrina de la representación geométrica y se aplica a las cualidades, y se explica cómo se puede utilizar para explicar muchos fenómenos físicos e incluso psicológicos como la bondad o la claridad.

Para el análisis cuantitativo del movimiento Oresme dice en su tratado: Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por segmentos rectilíneos (González-Urbaneja, 1992).

Los métodos matemáticos del Cálculo Diferencial para el estudio del cambio y la variación no se dieron hasta XVII, sin embargo, en los siglos anteriores se dieron dos pasos importantes que en el futuro servirían para el desarrollo. El primero se refería en estudiar matemáticamente características de la naturaleza que no parecían estar relacionadas con lo cuantitativo, es decir, las cualidades. El segundo consistía en proporcionar herramientas conceptuales y ampliaban notablemente las posibilidades de la física matemática. En los dos aspectos se vio reflejado el trabajo de Oresme.

> Los primeros capítulos de la Primera Parte del Tratado tratan sobre la *continuidad,* la *latitud,* la *cantidad y* la *Figuración* de las Cualidades. Con estos elementos básicos se da la pauta para la representación de cualidades por medio de figuras, es decir, todas aquellas cosas susceptibles de cambiar de intensidad. En palabras de Oresme: *Por tanto, cada intensidad que se puede adquirir sucesivamente se debe imaginar como una recta perpendicular levantada en algún punto del espacio (por*

ejemplo, el punto P en la figura) o sujeto de la cosa intensible, una cualidad. Oresme I. traducido a partir de Clagett, 1968 (Suárez, 2014, p. 85).

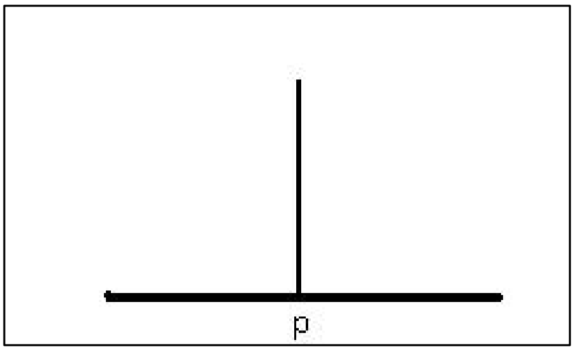


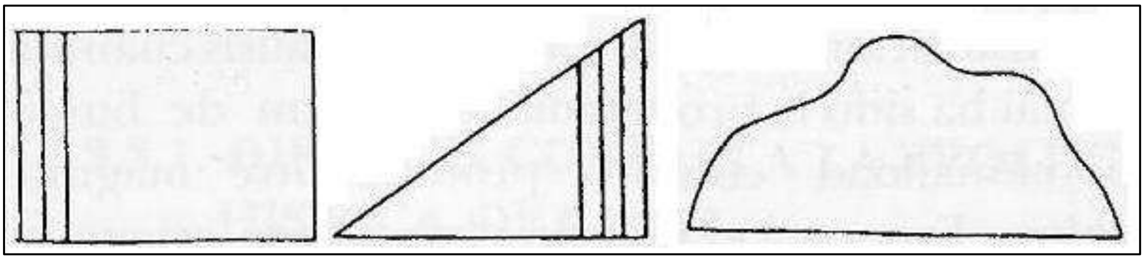
Imagen 10. Representación de una cualidad (Suárez, 2014, p. 85).

La línea horizontal representa la extensión del cuerpo en la que se estudia la cualidad (longitud) y a cada punto de esta línea le corresponde una recta vertical en donde su altura es proporcional a la intensidad de la cualidad (latitud). Con los puntos y líneas marcados se establece una figura geométrica que nos ayuda a entender cómo se comporta el fenómeno que se estudia, todo esto apoyado por la imaginación, tal y como lo hizo Oresme. De esta manera se representan gráficamente las cualidades a través de figuras planas.

For latitude is to be imagined by a plane surface and this in many ways. For a certain latitude is uniform: ▭ . Such a one is to be imagined by a rectilinear plane surface in which the lines bounding it that are opposite each other are equidistant and such lines are called parallel lines, or a surface in which the bounding lines meet so as to form four equal angles. But another one is called a difform latitude and there are two kinds of it. One is uniformly difform: ◿: the other is difformly difform: ⌐┐ .

Imagen 11. Figuración de las Cualidades. Jacobus de Sancto Martino, en Clagett 1968 (Suárez, 2014, p. 86).

A partir de la propiedad invariante en cuanto a cómo varia una cualidad y su representación, se conduce a una clasificación de las formas que la representan. La forma de un rectángulo representara una cualidad que no varía, un triángulo representa una variación uniforme de la cualidad, y otra figura sobre la misma línea con un contorno distinto representara una variación no uniforme (Suárez, 2014, p. 86).



Figuración de las Cualidades, Tomado de Ruiz, 1998 (Suárez, 2014)

> La extensión y la intensidad (intensión) de la cualidad se representaban una frente a la otra. Solo una de estas variables (el tiempo) es medible en el sentido actual. La otra se concebía sobre la base de grados de intensidad de una cualidad, es decir sobre la base de “mas” o “menos” (Suárez, 2014, p. 86).

En la siguiente imagen se muestra como Wartofsky realiza una comparación entre dos cualidades iguales de movimiento (representadas por las alturas de los rectángulos) basándose en las diferencias entre sus cantidades, con el entendido de que la cantidad es la duración temporal (representada por las bases de los rectángulos).

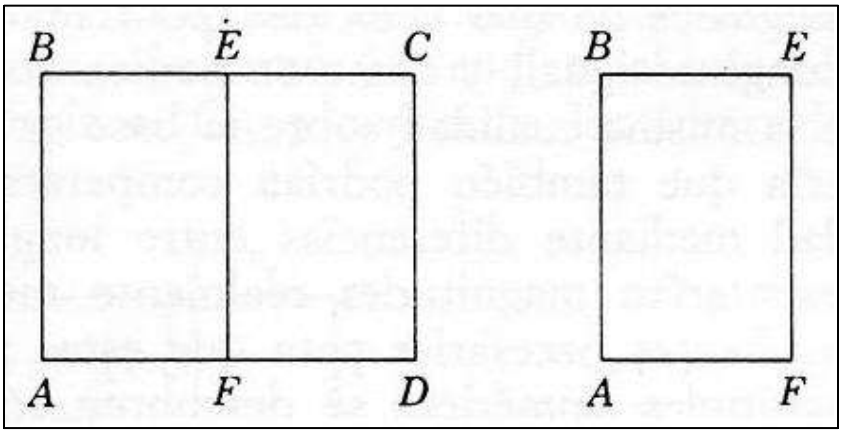


Imagen 12. Proporciones y figuras, tomado de Wartofsky, 1968 (Suárez, 2014, p. 87)

Cuando la intensidad de la cualidad es uniforme, la altura AB es misma al pasar el tiempo, por lo tanto, genera una figura geométrica que representa el fenómeno, un rectángulo. A partir de esta representación surgió la idea de identificar la velocidad de un movimiento, sin considerar la duración del mismo, así como también la cantidad de movimiento que dependía del tiempo que transcurriera un movimiento a una velocidad dada. Aristóteles (Según Wartofsky, 1968) había dado una medida cuantitativa de la igualdad de velocidades apoyándose en la igualdad de distancias en tiempos iguales, pero con esta distinción se hace posible la descripción de la variación de la velocidad, no solo en espacios o tiempos sucesivos sino en el límite de esos espacios y tiempos (Suárez, 2014).

La condición de que la intensidad son líneas perpendiculares, podemos identificar fácilmente cuales son o no son las figuras que pueden representar una cualidad, en seguida se muestran dos ejemplos.

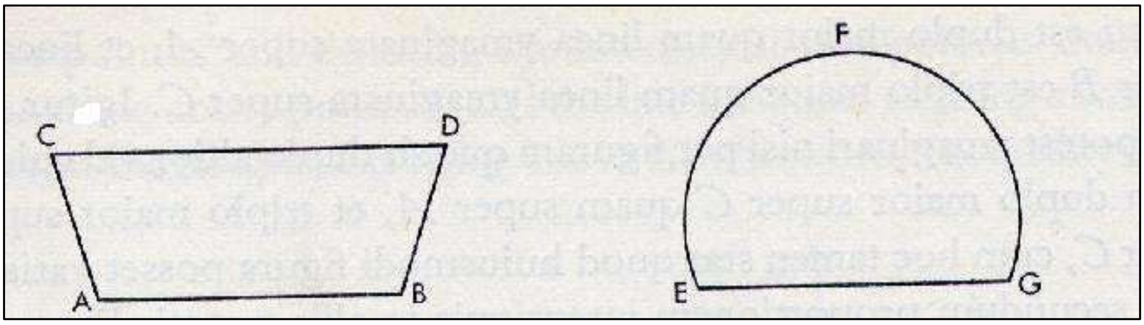


Imagen 13. Figuras que no representan cualidades, tomado de Clagett 1968 (Suárez, 2014, p. 88)

Las intensidades se miden en base a la teoría de las proporciones, una cualidad no depende de la medida del segmento que representa la intensidad inicial, por lo tanto, una misma situación puede ser representada por los trapecios ABCD, ABKL o ABMN (ver la siguiente figura), siempre y cuando las proporciones entre los segmentos de estos se mantengan, es decir: AN/AL = BM/BK (Suárez, 2014). En el caso de la semicircunferencia de la figura anterior no importa el tamaño del radio, sino que las proporciones se conserven, podría ser el radio con respecto a un segmento que suba de la extensión a cualquier punto de la semicircunferencia de manera perpendicular.

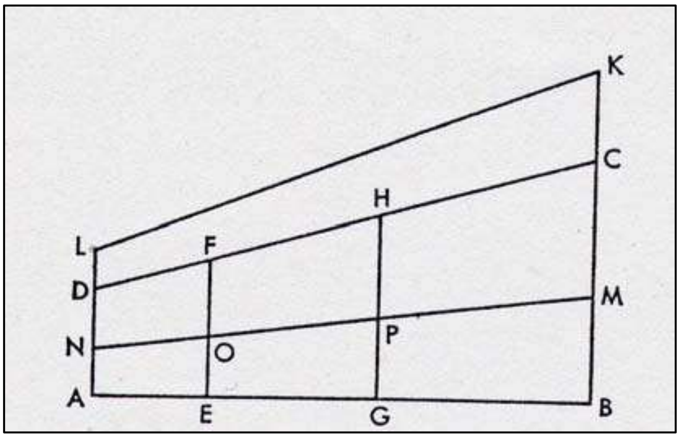


Imagen 14. Figuras semejantes a través de cortes de líneas paralelas (Suárez, 2014, p. 89)

Cabe mencionar que esta condición cumple no solo con la figura anterior, sino también con cualquier figura con la misma base, y que además sus ordenadas conserven las mismas razones.

Ahora bien, si hablamos del ejemplo de la semicircunferencia, las latitudes que pertenecen a cada punto crecen de forma rápida a medida que la curva comienza a ascender. Pero este crecimiento va disminuyendo continuamente conforme nos acercamos al máximo hasta que el aumento desaparece casi totalmente.

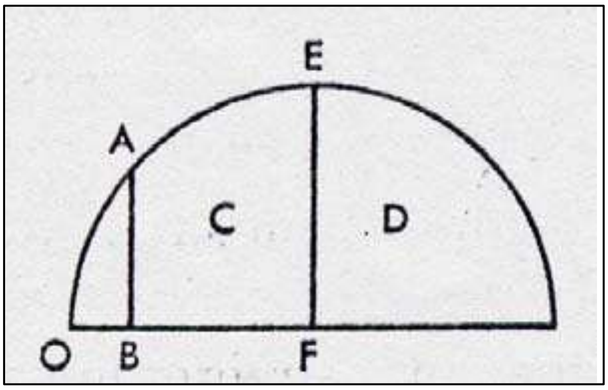


Imagen 15. Disminución del grado de amplitud en la cercanía del máximo (Suárez, 2014, p. 90)

> En términos modernos, la pendiente es cero en el punto E. en el cuarto *notandum* nosotros hemos dicho que en un semicírculo la razón de cambio de la intensidad comienza desde el valor mayor posible (*summus*) de rapidez y termina en la mitad del arco al más alto valor posible de lentitud, es decir, que la razón de cambio de AB avanza desde el valor mayor posible (infinito) en O a el menor valor posible (cero) en F. Otra vez usando terminología moderna podemos expresar esta idea diciendo que en el semicírculo la pendiente varia continuamente desde ∞ a cero en el punto E (Clagett, 1968, 89 citado por Suárez, 2014, p. 90).

En esta representación se hace referencia al movimiento respecto al tiempo, a continuación, se muestra en la siguiente figura, el uso del tiempo para señalar la extensión en la cual varía la cualidad.

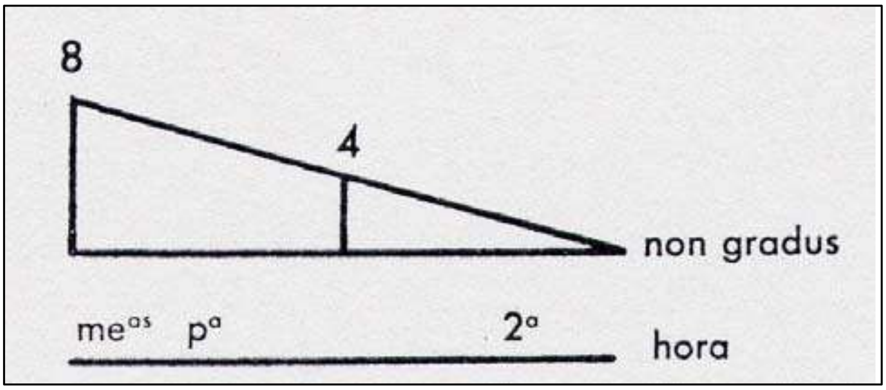


Imagen 16. Línea del tiempo (Suárez, 2014, p. 90)

> Nótese que bajo el triángulo el escriba ha repetido la línea de la base, es decir, la línea que denota el tiempo. La intención de copiar la línea de la base, yo infiero, es subrayar que cuando comparamos varios tipos de movimiento no uniforme, el tiempo es su medida común (Clagett, 1968, 101 citado por Suárez, 2014, p. 91).

Por lo tanto, la representación de un movimiento con variación uniforme se usa como modelo para señalar la variación igualmente uniforme de otras cualidades. Por otro lado, en la representación geométrica se trata la cantidad total de la cualidad, la cual se obtiene sumando las áreas de las figuras formadas por las intensidades de su variación a lo largo de las extensiones.

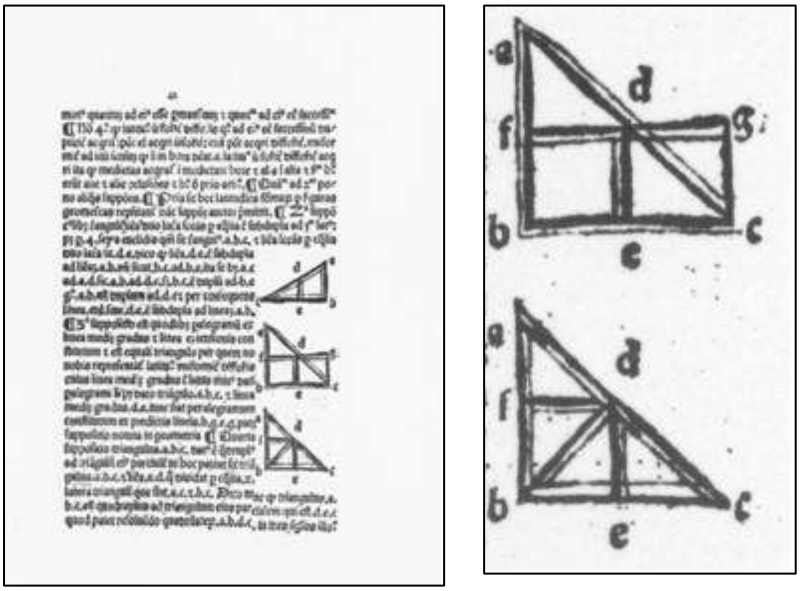


Imagen 17. Demostración visual de la Regla de Merton (Suárez, 2014, p. 91)

2.2.1 Uso de las gráficas en la modelación

> En términos históricos, el estudio de la geometría y el de la teoría de las cualidades se dan en campos de conocimientos separados, el primero en el ámbito de la matemática y el segundo en un ámbito filosófico–religioso. Es el desarrollo de la Figuración de las Cualidades el que viene a unir estos campos haciendo un primer uso de las figuras geométricas para modelar un mundo físico. Con este desarrollo surge un nuevo funcionamiento de las figuras geométricas construyendo una forma de estudiar la variación de las cualidades. Conceptualizamos a la Figuración de las Cualidades como un uso de las gráficas en la modelación y la caracterizamos como el cuerpo de conocimientos que desarrolla herramientas para relacionar el mundo real con las matemáticas a partir de una nueva concepción que permite asignar la medida de un segmento al valor de las variables físicas (Suárez, 2014, p. 93).

A continuación, se presentan tres datos epistemológicos de la Figuración de las Cualidades de Oresme, en donde se exponen algunos argumentos del uso de las gráficas para fines didácticos en una situación de modelación del movimiento.

- **La gráfica antecede a la función**

Dentro de la Figuración de Cualidades de Oresme nos podemos percatar que un rectángulo se usa para representar un fenómeno en donde la intensidad de la cualidad sufre variación alguna, por otro lado, el triángulo rectángulo se usa para representar un fenómeno en donde la intensidad aumenta proporcionalmente a lo largo de una extensión de tiempo. Si observamos el contorno de estas figuras podemos ver que se parecen a las curvas que actualmente representan funciones analíticas en un sistema de ejes coordenados, por lo tanto, hay un vínculo importante entre el concepto matemático de función y la Figuración de Cualidades, aunque Youschkevitch (1976) afirma que los desarrollos de Oresme incluyen el manejo de la idea de función como una relación entre variables y aunque no haya una definición explicita si se observa un uso de la idea matemática de función.

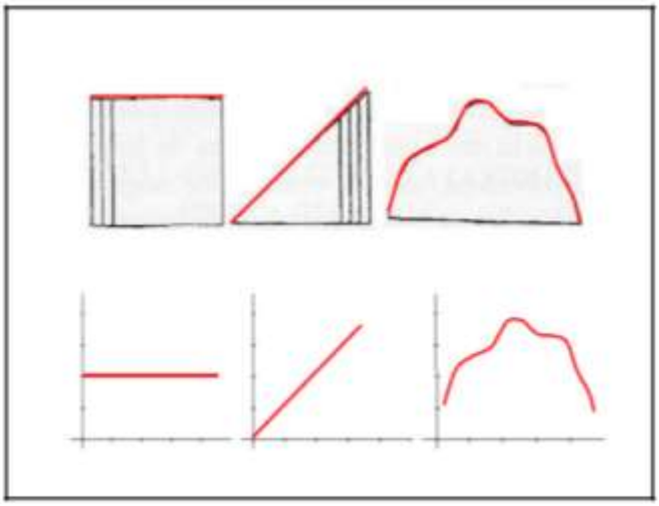


Imagen 18. Dato epistemológico DE1: La gráfica antecede a la función (Suárez, 2014, p. 94)

Cabe mencionar que para la Matemática Educativa es importante considerar el concepto de función a través de una representación gráfica, sin dejar a un lado la definición formal, así como también su manejo analítico, dentro del discurso matemático escolar. La Figuración de las Cualidades nos permite concebir la idea de función a partir de cierto uso de sus gráficas, es por esto que la graficación contiene elementos muy importantes que contribuye a la construcción de las ideas de la variación.

- **La gráfica es argumentativa**

Se mencionaba anteriormente que las figuras geométricas, dentro de la Figuración de Cualidades, tienen un parecido a las que actualmente representan funciones analíticas, al establecer esta nueva mirada hacia las figuras geométricas, ya existe un uso argumentativo ya que la gráfica se convierte en un elemento central para dar explicaciones.

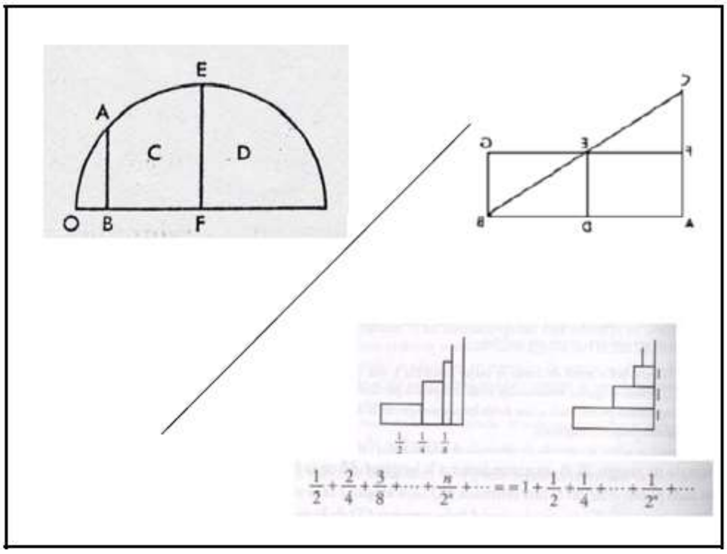


Imagen 19. Dato epistemológico DE2: La gráfica es argumentativa (Suárez, 2014, p. 95)

> Las gráficas de la derecha sirven como un argumento grafico para demostrar relaciones numéricas que eran conocidas como, por ejemplo, la regla de Merton. El elemento central de la demostración era una relación que no fue explicita en el trabajo de Oresme que el área de una figura que representase la velocidad coincidía con la distancia recorrida con dicha velocidad. La gráfica izquierda en la ilustración anterior sirve de apoyo para hablar de las características de un punto extremo en la figura en relación con la disminución del cambio en las intensidades al acercarse al punto E (Suárez, 2014).

- **El uso de las gráficas tiene un desarrollo**

Al modelar situación de variación a través de figuras geométricas, estas adquieren un significado, en el cual el tiempo es una variable que estará presente en las diferentes intensidades de una cualidad.

La Figuración de las Cualidades se representa por figuras planas o por cuerpos en el espacio. Estos elementos configuran un desarrollo del uso de la Figuración de las Cualidades (Suárez, 2014).

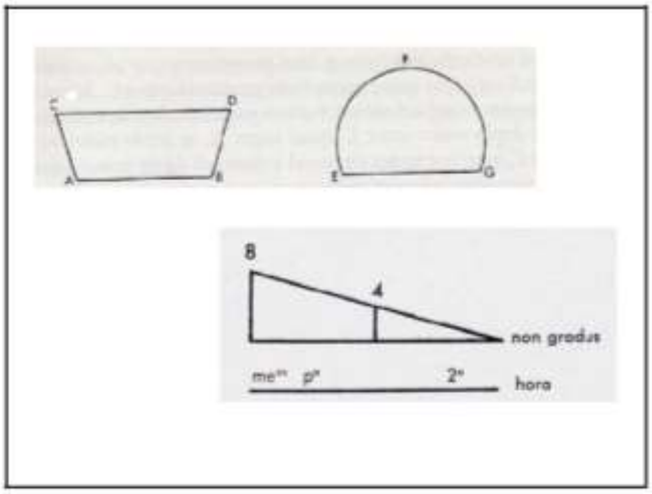


Imagen 20. Dato epistemológico DE3: El uso de las gráficas tiene un desarrollo (Suárez, 2014, p. 96)

Estos datos epistemológicos nos muestran que las propiedades geométricas son indispensables para la descripción del uso de gráficas, lo que nos hace ver un funcionamiento diferente a la representación gráfica de la idea de función.

2.3. Pensamiento y Lenguaje Variacional

El desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional es esencial para la construcción de la noción de Razón de Cambio ya que nos permite identificar cada elemento que nos proporciona una situación de movimiento, lo que nos ayuda a realizar una modelación que a través de la graficación represente el fenómeno en cuestión.

En Caballero (2012) se analizan que estrategias utilizadas por profesores corresponden al uso de un pensamiento y variacional, y cuáles no. Para esto se realiza una caracterización de los elementos que conforma el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), con el objetivo de explicar lo que corresponde al PyLV, y así establecer los criterios que permitan identificar las diferencias.

> El interés por realizar una caracterización del PyLV y sus elementos ha estado presente desde los primeros trabajos que incorporan esta línea a sus investigaciones, como se puede observar en los trabajos de González (1999) y Salinas (2003), quienes realizan una caracterización de algunos elementos del PyLV, tales como estrategia variacional y situación variacional, los cuales representan la base para los posteriores trabajos dentro de esta línea de investigación. No obstante, con el surgimiento de nuevos estudios, dichos elementos han ido evolucionando y adaptándose a nuevas temáticas, además de hallarse con nuevos conceptos que han ido surgiendo a la par de estos nuevos estudios, por lo que una nueva caracterización

> surge como necesaria para establecer lo que se entiende hoy día por los elementos que conforman el PyLV (Caballero, 2012, p. 26).

En la revisión que realiza Caballero (2012) nos explica que el estudio de la variación y el cambio no son ajenos a otras áreas, como el algebra, la geometría y la estadística, lo cual nos indica que el desarrollo del PyLV también nos proporciona herramientas para construir otras nociones que no son propias del cálculo.

> No es la primera vez que en Matemática Educativa se realiza una caracterización del PyLV, y seguramente no será la última. Flores (2010) menciona que los intentos por ofrecer una caracterización se puede agrupar en dos clases, los primeros y más comunes describen el tipo de problemáticas que requieren el uso del PyLV, y los segundos fueron caracterizaciones realizadas en los primeros años del surgimiento del PyLV como línea de investigación, con el objetivo de establecer algunos criterios para futuros trabajos, pero considerando a estas caracterizaciones no como definitivas, sino dinámicas, ya que con el desarrollo de nuevos trabajos se podría llegar a encontrar una evolución en esos elementos. Dentro de estas dos categorías los principales representantes son González (1999) para primera, y Salinas (2003) en la segunda, cuyos trabajos son de los primeros acercamientos a una caracterización del PyLV (Caballero, 2012, p. 31).

La diferencia de estas investigaciones es que en la caracterización de González (1999) encontramos elementos que nos permiten diferenciar una situación variacional de la que no lo es, mientras que la caracterización de Salinas se basa en las estrategias variacionales de Comparación, Estimación, Seriación y Predicción, que son prácticas para operar con el cambio y la variación, de los cuales hablaremos más adelante. Estas primeras caracterizaciones mencionadas aunado a la revisión realizada por Caballero (2012), fueron la base para postular una nueva caracterización, la cual contiene los siguientes elementos:

Situación Variacional: Para el desarrollo del PyLV es absolutamente necesario presentar situaciones y fenómenos en los que el cambio y la variación se encuentren presentes en todas partes, utilizando los conocimientos previamente construidos por los estudiantes, de tal suerte que estos conocimientos puedan evolucionar a través de situaciones variacionales, ya que solo es posible construir la noción de variación mediante el desarrollo del PyLV.

> Entenderemos por una situación variacional al conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de estrategias variacionales y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio (Caballero, 2012, p. 31).

Argumentos Variacionales: Al presentar una situación variacional, como se acaba de mencionar, se emplean argumentos de tipo variacional, es decir, argumentos variacionales, debido a que se ven en la necesidad de recurrir al análisis del cambio y su cuantificación.

> Estos argumentos, según Cantoral (2000) son utilizados por las personas cuando hacen uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando. Son este tipo de argumentos los que permiten dar explicación a las situaciones variacionales (Caballero, 2012, p. 32).

Códigos Variacionales: Son las herramientas utilizadas por los estudiantes para generar los argumentos variacionales mencionados anteriormente. Estas herramientas pueden ser ciertas afirmaciones, dibujos, tablas o ademanes que expliquen el fenómeno en cuestión y que además representen el análisis variacional que se realiza.

Estrategia Variacional: Estas estrategias se generan a partir de la forma de razonar y actuar ante una situación variacional, y son el punto de partida para el análisis de cambio y sus efectos, ya que permiten identificar aquello que cambia, la medición de este cambio, la forma en que evoluciona y por qué cambia de la forma en que lo hace.

> El uso de estrategias genera el uso de argumentos variacionales a los fenómenos de cambio, ya que a partir del análisis de la variación que proporcionan las estrategias variacionales, la persona puede argumentar sobre los sucesos del fenómeno a partir de la forma en que varía. Algunas estrategias variacionales son la Predicción, la Comparación, la Seriación y la Estimación, aunque no se descarta la existencia de otras estrategias (Caballero, 2012, p. 33).

2.4. Prácticas específicas para operar con el cambio y la variación

Anteriormente se mencionaba que existen tres elementos que son esenciales en la variación, que son la medición del cambio, el análisis de la forma en como esa medida evoluciona y el reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen. Desde la perspectiva del PyLV, estos elementos son la base de prácticas específicas para operar con el cambio y la variación con fines predictivos, que se denominan prácticas o estrategias variacionales. Caballero (2018) propone una caracterización de estas prácticas variaciones que se presentan a continuación.

La comparación

Consiste en establecer diferencias entre dos estados, un anterior y uno posterior, o también dos estados equivalentes de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar y cuantificar el cambio (Caballero, 2018), para poder analizarlo con base en sus características y la variación en esos estados.

Generalmente en esta práctica se usan algunos términos como son: “es más alto que”, “es más corto que”, “está por encima de”, es más pequeño (grande) que”, etc. Cabe mencionar que esta práctica no se usa siempre de la misma manera, sino que depende del contexto en el que se encuentre la situación variacional.

La seriación

En la Comparación hablábamos de analizar únicamente dos estados, en el caso de la Seriación es necesario analizar estados consecutivos de un fenómeno con el objetivo de encontrar una relación entre ellos que describa el comportamiento variacional en los estados analizados o en todos los estados. La Seriación como práctica variacional, puede ser usada para hallar una relación funcional dada una tabla de valores, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o encontrar relaciones entre variables o funciones, entre otras (Caballero, 2012).

La predicción

A diferencia de la Seriación que se busca encontrar una relación entre los estados, en la predicción se busca establecer un nuevo estado a mediano o largo plazo, sin embargo, encontrar alguna relación mediante la práctica de Seriación o Comparación puede ser la forma de encontrar ese nuevo estado y así llegar a ser parte de la Predicción. La Predicción está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos (Caballero, 2018). Esta práctica generalmente se caracteriza por proporcionar un valor numérico o el estado futuro.

La estimación

En la práctica de Predicción se establece un valor numérico donde el estado propuesto es local, a diferencia de la práctica de Estimación en donde se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo de manera global. Es decir, la Estimación consiste en la acción de anticipar comportamientos o tendencias en la variación del fenómeno en un intervalo (Caballero, 2018). Por ejemplo, al analizar temperaturas la Estimación se usa pasa saber si habrá un crecimiento o disminución en un periodo de tiempo determinado, mientras que la Predicción se utiliza para saber algún valor especifico de la temperatura dentro de un tiempo determinado, en pocas palabras, la Estimación anticipa comportamientos en ciertos intervalos.

2.5. Desarrollo de la noción de tiempo en la construcción de variación

La noción de tiempo se encuentra inmerso en el Cálculo como variable independiente y nos podemos dar cuenta al realizar ciertos análisis matemáticos que están relacionados con problemas físicos, sociales o de otro tipo.

Dentro del PyLV es una variable muy importante ya que, si el cambio implica una modificación de estados, el tiempo consiste en la duración de esa modificación, por lo tanto, el tiempo se encuentra presente tanto de manera implícita como explícita en cualquier situación de variación.

Debido a la naturaleza del tiempo, éste presenta dificultades relacionadas a su concepción y construcción, pues suele ligarse al estudio de fenómenos y sucesos que ya no existen, o que aún no suceden y, por tanto, no pueden ser reproducidos a voluntad. Esto ocasiona que el tratamiento de la duración de un suceso sea un tema delicado, debido a que en dichas situaciones nos vemos obligados a reconstruirlas en lugar de poder percibirlas en un todo simultaneo. El problema estriba entonces en comprender como se reconstituyen los eventos percibidos y las operaciones empleadas para ello (Caballero, 2018).

> Estas operaciones, de acuerdo con (Grieze, Henry, Meylans-Backs, Orsine, & Piaget, 1971) surgen como el producto de una relación entre lo que se percibe (desplazamientos, frecuencias, trabajo efectuado, etc.) y la velocidad con que sucede (total de distancia recorrida, medida de la frecuencia, cantidad de trabajo realizado, etc., en relación a la duración del evento). Bajo esta visión, la duración de un evento, y por tanto la noción misma de tiempo, se encuentra ligado al observador, pues será el quien, mediante la utilización de instrumentos, herramientas o juicios subjetivos, determinará esa velocidad (Caballero, 2018, p. 84)

Por las características y dificultades iniciales en la construcción de la noción de tiempo, es necesario considerar la velocidad de los acontecimientos lo que lleva a centrar la atención en la duración, apartando un poco el desarrollo mismo del evento. Caballero (2018) plantea un ejemplo de una situación de movimiento donde dos objetos que parten simultáneamente del mismo punto siguen trayectorias paralelas con velocidades diferentes y se detienen en el mismo instante. Dado que sus velocidades son diferentes la distancia a la cual se detienen también es diferente. Ahora bien, la pregunta es ¿Cuál de los dos móviles avanzo más rápido? Piaget (1977) demostró que los niños entre 5 y 8 años inicialmente asumen que la velocidad de los móviles es la misma, ya que se fijan únicamente en la distancia recorrida y juzgan que el móvil que está a una mayor distancia tardó más tiempo que el otro.

Este tipo de razonamiento se centra en los resultados finales sin analizar la manera en que se desarrolla el evento. Es por esto que en la noción de tiempo es necesario considerar la relación que existe entre las variables en el estudio de fenómenos temporales.

> Con base en el planteamiento anterior, postulamos una relación entre el desarrollo de la noción del tiempo y el PyLV que se sustenta en la necesidad de establecer estados intermedios en fenómenos de variación continua. Cabe señalar que el tiempo no siempre está presente como variable explicita en el estudio de situaciones de cambio, pero si en un sentido de temporización (Caballero, 2018, p. 85).

Un ejemplo de lo anterior podemos considerar las actividades de llenado de recipientes que plantea Salinas (2002), en donde se pide seleccionar la gráfica de la relación tiempo vs altura de recipientes con diferentes geometrías. El objetivo es identificar el desarrollo de la noción de variación de los participantes al realizar y explicar la gráfica del llenado, para lo cual es necesario relacionar los cambios en las alturas del nivel del agua en un periodo de tiempo. Para esto los participantes establecen estados intermedios a partir de los cuales determinan si el recipiente se llena más rápido o más lento que antes.

> La identificación de estados intermedios lo denominamos establecer un sentido de temporización a los fenómenos de variación, lo que permite dar cuenta del cambio y la evolución de ese cambio (los órdenes de variación de las variables del fenómeno). La importancia de considerar este sentido de temporización en fenómenos de variación continua es que permite describir, caracterizar y cuantificar el comportamiento de las variables de una función. De acuerdo a Piaget (1971), mediante la reversibilidad y seriación se construyen las relaciones temporales de un evento, las cuales están ligadas l experiencia introspectiva y a la experiencia física, es decir, dependen del sujeto y de la relación que establezca con el evento observado (Caballero, 2018, p. 86).

Caballero (2018) plantea un ejemplo donde se pregunta por la forma de crecimiento de una función en un intervalo, la Estimación de ese comportamiento precisa reconocer el patrón de crecimiento de las alturas de la gráfica para determinar si la función seguirá creciendo cada vez más en el intervalo o, por el contrario, el crecimiento empezará a disminuir. Para encontrar este patrón es necesario estudiar los órdenes de variación con base en la seriación como se muestra en la siguiente imagen.

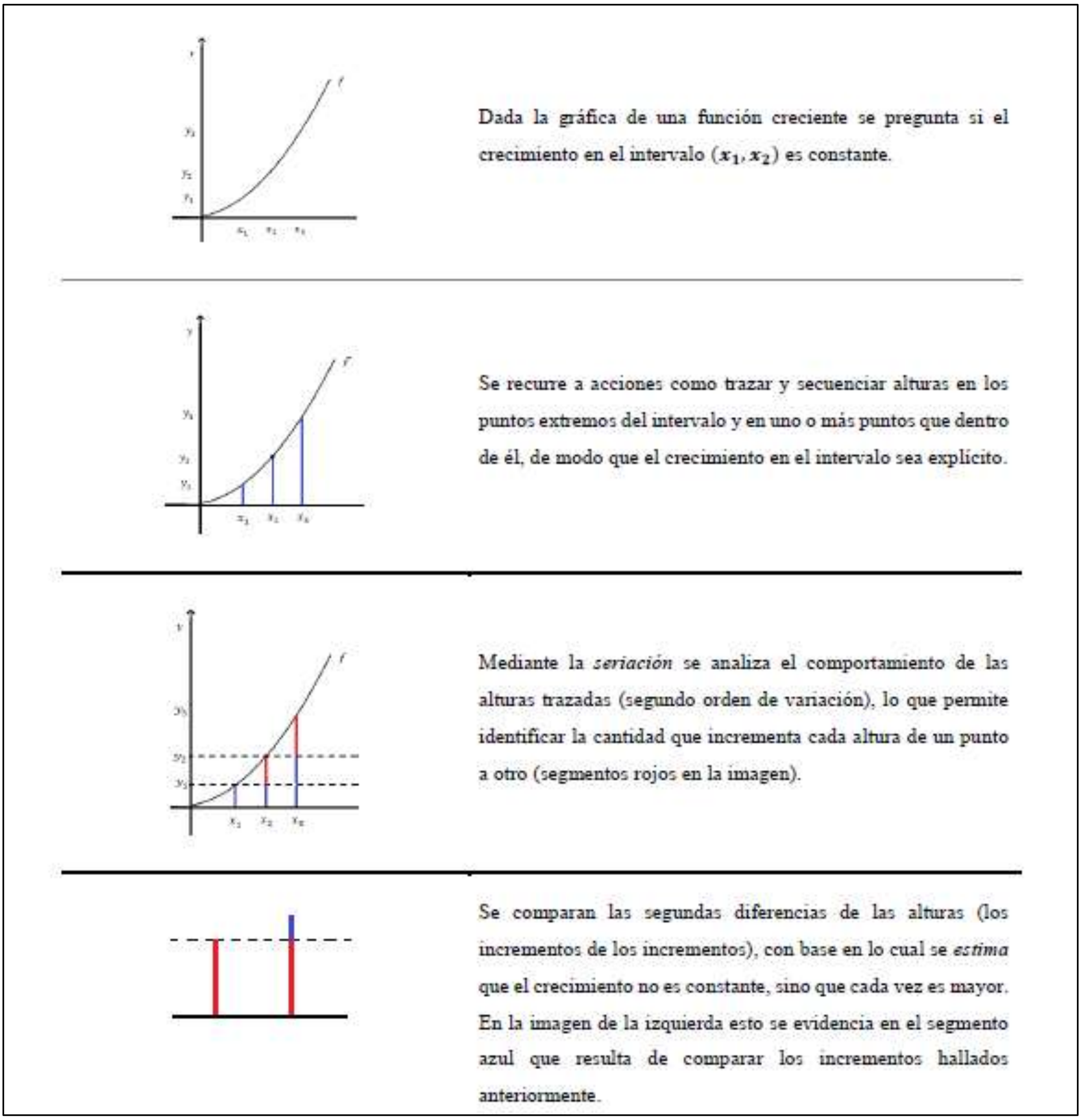


Imagen 21. Ejemplo del uso de la temporización en el estudio de la variación (Caballero, 2018, p. 87)

En el ejemplo anterior muestra también el uso de las prácticas variacionales desde la Seriación que opera sobre estados consecutivos en un fenómeno de variación, la Comparación en donde se identifican las diferencias de alturas, hasta la estimación en donde se determina que el crecimiento de la gráfica no es constante; de tal manera que se reconocen los estados intermedios, o bien, si estos no son proporcionados es necesario construirlos.

> Diversas investigaciones han reportado que una dificultad recurrente en el tratamiento de gráficas de funciones es ver a estas como una imagen estática, una fotografía, más que la expresión de un proceso de variación (Johnson, 2015; Planinic, Milin-Sipus, Katic, Susac, e Ivanjek, 2012) lo que ha motivado el desarrollo de actividades y propuestas de enseñanza que propicien una concepción dinámica de la gráfica (Falcade, Laborde, y Mariotti, 2007; Sokolowski, 2014; Verzosa, Guzon, y De las peñas, 2014) a través de hacer explicito los procesos de variación de los fenómenos ya sea con apoyo tecnológico o sin él (Caballero, 2018, p. 88).

En el análisis de los fenómenos la variación no se percibe directamente, sino que se infiere y se calcula mediando el estudio del cambio, que al temporizar un fenómeno (establecer estados intermedios) se identifican ciertos estados sucesivos. Ese es un elemento necesario para llevar a cabo el estudio del cambio ya que mediante las prácticas de Comparación y Seriación los estados no se quedan al nivel de imágenes estáticas, si no que describen el proceso de cómo evoluciona el fenómeno, es decir su variación.

2.6. La Razón de Cambio

Ahora que ya tenemos los elementos necesarios referentes al PyLV, abordaremos el saber matemático que forma parte de los objetivos de esta investigación: La Razón de Cambio. Presentaremos un análisis epistemológico basándonos en otras investigaciones que han estudiado este tema, dado que no es la primera vez que se identifica la problemática del aprendizaje de la noción de Razón de Cambio. Así como también su construcción desde el Cálculo Infinitesimal hasta los conceptos que conocemos hoy en día.

> Para llegar a lo que actualmente se conoce como Cálculo infinitesimal, tuvieron que pasar varios siglos de evolución de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, la variación y los infinitesimales. El Cálculo infinitesimal fue creado para resolver los principales problemas científicos del siglo XVII, los cuales implicaban diferentes clases de movimientos y problemas de tipo geométrico que no se podían resolver por los métodos usuales que se conocían en ese entonces (Esqueda, 2014, p. 91).

En la búsqueda de la solución de los problemas de la época que menciona Esqueda (2014), se realizaron descubrimientos importantes para la matemática, como por ejemplo el Cálculo Diferencial. Los principales matemáticos exponentes de esa época eran: Cavalieri, Torricelli, Fermat, Wallis, Barrow. Pero los que sobresalieron con la solución de estos problemas fueron Newton y Leibniz, ya que crearon una teoría general donde se incluían estos problemas.

En 1687 Newton publicó *Los principios matemáticos de la filosofía natural*, que se considera uno de los más grandes avances de la historia de la ciencia. También publicó el Método de fluxiones (cabe mencionar que lo escribió antes que la anterior) que contenía el Cálculo Infinitesimal. En los trabajos de Newton se identifica una concepción particular de la idea del límite y las bases del Cálculo.

Según Esqueda (2014), Newton ofrece tres formas de interpretar el Cálculo para el nuevo análisis, los cuales se presentan a continuación,

- En términos de infinitesimales usado en su *De analysi*, su primer trabajo (1669, publicado en 1711).

- En términos de fluxiones, dado en su *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (publicado en 1736), en la que parece apelar con mayor fuerza su imaginación.

- En términos de razones primeras y últimas o limites, dado particularmente en la obra *De quadratura curnarum* que escribió al final y publicó primero (1704), visión que el parece considerar más rigurosa.

Por otro lado, Leibniz publica sus descubrimientos sobre el Cálculo en la revista *Acta Eruditorum*, misma que fundo Leibniz. Pero de manera oficial se considera que es el Acta de 1684 en donde se encuentra el primer tratado de Cálculo Diferencial. Además, introduce los elementos diferenciales dy o dx para expresar la diferencia entre dos valores sucesivos de una variable continua y o x (Vidal, 2012).

Según las investigaciones que se han realizado respecto al Cálculo diferencial, este está relacionado con los incrementos y las cantidades de cambio, es por esto que el análisis de los fenómenos en situaciones de movimiento es lo que provocó, en sus inicios, el estudio de la Derivada debido a la necesidad de medir, cuantificar y establecer leyes para el cambio y la variación, que son elementos fundamentales para el desarrollo de la noción actual de Derivada. Desde esta perspectiva se realiza un análisis histórico de la Razón de Cambio, en donde se describe el proceso de construcción del concepto.

Razón de Cambio a través de la historia

Durante la prehistoria el ser humano ha identificado fenómenos naturales en los que se encuentra el cambio de magnitudes físicas variables, como por ejemplo el cambio de posición de las ramas de los árboles por causa del viento, el cambio de posición del sol, la luna y las estrellas y su relación con la sucesión del día y la noche, los procesos de producción agrícola y el vínculo con la posición de los astros (Esqueda, 2014).

Al observar los cambios en estos fenómenos, se vieron en la necesidad de desarrollar las primeras tecnologías materiales y simbólicas que representaran dichos fenómenos como por ejemplo el lenguaje textual y verbal, que fueron las bases para el desarrollo de los sistemas de representación escritos.

> La consolidación de la escritura, hacia el 3000 a.C., originó la aparición de diversos instrumentos de registro a través de los cuales ha sido posible conocer el saber social y cultural construido a partir de la antigüedad. Los aportes de las civilizaciones mesopotámicas, en particular la babilónica (2000 a.C. a 600 a.C.), constituyen las referencias conocidas más antiguas sobre el estudio de fenómenos de cambio y de la determinación de leyes cuantitativas a través de tablas de representación (Esqueda, 2014, p. 92).

El interés de nuestros antepasados de estudiar el cambio también tiene una estrecha relación con la Astronomía, en las observaciones que realizaron e identificaron un sistema de fenómenos que se repetían periódicamente, relacionados con el sol, la luna y los planetas. Realizaron una recopilación de datos en la que contenía los hechos en un material de arcilla que han sido descubiertas y estudiadas por Arqueólogos. El objetivo principal de nuestros antepasados era predecir sucesos, y en el proceso de realizarlo nos dejaron anotaciones propias de sus observaciones y experiencias.

> Avanzaron en lo que se denomina algebra teórica, en la que los problemas se enunciaban y solucionaban sin utilizar de manera organizada notaciones algebraicas como las actuales. No usaban letras para representar cantidades variables. Los mismos términos longitud, área y volumen, cumplían con esa finalidad. A pesar de que no figuraban generalizaciones, sino solo casos concretos, esto no significa que no existiera en su pensamiento conciencia de la generalidad de las reglas o principios (Vrancken & Adriana, 2013, p. 56).

Los babilonios y egipcios

Hace más de 3000 años la humanidad logro establecer relaciones entre las variaciones de las diversas magnitudes que se estudiaban, debido que, durante la época, el uso de la matemática era totalmente práctica, aunque en un principio se estudiaban las magnitudes de una forma cualitativo, posteriormente comenzaron a realizar análisis cuantitativos en donde se registraban valores en donde se requerían de patrones de medida constantes. La idea central era encontrar y mantener regularidades en las medidas, un ejemplo de esto es la construcción de las pirámides de Egipto.

> En la construcción de las pirámides, el problema para estas civilizaciones consistía en mantener una pendiente uniforme en cada cara y la misma en cada una de las cuatro caras de la pirámide. Se solía utilizar la relación avance contra subida, denominada por la palabra seqt, que significaba la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura (Rendón, 2009, p. 2).

Los griegos

La necesidad de esta civilización por resolver sus problemas de la vida cotidiana, hizo que comenzaran a trabajar con las matemáticas, esto debido a que se centraban en lo intelectual por parte de sus eruditos. Dentro de los avances que destacaron esta la geometría en donde comenzaron a convertir en objeto de estudio, lo que comúnmente se trabajaba de manera empírica.

> Dentro del estudio teórico realizado por los griegos se encuentran los avances de Tales de Mileto, realizados hacia el año 585 a.C., sobre las proporciones, estudios que constituyeron en la génesis de la matematización de las comparaciones entre medidas geométricas de segmentos. Aunque es probable que Tales haya basado sus estudios en principios conocidos anteriormente por los egipcios y babilonios, con estos estudios nacen los conceptos de razón geométrica o comparación entre magnitudes geométricas y de proporción, como herramientas ideales para analizar cuantitativamente relaciones entre magnitudes. Al desarrollar su teoría de la semejanza, Tales de Mileto formula que los lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes, son proporcionales; esta proposición permitió generalizar la regularidad encontrada al modificar el tamaño de los lados de triángulos semejantes y que expreso en términos de razones constantes (Rendón, 2009, p. 2).

Por otro lado, al fundarse la escuela Pitagórica en donde se fundamentaba que todo es número, la perspectiva de la matemática cambio en la forma de concebirla, de tal manera que ya se considera una ciencia completamente intelectual y que no solo se utiliza para resolver problemas prácticos.

La baja edad media

En esta época (entre 1250 y 1492 hacia la primera mitad del siglo XIV) se dieron los avances que se consideran más importantes en los que le dirección una dirección diferente a la de los griegos. Un ejemplo claro de esto se dio cuando los matemáticos del colegio de Mentón, se propusieron predecir, utilizando herramientas matemáticas, el valor de una magnitud física que está cambiando, como la fuerza que actúa sobre un móvil que se desplaza por un camino inclinado. La relación entre la matemática y la física dio origen a una nueva ciencia: la cinemática, que se constituyó con base en el Cálculo (Rendón, 2009).

Otra aportación importante de la época fue la primera formulación correcta de la ley del plano inclinado, realizada por Jordano de Namore, quien fundo la escuela medieval de mecánica, en donde el objetivo principal era el estudio de relaciones entre magnitudes físicas. La ley del plano inclinado de Jordano dice: La fuerza que actúa en la dirección de un camino inclinado es inversamente proporcional a su inclinación, donde la inclinación viene medida por la razón de un segmento dado del camino inclinado al segmento vertical que intercepta esta parte del camino, la razón del trayecto recorrido a la subida realizada. Se usa así la razón geométrica para explicar la forma constante de la Razón de Cambio entre magnitudes, lo que determina la inclinación del plano (Rendón, 2009).

Jordano encontró la dependencia entre la fuerza que actúa en la en la dirección del plano y la razón constante referida a la pendiente del plano, o su inclinación, mediante un diagrama de cuerpo libre como se muestra en la siguiente figura. Esta inclinación se expresa a partir de la razón geométrica entre las medidas de los segmentos respectivos. Se caracteriza aso un movimiento de Razón de Cambio constante, a través de las razones geométricas entre magnitudes (Rendón, 2009).

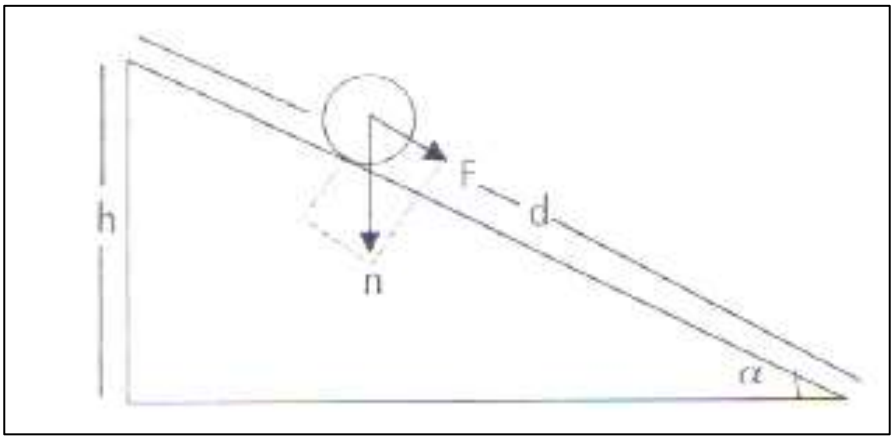


Imagen 22. Ley del plano inclinado (Rendón, 2009, p. 5)

El surgimiento de la matemática de las variables. Siglo XVII

En esta etapa los nombres que destacaron fueron Descartes (1596–1650) y Fermat (1601–1665) quienes comenzaron a trabajar con representaciones analíticas mediante el algebra que ya tenían desarrollado. Estos matemáticos desarrollaron el método de las coordenadas (pares ordenados de números) expresando las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos a través de relaciones numéricas, generando la Geometría Analítica (Esqueda, 2014).

El aporte principal de este método es que con este se puede traducir cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente. Por primera vez se utiliza el hecho de que una ecuación es una manera de expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de modo que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable correspondientes a determinados valores de la otra (Vrancken & Adriana, 2013).

Cuando comenzaron a surgir nuevas curvas, se presentaron problemas más complicados. Para los griegos la recta tangente a una curva en un punto, la entendían como la recta que toca a la curva en ese punto, pero no la corta al prolongarla. Se descubrieron nuevas soluciones al problema de la tangente utilizando los fenómenos de variación cuando la mecánica comenzó a ser más exigente. Los problemas que más aportaron al tema son: determinar la velocidad de los cuerpos en movimiento, dada la velocidad de movimiento determinar la trayectoria en un tiempo determinado y el problema de los máximos y mínimos (Esqueda, 2014).

> Los aportes de Fermat a la resolución de estos problemas fueron tales que Lagrange, Laplace y Tannery, entre otros, lo denominaron el inventor del Cálculo. Tratando de determinar los máximos y los mínimos de ciertas funciones, observó que una curva tiene en cada uno de sus puntos una dirección, definida por la recta tangente a la curva en dichos puntos, tal que donde la función tiene un máximo o un mínimo, la tangente es horizontal. En su obra *Methodus ad disquerendam maximan et miniman* publicada en 1637 expuso su método para encontrar el valor extremo o máximo de algunas variables y propuso una manera de resolver el problema de las tangentes utilizando ideas cercanas a los infinitesimales (Vrancken & Adriana, 2013, p. 62).

La base de los estudios de Fermat fueron las ideas intuitivas de cambio y la manera en que se comportan cuando se hacen muy pequeños (infinitamente pequeños), además de utilizar elementos visuales y gráficos. Su proceso consistía en que si una secante s rota sobre uno de los puntos de intersección de manera que el punto más próximo se acerca indefinidamente al primero, entonces la secante *s* se aproxima a la posición definida *t*. La recta que tiene esa posición se llama tangente a la curva, y el punto fijo, punto de contacto (o punto de tangencia). De todas las rectas que pasan a través de ese punto, la tangente es la que proporciona la mejor aproximación al curso de la curva en ese punto. Por ese motivo, la dirección de la tangente en el punto se llama también dirección de la curva en el punto (Vrancken & Adriana, 2013).

> Fermat consideró un pequeño arco *MN* (como se muestra en la siguiente figura) de una curva algebraica polinomial *f(x)*. por medio del trazado de la secante SMN se construye el triángulo MNP, de manera que *MNP ≈ SMR*, de donde la longitud de la subtangente *SR* está dada por $SR = \frac{MR \cdot MP}{PN}$, expresión que en términos modernos se escribiría: $SR = \frac{f(x) \cdot h}{f(x+h) - f(x)}$

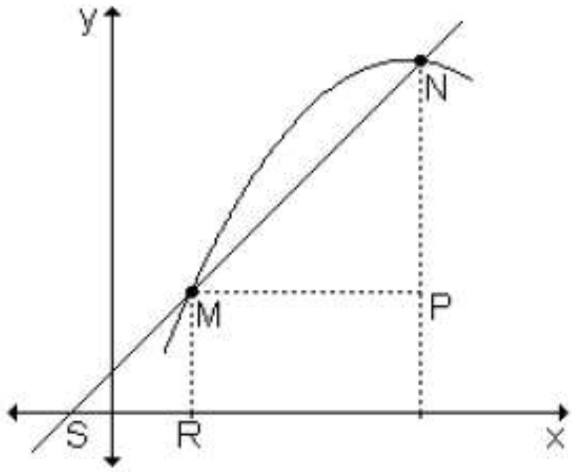


Imagen 23. Gráfica de Fermat para el problema de la tangente (Vrancken & Adriana, 2013, p. 63)

Después pasa de la secante a la tangente, poniendo *h = 0* (aunque no menciona que h debe aproximarse a cero o que se haga cero, sino solo que el término que contiene a *h* debe ser eliminado) de manera que, si $S = SR$, en términos modernos la expresión anterior quedaría escrita como $S = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Esto significa que la longitud de la subtangente, con la que la tangente queda determinada, se obtiene del cociente de la función entre su derivada (Vrancken & Adriana, 2013, p. 63).

Capítulo 3. Metodología

3.1. Esquema metodológico para la investigación socioepistemológica

Para la realización de esta investigación nos apoyamos en el *Esquema metodológico para la investigación Socioepistemológica* (Montiel & Buendía, 2012), como parte de la metodología, donde se muestran los diferentes momentos desde los cuales se desarrolla una investigación Socioepistemológica, así como las acciones que los relacionan. Este esquema está estructurado como se muestra en la siguiente figura:

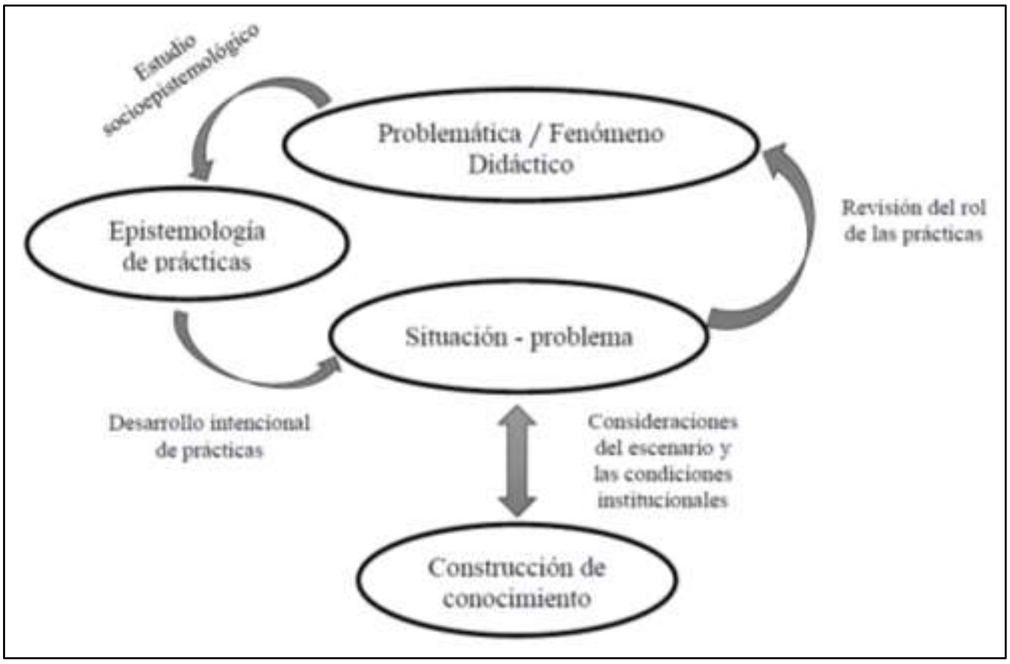


Imagen 24. Esquema metodológico para la investigación socioepistemológica (Montiel & Buendía, 2012, p. 63)

Cabe destacar que no necesariamente hay que cumplir con todos los momentos señalados en el esquema, la metodología puede estar compuesta por la combinación de algunos de ellos dependiendo de lo que se desee ver reflejado en cada investigación, es decir, los objetivos que se pretendan alcanzar. Para esta investigación consideramos los momentos: problemática/fenómeno didáctico, epistemología de prácticas, situación problema, construcción del conocimiento y las acciones: estudio socioepistemológico, desarrollo intencional de prácticas, consideraciones del escenario y las condiciones institucionales. A continuación, se explica en qué consisten los momentos y las acciones mencionadas anteriormente.

Momento: Problemática/Fenómeno didáctico

Este momento explica el problema por el cual realiza la investigación, relacionado con una problematización del saber matemático de acuerdo con el escenario en el que se pretende realizar dicha investigación, buscando de alguna forma poner en contexto este saber matemático relacionándolo con los conceptos que el estudiante debe utilizar. En esta investigación la problematización está asociada al desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), utilizando fenómenos hidráulicos que permitan explicar la construcción de la noción de Razón de Cambio. De esta problemática se desprende la pregunta de investigación y los objetivos.

Acción relacionante: Estudio socioepistemológico

Una vez planteada la problemática, se procede a realizar revisiones y sus respectivos análisis basados en las prácticas y los usos del saber. Las preguntas que guían este tipo de revisión son: ¿Por qué se hace lo que se hace?, o ¿Por qué se sabe lo que se sabe?, con respecto al saber matemático involucrado (Montiel & Buendía, 2012). Para nuestra investigación es necesario hacer una revisión de como se ha construido históricamente la noción de Razón de Cambio en ciertos ámbitos sociales, particularmente los relacionados con la Ingeniería Civil.

Momento: Epistemología de prácticas

Posteriormente se propone una epistemología de prácticas que muestre la construcción social del conocimiento, tomando en cuenta que lo social se entiende como la relación que existe entre las prácticas en las que se involucra el hombre al hacer matemáticas y el saber matemático que genera (Montiel & Buendía, 2012). En el caso particular de nuestra investigación se considera la predicción como la práctica social que ayuda al desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), que según nuestras especulaciones tiene como consecuencia la construcción de la noción de Razón de Cambio.

Acción relacionante: Desarrollo intencional de prácticas. Momento: Situación problema

Las prácticas que forman una epistemología tienen que reinterpretarse para incidir en otros contextos, esto es muy importante cuando dichas prácticas son producto de una revisión histórica, pero no es tampoco retomar problemas y situaciones históricas como reto. Mas bien, es retomar aquellos elementos propios del quehacer de las comunidades que en su momento resultaron significativos y reinterpretarlos a fin de que tengan hoy sentido y den significación al saber matemático a desarrollar (Montiel & Buendía, 2012). Desde la perspectiva de nuestra investigación es necesario retomar los elementos que fueron las herramientas para el desarrollo del PyLV desde el punto de vista de la Ingeniería Civil.

Las prácticas previamente identificadas deben ser, entonces intencionalmente desarrolladas con el objeto de favorecer la resignificación del saber matemático en cuestión. En este caso la noción de Razón de Cambio es el objeto central a construir, desarrollando el PyLV.

El papel principal que tiene una situación problema es que en su diseño se empleen herramientas metodológicas adecuadas para cada caso, es por esto que en esta investigación se trabaja con fenómenos hidráulicos ya que los conceptos que sirven como herramientas están estrechamente relacionados con la formación académica de los estudiantes. Cabe destacar que esta acción y este momento se encuentran en un mismo apartado por la relación que tienen entre sí, así como los objetivos de nuestra investigación en cada uno.

Acción relacionante: Consideraciones del escenario y las condiciones institucionales

Esta acción consiste en la descripción, interpretación y establecimiento de relaciones entre lo ocurrido en la situación problema con las características propias del escenario y la institución (Caballero, 2018). En nuestro caso, nos centramos en analizar como el desarrollo del PyLV nos puede conducir a la construcción de la noción de Razón de Cambio, así mismo explicar cómo esta construcción está ligada a la predicción como práctica social de la institución educativa a la que pertenecen los estudiantes.

Momento: Construcción del conocimiento

La situación problema nos lleva a la resignificación del conocimiento, tomando en cuenta que la resignificación se refiere al proceso continuo de darle significado al saber matemático a través de sus usos (Montiel & Buendía, 2012). Esta resignificación busca la construcción del conocimiento, en nuestro caso buscamos construir la noción de Razón de Cambio a través de sus usos en la Ingeniería Civil, lo que le potencializa al saber ya que para el estudiante es más atractivo que el discurso escolar utilizado tradicionalmente.

3.2. La graficación como objeto de estudio en Matemática Educativa

A continuación, se presenta una revisión que propone Suárez (2014), sobre el uso de las gráficas que nos proporciona elementos para perfilar el sentido del uso de las gráficas. En esta revisión se recopilaron algunas investigaciones sobre funciones, gráficas y graficación, dichas investigaciones contienen el concepto de función como idea central, es decir, que la enseñanza y el aprendizaje de este concepto es favorable para introducir las gráficas y su uso en el sistema escolar.

En la revisión que presentan Leinhardt, Stein y Zaslavsky (1990) se identifican hasta ese corte tres perspectivas en la literatura sobre funciones, gráficas y graficación.

a) En la primera se proponen cinco factores para describir una tarea que tenga que ver con funciones, gráficas y graficación. En la siguiente imagen se presenta una síntesis de estos factores que pasan por el tipo de acciones, de tareas típicas, de situaciones, de variables y de enfoques (Suárez, 2014).

Acciones	Tareas típicas	Situación	Variable	Enfoque
Construcción	De predicción	Es el marco de la gráfica o función	La situación sugiere la unidad apropiada El tipo de unidad determina la forma de la variable.	El enfoque tiene qué ver con asuntos de atención y presentación
Interpretación	De clasificación	Puede ser más o menos contextualizada o abstracta	La forma es la propiedad de la unidad: categórica, ordinal, de intervalo o de razón.	
Interpretación Construcción	De traducción (entre representaciones)		Contexto de la variable	
Interpretación Construcción	De escala			

Imagen 25. Clasificación de tareas de Leinhardt, Stein y Zaslavsky, 1990 citado por (Suárez, 2014, pág. 38)

En las acciones sobre las gráficas se pueden destacar dos grupos: las que son de construcción y las que son de interpretación. Considerando estas acciones se analizan mediante cuatro tareas típicas: de predicción, de clasificación, de traducción y de escala. Las tareas de predicción son tareas de construcción de los patrones que subyacen en las gráficas y las funciones. Las tareas de clasificación son principalmente de interpretación en las que se han identificado relaciones entre la definición formal de una función y las imágenes de gráficas que tiene el estudiante. Las tareas de traducción pueden involucrar acciones de construcción o de interpretación y tienen que ver con el pasar de la representación gráfica a otras representaciones. Y las tareas de escala, que también pueden ser de interpretación o de construcción y que relacionan las convenciones con las tensiones y las limitaciones del sistema coordinado cartesiano (Suárez, 2014).

En el caso de nuestra investigación es relevante mencionar las tareas de traducción y de interpretación ya que para que se llegue al objetivo, es necesario que los estudiantes pasen de una representación gráfica a otra representación que es el fenómeno como tal, sin dejar de mencionar la tarea de predicción ya que en necesario que los estudiantes construyan patrones, que puedan describir en una gráfica el comportamiento del fenómeno de vaciado de recipientes.

Otros elementos que contiene la clasificación de la tabla y que también influyen son la situación, que se refiere a los distintos escenarios en donde se pueden presentar las tareas, el tipo de variable que interviene en la tarea, que también depende de lo que se requiera en una determinada situación, y el enfoque que es la forma de presentar la tarea.

b) En la segunda perspectiva el grupo de investigaciones considera al estudiante y su desempeño en estas tareas que relacionan funciones, gráficas y graficación. La idea de este grupo es poner atención en las intuiciones, conceptos erróneos y otras dificultades.

c) El tercer grupo de investigación se ha realizado desde la perspectiva de cómo se enseñan las funciones, las gráficas y la graficación en los salones de clases y en ambientes tecnológicos. Las autoras señalan una escasez, a la fecha, de investigaciones sobre la enseñanza, los trabajos relacionados con este punto más bien son sugerencias para el uso de las gráficas, sobre la secuencia y sobre la construcción de explicaciones (Suárez, 2014).

Cabe destacar que desde estas perspectivas se establece que la representación algebraica y la representación gráfica deben articularse, para hacer posible la construcción del concepto de función y al mismo tiempo poder definirlo como tal. Esta investigación ha servido como punto de partida para la realización de otras investigaciones en donde se plantean los diversos usos de la graficación.

Con todo lo que se mencionó anteriormente de la graficación, podemos deducir que los intereses de estudiar la graficación están ligados al Cálculo y el Análisis, y se establece que la graficación juega un papel muy importante en la construcción del conocimiento matemático.

> Con el (un acercamiento didáctico novedoso basado en la investigación en Matemática Educativa), buscamos construir una base de significaciones para procesos y conceptos del análisis matemático, especialmente del que se enseña al nivel universitario. Iniciamos con actividades para la construcción, entre los estudiantes, de un universo de formas gráficas que sea a la vez, amplio y estructurado; y continuamos con el desarrollo de la noción de predicción de los fenómenos de flujo apoyados en el binomio de Newton. La combinación de ambas tareas, sostenemos esta hipótesis, favorece al desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral y Farfán, 1998 citado por Suárez, 2014, p. 40).

Este párrafo hace énfasis en la importancia de que los estudiantes construyan un universo de gráficas amplio y estructurado, y también menciona que el desarrollo de la noción de predicción favorece el desarrollo del PyLV.

Ahora bien, en esta investigación se presenta una revisión de trabajos sobre la modelación que sirve para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un ambiente tecnológico, así como también las diferentes perspectivas de investigación que toman a la graficación como objeto de estudio en Matemática Educativa como se mencionó anteriormente.

3.3. Sistema de referencia variacional

Con el fin de explicar la forma en como la variación es construida en situaciones de cambio, se establece lo que Caballero (2018) le llama sistema de referencia variacional, que surge de la articulación teórica de las nociones de causalidad y temporización, en las que causalidad se entiende como la dependencia que existe entre las variables y la temporización se entiende como la construcción de estados intermedios en el desarrollo del fenómeno para predecir estados futuros.

> La causalidad y temporización atiende diferentes aspectos de la variación que se resumen en las interrogantes ¿Qué cambia?, ¿respecto de que cambia?, ¿Cuánto cambia?, ¿Cómo cambia?, ¿Por qué cambia de esa manera? La causalidad, al consistir en establecer una relación entre variables (¿Qué cambia?), precisa que dichas variables sean reconocidas como tales (¿respecto a que cambia?), lo que requiere de mecanismos de cuantificación (¿Cuánto cambia?). en cuanto a la temporización, esta favorece que el cambio sea analizado a través de los estados construidos (¿Cómo cambia?). por último, al considerar en conjunto a la causalidad y la temporización se construye una racionalidad sobre la variación del fenómeno (¿Por qué cambia de esa manera?), ya que el comportamiento observado se analiza en función de la relación que se establece y los estados que se construyen (Caballero, 2018, p. 90).

El sistema de referencia variacional surge de la forma en que se articulan las preguntas mencionadas anteriormente, considerando los elementos que lo conforman la relación de variables (lo que se percibe que cambia), el elemento de referencia (como se reconoce el cambio), la unidad de medida (como se mide la intensidad del cambio) y la temporización (como se reconoce la evolución del cambio) (Caballero, 2018). A continuación, se describe cada elemento que forma parte de un sistema de referencia variacional.

Relación de variables: Los fenómenos de variación continua se caracterizan por la posibilidad de presentar simultáneamente diversas variables que se modifican continuamente que pueden coincidir con las de una función o pueden ser diferentes a ellas.

Por ejemplo, si consideramos la función $y = mx, x$ corresponde a la variable independiente de la función en tanto que y corresponde a la variable dependiente, pero si nos interesa estudiar la inclinación de la recta al variar el parámetro m, tenemos dos nuevas variables de estudio diferentes, el valor de m y la inclinación de la recta (Caballero, 2018). Este ejemplo se representa en la siguiente figura.

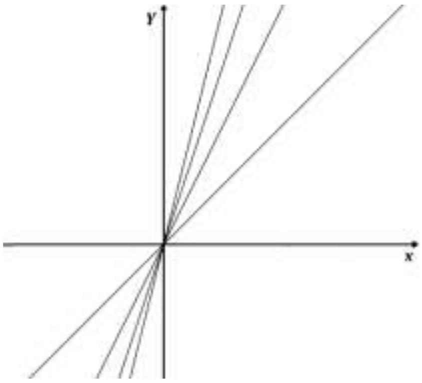


Imagen 26. Variación del parámetro m de la función $y = mx$ (Caballero, 2018, p. 91)

Cabe mencionar que al estudiar la variación estamos abordando todos aquellos aspectos en los que existe un cambio, pero también es muy importante centrar la atención no solo en las variables, sino en la relación que se establece entre ellas. En el ejemplo anterior se identifican las variables a estudiar en un fenómeno de cambio, pero también es necesario centrar la atención en la relación que existe entre esas variables y la dirección de esa relación, es decir, cual variable afecta a cuál.

En nuestra investigación estaríamos tratando con las variables tiempo, altura, entre otras, sin embargo, la relación que se establece entre estas dos es muy importante ya que el tiempo no podemos controlarlo a voluntad, por lo tanto, la variable altura depende del tiempo de vaciado del recipiente. Es por esto que es necesario considerar este elemento del sistema de referencia variacional.

Elemento de referencia: Para estudiar el cambio en un fenómeno debe existir un referente para verificar una modificación y que al mismo tiempo sirva para medir el cambio, es decir, la unidad de referencia nos permite establecer "respecto a que cambia" una variable en un determinado fenómeno.

> La unidad de referencia corresponde a un valor fijo a partir del cual se percibe el cambio, en el sentido de que la variable se "aleja" de ese valor. Puede consistir en la magnitud que tiene la variable inicialmente, aunque en general se trata de una magnitud arbitraria que cumpla la función de dar cuenta de modificaciones en las variables. Por ejemplo, percibimos que un auto está en movimiento si se aleja de su posición inicial, o bien, si se aleja o acerca a nosotros (nuestra posición), o en el caso de la temperatura corporal, un aumento o disminución de ella se refiere si se aleja de un valor promedio, siendo en este caso diferente de cero (Caballero, 2018, p. 93).

También existe otra forma de interpretar la unidad de referencia mediante comportamientos que ya son conocidos, lo que permite compararlos con nuevos comportamientos o si existen algunas modificaciones de un comportamiento previo, es decir, tomar un comportamiento como modelo para comparar comportamientos similares.

Unidad de medida: Se refiere a la cuantificación del cambio dentro de la variación en un determinado fenómeno, por lo que es necesario considerar el uso de estrategias y herramientas que permitan realizar esta medición, para establecer una magnitud mediante la comparación de dos elementos.

> En Buendía (2006) se reporta que al predecir el comportamiento de un móvil a través de su gráfica hay una búsqueda de alguna unidad fundamental para comparar los estados futuros con el presente, búsqueda que inicia con la descripción y entendimiento del tipo de movimiento. Observamos que se constituye un referente para caracterizar el tipo de movimiento a partir del análisis de cómo cambia la distancia para lapsos específicos (Caballero, 2018, p. 94).

La unidad de medida no es específicamente una cantidad estandarizada con una magnitud (por ejemplo, metro–longitud), sino como el elemento que permite medir el cambio en una variable mediante la comparación entre dos elementos, la cantidad que se mide y la cantidad con la que se mide, es decir, "cuánto cambia". También cabe mencionar que esta medición del cambio no siempre es una magnitud exacta y en ocasiones puede ser aproximada. En nuestra investigación los estudiantes deberán establecer aproximaciones para poder predecir el comportamiento de ciertas gráficas que representen un fenómeno en donde es necesario identificar la unidad de referencia, como se describe anteriormente, y así comparar para disponer de una unidad de medida. Esto se le conoce como medición descriptiva del cambio, la cual no involucra valores numéricos, sino en la expresión de las características y descripciones, así como: es más grande/pequeño que, más alto/bajo que, más rápido/lento que, crece/decrece cada vez más/menos, etc. (Caballero, 2018).

Por otro lado, la cantidad de cambio también puede medirse de manera numérica cuando se asigna un valor a una determinada cantidad, esta medición puede efectuarse multiplicando la unidad de referencia (es el doble de, la mitad de, etc.), o también pueden establecerse valores específicos mediante la medición utilizando alguna herramienta (un flexómetro, una cuadricula, etc.), o utilizando formulas o algoritmos que provienen de teoremas ya establecidos por la Matemática.

Temporización: Como ya se mencionó anteriormente, consiste en construir estados intermedios para analizar el proceso de variación de las variables, es decir, el análisis de cómo cambia. Esto no necesariamente se refiere a considerar al tiempo como variable de estudio, aunque por la naturaleza del fenómeno que tratamos en nuestra investigación es una variable indispensable.

> La temporización comprende dos sentidos: el primero es la identificación de estados que son sugeridos o explícitos en alguna actividad o situación, por ejemplo, en el caso de una tabla numérica se puede considerar estados a cada uno de los valores numéricos de la variable dependiente, mientras que, en una gráfica se puede considerar estados a cada uno de los valores del eje horizontal en case de que este cuente con una escala numérica explícita. El segundo sentido consiste en la construcción de los estados al no ser explícitos en la situación planteada, por ejemplo, al establecer valores específicos de las variables en una gráfica que no cuente con una escala explícita, o al reconocer instantes de tiempo específicos en el movimiento de un cuerpo (Caballero, 2018, p. 96).

La temporización establece la construcción de estados intermedios, sin embargo, también es necesario considerar el número de estados de un determinado fenómeno, principalmente se identifican dos casos: estados extremos y estados intermedios. Los estados extremos son aquellos en donde se considera un estado inicial y otro estado final, estos pueden coincidir con el principio y fin del fenómeno, o también pueden ser los extremos de un determinado intervalo. Ahora bien, para ejemplificar el caso de los estados extremos Caballero (2018) presenta la gráfica de la siguiente imagen en donde los estados que se identifican no corresponden con "el inicio y el final" de la gráfica, sino a dos puntos que conforman un intervalo del dominio.

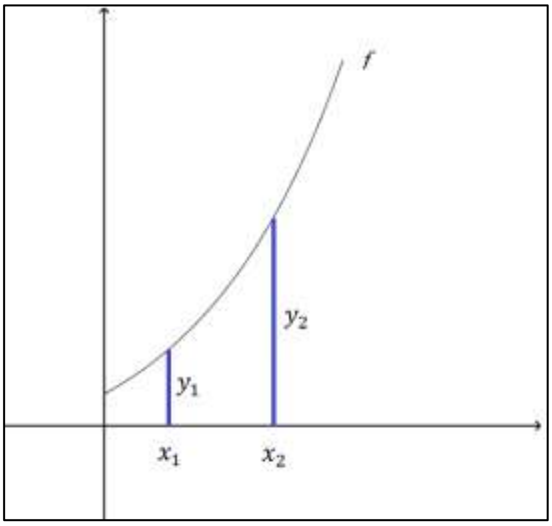


Imagen 27. Ejemplo de una temporización de estados extremos (Caballero, 2018, p. 97)

Ahora bien, si tratamos con los estados intermedios es necesario considerar más de dos estados dentro del desarrollo del fenómeno, los cuales describen su comportamiento. Esto permite realizar un análisis de la variación entre un estado y otro, por lo tanto, las gráficas adquieren cierto "movimiento" lo que contribuye a la construcción de ciertas nociones relacionadas al PyLV.

> Una diferencia entre estados extremos y estados intermedios es que en la primera se consideran siempre dos estados a la vez, en tanto que en la segunda se considera el tránsito de uno a otro. Es decir, aunque se tengan varios estados consecutivos, si el análisis del cambio se realiza considerando solo dos estados a la vez, esa temporización corresponde a estados extremos. Ahora bien, si el análisis se realiza considerando un conjunto de varios estados y la forma en como el fenómeno evoluciona de un estado a otro, entonces corresponde a estados intermedios (Caballero, 2018, p. 97).

En resumen, la noción de sistema de referencia variacional consiste en el reconocimiento y la forma en que se organiza el cambio, la construcción de la variación por un individuo ante una situación de predicción, lo cual tiene lugar mediante el desarrollo de las nociones de temporización y de causalidad (Caballero, 2018). La noción de sistema de referencia variacional se desarrolla según sea la situación de variación planteada que se ve afectada por el tipo de fenómeno que se esté tratando vinculado a las experiencias y el entorno social. A continuación, se presenta un esquema que propone Caballero (2018) en donde se sintetizan los elementos del sistema de referencia variacional, y los cuestionamientos que se relacionan con cada elemento del sistema.

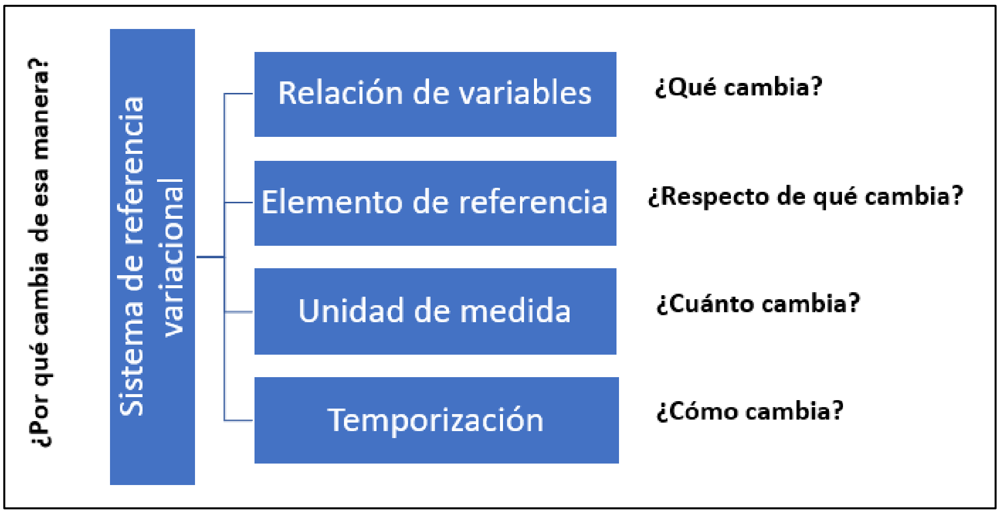


Imagen 28. Elementos del sistema de referencia variacional (Caballero, 2018, p. 99)

3.4. Diseño de la situación didáctica

La situación didáctica consta de tres actividades que se llevaran a cabo en tres sesiones, en las cuales los alumnos atenderán problemas relacionados al fenómeno de vaciado de recipientes con diferentes geometrías, aunque también se realizara una breve introducción para que los estudiantes recuerden algunos conceptos que se abordan en el fenómeno de llenado de recipientes; así como también tendrán que argumentar graficamente el comportamiento de cada fenómeno. Posteriormente es necesario modelar el fenómeno analíticamente hasta conseguir la ecuación diferencial, para poder llegar a la construcción de la simulación en GeoGebra. Cabe destacar que ya existe una simulación para cada fenómeno en la plataforma de GeoGebra, así como también un tutorial que explica la forma de realizarlo en YouTube, ambos realizados por nosotros como apoyo para ésta investigación, y nos servirán como herramientas para reafirmar los conocimientos construidos por los estudiantes.

3.5. Actividad 1. Llenado de Recipientes

Esta actividad consiste en exponer una introducción a los estudiantes en donde se tratarán tres recipientes con diferentes geometrías que se están llenando con un flujo constante. Buscando sus argumentaciones gráficas para que los estudiantes se familiaricen con los conceptos utilizados en situaciones de variación.

Conocimientos y habilidades

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes recuerden ciertos conceptos que de alguna manera ha construido en su formación académica y los utilice en un “fenómeno real”, en este caso el llenado de recipientes, realizando un análisis variacional en donde se identifica la forma en que evoluciona el fenómeno, para poder determinar la gráfica que lo representa.

Intenciones didácticas

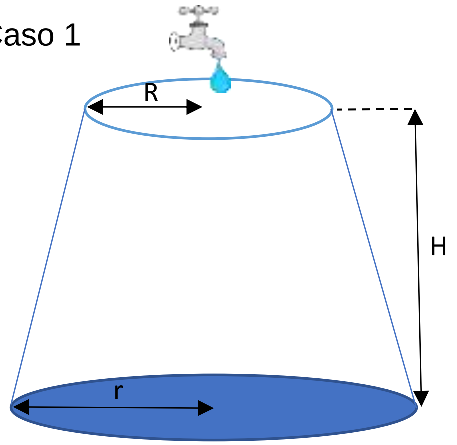
Se pretende explicar en clases el fenómeno de llenado de recipientes proponiendo una actividad grupal en la que se muestran tres recipientes con diferentes geometrías y las tres gráficas que se los representan, sin indicar que gráfica le corresponde a cada recipiente, con el objetivo de que el estudiante identifique que gráfica le corresponde a cada recipiente en relación a la forma en que este se llena con un flujo constante, y argumente sus repuestas con el fin de hacer visibles los elementos que son parte de este tipo de fenómenos.

Consideraciones previas

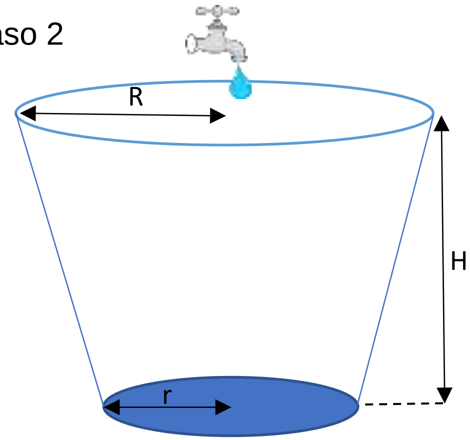
Es necesario considerar que los estudiantes tienen conocimientos relacionados con aspectos básicos de la hidráulica, así como también las ideas de pendiente, velocidad y algunas fórmulas básicas utilizadas en la materia de Cálculo Integral, esto para poder realizar la modelación analítica del fenómeno. También es necesario que los estudiantes exploren de manera general el software (GeoGebra).

Actividad 1. Considerando que los siguientes recipientes se están llenando con un flujo constante, identifica y relaciona que gráfica representa el llenado del recipiente según su geometría y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior.

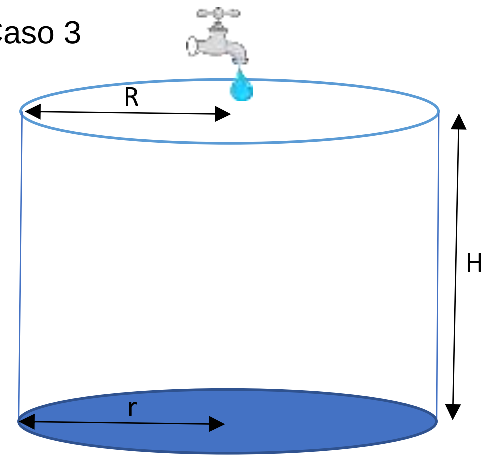
Caso 1

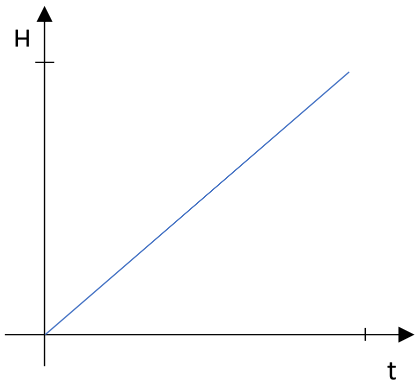


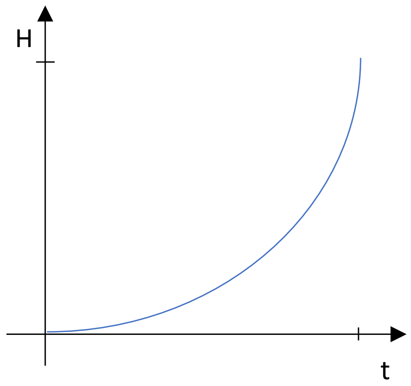
Caso 2

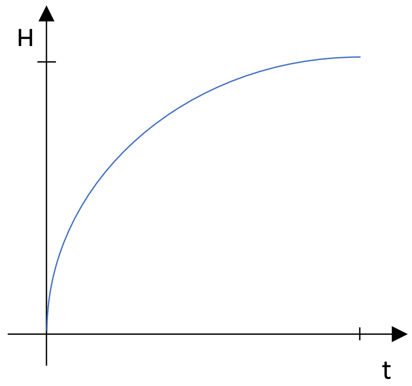


Caso 3









Modelación

Posteriormente modelamos el fenómeno de manera analítica, sin señalar cuál es la gráfica que corresponde a cada recipiente con el objetivo de que, con este modelo, se comprueben las conjeturas que surgen en esta actividad. El modelo se explica a continuación definiendo la ecuación T para el tiempo de llenado.

Si tenemos la siguiente figura:

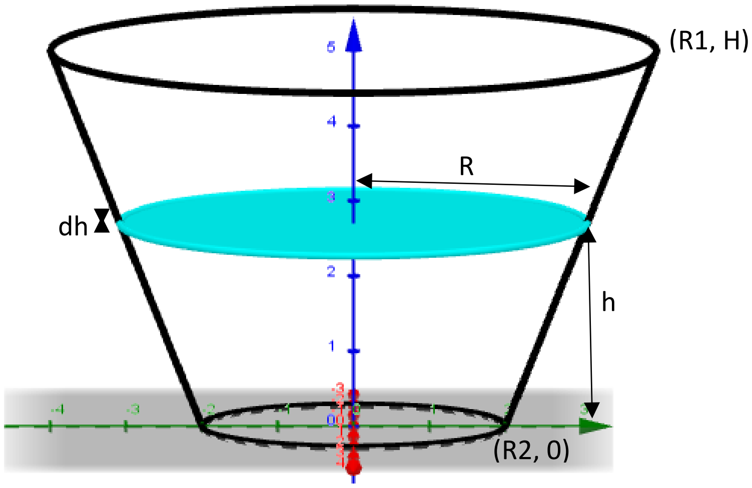


Imagen 29. Llenado de un recipiente (cono truncado)

La pendiente de la recta es: $m = \frac{H}{R1-R2}$

Esta es la ecuación de la recta: $y = \frac{H}{R1-R2}(x - R2)$

Si $x = R$ y $y = h$ (llamaremos R al radio del agua)

$$h = \frac{H}{R1 - R2}(R - R2)$$

Despejando R: $R = \frac{h}{H}(R1 - R2) + R2$

Sabemos que: $Q = \frac{dv}{dt}$ y que: $\frac{dv}{dh} = \pi R^2$

Según la regla de la cadena: $\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dh}\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)$

Sustituyendo $\frac{dv}{dh}$ y R: $\frac{dv}{dt} = \pi \left(\frac{h}{H}(R1 - R2) + R2\right)^2 \frac{dh}{dt}$

Sustituyendo $\frac{dv}{dt}$, despejando y desarrollando:

$$Qdt = \pi \left\{\frac{h^2}{H^2}(R1 - R2)^2 + 2\left[\frac{h}{H}(R1 - R2)R2\right] + R2^2\right\} dh$$

Integrando: $\int_0^t Qdt = \pi \int_0^H \frac{h^2}{H^2}(R1 - R2)^2 + 2\left[\frac{h}{H}(R1 - R2)R2\right] + R2^2\, dh$

$$Qt = \pi \left\{ \frac{h^3}{3H^2}(R1 - R2)^2 + \frac{h^2}{H}(R1 - R2)R2 + R2^2 h \right\}$$

Evaluando: $Qt = \pi \left[\frac{H^3}{3H^2}(R1 - R2)^2 + \frac{H^2}{H}(R1 - R2)R2 + R2^2 H \right]$

Despejando y factorizando: $t = \frac{\pi H}{Q} \left[\frac{1}{3}(R1 - R2)^2 + (R1 - R2)R2 + R2^2 \right]$

Pero para fines didácticos diremos que $t = T$, ya que es la forma en que utilizaremos este término en la construcción de la simulación que se explica más adelante.

Igualamos a 0 la ecuación Qt (sin evaluar) para obtener la **función**:

$$Qt = \pi \left\{ \frac{h^3}{3H^2}(R1 - R2)^2 + \frac{h^2}{H}(R1 - R2)R2 + R2^2 h \right\}$$

$$0 = \pi \left\{ \frac{h^3}{3H^2}(R1 - R2)^2 + \frac{h^2}{H}(R1 - R2)R2 + R2^2 h \right\} - Qt$$

Pero para la construcción de la simulación es necesario indicar a GeoGebra que exprese la altura “h” en el eje “x”

$$0 = \pi \left\{ \frac{x^3}{3H^2}(R1 - R2)^2 + \frac{x^2}{H}(R1 - R2)R2 + R2^2 x \right\} - Qt$$

Simulación

Con el modelo desarrollado anteriormente se construye la simulación en GeoGebra, siguiendo los pasos que se muestran a continuación.

a) Teniendo el software nos aseguramos de tener disponibles la vista algebraica, la vista gráfica y la vista gráfica 3D.

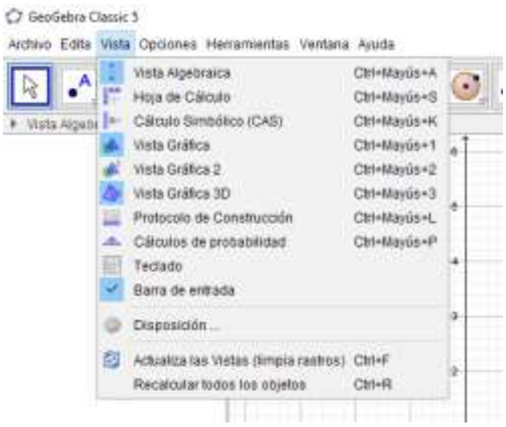


Imagen 30. Espacio de trabajo en GeoGebra

b) Definimos en la barra de entrada las siguientes variables con números aleatorios: H = Altura del recipiente, R1 = Radio 1, R2 = Radio 2 (los dos radios del recipiente), Qr = Es el gasto en litros por segundo, Q = Qr/1000 (Es la conversión de litros a metros cúbicos).

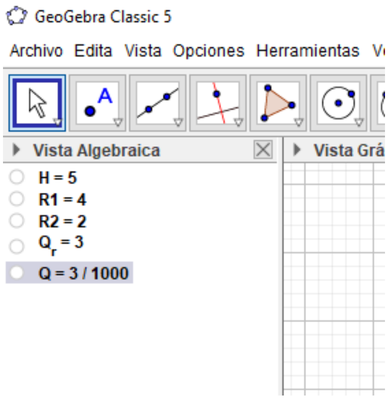


Imagen 31. Variables de entrada

c) Definimos los puntos guía para dibujar el recipiente insertando el siguiente código en la barra de entrada: (R2,0,0); (0,R2,0); (-R2,0,0); (0,-R2,0); (R1,0,H); (0,R1,H); (-R1,0,H); (0,-R1,H); Cada paréntesis es un punto en el sistema coordenado.

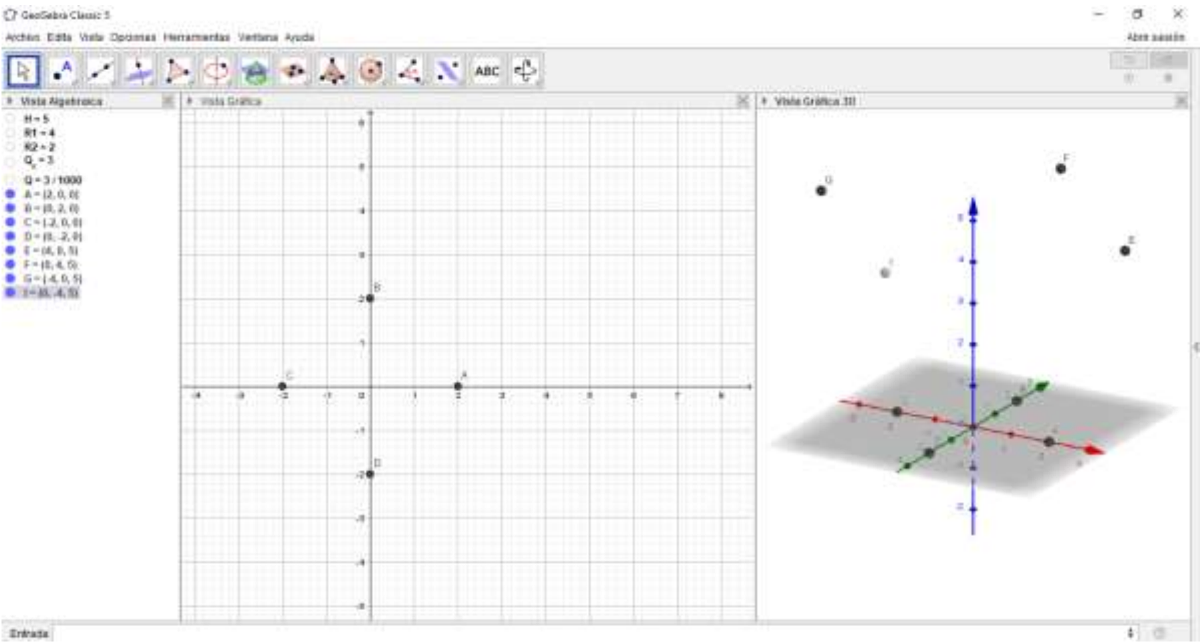


Imagen 32. Puntos guía

d) Con la herramienta circunferencia (eje, punto) dibujamos los dos círculos con los radios del eje a los puntos.

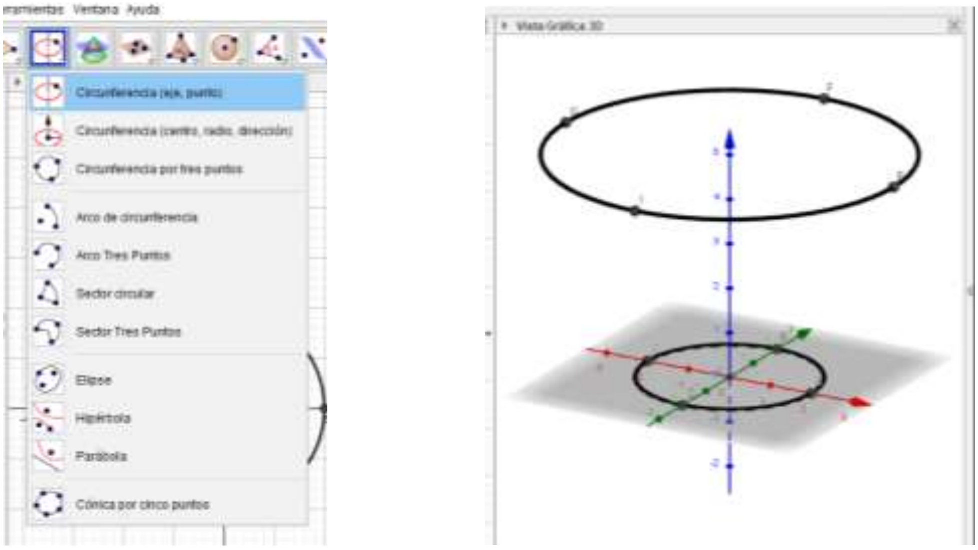


Imagen 33. Circunferencias

e) Insertamos la ecuación T: $t = \frac{\pi H}{Q}\left[\frac{1}{3}(R1 - R2)^2 + (R1 - R2)R2 + R2^2\right]$ obtenida en la modelación insertando el siguiente código en la barra de entrada.

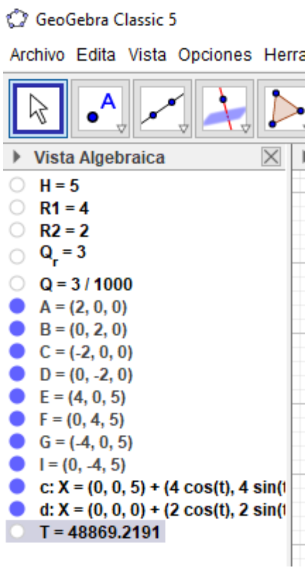


Imagen 34. Ecuación T

NOTA: Con los datos utilizados en este caso, en algunas versiones de GeoGebra encontramos a T=48869.2191 y en otras T=140000π/9.

f) Se crea un deslizador para el tiempo (t). Con limites desde 0 hasta T con incrementos de uno en uno.

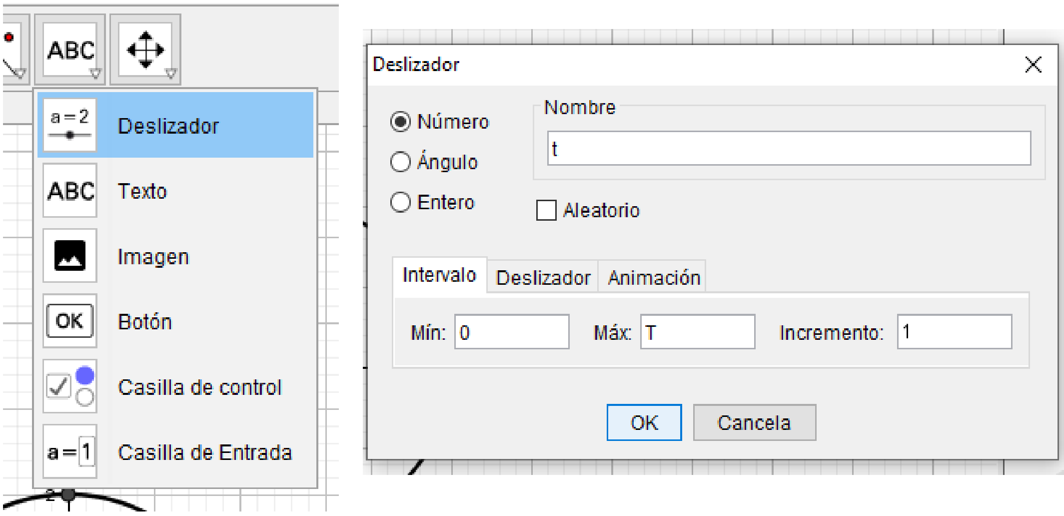


Imagen 35. Deslizador t

g) Insertamos la **función**: $\pi\left\{\frac{x^3}{3H^2}(R1-R2)^2+\frac{x^2}{H}(R1-R2)R2+R2^2x\right\}-Qt$ obtenida en la modelación ingresando en la barra de entrada el siguiente código y se presenta la siguiente gráfica.

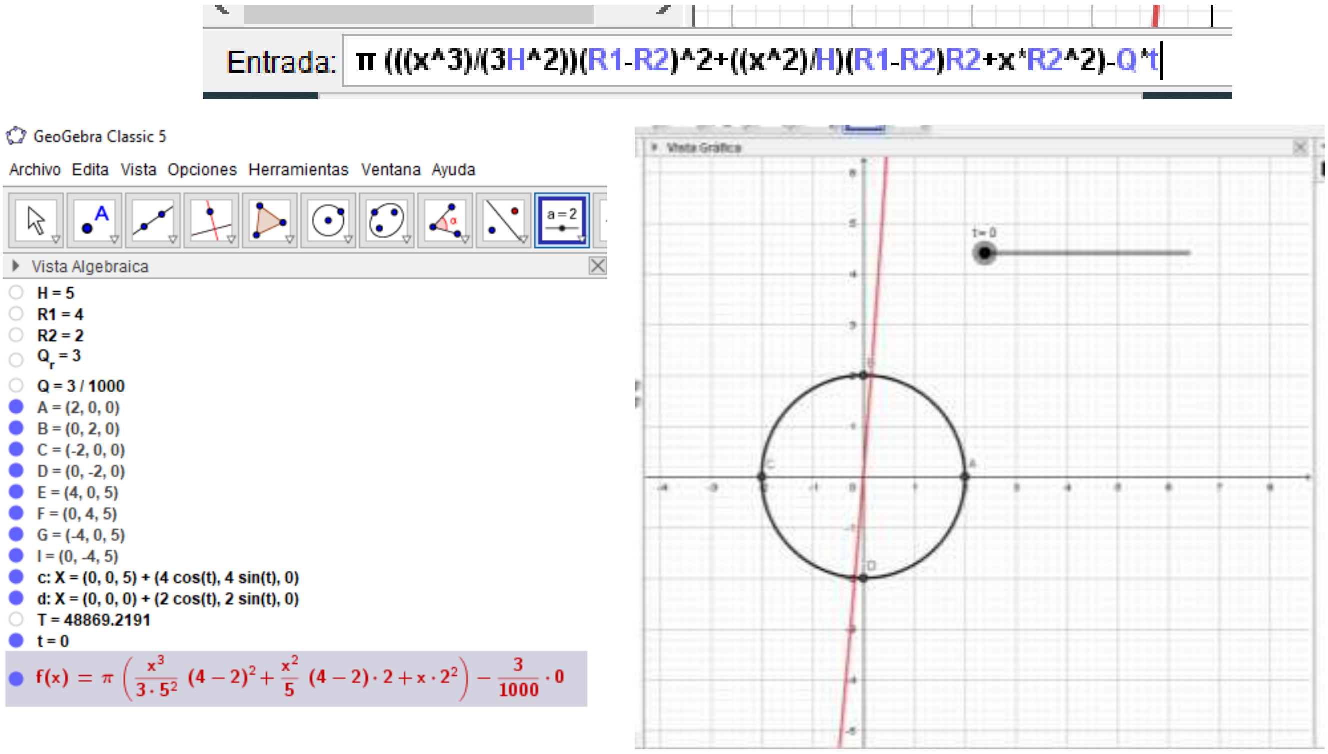
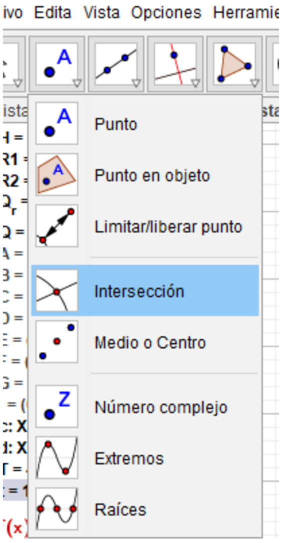


Imagen 36. Función

h) Se ubica la intersección entre la gráfica de la **función** y el eje “x”. En este caso es el punto J.



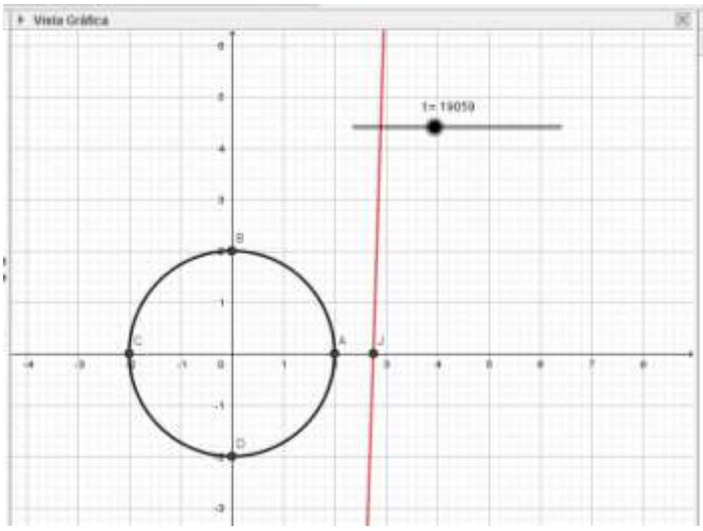


Imagen 37. Intersección

i) Se ingresa el numero R obtenido en la modelación y es la siguiente ecuación: $R = \frac{h}{H}(R1 - R2) + R2$, insertando en la barra de entrada el siguiente código.

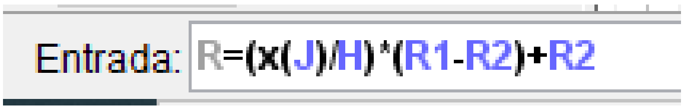
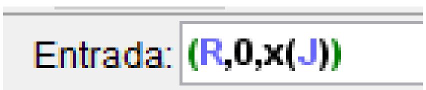
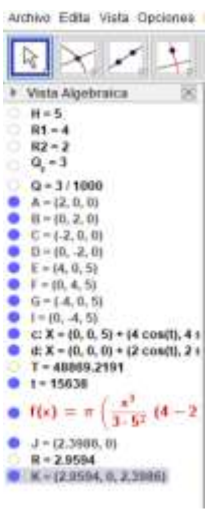


Imagen 38. Radio del agua

NOTA: En la función establecimos que la altura “h” la expresara en el eje “x”, por lo tanto, es necesario indicar a GeoGebra que obtenga la coordenada en “x” del punto de intersección (J) entre la función y el eje.

j) Se coloca un punto en la vista 3D, el cual tendrá como coordenada en “x” el número R y en “z”, la coordenada en “x” del punto de intersección entre la función y el eje “x”. Para este punto se ingresa lo siguiente en la barra de entrada. En este caso obtenemos el punto K.





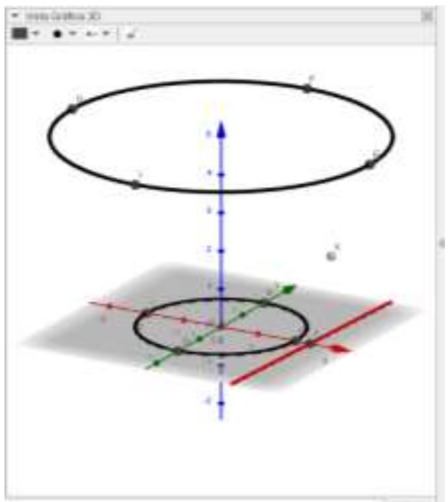


Imagen 39. Punto en el espacio que representa el radio del agua

k) Se dibuja la circunferencia que representa el agua entre el eje “z” y el punto K.

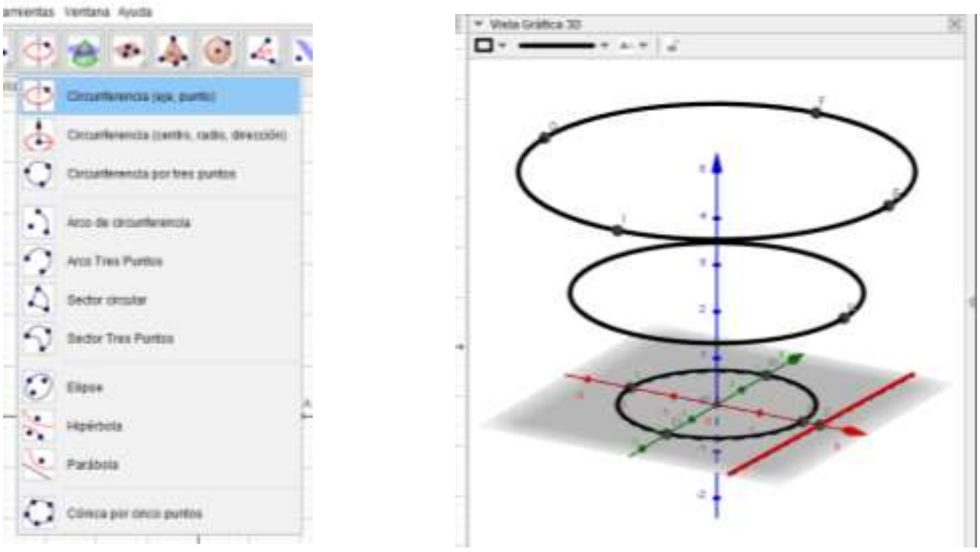


Imagen 40. Circunferencia del agua

l) Se modifica el color de la circunferencia para simular el agua.

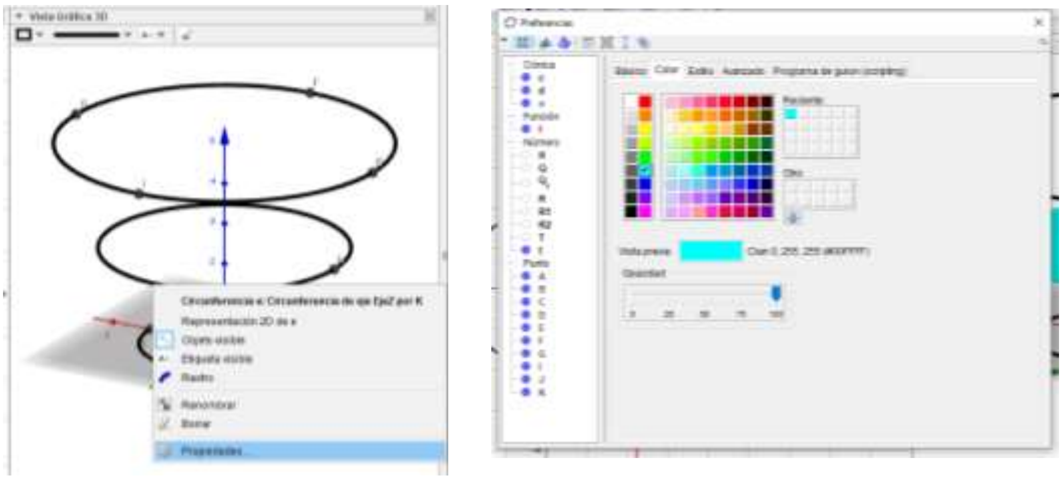


Imagen 41. Color de la circunferencia

m) Se dibujan segmentos para representar el contorno del recipiente.

Imagen 42. Contorno del recipiente

n) Se dibuja un segmento del punto K al eje correspondiente, modificamos el color para que simule el agua y con rotación axial dibujamos el contorno (opcional).

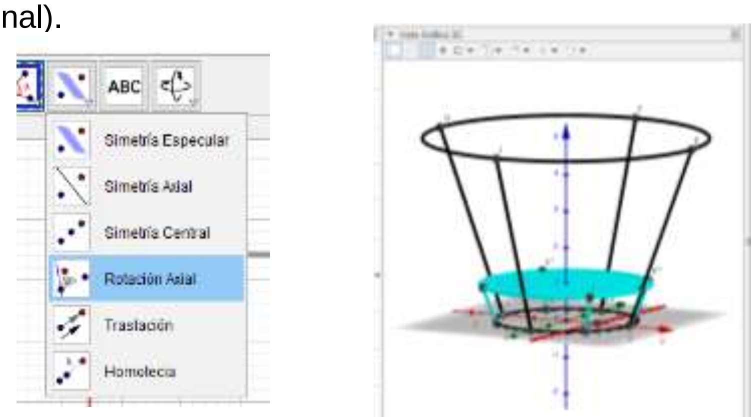


Imagen 43. Contorno del agua

o) Se modifica la escala para insertar un punto que dibuje la gráfica. El eje "x" debe describir el tiempo y el eje la altura del agua, por lo tanto, las coordenadas que se escriben en la barra de entrada serán: (t, z(K)).

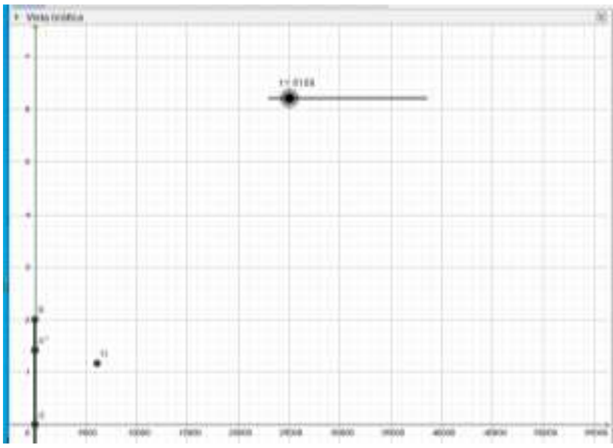


Imagen 44. Punto para la gráfica

p) Se activa la opción "rastro" para que dibuje la gráfica.

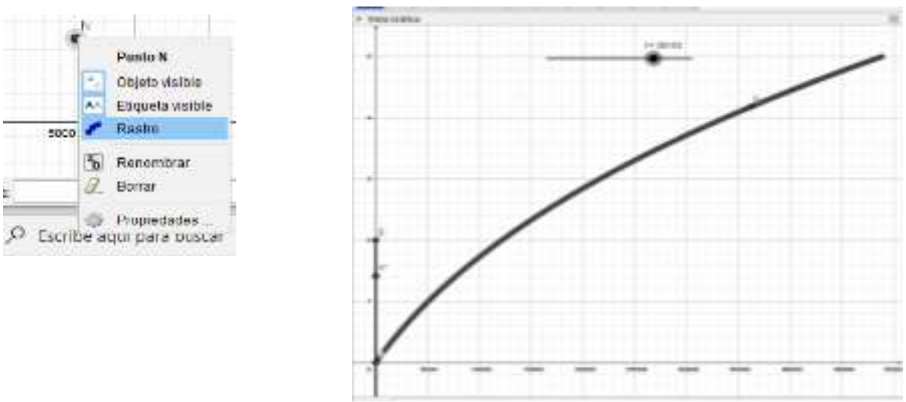


Imagen 45. Gráfica de llenado de un cono truncado

NOTA: Al modificar las variables iniciales, dibujaría una gráfica diferente a esta.

Cabe mencionar que el proceso de modelación y simulación se encuentran en un tutorial en el link: https://www.youtube.com/watch?v=57Qy2w8yr6c&t=620s (Manuel, 2018) de la plataforma YouTube, el cual será proporcionado a los estudiantes para aclarar sus dudas y puedan construir cuantas veces quieran la simulación del fenómeno de llenado de recipientes con diferentes geometrías.

3.6. Actividad 2. Vaciado de Recipientes

En esta actividad se presentan tres recipientes con diferentes geometrías que están completamente llenos y se están vaciando por un orificio. El objetivo es que, mediante el análisis variacional, los estudiantes representen el fenómeno de vaciado de recipientes en una gráfica, desarrollando así la noción de variación que nos lleva a la Razón de Cambio. Se divide en cuatro momentos, en donde el primero consiste en la actividad 2.1, la cual se pretende terminar en quince minutos. En el segundo momento se presenta la actividad 2.2, la cual se pretende terminar en diez minutos. En el tercer momento se pretende conformar equipos entre los estudiantes para analizar sus repuestas y argumentos, para esto tendrán quince minutos. Y finalmente en el cuarto momento expliquen sus conclusiones por equipos con el grupo completo argumentando sus respuestas.

Actividad 2.1

Conocimientos y habilidades

Se pretende que los estudiantes construyan la noción de variación mediante situaciones predictivas analizando el comportamiento del fenómeno de vaciado de recipientes con diferentes geometrías, tomando en cuenta que en el recipiente que se está vaciando influyen factores como la presión que ejerce el agua, el radio es mayor o menor que antes, etc.; y representando lo que observa en gráficas que relacionan la altura con el tiempo de vaciado.

Intenciones didácticas

Se les proporcionaran hojas con las actividades con el objetivo de que los estudiantes las realicen y que argumenten sus respuestas para analizar de qué manera enfrentan este tipo de problemas y los conocimientos que ponen en juego en la realización de las gráficas que se les pide.

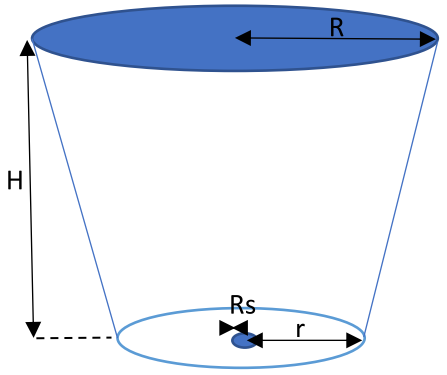
Consideraciones previas

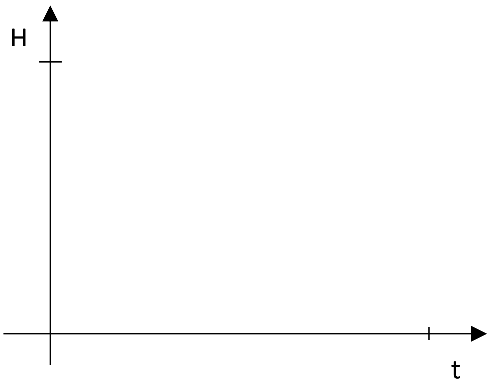
Los alumnos actualmente cursan la materia de ecuaciones diferenciales por lo tanto hay que considerar que los estuantes tienen conocimientos previos sobre el fenómeno de llenado de recipientes, así como el análisis de sus gráficas y como cambian según la geometría del recipiente debido a la variación que se presenta en el radio a medida que se va llenando.

Nombre____Semestre: _____ Grupo: ____

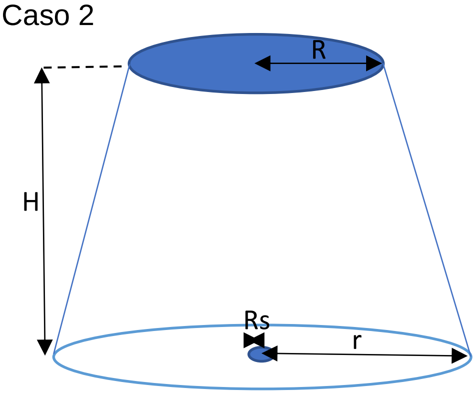
Actividad 2.1. Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

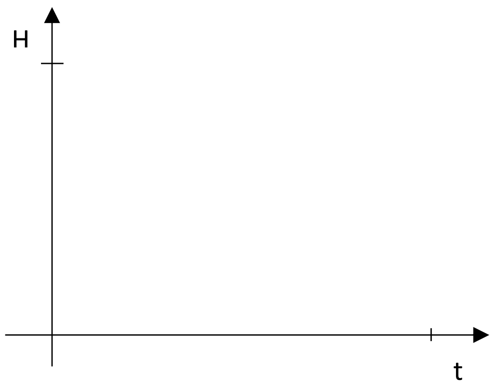
Caso 1



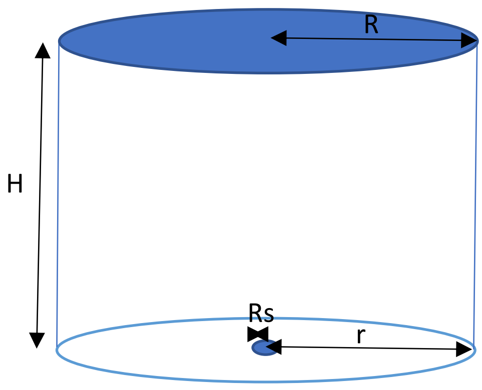


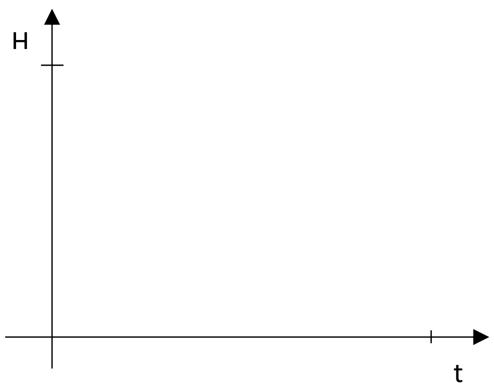
Caso 2





Caso 3





Actividad 2.2

Conocimientos y habilidades

Se pretende que los estudiantes confronten las representaciones realizadas en la actividad anterior con las presentadas en la actividad 1.2 para corregir, si por alguna razón interpretaron mal la actividad, o para reafirmar lo que realizaron según sea el caso, y así obtener una resignificación del conocimiento mediante una situación predictiva.

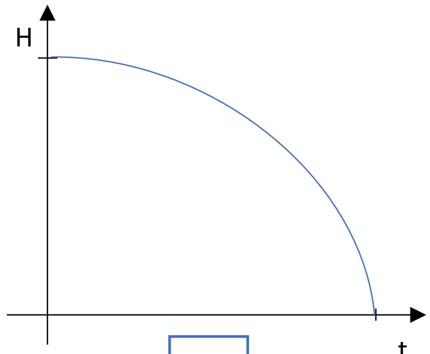
Intenciones didácticas

Después de realizar la actividad anterior, se les proporcionara hojas con las actividades en donde se presentan unas gráficas dentro de las cuales están las que representan el fenómeno de vaciado de recipientes según su geometría, con el objetivo de que los estudiantes comparen sus gráficas con las presentadas en la actividad y que indiquen sí coinciden, y en el caso de no coincidir elegir cual es la que es correcta según su apreciación y argumentar por que cambia de opinión, al final indicar cualitativamente cuál es el recipiente que se vacía más rápido. Todo esto con el propósito de comprobar si existe una construcción del conocimiento.

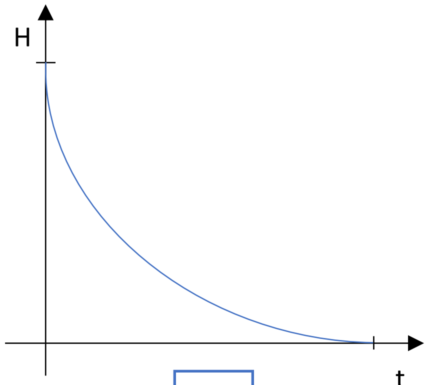
Consideraciones previas

Se debe considerar que se deben explicar bien las instrucciones para que los estudiantes puedan realizar la actividad y lleguemos a los objetivos, ya esta actividad depende de la anterior. También se debe explicar a los estudiantes que no es una evaluación, por lo tanto, es importante no borren sus respuestas, en el caso de realizar un procedimiento equivocado, ya que es lo que nos permitirá analizar de qué forma puede lograr una resignificación del conocimiento.

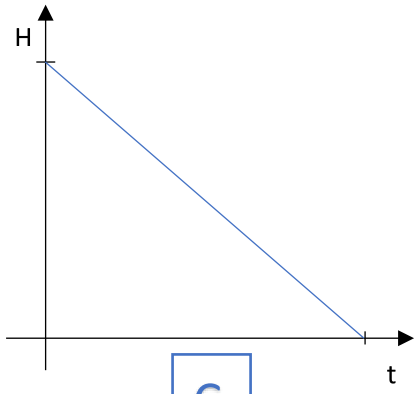
Actividad 2.2. Compara las gráficas realizadas con las que se muestran a continuación e indica sí coinciden. Si cambias de opinión indica cuál es la que representa el vaciado y explica por qué.



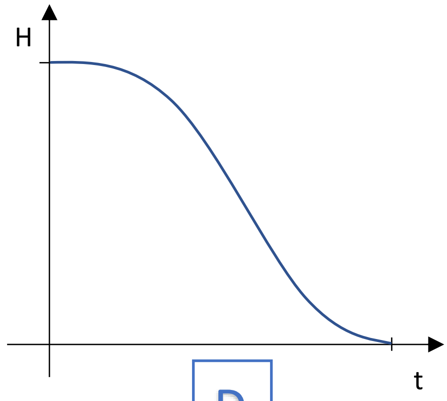
A



B



C



D

Caso 1

Caso 2

Caso 3

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Modelación

Para confirmar las hipótesis generadas en la actividad anterior modelamos el fenómeno de vaciado de recipientes con diferentes geometrías de manera analítica, el proceso es muy parecido al de llenado de recipientes, sin embargo, es necesario considerar otros aspectos que se identifican claramente más adelante. El modelo se explica a continuación definiendo la ecuación T para el tiempo de vaciado.

Si tenemos la siguiente figura:

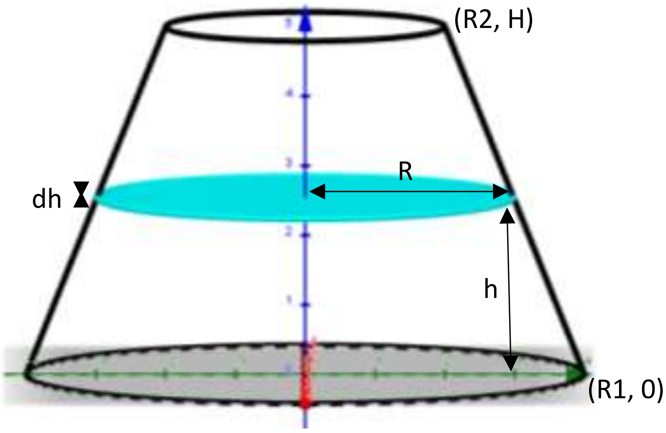


Imagen 46. Vaciado de un recipiente (cono truncado)

La pendiente de la recta es: $m = \frac{H}{R2-R1}$

Esta es la ecuación de la recta: $y = \frac{H}{R2-R1}(x - R1)$

Si $x = R$ y $y = h$ (llamaremos R al radio del agua)

$$h = \frac{H}{R2 - R1}(R - R1)$$

Despejando R: $R = \frac{h}{H}(R2 - R1) + R1$

Sabemos que: $Q = \frac{dv}{dt}$ $\quad \frac{dv}{dh} = \pi R^2 \quad Q = -Cd(\pi)(r^2)(\sqrt{2gh})$

Según la regla de la cadena: $\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dh}\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)$

Sustituyendo $\frac{dv}{dh}$ y R: $\frac{dv}{dt} = \pi\left(\frac{h}{H}(R2 - R1) + R1\right)^2 \frac{dh}{dt}$

Sustituyendo $\frac{dv}{dt}$, despejando y desarrollando:

$$Qdt = \pi\left\{\frac{h^2}{H^2}(R2 - R1)^2 + 2\left[\frac{h}{H}(R2 - R1)R1\right] + R1^2\right\}dh$$

Sustituyendo Q:

$$-Cd(\pi)(r^2)\left(\sqrt{2gh}\right)dt = \pi\left\{\frac{h^2}{H^2}(R2-R1)^2 + 2\left[\frac{h}{H}(R2-R1)R1\right] + R1^2\right\}dh$$

Se elimina π y se divide todo entre $\sqrt{h}$

$$-Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)dt = \left\{\frac{h^2}{H^2h^{\frac{1}{2}}}(R2-R1)^2 + 2\left[\frac{h}{Hh^{\frac{1}{2}}}(R2-R1)R1\right] + \frac{R1^2}{h^{\frac{1}{2}}}\right\}dh$$

Integrando:

$$-\int_0^t Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)dt = \int_H^0\left\{\frac{h^{\frac{3}{2}}}{H^2}(R2-R1)^2 + 2\left[\frac{h^{\frac{1}{2}}}{H}(R2-R1)R1\right] + R1^2h^{-\frac{1}{2}}\right\}dh$$

$$-Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)t = \left\{\frac{2h^{\frac{5}{2}}}{5H^2}(R2-R1)^2 + \frac{4}{3}\left[\frac{h^{\frac{3}{2}}}{H}(R2-R1)R1\right] + 2R1^2h^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Evaluando de *H* a *0*:

$$-Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)t = -\frac{2\sqrt{H}}{5}(R2-R1)^2 - \frac{4\sqrt{H}}{3}(R2-R1)R1 - 2R1^2\sqrt{H}$$

Despejando *t* y factorizando:

$$t = \frac{\sqrt{H}}{Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)}\left[\frac{2}{5}(R2-R1)^2 + \frac{4}{3}(R2-R1)R1 + 2R1^2\right]$$

Pero para fines didácticos diremos que $t = T$, ya que es la forma en que utilizaremos este término en la construcción de la simulación que se explica más adelante.

Despejamos la ecuación $-Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)t$ (sin evaluar) de *H* a *0* para obtener la **función**:

$$-Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)t = \frac{2h^{\frac{5}{2}}}{5H^2}(R2-R1)^2 + \frac{4}{3}\frac{h^{\frac{3}{2}}}{H}(R2-R1)R1 + 2R1^2h^{\frac{1}{2}} - \frac{2\sqrt{H}}{5}(R2-R1)^2 - \frac{4\sqrt{H}}{3}(R2-R1)R1 - 2R1^2\sqrt{H}$$

Igualamos a 0 de la siguiente forma:

$$0 = \frac{2h^{\frac{5}{2}}}{5H^2}(R2-R1)^2 + \frac{4}{3}\frac{h^{\frac{3}{2}}}{H}(R2-R1)R1 + 2R1^2h^{\frac{1}{2}} - \frac{2\sqrt{H}}{5}(R2-R1)^2 - \frac{4\sqrt{H}}{3}(R2-R1)R1 - 2R1^2\sqrt{H} + Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)t$$

Factorizando

$$0 = \frac{2}{5H^2}(R2-R1)^2\left(h^{\frac{5}{2}} - H^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{4}{3H}(R2-R1)R1\left(h^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}\right) + 2R1^2\left(h^{\frac{1}{2}} - H^{\frac{1}{2}}\right) + Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)t$$

Pero para la construcción de la simulación es necesario indicar a GeoGebra que exprese la altura "h" en el eje "x"

$$0 = \frac{2}{5H^2}(R2-R1)^2\left(x^{\frac{5}{2}} - H^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{4}{3H}(R2-R1)R1\left(x^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}\right) + 2R1^2\left(x^{\frac{1}{2}} - H^{\frac{1}{2}}\right) + Cd(r^2)\left(\sqrt{2g}\right)t$$

Simulación

Con el modelo desarrollado anteriormente se construye la simulación en GeoGebra, siguiendo los pasos que se muestran a continuación.

a) Teniendo el software nos aseguramos de tener disponibles la vista algebraica, la vista gráfica y la vista gráfica 3D. Y de GeoGebra nos muestre cuatro decimales en la vista algebraica.

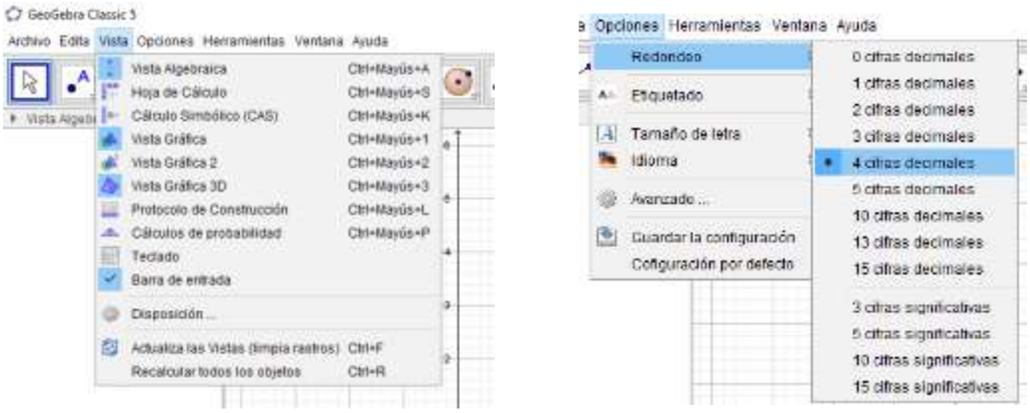


Imagen 47. Espacio de trabajo en GeoGebra y redondeo

b) Definimos en la barra de entrada las siguientes variables con números aleatorios: H = Altura del recipiente, R1 = Radio inferior, R2 = Radio superior (los dos radios del recipiente), Cd = Coeficiente de descarga, r = Radio de salida (Se considera una pulgada). Todas las variables en metros.

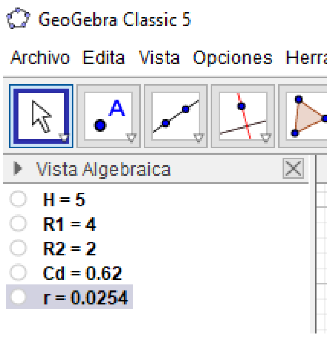


Imagen 48. Variables de entrada

NOTA: El coeficiente de descarga para el vaciado de cualquier recipiente es 0.62.

c) Definimos los puntos guía para dibujar el recipiente insertando el siguiente código en la barra de entrada: (R1,0,0); (0,R1,0); (-R1,0,0); (0,-R1,0); (R2,0,H); (0,R2,H); (-R2,0,H); (0,-R2,H); Cada paréntesis es un punto en el sistema coordenado.

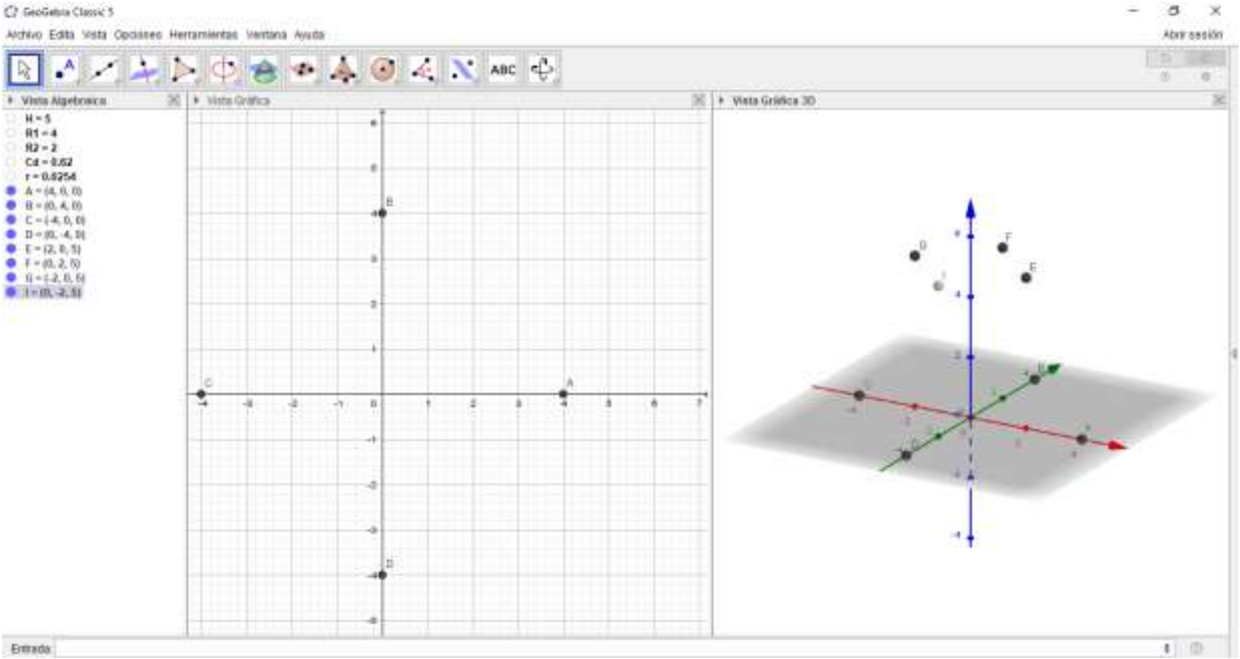


Imagen 49. Puntos guía

d) Con la herramienta circunferencia (eje, punto) dibujamos los dos círculos con los radios del eje a los puntos.

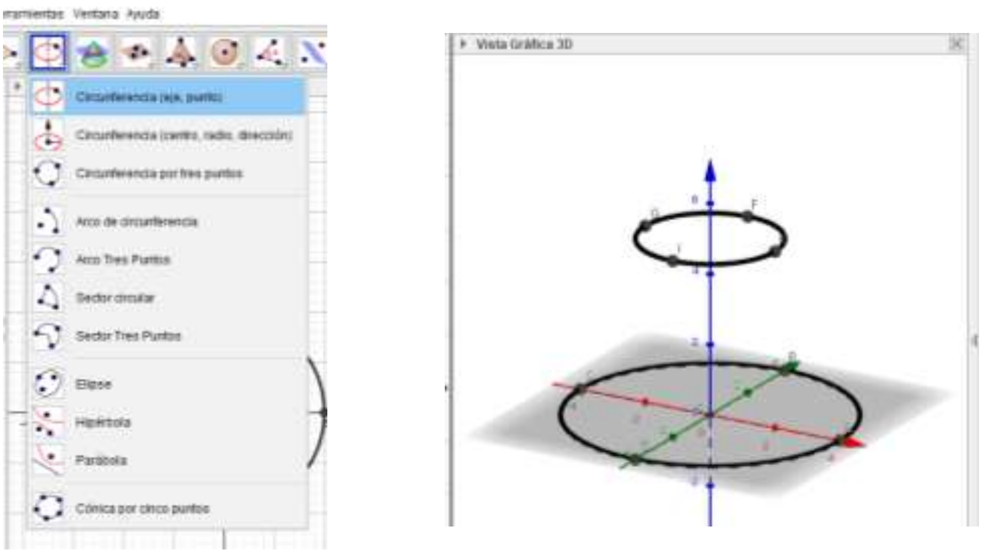


Imagen 50. Circunferencias

e) Insertamos la ecuación T: $t = \frac{\sqrt{H}}{Cd(r^2)(\sqrt{2g})}\left[\frac{2}{5}(R2-R1)^2 + \frac{4}{3}(R2-R1)R1 + 2R1^2\right]$ obtenida en la modelación insertando el siguiente código en la barra de entrada.

Entrada: T=((H^(1/2))/(Cd*r^2*(2*9.81)^(1/2)))*((2/5)(R2-R1)^2+(4/3)(R2-R1)R1+2R1^2)

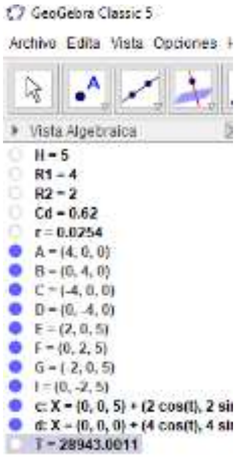


Imagen 51. Ecuación T

NOTA: g es el valor de la gravedad. En este caso utilizamos $9.81\ m/s^2$

f) Se crea un deslizador para el tiempo (t) con limites desde 0 hasta T.

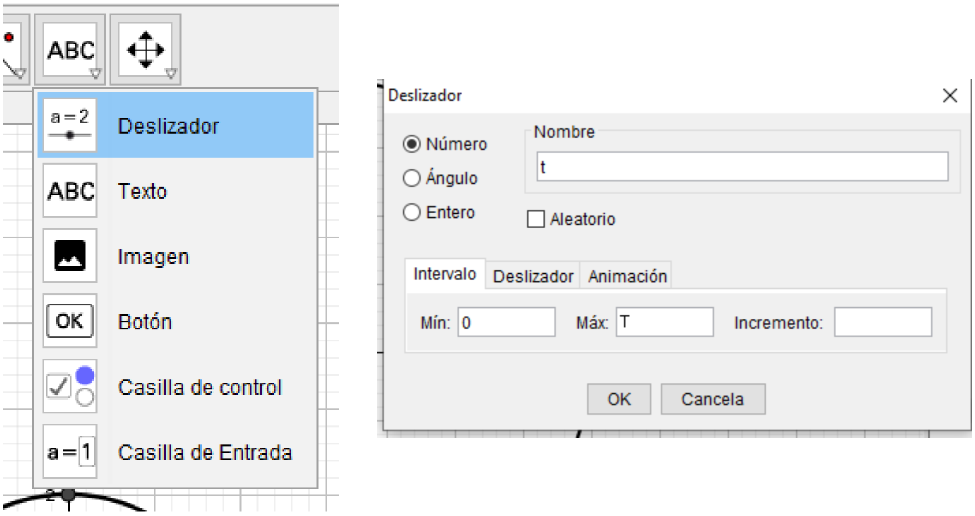


Imagen 52. Deslizador t

g) Insertamos la **función**: $0 = \frac{2}{5H^2}(R2-R1)^2\left(x^{\frac{5}{2}}-H^{\frac{5}{2}}\right)+\frac{4}{3H}(R2-R1)R1\left(x^{\frac{3}{2}}-H^{\frac{3}{2}}\right)+2R1^2\left(x^{\frac{1}{2}}-H^{\frac{1}{2}}\right)+Cd(r^2)(\sqrt{2g})t$, obtenida en la modelación ingresando en la barra de entrada el siguiente código y se presenta la siguiente gráfica.

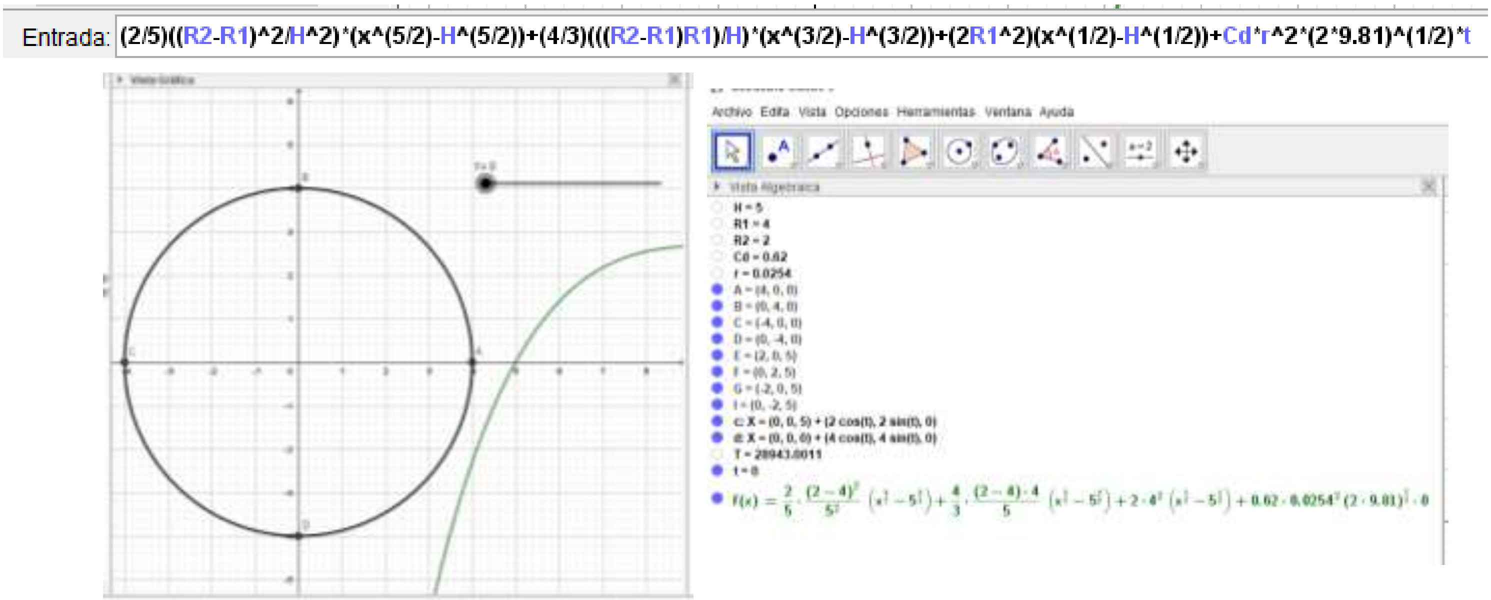


Imagen 53. Función

h) Se ubica la intersección entre la gráfica de la **función** y el eje “x”. En este caso es el punto J.

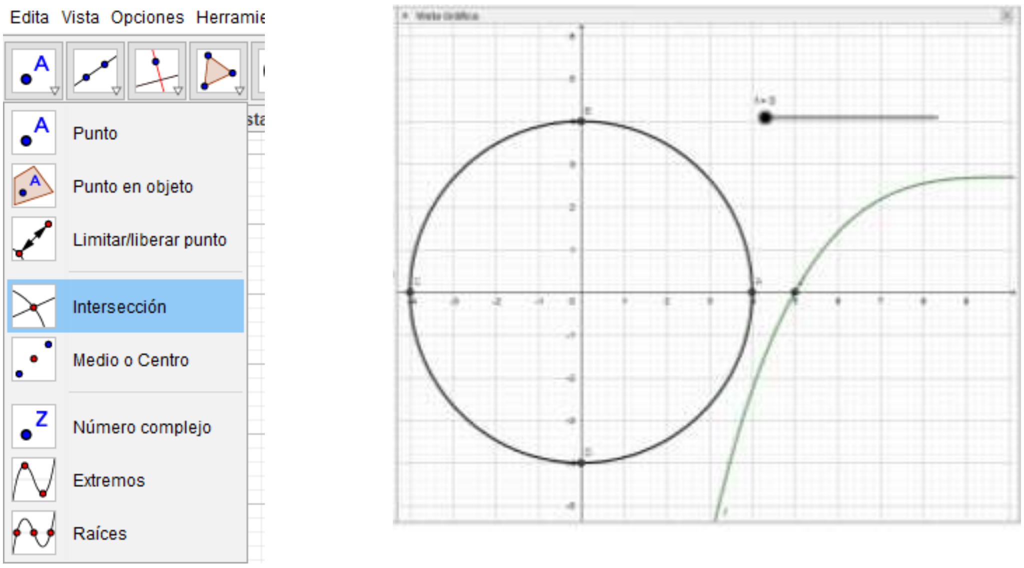


Imagen 54. Intersección

i) Se ingresa el numero R obtenido en la modelación y es la siguiente ecuación: $R = \frac{h}{H}(R2 - R1) + R1$, insertando en la barra de entrada el siguiente código.

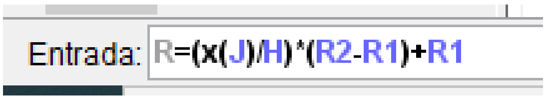


Imagen 55. Radio del agua

NOTA: En la función establecimos que la altura “h” la expresara en el eje “x”, por lo tanto, es necesario indicar a GeoGebra que obtenga la coordenada en “x” del punto de intersección (J) entre la función y el eje.

j) Se coloca un punto en la vista 3D, el cual tendrá como coordenada en “x” el número R y en “z”, la coordenada en “x” del punto de intersección entre la función y el eje “x”. Para este punto se ingresa lo siguiente en la barra de entrada. En este caso obtenemos el punto K.

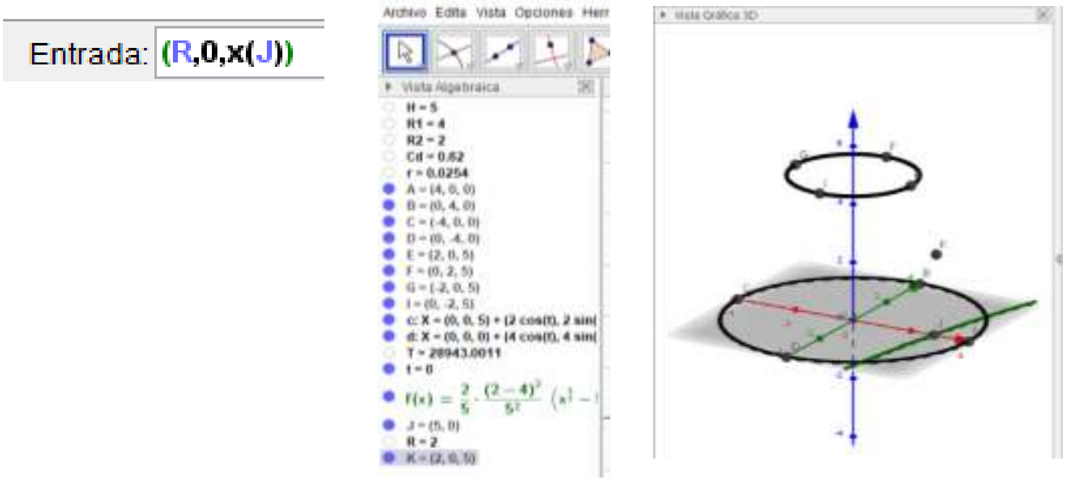


Imagen 56. Punto en el espacio que representa el radio del agua

k) Se dibuja la circunferencia que representa el agua entre el eje “z” y el punto K.

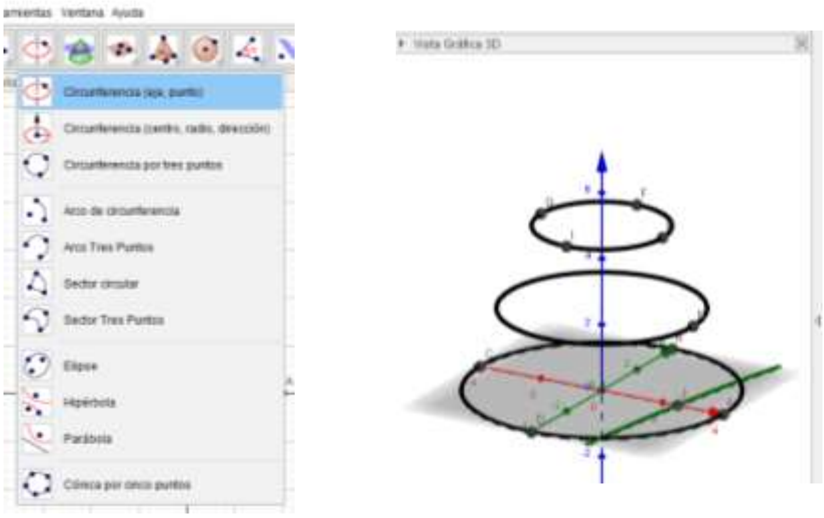


Imagen 57. Circunferencia del agua

l) Se modifica el color de la circunferencia para simular el agua.

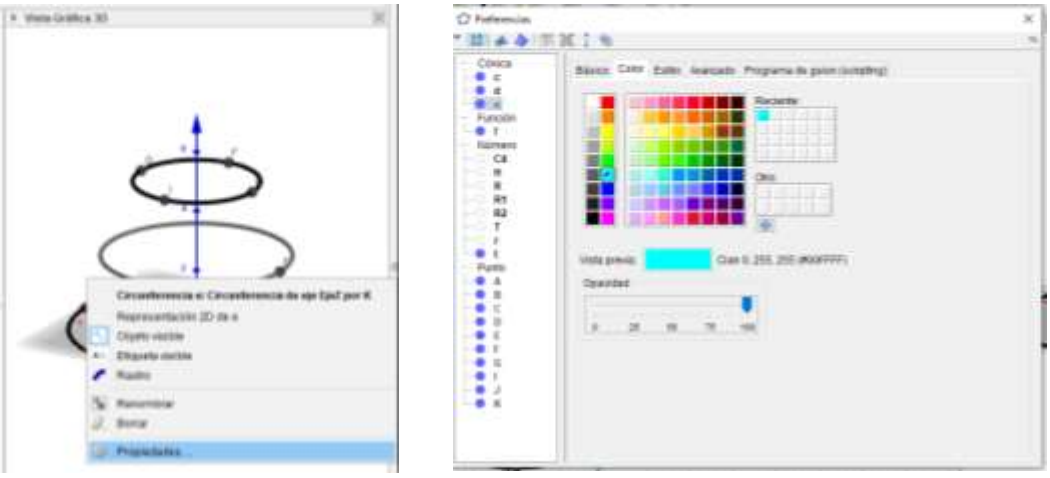


Imagen 58. Color de la circunferencia

m) Se dibujan segmentos para representar el contorno del recipiente.

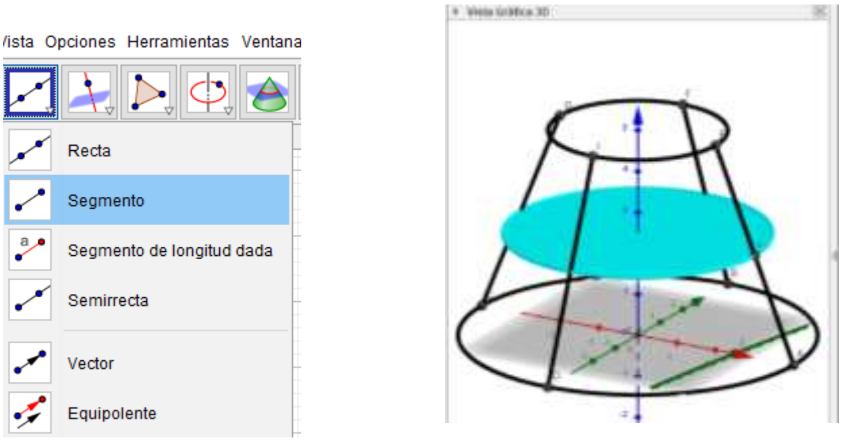


Imagen 59. Contorno del recipiente

n) Se dibuja un segmento del punto K al eje correspondiente, modificamos el color para que simule el agua y con rotación axial dibujamos el contorno (opcional).

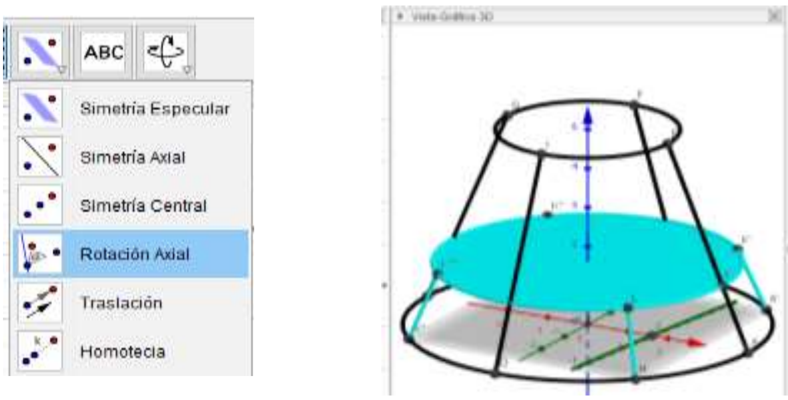


Imagen 60. Contorno del agua

o) Se modifica la escala para insertar un punto que dibuje la gráfica. El eje "x" debe describir el tiempo y el eje la altura del agua, por lo tanto, las coordenadas que se escriben en la barra de entrada serán: (t, z(K)).

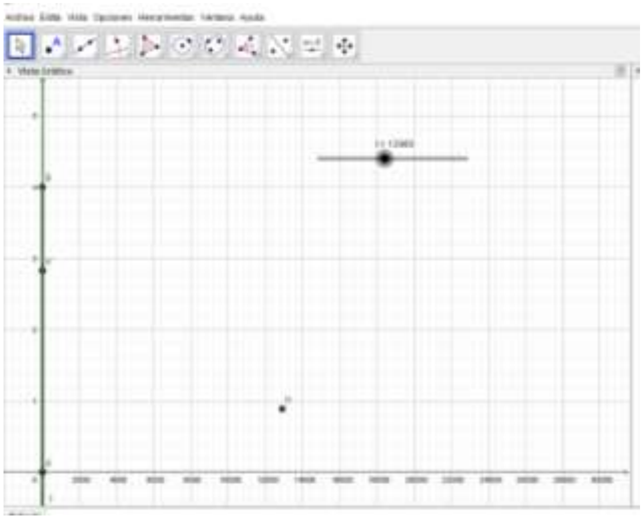


Imagen 61. Punto para la gráfica

p) Se activa la opción "rastro" para que dibuje la gráfica.

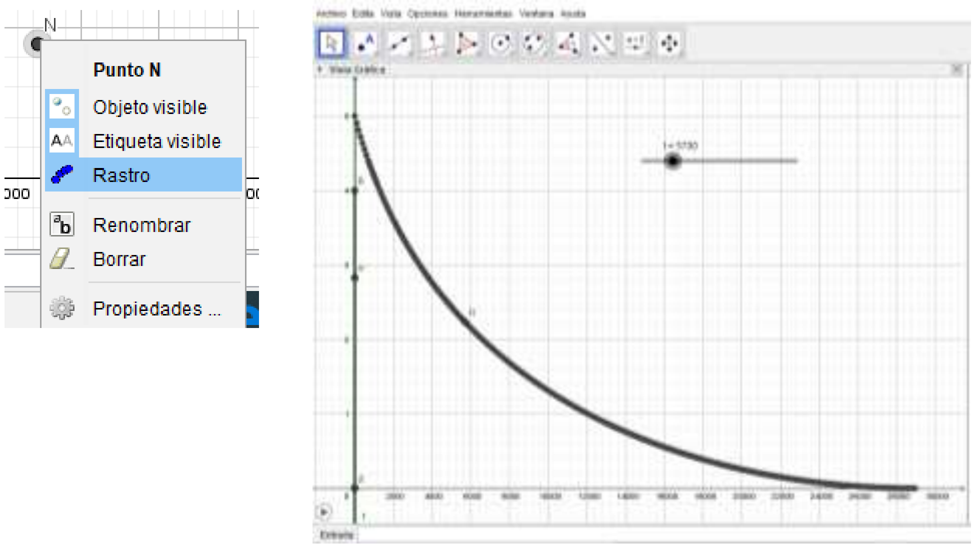


Imagen 62. Gráfica de vaciado de un cono truncado

NOTA: Al modificar las variables iniciales, dibujaría una gráfica diferente a ésta.

Cabe mencionar que, al igual que en el fenómeno de llenado de recipientes, el proceso de modelación y simulación se encuentran en el link: https://www.youtube.com/watch?v=f7JWKnmsklY (Manuel, 2018) en la plataforma YouTube, el cual será proporcionado a los estudiantes para aclarar sus dudas y puedan construir cuantas veces quieran la simulación del fenómeno de vaciado de recipientes con diferentes geometrías.

3.7. Actividad 3. Evaluación

En esta actividad se presentan recipientes diferentes a los de las actividades anteriores y se divide en tres momentos, el primero es la actividad 3.1 en donde se presenta una gráfica y los estudiantes deben de dibujar la forma del recipiente que representa su llenado con un *gasto* constante, el segundo momento es la actividad 3.2 en donde se presentan dos recipientes aparentemente iguales pero de distinto tamaño que se están llenando con un *gasto* constante, al mismo tiempo en donde los estudiantes deben dibujar las gráficas correspondientes en el mismo sistema coordenado, el tercer momento es la actividad 3.3 en donde se presenta un recipiente con ciertas condiciones iniciales que se está llenando con un *gasto* constante y los estudiantes deben hacer uso de las ecuaciones obtenidas en la modelación para predecir el tiempo total de llenado de este recipiente.

Actividad 3.1

Conocimientos y habilidades

Se pretende que los estudiantes, mediante el desarrollo del PyLV, puedan establecer una relación entre el comportamiento de la gráfica y la forma del recipiente que se está llenado utilizando los elementos que surgieron en las actividades anteriores como la variación de la altura del agua respecto al tiempo, con el objetivo de hacer visible la construcción del conocimiento mediante la predicción utilizando una situación de variación.

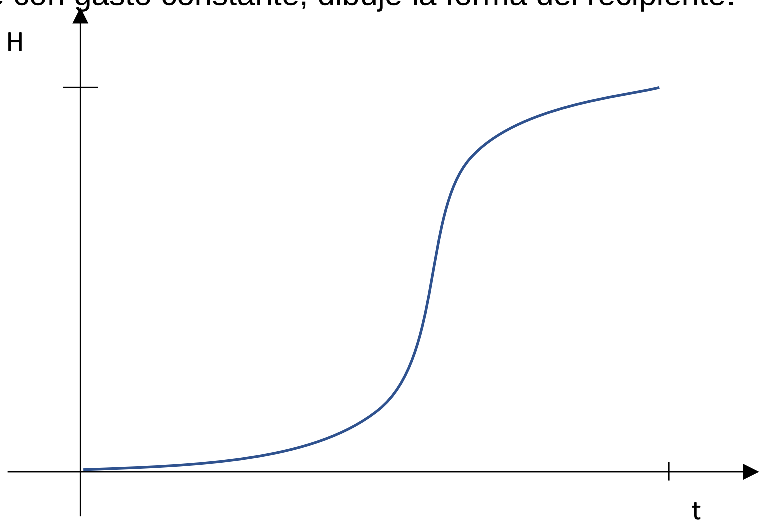
Intenciones didácticas

Esta actividad se presenta ante el grupo para que se resuelva de manera individual en donde los estudiantes deben de realizar un análisis del comportamiento de la gráfica para poder predecir la forma que tendrá el recipiente al llenarse. Para esto los estudiantes tendrán cinco minutos para responder.

Consideraciones previas

Es necesario considerar que, con la realización de las actividades anteriores, los estudiantes tienen más elementos para esta actividad, como por ejemplo la noción de variación y el desarrollo del PyLV, por lo tanto, estarán familiarizados con los conceptos y será más fácil su realización.

Actividad 3.1 Dada la siguiente gráfica que representa el llenado de un recipiente con gasto constante, dibuje la forma del recipiente.



Actividad 3.2

Conocimientos y habilidades

Se pretende que, mediante la comparación de dos recipientes similares, los estudiantes reafirmen los conocimientos construidos respecto a la relación que existe entre el tiempo de llenado y las dimensiones del recipiente, así como también la velocidad, aunque no se encuentre explicita en la actividad. El objetivo de esta actividad es hacer que no queden dudas respecto al comportamiento de la gráfica en el llenado de recipientes según su geometría.

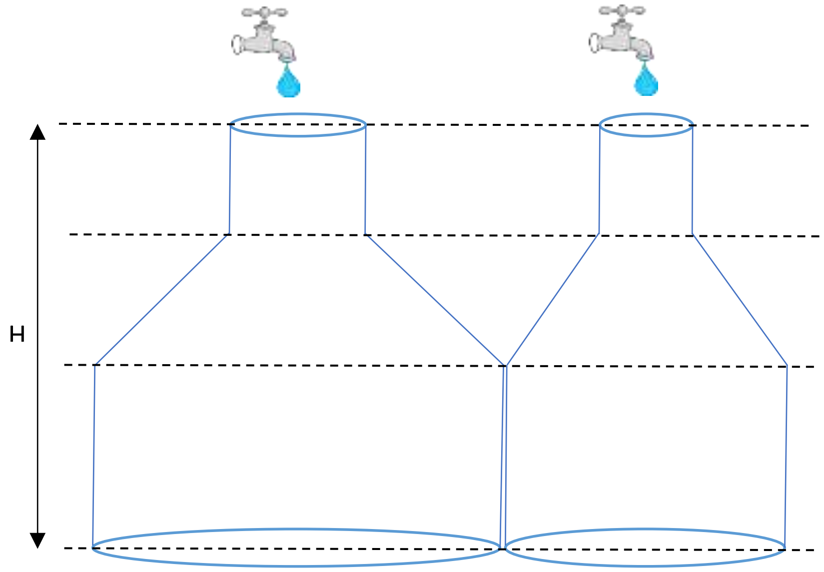
Intenciones didácticas

Esta actividad se presenta ante el grupo para que se resuelva de manera individual, igual que la anterior, pero en esta se debe realizar un análisis de la geometría del recipiente ya que ésta se puede dividir en tres partes y esto permitirá construir la gráfica que se pide tomando en cuenta que no se llenan al mismo tiempo pero que si alcanzan la misma altura. Para esto los alumnos tendrán cinco minutos para responder.

Consideraciones previas

Es necesario considerar que, con la realización de las actividades anteriores, los estudiantes tienen más elementos para esta actividad, como por ejemplo la noción de variación y el desarrollo del PyLV, por lo tanto, estarán familiarizados con los conceptos y será más fácil de su realización. También es necesario que antes de comenzar esta actividad, los estudiantes entreguen la anterior, ya que esto nos permitirá ver cuál es la forma en que los estudiantes se enfrentan ante situaciones de variación.

Actividad 3.2 Dados los siguientes recipientes que se están llenando con el mismo gasto constante, dibujar las gráficas correspondientes en el mismo sistema coordenado.



Actividad 3.3

Conocimientos y habilidades

Se pretende que los estudiantes utilicen las ecuaciones obtenidas en la modelación, con la intención de que se haga visible el uso de las ecuaciones diferenciales en la hidráulica y particularmente en la ingeniería civil que es para lo que se está formando. La idea central de esta actividad es predecir el tiempo de llenado de un recipiente (cono truncado), para el cual los estudiantes necesitan realizar un proceso que implica un análisis que no se había realizado anteriormente, el cuantitativo.

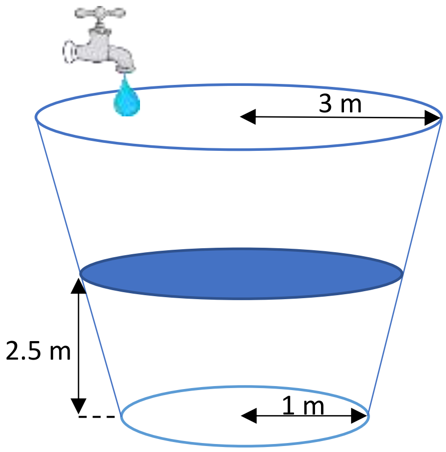
Intenciones didácticas

Esta actividad se presenta ante el grupo para que se resuelva de manera individual, igual que la anterior, pero en esta el análisis es específicamente de un cono truncado con ciertas condiciones iniciales, las cuales serán de utilidad para que los estudiantes puedan predecir el tiempo total de llenado del recipiente. Para esto los alumnos tendrán quince minutos para responder.

Consideraciones previas

Es necesario considerar que los estudiantes no tienen dudas sobre la modelación del llenado de recipientes, ya que le aportara elementos para entender el propósito de la actividad. También es necesario que los estudiantes retomen ciertos conocimientos algorítmicos para la realización de esta actividad ya que se pide predecir el tiempo de llenado. Para la realización de esta actividad, es necesario que entreguen la anterior igual que en las actividades anteriores.

Actividad 3.3 Dadas las condiciones iniciales del llenado de un cono truncado con gasto constante determine el tiempo total de llenado.



Capítulo 4. Análisis de resultados

4.1. Instrumento para el análisis de datos

Para analizar los datos retomamos ciertas categorías utilizadas por Caballero (2018), las cuales nos permitieron estructurar y organizar nuestro análisis, así como también los aspectos o indicadores específicos de cada categoría para describir los datos obtenidos de las actividades realizadas por los estudiantes (ver tabla 1). La estructura está formada por tres categorías: a) Las prácticas desarrolladas para resolver cada situación; b) La noción de variación que se identifica en las respuestas de los estudiantes; c) Sistema de referencia que usaron los estudiantes y la variación construida mediante este sistema.

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	
Actividad	
Práctica socialmente compartida	
Noción de variación	
Ordenes de variación	
Carácter estable del cambio	
Sistema de referencia	
Relación de variables	
Temporización	
Elemento de referencia	
Unidad de medida	

Tabla 1. Instrumento para el análisis de datos

Categoria 1. Prácticas desarrolladas

La idea central es analizar que hace el estudiante para resolver la situación asociada a la variación y como lo hace, identificando las prácticas desarrolladas al responder cada actividad. Nos basamos en dos aspectos tratados en esta investigación, la organización de las prácticas mediante el esquema de anidación y las prácticas para operar con la variación como la comparación, seriación, estimación y predicción.

> Con base en lo expuesto en el marco teorico, consideramos a la comparación como punto de partida para identificar el uso de la variación en las respuestas de los estudiantes, de manera que algunas preguntas que guían el análisis de esta categoría son: ¿Qué compara el estudiante?, ¿Respecto de qué compara?, ¿Cómo compara? Así mismo interesa determinar si recurre a otras prácticas como la seriación, estimación o predicción (Caballero, 2018, p. 108).

Indicadores

Anidación de prácticas se define como la organización de las prácticas en una situación específica para generar la construcción del conocimiento (Caballero, 2018). Del esquema retomamos los siguientes indicadores:

- **Acción:** Intervención directa del sujeto ante una situación específica. Al tratarse de una situación de cambio, estas acciones consisten en el desarrollo de las ideas para que los estudiantes identifiquen que existe un cambio entre una variable y otra.

- **Actividad:** Consiste en el establecimiento de una instrumentación mediada culturalmente que organiza a las acciones de forma consiente e intencional. En situaciones de cambio, las actividades son el medio para cuantificar el cambio, donde la mediación cultural puede consistir en, por ejemplo, procedimientos, operaciones y fórmulas provenientes del discurso matemático escolar o la experiencia (Caballero, 2018).

- **Práctica socialmente compartida:** Intencionales y normadas socialmente. Como en este caso se aborda una situación de cambio, se organizan las acciones y las actividades de tal manera que dirijan al estudiante hacia el desarrollo de prácticas predictivas, por ejemplo, la predicción del tiempo de llenado/vaciado de un recipiente respecto a otro, o una estimación del comportamiento de una gráfica que representa cierto fenómeno.

Prácticas variacionales: Las prácticas para operar con la variación se estudió en el capítulo 2, pero para el análisis de los resultados se presenta una síntesis respecto a las actividades de esta investigación.

- **Comparación:** La idea central es identificar qué elementos se están comparando, respecto de que lo está comparando y como realiza la comparación. Para este indicador, frases verbales como más/menos grande que, más/menos rápido que, así como dibujos, esquemas o símbolos que expresen una diferencia de valor en dos cantidades, se tomarán en cuenta para determinar si se trata de una comparación (Caballero, 2018).

- **Seriación:** Se determina si se identifica que el estudiante establece una articulación entre varios estados consecutivos con el objetivo de encontrar una regularidad en el conjunto. Esta articulación se considera como una organización de comparaciones de estados sucesivos. Cabe señalar que, si los estudiantes únicamente comparan estados de dos en dos sin identificar una regularidad entre ellos, no se considera una seriación.

- **Predicción:** Consiste en la acción de anticipar un estado o valor específico, sea futuro o anterior a los datos que se tienen. La predicción puede presentarse a manera de una formulación aritmética, algebraica o analítica con base en las comparaciones o seriaciones realizadas, o bien, mediante una apreciación del valor de una variable respecto de otra (Caballero, 2018).

- **Estimación:** Consiste en la acción de anticipar comportamientos o tendencias en la variación del fenómeno de manera global. La estimación se hace ver mediante la descripción (cualitativa o cuantitativa) de una variable, esto se puede identificar mediante las descripciones verbales, dibujos, gráficas o indicaciones numéricas que realizan los alumnos.

Categoría 2. Noción de variación

Esta categoría analiza, a través de las respuestas de los estudiantes, si comprenden las características de la variación. Para que esto se logre es necesario centrar la atención en cómo se presenta la variación a partir de las prácticas realizadas. Las preguntas que guían este análisis son: ¿cuál o cuáles son los órdenes de variación que pone en juego?, ¿identifica un carácter estable del cambio?, ¿es este carácter estable del cambio un valor específico o una valoración subjetiva? (Caballero, 2018).

Indicadores

- **Ordenes de variación:** En esta investigación se abordan situaciones en donde se presentan únicamente el primer y segundo orden de variación, y el objetivo es identificar si los estudiantes expresan en su respuesta una identificación de estos ordenes de manera explícita o implícita.

> Identificamos el primer orden de variación si el estudiante manifiesta un reconocimiento del cambio en una variable y lo cuantifica de alguna forma, ya sea de forma verbal, aritmética, gráfica, icónica, etc. No basta identificar que una variable cambia, el primer orden de variación consiste en asignar una valoración al incremento de una variable, sea este positivo o negativo. El segundo orden de variación consiste en reconocer una evolución en los incrementos de una variable, ya sea mediante expresiones que aludan a reconocer un comportamiento (la altura aumenta cada vez más), o bien dibujos, gráficas u operaciones aritméticas que expresen esta característica. Por último, nos referiremos a variación sucesiva cuando se presente una articulación de los órdenes de variación (Caballero, 2018, p. 110).

- **Carácter estable del cambio:** Consiste en identificar cuál es la regularidad en la evolución del cambio que los estudiantes reconocen. Este indicador se puede presentar a través de expresiones numéricas, verbales, gráficas o icónicas asociadas a esa regularidad. Para el uso de la predicción y la estimación es necesario reconocer un carácter estable del cambio, sin embargo, si no se presentan estas prácticas también se puede reconocer un carácter estable del cambio.

Categoría 3: Sistema de referencia variacional

En esta categoría se pretende estudiar las respuestas de los estudiantes en cada actividad identificando a los elementos en que más centró su atención en el análisis de la situación de variación. Las preguntas que guían esta categoría son: ¿cuál es la relación de cambio que reconoce el estudiante?, ¿de qué manera evidencia el cambio?, ¿cómo mide el cambio?, ¿cómo analiza la evolución del cambio? (Caballero, 2018).

Indicadores

- **Relación causal**

    - **Variables reconocidas:** Se considera que cierto elemento es una variable cuando el estudiante identifica que el valor de éste elemento es susceptible a cambiar.

    - **Relación establecida:** Se entiende como la relación entre variables reconocidas, en donde el valor de una variable es afectado por la otra u otras. La idea central es identificar que variable afecta a cuál y la argumentación que presentan los estudiantes de por qué se relacionan de esa manera.

- **Elemento de referencia:** Se refiere a identificar la forma en que los estudiantes reconocen el cambio y tiene una estrecha relación con la práctica de comparación. Es necesario hacer énfasis en el elemento de la situación que le sirve al estudiante para realizar la comparación, este elemento puede ser un valor numérico, una gráfica, un comportamiento, una magnitud no especificada, o de una manera general, una cualidad que sirva de base para determinar que la variable ha incrementado y disminuido su valor (Caballero, 2018).

4.2. Resultados de la implementación

A continuación, se muestra el análisis realizado con base a las evidencias obtenidas con la implementación de las actividades diseñadas para los estudiantes de tercer semestre de la licenciatura en Ingeniería Civil. Para el análisis de cada actividad se presentan las características específicas para cada una, éstas características se muestran en una tabla (que corresponde al instrumento de análisis). Así como también se presentan algunos ejemplos de las respuestas de los alumnos con su respectivo análisis basado en el instrumento descrito anteriormente.

4.2.1. Análisis de la actividad 1. Llenado de recipientes

Esta actividad se realizó de manera grupal con la intención de hacer una breve introducción al analizar fenómenos hidráulicos, en donde los estudiantes se familiarizaron y recordaron algunos conceptos y términos utilizados en este tipo de fenómenos, así como gasto o caudal constante, velocidad, y algunas fórmulas básicas utilizadas en la materia Cálculo.

Se presentó la actividad en el pizarrón en donde los estudiantes respondieron con sus argumentos, por lo tanto, en este caso no tenemos evidencia escrita por los estudiantes, pero si se presentan a continuación las características específicas basadas en el instrumento de análisis (ver tabla 2).

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se establece qué gráfica le corresponde a cada recipiente.
Actividad	En la modelación se obtiene la ecuación para el tiempo de llenado, sin embargo, no se realizan procedimientos que cuantifiquen el cambio.
Práctica socialmente compartida	Mediante la comparación del comportamiento de cada gráfica se determina y argumenta qué gráfica le corresponde a cada recipiente.

Noción de variación	
Ordenes de variación	Se determina qué variable aumenta cada vez más/menos o igual (rapidez o razón de cambio instantánea), según la geometría del recipiente.
Carácter estable del cambio	Se establece que, al tener un gasto constante, no siempre existe una Razón de Cambio constante, debido a las diferentes geometrías de los recipientes.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable “altura” con la variable “tiempo”.
Temporización	Se establecen estados intermedios en donde se determina el tipo de regularidad de llenado según la geometría del recipiente.
Elemento de referencia	Se identifican las gráficas proporcionadas por la actividad como referencia comparándolas con el comportamiento del fenómeno.
Unidad de medida	Se identifican los “discos” que conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales).

Tabla 2. Características para el análisis de la actividad 1

Después de realizar esta actividad se presentó la modelación del fenómeno como se señaló en el diseño de la actividad 1 (ver capítulo 3) en donde se establecieron algunos puntos importantes que de alguna manera permitieron el desarrollo de algunas ideas de la siguiente actividad. Posteriormente se realizó la simulación en donde se reafirmaron las conjeturas de los estudiantes y se les proporcionó la aplicación creada para esta investigación (GeoGebra) para que posteriormente pudieran revisar nuevamente el comportamiento de las gráficas según la geometría del recipiente, utilizando las herramientas que nos permiten manipular las variables.

En la realización de esta actividad observamos que realmente si era necesario hacer esta introducción para abordar el fenómeno de vaciado de recipientes, caso diferente a éste. También observamos ciertos elementos que nos permitieron hacer el diseño de la actividad 2 basándonos en los argumentos mencionados por los estudiantes.

4.2.2. Análisis de la actividad 2. Vaciado de recipientes

Para esta actividad se les hizo entrega a los estudiantes hojas que contienen la primera parte para contestarla de manera individual, posteriormente se analizaron sus respuestas en equipos, y por último en grupo. A continuación, se presentan las características específicas basadas en el instrumento de análisis para la actividad 2 (ver tabla 3), así como también algunos ejemplos de las respuestas más representativas del grupo.

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica que la gráfica correspondiente es decreciente.
Actividad	En la modelación se obtiene la ecuación para el tiempo de vaciado, sin embargo, no se realizan procedimientos que cuantifiquen el cambio.
Práctica socialmente compartida	• Mediante la estimación se determina cuál es la forma y el comportamiento de la gráfica. • Mediante la predicción se determina qué recipiente se vacía más rápido. • Mediante la comparación se confrontan las gráficas de la actividad 2.2 con las realizadas por los estudiantes en la actividad 2.1
Noción de variación	
Ordenes de variación	Se determina qué variable disminuye cada vez más/menos o igual (rapidez o razón de cambio instantánea), según la geometría del recipiente.
Carácter estable del cambio	Se establece que el cambio en la altura del agua depende tanto del tiempo, como la cantidad de agua que aún contenga el recipiente por la presión que ejerce y su geometría.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable “altura” con la variable “tiempo”, y una

	variable implícita que es la presión del agua.
Temporización	Se establecen estados intermedios en donde se determina el tipo de regularidad de vaciado según la geometría del recipiente.
Elemento de referencia	Las gráficas de la actividad 2.2 se utilizan como elemento de referencia para determinar si se está construyendo el conocimiento.
Unidad de medida	Se identifican los "discos" que conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales) mediante el principio de continuidad ($A1 \cdot V1 = A2 \cdot V2$).

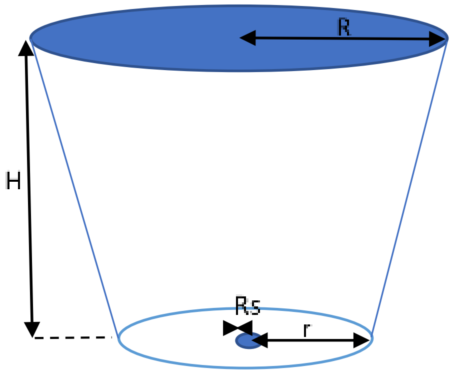
Tabla 3. Características para el análisis de la actividad 2

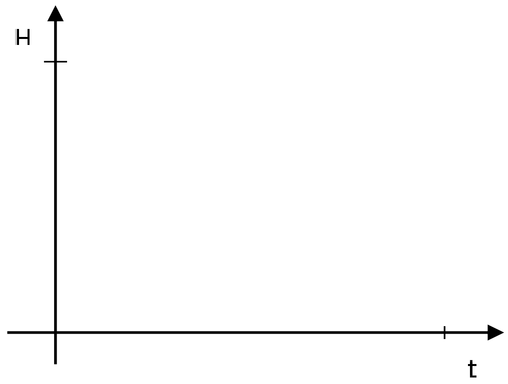
Esta actividad se divide en dos etapas, donde la primera ocupa ciertos elementos de la actividad anterior para poder resolverla. En la segunda etapa se comparan las gráficas para saber si existe una construcción del conocimiento, de lo contrario deberán considerar las gráficas que se les proporciona y resignificar el conocimiento. Al principio observamos que algunos estudiantes se quedaron con la idea de la graficación del fenómeno de llenado de recipientes y los restantes ya sabían que las gráficas tenían que ser decrecientes.

Al establecerse los equipos de manera aleatoria se quedaron los que si habían construido la idea de la variación de la altura con respecto al tiempo, de tal manera que al debatir entre los estudiantes, los que aún no concebían la idea cambiaron de opinión resignificando así el conocimiento. A continuación, presentamos algunos ejemplos de las respuestas más representativas que se obtuvieron al realizar la actividad de manera individual.

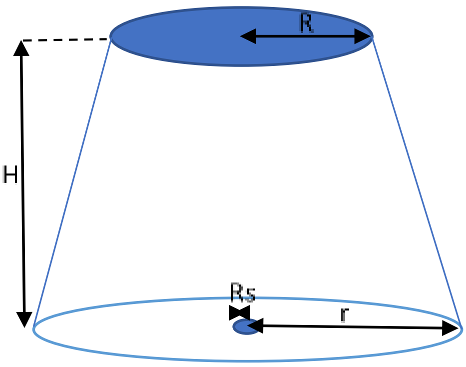
Actividad 2.1. Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

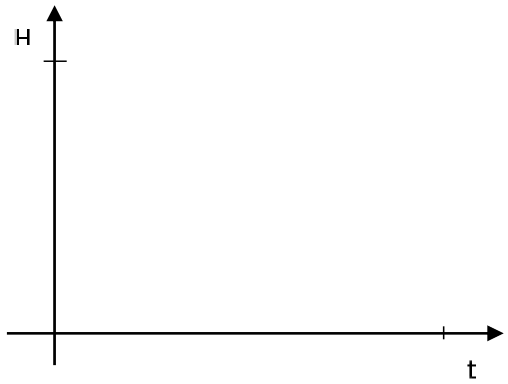
Caso 1



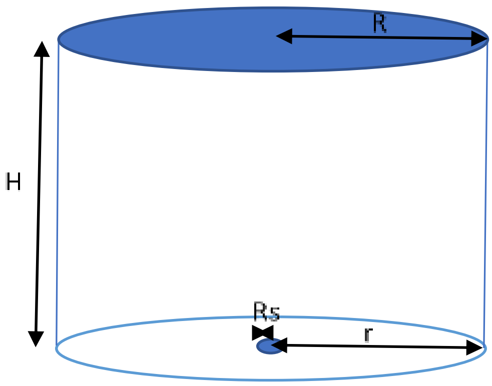


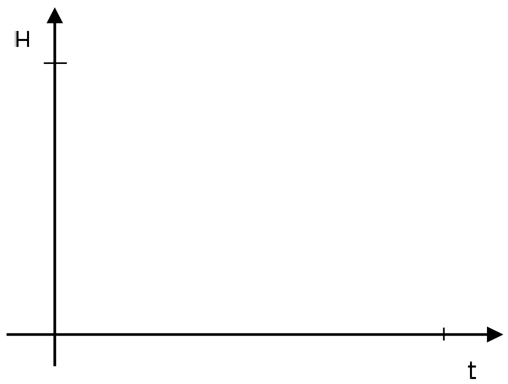
Caso 2



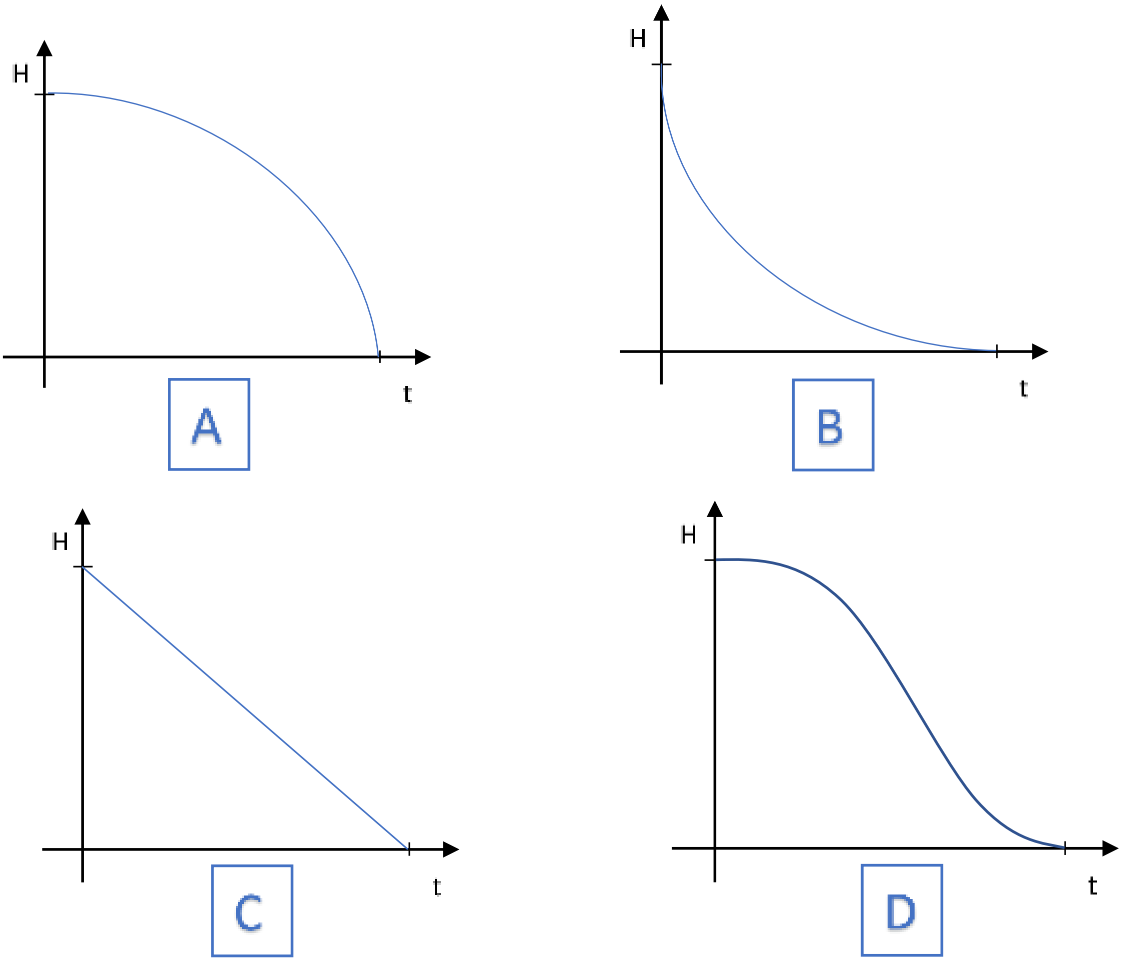


Caso 3





Actividad 2.2. Compara las gráficas realizadas con las que se muestran a continuación e indica sí coinciden. Si cambias de opinión indica cual es la que representa el vaciado y explica por qué.



Caso 1

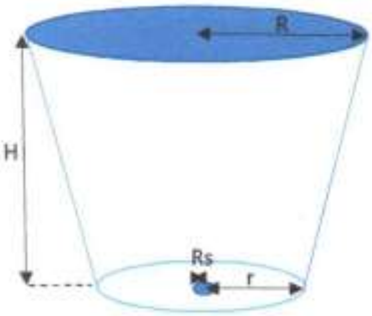
Caso 2

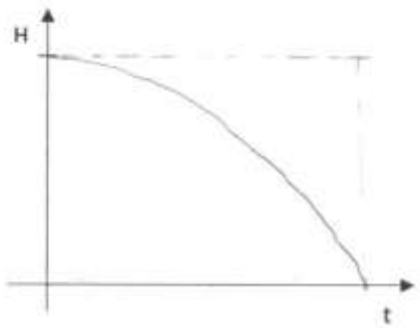
Caso 3

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

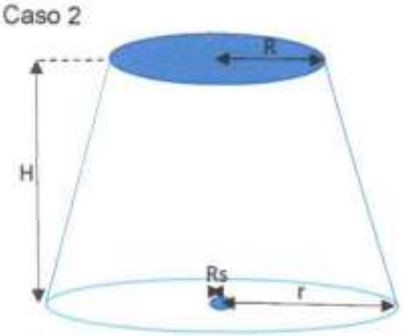
Caso 1

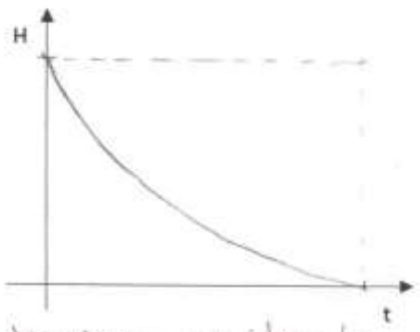




Se aprecia, por la forma del cono que su altura disminuye lentamente y cada ves se hace mas rapido conforme baja por abajo el ancho es mas pequeño

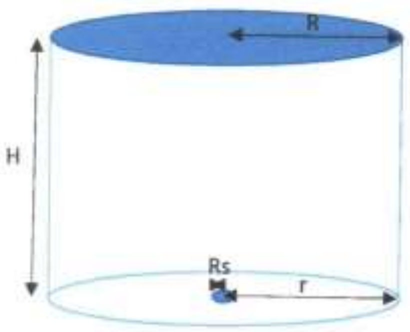
Caso 2

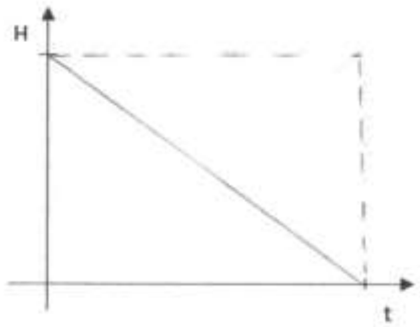




Para esta figura, su altura disminuye rapidamente en los primeros minutos pero despues se hace mas lento. por abajo el ancho es mas grande

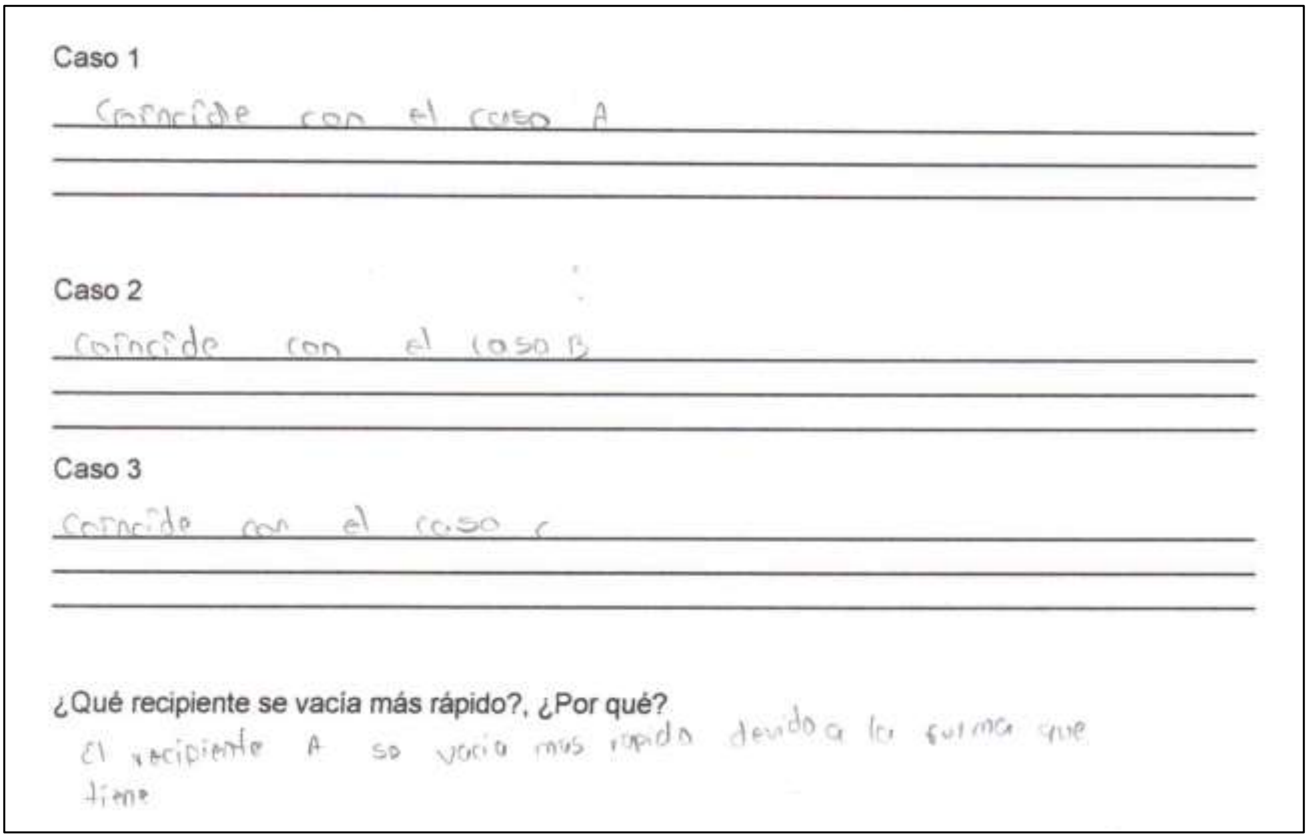
Caso 3





En este caso el vaciado en constante, es decir, el agua baja a una velocidad constante de tal manera que no hace cambios en todo el tiempo, porque es un cilindro

Imagen 63. Ejemplo de respuesta 1 (actividad 2.1)



Caso 1

Coincide con el caso A

Caso 2

Coincide con el caso B

Caso 3

Coincide con el caso C

¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

El recipiente A se vacia mas rapido devido a la forma que tiene

Imagen 64. Ejemplo de respuesta 1 (actividad 2.2)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica que la gráfica correspondiente es decreciente.
Actividad	En la realización de la simulación se aplican las ecuaciones obtenidas en la modelación.
Práctica socialmente compartida	• Mediante la estimación se determina cuál es la forma y el comportamiento de cada gráfica. • Mediante la predicción se identifica qué recipiente se vacía más rápido. • Mediante la comparación se confrontan las gráficas de la actividad 2.2 con las de la actividad 2.1 identificando que sí coinciden, sin embargo, algunas no son las adecuadas.

Noción de variación	
Ordenes de variación	Se identifica que la altura de la superficie libre del agua disminuye cada vez más/menos o igual de rápido (rapidez o razón de cambio instantánea), según la geometría del recipiente.
Carácter estable del cambio	Se identifica el cambio en la rapidez según el radio de la superficie libre del agua.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable "altura" con la variable "tiempo".
Temporización	Se identifica que se determinan estados intermedios en donde se indica que la rapidez (Razón de Cambio) aumenta o disminuye a partir de cierto momento.
Elemento de referencia	Las gráficas de la actividad 2.2 se utilizan como elemento de referencia para reafirmar las construidas en la actividad 2.1, sin embargo, algunas no son las adecuadas.
Unidad de medida	En la realización de la modelación se identifican los "discos" que conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales) mediante el principio de continuidad ($A1 \cdot V1 = A2 \cdot V2$).

Tabla 4. Análisis del ejemplo de respuesta 1 (actividades 2.1 y 2.2)

Principales argumentos del estudiante (E1)

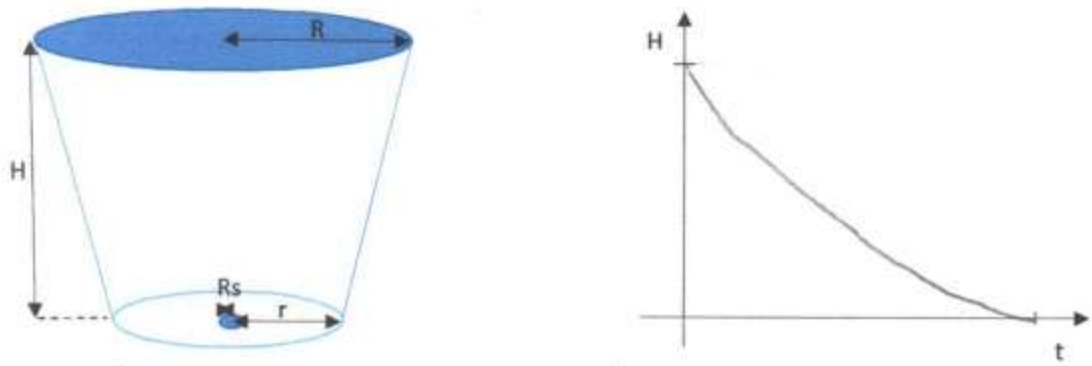
Caso 1: "Se aprecia, por la forma del cono que su altura disminuye lentamente y cada vez se hace más rápido conforme baja por que el ancho es más pequeño". El estudiante establece una relación entre el radio de la superficie libre del agua y la rapidez (Razón de Cambio).

Caso 2: "Para esta figura su altura disminuye rápidamente en los primeros minutos, pero después se hace más lento por abajo el ancho es más grande".

Caso 3: "En este caso el vaciado es constante, es decir, el agua baja a una velocidad constante de tal manera que no hace cambios en todo el tiempo porque es un cilindro". El estudiante no considera que la presión que ejerce el agua también influye en el comportamiento de la gráfica, ya que su comportamiento es de otra manera. Por otro lado, el estudiante identifica que el Caso 1 es el recipiente que se vacía más rápido debido a la forma del recipiente.

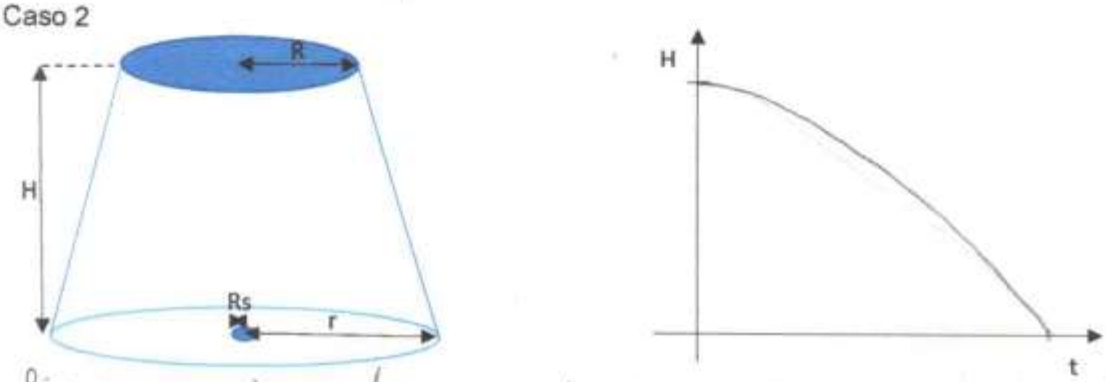
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



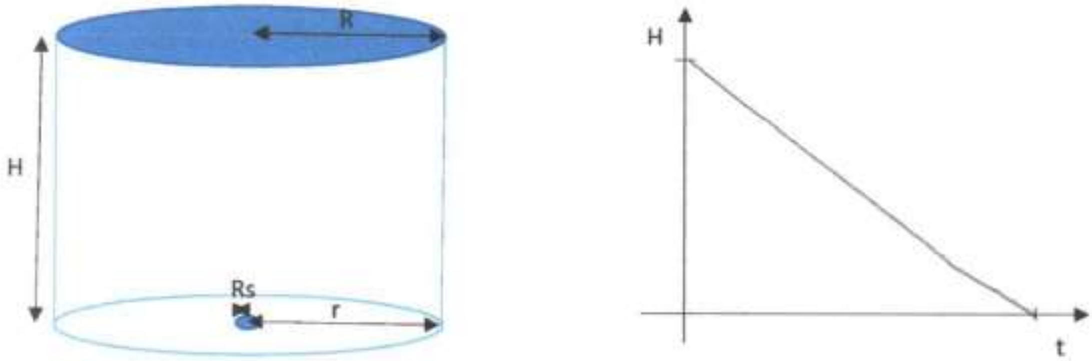
considero que la grafica es de esa manera porque explica que cuando el vaciado comienza es de manera gradual llendo lento hasta que se vacia

Caso 2



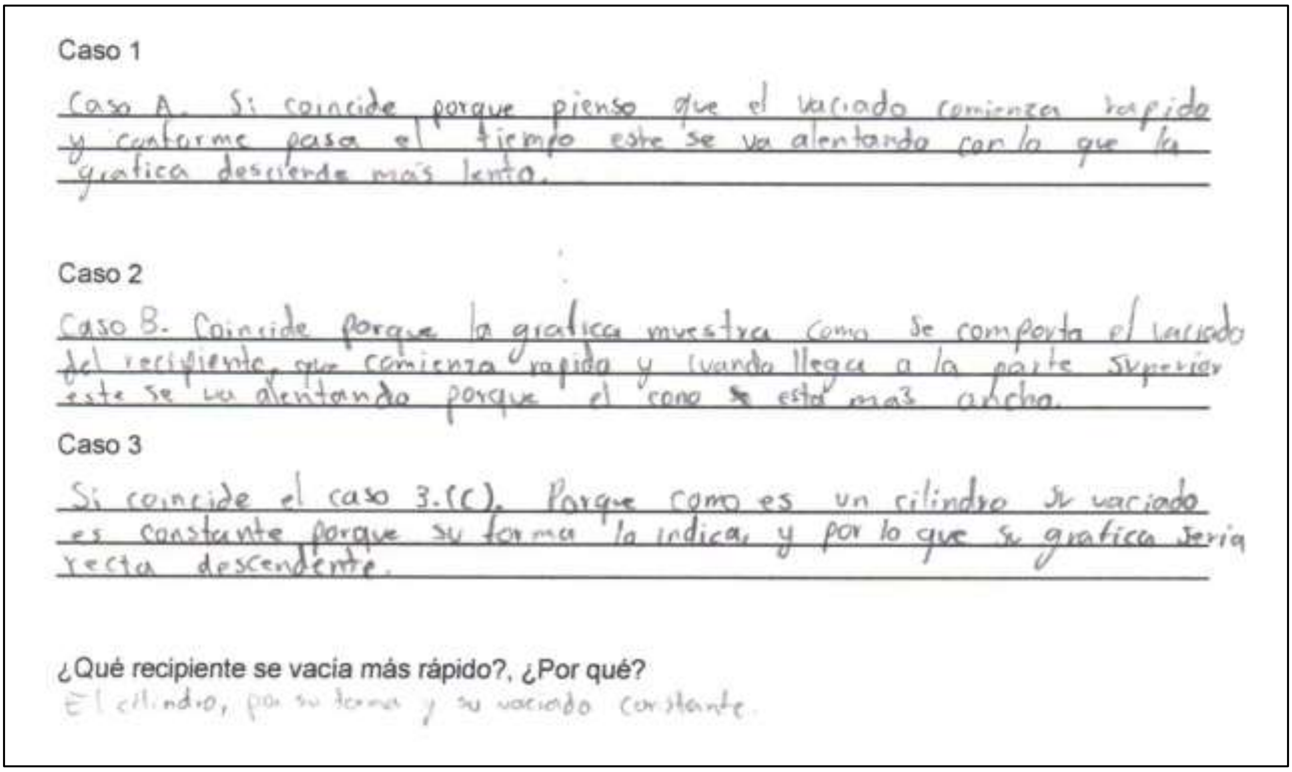
Pienso que la grafica es así porque comienza vaciandose lento hasta cuando llega a la parte superior que es cuando incrementa su velocidad.

Caso 3



La grafica es una recta constante porque se desvacia constantemente porque no hay cambio en su recipiente

Imagen 65. Ejemplo de respuesta 2 (actividad 2.1)


Caso 1

Caso A. Si coincide porque pienso que el vaciado comienza rapido y conforme pasa el tiempo este se va alentando con lo que la grafica desciende más lento.

Caso 2

Caso B. Coincide porque la grafica muestra como se comporta el vaciado del recipiente, que comienza rapido y cuando llega a la parte superior este se va alentando porque el cono está más ancho.

Caso 3

Si coincide el caso 3.(C). Porque como es un cilindro su vaciado es constante porque su forma la indica, y por lo que su grafica seria recta descendente.

¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

El cilindro, por su forma y su vaciado constante.

Imagen 66. Ejemplo de respuesta 2 (actividad 2.2)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica que la gráfica correspondiente es decreciente.
Actividad	En la realización de la simulación se aplican las ecuaciones obtenidas en la modelación.
Práctica socialmente compartida	• Mediante la estimación se determina cuál es la forma y el comportamiento de cada gráfica. • Mediante la comparación se confrontan las gráficas de la actividad 2.2 con las de la actividad 2.1 cambiando de opinión en su comportamiento.
Noción de variación	
Ordenes de variación	Se identifica que la altura de la superficie libre del agua disminuye cada vez más/menos o igual de rápido (rapidez o razón de cambio

	instantánea), según la geometría del recipiente.
Carácter estable del cambio	Se identifica el cambio en la rapidez según el radio de la superficie libre del agua.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable “altura” con la variable “tiempo”.
Temporización	Se identifica que se determinan estados intermedios en donde se indica que la rapidez (Razón de Cambio) aumenta o disminuye a partir de cierto momento.
Elemento de referencia	Las gráficas de la actividad 2.2 se utilizan como elemento de referencia para reafirmar las construidas en la actividad 2.1, sin embargo, algunas no son las adecuadas.
Unidad de medida	En la realización de la modelación se identifican los “discos” que conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales) mediante el principio de continuidad ($A1 \cdot V1 = A2 \cdot V2$).

Tabla 5. Análisis del ejemplo de respuesta 2 (actividad 2.1 y 2.2)

Principales argumentos del estudiante (E2)

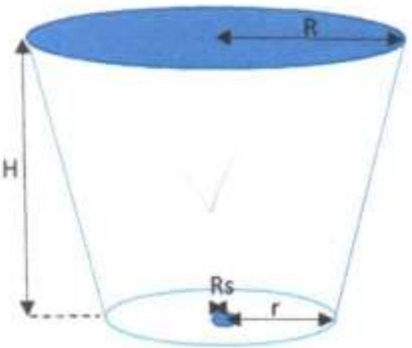
Caso 1: “Considero que la gráfica es de esa manera por que explica que cuando el vaciado comienza es de manera gradual yendo lento hasta que se vacía”. Para este caso el estudiante dibujó una gráfica que no correspondía a sus argumentos, sin embargo, en la siguiente actividad relaciono el fenómeno con la gráfica A argumentando que: “El vaciado comienza rápido y conforme pasa el tiempo este se va alentando con lo que la gráfica desciende más lento”.

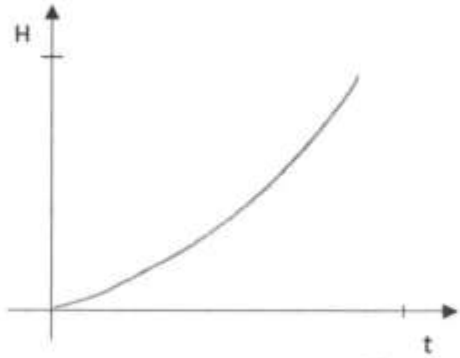
Caso 2: “Pienso que la gráfica es así porque comienza vaciándose lento hasta cuando llega a la parte superior que es cuando incrementa su velocidad”. En la siguiente actividad relaciona este cono con la gráfica B argumentando que: “Comienza rápido y cuando llega a la parte superior este se va alentando por que el cono está más ancho”, en este caso eligiendo la que describe el comportamiento del fenómeno.

Para el Caso 3 el estudiante consideró, como la mayoría, que por ser un cilindro su vaciado sería constante argumentando que:” La gráfica es una recta constante porque se vacía constantemente porque no hay cambio en su recipiente”. Por otro lado, el estudiante considera que el recipiente que se vacía más rápido es el cilindro argumentando que su vaciado es constante.

Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

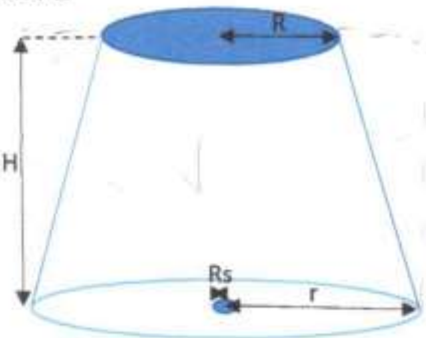
Caso 1

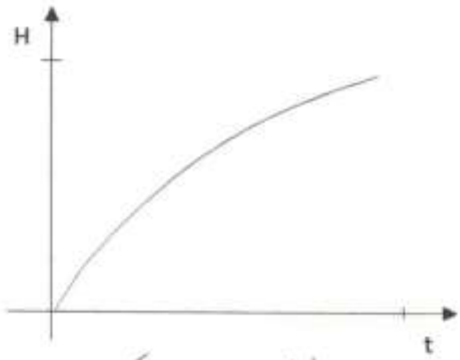




en el primer caso debido a la forma se vaciará de forma lenta debido a mas area en la parte superior y luego de forma rapida hasta vaciarse

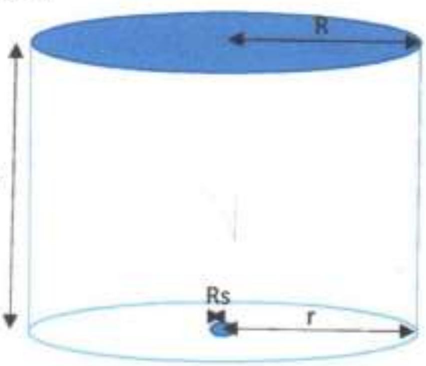
Caso 2

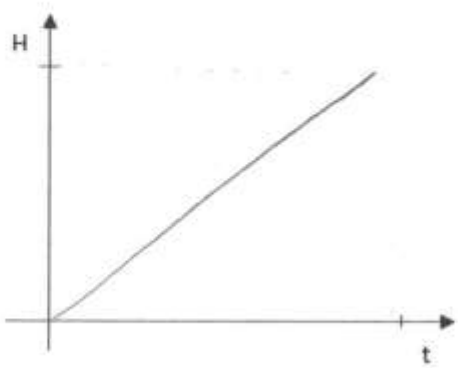




en primera el vaciado será rapido por su forma ya que el area de la parte superior es menor y luego sera mas lento

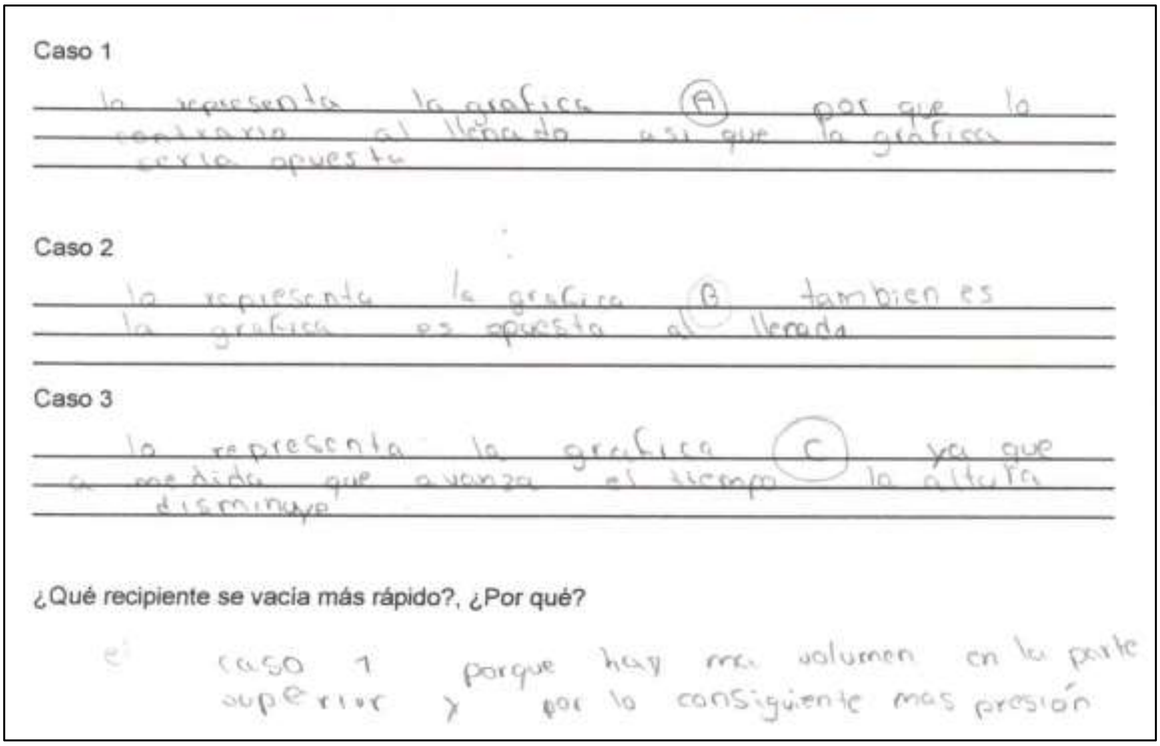
Caso 3





debido a su forma regular se vaciará de forma constante y proporcional hasta vaciarse completamente

Imagen 67. Ejemplo de respuesta 3 (actividad 2.1)



Caso 1

la representa la grafica (A) por que lo contrario al llenado asi que la grafica seria opuesta

Caso 2

la representa la grafica (B) tambien es la grafica es opuesta al llenado

Caso 3

la representa la grafica (C) ya que a medida que avanza el tiempo la altura disminuye

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

el caso 1 porque hay mas volumen en la parte superior y por lo consiguiente mas presión

Imagen 68. Ejemplo de respuesta 3 (actividad 2.2)

Indicadores	**Descripción**
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se establece un sistema de referencia ubicado de diferente manera, dibujando gráficas ascendentes.
Actividad	En la realización de la simulación se aplican las ecuaciones obtenidas en la modelación.
Práctica socialmente compartida	• Mediante la estimación se determina cuál es la forma y el comportamiento de la gráfica. • Mediante la predicción se determina qué recipiente se vacía más rápido. • Mediante la comparación se confrontan las gráficas de la actividad 2.2 con las de la actividad 2.1 identificando coincidencias.
Noción de variación	
Ordenes de variación	Se identifica que la altura de la superficie libre del agua disminuye cada vez más/menos o igual de rápido (rapidez o razón de cambio instantánea), según la geometría del recipiente.

Carácter estable del cambio	Se identifica el cambio en la rapidez según el radio de la superficie libre del agua.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable “altura” con la variable “tiempo”, y una variable implícita que es la presión del agua para determinar qué recipiente se vacía más rápido.
Temporización	Se identifica que se determinan estados intermedios en donde se indica que la rapidez (Razón de Cambio) aumenta o disminuye en la parte superior o inferior.
Elemento de referencia	Las gráficas de la actividad 2.2 se utilizan como elemento de referencia para reafirmar las construidas en la actividad 2.1, aunque aparentemente no representan lo mismo, sin embargo, se identifica una relación
Unidad de medida	En la realización de la modelación se identifican los “discos” que conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales) mediante el principio de continuidad ($A1 \cdot V1 = A2 \cdot V2$).

Tabla 6. Análisis del ejemplo de respuesta 3 (actividades 2.1 y 2.2)

Principales argumentos del estudiante (E3)

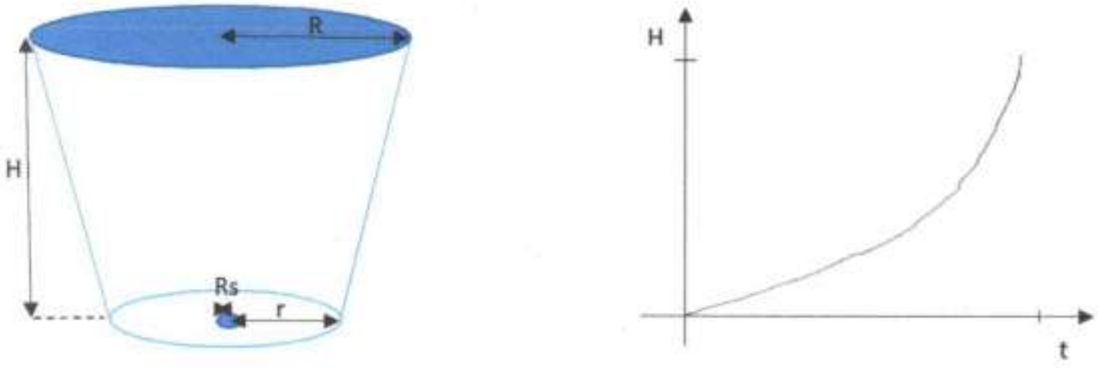
Caso 1: “Debido a la forma se vaciará de forma lenta debido a más área en la parte superior y luego de forma rápida hasta vaciarse”. En este caso el estudiante realizó la gráfica considerando que el origen del sistema coordenado representa al recipiente completamente lleno, por lo tanto, se dibuja una gráfica aparentemente contraria a sus argumentos, pero podemos confirmar sus ideas al identificar la relación con la gráfica A de la actividad 2.2.

Caso 2: “En primera el vaciado será rápido por su forma ya que el área de la parte superior es menor y luego será más lento”, siguiendo la misma idea que el caso anterior relaciona éste con la gráfica B.

Caso 3: “Debido a su forma regular se vaciará de forma constante y proporcional hasta vaciarse completamente”. Por otro lado, el estudiante considera que el Caso 1 es el recipiente que se vacía más rápido argumentando que: “Hay más volumen en la parte superior y por lo consiguiente más presión”. Esto nos muestra una resignificación del conocimiento ya que el estudiante utilizó los elementos de referencia de una manera distinta al que se acostumbra en el discurso matemático escolar, además de desarrollar la noción de variación influenciada por la presión del agua.

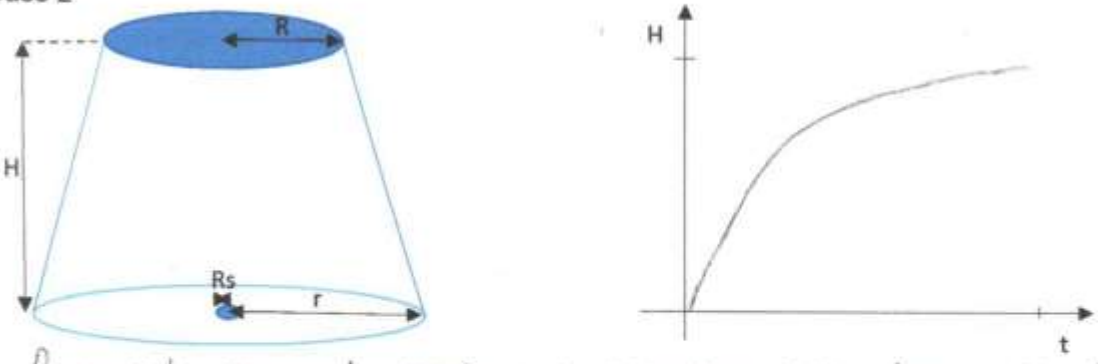
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



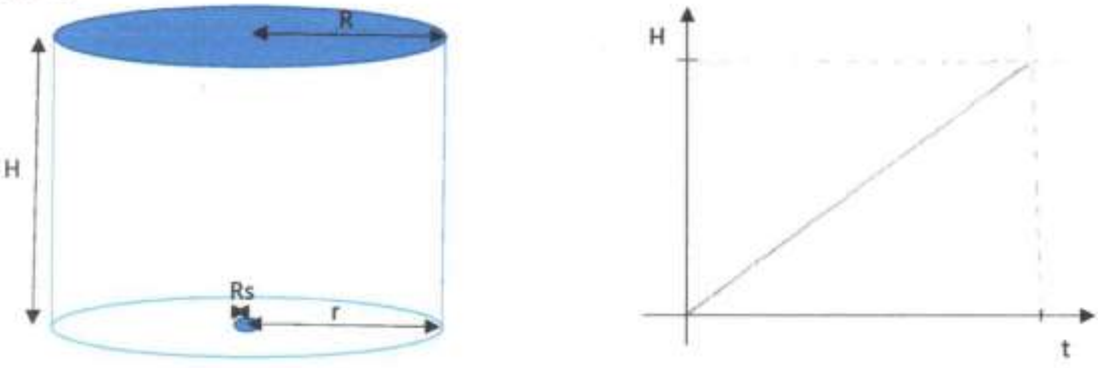
La grafica para este caso seria de este modo ya que se comienza a vaciar de una Forma lenta y con el paso del tiempo se vacia de manera mas rapida

Caso 2



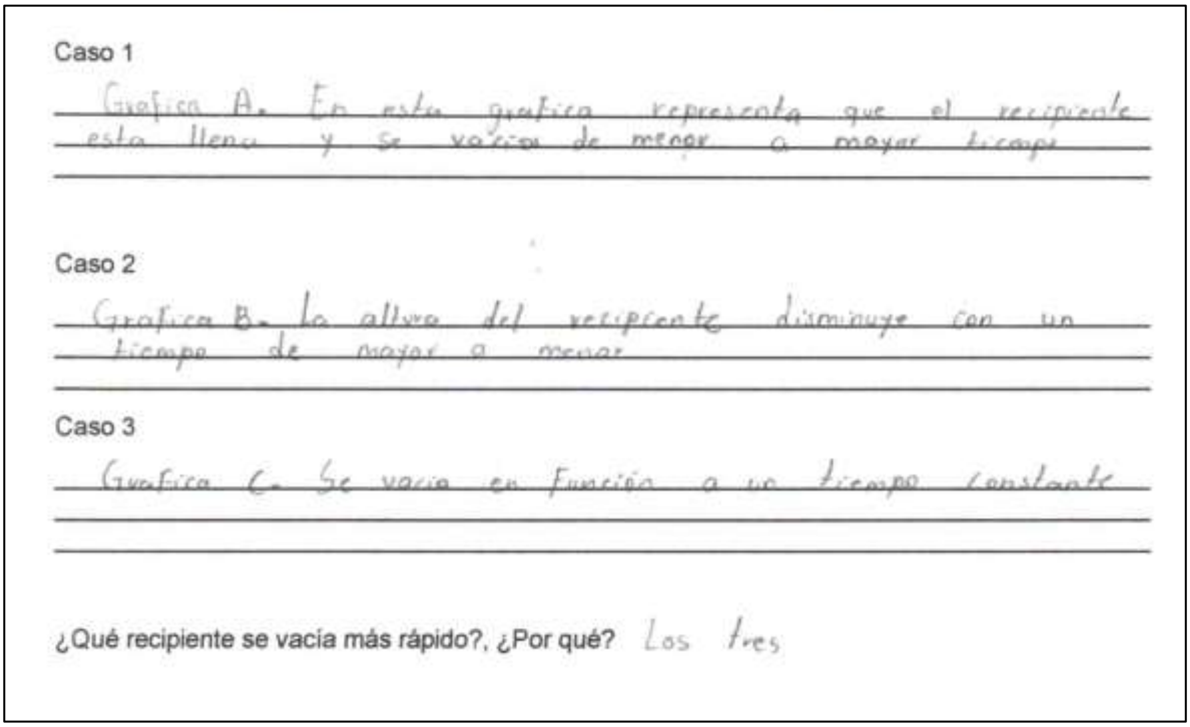
Para este caso la grafica representa que el recipiente se vacia de manera rapida al comienzo y como incrementa el tiempo tarda un poco mas en vaciarse

Caso 3



La grafica que representa este vaciado es una función lineal y corresponde a una recta ya que el vaciado es de manera constante Por ser un cilindro

Imagen 69. Ejemplo de respuesta 4 (actividad 2.1)


Caso 1

Grafica A. En esta grafica representa que el recipiente esta lleno y se vacia de menor a mayor tiempo

Caso 2

Grafica B. La altura del recipiente disminuye con un tiempo de mayor a menor

Caso 3

Grafica C. Se vacia en Función a un tiempo constante

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué? Los tres

Imagen 70. Ejemplo de respuesta 4 (actividad 2.2)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se establece un sistema de referencia ubicado de diferente manera, dibujando gráficas ascendentes.
Actividad	En la realización de la simulación se aplican las ecuaciones obtenidas en la modelación.
Práctica socialmente compartida	• Mediante la estimación se determina cuál es la forma y el comportamiento de la gráfica. • Mediante la comparación se confrontan las gráficas de la actividad 2.2 con las de la actividad 2.1.
Noción de variación	
Ordenes de variación	Se identifica que la altura de la superficie libre del agua disminuye cada vez más/menos o igual de rápido (rapidez o razón de cambio instantánea), según la geometría del recipiente.

Carácter estable del cambio	Se identifica el cambio en la rapidez según el radio de la superficie libre del agua.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable “altura” con la variable “tiempo”.
Temporización	Se identifica que se determinan estados inicial y final en donde se indica que la rapidez (Razón de Cambio) aumenta o disminuye.
Elemento de referencia	Las gráficas de la actividad 2.2 se utilizan como elemento de referencia para reafirmar las construidas en la actividad 2.1.
Unidad de medida	En la realización de la modelación se identifican los “discos” que conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales) mediante el principio de continuidad ($A1 \cdot V1 = A2 \cdot V2$).

Tabla 7. Análisis del ejemplo de respuesta 4 (actividades 2.1 y 2.2)

Principales argumentos del estudiante (E4)

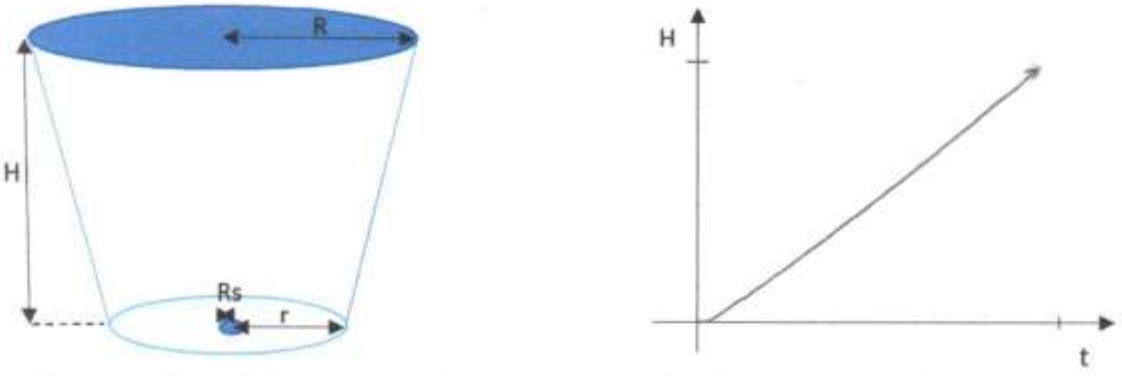
Caso 1: “La gráfica para este caso sería de este modo ya que se comienza a vaciar de una forma lenta y con el paso del tiempo se vacía de manera más rápida”. Aunque sus argumentos parecen tener un análisis variacional adecuado, en la gráfica demuestra lo contrario, sin embargo, en la actividad 2.2 el estudiante relaciona este recipiente con la gráfica A, como la mayoría.

Caso 2: “Para este caso la gráfica representa que el recipiente se vacía de manera rápida al comienzo y como incrementa el tiempo tardo un poco más en vaciarse”. En este caso relaciona el recipiente con la gráfica B que en un principio realizó una gráfica ascendente pero que posteriormente cambio de opinión mostrando así una resignificación del conocimiento.

En el Caso 3 consideró que tiene un comportamiento constante debido a que es un cilindro y de igual manera argumentó: “La gráfica que representa este vaciado es una función lineal y corresponde a una recta ya que el vaciado es de manera constante por ser un cilindro”. Al principio realizando una gráfica ascendente y cambiando de opinión por la gráfica C, haciendo un análisis variacional no adecuado para el tipo de fenómeno.

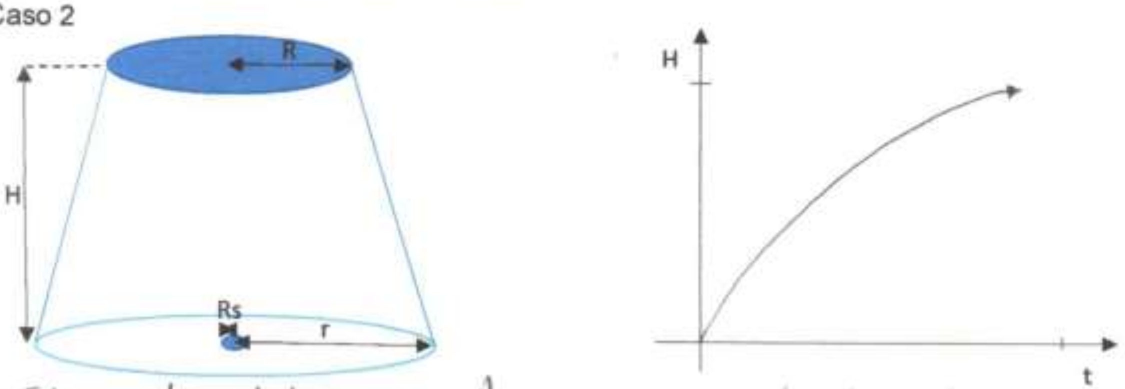
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



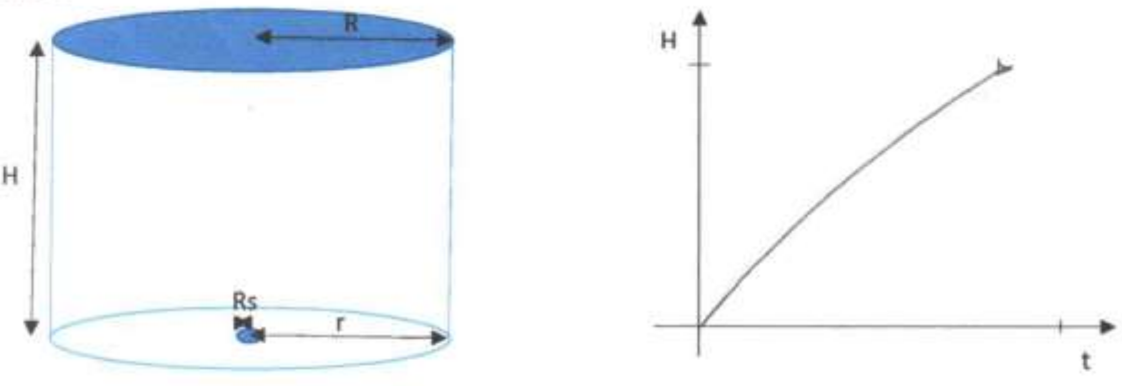
El vaciado del recipiente comienza lento ya que tiene un mayor volumen inicial que el volumen final, entonces tomando en cuenta la presión el vaciado del recipiente es casi constante.

Caso 2



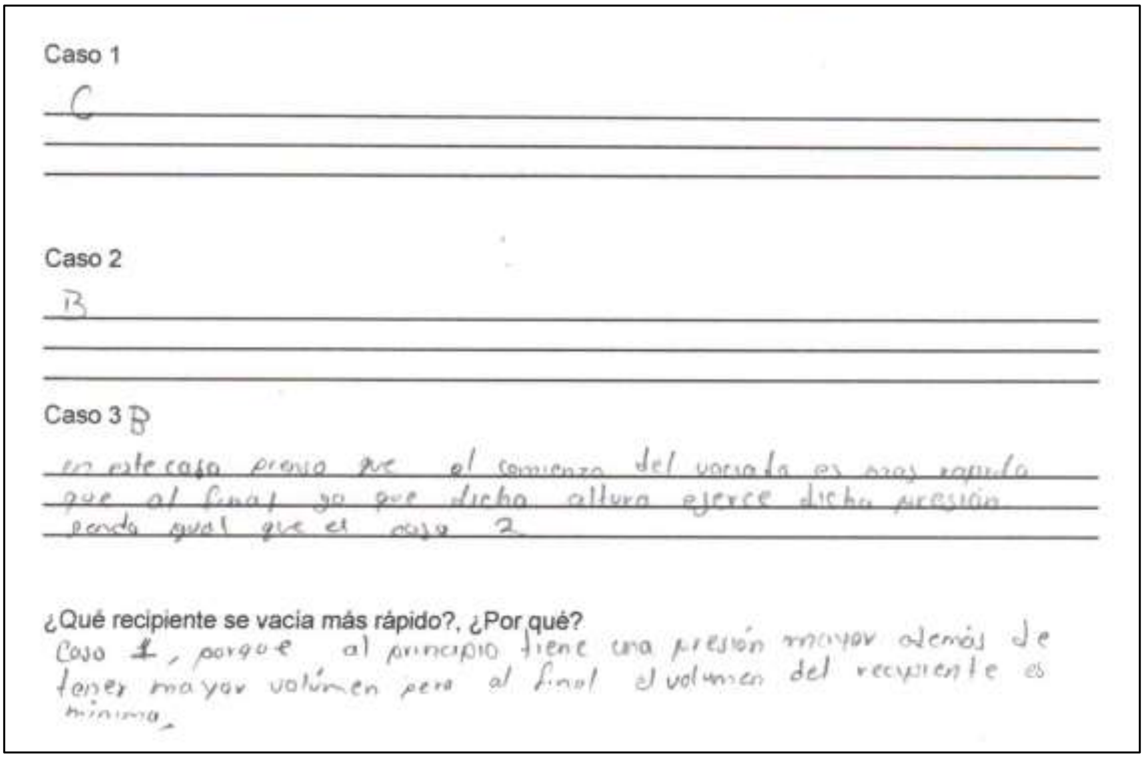
El vaciado del recipiente comienza rápido, además por la presión que ejerce el agua de acuerdo a la altura, conforme va disminuyendo la altura la presión también y disminuye el vaciado

Caso 3



el vaciado del recipiente comienza rapido tomando en cuenta la presion que ejerce a dicha altura el vaciado del recipiente no es constante

Imagen 71. Ejemplo de respuesta 5 (actividad 2.1)



Caso 1

C

Caso 2

B

Caso 3 B

en este caso prevía que el comienzo del vaciado es mas rapido que al final ya que dicha altura ejerce dicha presión siendo igual que el caso 2

¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

Caso 1, porque al principio tiene una presión mayor además de tener mayor volúmen pero al final el volumen del recipiente es minima.

Imagen 72. Ejemplo de respuesta 5 (actividad 2.2)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se establece un sistema de referencia ubicado de diferente manera, dibujando gráficas ascendentes.
Actividad	En la realización de la simulación se aplican las ecuaciones obtenidas en la modelación.
Práctica socialmente compartida	• Mediante la estimación se determina cuál es la forma y el comportamiento de la gráfica. • Mediante la predicción se determina qué recipiente se vacía más rápido. • Mediante la comparación se confrontan las gráficas de la actividad 2.2 con las de la actividad 2.1.
Noción de variación	
Ordenes de variación	Se identifica que la altura de la superficie libre del agua disminuye cada vez más/menos o igual de rápido (rapidez o razón de cambio instantánea), según la geometría del recipiente.

Carácter estable del cambio	Se identifica el cambio en la rapidez según la altura de la superficie libre del agua y el volumen.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable "altura" con la variable "tiempo", así como también con la presión del agua.
Temporización	Se identifica que se determinan estados inicial y final en donde se indica que la rapidez (Razón de Cambio) aumenta o disminuye dependiendo de la presión.
Elemento de referencia	Las gráficas de la actividad 2.2 se utilizan como elemento de referencia para reafirmar las construidas en la actividad 2.1.
Unidad de medida	En la realización de la modelación se identifican los "discos" que conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales) mediante el principio de continuidad ($A1 \cdot V1 = A2 \cdot V2$).

Tabla 8. Análisis del ejemplo de respuesta 5 (actividades 2.1 y 2.2)

Principales argumentos del estudiante (E5)

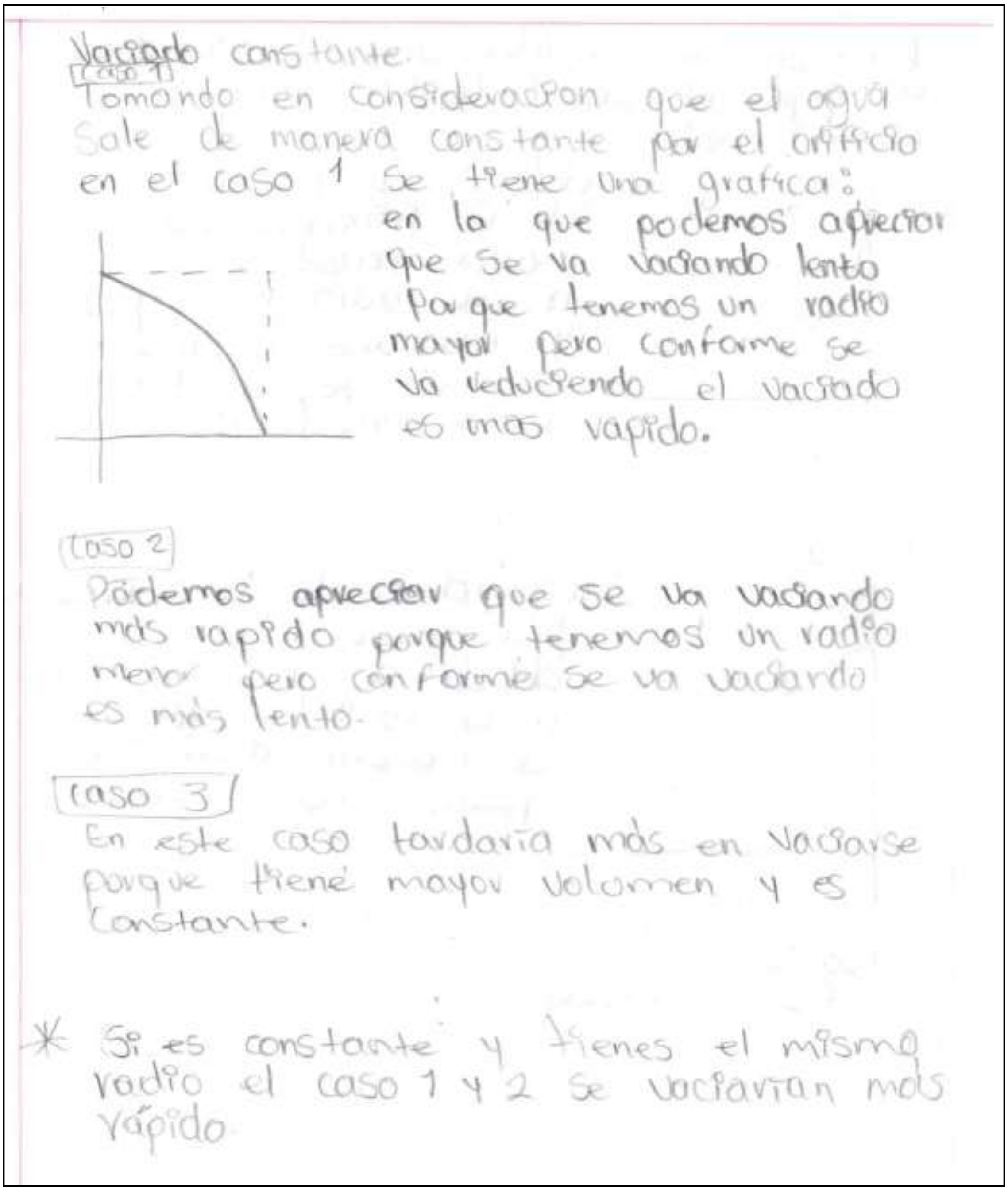
En este ejemplo se pueden observar argumentos diferentes de los anteriores utilizando elementos como el volumen de agua para el análisis variacional, sin embargo, no se muestra un análisis adecuado en la realización de las gráficas.

Caso 1: "El vaciado del recipiente comienza lento ya que tiene un mayor volumen inicial que el volumen final, entonces tomando en cuenta la presión el vaciado del recipiente es constante".

Caso 2: "El vaciado del recipiente comienza rápido, además por la presión que ejerce el agua de acuerdo a la altura conforme va disminuyendo la altura la presión también y disminuye el vaciado".

Es necesario hacer énfasis en el Caso 3 ya que, por utilizar el volumen y la presión del agua, fue el único que no consideró que se trataba de un flujo constante. En la actividad 2.2 consiguió sustentar sus ideas argumentando lo siguiente: "En este caso pienso que al comienzo del vaciado es más rápido que al final ya que dicha altura ejerce dicha presión siendo igual que el Caso 2". Por otro lado, considera que el recipiente que se vacía más rápido es el del Caso 1 basándose en los elementos que utiliza en el análisis de la actividad argumentando que: "Al principio tiene una presión mayor además de tener mayor volumen, pero al final el volumen del recipiente es mínimo". Aunque en este ejemplo no se identifican las nociones de variación reflejadas en las gráficas, podemos decir que, si existe una construcción de la noción de variación y un desarrollo del PyLV, ya que mediante sus argumentos nos podemos percatar de una resignificación del conocimiento.

Después de realizar la actividad 2 de manera individual, los estudiantes conformaron equipos con el fin de compartir ideas para confrontarlas y resignificar el conocimiento. Al conformarse los equipos observamos que en cada uno se encontraba al menos un estudiante con la firme idea de que se trataban de gráficas descendentes, y todos los equipos llegaron a conclusiones muy similares. A continuación, se presentan algunos ejemplos.



Vaciado constante.

Caso 1

Tomando en consideracion que el agua sale de manera constante por el orificio en el caso 1 se tiene una grafica: en la que podemos apreciar que se va vaciando lento porque tenemos un radio mayor pero conforme se va reduciendo el vaciado es mas rapido.

Caso 2

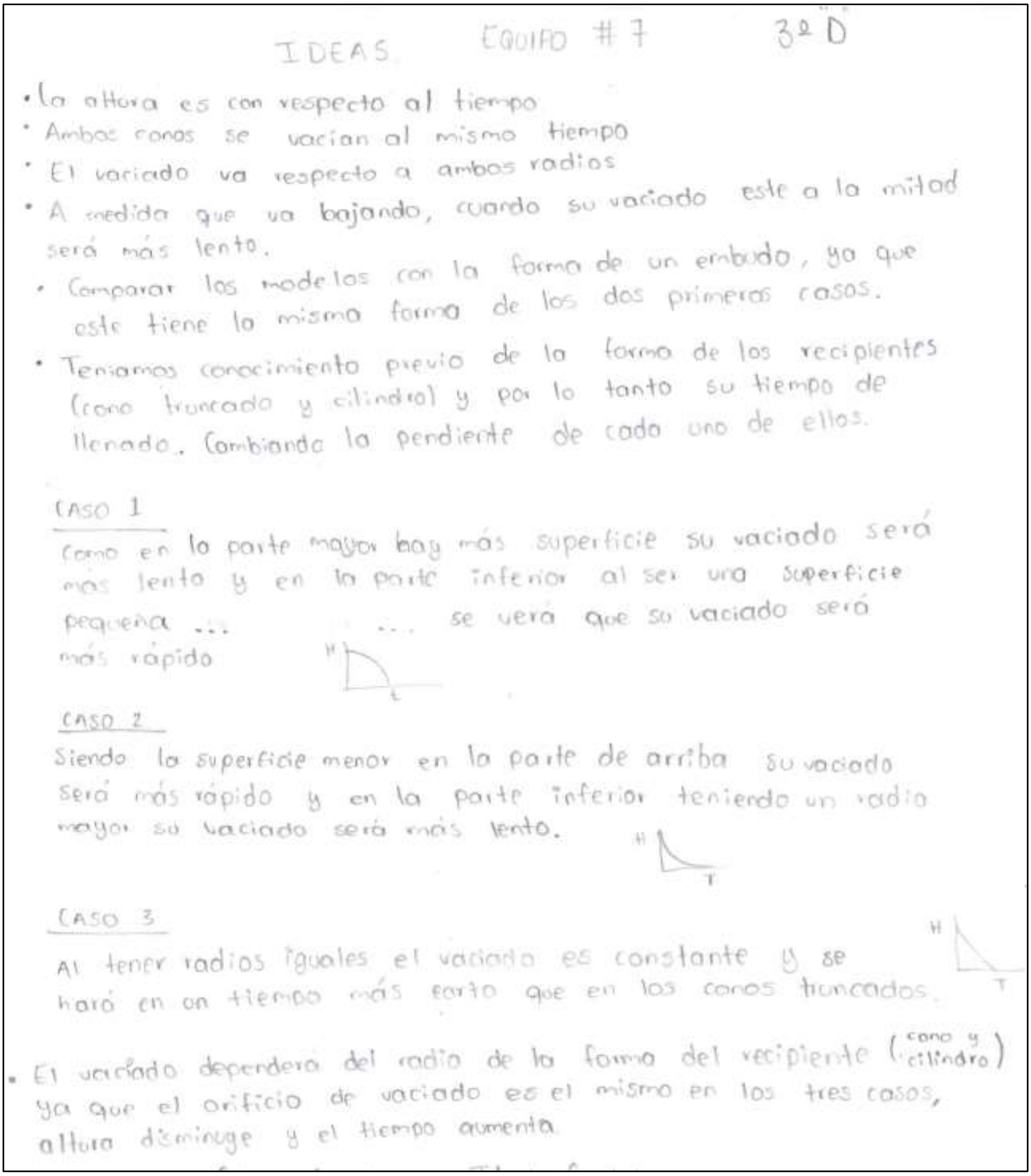
Podemos apreciar que se va vaciando mas rapido porque tenemos un radio menor pero conforme se va vaciando es más lento.

Caso 3

En este caso tardaria más en vaciarse porque tiene mayor volumen y es constante.

* Si es constante y tienes el mismo radio el caso 1 y 2 se vaciarian más rápido

Imagen 73. Ejemplo de respuesta 6 (actividad 2, por equipos)



IDEAS EQUIPO #7 3º D

- La altura es con respecto al tiempo
- Ambos conos se vacían al mismo tiempo
- El vaciado va respecto a ambos radios
- A medida que va bajando, cuando su vaciado este a la mitad será más lento.
- Comparar los modelos con la forma de un embudo, ya que este tiene la misma forma de los dos primeros casos.
- Teniamos conocimiento previo de la forma de los recipientes (cono truncado y cilindro) y por lo tanto su tiempo de llenado. Cambiando la pendiente de cada uno de ellos.

CASO 1

Como en la parte mayor hay más superficie su vaciado será mas lento y en la parte inferior al ser una superficie pequeña ... ... se verá que su vaciado será más rápido

H T

CASO 2

Siendo la superficie menor en la parte de arriba su vaciado será más rápido y en la parte inferior teniendo un radio mayor su vaciado será más lento.

H T

CASO 3

Al tener radios iguales el vaciado es constante y se hará en un tiempo más corto que en los conos truncados.

H T

- El vaciado dependerá del radio de la forma del recipiente (cono y cilindro) ya que el orificio de vaciado es el mismo en los tres casos, altura disminuye y el tiempo aumenta.

Imagen 74. Ejemplo de respuesta 7 (actividad 2, por equipos)

En resumen, la mayoría de los equipos argumentan que el Caso 1 se trata de una curva cóncava hacia abajo debido a que el vaciado se desarrolla de lento a rápido porque el cono truncado tiene un radio superior mayor al inferior. Para el Caso 2 los estudiantes argumentan que se trata de una curva cóncava hacia arriba debido a que el vaciado se desarrolla de rápido a lento por que el cono truncado tiene un radio superior menor al inferior. Para el Caso 3 los estudiantes argumentan que se trata de una recta debido a que consideran que su vaciado es constante porque es un cilindro.

4.2.3. Análisis de la actividad 3. Evaluación

Esta actividad se presentó ante el grupo en el pizarrón, dividida en tres etapas, las cuales se realizaron individualmente y por separado, es decir, al terminar la actividad 3.1 se les presento la actividad 3.2, y al terminar esta actividad se les presento la actividad 3.3. Las primeras dos actividades las resolvieron en 5 minutos cada una, mientras que la tercera la resolvieron en 15 minutos. A continuación, se presentan las características específicas basadas en el instrumento de análisis para la actividad 3 (ver tabla 4), así como también algunos ejemplos de las respuestas más representativas del grupo.

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	• Se establece que la gráfica tiene un cambio de concavidad (actividad 3.1). • Se identifica que los recipientes se pueden dividir en tres partes para analizar el comportamiento de las gráficas (actividad 3.2).
Actividad	En la modelación de la actividad 1 se obtiene la ecuación para el tiempo de vaciado. En la actividad 3.3 se determina el tiempo total de llenado considerando las condiciones iniciales.
Práctica socialmente compartida	• Mediante la estimación se determina cuál es la forma del recipiente asociado a la gráfica (actividad 3.1), y viceversa, es decir, se determina cuál es el comportamiento de la gráfica asociado a la forma de los recipientes (actividad 3.2). • Mediante la predicción se determina cuál es el tiempo de llenado del recipiente (actividad 3.3). • Mediante la comparación se establecen la forma y la ubicación de las gráficas en el sistema cartesiano (actividad 3.2).
Noción de variación	
Ordenes de variación	Se determina qué variable aumenta cada vez más/menos o igual (rapidez o

	razón de cambio instantánea), según la geometría del recipiente.
Carácter estable del cambio	• Se establece que el cambio en la altura del agua depende del tiempo mostrado en la gráfica (actividad 3.1). • Se establece que, si se divide el recipiente, en ciertos intervalos existe un cambio estable (actividad 3.2).
Sistema de referencia	
Relación de variables	• Se establece la relación de la variable “altura” con la variable “tiempo”. • Se establece la relación de las dos variables de la gráfica con el radio del agua que crece o decrece al pasar el tiempo (actividad 3.1).
Temporización	• Se identifican estados intermedios para la construcción de las gráficas (actividad 3.2). • Se determina el valor del gasto en un estado intermedio para saber el tiempo total de llenado (actividad 3.3).
Elemento de referencia	Los recipientes de la actividad 3.2 se utilizan como elemento de referencia uno del otro, para determinar la ubicación de las gráficas correspondientes.
Unidad de medida	Se identifican los “discos” que conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales).

Tabla 9. Características para el análisis de la actividad 3

Observamos que la utilización de los elementos de las actividades anteriores, así como la modelación y la simulación, sirvieron de herramienta para que los estudiantes desarrollaran algunas ideas que ayudaron para resolver esta actividad. En la actividad 3.1 algunos estudiantes concibieron la forma del recipiente de forma contraria, aunque la mayoría si hizo el análisis de manera adecuada, sin embargo, se muestra que si existe un análisis variacional. En la actividad 3.2 la mayoría identificó y retomó los elementos construidos en las actividades anteriores para la construcción de las gráficas, así como su comportamiento. En la actividad 3.3 se demostró el uso de los conocimientos que se abordan en las materias referentes al Cálculo, en una situación de variación que tiene una estrecha relación con la Ingeniería Civil. A continuación, presentamos algunos ejemplos de las respuestas más representativas que se obtuvieron.

Actividad 3.1 Dada la siguiente gráfica que representa el llenado de un recipiente con gasto constante, dibuje la forma del recipiente.

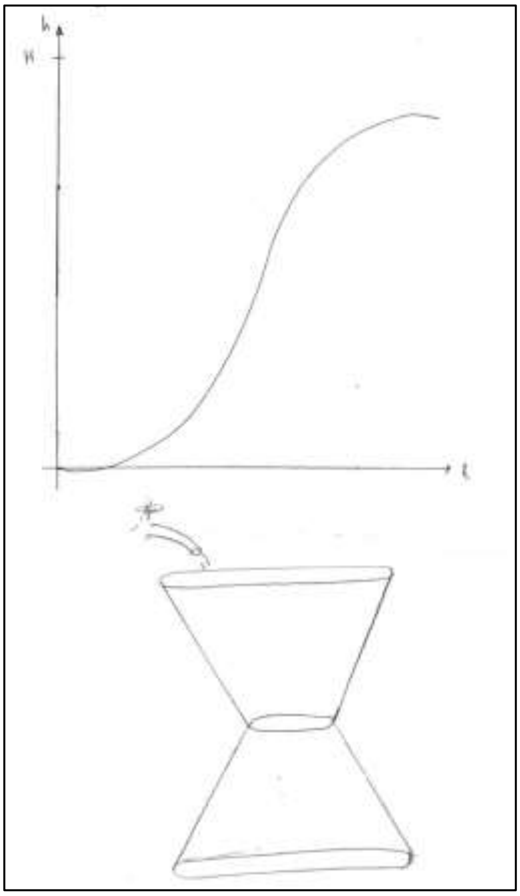


Imagen 75. Ejemplo de respuesta 1 (actividad 3.1)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica que la mitad de la gráfica pertenece a un cono truncado, así como también la otra mitad, pero invertido.
Actividad	No se identifica.
Práctica socialmente compartida	• De manera global mediante la estimación, se identifica cuál es el comportamiento del radio de

	la superficie libre del agua basándose en la forma de las gráficas que representan un cono truncado. • Mediante la comparación de la gráfica presentada con la de un cono truncado, se identifica la forma del recipiente.
Noción de variación	
Ordenes de variación	A través de la gráfica se identifica que al inicio la altura aumenta cada vez más rápido hasta llegar a la mitad de la gráfica (punto de inflexión) en donde la altura aumenta cada vez más lento.
Carácter estable del cambio	Se identifica el cambio en la altura asociado al tiempo de una forma regular dibujando un recipiente uniforme.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se identifica la relación de las dos variables de la gráfica con el radio de la superficie libre del agua asociado con la rapidez con la que ésta sube al llenarse el recipiente.
Temporización	Se identifican estados intermedios dividiendo la gráfica en dos partes para determinar la forma completa del recipiente uniendo dos recipientes analizados anteriormente.
Elemento de referencia	Se utilizan como elementos de referencia los recipientes analizados en la actividad 2.
Unidad de medida	No se identifica.

Tabla 10. Análisis del ejemplo de respuesta 1 (actividad 3.1)

En este ejemplo se observa que el estudiante divide la gráfica presentada en dos, de tal manera que obtiene dos gráficas que ya conoce y que ha analizado anteriormente pero que una tiene una diferente concavidad a la otra, lo que hace que pueda identificar que, al cambiar la concavidad, también cambia el comportamiento del agua, por lo tanto, el recipiente que describe es en sentido contrario al que se encuentra al inicio de la gráfica. Esto nos muestra que, si existe un análisis variacional por el estudiante haciendo uso de las prácticas variacionales como la comparación y la estimación, lo que conlleva a una resignificación del conocimiento.

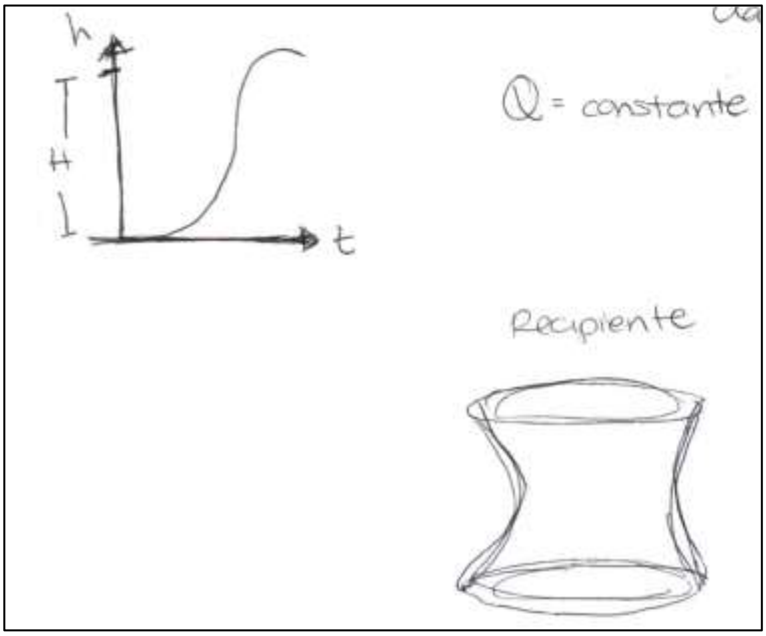


Imagen 76. Ejemplo de respuesta 2 (actividad 3.1)

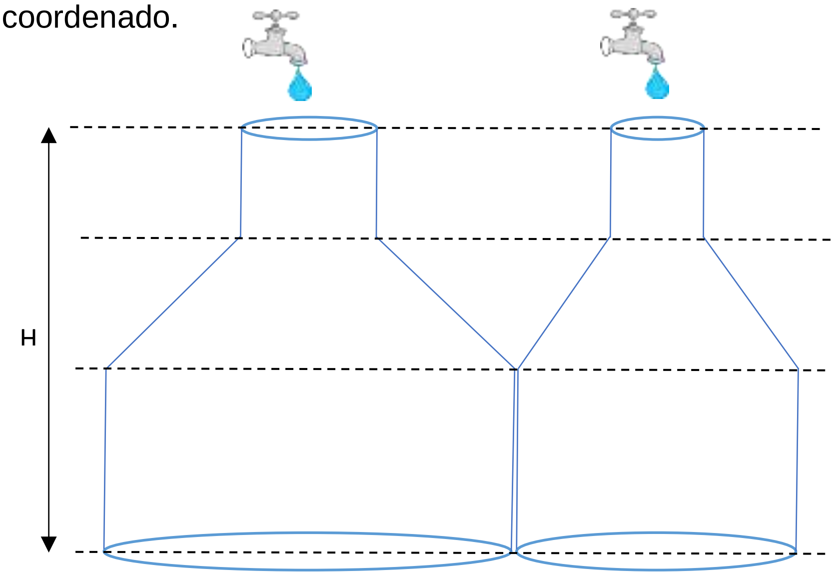
Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica que, en el cambio de concavidad de la gráfica, existe un cambio en la forma del recipiente.
Actividad	No se identifica.
Práctica socialmente compartida	De manera global mediante la estimación, se identifica cuál es el comportamiento del radio de la superficie libre del agua basándose en la forma de la gráfica presentada.
Noción de variación	
Ordenes de variación	A través de la gráfica se identifica que al inicio la altura aumenta cada vez más rápido hasta llegar a la mitad de la gráfica (punto de inflexión) en donde la altura aumenta cada vez más lento
Carácter estable del cambio	Se identifica el cambio en la altura asociado al tiempo de una forma regular dibujando un recipiente coherente con la regularidad de la gráfica.

Sistema de referencia	
Relación de variables	Se identifica la relación de las dos variables de la gráfica con el radio de la superficie libre del agua asociado con la rapidez con la que ésta sube al llenarse el recipiente
Temporización	No se identifica.
Elemento de referencia	Se utilizan como elementos de referencia los recipientes analizados en la actividad 2.
Unidad de medida	No se identifica.

Imagen 77. Análisis del ejemplo de respuesta 2 (actividad 3.1)

En este ejemplo se realizó un análisis más general del fenómeno, a diferencia del ejemplo anterior en donde se aprecia claramente la división de la gráfica para la construcción del recipiente. Se observa que se identifica que en el punto de inflexión existe un cambio en la forma del recipiente, comportándose el agua de una manera similar a la parte inferior, pero en sentido contrario. Cabe mencionar que cierto porcentaje de estudiantes hizo un análisis contrario, dibujando así una esfera, sin embargo, también existe un análisis variacional en el que se entiende la forma en que cambia la variable altura con respecto al tiempo.

Actividad 3.2 Dados los siguientes recipientes que se están llenando con el mismo gasto constante, dibujar las gráficas correspondientes en el mismo sistema coordenado.



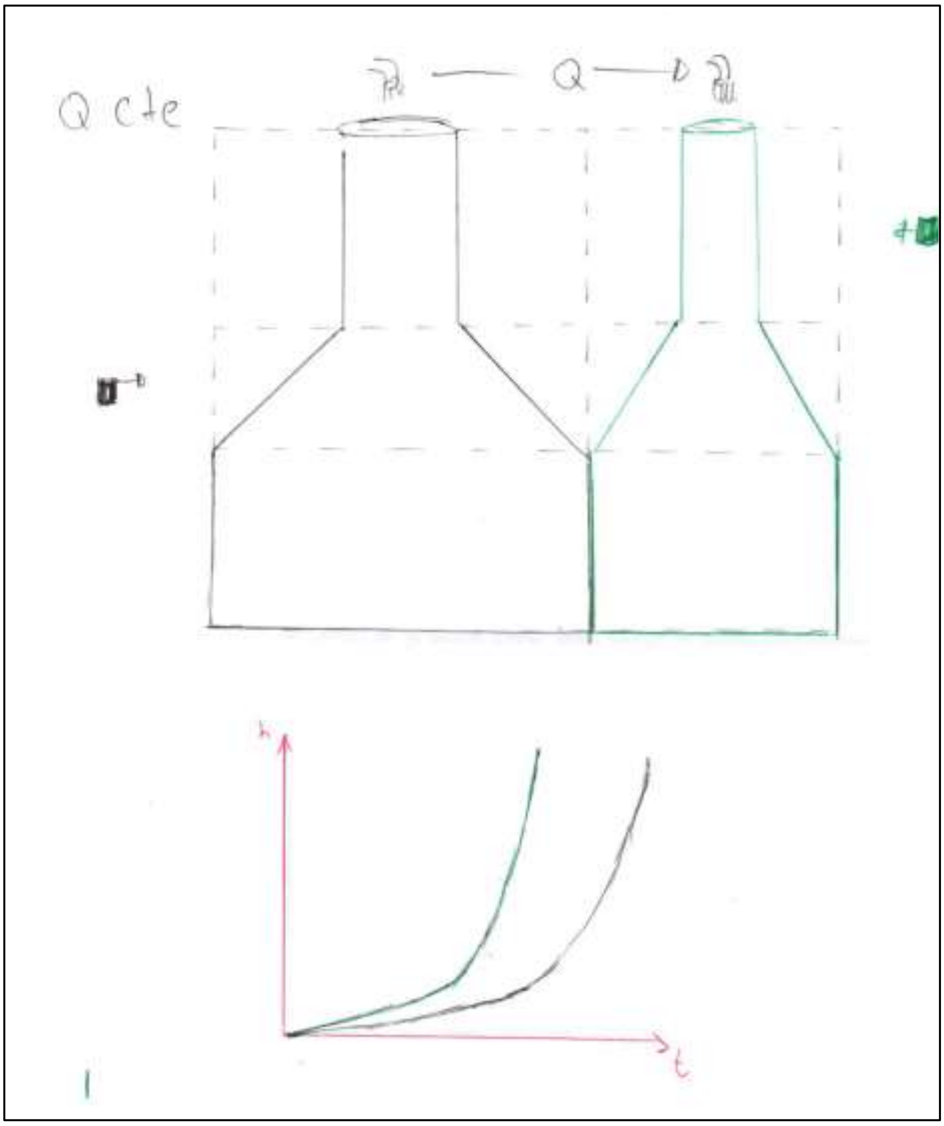


Imagen 78. Ejemplo de respuesta 1 (actividad 3.2)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica la división de los recipientes en tres partes para construir la gráfica.
Actividad	No se identifica.
Práctica socialmente compartida	• De manera parcialmente global y mediante la estimación se determina cuál es el comportamiento de las gráficas, a partir de las secciones que se

	obtienen al dividir los recipientes. • Mediante la comparación se establece que los tiempos de llenado de ambos recipientes son diferentes basándose en el radio de ambos.
Noción de variación	
Ordenes de variación	Se identifica que el recipiente con menor diámetro tiene una Razón de Cambio mayor al recipiente con diámetro mayor, lo que se refleja en la construcción de la gráfica.
Carácter estable del cambio	Se identifica que al dividir el recipiente se obtienen secciones conocidas y analizadas anteriormente en donde en cada sección se encuentra un cambio estable.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable "altura" con la variable "tiempo", reflejándose en la ubicación de las gráficas según el radio de cada sección del recipiente.
Temporización	Se identifican estados intermedios en las secciones marcadas para la construcción de las gráficas.
Elemento de referencia	El recipiente en color negro sirve como elemento de referencia con respecto al otro recipiente y viceversa para la ubicación de las gráficas en el sistema coordenado.
Unidad de medida	No se identifica.

Imagen 79. Análisis del ejemplo de respuesta 1 (actividad 3.2)

En este ejemplo podemos observar la forma en que el estudiante identifica que al dividir los recipientes se puede hacer una combinación de las gráficas que ya había analizado anteriormente, identificando en su respuesta que al inicio de la gráfica que corresponde a la parte baja, el estudiante dibujó una recta para los dos recipientes con sus respectivas pendientes, seguida por una curvatura que corresponde a la parte media de la gráfica, terminando con otra recta que corresponde a la parte alta del recipiente que coincide con la parte baja, con la diferencia que en esta parte el radio es menor, por lo tanto el estudiante dibujó una recta con mayor pendiente a la recta correspondiente a la parte baja.

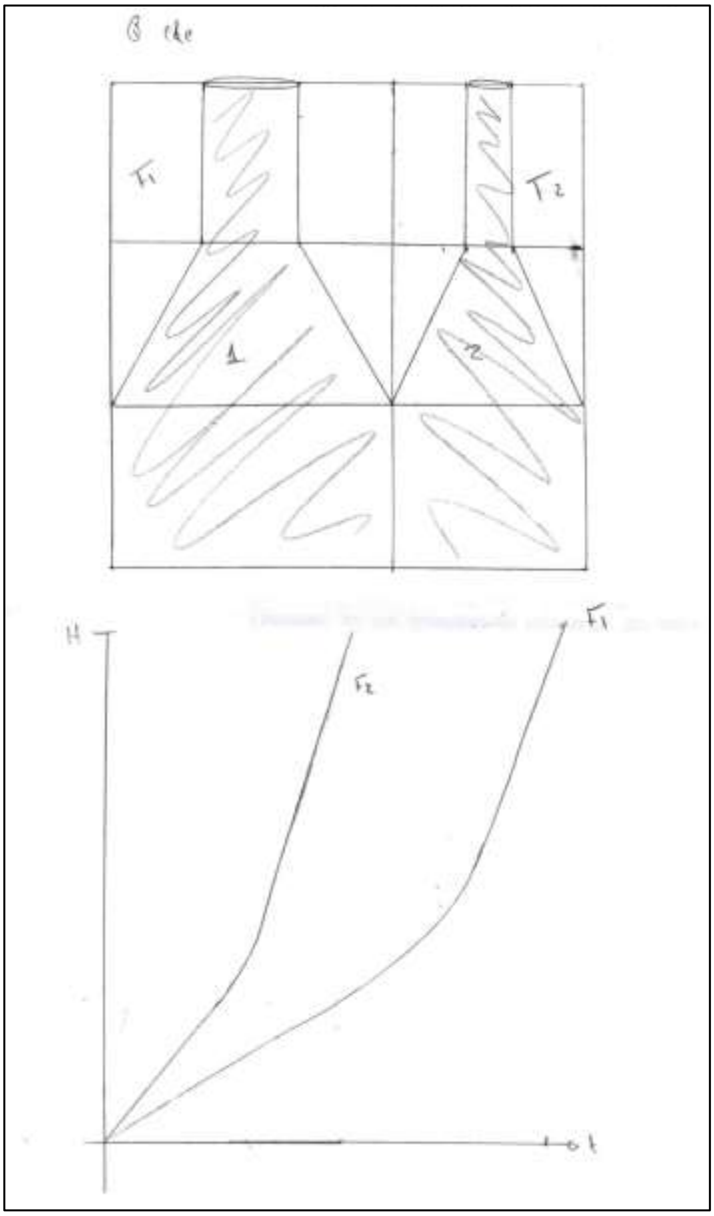


Imagen 80. Ejemplo de respuesta 2 (actividad 3.2)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica la división de los recipientes en tres partes para construir la gráfica.
Actividad	No se identifica.
Práctica socialmente compartida	• De manera parcialmente global y mediante la estimación se determina cuál es el comportamiento de las gráficas,

	a partir de las secciones que se obtienen al dividir los recipientes. • Mediante la comparación se establece que los tiempos de llenado de ambos recipientes son diferentes basándose en el radio de ambos.
Noción de variación	
Ordenes de variación	Se identifica que el recipiente con menor diámetro tiene una Razón de Cambio mayor al recipiente con diámetro mayor, lo que se refleja en la construcción de la gráfica.
Carácter estable del cambio	Se identifica que al dividir el recipiente se obtienen secciones conocidas y analizadas anteriormente en donde en cada sección se encuentra un cambio estable.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable "altura" con la variable "tiempo", reflejándose en la ubicación de las gráficas según el radio de cada sección del recipiente.
Temporización	Se identifican estados intermedios en las secciones marcadas para la construcción de las gráficas.
Elemento de referencia	El recipiente en "F1" sirve como elemento de referencia con respecto al otro recipiente y viceversa para la ubicación de las gráficas en el sistema coordenado.
Unidad de medida	No se identifica.

Tabla 11. Análisis del ejemplo de respuesta 2 (actividad 3.2)

El análisis de este ejemplo es muy parecido al anterior, pero en este caso no se utilizan colores para identificar que gráfica le corresponde a cada recipiente, sino que utiliza una nomenclatura que nos permite diferenciar entre una gráfica y otra. En este ejemplo se pueden observar más marcadas las gráficas en el sentido de que la curva de la gráfica "F1" es más pronunciada que la gráfica "F2", lo que hace ver que el estudiante relaciona la amplitud de la curva con el radio del recipiente. Por otro lado, también podemos observar que las rectas que se muestran al inicio de cada gráfica tienen una Razón de Cambio (pendiente) mayor a la recta que se encuentra al final de cada gráfica, lo que hace ver que el estudiante está asociando a la rapidez de llenado con el radio del recipiente.

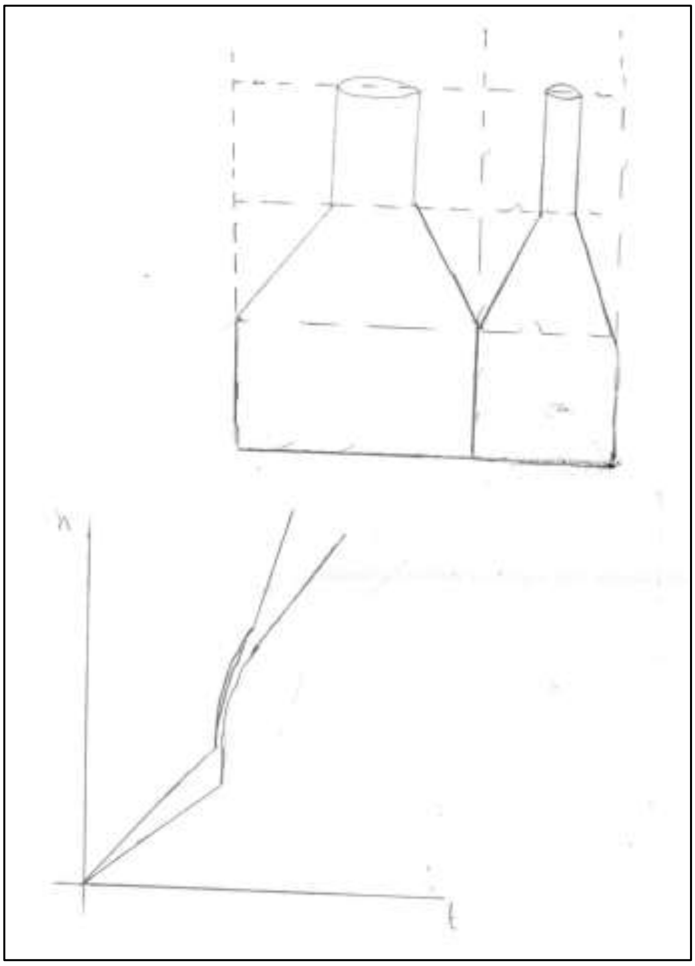


Imagen 81. Ejemplo de respuesta 3 (actividad 3.2)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica la división de los recipientes en tres partes para construir la gráfica.
Actividad	No se identifica.
Práctica socialmente compartida	De manera parcialmente global y mediante la estimación se determina cuál es el comportamiento de las gráficas, a partir de las secciones que se obtienen al dividir los recipientes.

Noción de variación	
Ordenes de variación	En una de las dos gráficas se identifica que la sección del recipiente con menor diámetro tiene una Razón de Cambio mayor a la sección del recipiente con diámetro mayor; en la otra no se identifica.
Carácter estable del cambio	Se identifica que al dividir el recipiente se obtienen secciones conocidas y analizadas anteriormente en donde en cada sección se encuentra un cambio estable.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable "altura" con la variable "tiempo".
Temporización	Se identifican estados intermedios en las secciones marcadas para la construcción de las gráficas.
Elemento de referencia	No se identifica ya que no hace referencia de que gráfica le corresponde a cada recipiente.
Unidad de medida	No se identifica.

En este ejemplo observamos una serie de errores en su análisis, se puede apreciar en su respuesta que no se establece que gráfica le corresponde a cada recipiente, además de considerar que un recipiente se llena más que el otro tomando en cuenta las gráficas dibujadas. También podemos observar que la sección de la gráfica correspondiente a la parte media de los recipientes está interpretada de forma contraria, sin embargo, se observa que en las otras secciones se dibuja una recta correspondiente a la parte inferior y superior de los recipientes, así como también en una de estas gráficas se observa que la Razón de Cambio (pendiente) correspondiente a la parte inferior del recipiente, es menor a la de la gráfica correspondiente a la parte superior, esto nos permite ver un análisis variacional.

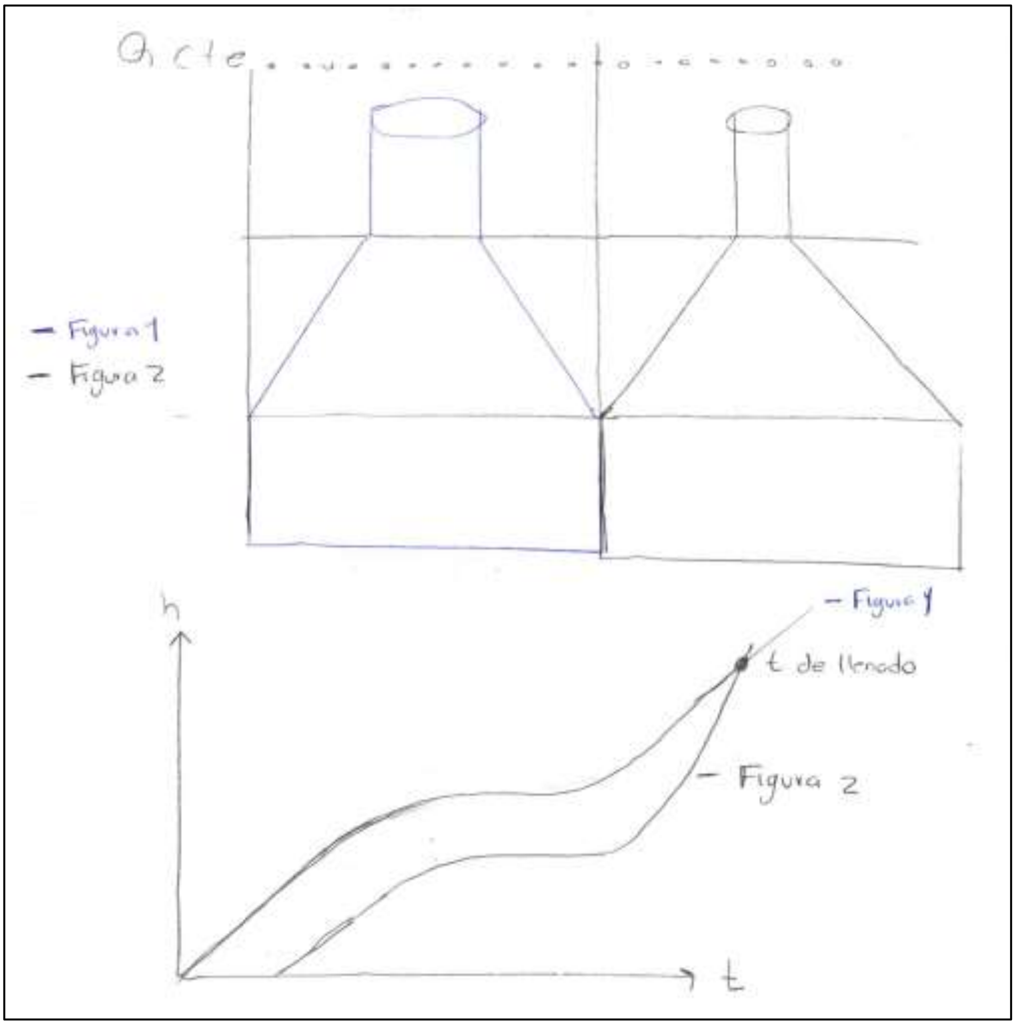


Imagen 82. Ejemplo de respuesta 4 (actividad 3.2)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica la división de los recipientes en tres partes para construir la gráfica.
Actividad	No se identifica.
Práctica socialmente compartida	De manera global y mediante la estimación se determina cuál es el comportamiento de las gráficas.
Noción de variación	
Ordenes de variación	No se identifica.

Carácter estable del cambio	No se identifica.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se establece la relación de la variable “altura” con la variable “tiempo”.
Temporización	No se identifica.
Elemento de referencia	No se identifica.
Unidad de medida	No se identifica.

Observamos en este ejemplo que el estudiante interpreta de diferente manera el fenómeno, desde el principio su dibujo es diferente al resto ya que consideró que el diámetro de la parte inferior de ambos recipientes es el mismo, sin embargo, en la parte superior si consideró diámetros diferentes. Por otro lado, al realizar el análisis considera que el llenado de la “Figura 2” comienza después del llenado de la “Figura 1”, cuando se explica claramente en las instrucciones de la actividad que ambos recipientes se están llenando con un gasto constante. Además de eso también considera que los dos recipientes se llenan al mismo tiempo, idea que es imposible tomando en cuenta las condiciones iniciales y también lo que se ha venido trabajando en las actividades anteriores. En este caso se puede observar que no existe un análisis variacional como tal y que en las actividades anteriores no se desarrollaron algunas ideas fundamentales para el análisis de este tipo de fenómenos.

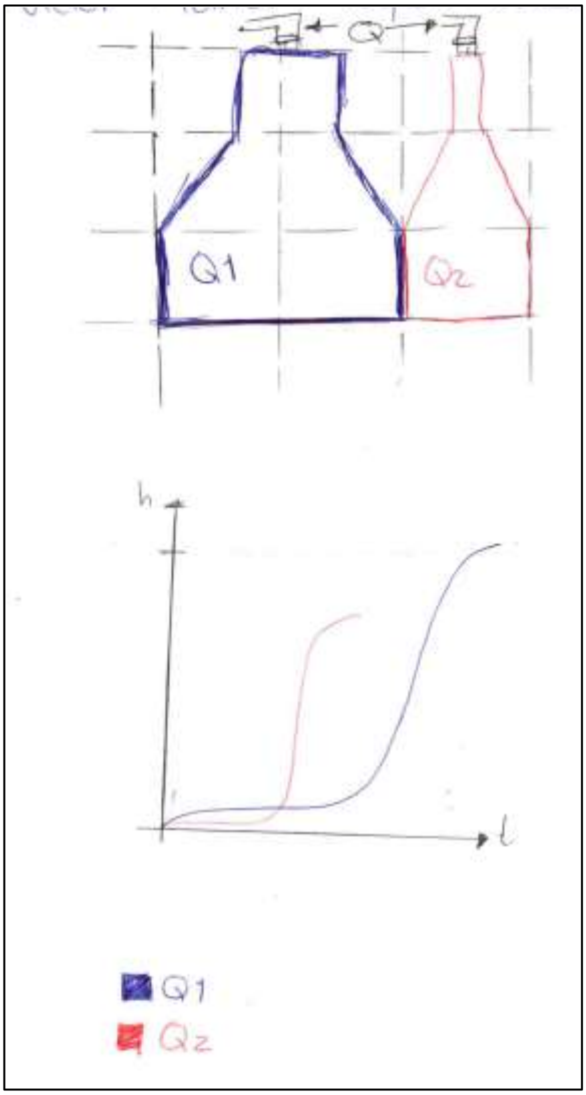


Imagen 83. Ejemplo de respuesta 5 (actividad 3.2)

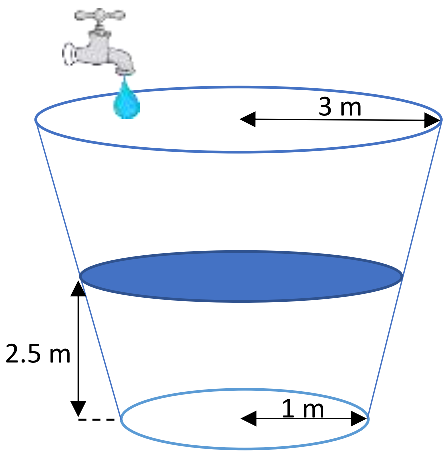
Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica la división de los recipientes en tres partes para construir la gráfica.
Actividad	No se identifica.
Práctica socialmente compartida	De manera global y mediante la estimación se determina cuál es el comportamiento de las gráficas.
Noción de variación	
Ordenes de variación	No se identifica.

Carácter estable del cambio	No se identifica.
Sistema de referencia	
Relación de variables	No se identifica.
Temporización	No se identifica.
Elemento de referencia	No se identifica.
Unidad de medida	No se identifica.

Tabla 12. Análisis del ejemplo de respuesta 5 (actividad 3.2)

En este ejemplo el estudiante utiliza la "Q1" y "Q2" para identificar los recipientes, y según nuestra apreciación no se refiere específicamente al gasto o caudal de cada recipiente, al mismo tiempo también utiliza colores para indicar que gráfica le corresponde a cada recipiente. Por otro lado, en el análisis del fenómeno no se identifican varias de las características que se presentan en el instrumento para analizar los resultados, debido a que las gráficas que nos muestra el estudiante carecen de elementos que debía de tomar en cuenta. El estudiante considera que en ninguna de las secciones existe un carácter estable del cambio ya que sus gráficas muestran una regularidad distinta a la que representa el fenómeno de llenado. También identificamos en las gráficas que considera que el recipiente "Q2" no se llena completamente, sin embargo, si considera que termina de llenarse en menos tiempo que "Q1", pero esto no quiere decir que si exista un análisis variacional adecuado para el fenómeno de llenado de recipientes.

Actividad 3.3 Dadas las condiciones iniciales del llenado de un cono truncado con gasto constante determine el tiempo total de llenado.



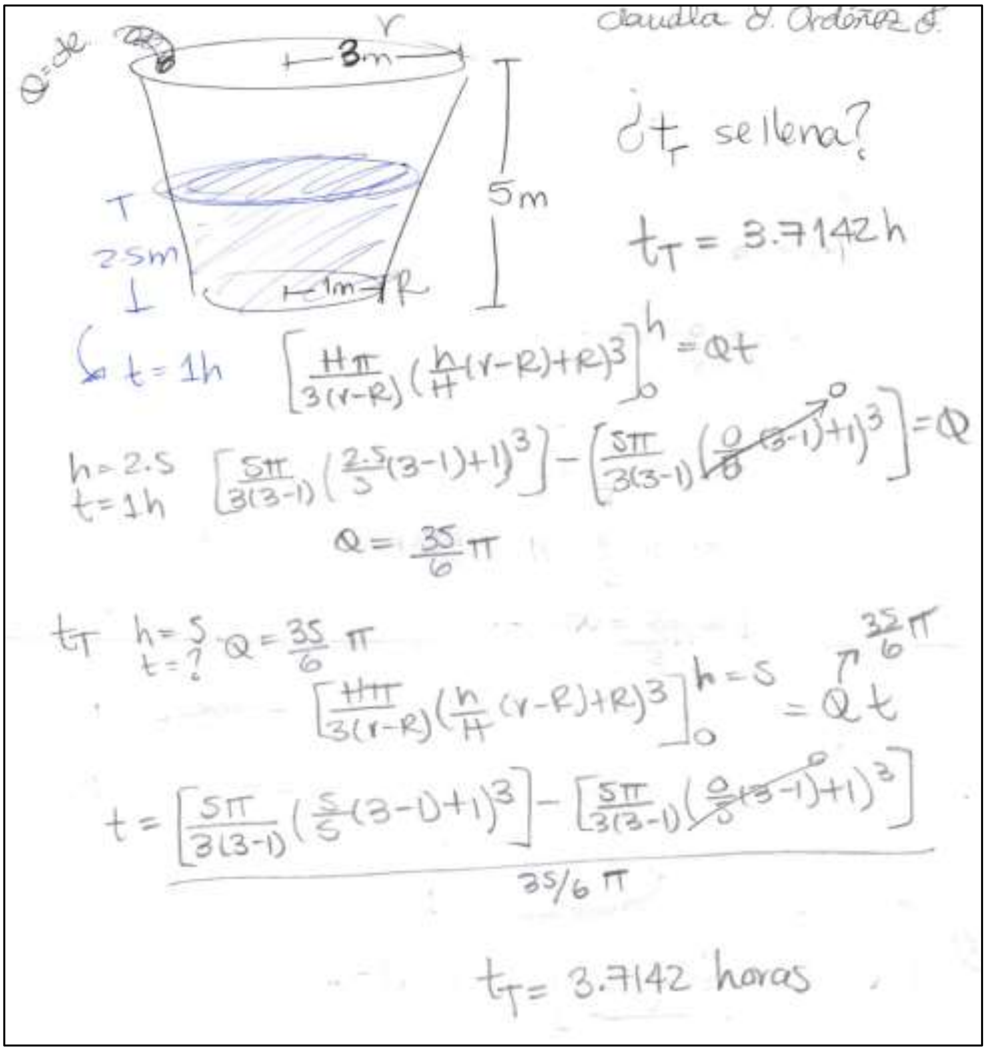


Imagen 84. Ejemplo de respuesta 1 (actividad 3.3)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica que, al calcular el gasto con las condiciones iniciales, se puede calcular el tiempo total de llenado debido a que este gasto es constante.
Actividad	Se determina el tiempo total de llenado considerando las condiciones iniciales y la ecuación “Qt” obtenida en la modelación de la actividad 1.
Práctica socialmente compartida	Mediante la predicción se establece cuál es el tiempo total de llenado del recipiente.

Noción de variación	
Ordenes de variación	Se reconoce que la variable tiempo cambia al llenarse el recipiente según el gasto obtenido en los cálculos y las medidas del recipiente.
Carácter estable del cambio	Se establece que el gasto es constante, por lo tanto, es un carácter estable de este cambio.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se relaciona la variable tiempo cuando el recipiente está a la mitad (condiciones iniciales) con el tiempo total de llenado.
Temporización	Se establece el valor del gasto en un estado intermedio (condiciones iniciales) para saber el tiempo total de llenado.
Elemento de referencia	Se utiliza como elemento de referencia al gasto calculado con las condiciones iniciales para calcular el tiempo total de llenado utilizando este mismo gasto.
Unidad de medida	Se identifican los "discos" que al realizar la sumatoria (integral) conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales).

Imagen 85. Análisis del ejemplo de respuesta 1 (actividad 3.3)

Se identifica en este ejemplo que existe un desarrollo de la noción variación ya que se logra diferenciar cuando un elemento es constante y cuando es variable, lo que permite desarrollar nuevamente las ecuaciones que se abordaron en la actividad 1, y aplicándolas en una situación específica. En este caso el estudiante comienza haciendo el cálculo del gasto utilizando las condiciones iniciales, tomando en cuenta que el gasto es constante, posteriormente se calculó el tiempo total de llenado, pero esta vez utilizando las condiciones generales del recipiente y el gasto calculado

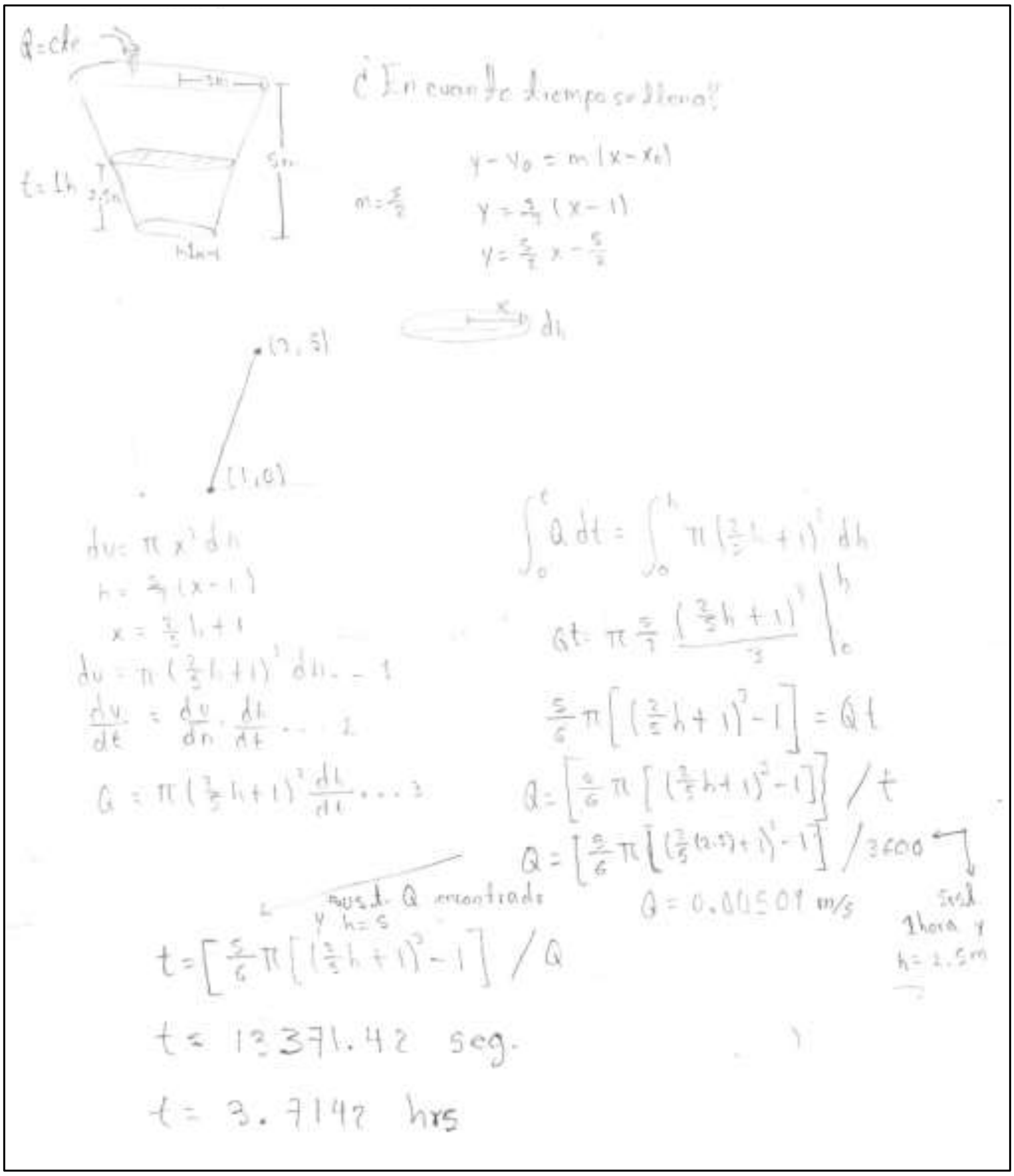


Imagen 86. Ejemplo de respuesta 2 (actividad 3.3)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica que, al calcular el gasto con las condiciones iniciales, se puede calcular el tiempo total de llenado debido a que este gasto es constante.
Actividad	• A través de la ecuación de la recta y la regla de la cadena, se establece la ecuación que determina el gasto con las condiciones iniciales. • Se determina el tiempo total de llenado considerando las

	condiciones iniciales y la ecuación "Qt" obtenida en la modelación de la actividad 1.
Práctica socialmente compartida	Mediante la predicción se establece cuál es el tiempo total de llenado del recipiente.
Noción de variación	
Ordenes de variación	Se reconoce que la variable tiempo cambia al llenarse el recipiente según el gasto obtenido en los cálculos y las medidas del recipiente.
Carácter estable del cambio	Se establece que el gasto es constante, por lo tanto, es un carácter estable de este cambio.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se relaciona la variable tiempo cuando el recipiente está a la mitad (condiciones iniciales) con el tiempo total de llenado.
Temporización	Se establece el valor del gasto en un estado intermedio (condiciones iniciales) para saber el tiempo total de llenado.
Elemento de referencia	• Se utiliza un sistema coordenado para establecer la ecuación de la recta. • Se utiliza como elemento de referencia al gasto calculado con las condiciones iniciales para calcular el tiempo total de llenado utilizando este mismo gasto.
Unidad de medida	Se identifican los "discos" que al realizar la sumatoria (integral) conforman el volumen total del recipiente (el uso de los diferenciales).

Tabla 13. Análisis del ejemplo de respuesta 2 (actividad 3.3)

En este ejemplo el cálculo del estudiante comienza desde la ecuación de la recta considerando una línea que representa el contorno del recipiente y el radio inferior y superior. Utilizando la regla de la cadena se establece la ecuación que determina el gasto, posteriormente se realiza la sumatoria (integral) con la que se determina el valor del gasto con las condiciones iniciales, y este valor se utiliza para calcular el tiempo total de llenado del recipiente. Por otro lado, podemos identificar que el estudiante dibuja un "disco" que representa un diferencial de la superficie libre del agua, es por esto que podemos afirmar que si existe un análisis variacional.

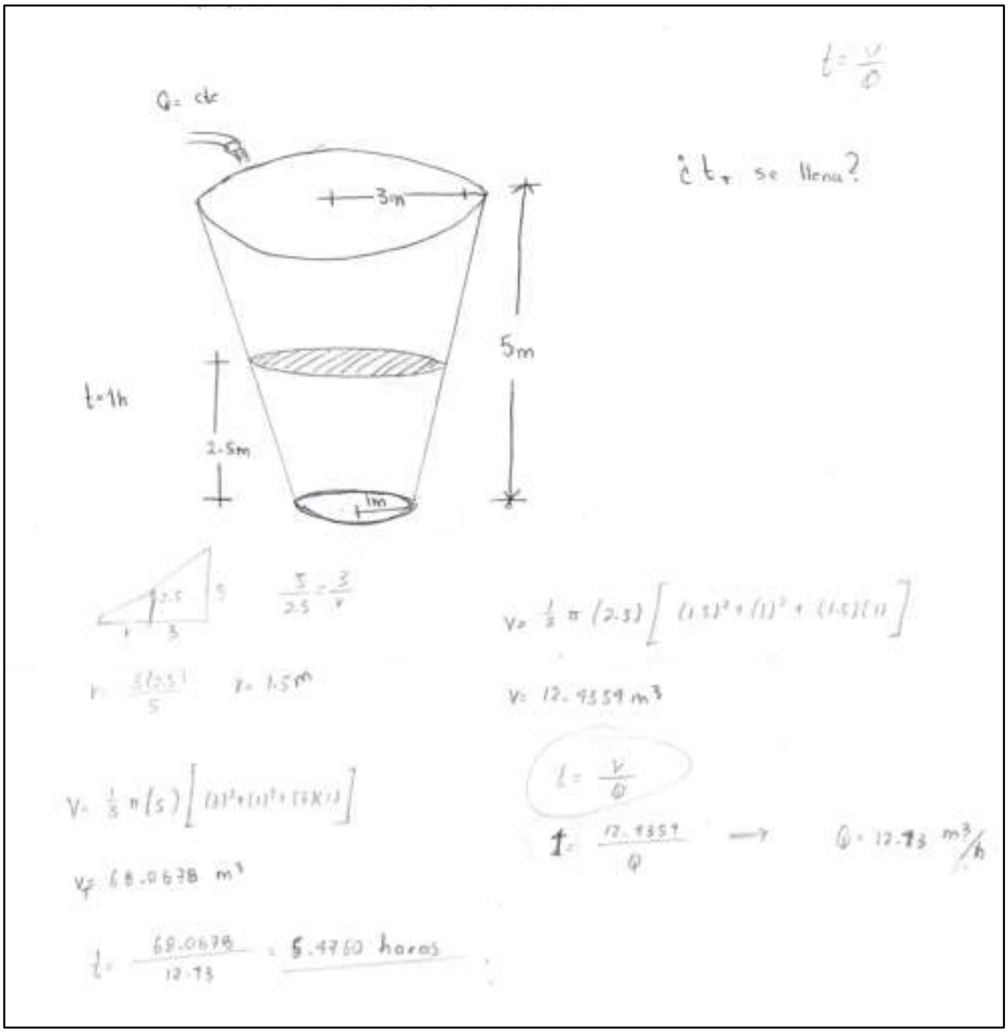


Imagen 87. Ejemplo de respuesta 3 (actividad 3.3)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica que, realiza el cálculo del volumen de agua con las condiciones iniciales para calcular el gasto.
Actividad	• Calcula el radio de la superficie libre del agua utilizando semejanza de triángulos. • Mediante la fórmula para el cono truncado, calcula el volumen de agua a la mitad del recipiente (condiciones iniciales).
Práctica socialmente compartida	Mediante la predicción se establece cuál es el tiempo total de llenado del recipiente.

Noción de variación	
Ordenes de variación	No se identifica.
Carácter estable del cambio	Se establece que el gasto es constante, por lo tanto, es un carácter estable de este cambio.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se relaciona la variable tiempo cuando el recipiente está a la mitad (condiciones iniciales) con el tiempo total de llenado.
Temporización	Se establece el valor del gasto en un estado intermedio (condiciones iniciales) para saber el tiempo total de llenado.
Elemento de referencia	Se utiliza como elemento de referencia al gasto calculado con las condiciones iniciales para calcular el tiempo total de llenado utilizando este mismo gasto.
Unidad de medida	No se identifica.

Tabla 14. Análisis del ejemplo de respuesta 3 (actividad 3.3)

En este ejemplo podemos observar un procedimiento distinto a los dos anteriores, comenzando por el cálculo del radio de la superficie libre del agua utilizando semejanza de triángulos, con este dato obtenido calcula el volumen de agua con las condiciones iniciales. Con este volumen calcula el gasto y al considerar que éste es constante, lo utiliza para calcular el tiempo total de llenado con la fórmula de caudal volumétrico ($Q = \frac{V}{t}$). Cabe señalar que este procedimiento es posible para el cálculo del tiempo total de llenado, pero el uso de la semejanza de triángulos no es el adecuado para la obtención de los datos necesarios, sin embargo, se observa que no sigue las ideas planteadas por la situación didáctica y las actividades.

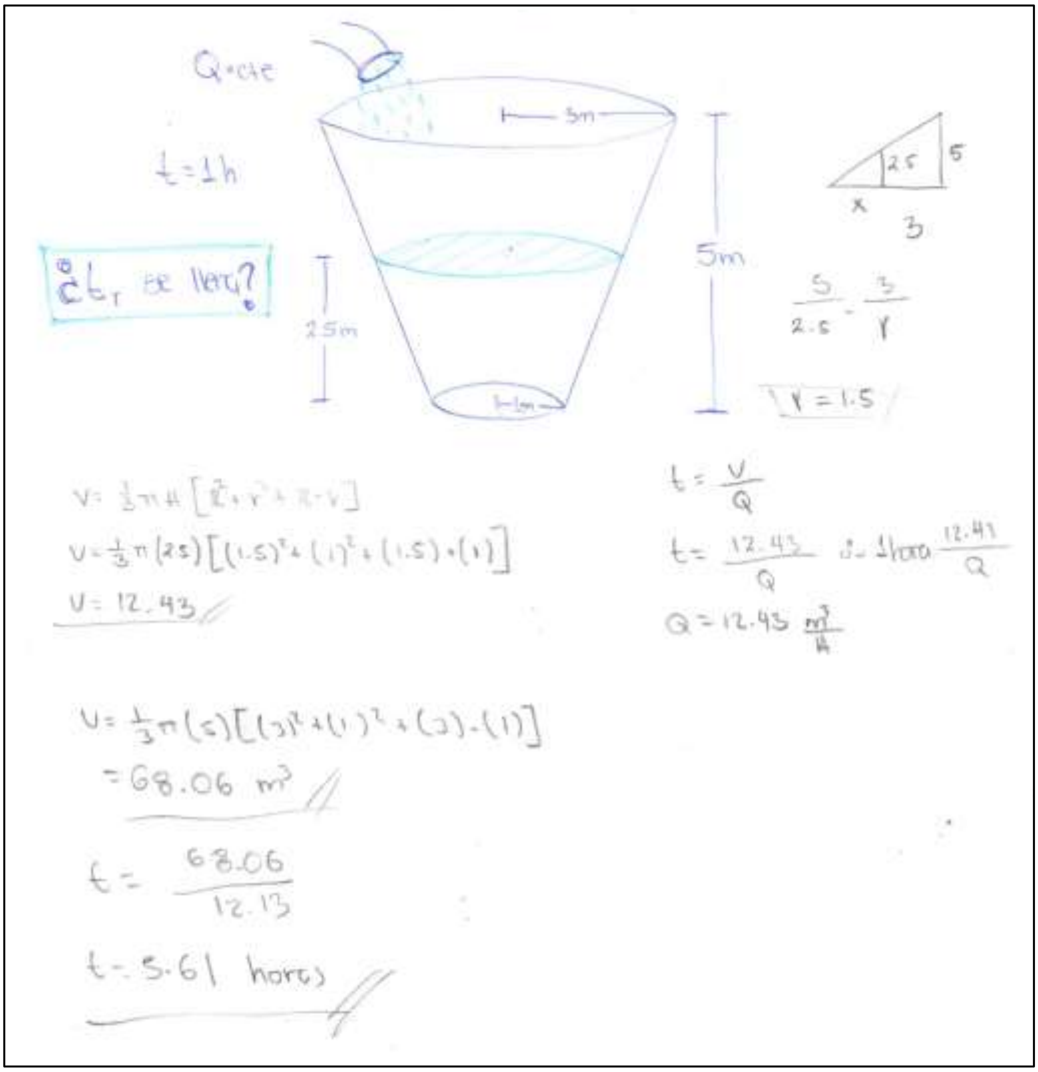


Imagen 88. Ejemplo de respuesta 4 (actividad 3.3)

Indicadores	Descripción
Desarrollo de prácticas	
Acción	Se identifica que, realiza el cálculo del volumen de agua con las condiciones iniciales para calcular el gasto.
Actividad	• Calcula el radio de la superficie libre del agua utilizando semejanza de triángulos. • Mediante la fórmula para el cono truncado, calcula el volumen de agua a la mitad del recipiente (condiciones iniciales).
Práctica socialmente compartida	Mediante la predicción se establece cuál es el tiempo total de llenado del recipiente.

Noción de variación	
Ordenes de variación	No se identifica.
Carácter estable del cambio	Se establece que el gasto es constante, por lo tanto, es un carácter estable de este cambio.
Sistema de referencia	
Relación de variables	Se relaciona la variable tiempo cuando el recipiente está a la mitad (condiciones iniciales) con el tiempo total de llenado.
Temporización	Se establece el valor del gasto en un estado intermedio (condiciones iniciales) para saber el tiempo total de llenado.
Elemento de referencia	Se utiliza como elemento de referencia al gasto calculado con las condiciones iniciales para calcular el tiempo total de llenado utilizando este mismo gasto.
Unidad de medida	No se identifica.

Tabla 15. Análisis del ejemplo de respuesta 4 (actividad 3.3)

Este ejemplo es muy parecido al anterior en donde no se identifica el desarrollo de la noción de variación ya que no se muestran las características que determinan el cambio y la variación que existe entre un estado intermedio y el fenómeno en general, sin embargo, los estudiantes realizan cálculos en donde podemos observar que se dejan llevar por formulas algorítmicas que de alguna manera son conocidas debido al discurso matemático escolar, sin considerar un análisis variacional en donde es necesario centrar la atención en el comportamiento del fenómeno.

Conclusiones

En la actividad 1 observamos que los estudiantes necesitaban recordar varios conceptos básicos y fundamentales para la construcción de la noción de variación. Observamos también las deficiencias en los argumentos de los estudiantes debido a que el discurso dominante no propicia la argumentación (verbal o gráfica) en sus respuestas.

Posteriormente con base en los argumentos de los estudiantes se realizó la modelación construyendo las ecuaciones necesarias. Dichas ecuaciones se utilizaron para la realización de la simulación con geometría dinámica (GeoGebra). Además de proporcionarles el enlace de la plataforma YouTube en donde se encuentra el tutorial en donde se muestra paso a paso el proceso de realización de la simulación elaborado específicamente para esta esta tesis. Con esta simulación se reafirmaron los conocimientos construidos en esta actividad.

Con los elementos encontrados en la actividad anteriormente mencionada, se realizó el diseño de la actividad 2 tratando de hacer modificaciones agregando formas de identificar los argumentos gráficos y textuales de los estudiantes incitando a la comparación y estimación; y dividiendo ésta en dos partes. Observamos en esta actividad que algunos se quedaron con la idea de las gráficas de llenado de recipientes, por lo tanto, realizaron gráficas ascendentes en donde algunos estudiantes modificaron sus argumentos en la segunda parte de la actividad, y otros los modificaron hasta la fase de equipos al confrontar sus ideas con las de sus compañeros. Se hace visible la construcción de la noción de la variación y el desarrollo del PyLV ya que en los argumentos de los estudiantes se observan fundamentos basados en la presión que ejerce el volumen de agua y la rapidez de vaciado según la geometría del recipiente, es decir la Razón de Cambio, aunque no se mencione como tal, pero lo realmente importante es que se desarrolle y se entienda el concepto.

Considerando que se construyeron las nociones de variación implementadas en la actividad 2, agregamos la actividad 3 llamada evaluación, la cual dividimos en tres partes que se realizaron individualmente pidiendo únicamente al estudiante sus argumentos gráficos (en el caso de la actividad 3.1) y numéricos (en el caso de la actividad 3.3). Observamos en esta actividad que la mayoría de los estudiantes habían desarrollado la noción de variación al identificar que en la gráfica presentada establecieron que de alguna manera se trataba de un recipiente que no se había abordado en clases, pero que era posible realizar una combinación de lo que conocían para construirlo, así como también el papel que juega el punto de inflexión y lo que representa en una gráfica (actividad 3.1), elemento que también estaba presente en la actividad 2 pero que no lo identificaron, sin embargo, se hace visible que los estudiantes se percataron de cómo influye el cambio de concavidad de una gráfica en un fenómeno de llenado de recipientes, obviamente considerando un gasto constante. De la misma forma para la actividad 3.2, por la forma de los recipientes que se muestran, los estudiantes consideraron que se trataba de una combinación ya que claramente se marcaban las divisiones en los recipientes, por lo que realizaron las gráficas dividiéndolas en tres partes muy marcadas, aunque algunos estudiantes realizaron un análisis más profundo en donde se identifican en su argumento gráfico, los elementos que describen el comportamiento del agua el llenarse el recipiente. Finalmente, la actividad 3.3 nos muestra la aplicación de todos los conocimientos generados a partir de las actividades anteriores utilizando además procesos algorítmicos que se exponen a través del discurso matemático escolar, y es en esta actividad en donde se hace visible que los temas que se abordan en las materias referentes al Cálculo son muy importantes para la hidráulica y por consecuencia también para la Ingeniería Civil.

En nuestra investigación retomamos algunos elementos que nos sirvieron como punto de partida, agregando nuestras ideas fundamentadas en el análisis bibliográfico realizado, de la misma forma dejamos esta investigación para que las generaciones futuras que identifiquen elementos que nosotros no consideramos, puedan realizar una retroalimentación con el único objetivo de mejorar el proceso de enseñanza–aprendizaje de los temas derivados del Cálculo.

Con base en la revisión bibliográfica identificamos que el medio adecuado para este tipo de fenómenos es la modelación y graficación, agregando a la simulación como una herramienta importante tomando en cuenta que se pueden reunir varios elementos en la construcción de la misma. Temas que abordamos de la manera más entendible posible retomando trabajos de investigación que nos permitieron incluir algunos elementos a las actividades que no estábamos considerando.

Para la formación de los estudiantes es muy importante el desarrollo de la noción de variación, así como también del PyLV, debido a los distintos fenómenos que se estudian. Es importante mencionar que existen otros fenómenos relacionados con la Ingeniería Civil en donde se pueden proponer situaciones de variación, sin embargo, consideramos que la hidráulica es el escenario ideal para el desarrollo de estas nociones, lo que nos lleva a la significación o resignificación de la noción de Razón de Cambio.

Bibliografía

Arrieta, J. (Marzo de 2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. *Tesis de doctorado no publicada*. México, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 227-251.

Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practice Framework: A Socioepistemological Study. *Educational Studies in Mathematics*, 299-333.

Caballero, M. A. (Diciembre de 2012). Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato. *Tesis de maestría no publicada*. México, México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Caballero, M. A. (Noviembre de 2018). Causalidad y Temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Tesis de doctorado no publicada*. México, México: Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. *Universidad Virtual. Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México, México: Trillas.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Cardona, R. A. (2012). Una Propuesta Para la Enseñanza de la Derivada como Razón de Cambio a Estudiantes de Grado Undécimo. *Tesis de maestría no publicada*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Esqueda, C. D. (Octubre de 2014). Razón de Cambio: Un estudio para analizar su construcción. *Tesis de Maestría no publicada*. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México: Universidad Autónoma de Chiapas.

Flores, E. (Septiembre de 2010). Pensamiento y Lenguaje Variacional: de la intuición al rigor. Un estudio con el Teorema del Valor Medio. *Tesis de maestría no publicada*. México, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Poitécnico Nacional.

González, R. (1999). La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación. *Tesis de maestría no publicada*. México, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional .

González-Urbaneja, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.* Madrid: Alianza.

Grieze, J.-B., Henry, K., Meylans-Backs, M., Orsine, F., & Piaget, J. (1971). *La epistemología del tiempo.* Buenos Aires: El Ateneo.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Kay, S. M. (1990). Fuctions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *American Educational Research Association*, 1-64.

Manuel, H. (31 de Mayo de 2018). *YouTube*. Obtenido de TUTORIAL DE LLENADO DE UN CILINDRO, CONO Y CONO TRUNCADO (GEOGEBRA): https://www.youtube.com/watch?v=57Qy2w8yr6c&t=620s

Manuel, H. (15 de Junio de 2018). *YouTube*. Obtenido de TUTORIAL DE VACIADO DE UN CILINDRO, CONO Y CONO TRUNCADO (GEOGEBRA): https://www.youtube.com/watch?v=f7JWKnmsklY

Mellar, H., Bliss, J., Boohan, R., Ogborn, J., & Tompsett. (1994). *Learning with artificial worlds: computer-based modelling in the curriculum.* London: The Falmer Press.

Montiel, G., & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. M. Rosas, & R. Avenilde, *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (págs. 61-88). México: Lectorum.

Piaget, J. (1971). The Development of Causality. En J. Piaget, *The construction of reality in the child* (págs. 247-361). Estados Unidos: Ballantine Books.

Piaget, J. (1977). Causality and Operation. En J. Piaget, & R. Garcia, *Understanding Causality* (págs. 1-10). Estados Unidos: The Norton Library.

Rendón, P. A. (2009). Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. *Tesis de maestría no publicada*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Salinas, C. (2003). Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo. *Tesis de maestría no publicada*. México, México: Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituo Politécnico Nacional.

Salinas, P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., & Garza, J. L. (2002). *Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* México: Trillas.

Suárez, L. (2014). *Modelación-Graficación para la Matemática Escolar.* México: Díaz de Santos.

Vidal, O. E. (2012). Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos. *Tesis de maestría no publicada*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

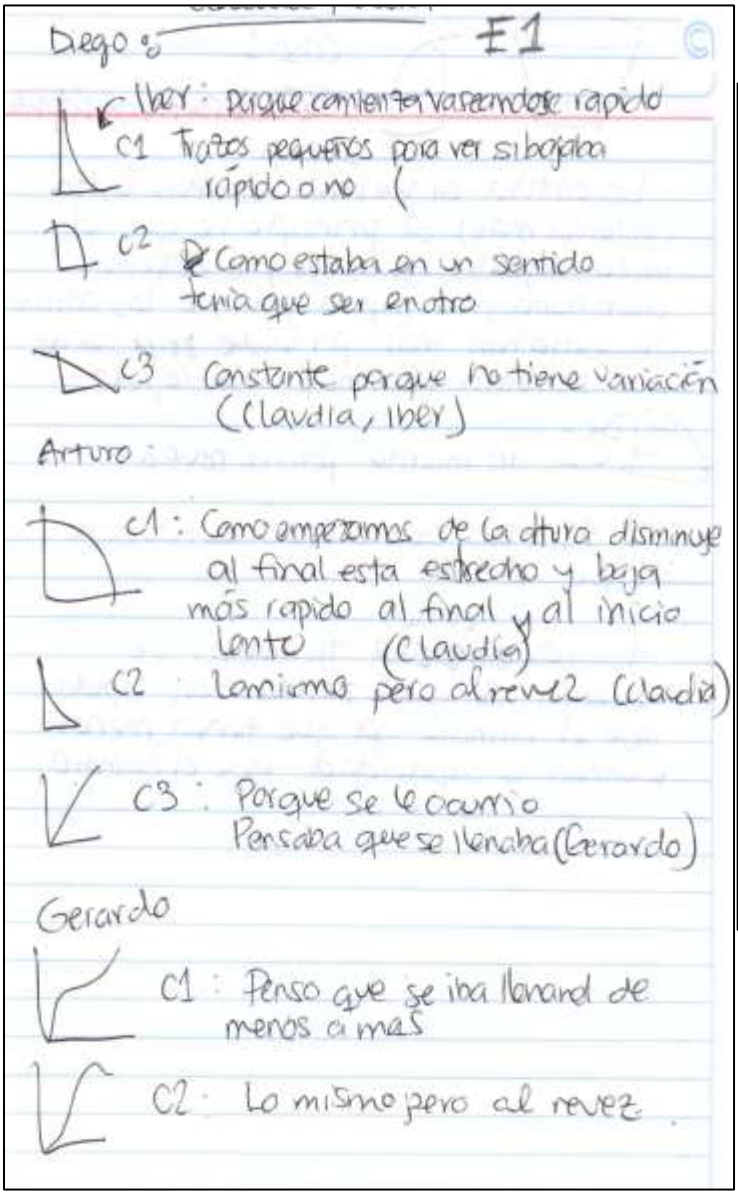
Vrancken, S., & Adriana, E. (2013). Estudio de la Derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 53-70.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 37-85.

Anexo 1

Respuestas de los estudiantes asociados a la actividad 2, divididos por equipos.

Equipo 1



Diego: E1

Iber: porque comienza vaciandose rapido

C1 Trazos pequeños para ver si bajaba rápido o no

C2 Como estaba en un sentido tenia que ser en otro

C3 Constante porque no tiene variación (Claudia, Iber)

Arturo:

C1: Como empezamos de la altura disminuye al final esta estrecho y baja más rapido al final y al inicio lento (Claudia)

C2 Lo mismo pero al revez (Claudia)

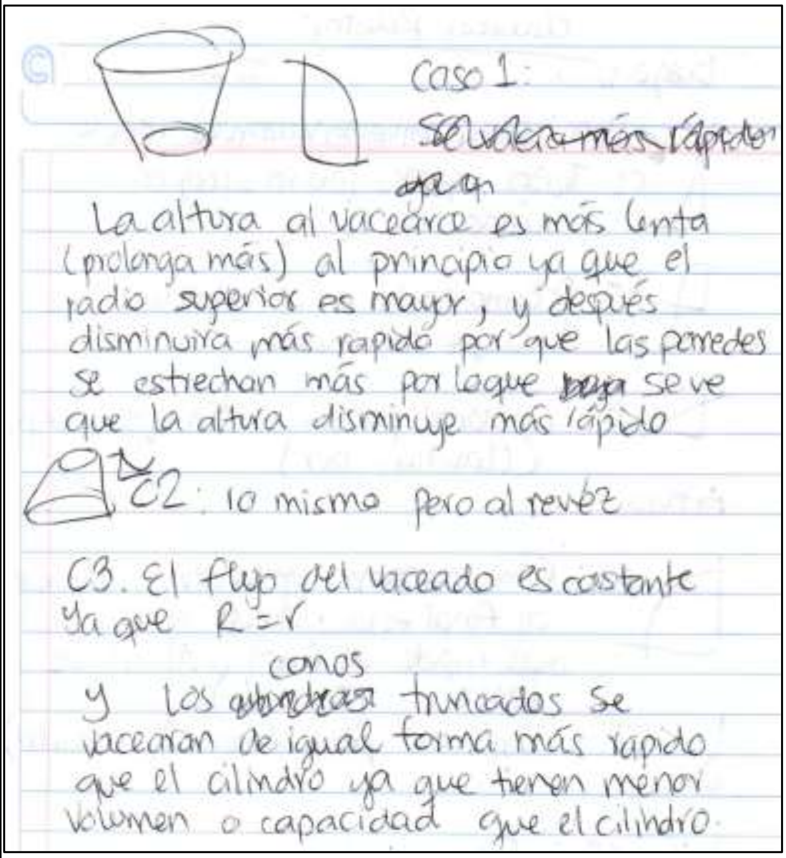
C3: Porque se le ocurrio Pensaba que se llenaba (Gerardo)

Gerardo

C1: Penso que se iba llenand de menos a mas

C2: Lo mismo pero al revez.

Respuesta 1. Actividad 2 (Equipo 1A)



Caso 1: ~~Se vaciara más rápido ya q~~

La altura al vacearce es más lenta (prolonga más) al principio ya que el radio superior es mayor, y después disminuira más rapido por que las paredes se estrechan más por lo que ~~baja~~ se ve que la altura disminuye más rápido

C2: lo mismo pero al revéz

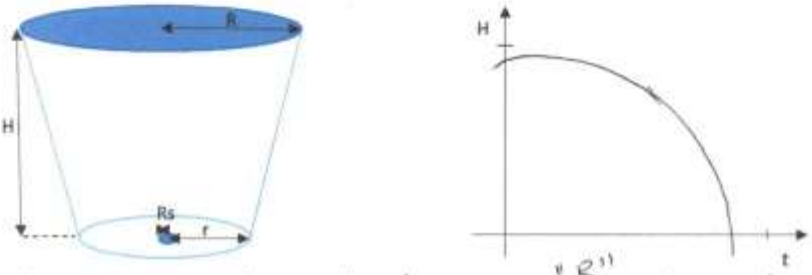
C3. El flujo del vaceado es constante ya que R = r

y los ~~cilindros~~ conos truncados se vacearan de igual forma más rapido que el cilindro ya que tienen menor volumen o capacidad que el cilindro.

Respuesta 2. Actividad 2 (Equipo 1B)

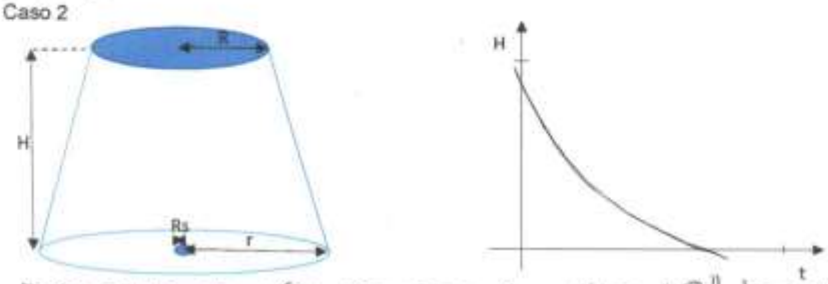
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



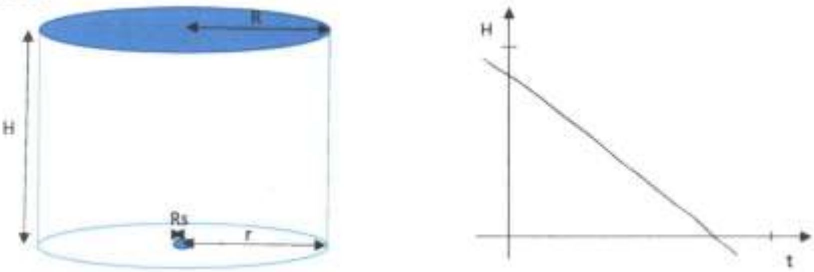
Como el cono truncado tiene mayor "R" radio arriba bajara lento al principio (su "H") y al final rápido ya que su "r" es menor

Caso 2



Este como es más pequeño de arriba "R" bajara la altura "H" más rapido y después más lento por que su radio "r" inferior es más grande

Caso 3



y este bajara constante respecto al tiempo o continuamente proporcional al tener 2 radios iguales R = r

Respuesta 4. Actividad 2

Caso 1

la A coincide con el caso 1 de la anterior con la mia

Caso 2

la B con el caso dos mio

Caso 3

Y el C con el caso 3 del mio

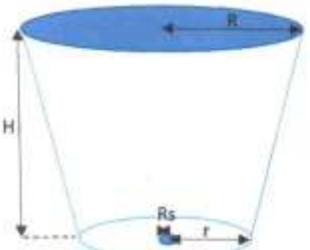
¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

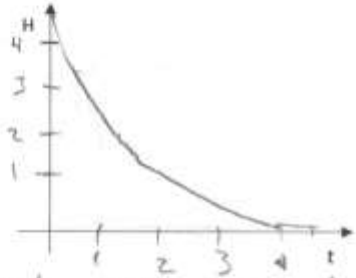
Se vaciarán al mismo tiempo el caso 1 y 2 siempre y cuando R = r y la "r" del cilindro igual que el radio r más grande (porque tendría un volumen mayor)

Respuesta 3. Actividad 2

Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

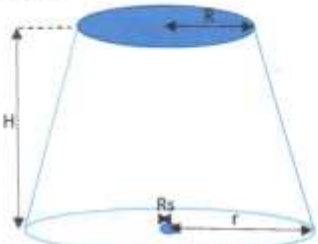
Caso 1

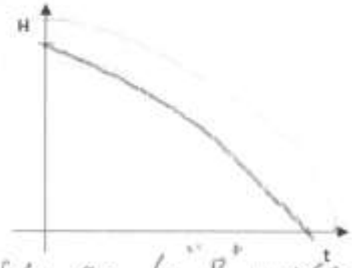




Yo digo que la grafica de vaciado seria de esta forma porque al ponerle valores hipotéticos puedo visualizar más fácilmente que al paso del tiempo tiene menos agua

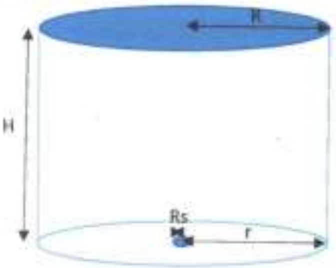
Caso 2

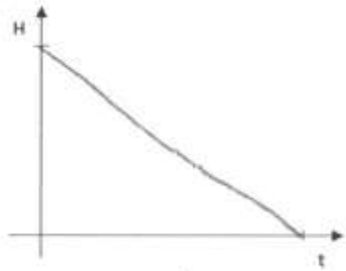




Igual que el caso anterior solo que la "R" mayúscula es de menor radio que R minúscula eso hace que en los primeros segundos sea más lento que en el caso anterior

Caso 3





Y en este caso el vaciado es constante por eso lo represento en linea recta ya que no debería de haber variaciones algunas

Respuesta 6. Actividad 2

Caso 1

"A" No coincide con mi gráfica del caso 1

Caso 2

"B" No coincide con mi gráfica

Caso 3

"C" Si coincide con mi grafica

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Respuesta 5. Actividad 2

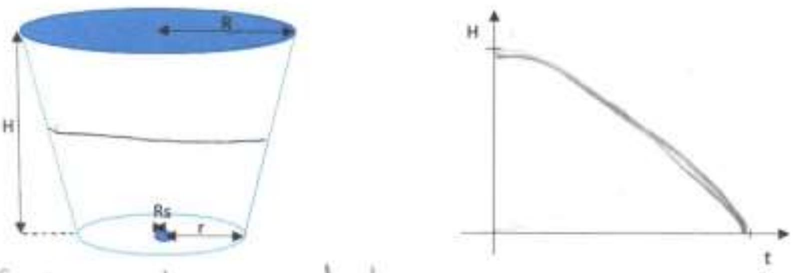
Equipo 2

- La grafica inicia desde la parte de arriba (Flor) todos los gráficos son descendientes.
- El tiempo depende del radio y la forma del contenedor. (Jhoana)
- Radio mayor el mismo en tres recipientes (Esmeralda)
- En los dos primeros casos se vacian en el mismo tiempo porque en donde cada uno "pierde" tiempo el otro lo "gana" (Flor, Ciro, Esme, Jhoana, todos).
- Controversias →
  - Presión ?
  -

Respuesta 7. Actividad 2 (Equipo 2)

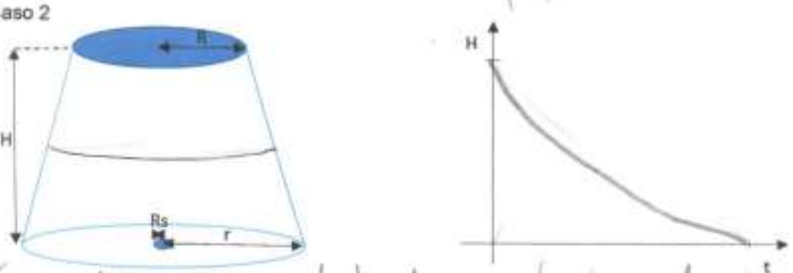
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



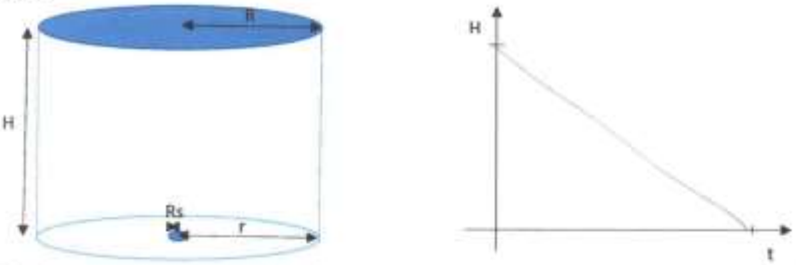
Comienza de manera lenta y poco a poco se va prolongando, ya que el nivel del agua se va vaciando y el radio es cada vez más pequeño

Caso 2



En este caso es todo lo contrario al primero ya que el el radio va aumentando por lo tanto el tiempo es más largo respecto a H.

Caso 3



Este es constante por que es radio es el mismo en cada H.

Respuesta 9. Actividad 2

Caso 1

La Gráfica A coincide con la gráfica del caso 1.

Caso 2

La gráfica de este caso coincide con la B.

Caso 3

En este caso coincide la Gráfica C.

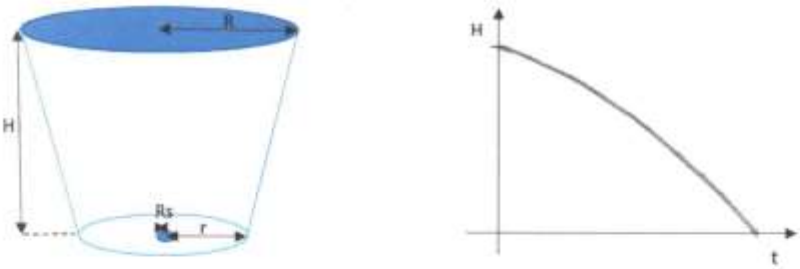
¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

Si el caso 1 y 2 son los mismos conos se vaciarán al mismo tiempo y el cilindro tardará más

Respuesta 8. Actividad 2

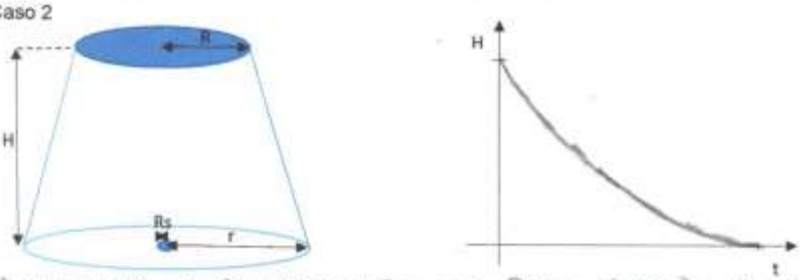
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



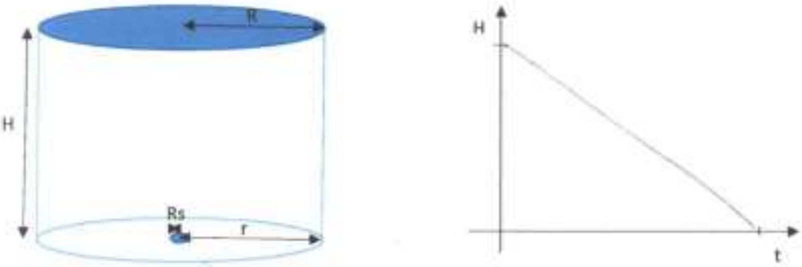
Empezara a desvaciarse un poco lento puesto a que el radio es mayor arriba, por el cual al momento de ir bajando sera mas rapido

Caso 2



Empezara a desvaciarse un poco rapido puesto el radio mayor es menor, el cual tiene menos superficie para mantener agua.

Caso 3



Se vaciara constante, puesto a que es un cilindro, el cual tiene el mismo radio mayor y menor. (conforme pase el tiempo sera la misma que se vacie.

Respuesta 11. Actividad 2

Caso 1

si coincide con A

Caso 2

si coincide con B

Caso 3

si coincide con C

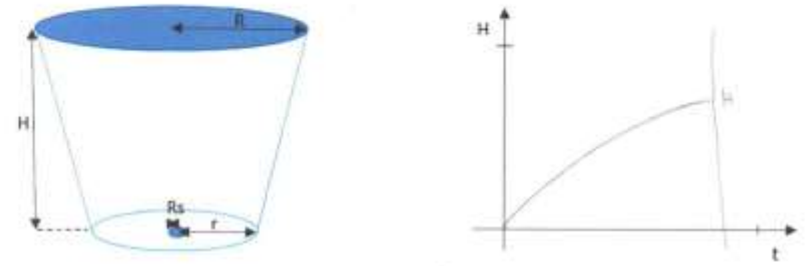
¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

El cilindro, Pues sera constante lo que ira bajando

Respuesta 10. Actividad 2

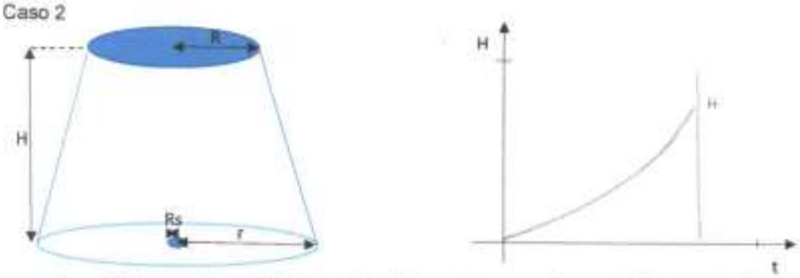
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



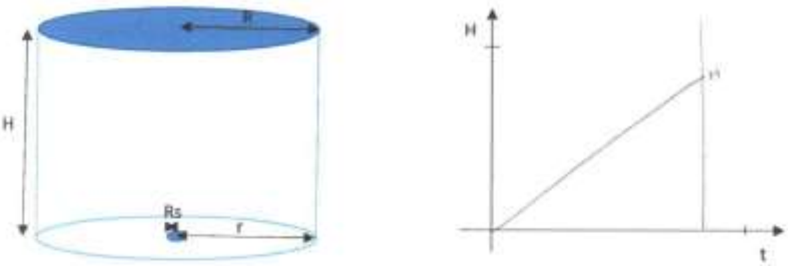
El agua se va escapando de manera rápida puesto que inicia con una circunferencia menor.

Caso 2



El agua se escapa lento porque es más grande la circunferencia en donde se localiza el orificio

Caso 3



la gráfica es recta porque la circunferencia es constante, no cambia en ningún momento su tamaño

Respuesta 13. Actividad 2

Caso 1

coincide con el A

Caso 2

coincide con la B

Caso 3

coincide con la C

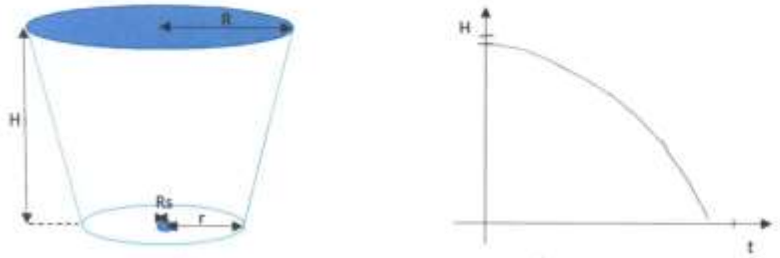
¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

el recipiente del caso C, porque irá constante y sus tiempos no tendrán una variación, mientras que en los otros dos casos el vaciado variará por la forma del contenedor.

Respuesta 12. Actividad 2

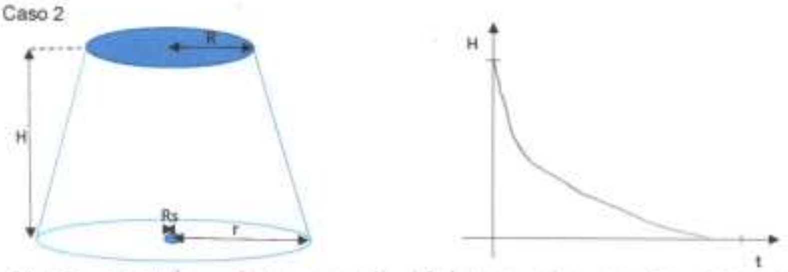
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



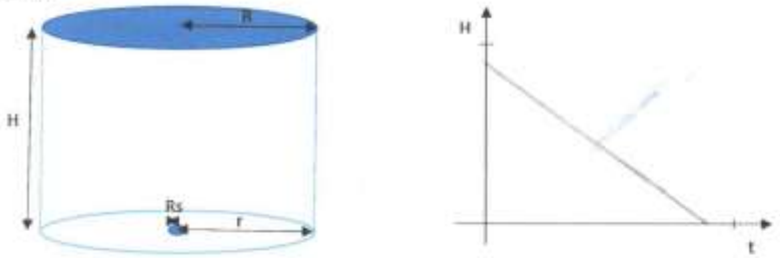
Como eran llenos empezamos de R (Radio superior) y empezó a vaciarse el contenido por RS, la velocidad va de menor a mayor debido a los tamaños de los de R, r

Caso 2



en ese segundo caso es al contrario del primer caso, aquí la velocidad de salida empieza mayor y va descendiendo con el paso de los segundos debido a que R es menor que r.

Caso 3



En este tercer caso, la velocidad con la salida del contenido es proporcional debido a que R y r son iguales, entonces es siempre igual al principio y final

Respuesta 15. Actividad 2

Caso 1 A= coincide con mi respuesta.

Caso 2 B= coincide con mi respuesta

Caso 3 C= coincide con mi respuesta

¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué? El caso N= 1A, por que empieza de menor a mayor, le gana al caso C suponiendo que tenemos un tiempo indeterminado, entonces llega a superarlo

Respuesta 14. Actividad 2

Equipo 3

Vicente: Eligio. Mis graficas coincidieron en todos los casos.
Caso 1: se tiene un volumen determinado, por lo consiguiente un determinado H y la forma del recipiente es cono truncado y su velocidad de vaciado va de lento a rapido.

Jose Daniel
Caso 2: Lo altura comienza a decender con una velocidad mayor, en comparación al caso 1 porque la presion que se ejerce sobre el orificio va en disminución, por lo cual al final se desvaciara mas lento.

Carlos Antonio 8
Caso 3: Mi gráfica fue erronea y cambio de opinion por la grafica C. Amedida que avanza el tiempo disminuye la altura de forma constante

Eduardo: El caso 1 y 2 se vacía de manera mas rapida que el caso 3. ya que el caso 1 y 2 almacenan el mismo volumen el cual es menor al volumen que ocupa el caso 3 por lo cual al tener menos volumen el tiempo de vaciado sera menor. Considerando que el gasto de vaciado es el mismo para los 3 casos.

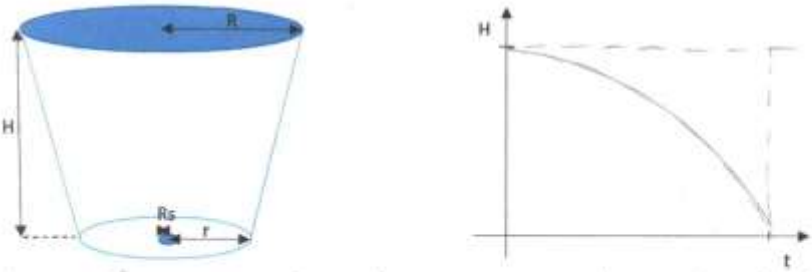
Respuesta 17. Actividad 2 (Equipo 3A)

Conclución: La altura del vaciado dependera de la forma y el volumen que posea el el recipiente. ya que la presion que ejercaa sobre el orificio o agujero sera al final la misma (aunque esta variara durante el tiempo de vaciado). Pero al final el tiempo de vaciado para el caso 1 y 2 sera el mismo ya que el gasto de agua del agujero sera lo mismo.

Respuesta 16. Actividad 2 (Equipo 3B)

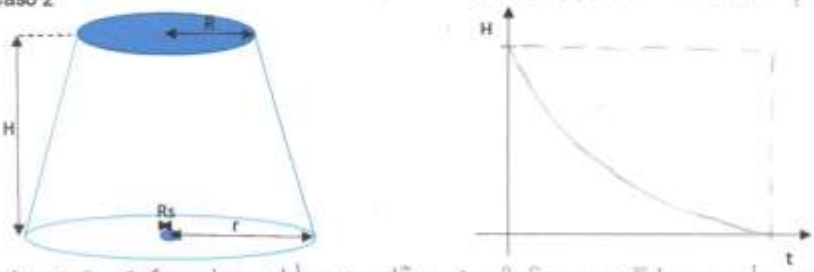
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



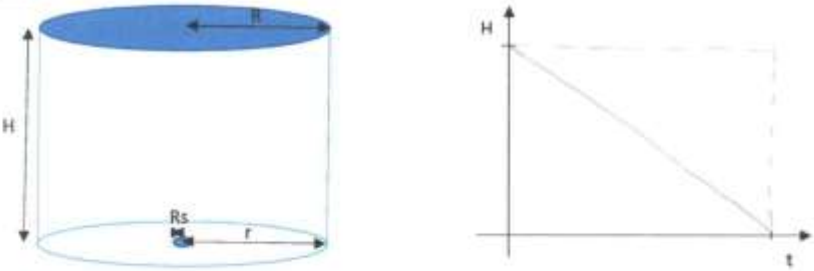
La gráfica quedaría así porque la altura al principio disminuiría lentamente y conforme vaya pasando el tiempo lo ira mas rapidamente, por la forma del contenedor (parte superior grande, parte inferior pequeña)

Caso 2



Al principio la altura disminuiría rapidamente pero conforme pase el tiempo la altura disminuira lentamente por la forma del contenedor. (parte superior pequeño e inferior grande)

Caso 3



La altura disminuiria de manera constante, ya que el contenedor tiene una forma uniforme

Respuesta 19. Actividad 2

Caso 1

Sí coincide con la gráfica A

Caso 2

Sí coincide con la gráfica B

Caso 3

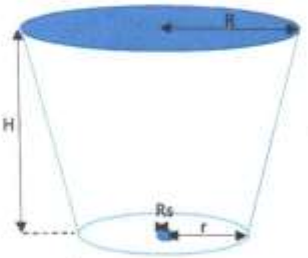
Sí coincide con la gráfica C

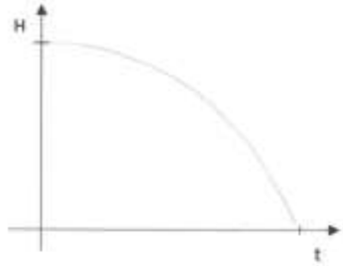
¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué? El caso 1 y 2, porque tienen una forma similar nada mas que invertidas, por lo tanto almacenan el mismo volumen, en comparacion al caso 3 almacena mas volumen por lo cual el tiempo de vaciado será mayor. conciderando que el gasto del vaciado sea igual para los 3 casos

Respuesta 18. Actividad 2

Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

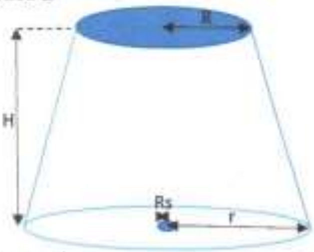
Caso 1

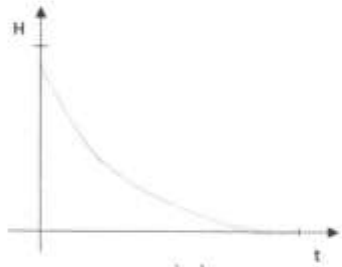




La altura empezaría a descender con menor velocidad ya que el vacío o la presión a menor altura esta sea menor por lo cual no saldrá con la misma presión con la que inicio el vaciado

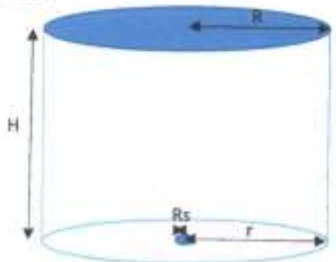
Caso 2

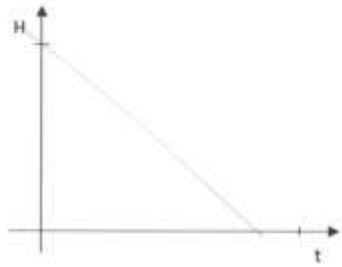




La altura empezaría a descender con mayor velocidad ya que la presión al final es mayor ya que tendrá una mayor cantidad de agua la cual empezaría a ejercer una mayor presión.

Caso 3





La altura iría disminuyendo uniformemente conforme pase el tiempo, ya que la presión del agua sería uniforme en toda parte del cilindro ya que este posee los mismos radios, tanto inferior como superior.

Respuesta 21. Actividad 2

Caso 1

La gráfica A coincide con el caso 1.

Caso 2

La gráfica B coincide con el caso 2.

Caso 3

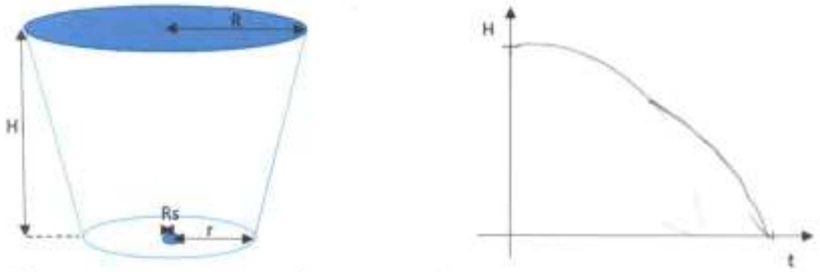
La gráfica C coincide con el caso 3.

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué? Iguales, se plantea que ambos tengan el mismo volumen de agua por lo cual ejercerán la misma presión y por lo cual se vaciarán en la misma cantidad de tiempo.

Respuesta 20. Actividad 2

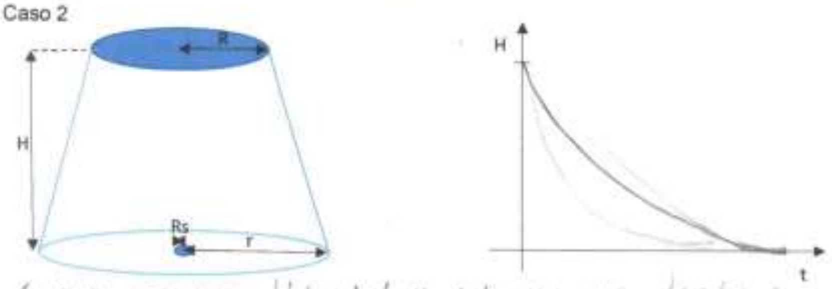
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



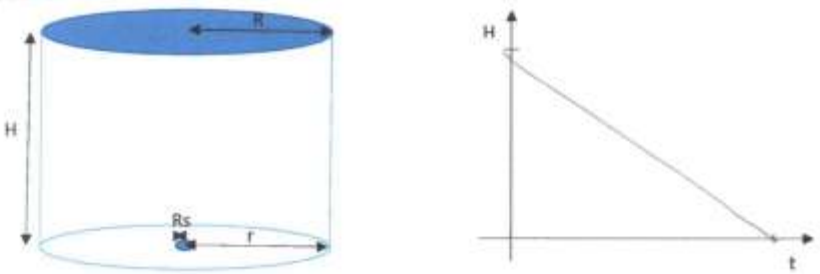
Se empieza a vaciar lento y luego cada vez mas rapido

Caso 2



Empieza con mayor Velocidad y cada vez mas lento.

Caso 3



Se Vacía con una Velocida constante.

Respuesta 23. Actividad 2

Caso 1

Caso 1 coincido con A

Caso 2

caso 2 Coisido con B

Caso 3

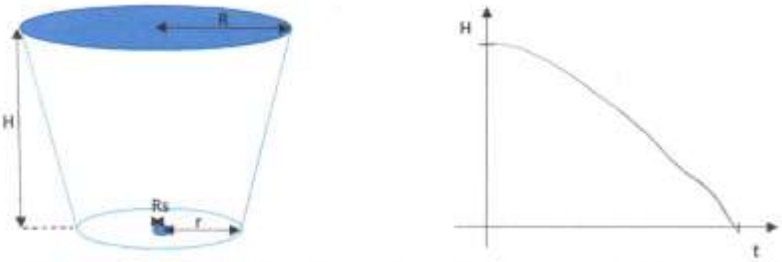
Coisido con C

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué? ~~El recipiente~~ hay dos recipientes que se vacían al mismo tiempo caso 1 y 2 por tener mismo volumen y el que le lleva mas tiempo en vaciarse es el cilindro por tener mayor volumen.

Respuesta 22. Actividad 2

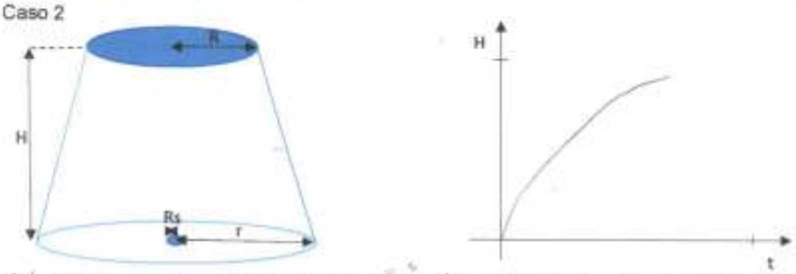
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



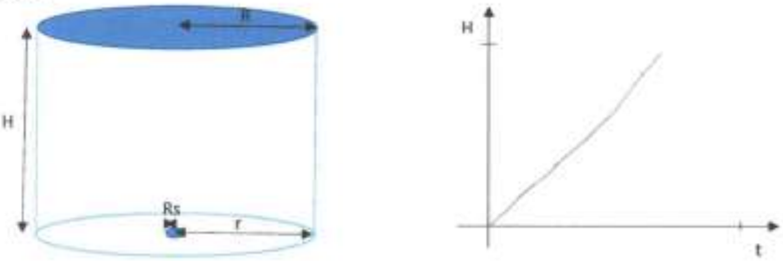
YA QUE LA PARTE SUPERIOR TIENE UN RADIO MAYOR COSTARÁ MÁS TIEMPO E VACIARSE Y COMO PASA EL TIEMPO EL RADIO DISMINUYE POR LO QUE ES MAS FACIL QUE SE VACIE

Caso 2



EN ESTE CASO DADO QUE "R" AL PRINCIPIO ES MENOR QUE "r" EN LOS PRIMEROS INTERVALOS DE TIEMPO SE VACIARA CON MAYOR RAPIDEZ Y DESPUES LE COSTARÁ VACIARSE POR QUE "R" TIENDE A AUMENTAR

Caso 3



DADO QUE "R" Y "r" SON IGUALES TENDRÁ UN COMPORTAMIENTO UNIFORME EN LA GRAFICA H VS t Y SE VACIARÁ DE IGUAL MANERA EN EL TRANSCURSO DEL TIEMPO

Respuesta 24. Actividad 2

Caso 1

COINCIDE CON A

Caso 2

NO COINCIDE YA QUE NO INICIA EN "CERO" O SEA VACIO, SINO LLENO HASTA LLEGAR A CERO

Caso 3

NO COINCIDE CON C YA QUE POR LO MISMO EMPIEZA LLENO HASTA VACIARSE

¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

NO SABRIA CON EXACTITUD YA QUE NO TIENE VALORES AUNQUE VISUALMENTE SE VEN IGUALES PODRIA DECIR QUE TIENEN LA MISMA CANTIDAD DE AGUA Y TENDRIAN QUE VACIARSE EN UN MISMO TIEMPO.

Respuesta 25. Actividad 2

Equipo 4

Equipo 4

En el caso 1. la altura descenderá de manera más lenta ya que el radio superior es mayor al del radio menor pon ende en la parte de arriba habrá más volumen que en la de abajo.

En el caso 2. la altura descenderá de manera más rápida ya que existe ~~menos~~ radio abajo y menor volumen en la parte superior.

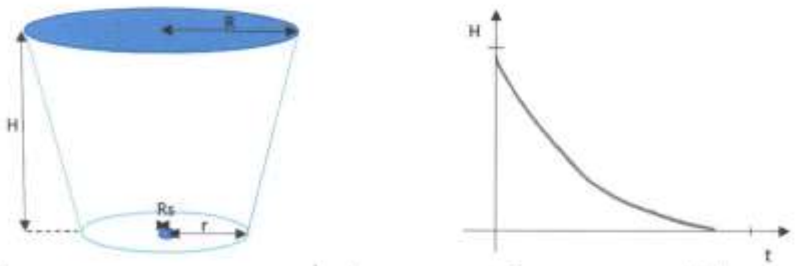
En el caso 3. La altura descenderá de manera constante porque el recipiente es un cilindro y ambos radios son iguales.

Los 3 se vacían al mismo tiempo porque se tomo en cuenta el gasto ya que es igual en los tres.

Respuesta 26. Actividad 2 (Equipo 4)

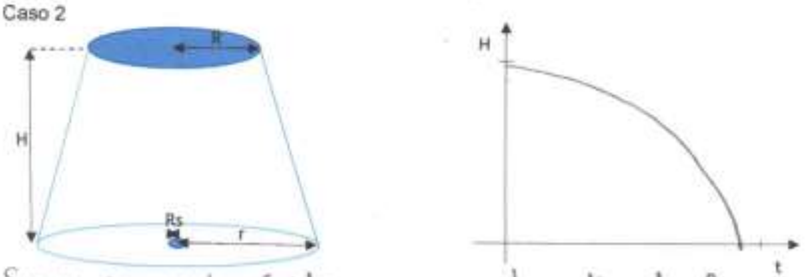
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



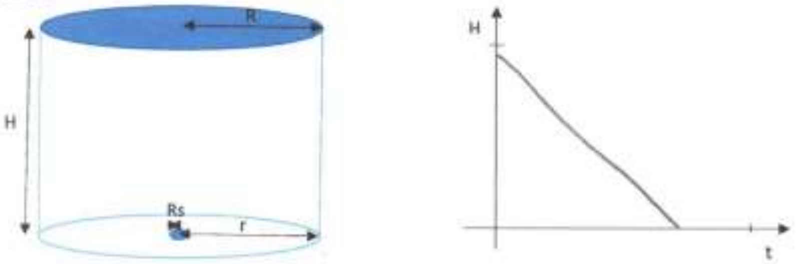
Empezaria a vaciarse lento porque R es mayor distancia a r y casi no seria notorio el cambio, ya hasta llegar cerca de Rs, se vaciaria rápido

Caso 2



Su vacio seria rápido ya que el radio de R es menor y se logra ver con facilidad, al terminar seria un poco lento por su diametro que ya esta más grande

Caso 3



En este caso, la grafica seria lineal, es decir va directamente proporcional, es la misma cantidad de agua que iria vaciando a cada tiempo y distancia.

Respuesta 28. Actividad 2

Caso 1

Coincide con la gráfica B

Caso 2

Coincide con la gráfica A

Caso 3

Coincide con la gráfica C

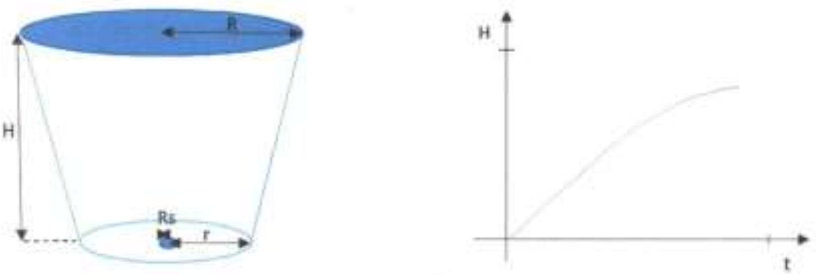
¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Los tres, porque tienen el mismo volumen, lo único que cambia es su forma, los tres se vaciaron al mismo tiempo.

Respuesta 27. Actividad 2

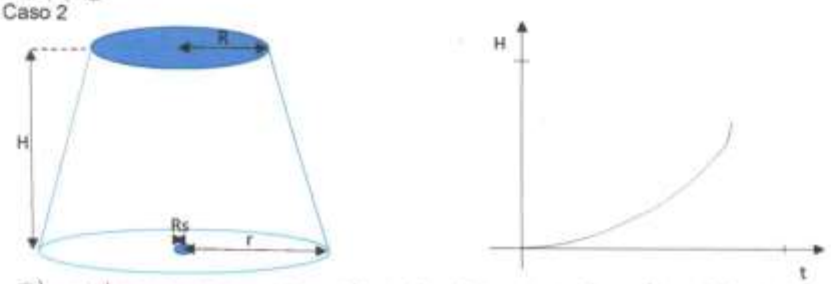
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



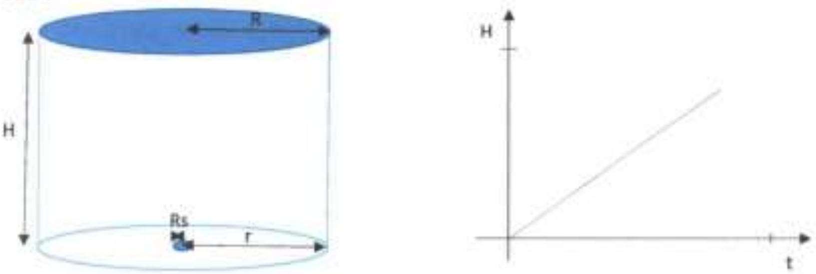
Al principio el recipiente como tiene mayor radio superior la altura disminuye lento, después este va aumentando la altura respecto al tiempo porque en su base el radio inferior está más pequeño

Caso 2



El radio superior es más pequeño que el radio inferior lo que ocasiona que al principio vaya más rápido, quiere decir que después de ir rápido irá disminuyendo la altura respecto al tiempo.

Caso 3



El vaciado de este caso es constante porque tienen igual el radio superior y el radio inferior R=r

Respuesta 29. Actividad 2

Caso 1

Cambié a la opción A, porque mi análisis fue correcto, solo que en la gráfica la puse al revés.

Caso 2

Cambié a la opción B porque la gráfica la puse en llenado.

Caso 3

Cambié a la C porque la gráfica la puse en llenado.

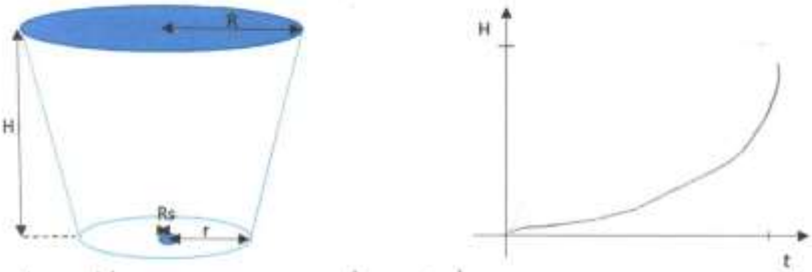
¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

El caso 1 y 2, porque contienen la misma forma y es más pequeño que el caso 3

Respuesta 30. Actividad 2

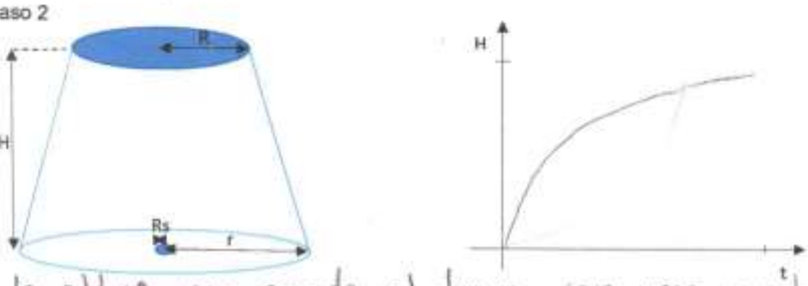
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



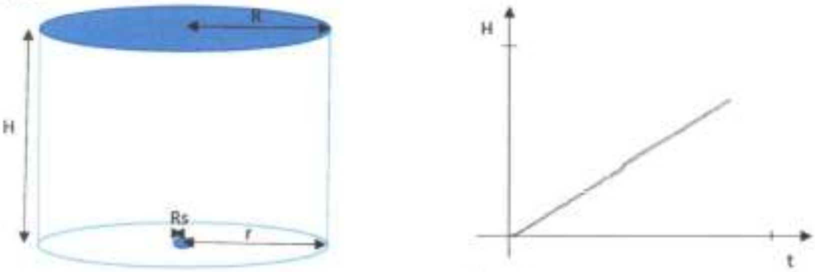
la altura con respecto al tiempo comenzaria a bajar más lento al principio y al final más rapido, ya que el recipiente es un cono truncado

Caso 2



la altura con respecto al tiempo seria más rapido el descenso al principio y al final más lento debido a que el recipiente es un cono truncado al reves

Caso 3



la altura va a bajar constante con respecto al tiempo ya que el recipiente es un cilindro

Respuesta 32. Actividad 2

Caso 1

A. Cambio de opinión ya que de manera erronea coloque la gráfica iniciando de 0 en altura cuando es al reves por que esta lleno

Caso 2

B Cambio de opinion por los mismos razones del caso 1

Caso 3

C. Cambio de opinion por los mismos razones del caso 1

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Todos se vacian al mismo tiempo, por que tienen el mismo gasto y distinto volumen.

Respuesta 31. Actividad 2

Equipo 5

Vaciado constante

Caso 1

Tomando en consideracion que el agua sale de manera constante por el orificio en el caso 1 se tiene una grafica:

en la que podemos apreciar que se va vaciando lento porque tenemos un radio mayor pero conforme se va reduciendo el vaciado es mas rapido.

Caso 2

Podemos apreciar que se va vaciando más rapido porque tenemos un radio menor pero conforme se va vaciando es más lento.

Caso 3

En este caso tardaria más en vaciarse porque tiene mayor volumen y es constante.

* Si es constante y tienes el mismo radio el caso 1 y 2 se vaciarian más rápido

Respuesta 33. Actividad 2 (Equipo 5A)

Caso 1

Tomando en consideracion la presion del agua el caso 1 tendria una grafica decreciente:

debido a que la presion de un principio sera mayor porque sera aplicada a un radio más pequeño y conforme la presión disminuye, la presión seria mas lento.

Caso 2

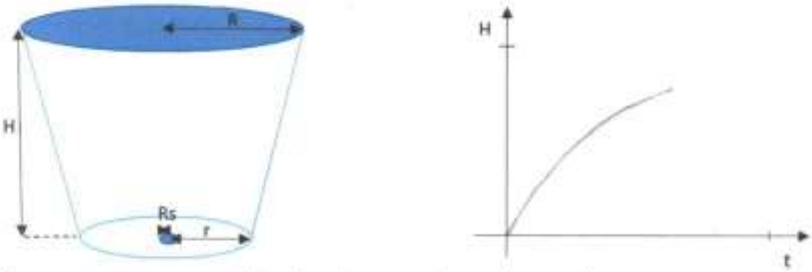
considerando una presion pero menor por su forma debido a que es aplicada a un radio mayor y de manera decreciente pero mas lenta

Caso 3
Es constante.

Respuesta 34. Actividad 2 (Equipo 5B)

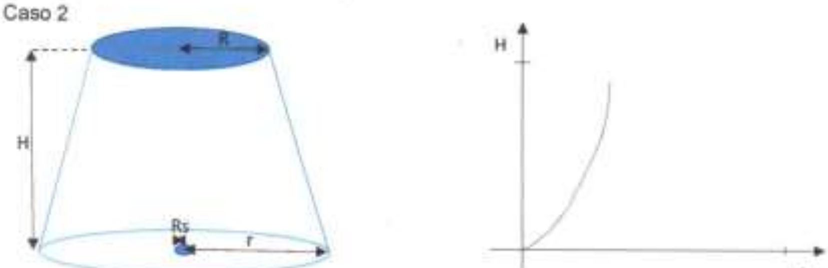
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



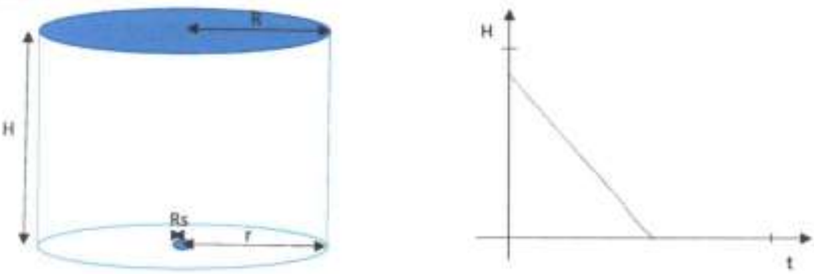
Porque como está lleno y el radio de arriba es mayor va bajando más lento y conforme siga bajando el nivel de agua será más rápido

Caso 2



nos dice que el tanque truncado está lleno y el radio de la parte de arriba es más pequeño entonces conforme vaya bajando el agua se irá vaciando más lento porque el radio de abajo es más grande osea se va expandiendo

Caso 3



en este caso el cilindro cuando se llena le cuesto más pero como se está vaciando es más fácil, es más rápido la forma de vaciado.

Respuesta 36. Actividad 2

Caso 1

A: No coincide; porque nos dice que se esta vaciando entonces en la forma en la que se llena es distinta sería la gráfica pero Alreves.

Caso 2

B: No coincide, de igual manera como se esta vacian-do la forma de la grafica sería alreves

Caso 3

si coincide: $\boxed{C}$

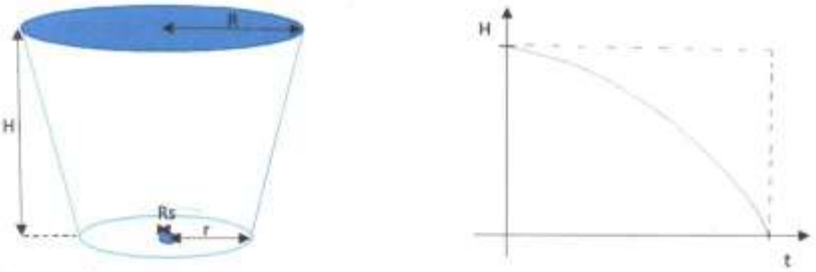
¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

el cilindro porque está en la misma forma es decir no cambia sus radios.

Respuesta 35. Actividad 2

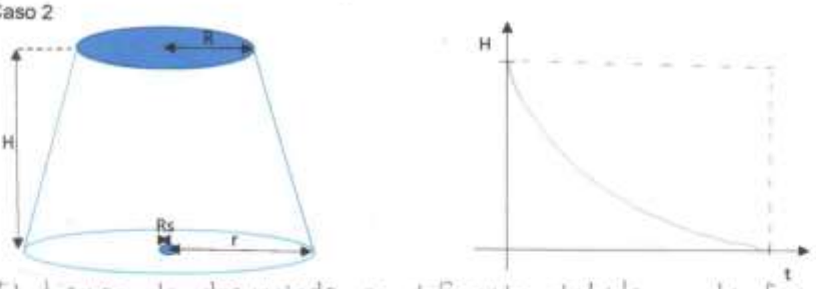
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



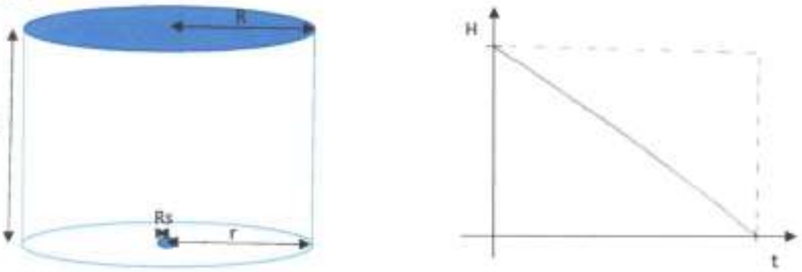
La gráfica es descendiente debido a que comienza en una altura máxima de H hasta llegar a cero y se desvacía rápido conforme avanza el tiempo.

Caso 2



El tiempo de desvaciado es diferente debido a la forma y la presión que ejerce el agua mientra baja, hasta llegar a una altura H=0.

Caso 3



La altura es casi constante a medida que pasa el tiempo por lo que su gráfica es una recta.

Respuesta 38. Actividad 2

Caso 1

Coincide con la opción A

Caso 2

Coincide con la opción B

Caso 3

Coincide con la opción C

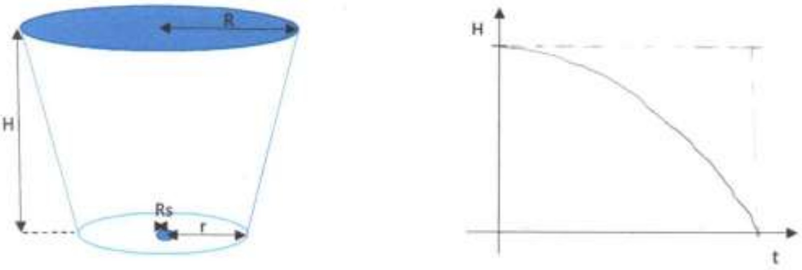
¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

El caso 1, porque tiene mayor presión debido a su forma

Respuesta 37. Actividad 2

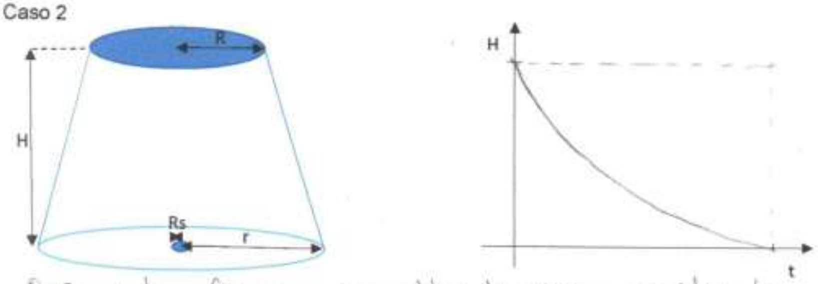
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



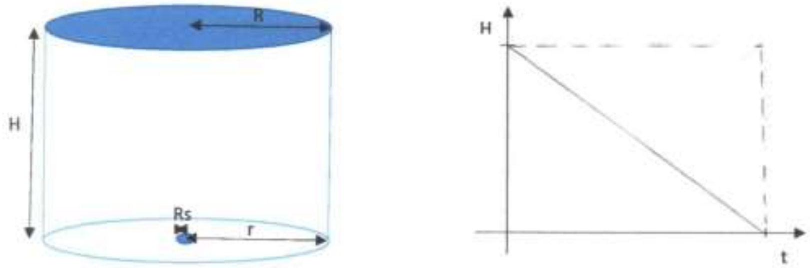
Se aprecia, por la forma del cono que su altura disminuye lentamente y cada vez se hace mas rapido conforme baja por abajo el ancho es mas pequeño

Caso 2



Para esta figura, su altura disminuye rapidamente en los primeros minutos pero despues se hace mas lento. por abajo el ancho es mas grande.

Caso 3



En este caso, el vaciado en constante, es decir, el agua baja a una velocidad constante de tal manera que no hace cambios en todo el tiempo, porque es un cilindro

Respuesta 39. Actividad 2

Caso 1

Coincide con el caso A

Caso 2

Coincide con el caso B

Caso 3

Coincide con el caso C

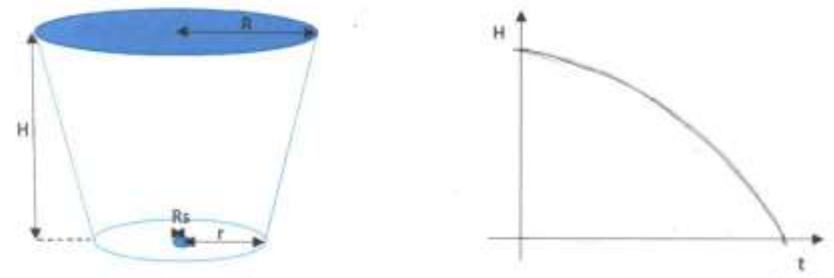
¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

El recipiente A se vacia mas rapido devido a la forma que tiene

Respuesta 40. Actividad 2

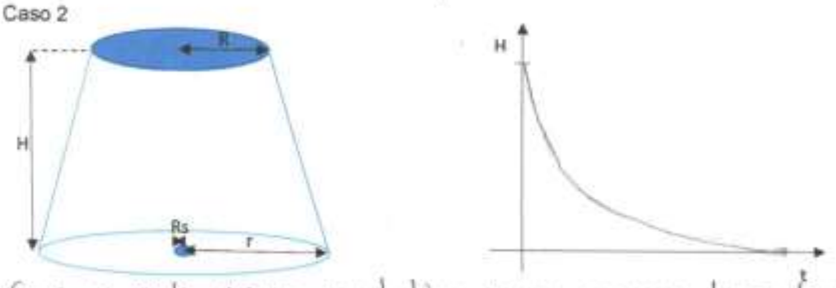
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



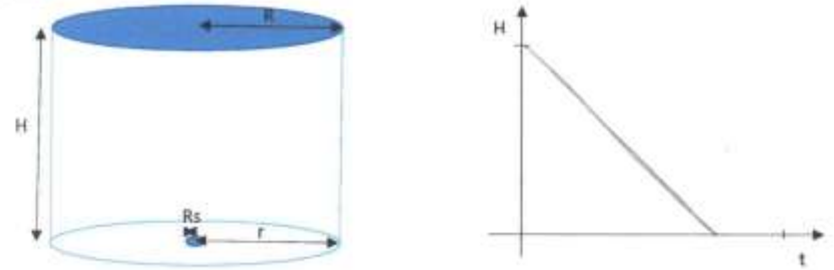
En este caso podemos apreciar que el vaciado empieza lento ya que tiene un radio mayor, pero conforme se va reduciendo el radio el vaciado es mas rápido.

Caso 2



Como se puede apreciar en el dibujo en un principio descenderá rápido pero conforme aumenta el radio el vaciado es mas lento.

Caso 3



En este caso el vaciado del recipiente sera constante ya que mantiene un mismo radio, lo cual ocasiona que descienda en el mismo tiempo un altura

Respuesta 42. Actividad 2

Caso 1

Coincide con A

Caso 2

Coincide con B

Caso 3

Coincide con C

¿Qué recipiente se vacia más rápido?, ¿Por qué?

Si nos vamos a que tienen las mismas caracteristicas el caso 1 y 2 solo que con radios inversos, se vacian al mismo tiempo, pero en el caso del cilindro su tiempo de vaciado es mas rapido porque es constante.

Respuesta 41. Actividad 2

Equipo 6

Everardo: Caso 1. El vaciado al principio será lento y al final será más rapido.
Adrian: Por el volumen que tiene la presión es mayor y por lo mismo piensa que el vaciado es más rapido.

Everardo: Caso 2. Piensa que el vaciado comenzara rapido y conforme pasa el tiempo será más lento.

Everardo: Caso 3. El vaciado es constante por tener el radio superior e inferior del mismo tamaño.

Gamaliel. Caso 1. Piensa igual que Everardo

Adrian: Caso 1. El vaciado comenzaria rapido por tener ~~mayor volumen~~ el radio superior más grande y conforme el tiempo avance seria más lento el vaciado.

Adrian. Caso 2. El tiempo de vaciado será mayor que en el caso 1 porque el radio inferior es mayor.

Adrian: Caso 3: Piensa igual que Everardo

Respuesta 44. Actividad 2 (Equipo 6A)

Conclusión. ¿Cuál de los recipientes se vacia primero?

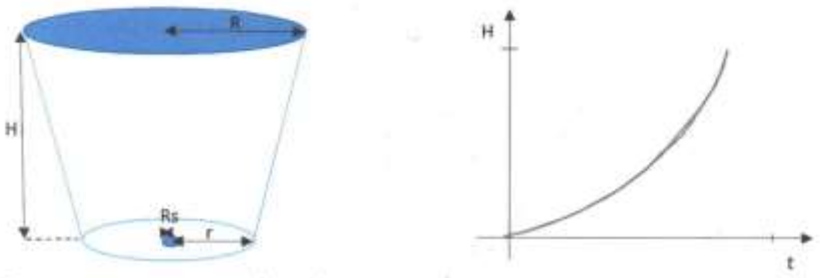
Pensamos que es el caso 1 porque por ser el radio superior mayor la concentración del liquido en esa parte es mayor y eso provocaria que la presión provoque una salida del liquido más rapido. y Conforme el liquido disminuya la presion sera menor y por consiguiente la ~~provoque~~ velocidad de vaciado disminuira

Graficas correctas
Caso 1: Grafica B
Caso 2: Grafica B
Caso 3: Grafica C

Respuesta 43. Actividad 2 (Equipo 6B)

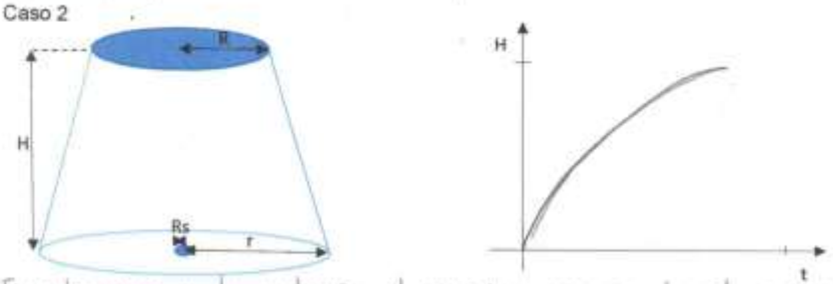
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



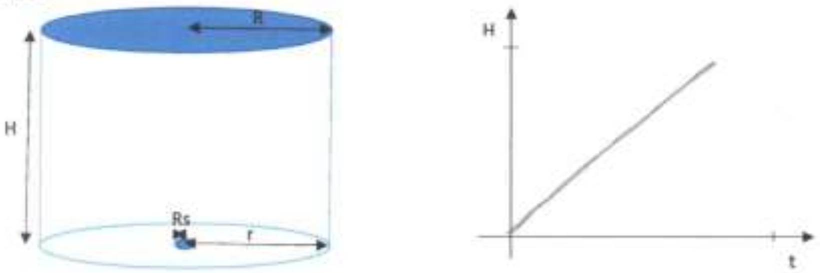
En este caso cuando el recipiente comienza a vaciarse el tiempo de vacia es rápido y por lo mismo la altura va disminu- yendo rápido

Caso 2



En este caso es lo contrario al caso 1 ya que cuando el recipiente comienza a vaciarse el tiempo de vacío es lento porque el radio de salida se encuentra en el radio inferior

Caso 3



En este caso el tiempo de vacío es constante ya que en cualquier altura el radio será el mismo

Respuesta 46. Actividad 2

Caso 1

Cambie al caso B porque eso es la manera de representar el vaciado del recipiente ya que el radio de salida se encuentra en el radio más pequeño del recipiente y por lo mismo la altura disminuye más rápido

Caso 2

Cambié al caso A porque el radio de salida se encuentra en el radio más grande del recipiente y por lo mismo la altura disminuye más lento

Caso 3

Cambié al caso C ya que el vacío es constante y en cualquier tiempo t tendra la misma altura H

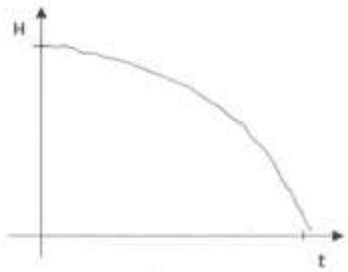
¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Caso 1 por tener el radio de vacío en el radio más pequeño del recipiente

Respuesta 45. Actividad 2

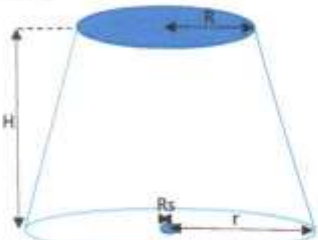
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

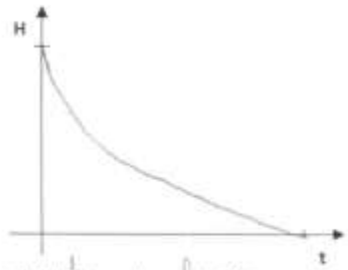
Caso 1



Es un grafica de esa manera por que al principio sale lento y despues mas rapido

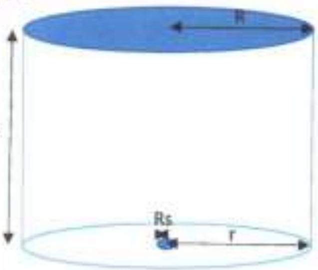
Caso 2

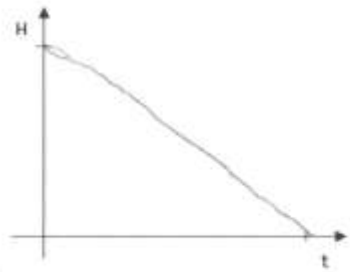




Por que al principio sale rapido y luego más lento

Caso 3





Sale de forma constante

Respuesta 48. Actividad 2

Caso 1

Si Coincide A

Caso 2

Si Coincide B

Caso 3

Si Coincide C

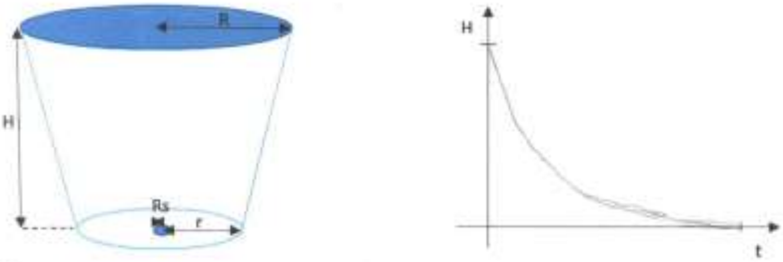
¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Caso 1 y Caso 2
por que el caso 3 tiene r y R iguales

Respuesta 47. Actividad 2

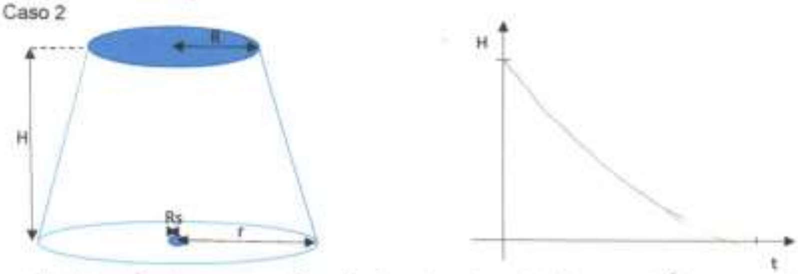
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



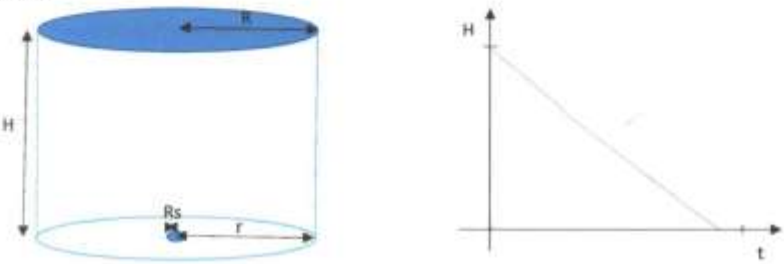
El vaciado empezará rápido por tener mayor volumen encima la presión será mayor por lo cual saldrá un chorro más fuerte y veloz, pero conforme disminuye el agua la presión será menor

Caso 2



El vaciado será rápido al inicio pero conforme disminuye se hará lento y hasta se vaciará completamente.

Caso 3



La velocidad con la que sale será constante y no aumentará ni disminuirá

Respuesta 49. Actividad 2

Caso 1

Coincide con B

Caso 2

Coincide con B

Caso 3

Coincide con C

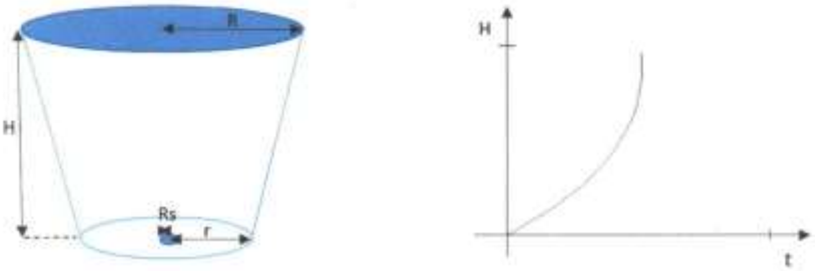
¿Qué recipiente se vacia más rápido?. ¿Por qué?

El recipiente del caso 1 por que tiene mayor presión

Respuesta 50. Actividad 2

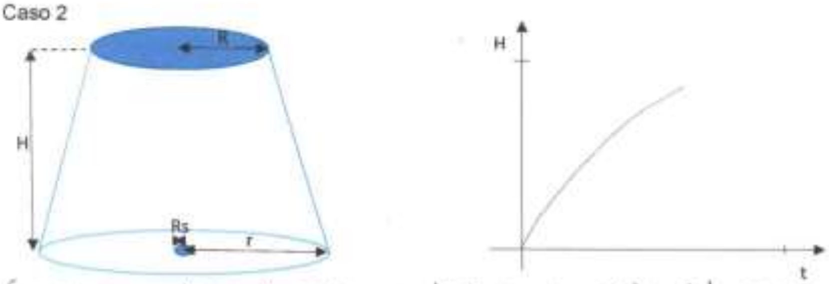
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



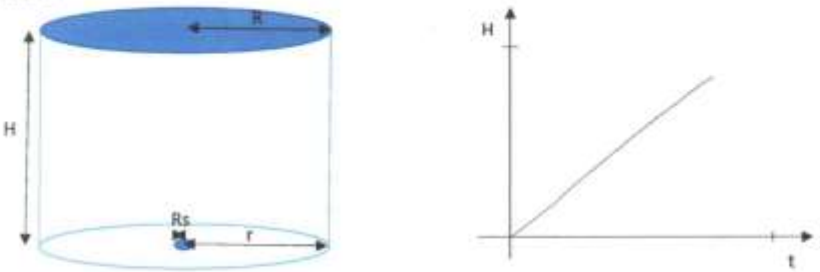
En este caso el vaciado del recipiente sería un poco lento porque el área donde se encuentra el orificio es pequeño y eso provocaría que el vaciado sea lento

Caso 2



En este caso el vaciado sería mas rápido a comparación del caso anterior por lo que el área donde se encuentra el orificio es mas amplio.

Caso 3



En este caso se vaciaría a una velocidad constante.

Respuesta 52. Actividad 2

Caso 1

B, porque la altura del recipiente iba disminuyendo conforme el tiempo vaya avanzando.

Caso 2

A, la altura iba disminuyendo conforme avanzo el tiempo pero con una forma mas lenta

Caso 3

C, la altura iba disminuyendo conforme al tiempo como en los casos anteriores, pero con una forma mas directa

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Los tres se vacían al mismo tiempo, porque el volumen de cada recipiente es el mismo.

Respuesta 51. Actividad 2

Equipo 7

IDEAS EQUIPO # 7 3º D

- La altura es con respecto al tiempo
- Ambos conos se vacían al mismo tiempo
- El vaciado va respecto a ambos radios
- A medida que va bajando, cuando su vaciado este a la mitad será más lento.
- Comparar los modelos con la forma de un embudo, ya que este tiene la misma forma de los dos primeros casos.
- Teníamos conocimiento previo de la forma de los recipientes (cono truncado y cilindro) y por lo tanto su tiempo de llenado. Cambiando la pendiente de cada uno de ellos.

CASO 1

Como en la parte mayor hay más superficie su vaciado será más lento y en la parte inferior al ser una superficie pequeña ... ... se verá que su vaciado será más rápido

CASO 2

Siendo la superficie menor en la parte de arriba su vaciado será más rápido y en la parte inferior teniendo un radio mayor su vaciado será más lento.

CASO 3

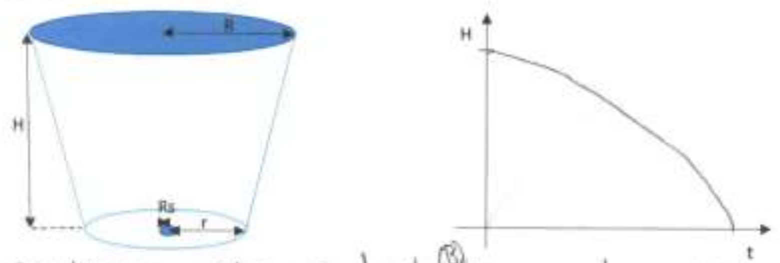
Al tener radios iguales el vaciado es constante y se hará en un tiempo más corto que en los conos truncados.

- El vaciado dependerá del radio de la forma del recipiente (cono y cilindro) ya que el orificio de vaciado es el mismo en los tres casos, altura disminuye y el tiempo aumenta.

Respuesta 53. Actividad 2 (Equipo 7)

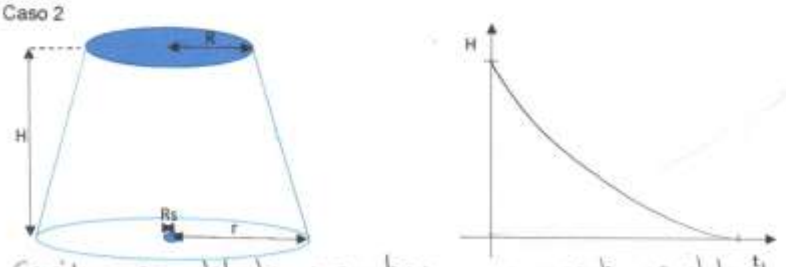
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



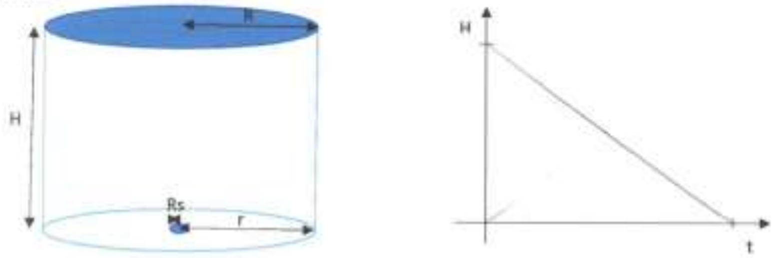
Considero que a medida que el radio (R) disminuye el vaciado será más lento pues se reducirá el ancho del recipiente.

Caso 2



Considero que debido a que hay un menor radio en el límite del recipiente se ejercerá menor presión a la salida que aumentará en función de que aumente el ancho del recipiente

Caso 3



Considero que tendrá un vaciado constante ya que el radio de la circunferencia es igual en las dos áreas.

Respuesta 55. Actividad 2

Caso 1 A coincide con mi caso 1

Caso 2 B coincide con mi caso 3

Caso 3 C coincide con mi caso 3

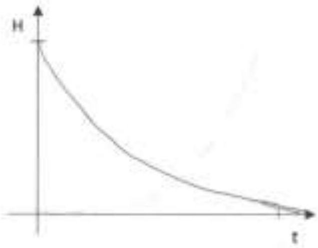
¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Considero que el recipiente 1 se vaciará más rápido por la forma del mismo ya que disminuye el propio recipiente.

Respuesta 54. Actividad 2

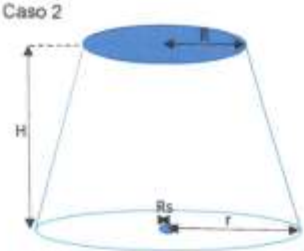
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

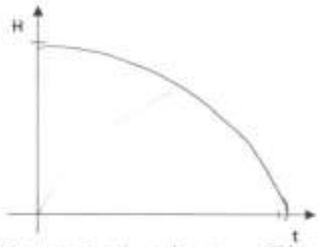
Caso 1



Por que el vaciado del recipiente comenzaria de manera lenta y aumentaria por la forma del cono truncado ya que su volumen es inferior cada que desiende su H

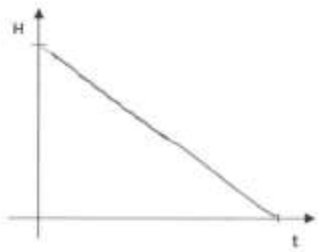
Caso 2





El vaciado de cono truncado, igual que el anterior esta dependiendo de la variable H y comenzaria a vaciarse rapido y mas lento dependiendo su H

Caso 3



El vaciado del cono es constante ya que su figura es simetrica

Respuesta 57. Actividad 2

Caso 1

la cambiaría por la grafica A ya que el vaciado comienza lento y termina rapido, creo que me equivoque

Caso 2

la cambiaria por la grafica B por que el vaciado es más rapido y termina lento

Caso 3

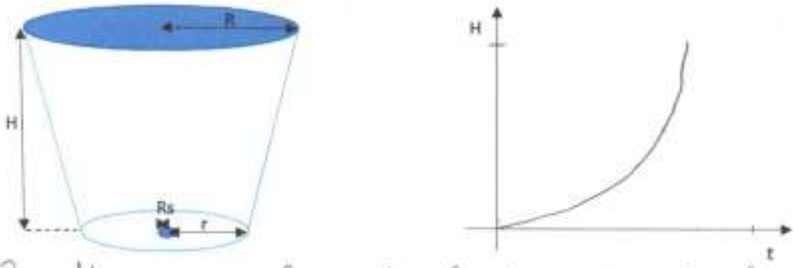
¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?

Depende del radio si R es mayor o menor ya que si es mayor caso 1 y Dos serian iguales y si es menor el caso 3

Respuesta 56. Actividad 2

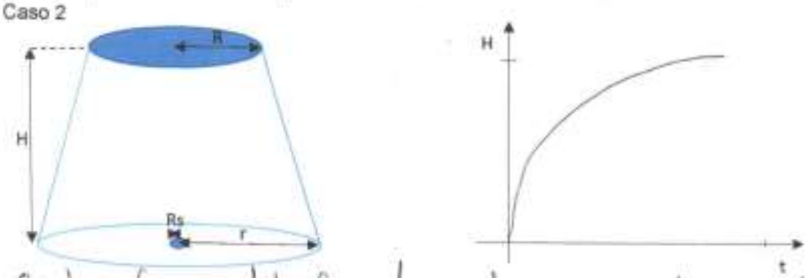
Considerando que los recipientes que se muestran a continuación se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio Rs, realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde H= Altura total, R= Radio superior, r= Radio inferior, Rs= Radio del orificio de salida.

Caso 1



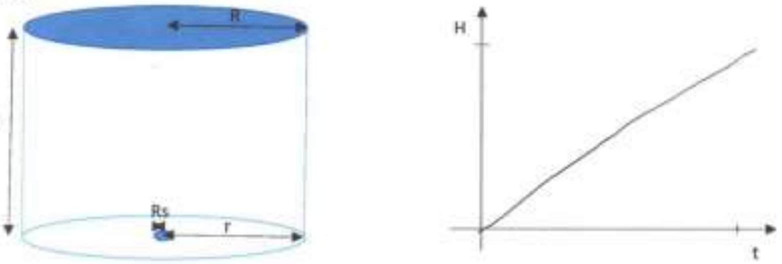
Por inable y por la forma del Cono truncado, se sabe que va de forma instable ya que esta de base superior e inferior son diferentes por la cual, existe una variación

Caso 2



Por la forma del Cono truncado, nos podemos dar cuenta que su desvaciado es de forma irregular, ya sea por la presión que esta ejerce por la forma que esta tiene

Caso 3



En esta figura cilindrica nos damos cuenta que se desvacia de forma constante ya que todos sus lados son proporcionales.

Respuesta 59. Actividad 2

Caso 1

A - ¿por qué? no coincide, pero es la grafica real, la anterior esta tomada de diferente forma

Caso 2

B - ¿por qué? por la forma de vaciado de la forma de la figura a desvaciar.

Caso 3

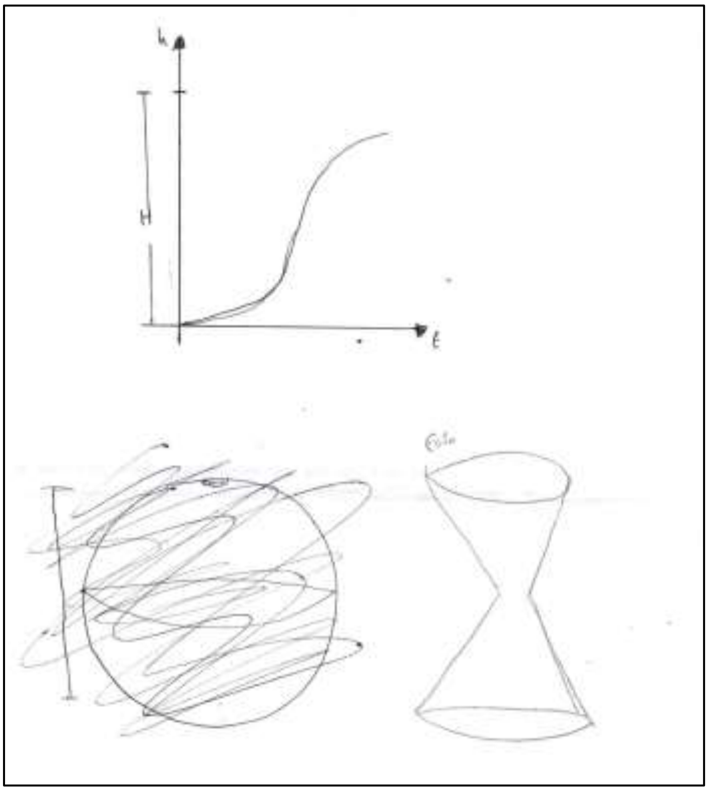
C - ¿por qué? Porque es proporcional la forma de la figura por la cual deja de ser constante.

¿Qué recipiente se vacía más rápido?, ¿Por qué?
Todos, porque ; tienen diferente figura pero misma Volúmen.

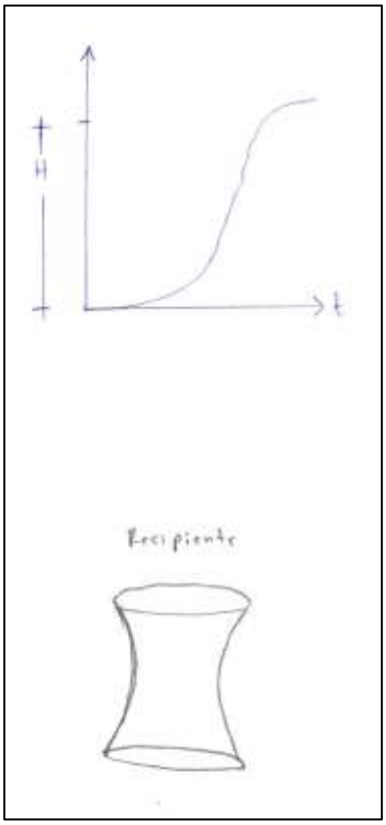
Respuesta 58. Actividad 2

Anexo 2

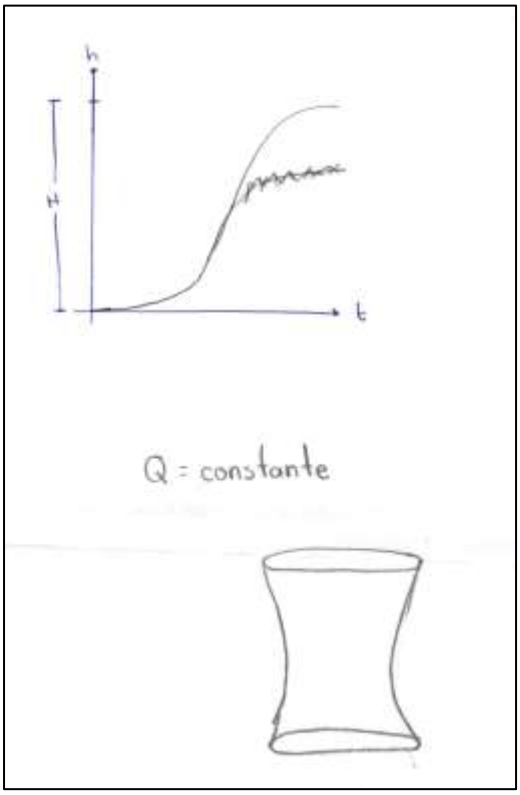
Respuestas de los estudiantes asociados a la actividad 3



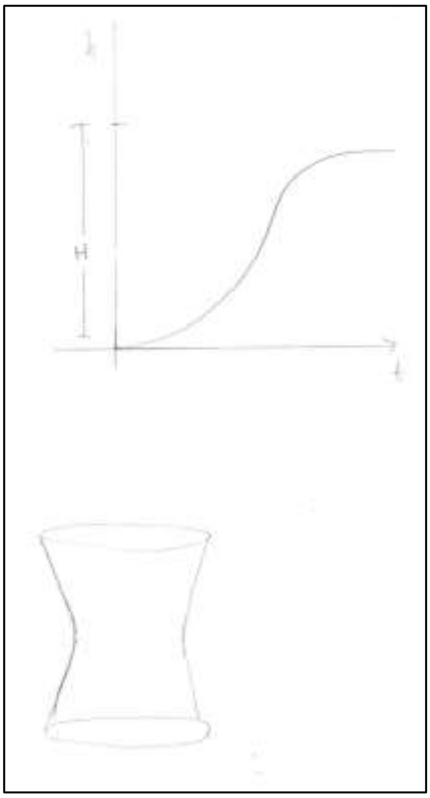
Respuesta 61. Actividad 3.1



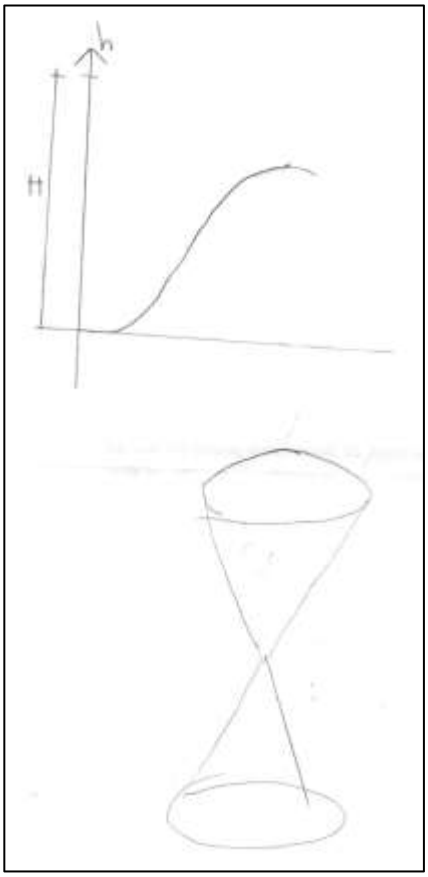
Respuesta 60. Actividad 3.1



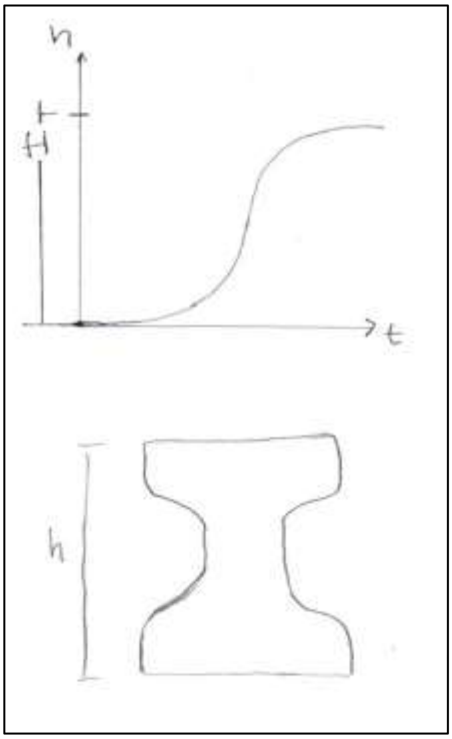
Respuesta 63. Actividad 3.1



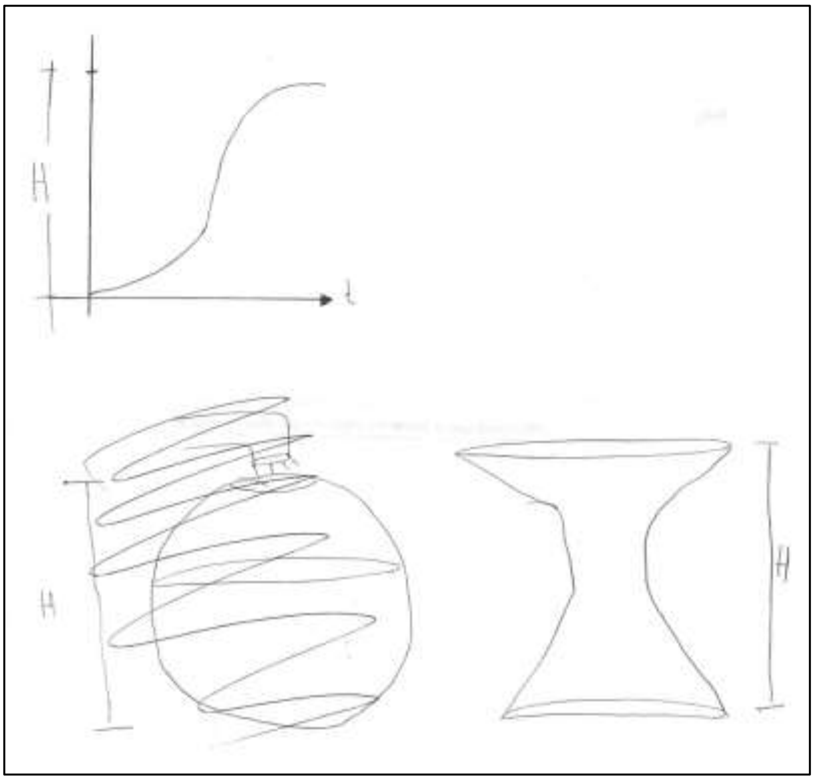
Respuesta 62. Actividad 3.1



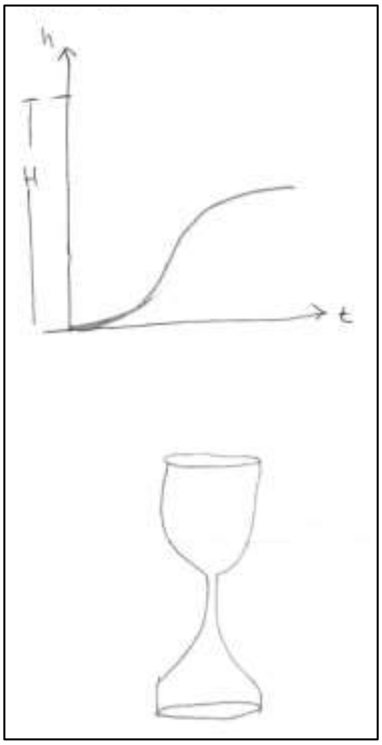
Respuesta 66. Actividad 3.1



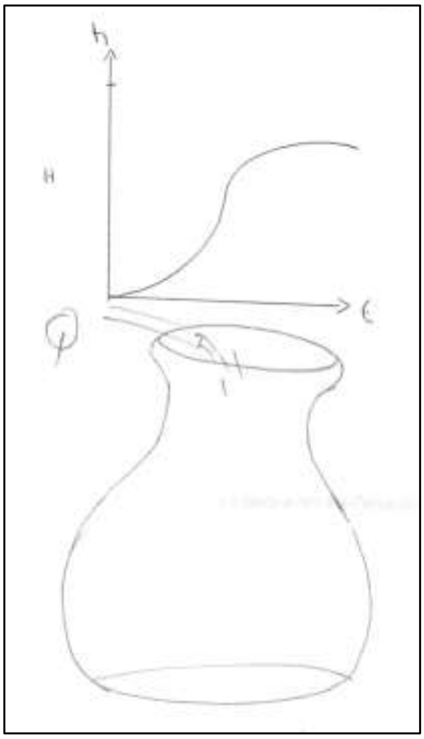
Respuesta 65. Actividad 3.1



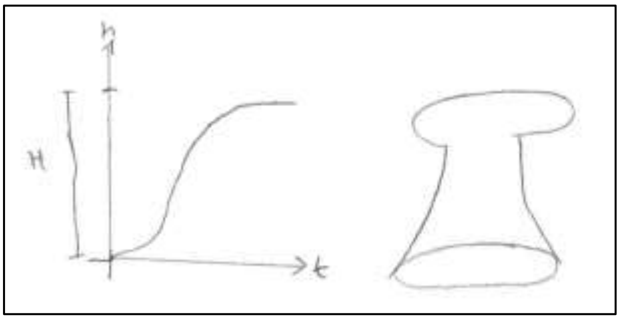
Respuesta 64. Actividad 3.1



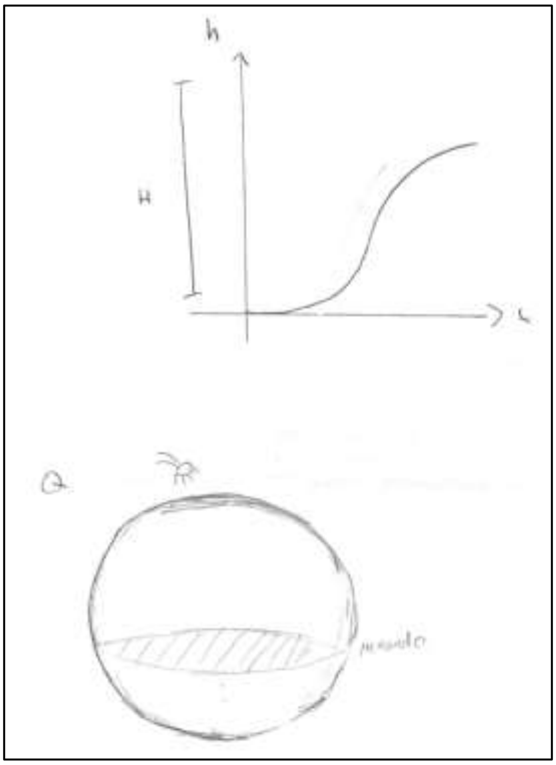
Respuesta 70. Actividad 3.1



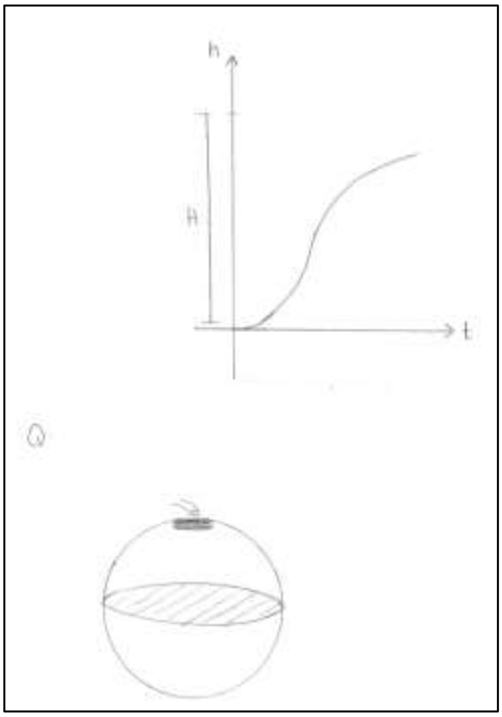
Respuesta 69. Actividad 3.1



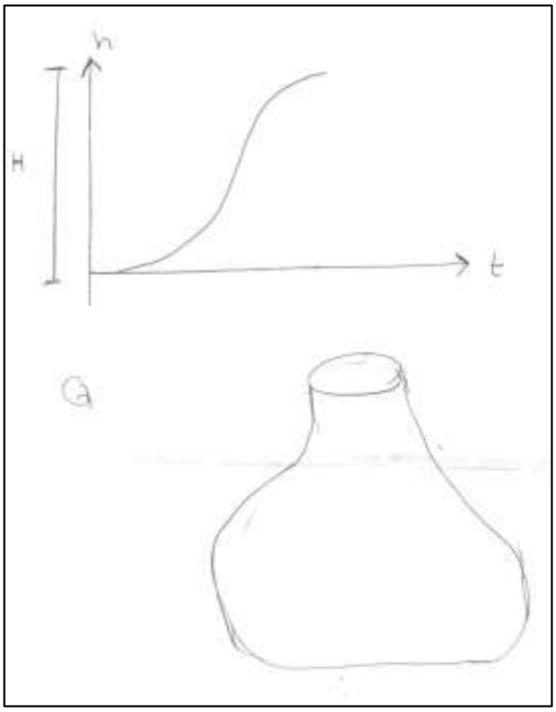
Respuesta 68. Actividad 3.1



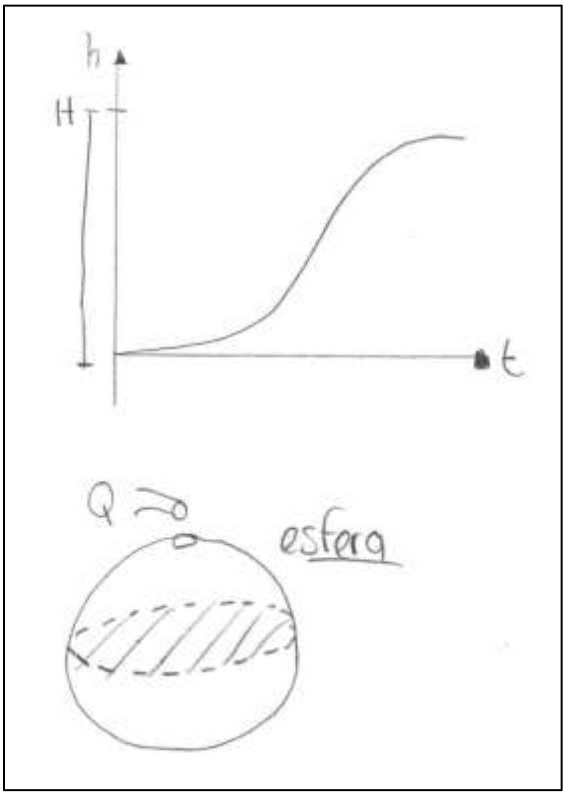
Respuesta 67. Actividad 3.1



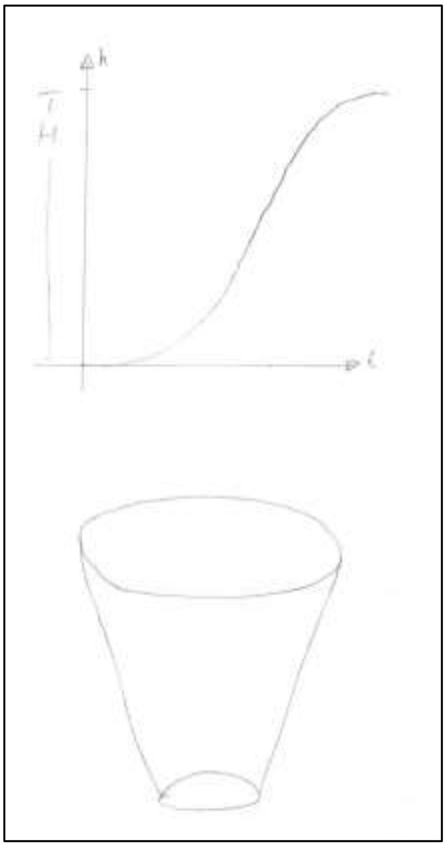
Respuesta 74. Actividad 3.1



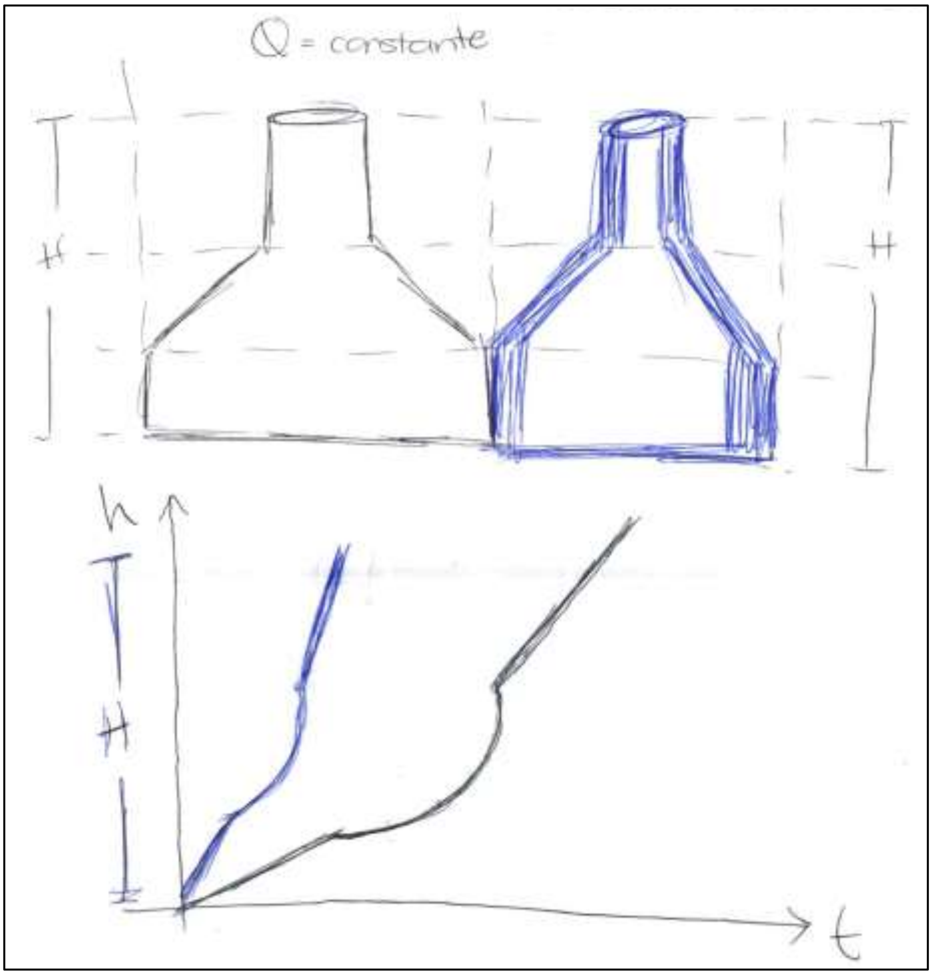
Respuesta 73. Actividad 3.1



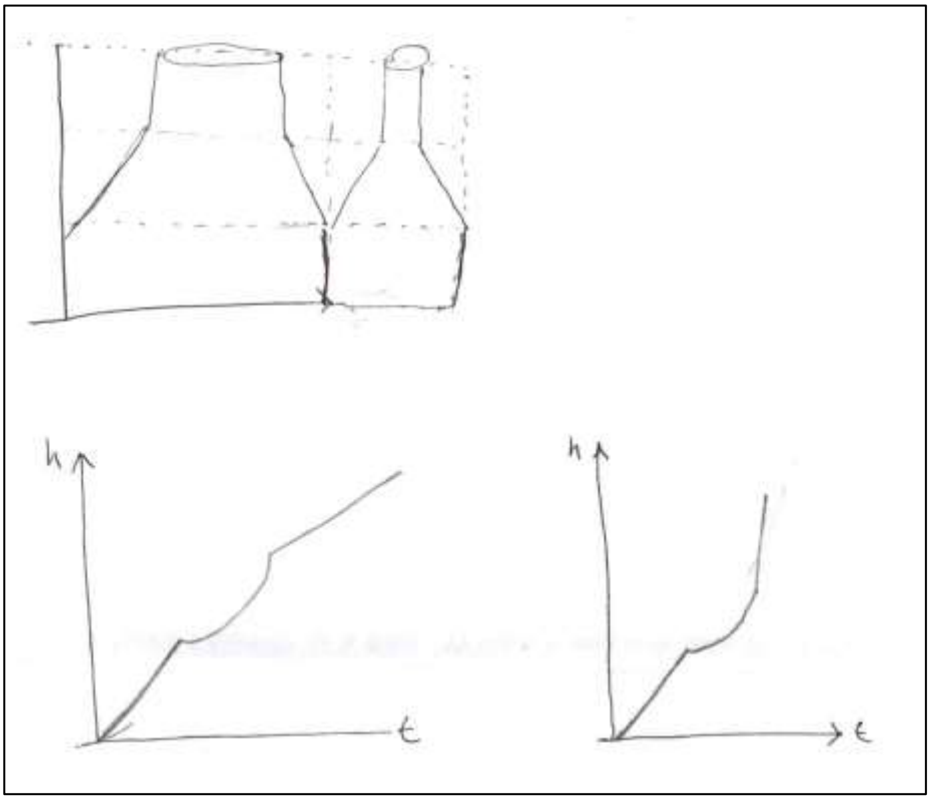
Respuesta 72. Actividad 3.1



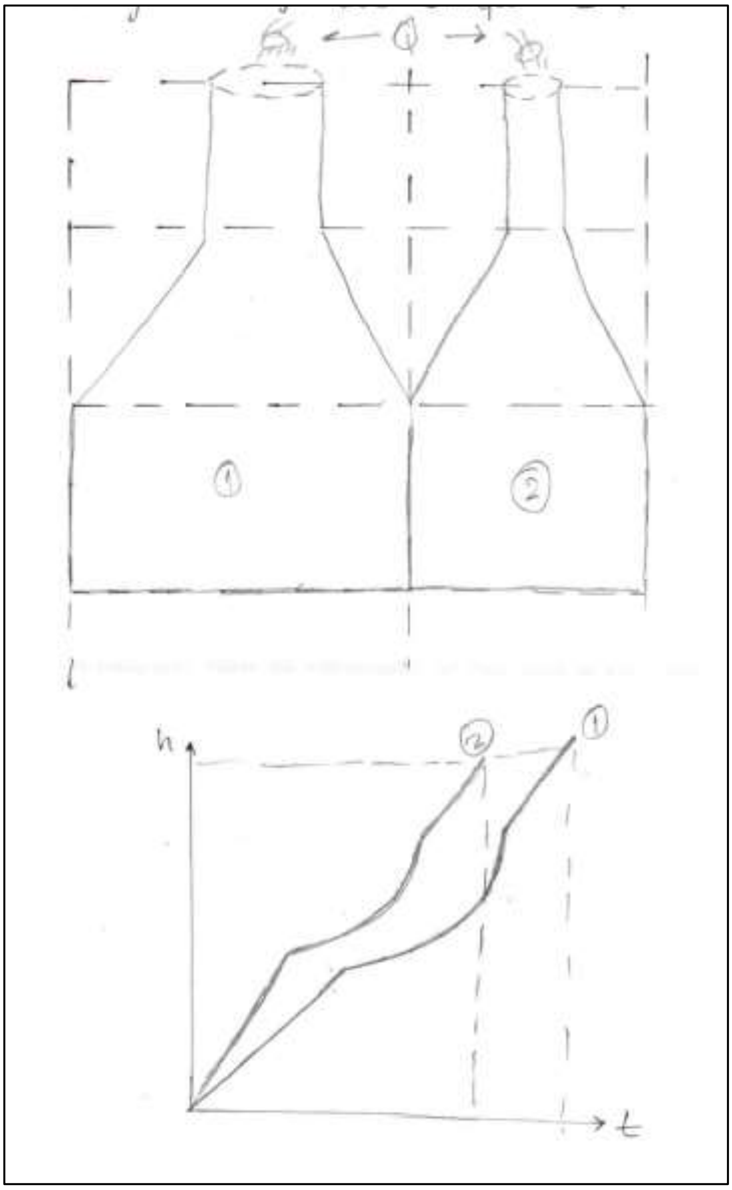
Respuesta 71. Actividad 3.1



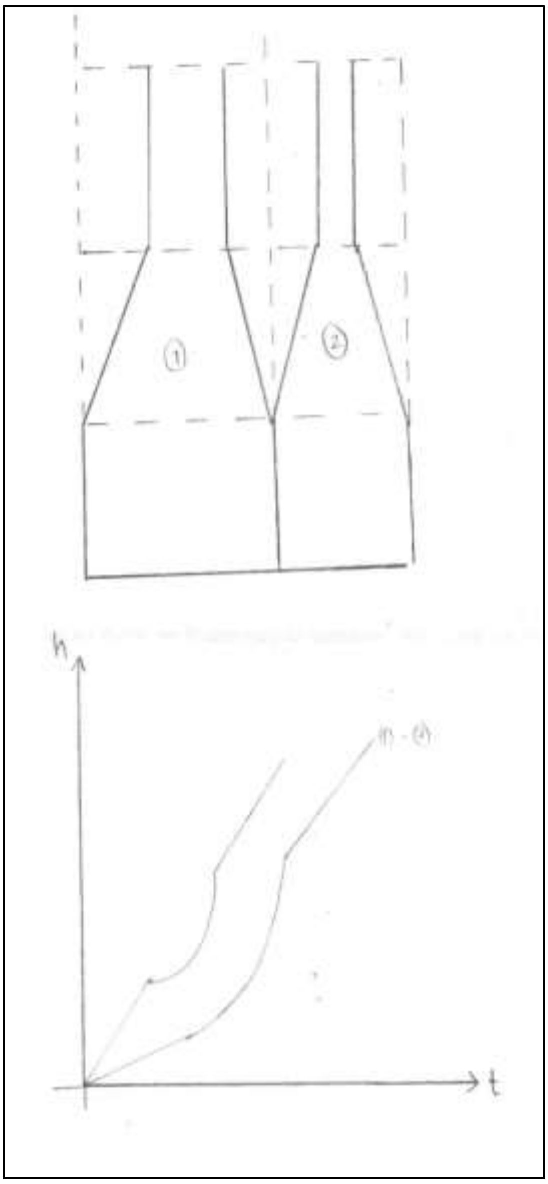
Respuesta 75. Actividad 3.2



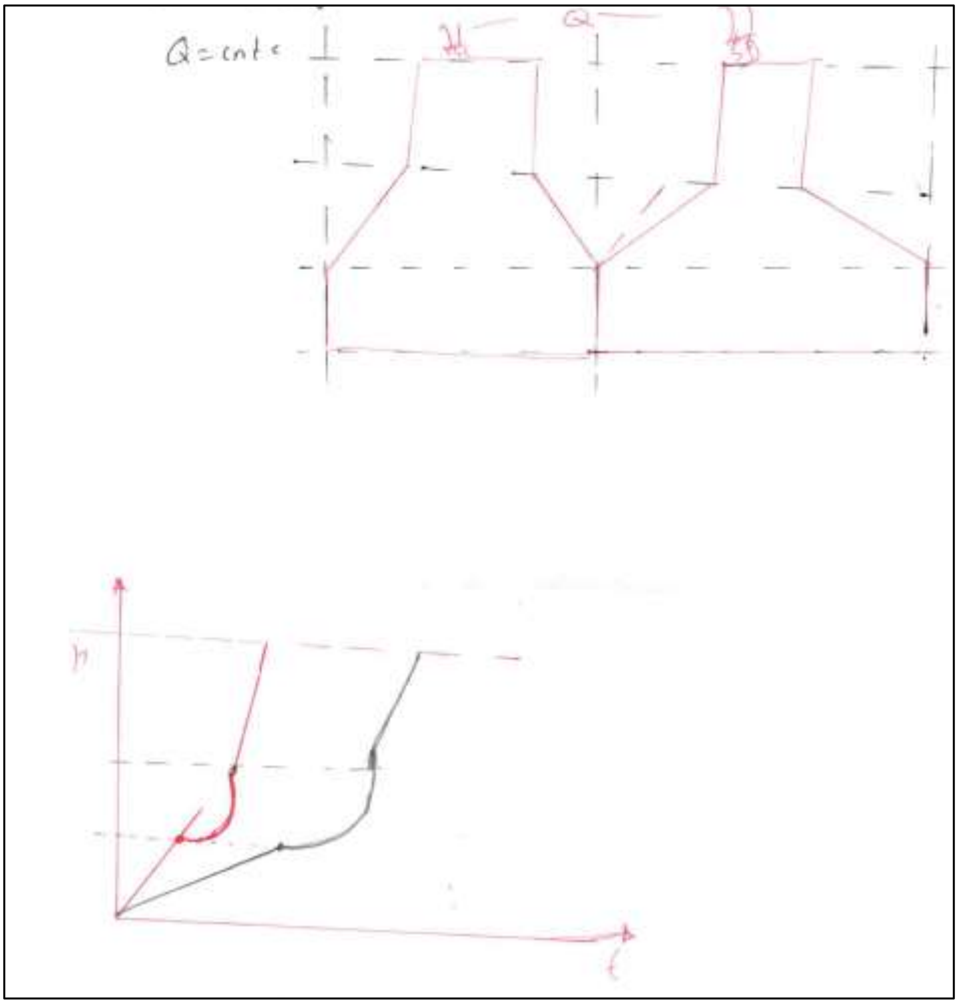
Respuesta 76. Actividad 3.2



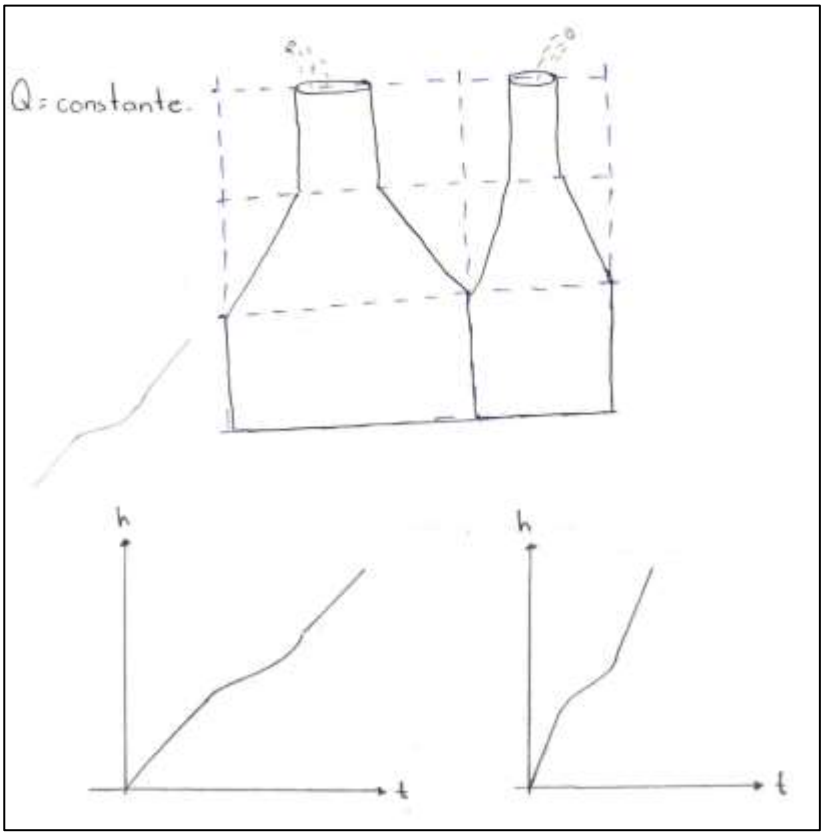
Respuesta 78. Actividad 3.2



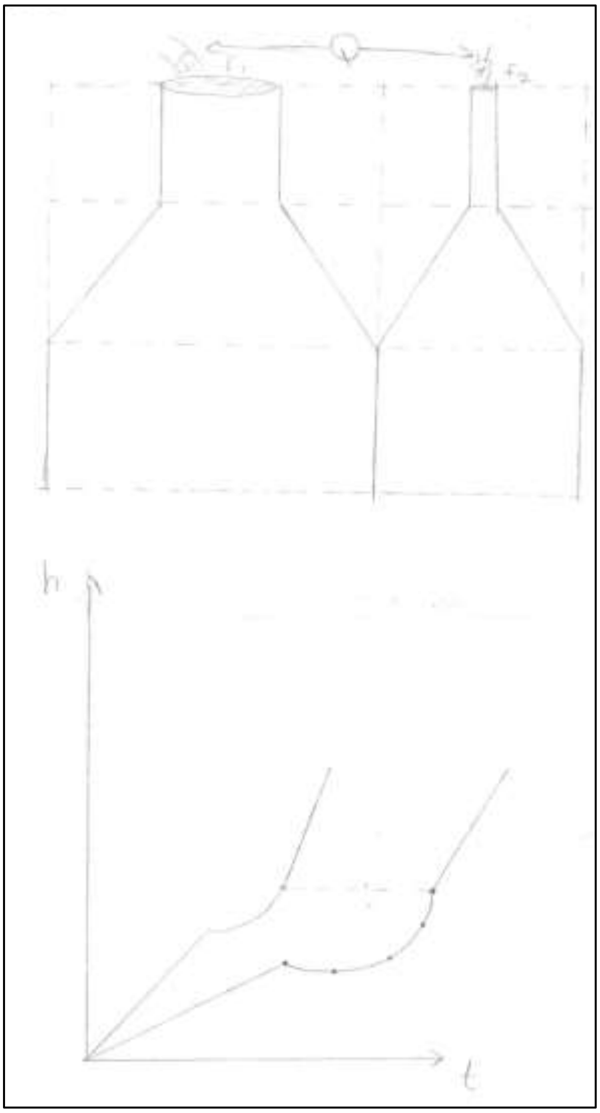
Respuesta 77. Actividad 3.2



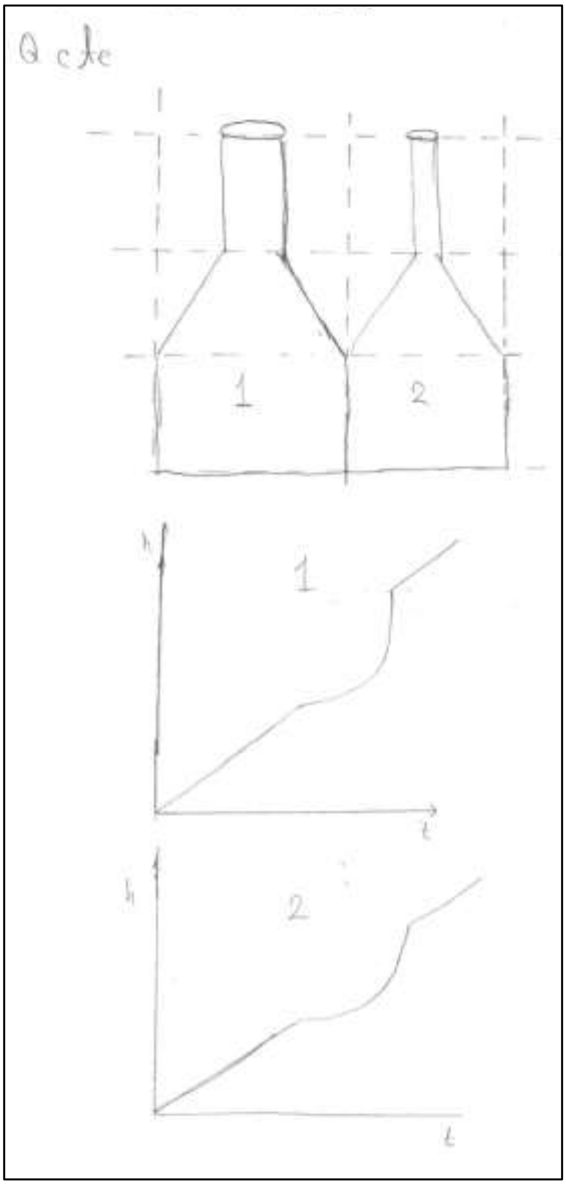
Respuesta 80. Actividad 3.2



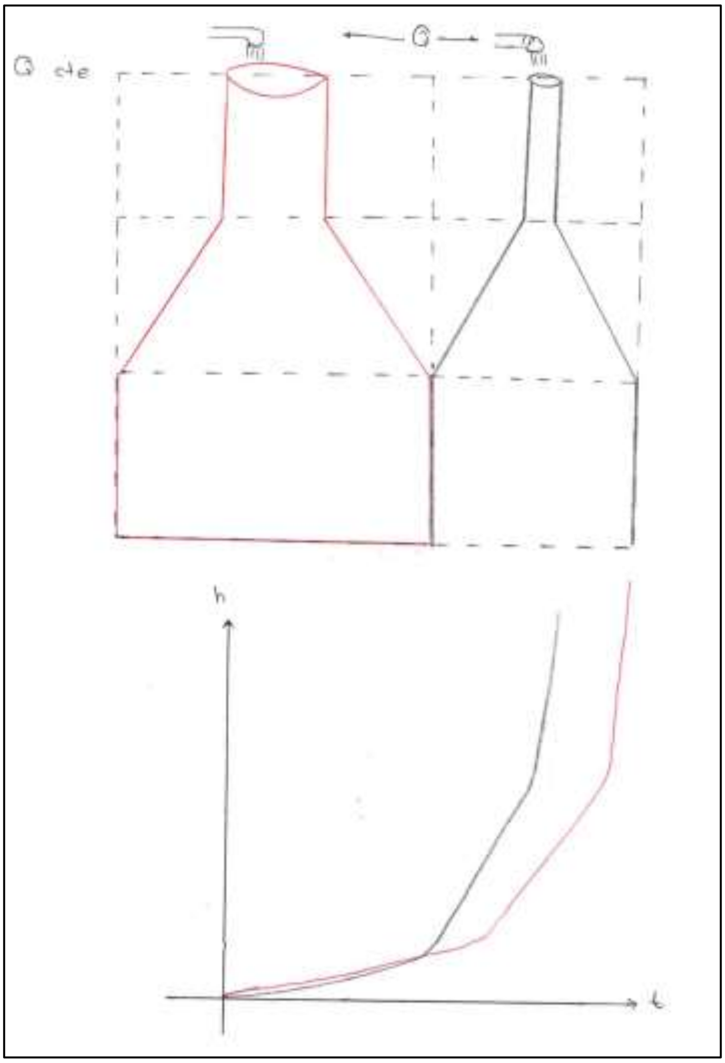
Respuesta 79. Actividad 3.2



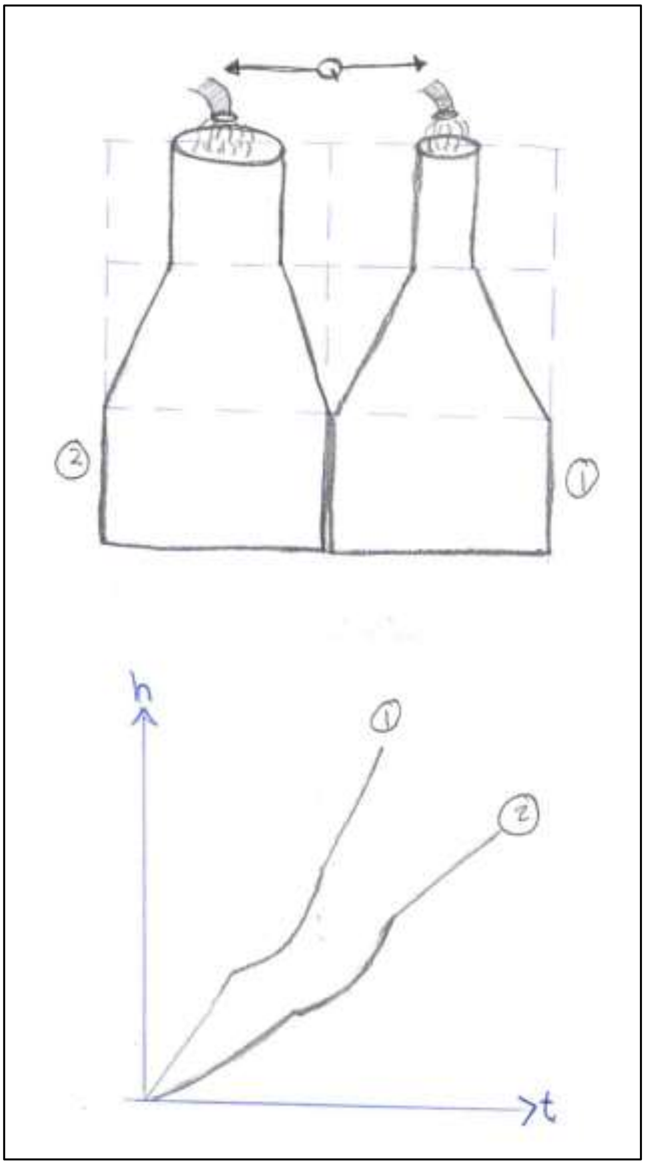
Respuesta 82. Actividad 3.2



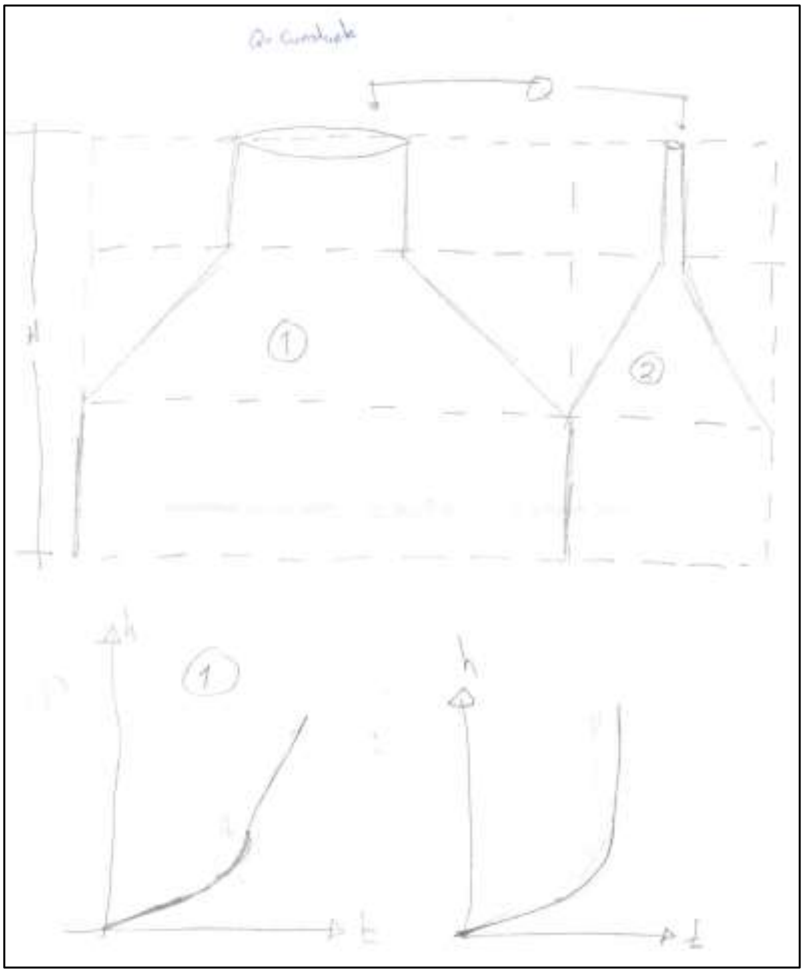
Respuesta 81. Actividad 3.2



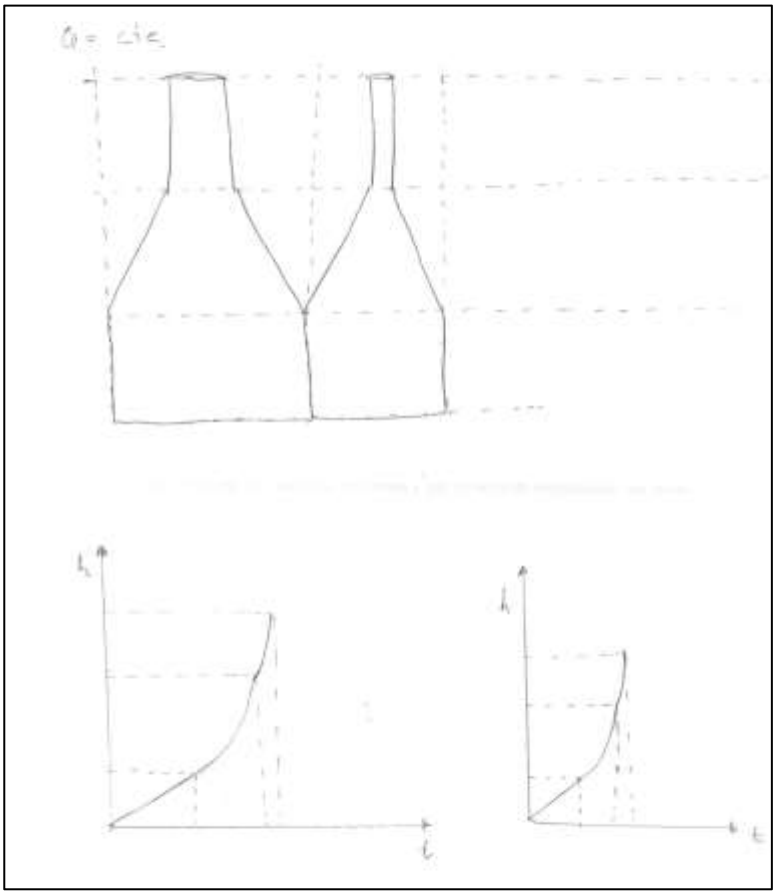
Respuesta 84. Actividad 3.2



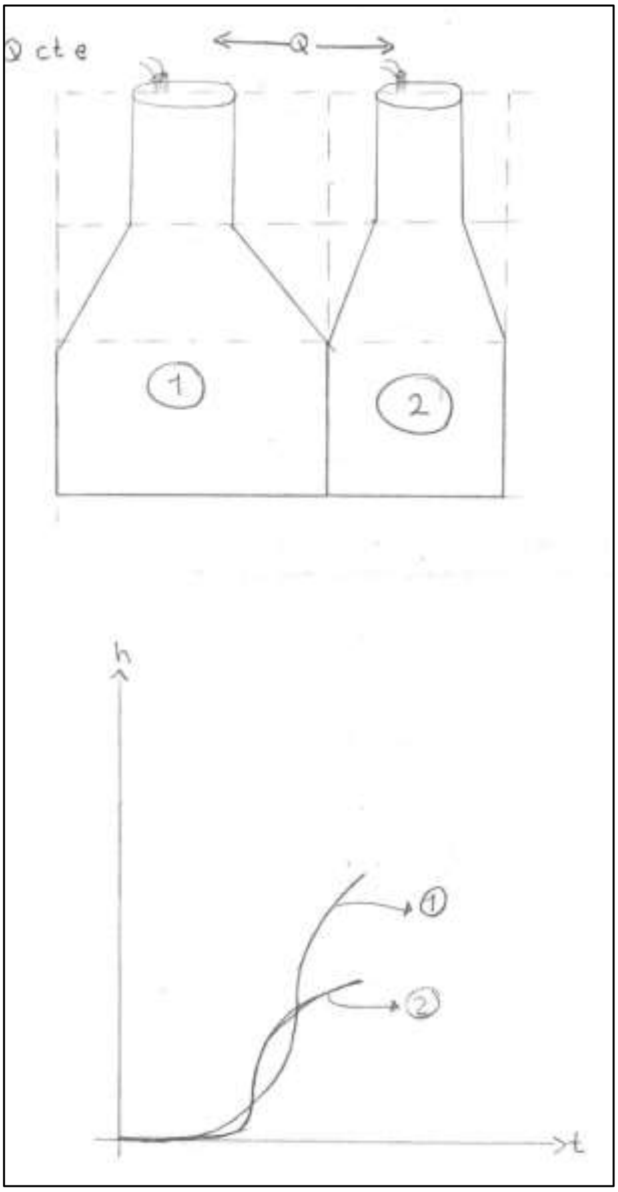
Respuesta 83. Actividad 3.2



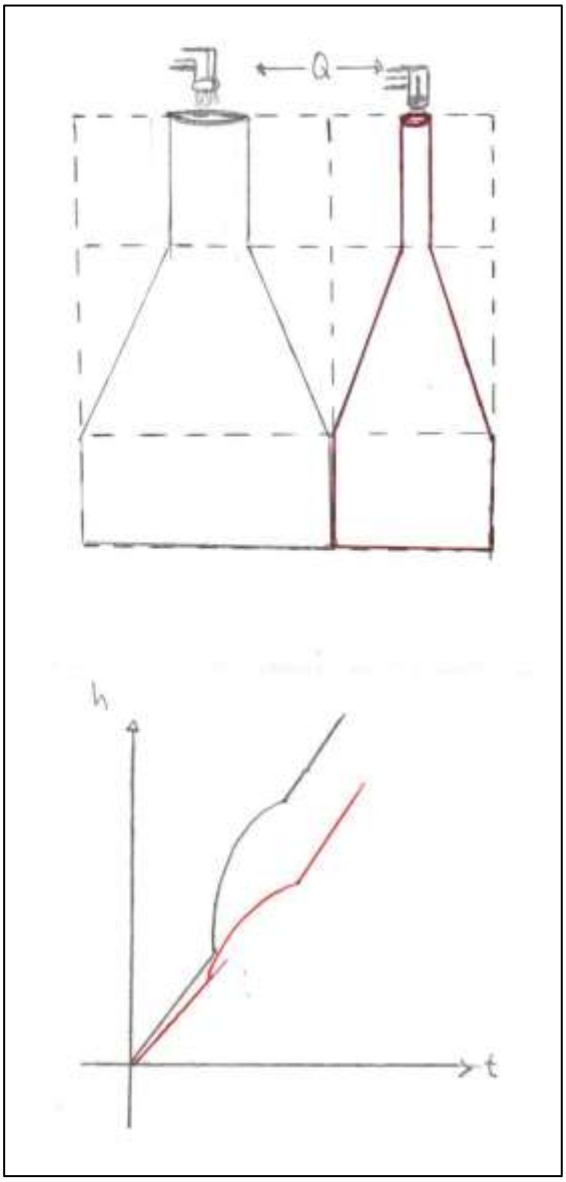
Respuesta 86. Actividad 3.2



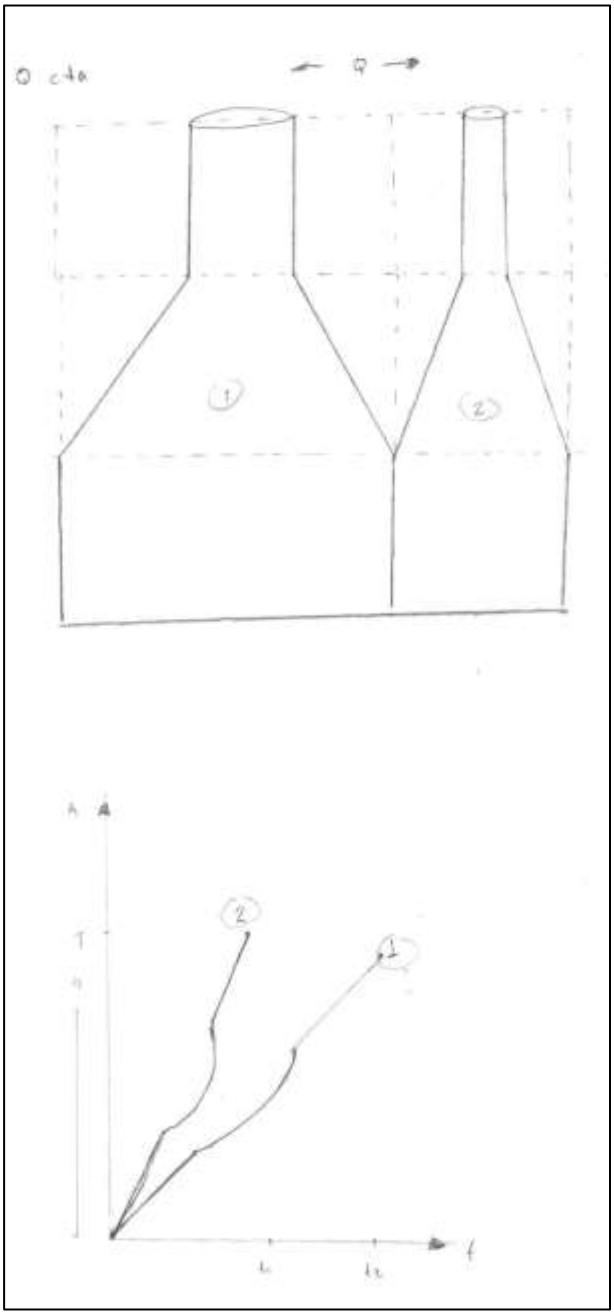
Respuesta 85. Actividad 3.2



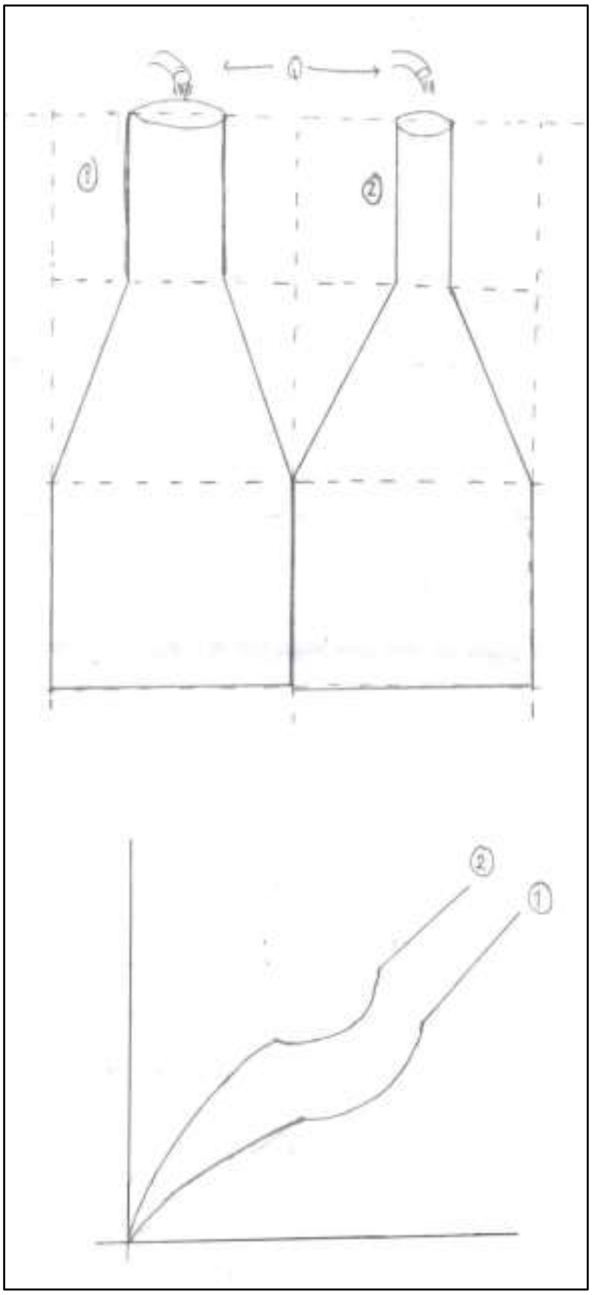
Respuesta 88. Actividad 3.2



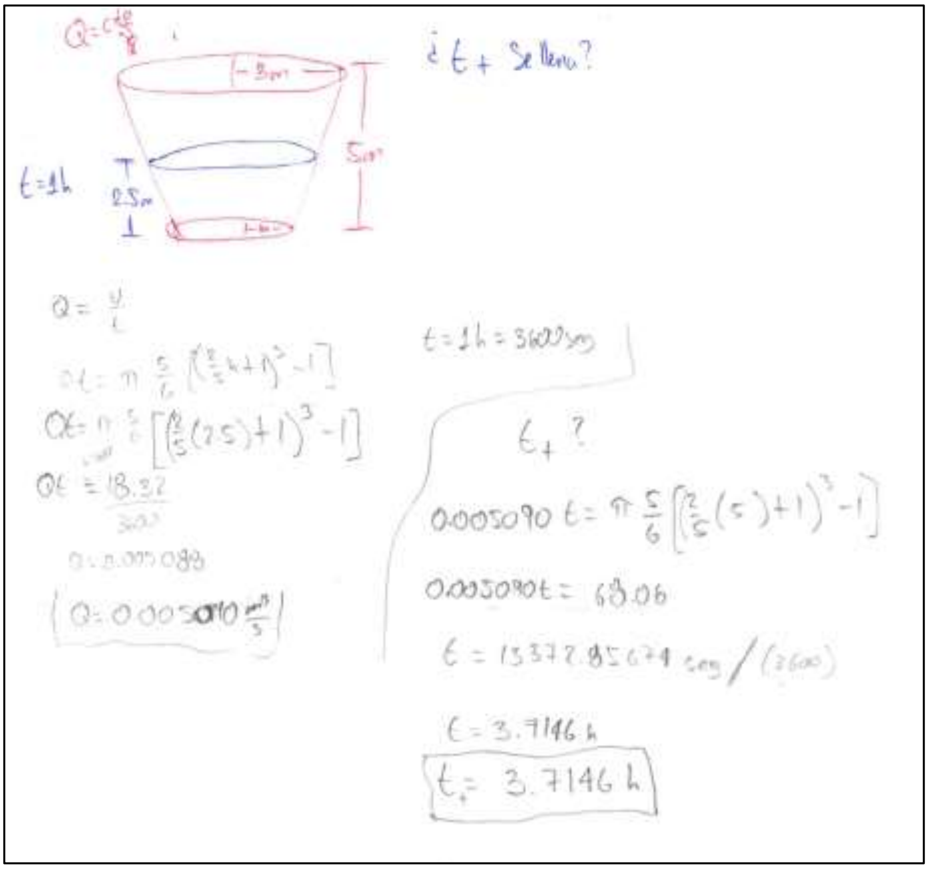
Respuesta 87. Actividad 3.2



Respuesta 90. Actividad 3.2



Respuesta 89. Actividad 3.2



¿t_+ se llena?

3m

5m

$t = 1h$

2.5m

1m

$Q = \frac{V}{t}$

$Qt = \pi \frac{5}{6}\left[\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3 - 1\right]$

$Qt = \pi \frac{5}{6}\left[\left(\frac{2}{5}(2.5)+1\right)^3 - 1\right]$

$Qt = 18.32$

$Q = \frac{18.32}{3600}$

$Q = 0.005088$

$\left| Q = 0.005090 \frac{m^3}{s} \right|$

$t = 1h = 3600 seg$

t_+ ?

$0.005090\, t = \pi \frac{5}{6}\left[\left(\frac{2}{5}(5)+1\right)^3 - 1\right]$

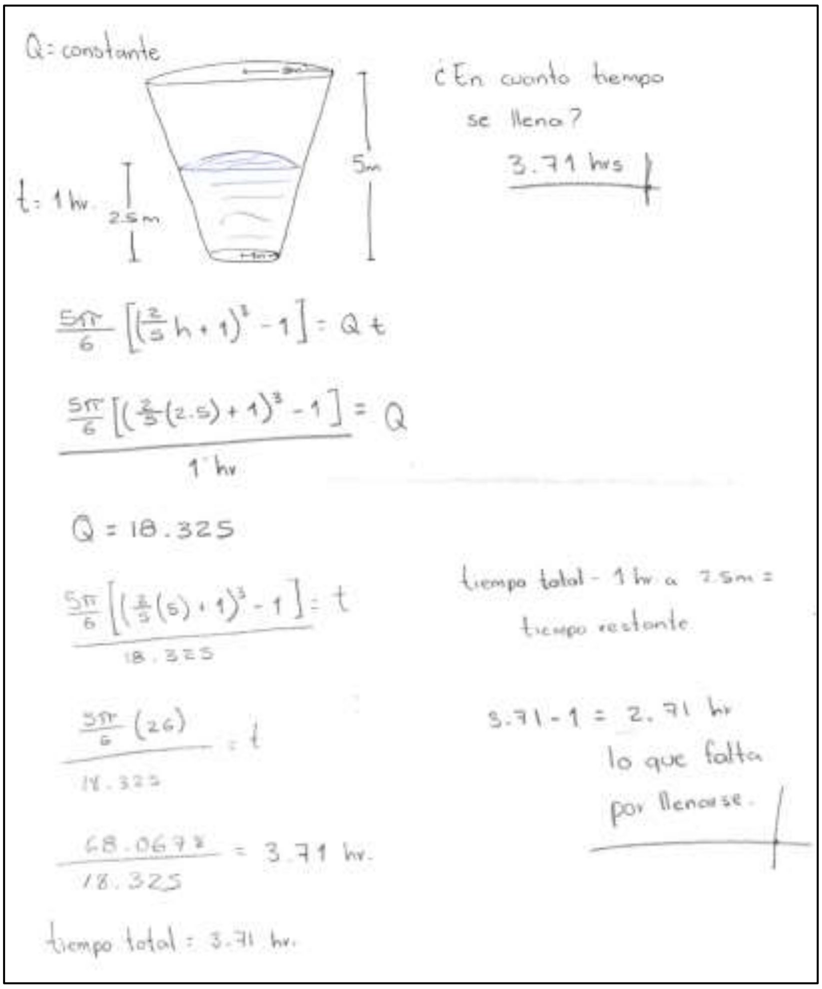
$0.005090\, t = 68.06$

$t = 13372.85674 \text{ seg} / (3600)$

$t = 3.7146\, h$

$\boxed{t_+ = 3.7146\, h}$

Respuesta 92. Actividad 3.3



Q: constante

3m

5m

t: 1 hr.

2.5 m

1m

¿En cuanto tiempo se llena?

3.71 hrs

$\frac{5\pi}{6}\left[\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3 - 1\right] = Qt$

$\frac{\frac{5\pi}{6}\left[\left(\frac{2}{5}(2.5)+1\right)^3 - 1\right]}{1 \text{ hr}} = Q$

$Q = 18.325$

$\frac{\frac{5\pi}{6}\left[\left(\frac{2}{5}(5)+1\right)^3 - 1\right]}{18.325} = t$

$\frac{\frac{5\pi}{6}(26)}{18.325} = t$

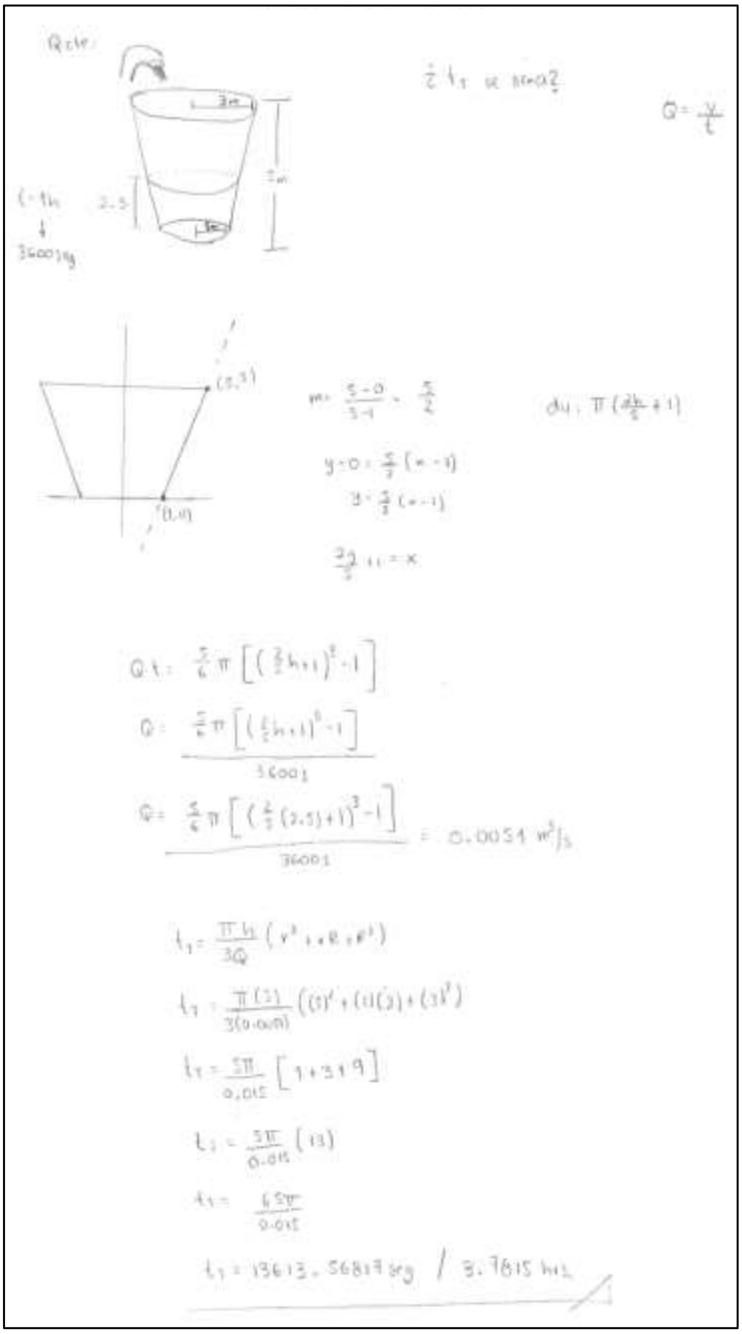
$\frac{68.0678}{18.325} = 3.71 \text{ hr.}$

tiempo total: 3.71 hr.

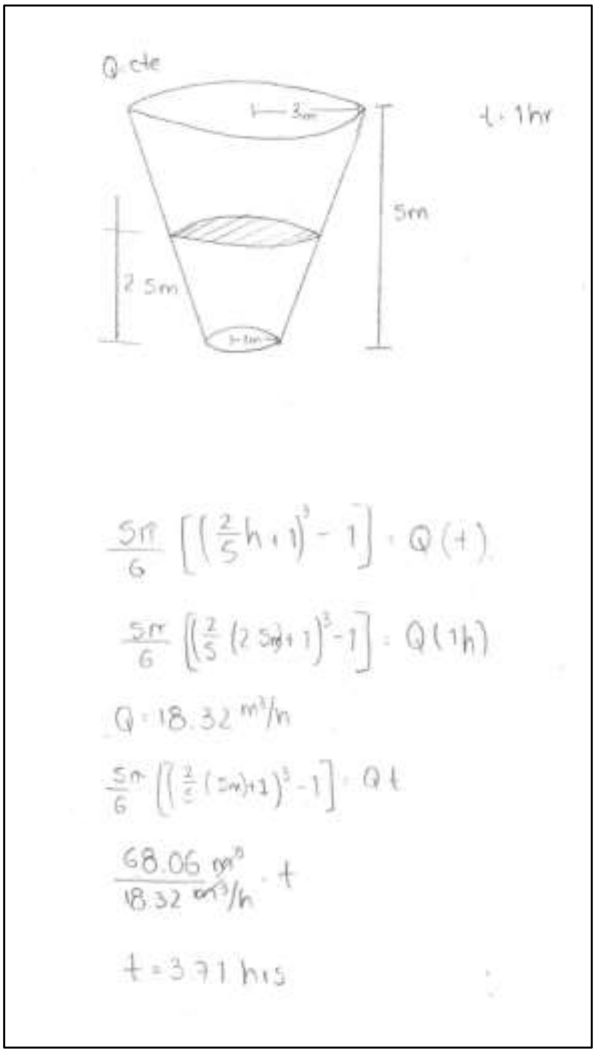
tiempo total - 1 hr a 2.5m = tiempo restante

3.71 - 1 = 2.71 hr lo que falta por llenarse.

Respuesta 91. Actividad 3.3

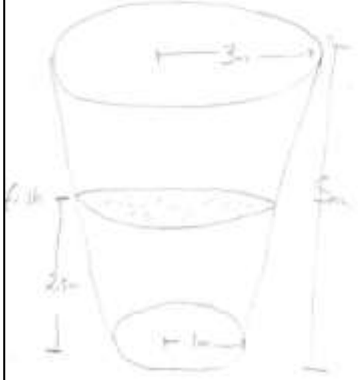


Respuesta 94. Actividad 3.3



Respuesta 93. Actividad 3.3

¿ t_T Se llena ?

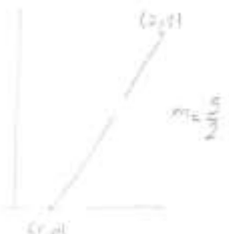


$m = \frac{5}{2}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y = \frac{5}{2}(x-1)$

$y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$



$\int_0^t Q\,dt = \int_0^h \pi \left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 dh$

$dv = \pi x^2 dh$

$h = \frac{5}{2}(x-1)$

$x = \frac{2}{5}h+1$

$dv = \pi \left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 dh \quad \ldots 1$

$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\frac{dh}{dt} \quad \ldots 2$

$Q = \pi \left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 \frac{dh}{dt} \quad \ldots 2$

$Qt = \pi \frac{5}{2} \frac{\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3}{3} \Big|_0^h$

$\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3 - 1\right] = Qt$

$Q = \left[\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3 - 1\right]\right] / t$

$Q = \left[\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}(2.5)+1\right)^3 - 1\right]\right] / 3600$

$Q = 0.00509$

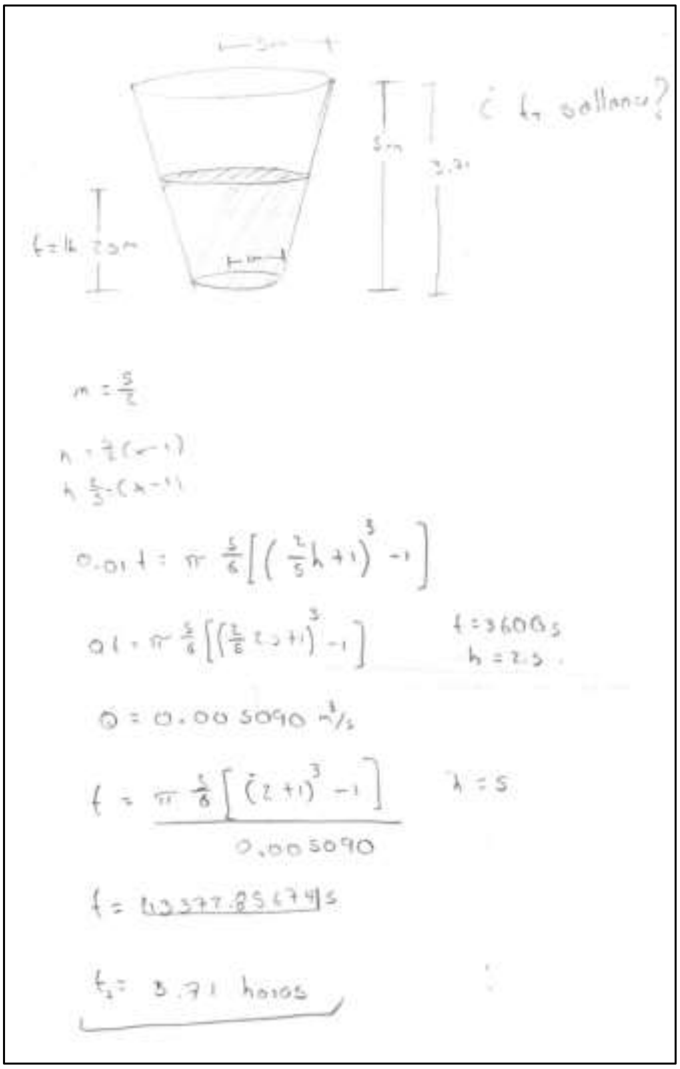
Sust.

$t = \left[\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3 - 1\right]\right] / Q$

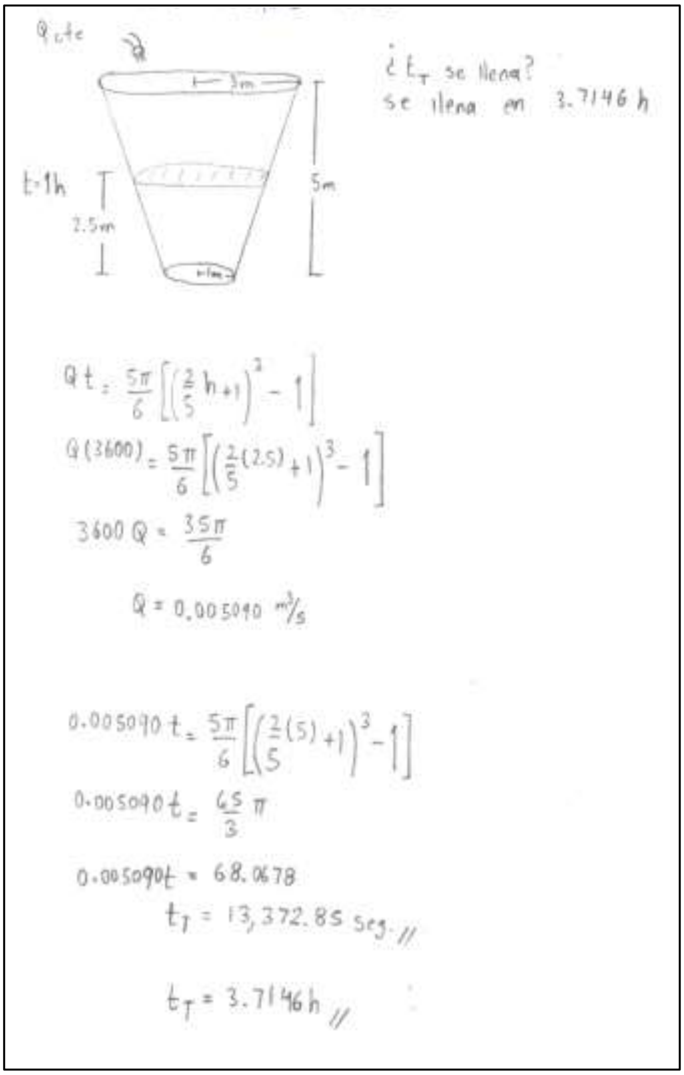
$t = 13371.47$ seg

$t = 3.7142$ hr

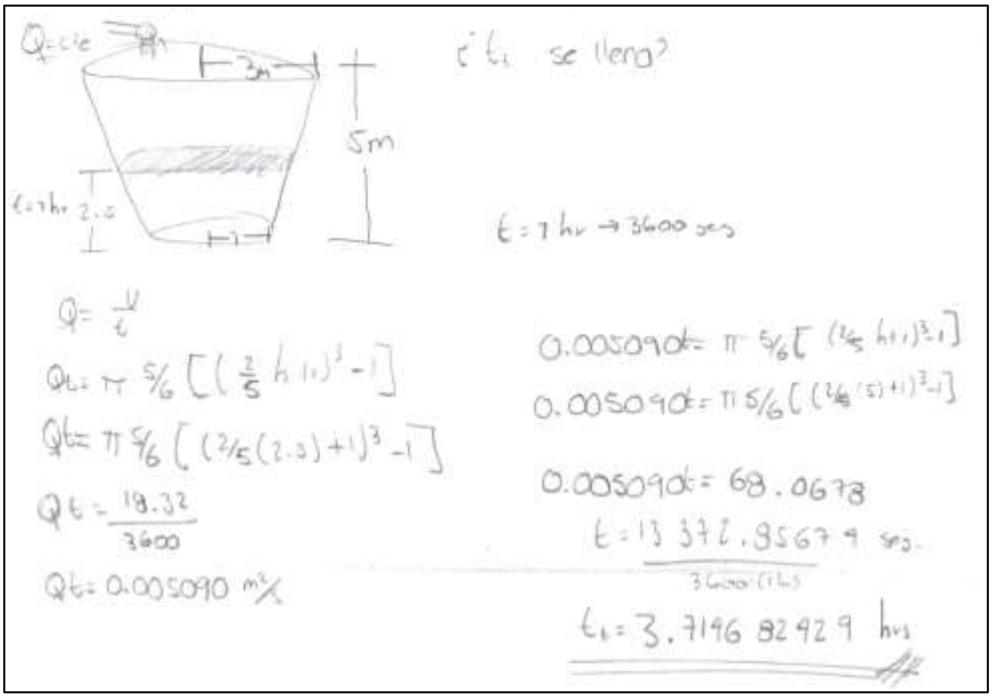
Respuesta 95. Actividad 3.3



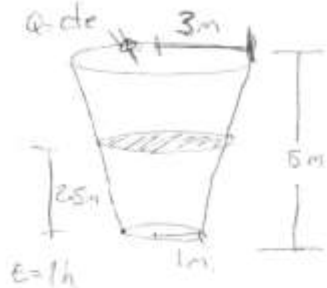
Respuesta 98. Actividad 3.3



Respuesta 97. Actividad 3.3



Respuesta 96. Actividad 3.3



$$y = \frac{5}{2}(x-1)$$

$$\frac{2}{5}h + 1 = x$$

$$dV = \pi\left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 dh$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi\left(\frac{2}{5}h+1\right)^2$$

$$Q = \pi\left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\int_0^t Q\,dt = \int \pi\left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 dh$$

$$Q\,t\Big|_0^t = \pi\,\frac{5}{2}\,\frac{\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3}{3}\Bigg|_0^h$$

$$Qt = \pi\,\frac{5}{2}\,\frac{\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3}{3} - \pi\,\frac{5}{2}\,\frac{\left(\frac{2}{5}(0)+1\right)^3}{3}$$

$$Qt = \frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3-1\right]$$

h=2.5m, t=1h.

$$Q = \frac{\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}(2.5)+1\right)^3-1\right]}{t}$$

$$Q = \frac{\frac{5}{6}\pi\left[(1+1)^3-1\right]}{3600}$$

$$Q = \frac{2.6179[7]}{3600} \therefore 5.090\times10^{-3}$$

$$t = \frac{\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3-1\right]}{Q}$$

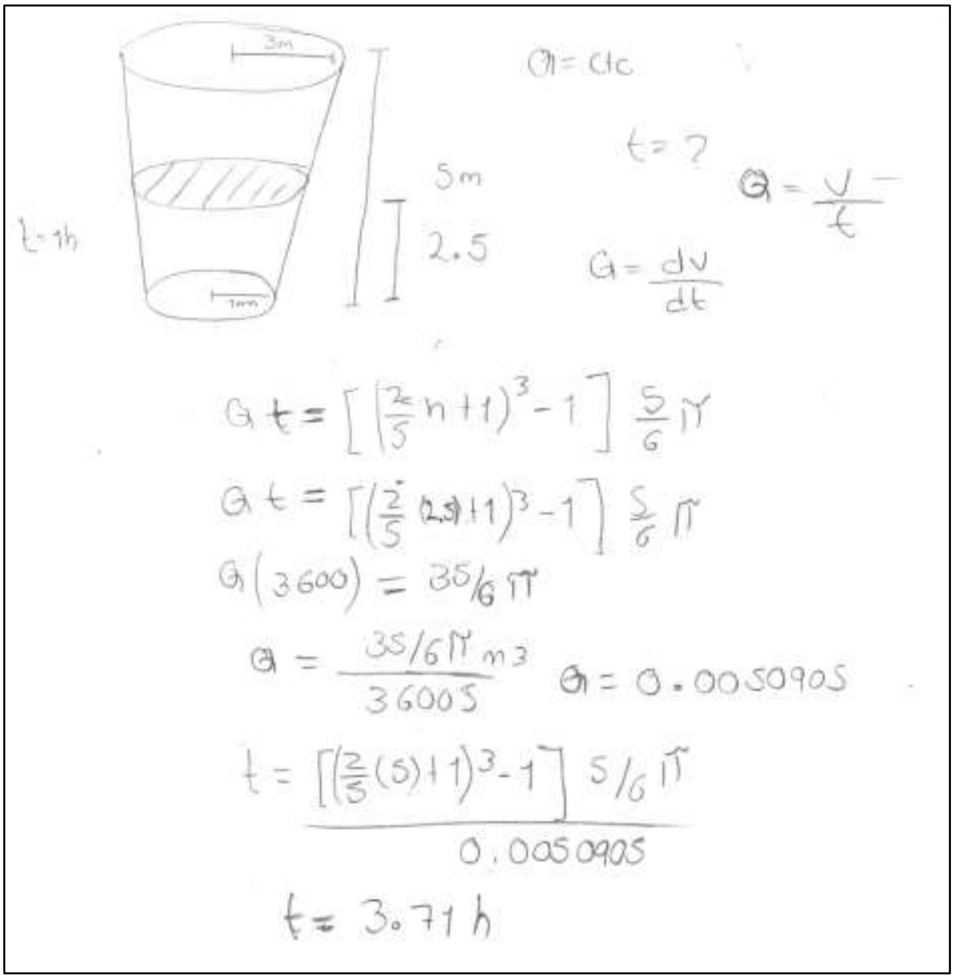
$$t = \frac{\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}(5)+1\right)^3-1\right]}{5.090\times10^{-3}}$$

$$t = \frac{2.6179[27-1]}{5.090\times10^{-3}}$$

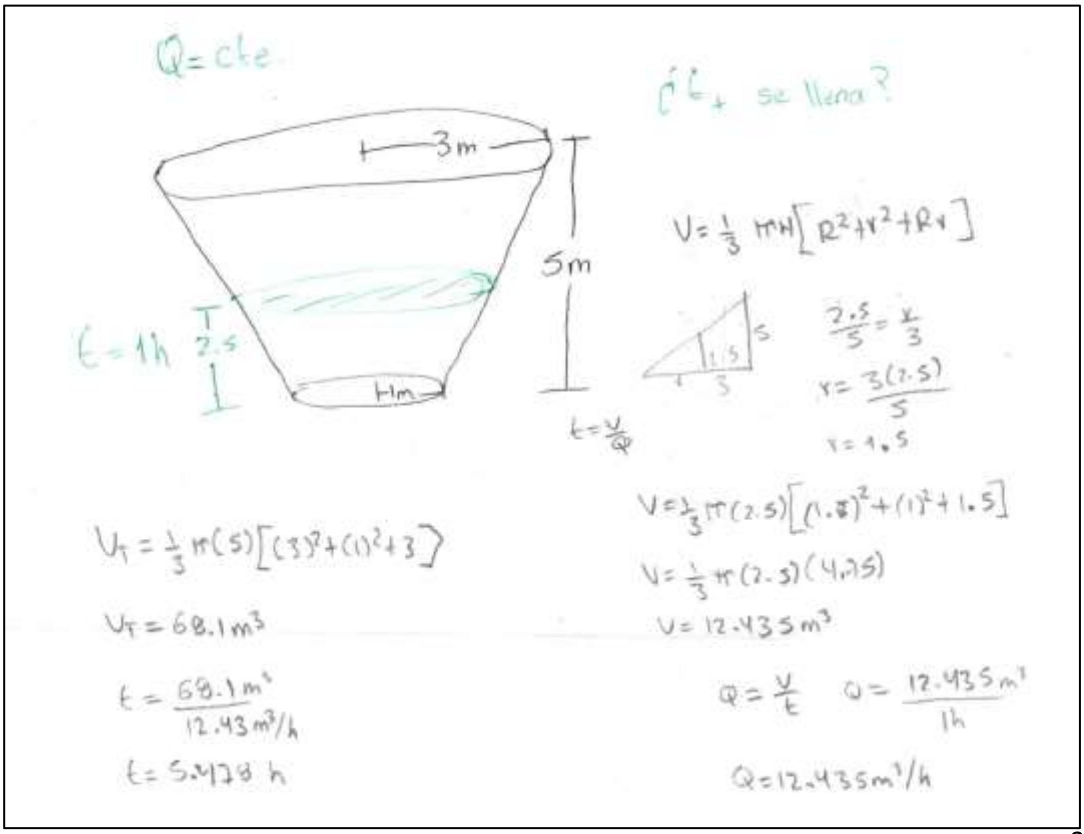
$$t = 13\,372.37 \text{ seg}$$

$$t = 3.7145 \text{ h}$$

Respuesta 99. Actividad 3.3

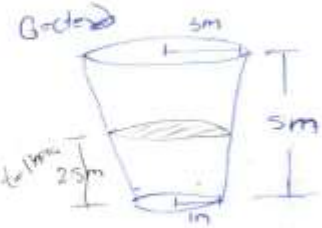


Respuesta 101. Actividad 3.3



Respuesta 100. Actividad 3.3

Gradiente



$dv = \pi(x^2)\,dh$

$dv = \pi\left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 dh$

$y - y_0 = \frac{5}{2}(x - x_0)$

$y = \frac{5}{2}(x-1)$

$x = \frac{2}{5}h + 1$

$$t = \frac{\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3 - 1\right]}{Q}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$t = \frac{\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}(5)+1\right)^3 - 1\right]}{5.09\times10^{-3}}$$

$Q = \pi\left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

$Q\,dt = \pi\left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 dh$

$$t = \frac{5/6\,\pi\,[26]}{5.09\times10^{-3}}$$

$Q\int_0^1 dt = \pi\int_0^{2.5}\left(\frac{2}{5}h+1\right)^2 dh$

$t_T = 3.7142\ h$

$Q\,t\Big|_0^1 = \pi\,\frac{5}{2}\left(\frac{\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2.5}$

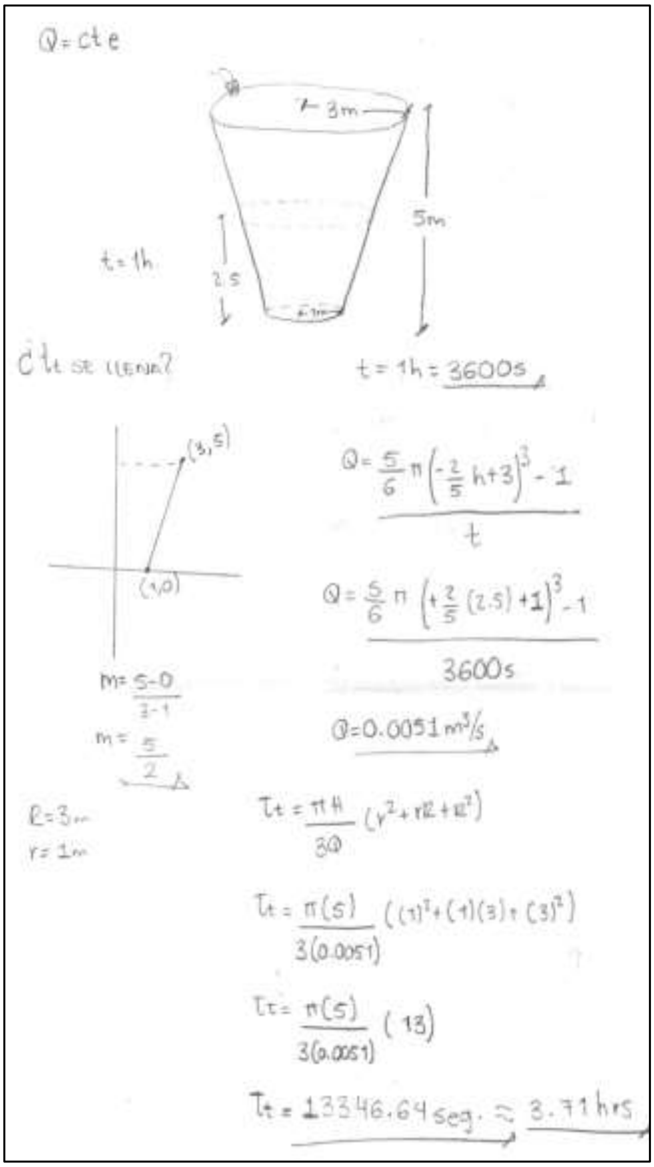
$Q(1) - Q(0) = \left[\pi\,\frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}(2.5)+1\right)^3\right] - \cancel{\left[\pi\,\frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}(0)+1\right)\right]}$

$Q(3600) = \pi\,\frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}(2.5)+1\right)^3 - 1$

$Q = \frac{2.6179(7)}{3600}$

$Q = 5.09\times10^{-3}$

Respuesta 102. Actividad 3.3



$Q = cte$

$3m$ · $5m$ · $t = 1h$ · 2.5 · $1m$

¿t_t se llena?

$t = 1h = 3600s$

$(3,5)$ · $(1,0)$

$$Q = \frac{\frac{5}{6}\pi\left(-\frac{2}{5}h+3\right)^3 - 1}{t}$$

$$Q = \frac{\frac{5}{6}\pi\left(+\frac{2}{5}(2.5)+1\right)^3 - 1}{3600s}$$

$$m = \frac{5-0}{3-1}$$

$$m = \frac{5}{2}$$

$$Q = 0.0051\, m^3/s$$

$R = 3m$

$r = 1m$

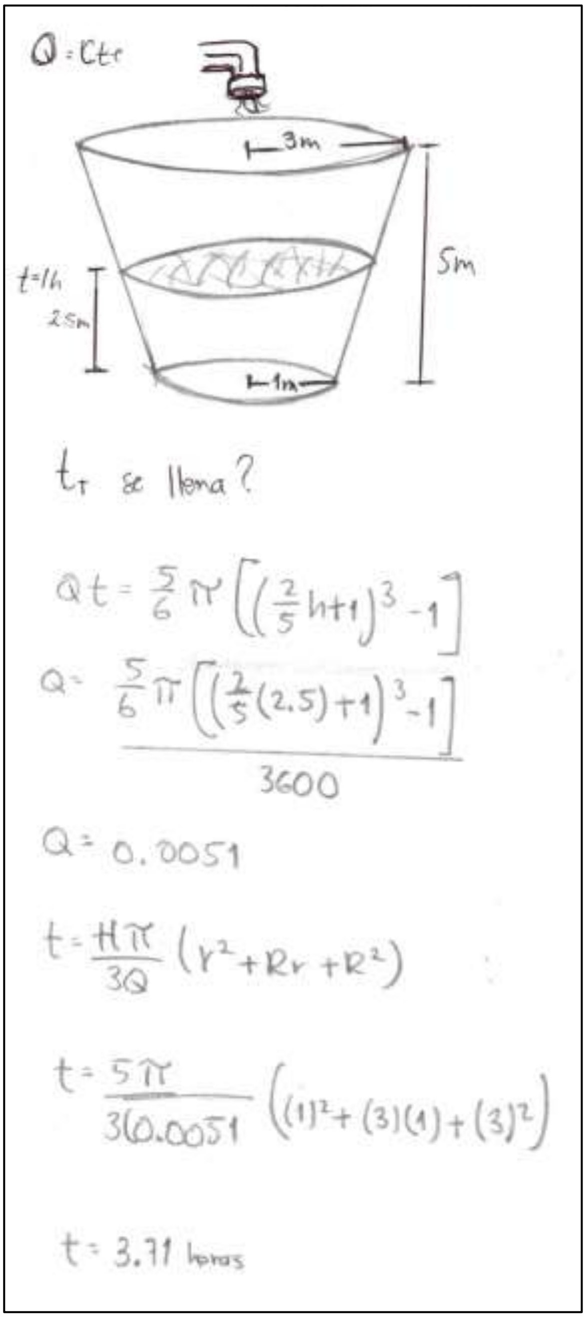
$$T_t = \frac{\pi H}{3Q}\left(r^2 + rR + R^2\right)$$

$$T_t = \frac{\pi(5)}{3(0.0051)}\left((1)^2 + (1)(3) + (3)^2\right)$$

$$T_t = \frac{\pi(5)}{3(0.0051)}(13)$$

$$T_t = 13346.64\,seg. \approx 3.71\,hrs$$

Respuesta 104. Actividad 3.3



$Q = Cte$

$3m$ · $5m$ · $t = 1h$ · $2.5m$ · $1m$

t_T se llena?

$$Qt = \frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}h+1\right)^3 - 1\right]$$

$$Q = \frac{\frac{5}{6}\pi\left[\left(\frac{2}{5}(2.5)+1\right)^3 - 1\right]}{3600}$$

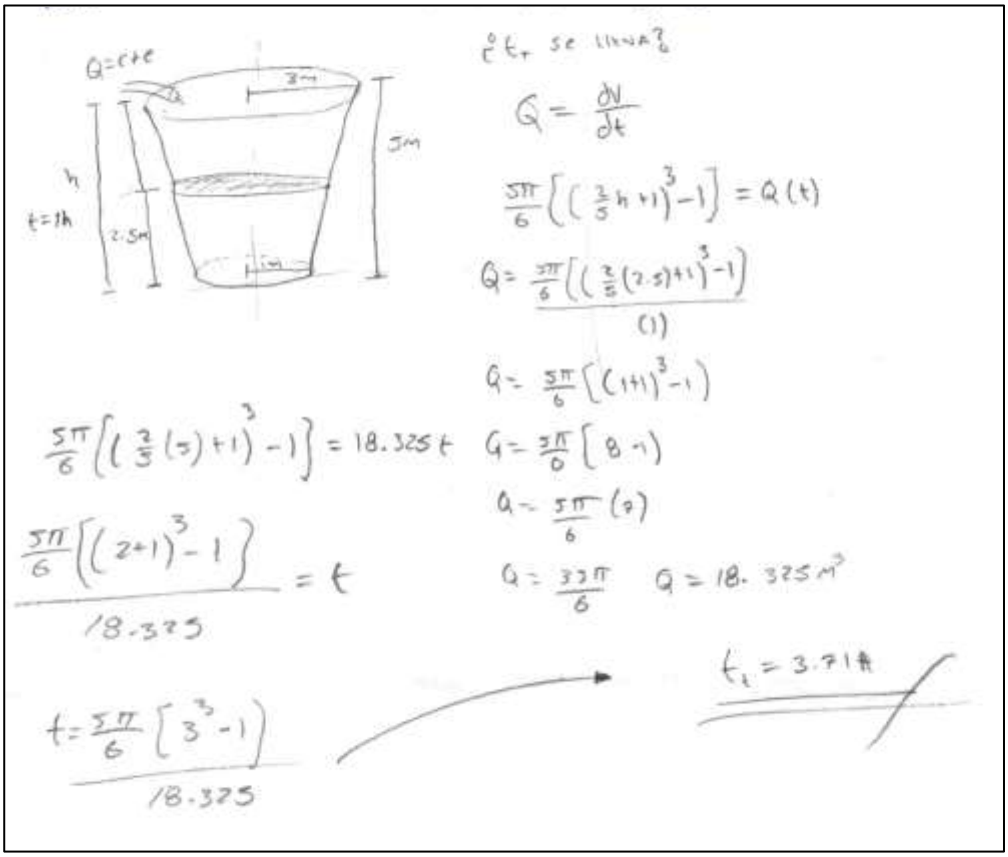
$$Q = 0.0051$$

$$t = \frac{H\pi}{3Q}\left(r^2 + Rr + R^2\right)$$

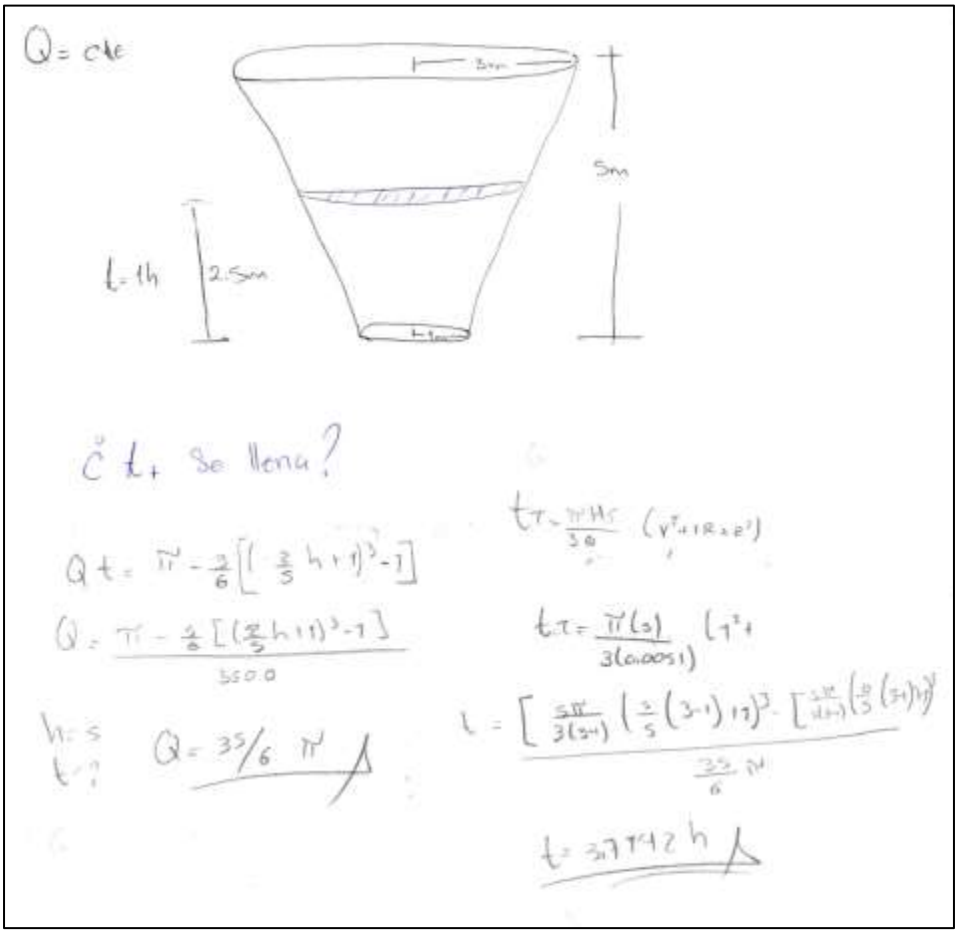
$$t = \frac{5\pi}{3(0.0051)}\left((1)^2 + (3)(1) + (3)^2\right)$$

$t = 3.71$ horas

Respuesta 103. Actividad 3.3



Respuesta 106. Actividad 3.3



Respuesta 105. Actividad 3.3