Universidad Autónoma de Chiapas

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

Sobre el Hiperespacio Producto Simétrico del Círculo

TESIS

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Lic. José Antonio Gómez Solorzano

Asesores:

Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella

Dr. Javier Sánchez Martínez

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas *Agosto de 2018*

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
03 de julio de 2018
Oficio No. FCFM/0315/18

Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella
Dr. Javier Sánchez Martínez
Presidente y Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"SOBRE EL HIPERESPACIO PRODUCTO SIMÉTRICO DEL CÍRCULO".

Ha sido aceptado para sustentar el Examen de Grado de Maestro en Ciencias Matemáticas del **Lic. José Antonio Gómez Solorzano** con matrícula escolar: C080067.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

"Por la conciencia de la necesidad de servir"

UNACH fm FÍSICA Y MATEMÁTICAS DIRECCIÓN FCFM

Dr. Sendic Estrada Jiménez

Director

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
SEJ /jmag

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por bendecir mi vida con este logro más en mi carrera.

Agradezco a mis padres, Rosalía Solorzano Martínez y Santiago Gómez Jiménez, por darme su amor y confianza, por todos sus consejos que me han guiado en la vida; por todo el esfuerzo, dedicación y paciencia para brindarme su apoyo incondicional durante toda mi formación académica y personal.

A mis hermanos por sus buenos consejos, orientaciones y por el apoyo que me han dado.

A mi amada esposa Marisa Canché y mi amada hija Hannia Marisa, mis amores. Agradezco a mi esposa Marisa por todo el amor que me ha dado, su esfuerzo y paciencia, por todo el apoyo incondicional, que ha tenido durante estos años de estudio.

A todos mis profesores de la FCFM, que fueron parte fundamental en mi carrera profesional; todos ellos han aportado parte de su conocimiento a mi formación.

A mis asesores de tesis: Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella y Dr. Javier Sánchez Martínez.

Le agradezco al Dr. Aaron por ser mi maestro y por haber aceptado dirigir y ser mi asesor de esta tesis, así como por la revisión de ésta misma y su valiosa aportación para las correcciones de este trabajo; además por sus orientaciones para mi formación académica y personal, por brindarme su confianza y amistad, por inculcarme disciplina, dedicación y responsabilidad para que yo sea mejor estudiante y mejor persona. Siempre estaré agradecido por toda la ayuda, todo el apoyo, que me dió durante la maestría y en el trabajo de tesis.

Agradezco al Dr. Javier por querer ser mi asesor y colaborar para la realización de esta tesis, así como por la revisión de ésta y su aportación para las correcciones; además por su dedicación e interés para mi formación profesiónal, por todas sus enseñanzas y por brindarme su confianza y amistad.

Al Dr. Florencio Corona Vázquez por revisar este trabajo de tesis y por su valiosa aportación para la corrección de la misma, además, por brindarme siempre su confianza y amistad.

Al Dr. Hugo Villanueva quien fué mi profesor en la maestría, por su confianza y apoyo que me ha dado y por su amistad. A los profesores Dr. Armando Mendoza, Dra. Rosario Soler, Dr. Elí Roblero a quines conozco y me han apoyado. Agradezco también al personal administrativo de la facultad, en particular, un agradecimiento especial a Carito responsable de la biblioteca.

A todos mis amigos de la facultad. En particular a mis amigos y compañeros de clases, Ángel Gil y Elda Janeth, gracias por los momentos compartidos, las risas y por sus buenos consejos, por todo el apoyo. Quiero agradecer también a mis amigos Alexander López y Claudia López, por la confianza y ayuda que me han dado.

Agradezco a todos aquellos que fueron parte fundamental para la conclusión de esta etapa de mi vida.

Introducción

Un área interesante de la matemática es la teoría de continuos e hiperespacios. Las primeras nociones del concepto de continuo fueron dadas en 1883 por G. Cantor [6]. Un continuo X es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Los hiperespacios tuvieron sus inicios aproximadamente en 1900, con los trabajos de F. Hausdorff [9] y L. Vietoris [29]. Para un continuo X, se definen los hiperespacios de X como colecciónes de subconjuntos de X que cumplen una propiedad específica; a dichos hiperespacios se les puede dotar de una métrica inducida por la métrica de X, a la que se le conoce como métrica de Hausdorff y con la cual resultan, también, ser continuos.

En este trabajo, consideraremos principalmente los hiperespacios

$$2^X = \{A \subset X : \text{A es cerrado y no vacío}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : \text{A tiene a lo más } n \text{ elementos}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Al hiperespacio $F_n(X)$ es llamado en n-ésimo producto simétrico de X y tiene su origen en el año de 1931, año en el que K. Borsuk y S. Ulam los definen en el artículo [4], en este artículo muestran que, para el caso en que $X = [0,1]$, se cumple que $F_n([0,1]) = [0,1]^n$, para cada $n = 1,2,3$ y que para cada $m \geq 4$, $F_m([0,1])$ no puede ser encajado en $\mathbb{R}^m$; además de otros resultados.

Generalmente, es difícil estudiar el hiperespacio de un continuo. Por esta razón recurrimos a modelos geométricos de hiperespaciós que son espacios equivalentes, ya conocidos, y que son homeomorfos a dicho hiperespacio y que en varias ocasiones se pueden visualizar geométricamente.

Estudiar, de manera particular, los hiperespacios $F_n(X)$ es complicado, tanto así que, en 1949, K. Borsul en su artículo [3] se equivocó en afirmar que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a $S^1 \times S^2$. En 1952, R. Bott corrige la afirmación de Borsuk y demuestra que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 [5].

Este trabajo de tesis está enfocado principalmente al estudio del hiperespacio $F_n(S^1)$ y nos basamos principalmente en [7], el cual lo hemos dividido en tres capítulos, para los cuales suponemos que el lector tiene conocimientos básicos de topología general, espacios métricos y un primer curso de topología algebraica con nociones de grupo fundamental y homología.

En el capítulo uno damos herramientas de topología algebraica, tales como el concepto de tipo de homotopía de un espacio, el grupo fundamental, la orientación de una variedad y su homología, y los espacios CW, también damos algunas palabras sobre la conjetura de Poincaré; ya que con estas herramientas se logran obtener nuestros principales objetivos.

En el capítulo dos damos el concepto de continuo y proporcionamos unos cuantos ejemplos clásicos. También definimos los hiperespacios de un continuo y nos adentramos en el concepto de los productos siméticos y mostramos que éstos son también continuos. Para finalizar este capítulo, estudiamos algunos modelos geométricos de los productos simétricos.

El capítulo tres está enfocado principalmente sobre el producto simétrico del círculo, el cual está muy relacionado con el concepto de los espacios gorro de bufón de dimensiones mayores [2]. Estudiamos propiedades interesantes de $F_n(S^1)$, tales como, que $F_n(S^1)$ es una compactificación de un cono abierto; vemos el tipo de homotopía que tiene y analizamos si es una variedad o no. En particular, como consecuencia, damos una demostración alternativa del teorema de Bott [5], que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contiene un repaso de algunos conceptos básicos de topología algebraica como lo son homotopía, espacios CW, grupo fundamental, cubrientes, homología y orientación de variedades. En la última sección damos algunas palabras sobre la conjetura de Poincaré. Hay varias literaturas incluyendo estos temas topológicos, sin embargo citamos, para el lector que quiera profundizar en estos temas, los libros [1], [8], [19],[15], [25].

1.1. Homotopía

A lo largo de esta sección, X y Y denotarán espacios topológicos; denotaremos por I al intervalo unitario $[0,1]$.

Definición 1.1.1. *Sean X y Y espacios topológicos y $f,g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Decimos que f es homotópica a g si existe una función continua*

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

tal que

$$F(x,0) = f(x) \quad y \quad F(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X.$$

La función F se llama homotopía entre f y g. Si f es homotópica a g, escribimos $f \simeq g$

Podemos pensar una homotopía como una familia uniparamétrica continua, $\{h_t\}_{t\in I}$, de funciones continuas, $h_t : X \longrightarrow Y$, para cada $t \in I$, definidas por $h_t(x) = F(x,t)$ para todo $x \in X$. Si pensamos en el parámetro t como representante del tiempo entonces la homotopía F describe una deformación continua de la función f a la función g, cuando t se mueve de 0 a 1 (Vea la figura 1.1).

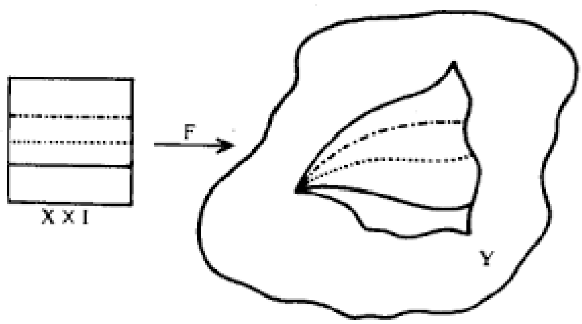


Figura 1.1: Homotopía.

Definición 1.1.2. *Decimos que una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es homotópicamente nula o nulhomotópica si ésta es homotópica a una función constante, esto es, si existe un punto $y_0 \in Y$ y una homotopía $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = y_0$ para todo $x \in X$.*

Ejemplo 1.1.3. *Toda función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es nulhomotópica: considere la homotopía $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $(x,t) \mapsto (1-t)f(x)$.*

La definición anterior puede hacerse un poco más general.

Definición 1.1.4. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio y sean $f,g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas tales que $f(a) = g(a)$ para toda $a \in A$. Decimos que f es homotópica a g relativo a A, y lo denotamos por $f \simeq g$ rel A, si existe una homotopía entre f y g tal que $f(a) = F(a,t) = g(a)$ para toda $a \in A$ y todo $t \in I$.*

Notamos que si $A = \emptyset$ entonces $f \simeq g$ rel $\emptyset$ es lo mismo que $f \simeq g$. Si dos funciones son homotópicas relativas a A entonces son homotópicas.

Proposición 1.1.5. *La relación $\simeq$ (reapectivamente $\simeq$ rel A) es una relación de equivalencia.*

Demostración. Que $f \simeq f$ es claro, basta tomar $F(x,t) = f(x)$ para todo $x \in X$ y $t \in I$.

Si $f \simeq g$ y F es una homotopía de f a g entonces $G : X \times I \longrightarrow Y$ definida por $G(x,t) = F(x,1-t)$ para todo $x \in X$, $t \in I$, es una homotopía de g a f, es decir, $g \simeq f$.

Si $f \simeq g$ con homotopía F y $g \simeq h$ con homotopía G entonces podemos tener $H : X \times I \longrightarrow Y$ definida por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es fácil verificar que H está bien definida y es continua. Por lo tanto, H es una homotopía de f a h, es decir, $f \simeq h$. $\square$

La homotopía se preserva bajo composiciones, de modo explicito se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.6. *Sean $h : W \longrightarrow X$ y $k : Y \longrightarrow Z$ funciones continuas entre espacios topológicos. Si $f \simeq g : X \longrightarrow Y$ entonces $f \circ h \simeq g \circ h$ y $k \circ f \simeq k \circ g$.*

Para ilustrar la definición de homotopía damos algunos ejemplo, a continuación.

Ejemplo 1.1.7.

- *Dadas las funciones continuas $id_{\mathbb{R}}, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = x^2$, la función continua $F : \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $(x,t) \mapsto (1-t)x + tx^2$, es una homotopía con la cual $f \simeq id_{\mathbb{R}}$.*

- *Sea $A \subset X$ un subespacio y C un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Sean $f, g : X \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^n$ funciones continuas tales que $f|_A = g|_A$. Se tiene entonces que $f \simeq$ rel A, ya que la función continua $F : X \times I \longrightarrow C$ definida por*

  $$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

  es una homotopía relativa a A de f a g.

  Observe que si $A = \emptyset$ entonces se tiene que $f \simeq g$. Esto es, cualesquiera dos funciones continuas con imágenes en un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ son homotópicas.

- *La función identidad $S^1 \longrightarrow S^1$ y la función continua $S^1 \longrightarrow S^1$ dado por $z \mapsto z^2$ no son homotópicas. Mas aún, se sabe que ninguna de las funciones continuas $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, son homotópicas una de la otra. Véase [8, sección 2.2].*

- *La funcion identidad $id : S^1 \longrightarrow S^1$ no es homotópicamente nula.*

- *La función inclusión $i : S^1 \longrightarrow S^2$ es homotópicamente nula. Más aún, cualquier función continua $S^1 \longrightarrow S^2$ es homotópicamente nula.*

- *Dada la función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, definida por $f(s) = (cos(2\pi s), sen(2\pi s))$, la función $F : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, dada por $F(s,t) = (cos(2\pi st), sen(2\pi st))$ es una homotopía entre la función constante igual a $(1,0)$ y f, esto es, f es homotópicamente nula.*

Definición 1.1.8. *Una fución continua $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si existe una función continua $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$. La función $g : Y \longrightarrow X$ se llama inversa homotópica de f.*

Se dice que X y Y tienen el mismo tipo de homotopía, o son homotópicamente equivalentes, si existe una equivalencia homotópica $f : X \longrightarrow Y$. En este caso, denotaremos por $X \simeq Y$ si X y Y son del mismo tipo de homotopía.

Proposición 1.1.9. *La relación $\simeq$ de equivalencia homotópica es una relación de equivalencia.*

Se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Proposición 1.1.10. *Si X y Y son homeomorfos entonces tienen el mismo tipo de homotopía.*

El recíproco de la proposición anterior no es cierto, como se ve en el ejemplo 1.1.21.

Definición 1.1.11. *Un espacio topológico X es contráctil si existe un punto $c_0 \in X$ y una homotopía $C : X \times I \longrightarrow X$ tal que $C(x,0) = x$ y $C(x,1) = c_0$ para todo $x \in X$. En este caso, la homotopía C se llama contracción.*

Evidentemente se tienen las siguientes equivalencias:

Proposición 1.1.12.

a) *Un espacio topológico es contráctil si y solo si la función identidad id_X en X es nulhomotópica.*

b) *Un espacio topológico X es contrátil si y solo si X tiene el mismo tipo de homotopía que un punto en X.*

Proposición 1.1.13. *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas y Y contráctil. se tiene entonces que $f \simeq g$.*

Demostración. Como $id_Y \simeq c : Y \longrightarrow Y$ para algún $c \in Y$, se tiene entonces que $f = id_Y \circ f \simeq c \simeq id_Y \circ g = g$. □

Corolario 1.1.14. *Toda función continua $f : X \longrightarrow Y$ con Y contráctil es una equivalencia homotópica. Consecuentemente, cualesquiera dos espacios contráctiles son del mismo tipo de homotopía.*

Ejemplo 1.1.15.

- *Los conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ son contráctiles.*

- *$\mathbb{R}^n$ es contráctil.*
- *S^n no es contráctil; sin embargo, $S^n - \{x\}$ es contráctil.*

Definición 1.1.16. *Sea $A \subset X$ un subespacio. Una retracción de X en A es una función continua $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A = id_A$, esto es, $r(a) = a$ para toda $a \in A$. Decimos que A es un retracto de X si existe una retracción de X sobre A.*

Ejemplo 1.1.17. *Sea $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ y $A = S^{n-1} \subset X$, se tiene que $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ dado por $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ es una retracción.*

Definición 1.1.18. *Sea $A \subset X$ un subespacio. Una retracción por deformación de X sobre A es una homotopía $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$H(x,0) = x \quad y \quad H(x,1) \in A,$$

para todo $x \in X$.

Decimos que A es un retracto por deformación de X si existe una retracción por deformación de X sobre A.

Definición 1.1.19. *Sea $A \subset X$ un subespacio. Una retracción por deformación fuerte de X sobre A es una homotopía $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$H(x,0) = x \quad y \quad H(x,1) \in A \ \ \forall x \in X, \quad y \text{ además}, \quad H(a,t) = a \ \ \forall a \in A, \forall t \in I.$$

Decimos que A es un retracto por deformación fuerte de X si existe una retracción por deformación fuerte de X sobre A.

De la definición se deduce la siguiente proposición.

Proposición 1.1.20. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio. Si A es retracto por deformación de X entonces A tiene el mismo tipo de homotopía que X.*

Ejemplo 1.1.21. *La banda de Moebius y S^1 tienen el mismo tipo de homotopía, ya que S^1 es retracto por deformación de la banda de Moebius; pero no son homeomorfos, como se ve en la figura 1.2.*

Ejemplo 1.1.22. *Para cualquier $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es un retracto de X para todo espacio topológico X, pero será por deformación si y solo si X es contráctil, por ejemplo los espacios convexos de $\mathbb{R}^n$.*

Notemos que $\{x\}$ es un retracto por deformación fuerte cuando X se puede deformar a un punto mateniéndolo fijo durante toda la transformación.

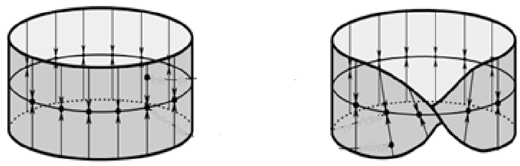


Figura 1.2: Tipo de homotopía de la banda de Moebius.

Observación 1.1.23. *Se verifica que (retracto por deformación fuerte) $\Rightarrow$ (retracto por deformación) $\Rightarrow$ (retracto), pero los recíprocos no son ciertos, como lo muestran los siguientes contraejemplos.*

Ejemplo 1.1.24. *Dado un espacio X no contráctil y $p \in X$, $\{p\}$ es un retracto de X, pero no por deformación.*

Ejemplo 1.1.25. *El Peine es el siguiente espacio ilustrado en la figura 1.3*

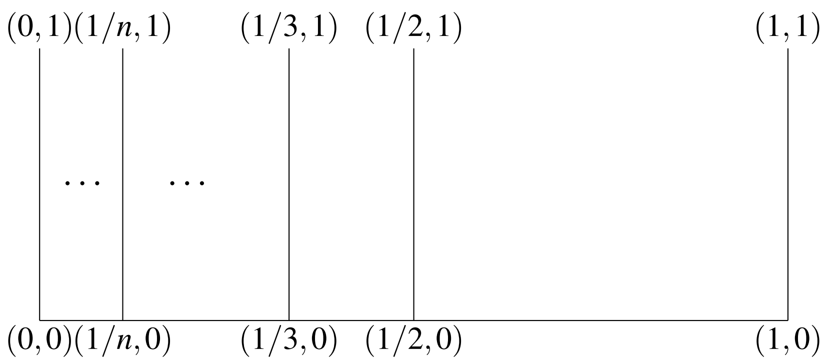


Figura 1.3: Peine.

y está definido como el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = 0, \frac{1}{n} \;\; n \in \mathbb{N} \;\; o \;\; y = 0, 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

Si consideramos la función $H : P \times I \longrightarrow P$ definido por

$$H((x,y),t) = \begin{cases} (x,(1-2t)y), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ ((2-2t)x,0), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

resulta ser una homotopía entre id_P y la función constante $(0,0)$, y por lo tanto P es un espacio contráctil. Más aún, $\{(0,0)\}$ es un retracto por deformación fuerte de P, ya que $(0,0)$ permanece fijo durante toda la deformación. Sin embargo, $\{(0,1)\}$ es un retracto por deformación de P que no es fuerte.

1.2. Espacios *CW*

En esta sección damos nociones básicas de espacios CW, para más información sobre éste tema el lector puede consultar los libros de [8], [1], [26].

Llamaremos n-disco al conjunto $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n :\| x \| \geq 1\}$ y sea $int(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n :\| x \| < 1\}$.

Definición 1.2.1. *Sea $D^n \subset \mathbb{R}^n$ el n-disco. Una n-celda e^n es un espacio homeomorfo a $int(D^n)$. En tal caso, a n se llama dimensión de e^n.*

Ejemplo 1.2.2. *$\mathbb{R}^n$ es una n-celda, ya que se tiene un homeomorfismo $int(D^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x/(1- \| x \|)$.*

Definición 1.2.3. *Un espacio topológico X tiene una filtración por celdas si existe una familia $\mathscr{X}$ de subespacios de X tales que*

- *cada $e^n \in \mathscr{X}$ es una n-celda,*
- *X es unión disjunta de los elementos de $\mathscr{X}$.*

Definición 1.2.4. *Si X tiene una filtración por celdas $\mathscr{X}$, al subespacio de X denotado y definido por*

$$X^n := \bigcup \{e^m \in \mathscr{X} : dim(e^m) \leq n\}$$

se le llama el n-esqueleto de X. Por convención, $X^{-1} = \emptyset$.

Nota 1.2.5. *Observe que se tiene*

$$\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^{n-1} \subset X^n \subset \cdots \subset X$$

y que $\bigcup_n X^n = X$.

Ejemplo 1.2.6. *La esfera S^n tiene una filtración por celdas: hay una 0-celda e^0, que puede ser el polo norte $(0,0,...,1)$, y una n-celda $S^n - e^0 = \mathbb{R}^n = e^n$. Así, $\mathscr{X} = \{e^0, e^n\}$.*

Definición 1.2.7. *Sea X un espacio topológico con filtración por celdas $\mathscr{X}$ y $e^n \in \mathscr{X}$ una n-celda de X. Una función continua $F : D^n \longrightarrow X$ se dice función característica de e^n si:*

- *$F|_{int(D^n)}$ es un homeomorfismo entre $int(D^n)$ y e^n.*
- *$F(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$.*

A la función $F|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ se le llama función de pegado de e^n.

Ejemplo 1.2.8. *S^n con la filtración $\mathscr{X} = \{e^0, e^n\}$ descrito en el ejemplo anterior, la función característica $F : D^n \longrightarrow S^n$ puede tomarse como la función cociente que identifica la frontera $S^{n-1} \subset D^{n-1}$ al punto e^0.*

Lema 1.2.9. *Suponga que X es una espacio con filtración por celdas $\mathscr{X}$ y X es de Hausdorff. Para una función característica $F : D^n \longrightarrow X$ de una n-celda $e^n \in \mathscr{X}$ se tiene que $Cl_X(e^n) = F(D^n)$ y $fr(e^n) := Cl_X(e^n) - e^n = F(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$.*

Demostración. Tenemos que $e^n = F(int(D^n))$. Por la continuidad de F tenemos que

$$F(D^n) = F(Cl_X(int(D^n))) \subset Cl_X(F(int(D^n))) = Cl_X(e^n),$$

es decir, $F(D^n) \subset Cl_X(e^n)$. Para la otra contensión, como D^n es compacto, entonces $F(D^n)$ es compacto y como X es de Hausdorff se tiene que $F(D^n)$ es cerrado. Luego, $e^n = F(int(D^n)) \subset F(D^n)$, así, $Cl_X(e^n) \subset Cl_X(F(D^n)) = F(D^n)$. Por lo tanto, $e^n = F(D^n)$.

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} fr(e^n) = Cl_X(e^n) - e^n &= F(D^n) - F(int(D^n)) \\ &= F(S^{n-1} \cup int(D^{n-1}) - F(int(D^n)) \\ &\subset F(S^{n-1}) \cup F(int(D^n) - F(int(D^n)) \\ &= F(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Así, $fr(e^n) \subset F(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$. Recordemos que X es unión disjunta de las celdas de $\mathscr{X}$, así, $\emptyset = X^{n-1} \cap e^n \supset F(S^{n-1}) \cap e^n$, entonces $F(S^{n-1}) \cap e^n = \emptyset$, así, $F(S^{n-1}) \subset X - e^n$; como $F(S^{n-1}) \subset F(D^n) = Cl_X(e^n)$, entonces $F(S^{n-1}) \subset Cl_X(e^n) - e^n = fr(e^n)$. Por lo tanto, $fr(e^n) = F(S^{n-1})$. $\square$

Corolario 1.2.10. *Sea X un espacio de Hausdorff con filtración por celdas $\mathscr{X}$ y $F : D^n \longrightarrow X$ función característica de $e^n \in \mathscr{X}$. Se tiene que $Cl_X(e^n)$ y $fr(e^n)$ son compactos y $F : D^n \longrightarrow Cl_X(e^n)$ es una función cociente.*

Demostración. Por el lema anterior se tiene $Cl_X(e^n) = F(D^n)$ y $fr(e^n) = F(S^{n-1})$, los cuales son compactos. Por último, observamos que $F : D^n \longrightarrow Cl_X(e^n)$ es suprayectiva por el lema anterior, y es cerrada, pues si $K \subset D^n$ es cerrado entonces K es compacto, así $F(K)$ es compacto, luego por ser X Hausdorff, $F(K)$ es cerrado. $\square$

Ahora podemos definir los espacios CW-complejos, el cual fueron introducidos por J. H. C. Whitehead en 1994 [30].

Definición 1.2.11. *Un espacio CW-complejo, o simplemente espacio CW, es un espacio Hausdorff X con filtración por celdas $\mathscr{X}$ tal que:*

F) *Cada n-celda $e^n \in \mathscr{X}$ posee una función característica $F_{e^n} : D^n \longrightarrow X$.*

C) *$\mathscr{X}$ tiene la propiedad de clausura finita; esto es, para cada $e^n \in \mathscr{X}$ se tiene que $Cl_X(e^n)$ solo intersecta a un número finito de celdas de $\mathscr{X}$ en X.*

W) *X tiene la topología débil inducida por $\mathscr{X}$; esto es, un subconjunto $A \subset X$ es cerrado en X si y solo si $A \cap Cl_X(e^n)$ es cerrado en $Cl_X(e^n)$ para cada $e^n \in \mathscr{X}$.*

Definición 1.2.12. *Diremos que un espacio $CW-$complejo, X, es:*

- *finito si $|\mathscr{X}| < \infty$; es infinito en caso contrario;*
- *de dimensión n si existe n tal que $X = X^n$. De dimensión infinita en caso contrario.*

El siguiente lema es claro.

Lema 1.2.13. *Si X es espacio CW- complejo finito entonces $dimX = n < \infty$.*

El regreso del lema anterior es falso como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.14. *Sea $X = \mathbb{R}$. Sea $\mathscr{X} = \mathbb{Z} \cup \{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ una filtración por celdas para $\mathbb{R}$. Considerando funciones características $F : [-1, 1] = D^1 \longrightarrow [n, n+1]$. Se tiene que $\mathbb{R} = (\mathbb{R})^1$, así $dim\mathbb{R} = 1$, pero $|\mathscr{X}| = \infty$.*

Para un complejo CW finito en automático se satisfacen las condiciones $C)$ y $W)$. Acontinuación, veamos algunos ejemplos de espacios CW-complejos.

Ejemplo 1.2.15. *S^n es un espacio CW-complejo; pues sabemos que S^n es un espacio con filtración por celdas $\mathscr{X} = \{e^0, e^n\}$, la función característica es, $F : D^n \longrightarrow S^n$, identificación de la frontera de D^n a un punto, aquí el punto es e^0. Otra manera de ver a la esfera S^n con una estructura de espacio CW- complejo es tomando una filtración por celdas dada como sigue: dos 0-celdas (los polos), dos 1-celdas, dos 2-celdas,..., dos $n-1$-celdas, dos $n-$celdas. Las funciones características son identificación de las fronteras de los hemisferios superior e inferior al ecuador de la esfera, véase [26].*

Ejemplo 1.2.16. *Espacios proyectivos, ver [26].*

El espacio proyectivo real de dimensión n es el espacio cociente $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - 0)/\sim$, donde la relación de equivalencia $\sim$ está definido como sigue: dados $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - 0$,

$$x \sim y \iff \text{existe } \lambda \in \mathbb{R} - 0 \text{ tal que } x = \lambda y.$$

Intuitivamente, $\mathbb{RP}^n$ es el conjunto de lineas rectas que pasan en le origen 0 en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Si $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - 0$*, denotamos por* $[x] = [x_1, ..., x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n$ *su clase de equivalencia en* $\mathbb{RP}^n$*.*

En $\mathbb{RP}^n$ *consideramos la topología cociente, que hace de la proyección natural al cociente* $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} - 0 \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ *una identificación o función cociente (es la topología más grande en* $\mathbb{RP}^n$ *que hace continua a* Π*). Se tiene que* Π *es sobreyectiva.*

Para cualquier punto $[x_1, ..., x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n$*, podemos elegir* $\alpha \in \mathbb{R} - 0$ *y* $(y_1, ..., y_{n+1}) \in [x_1, ..., x_{n+1}]$ *tal que satisface*

$$y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2 = 1.$$

Así, $(y_1, ..., y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - 0$ *es un punto de* S^n *en* $\mathbb{R}^{n+1}$ *y además* $[y_1, ..., y_{n+1}] = [x_1, ..., x_{n+1}]$*. Por lo tanto, la función*

$$\begin{array}{ccc} \pi : S^n & \longrightarrow & \mathbb{RP}^n \\ (y_1, ..., y_{n+1}) & \mapsto & [y_1, ..., y_{n+1}] \end{array}$$

es continua, pues es restricción de Π*, y es sobreyectiva, ya que dado cualquier punto* $[x_1, ..., x_{n+1}]$ *este está asignado por el punto* $(y_1, ..., y_{n+1})$ *de* S^n*. Se tiene así que* $\pi(S^n) = \mathbb{RP}^n$ *es compacto. La función* π *es una identificación o función cociente. Viene de la relación de equivalencia en* S^n *que identifica antípodas, esto es,* $\mathbb{RP}^n$ *es el espacio cociente que se obtiene de* S^n *identificando antípodas.*

El espacio $\mathbb{RP}^n$ *es un espacio de Hausdorff, pues sean* $u, v \in \mathbb{RP}^n$ *con* $u \neq v$*; así, existen* $x, y \in S^n$ *tales que* $\pi^{-1}[u] = \{x, -x\}$ *y* $\pi^{-1}[v] = \{y, -y\}$*. Sea* $\varepsilon = \frac{1}{3} min\{\| x - y \|, \| x + y \|\}$ *y sean*

$$U = B(x, \varepsilon) \cap S^n,$$
$$V = B(y, \varepsilon) \cap S^n;$$

donde $B(x, \varepsilon), B(y, \varepsilon)$ *son bolas abiertas en* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Se tiene así que* $U, V, -U, -V$ *son vecindades abiertas disjuntas a pares de* $x, y, -x, -y$*, respectivamente, en* S^n*. Por otra parte, se tiene que* $\pi^{-1}(\pi(U)) = -U \cup U$ *y* $\pi^{-1}(\pi(V)) = -V \cup V$*. Por lo tanto,* $\pi(U)$ *y* $\pi(V)$ *son vecindades abiertas de u y v, respectivamente, en* $\mathbb{RP}^n$*.*

Como $\mathbb{RP}^n$ *se obtiene de* S^n *identificando antípodas, así, podemos identificar a* $D^n_{\geq 0}$ *(el hemisferio superior) en su frontera* $fr(D^n_{\geq 0}) = S^{n-1}$ *por antípodas. Observamos que* S^{n-1} *identificado por antípodas es* $\mathbb{RP}^{n-1}$*. Así,* $\mathbb{RP}^n = \mathbb{RP}^{n-1} \cup (int(D^n_{>0}))$*. Consideramos* $e^n = D^n_{>0}$*. Puede verse la función cociente,* $F : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$*, como función de pegado para obtener una función característica* $F : D^n \longrightarrow D^n_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ *y* $\mathbb{RP}^n = \mathbb{RP}^{n-1} \cup e^n$*. Inductivamente se tiene que*

$$\mathbb{RP}^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^{n-1} \cup e^n$$

y así, $\mathbb{RP}^n$ *es espacio CW.*

En la práctica es útil pensar que un espacio CW-complejo se construye inductivamente pegando celdas mediante el siguiente proceso [8]:

(1) Se empieza con un conjunto discreto de puntos X^0, cuyos puntos se consideran como las 0-celdas.

(2) Inductivamente, se forma el n-esqueleto X^n del X^{n-1} pegando n-celdas e^n_α mediante la función de pegado $F_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$. Esto significa que X^n es el espacio cociente de la unión disjunta $X^{n-1} \sqcup \sqcup_\alpha D^n_\alpha / \sim$ de X^{n-1} con una colección de n-discos D^n_α bajo las identificaciónes $x \sim F_\alpha(x)$ para cada $x \in fr(D^n_\alpha) = S^{n-1}$. Así, como conjunto se tiene $X^n = X^{n-1} \sqcup \sqcup_\alpha e^n_\alpha$ donde cada e^n_α es un n-disco abierto.

(3) Podemos parar este proceso inductivo en un número finito de pasos, obteniendo $X = X^n$ para algún $n < \infty$, o podemos continuar indefinidamente, obteniendo $X = \cup_n X^n$. En el último caso, X es dotado con la topología débil, esto es, un conjunto $A \subset X$ es abierto (o cerrado) si y solo si $A \cap X^n$ es abierto o cerrado en X^n para cada n.

Lema 1.2.17. *Sea X un espacio CW-complejo y sea $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ finito y $X' = \bigcup_{e^n \in \mathscr{X}'} e^n$. Se tiene que X' es espacio CW-complejo si y solo si $X' \subset X$ es cerrado en X.*

Demostración. Sea $F : D^n \longrightarrow X'$ función característica de $e^n \in \mathscr{X}'$, se tiene entonces $\overline{e^n} = F(D^n) \subset X'$, así

$$\bigcup_{e \in \mathscr{X}'} \overline{e} \subset X' = \bigcup_{e \in \mathscr{X}'} e$$

y así $X' = \cup_{e \in \mathscr{X}'} \overline{e}$ es cerrado en $\overline{e}$, por la propiedad W), se tiene que X' es cerrado en X.

Recíprocamente, si X' es cerrado en X, para cada $e^n \in \mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ existen funciones características $F : D^n \longrightarrow X$. Tenemos que $\overline{e^n} = F(D^n) \subset X$, $e^n = F(intD^n) \subset X'$, se tiene entonces $\overline{e^n} \subset \overline{X}' = X'$, así $F(D^n) \subset X'$, entonces definimos $F : D^n \longrightarrow X'$ por restricción. □

Definición 1.2.18.

- *Sea $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ y $X' = \cup_{e^n \in \mathscr{X}'} e^n$. Decimos que X' es subespacio CW de X si es espacio CW con las funciones características que hereda de X.*

- *Una pareja CW es un par (X, A) donde X es un espacio CW y A es subespacio CW de X.*

1.3. Propiedades de homotopía de espacios *CW*

Definición 1.3.1. *Diremos que la pareja (X,A) tiene la propiedad de extensión de homotopía si para cada espacio topológico Y, cada función continua $f : X \longrightarrow Y$ y cada homotopía $H : A \times I \longrightarrow Y$ tal que $H_0 = f|_A$ existe una homotopía $\widehat{H} : X \times I \longrightarrow Y$ que extiende a H y empieza en f, esto es, $\widehat{H}(a,t) = H(a,t)$ para todo $a \in A$ y $t \in I$, y además $\widehat{H}_0 = f$.*

$$\begin{tikzcd}
 & X \times I \arrow[r, dashed, "\widehat{H}"] & Y \\
X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[ur, hook] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.3.2. *[1, teorema 4.1.7] Sea $A \subset X$ un cerrado de un espacio topológico X. Se tiene que (X,A) tiene la propiedad de extensión de homotopía si y solo si $X \times \{0\} \cup A \times I$ es retracto de $X \times I$*

Demostración. Si (X,A) tiene la propiedad de extensión de homotopía entonces la función continua $f : X \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ dada por $f(x) = (x,0)$ y la función continua $H : A \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ dado por $H(a,t) = (a,t)$, juntas determinan una función continua $r = \widehat{H} : X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ la cual es claramente una retracción.

Si tenemos una retracción $r : X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, entonces para cualquier espacio Y, y para cualquier función continua $f : X \longrightarrow Y$, y para cualquier homotopía $H : A \times I \longrightarrow Y$ satisfaciendo $H(a,0) = f(a)$ para toda $a \in A$ podemos definir una homotopía $\widehat{H} : X \times I \longrightarrow Y$ mediante

$$\widehat{H}(x,t) = \begin{cases} f \circ \pi_X \circ r(x,t) & \text{si } (x,t) \in r^{-1}(X \times \{0\}), \\ H \circ r(x,t) & \text{si } (x,t) \in r^{-1}(A \times I), \end{cases}$$

donde $\pi_X : X \times I \longrightarrow X$ es la proyección en la primera coordenada. Note que $\widehat{H}$ es continua, ya que $X \times \{0\}$ y $A \times I$ son cerrados en $X \times I$. $\square$

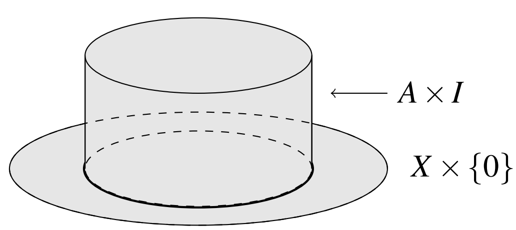


Figura 1.4:

Proposición 1.3.3. *[1, proposición 4.1.18] Se tiene que* (D^n, S^{n-1}) *tiene la propiedad de extensión de homotopía.*

Demostración. Hay una retracción $r : D^n \times I \longrightarrow D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ dado, por ejemplo, por la proyección lineal desde el punto $(0,...,0,2) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Véase la figura 1.5. $\square$

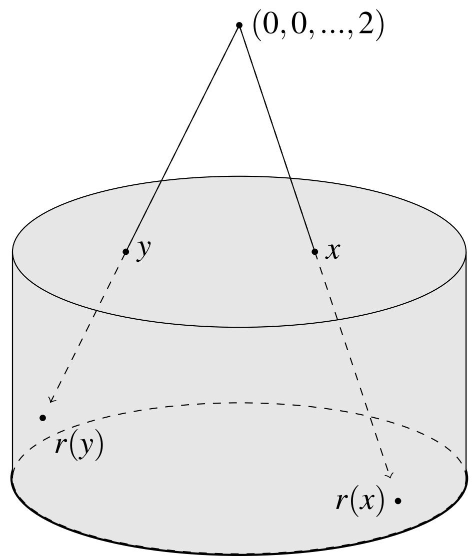


Figura 1.5:

En [8, proposiciones 0.16 y 0.17] se tienen los siguientes dos resultados.

Proposición 1.3.4. *Si* (X,A) *es una pareja CW se tiene entonces que* $X \times \{0\} \cup A \times I$ *es un retracto por deformación de* $X \times I$*, y por lo tanto* (X,A) *tiene la propiedad de extesión de homotopía.*

El siguiente resultado nos da un criterio sobre una equivalencia homotópica.

Proposición 1.3.5. *Si* (X,A) *es una pareja CW y* A *es contráctil entonces la función cociente* $q : X \longrightarrow X/A$ *es una equivalencia homotópica.*

Sean X, Y espacios topológicos y $A \subset X$ subespacio de X. Sea $f : A \longrightarrow Y$ una función continua. El espacio adjunción de X con Y pegado a lo largo de A mediante f, es el espacio cociente de $X \cup Y$ identificando los puntos de $a \in A$ con sus imagenes $f(a) \in Y$. A este espacio cociente lo denotamos por $X \bigcup_f Y$.

El siguiente resultado es también un criterio para una equivalencia homotópica [8, ejercicio 27,capítulo 0].

Proposición 1.3.6. *Si (X,A) es una pareja CW y $f : A \longrightarrow B$ es una equivalencia homtópica, se tiene entonces que $g : X \longrightarrow X \bigcup_f B$ es una equivalencia homotópica.*

1.4. Grupo fundamental y cubrientes

En esta sección solo daremos los resultados más básicos del grupo fundamental de un espacio X y veremos la noción del espacio cubriente de X.

Esta sección esta basada principalmente en [19] y [8].

Uno de los problemas básicos en topología es determinar si dos espacios dados son homeomorfos. No hay un método para resolver este problema en general, pero existen técnicas que son aplicados en casos particulares, una de las cuales es el concepto del grupo fundamental de un espacio que es una herramienta que nos ayuda a distinguir cuando dos espacios topológicos no son homeomorfos.

Antes de definir el grupo fundamental de un espacio topológico X, vamos a considerar caminos sobre X y una relación de equivalencia conocida como homotopía de caminos; posteriormente definiremos cierta operación sobre las clases de homotpía de caminos que la convierte en lo que en álgebra se conoce como semigrupo.

Definición 1.4.1. *Una función continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$ se llama un camino en X entre $x_0, x_1 \in X$. En este caso, diremos que x_0 es el punto inicial y x_1 es el punto final del camino f.*

Un lazo en X basado en $x_0 \in X$ es un camino $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = x_0 = f(1)$.

El intervalo $I = [0,1]$ será el dominio de todos los caminos considerados en esta sección.

Definición 1.4.2. *Se dice que dos caminos f y g son homotópicos por caminos si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1 y además existe una función continua $F : I \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$F(s,0) = f(s) \quad y \quad F(s,1) = g(s),$$

$$F(0,t) = x_0 \quad y \quad F(1,t) = x_1$$

para cada $s \in I$ y cada $t \in I$. La función F se llama homotopía de caminos entre f y g. Si f es homotópica por caminos a g escribiremos $f \simeq_c g$.

La primera condición sobre F nos dice que F es un a homotopía entre f y g, y la segunda dice que, para cada t, la funciíon f_t, definida por la ecuación $f_t(s) = F(s,t)$, es un camino de x_0 a x_1. En otras palabras, F deforma continuamente el camino f en el camino g y además los puntos extremos del camino permanecen fijos durante la deformación.

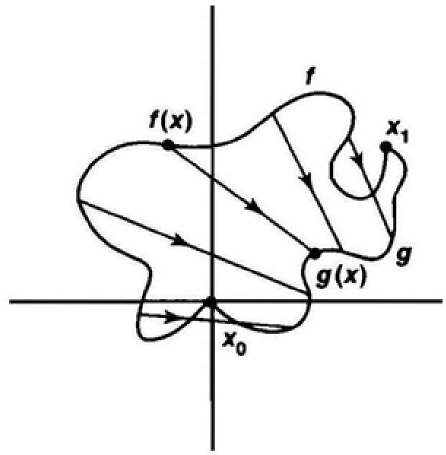


Figura 1.6: Homotopía de caminos en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 1.4.3. *La relación $\simeq_c$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la proposición 1.1.4. □

Si f es un camino en X, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por $[f]$.

Vamos a definir una operación producto entre dos caminos.

Definición 1.4.4. *Si f es un camino en X de x_0 a x_1 y g es un camino en X de x_1 a x_2, definimos el producto $f * g$ de f y g como el camino h dado por*

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0,1/2] \\ g(2s-1) & s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

La aplicación h está bien definida y es continua por el lema del pegado [19]; es un camino en X de x_0 a x_2. Pensamos en h como el camino cuya primera mitad es el camino f y segunda mitad es g.

La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, la cual está dada por

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Para comprobar esta afirmación puede verse el capítulo 9 de [19].

Notemos que $[f] * [g]$ no siempre esta definida para cualquier par de clases, sino únicamente para aquellos pares $[f], [g]$ para los que $f(1) = g(0)$.

Proposición 1.4.5. *Efectivamente la operación $*$ está bien definida y tiene las siguientes propiedades:*

- *(Asociatividad). Si $[f]*([g]*[h])$ está definida, también lo está $([f]*[g])*[h]$, y son iguales.*

- *(Neutro izquierda y derecha). Dado $x \in X$, denotemos por e_x el camino constante $e_x : I \longrightarrow X$ que lleva todo I al punto x. Si f es un camino en X de x_0 a x_1 entonces se tiene que*
$$[f]*[e_{x_1}] = [f],$$
$$[e_{x_0}]*[f] = [f].$$

- *(Inversa). Dado el camino f en X de x_0 a x_1, sea $\overline{f}$ el camino definido por $\overline{f}(s) = f(1-s)$, el cual se le conoce como inverso de f. Se tiene entonces que*
$$[\overline{f}]*[f] = [e_{x_1}],$$
$$[f]*[\overline{f}] = [e_{x_0}].$$

Demostración. Para la demostración véase el teorema 51.2 del capitulo 9 de [19]. □

El conjunto de clases de equivalencia de la relación $\simeq_c$ bajo la operación $*$ no forma un grupo, ya que el producto no siempre está definido, pero si consideramos el conjunto de los lazos, entonces las clases de homotopía de los lazos sí forman un grupo con la operación $*$, esto lo enunciamos en el siguiente corolario.

Corolario 1.4.6. *El conjunto de todas las clases de homotopía de caminos de lazos basados en x_0 es un grupo con respecto a la operación $*$.*

Definición 1.4.7. *El grupo de clases de homotopía de caminos asociados a lazos basados en x_0 con la operación $*$, descrito en el corolario anterior, se denomina primer grupo fundamental de X relativo al punto base x_0 y se denota por $\pi_1(X,x_0)$.*

Ejemplo 1.4.8. *Consideremos $\mathbb{R}^n$ con la topología usual. Se tiene que $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)$ es el grupo trivial (consiste solo en el neutro), ya que si f es un lazo en $\mathbb{R}^n$ basado en x_0, la homotopía por rectas (un ejemplo anterior de homotopía) es una homotopía de caminos entre f y el camino constante x_0.*

En general, si X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, se tiene entonces que $\pi_1(X,x_0)$ es el grupo trivial. En particular la bola unitaria D^n de $\mathbb{R}^n$ tiene grupo fundamental trivial.

Definición 1.4.9. *Decimos que un espacio X es conexo por caminos, también llamado arco-conexo, si para cualesquier puntos $x,y \in X$ existe un camino f en X de x a y.*

Una cuestion que nos podemos plantear es que si el grupo fundamental depende del punto base. Para esto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.4.10. *Si X es conexo por caminos, y x_0, x_1 son dos puntos en X, se tiene entonces que $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Demostración. Sea α un camino en X de x_0 a x_1. Definimos la función

$$\widehat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

por

$$\widehat{\alpha}([f]) = [\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

Puede verificarse que $\widehat{\alpha}$ está bien definida y más aún que es un isomorfismo de grupos. □

Definición 1.4.11. *Un espacio X se dice que es simplemente conexo si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún x_0 en X, y por tanto, para todo $x_0 \in X$. Con frecuencia, si $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial escribiremos $\pi_1(X, x_0) = 0$.*

El grupo fundamental es una herramienta importante que nos ayuda a ver cuando dos espacios topológicos son homeomorfos o no. Para usar esta técnica introducimos el concepto de homomorfismo inducido por una función continua.

Supongamos que $h : X \longrightarrow Y$ es una función continua entre espacios topológicos que lleva el punto $x_0 \in X$ al punto $y_0 \in Y$, esto es, $h(x_0) = y_0$. Denotamos esta propiedad por

$$h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0).$$

Si $f : I \longrightarrow X$ es un lazo en X basado en x_0, entonces la composición $h \circ f : I \longrightarrow Y$ es un lazo en Y basado en y_0. La correspondencia $f \mapsto h \circ f$ nos conduce a una función que lleva $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$ y por tanto a la siguiente definición.

Definición 1.4.12. *Sea $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una función continua. Definimos*

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

mediante

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

La función h_* se denomima homomorfismo inducido por h, relativo al punto base x_0.

Puede mostrarse que la función h_* está bien definida, ya que si F es una homotopía de caminos entre f y f', entonces $h \circ F$ es una homotopía de caminos entre $h \circ f$ y $h \circ f'$. El hecho de que h_* es un homomorfismo de grupos se deduce de que

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g),$$

lo cual puede verificarse fácilmente.

El homomorfismo inducido tiene dos propiedades, las llamadas *propiedades funtoriales*, las cuales están dadas en el siguiente teorema.

Teorema 1.4.13.

- *Si* $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *y* $k : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ *son funciones continuas entonces* $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$.
- *Si* $i : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *es la función identidad entonces* i_* *es el homomorfismo identidad.*

Otro resultado de importancia es la siguiente proposición conocida como invarianza homotópica, el cual puede consultarse en la proposición 2.5.23 de [1].

Proposición 1.4.14. *Sean* $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *funciónes continuas homotópicas relativas a* $\{x_0\}$. *Se tiene entonces que*

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0),$$

es decir, los homomorfismos inducidos son los mismos.

El siguiente teorema, que nos dice que basta ver si los espacios son del mismo tipo de homotopía para tener grupos fundamentales isomorfos, esto puede consultarse en teorema 2.5.25 de [1].

Teorema 1.4.15. *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es una equivalencia homotópica entonces el homomorfismo inducido* $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ *es un isomorfismo para todo* $x_0 \in X$. *De modo particular, si* $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *es homeomorfismo entonces* $\pi_1(X, x_0)$ *y* $\pi_1(Y, y_0)$ *son isomorfos.*

De esto, es inmediato que se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.4.16. *Si* A *es un retracto por deformación de* X *entonces la inclusión* $i : A \hookrightarrow X$ *induce un isomorfismo* $i_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$, *para toda* $a \in A$.

Demostración. Se tiene que i es equivalencia homotópica. □

El siguiente resultado nos da una forma de calcular el grupo fundamental de un espacio expresado como un producto topológico, cuando se conoce el grupo fundamental de cada uno de los factores.

Teorema 1.4.17. *Se tiene que* $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ *es isomorfo a* $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Demostración. Para una demostración de este hecho, véase teorema 60.1 de [19] □

Una de las herramientas más usuales para el calculo de grupos fundamentales es la noción de espacio cubriente, que nos ayudará a calcular algunos grupos fundamentales que no son triviales. Introducimos esta noción en lo que sigue.

Definición 1.4.18. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función continua y suprayectiva. Un conjunto U de B se dice que está regularmente cubierto por p si la imágen inversa $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos V_α de E tales que, para cada α, la restricción $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U$ es un homemorfismo de V_α en U.*

La colección $\{V_\alpha\}$ será denominada una partición de $p^{-1}(U)$ en hojas o rebanadas.

Definición 1.4.19. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función continua y sobreyectiva. Si todo punto $b \in B$ tiene una vecindad U que esta regularmente cubierta por p, diremos entonces que p es una función cubriente y E un espacio cubriente de B.*

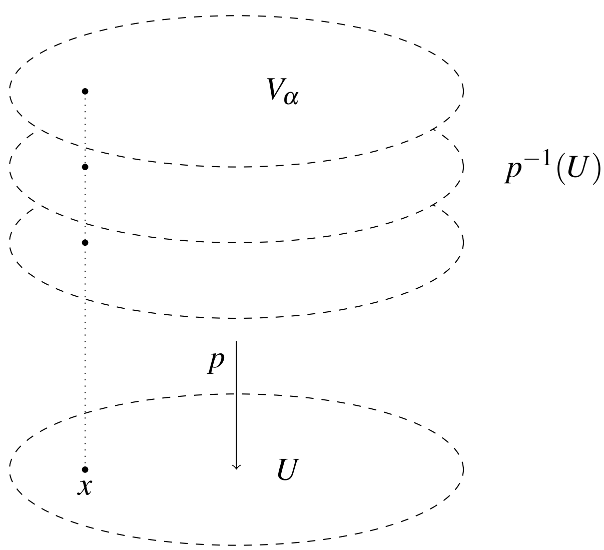


Figura 1.7: Cubriente

Notemos que si p es una funciíon cubriente entoces, para cada $b \in B$, el subespacio $p^{-1}(b)$ de E es un espacio discréto, esto es, tiene la topología discréta; admás p es una función abierta.

Ejemplo 1.4.20. *Si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1/2]$ está dado por*

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1/2] \\ 1/2 & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Se tiene entonces que f no es cubriente, pues $f^{-1}(1/2) = [1/2,1]$ no es un espacio discreto.

Ejemplo 1.4.21. *Sea $id : X \longrightarrow X$ la función identidad, se tiene entonces que id es una función cubriente. En general, sea E el espacio $X \times \{1,...,n\}$ consistente en n copias disjuntas de X. La función $p : E \longrightarrow X$ dado por $p(x,i) = x$ para todo i, es una función cubriente. A este tipo de cubriente se le denomina cubriente trivial.*

En la práctica, frecuentemente nos restringimos a espacios cubrientes que son conexos por caminos, para eliminar cubrimientos triviales.

Un ejemplos de espacio cubriente no trivial es el siguiente.

Ejemplo 1.4.22. *La función $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dado por*

$$p(x) = (sen(2\pi x), cos(2\pi x))$$

es una función cubriente.

Para una demostración, véase el teorema 53.1 de [19].

Notemos que $p : E \longrightarrow B$ es una función cubriente entonces p es un homeomorfismo local, pero el regreso de esta afirmación no es cierto, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.23. *La función $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow S^1$ dada por*

$$p(x) = (cos(2\pi x), sen(2\pi x))$$

es sobreyectiva y un homeomorfismo locar pero no es una función cubriente, ya que el punto $(1,0)$ no tiene una vecidad U que esté regularmente cubierta por p.

El ejemplo anterior muestra que la función obtenida al restringir una función cubriente no siempre resulta ser una función cubriente. Tenemos situaciones en donde sí encontramos este tipo de funciones.

Proposición 1.4.24. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función cubriente. Si B_0 es un subespacio de B y si $E_0 = p^{-1}(B_0)$ entonces la función $p_0 : E_0 \longrightarrow B_0$, obtenida al restringir p, es una función cubriente.*

Demostración. Dado $b_0 \in B_0$, sea U un abierto en B que contiene a b_0 y que esté regularmente cubierto por p; sea $\{V_\alpha\}$ una partición de $p^{-1}(U)$ en hojas. Se tiene entonces que $U \cap B_0$ es una vecindad de b_0 en B_0 y los conjuntos $V_\alpha \cap E_0$ son abiertos disjuntos en E_0 cuya unión es $p^{-1}(U \cap B_0)$, y cada $V_\alpha \cap E_0$ es homeomorfo a $U \cap B_0$ mediante la restricción de p. □

Proposición 1.4.25. *Si $p : E \longrightarrow B$ y $p' : E' \longrightarrow B'$ son funciones cubrientes entonces la función*

$$p \times p' : E \times E' \longrightarrow B \times B'$$

es una función cubriente.

Demostración. Sean $b \in B$ y $b' \in B'$, sea U, U' vecindades de b y b' que estén regularmente cubiertos por p y p', respectivamente. Sean $\{V_\alpha\}$ y $\{V'_\beta\}$ particiones en hojas de $p^{-1}(U)$ y $p'^{-1}(U')$. Se tiene que la preimágen de $U \times U'$ por $p \times p'$ es la unión de todos los conjuntos $V_\alpha \times V'_\beta$. Estos conjuntos son abiertos disjuntos de $E \times E'$ y cada unos de ellos es homeomorfo a $U \times U'$ mediante $p \times p'$. $\square$

Ejemplo 1.4.26. *Ahora, por el ejemplo 1.4.22, la función* $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$ *es una función cubriente.*

Definición 1.4.27. *Sea* $p : E \longrightarrow B$ *una función. Si* $f : X \longrightarrow B$ *es una función continua de algún espacio topológico* X *en* B*, un levantamiento de* f *es una función* $\widehat{f} : X \longrightarrow E$ *tal que* $p \circ \widehat{f} = f$*.*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\widehat{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.4.28. *Sea* $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ *la función dada por*

$$p(x) = (cos(2\pi x), sen(2\pi x))$$

y $f : [0, 2\pi] \longrightarrow S^1$ *dado por*

$$f(x) = (cosx, senx).$$

Notemos que f *es, en realidad, un camino, ya que* $[0, 2\pi]$ *es homeomorfo a* $[0, 1]$*; además, sabemos que* p *es cubriente.*

Supongamos que $\widehat{f} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *cumple que* $f = p \circ \widehat{f}$*, es decir,*

$$(cosx, senx) = (cos(2\pi(\widehat{f}(x)), sen(2\pi(\widehat{f}(x))).$$

Con esto $x = 2\pi \widehat{f}(x)$ *o bien* $\widehat{f}(x) = \frac{x}{2\pi}$*. Definamos* $\widehat{f} : [0, 2\pi] \longrightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ *como* $\widehat{f}(x) = \frac{x}{2\pi}$*. Se tiene entonces que* $\widehat{f}$ *es un levantamiento de* f*.*

Notemos que para cada $z \in \mathbb{Z}$*, se tiene que* $\widehat{\widehat{f}}$ *dado por* $\widehat{\widehat{f}}(x) = \frac{x}{2\pi} + z$ *es un levantamiento de* f*.*

Ejemplo 1.4.29. *Consideremos a la función cubriente* $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$*,*
$p(x) = (cos(2\pi x), sen(2\pi x))$ *y también* $f : S^1 \longrightarrow S^1$ *la identidad. Supongamos que* f *tiene un levantamiento* $\widehat{f}$*, entonces* $\widehat{f}(1, 0) = k$*, para algún* $k \in \mathbb{Z}$*. Como* $\widehat{f}$ *es un levantamiento, se tiene*

$$\widehat{f}(cos(2\pi - 2\pi/n), sen(2\pi - 2\pi/n)) = (k+1) - 1/n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por continuidad de $\widehat{f}$, se tiene

$$\widehat{f}(cos 2\pi, sen 2\pi) = k+1,$$

así $\widehat{f}(1,0) = k$ y $\widehat{f}(1,0) = k+1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto f no admite levantamientos.

La existencia de levantamientos cuando p es una función cubriente es una herramienta importante en el estudio de los espacios cubrientes y el grupo fundamental.

Veremos que, para un espacio cubriente, los caminos siempre pueden ser levantados, y que las homotopías de caminos también pueden ser levantadas. Las demostraciones se pueden encontrar en los lemas 54.1 y 54.2 de [19].

Lema 1.4.30. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$. Todo camino $f : [0,1] \longrightarrow B$ comenzando en b_0 tiene un únnico levantamiento a un camino $\widehat{f}$ en E que comienza en e_0.*

Lema 1.4.31. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$. Sea $F : I \times I \longrightarrow B$ una función continua con $F(0,0) = b_0$. Se tiene entonces que existe un único levantamiento de F a una función continua*

$$\widehat{F} : I \times I \longrightarrow E$$

tal que $\widehat{F}(0,0) = e_0$. Si F es una homotopía de caminos entonces $\widehat{F}$ también es una homotopía de caminos.

Como consecuencia de los lemas anteriores obtenemos el siguiente.

Teorema 1.4.32. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$. Sean f y g dos caminos en B de b_0 a b_1, y sean $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ sus respectivos levantamientos a caminos en E comenzando en e_0. Si f y g son homotópicos por caminos entonces $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ terminan en el mismo punto de E y son homotópicos por caminos.*

Demostración. Véase el teorema 54.3 de [19]. □

Definición 1.4.33. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función cubriente y $b_0 \in B$. Elijamos e_0 de forma que $p(e_0) = b_0$. Dado un elemento $[f]$ de $\pi_1(B,b_0)$, sea $\widehat{f}$ el levantamiento de f a un camino en E que comience en e_0. Denotemos por $\phi([f])$ el punto final $\widehat{f}(1)$ del camino $\widehat{f}$. Entonces ϕ es una función bien definida*

$$\phi : \pi_1(B,b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0).$$

Llamamos a ϕ correspondencia del levantamiento inducido por la función cubriente p. Desde luego, depende de la elección de punto e_0.

Teorema 1.4.34. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$. Si E es conexo por caminos entonces la correspondencia del levantamiento*

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$$

es sobreyectiva. Si E es simplemente conexo entonces ϕ es biyectiva.

Demostración. Sea $e_1 \in p^{-1}(b_0)$, si E es conexo por caminos entonces existe un camino $\widehat{f}$ en E de e_0 a e_1. Se tiene que $f = p \circ \widehat{f}$ es una lazo en B con base b_0 y además $\phi([f]) = e_1$, por definición. Así ϕ es sobreyectiva.

Supongamos que E es simplemente conexo. Sean $[f], [g] \in \pi_1(B, b_0)$ tales que $\phi([f]) = \phi([g])$. Sean $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ los caminos que levantan a f y g, respectivamente, en E comenzando en e_0; entonces $\widehat{f}(1) = \widehat{g}(1)$. Como E es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos $\widehat{F}$ en E entre $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$. Se tiene entonces que $p \circ \widehat{F}$ es una homotopía de caminos en B entre f y g, así $[f] = [g]$; con esto, ϕ es biyectiva.

□

El siguiente resultado es una aplicación del teorema anterior.

Teorema 1.4.35. *El grupo fundamental de S^1 es isomorfo al grupo aditivo de los enteros $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideremos la función cubriente $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ del ejemplo 1.4.22. Como S^1 es conexo por caminos, por la proposición 1.4.10, podemos considerar cualquier punto como base. Consideremos $b_0 = (1, 0)$. Se tiene que $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo como se ve en el ejemplo 1.4.8, se tiene entonces que la correspondencia del levantamiento

$$\phi : \pi_1(S^1, b_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

es biyectiva por el teorema anterior. No es muy difícil convencerse de que se tiene un isomorfismo. □

Una consecuencia del teorema 1.4.17 y el teorema anterior es el siguiente resultado.

Teorema 1.4.36. *El grupo fundamental del toro $S^1 \times S^1$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Ya conocemos el grupo fundamental de S^1, ahora nos preguntamos por el grupo fundamental de S^n para $n \geq 2$; para esto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.4.37. *Para $n \geq 2$, la esfera S^n es simplemente conexo; en particular, $\pi_1(S^n, x_0) = 0$ para todo $x_0 \in S^n$.*

Para probar este último teorema se usa una herramienta muy fuerte para el calculo de grupos fundamentales, la cual se conoce como teorema de Seifert-Van Kampen, esto puede consultarse en el teorema 59.1 del capítulo 9 de [19].

El siguiente resultado es una versión mas fuerte del teorema 1.4.34, cuya demostración se puede consultar en el teorema 54.6 de [19].

Teorema 1.4.38. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$.*

a) El homomorfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$ es un monomorfismo.

b) Sea $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$. La correspondencia del levantamiento ϕ induce una función inyectiva

$$\Phi : \pi_1(E, e_0)/H \longrightarrow p^{-1}(b_0)$$

de la colección de las clases laterales por la derecha de H en $p^{-1}(b_0)$. Si E es conexo por caminos entonces Φ es biyectiva.

c) Si f es un lazo en B basado en b_0, se tiene entonces que $[f] \in H$ si y solo si f es un levantamiento a un lazo en E basado en e_0. Esto es, el subgrupo imagen $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ en $\pi_1(B, b_0)$ consiste de las clases de homotopía de lazos en B basdos en b_0 cuyos levantamientos a E son lazos basados en e_0.

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado, cuya prueba se puede ver a detalle en [8, proposición 1.32].

Proposición 1.4.39. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$. Supongamos que E y B son conexos por caminos. Se tiene entonces que el número de hojas de un espacio cubriente E es igual al índice de $H = p_*(\pi(E, e_0))$ en $\pi_1(B, b_0)$.*

Ahora introducimos una noción de equivalencia de funciones cubrientes, esto nos servira más adelante.

Definición 1.4.40. *Sean $p : E \longrightarrow B$ y $p' : E' \longrightarrow B$ dos funciones cubrientes. Decimos que p y p' son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : E \longrightarrow E'$ tal que $p = p' \circ h$. El homeomorfismo h se denomina equivalencia de funciones cubrientes o equivalencia de espacios cubrientes.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Es importante también saber acerca de la existencia y unicidad de levantamientos de una función cualquiera, no necesariamente de homotopías o caminos. El siguiente lema nos proporciona un criterio de levantamiento.

Lema 1.4.41 (Lema del levantamiento general)**.** *Sea $p : E \longrightarrow B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$ y E y B son conexos por caminos y localmente conexos por caminos. Sea $f : Y \longrightarrow B$ una función continua con $f(y_0) = b_0$. Supongamos que Y es conexo* *por caminos y localmente conexo por caminos. Se tiene que la función f se puede levantar a una función $\widehat{f}: Y \longrightarrow E$ tal que $\widehat{f}(y_0) = e_0$ si y solo si*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Además, si tal levantamiento existe, es único y tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\exists! \widehat{f}"] \arrow[r, "f"'] & (B, b_0) \end{tikzcd}$$

Demostración. Véase lema 79.1 de [19]. □

De forma general se definen grupos de homotopía de orden superior de un espacio topológico X, en el sentido que son análogos n-dimensionales del grupo fundamental, denotados por $\pi_n(X, x_0)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in X$. En cierto sentido, los π_n miden los agujeros de dimensión n de X.

Ya hemos visto que los elementos de $\pi_1(X, x_0)$ son clases de homotopía de lazos en X basados en x_0. Como primer paso en la construcción de $\pi_n(X, x_0)$, generalizamos la noción de caminos cerrados en X a la de lazo n-dimensional.

Definición 1.4.42. *Un n-lazo en X basado en x_0 es una función continua $\sigma : [0,1]^n \longrightarrow X$ tal que lleva la frontera de $[0,1]^n$ a x_0.*

Se define el producto de dos n-lazos, $\alpha * \beta = \gamma$, como el n-lazo

$$\gamma(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, ..., t_n) & t_1 \in [0, 1/2] \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n) & t_1 \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Definición 1.4.43. *Decimos que dos n-lazos en X basados en x_0 son homotópicos por n-lazos, denotado por $\alpha \sim \beta$, si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1]^n \longrightarrow X$ ta que*

1) $H(0, t_1, ..., t_n) = \alpha(t_1, ..., t_n)$, *para* $(t_1, ..., t_n) \in [0,1]^n$.

2) $H(1, t_1, ..., t_n) = \beta(t_1, ..., t_n)$, *para* $(t_1, ..., t_n) \in [0,1]^n$.

3) $H(s, t_1, ..., t_n) = x_0$, *para cada* $s \in [0,1]$ *y cada* $(t_1, ..., t_n) \in fr([0,1]^n)$.

Esta homotopía es una relación de equivalencia, y si denotamos por $[\sigma]$ a la clase de equivalencia de los n-lazos homotópicos al n-lazo σ, se verifica lo siguiente.

Lema 1.4.44. *Cuando tengan sentido los siguientes productos, se cumple*

1) *si* $\alpha \sim \alpha'$ *y* $\beta \sim \beta'$ *entonces* $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$;

2) $\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma$;

3) *si* $e : [0,1]^n \longrightarrow X$ *se define por* $e(t_1, ..., t_n) = x_0$ *entonces* $e * \alpha \sim \alpha * e \sim \alpha$;

4) *si se define* $\overline{\alpha}(t_1, ..., t_n) = (1 - t_1, ..., t_n)$ *y si* $\alpha \sim \beta$ *entonces* $\overline{\alpha} \sim \overline{\beta}$;

5) $\alpha * \overline{\alpha} \sim \overline{\alpha} * \alpha \sim e$.

Observación 1.4.45. *Queda así demostrado que las clases de homotopía de n-lazos en X basados en* x_0 *forman un grupo bajo el producto* $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.

Definición 1.4.46. *El grupo de las clases de homotopía de n-lazos en X basados en* x_0 *bajo el producto* $*$ *lo denotamos por* $\pi_n(X, x_0)$ *y le llamamos el grupo de homotopía de dimensión n.*

Denotamos por $\pi_0(X)$ *al conjunto de las componentes conexas por caminos de* X.

Damos algunos resultados.

Teorema 1.4.47.

a) $\pi_n(X, x_0)$ *es un grupo abeliano, para* $n \geq 2$. *Se trata además de un invariente topológico.*

b) *Si X es conexo por caminos y* $x_0, x_1 \in X$ *entonces* $\pi_n(X, x_0)$ *es isomorfo a* $\pi_n(X, x_1)$.

c) *Si X es contráctil entonces* $\pi_n(X, x_0) = 0$ *para cada* $n \geq 1$.

d) *Si X y Y son espacios topológicos,* $x_0 \in X$ *y* $y_0 \in Y$, *entonces* $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ *es isomorfo a* $\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$.

Observación 1.4.48. *En general, es extremadamente difícil calcular los grupos de homotopía de orden superior. De hecho, incluso para esferas, su cálculo no está aún completamente hecho. Sin embargo, se conocen algunos resultados.*

Teorema 1.4.49. *Sea* S^n *la n-esfera de* $\mathbb{R}^{n+1}$, *se tiene que*

- $\pi_p(S^n) = \pi_{p+1}(S^{n+1})$, *si* $n, p > 1$.
- $\pi_p(S^n) = 0$, *si* $p < n$.
- $\pi_1(S^n) = 0$, *si* $n > 1$.
- $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, *si* $n \geq 1$.

Para mayor información sobre los grupos de homotopía de orden superior, puede consultarse [1], [26].

1.5. Homología

En esta sección repasaremos los principales resultados de homología singular, el cual nos hemos basado en el libro de [8].

Vamos a comenzar con la nocion que generaliza triángulos en otras dimensiones, y son también uno de los objetos con los cuales se trabaja en homología. Los análogos n-dimensionales de un triángulo son conocidos como n-simplejos; es decir, un n-simplejo es un objeto n-dimensional en algún espacio $\mathbb{R}^N$, $N \geq n$. Este es el conjunto convexo más pequeño en un espacio euclideano $\mathbb{R}^N$ conteniendo $n+1$ puntos $v_0, ..., v_n$ que no se encuentran en un hiperplano de dimensión menor que n, donde por un hiperplano nos referimos al conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Una condición equivalente para estos vectores sería que los vectores diferencia $v_1 - v_0, ..., v_n - v_0$ son linealmente independientes. Formalicemos estas ideas.

Definición 1.5.1. *Una colección de puntos $\{v_0, ..., v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ se dicen afínmente independientes o que están en posición general si los vectores $\{v_1 - v_0, ..., v_n - v_0\}$ son linealmente independientes.*

Dados $n+1$ puntos afínmente independientes en $\mathbb{R}^N$ llamaremos n-simplejo o simplejo de dimensión n al conjunnto convexo

$$\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^N : x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \quad con \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \quad y \quad \lambda_i \geq 0\}.$$

Los coeficientes λ_i son llamadas las coordenadas baricentricas del punto x en σ^n. Llamaremos interior de σ^n a $(\sigma^n)^o = \{x \in \sigma^n : \lambda_i > 0\}$. Los puntos v_i se llaman vértices de σ^n y se escribirá $\sigma^n = [v_0, v_1, ..., v_n]$.

Así, un 0-simplejo es un punto, un 1-simplejo es un segmento de recta, un 2-simplejo es un triángulo, un 3-simplejo es un tetraedro, etc. En general, un n-simplejo $\sigma^n = [v_0, ..., v_n]$ está definido como el menor conjunto convexo (envolvente convexa) que contiene a los vértices $v_0, ..., v_1$. Un n-simplejo $\sigma^n \subset \mathbb{R}^N$ se considera topologizado por la topología relativa de $\mathbb{R}^N$.

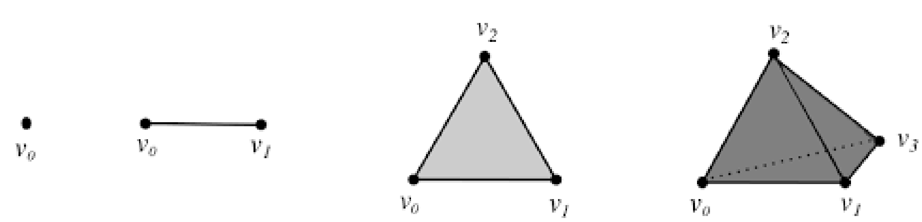


Figura 1.8: Simplejos.

Definición 1.5.2. *Sean* $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \ldots$ *las inclusiones canónicas* $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$ *dadas por* $x \mapsto (x,0)$. *Consideremos* $\mathbb{R}^\infty = \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ *el espacio vectorial de sucesiones eventualmente cero, esto es,* $(x_1, x_2, ..., ...)\mathbb{R}^\infty$ *si y solo si existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n = 0$ *para todo* $n \geq m$*;* $\mathbb{R}^\infty$ *tiene una* base afín *canónica o estándar* $e_0 = (0,0,...,0,...)$*,* $e_1 = (1,0,...,...)$*,* $e_2 = (0,1,...,...)$*,* $e_3 = (0,0,1,...,...)$*, etc.*

Se llama n-simplejo canónico o estándar Δ_n *a la envolvente convexa de los puntos* e_i *con* $0 \leq i \leq n$*. Esto es*

$$\Delta_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \in [0,1] \right\}.$$

Definición 1.5.3. *Dados puntos cualesquiera* $v_0, v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^\infty$ *denotamos por* $[v_0, ..., v_n]$ *a la función*

$$\Delta_n \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

dada por

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i.$$

Esta función es llamada n-simplejo singular afín.

Nota 1.5.4. *No se está pidiendo que* $v_0, v_1, ..., v_n$ *estén en posición general ni siquiera que sean distintos. Por ejemplo,* $[e_0, e_1, e_2, e_3]$ *tiene imágen un tetraedro, a saber,* Δ_3*, pero* $[e_0, e_1, e_2, e_2]$ *tiene imágen un triángulo, a saber* Δ_2*.*

Observación 1.5.5. *Se tiene que*

a) $[e_0, e_1, ..., e_n](e_j) = e_j \ \forall j \leq n$*.*

b) $[v_0, ..., v_n]$ *tiene regla de asignación*

$$(x_0, x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \mapsto v_0 + \sum_{i=0}^{n} x_i (v_i - v_0).$$

Notación: Un circunflejo $\widehat{\ }$ sobre un conjunto de simbolos indica que éste no está, así, $[e_0, ..., \widehat{e_i}, ..., e_n]$ denota al $(n-1)$-simplejos singular afín $[e_0, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n]$.

Observamos que la imagen de $[e_0, ..., \widehat{e_i}, ..., e_n]$ está contenida en Δ_n.

Definición 1.5.6. *Definimos la i-ésima cara del p-simplejo estandar a la función*

$$[e_0, ..., \widehat{e_i}, ..., e_p] : \Delta_{p-1} \longrightarrow \Delta_p$$

la cual denotaremos por F_i^p*.*

Notemos que la i-ésima cara del p-simplejo es la cara *opuesta* al i-ésimo vértice, contando desde cero.

Proposición 1.5.7.

- *Para* $j < i$ *se tiene* $F_i^p(e_j) = e_j$.
- *Para* $j \geq i$ *se tiene* $F_i^p(e_j) = e_{j+i}$.

También se tiene,

- $F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0, ..., \widehat{e_j}, ..., \widehat{e_i}, ..., e_p]$, *si* $j < i$.
- $F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0, ..., \widehat{e_i}, ..., \widehat{e_{j+1}}, ..., e_{p+1}]$, *si* $j \geq i$.

Definición 1.5.8. *Sea X un espacio topológico. Un p-simplejo singular es una función continua*

$$\sigma : \Delta_p \longrightarrow X.$$

El grupo de p-cadenas singulares $\Delta_p(X)$ *es el grupo abeliano libre generado por los p-simplejos singulares.*

Una p-cadena singular en X puede pensarse como una suma formal

$$c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$$

de p-simplejos $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$, donde los enteros $n_\sigma \in \mathbb{Z}$ sin casi todos ceros.

Definición 1.5.9. *Para un p-simplejo singular en X* $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ *definimos su i-ésima cara mediante*

$$\sigma^{(i)} := \sigma \circ F_i^p \in \Delta_{p-1}(X)$$

y definimos su frontera $\partial_p \sigma$ *mediante*

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^{(i)} \in \Delta_{p-1}(X).$$

Notemos que como $\{\sigma : \Delta_p \longrightarrow X | \sigma \text{ es } p\text{-simplejo singular}\}$ es una base del grupo abeliano libre $\Delta_p(X)$ se sigue que existe un único morfismo de grupos, que por abuso de notación también lo denotamos por ∂_p,

$$\partial_p : \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_{p-1}(X)$$

extendiendo a la función frontera.

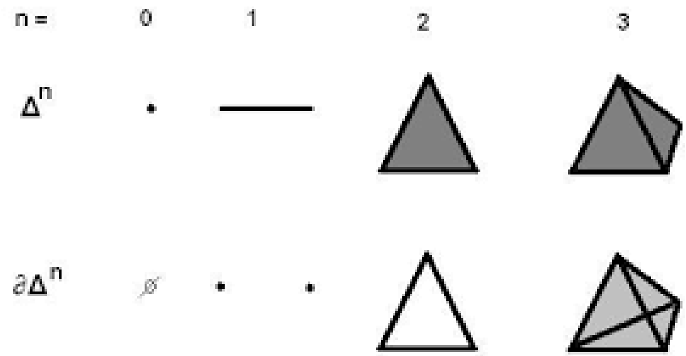


Figura 1.9: Frontera de un simplejo.

Concrétamente tenemos que

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_i^p$$

y resulta útil notar que

$$F_j^{p+1} \circ F_i^p = F_{i-1}^{p+1} \circ F_j^p$$

lo cual es claro pues ambos coinciden con

$$[e_0, ..., \widehat{e_j}, ..., \widehat{e_i}, ..., e_{p+1}].$$

Es fácil de comprobar lo siguiente.

Proposición 1.5.10. *La composición*

$$\Delta_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} \Delta_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \Delta_{p-1}(X)$$

es el morfismo cero, es decir,

$$\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0.$$

Obsevemos que, por la proposición anterior, necesariamente se tiene que $Im\partial_{p+1} \subseteq Ker\partial_p$; así se tiene que $Im\partial_{p+1} \lhd Ker\partial_p$, esto es, $Im\partial_{p+1}$ es subgrupo normal de $Ker\partial_p$.

Por convención, para $p < 0$, tomamos $\Delta_p(X) = 0$ y para $p \leq 0$ tomamos $\partial_p = 0$.

Con esto obtenemos un complejo de cadena

$$\cdots \longrightarrow \Delta_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} \Delta_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \Delta_{p-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

es decir, $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Definición 1.5.11. *Para un espacio topológico X llamamos p-ésimo grupo de homología singular, denotado por $H_p(X)$, asociado con el complejo de cadena*

$$\cdots \longrightarrow \Delta_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} \Delta_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \Delta_{p-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

al p-ésimo grupo

$$H_p(X) := \frac{Ker\partial_p}{Im\partial_{p+1}}.$$

Los elementos de $Ker\partial_p$ se llaman p-ciclos y denotamos por $Z_p(X) = Ker\partial_p$, el cual es un subgrupo de $\Delta_p(X)$.

Los elementos de $Im\partial_{p+1}$ se llaman p-fronteras y los denotamos por $B_p(X) = Im\partial_{p+1}$, este es un subgrupo de $\Delta_p(X)$.

De cierta manera el p-ésimo grupo de homología singular

$$H_p(X) = \frac{Z_p(X)}{B_p(X)}$$

mide que tanto falla un ciclo en ser frontera; recuerde toda frontera es ciclo.

Definición 1.5.12. *Dos p-cadenas $c_1, c_2 \in \Delta_p(X)$ son homólogas o homológicamente equivalentes si existe $d \in \Delta_{p+1}(X)$ tal que $\partial_{p+1}d = c_1 - c_2$.*

Claramenta la relación de homología es de equivalencia. La clase de equivalencia de $c \in \Delta_p(X)$ bajo esta relación lo denotamos por $[[c]]$. Observamos con esto que $[[0]] = B_p(X)$.

Tenemos el siguiente resultado (ver [8]), el cual nos ayuda a calcular la homología de un espacio cuando conocemos sus componentes arco-conexo (aquí arco-conexo se refiere a conexo por caminos).

Proposición 1.5.13. *Sea X un espacio topológico con componentes arco-conexas $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Se tiene que*

$$H_p(X) = \bigoplus_{\alpha\in A} H_p(X_\alpha).$$

Proposición 1.5.14. *Si $X \neq \emptyset$ y arco-conexo. Se tiene entonces que $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Así para cualquier espacio X, se tiene que $H_0(X)$ es suma directa de $\mathbb{Z}'s$, una para cada componente arco-conexa de X.*

Corolario 1.5.15. *Si X es arco-conexo entonces $H_0(X)$ es generado por $[[x]]$ para cualquier $x \in X$.*

Corolario 1.5.16. *Para cualquier espacio topológico X se tiene que $H_0(X)$ es isomorfo al grupo abeliano libre con base las componentes arco-conexas.*

Proposición 1.5.17. *Sea X el espacio topológico que consta de un solo punto. Se tiene entonces que*

$$H_P(X) = \begin{cases} 0 & p \neq 0 \\ \mathbb{Z} & p = 0. \end{cases}$$

Demostración. Ver proposición 2.8 de [8]. □

Hay una estrecha relación entre $H_1(X)$ y $\pi_1(X)$ por un resultado debido a W. Hurewicz que establece una conexión entre los grupos de homología y los grupos de homotopía de un espacio arco-conexo X, esta conexión entre $H_1(X)$ y $\pi_1(X)$ surge del hecho de que una función $f : I \longrightarrow X$ se puede ver como un camino o un 1-simplejo singular. Si $f : I \longrightarrow X$ es un lazo con $f(0) = f(1)$, este 1-simplejo singular es un ciclo, pues $\partial f = f(1) - f(0) = 0$. Para una demostración, consulte el teorema 2A.1 de [8].

Teorema 1.5.18 (Hurewicz)**.** *Para un espacio topológico arbitrario X. Al considerar los lazos como 1-ciclos singulares, obtenemos un homomorfismo de grupos bien definido*

$$h : \pi_1(X) \longrightarrow H_1(X).$$

Si X es conexo por caminos entonces h es suprayectiva y su kernel es el subgrupo conmutador $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ de $\pi_1(X)$, así h induce un isomorfismo de la abelianización de $\pi_1(X)$ en $H_1(X)$; esto es, h induce el isomorfismo

$$\phi : \widetilde{\pi_1(X)} \longrightarrow H_1(X)$$

donde $\widetilde{\pi_1(X)} = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ es la abelianización de $\pi_1(X)$.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y $p \geq 0$. Si $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ es un p-simplejo singular en X entonces $f \circ \sigma : \Delta_p \longrightarrow Y$ es un p-simplejos singular en Y. Así, la asignación $\sigma \longmapsto f \circ \sigma$ induce un homomorfismo

$$\begin{array}{rcc} f_p : \Delta_p(X) & \longrightarrow & \Delta_p(Y) \\ c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma & \longmapsto & f_p(c) = \sum_\sigma n_\sigma f \circ \sigma \end{array}$$

que extiende linealmente la asignación $\sigma \longmapsto f \circ \sigma$.

Observe que para $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ una p-cadena en X, $f_p(c) = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ es una p-cadena en Y.

Proposición 1.5.19. *Para una función continua $f : X \longrightarrow Y$ y $p \geq 0$. Se tiene que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_p(X) & \xrightarrow{\partial_p} & \Delta_{p-1}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f_p} & & \downarrow{\scriptstyle f_{p-1}} \\ \Delta_p(Y) & \xrightarrow{\partial_p} & \Delta_{p-1}(Y) \end{array}$$

es decir, $\partial_p \circ f_p = f_{p-1} \circ \partial_p$.

Demostración. Basta mostrar que para un p-simplejo singular $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ se vale $\partial_p(f_p(\sigma)) = f_{p-1}(\partial_p(\sigma))$. Efectivamente

$$\begin{aligned} \partial_p(f_p(\sigma)) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i f_p(\sigma)^{(} i) \\ &= \sum (-1)^i f_p(\sigma) \circ F_i^p \\ &= \sum (-1)^i f \circ \sigma \circ F_i^p \\ &= \sum (-1)^i f \circ \sigma^{(} i) \\ &= f_{p-1}(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma(i)) \\ &= f_{p-1}(\partial_p \sigma). \end{aligned}$$

□

La proposición anterior nos dice que una función continua $f : X \longrightarrow Y$ induce que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Delta_p(X) & \xrightarrow{\partial_p} & \Delta_{p-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_p} & & \downarrow{\scriptstyle f_{p-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \Delta_p(Y) & \xrightarrow{\partial_p} & \Delta_{p-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

cumple que

$$\partial_p \circ f_p = f_{p-1} \circ \partial_p \quad \forall\ p$$

Proposición 1.5.20. *Dada una función continua $f : X \longrightarrow Y$. Se tiene que existe un homomorfismo de grupos*

$$f_* : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$$

tal que

$$f_*([[c]]) = [[f_p(c)]].$$

Para evitar confusiones f_* se denota también por $H_p(f)$.
Demostración.

- Si $c \in Z_p(X)$ entonces $f_p(c) \in Z_p(Y)$. En efecto, se tiene

$$\partial_p(f_p(c)) = f_{p-1}(\partial_p(c)) = f_{p-1}(0) = 0.$$

- f_* está bien definida. Sean $c_1, c_2 \in Z_p(X)$ con $c_1 \sim c_2$. Así, $c_1 - c_2 = \partial_{p+1}(d)$ con $d \in \Delta_{p+1}(X)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} f_p(c_1) &= f_p(c_2 + \partial_{p+1}(d)) \\ &= f_p(c_2) + f_p(\partial_{p+1}(d)) \\ &= f_p(c_2) + \partial_{p+1}(f_{p+1}(d)) \end{aligned}$$

de donde
$$f_p(c_1) - f_p(c_2) = \partial_{p+1}(f_{p+1}(d))$$
y por lo tanto
$$f_p(c_2) \sim f_p(c_2).$$

- f_* es morfismo.

$$\begin{aligned} f_*([[c_1]] + [[c_2]]) &= f_*([[c_1 + c_2]]) \\ &= [[f_p(c_1 + c_2)]] \\ &= [[f_p(c_1) + f_p(c_2)]] \\ &= [[f_p(c_1)]] + [[f_p(c_2)]] \\ &= f_*([[c_1]]) + f_*([[c_2]]). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.5.21 (Propiedades funtoriales)**.** *Para espacios topológicos, H_p es un funtor covariante, esto es, satisface:*

a) $H_p(id_X) = id_{H_p(X)}$

b) $H_p(f \circ g) = H_p(f) \circ H_p(g)$

Demostración.

a) Observe que
$$(id_X)_p(\sigma) = id_X \circ \sigma = \sigma \ \ \forall \ \sigma : \Delta_p \to X$$

de donde
$$(id_X)_p = id_{\Delta_p(X)},$$
por lo tanto
$$H_p(id_X) = id_{H_p(X)}.$$

b) Se muestra que
$$f_p \circ g_p = (f \circ g)_p$$
esto a su vez basta verificarlo para $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$, un simplejo singular. La afirmación sigue ahora de
$$(f \circ g) \circ \sigma = f \circ (g \circ \sigma).$$

□

Corolario 1.5.22. *Si X y Y son espacios topológicos homeomorfos entonces $H_p(X)$ y $H_p(Y)$ son grupos abelianos isomorfos. De modo explicito, si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo entonces*
$$H_p(f) : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$$
es un isomorfismo, más aún, su inversa está dada por
$$H_p(f)^{-1} = H_p(f^{-1}).$$

Demostración. Supongamos que $g : Y \longrightarrow X$ es una inversa continua de f. Tenemos que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "id_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces, por las propiedades funtoriales, que los siguientes también conmutan

$$\begin{tikzcd} H_p(X) \arrow[r, "H_p(f)"] \arrow[dr, "id_{H_p(X)}"'] & H_p(Y) \arrow[d, "H_p(g)"] \\ & H_p(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_p(Y) \arrow[r, "H_p(g)"] \arrow[dr, "id_{H_p(Y)}"'] & H_p(X) \arrow[d, "H_p(f)"] \\ & H_p(Y) \end{tikzcd}$$

□

Más importante aún, vale el siguiente.

Teorema 1.5.23 (Invarianza homotópica)**.** *Sean $f,g : X \longrightarrow Y$ funciones homotópicas. Se tiene entonces que*

$$H_p(f) = H_p(g) : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y).$$

Demostración. Véase el teorema 2.10 de [8]. □

Como consecuencia de la invarianza homotópica de la homología y de las propiedades funtoriales, se tiene la siguiente.

Proposición 1.5.24. *Si X e Y tienen el mismo tipo de homotopía entonces $H_p(X)$ es isomorfo a $H_p(Y)$. De modo más preciso, si $f : X \longrightarrow Y$ es equivalencia homotópica entonces $H_p(f) : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $g : Y \longrightarrow X$ inversa homotópica de f. Se tiene que

$$g \circ f \simeq id_X \quad f \circ g \simeq id_Y.$$

Se tiene entonces que

$$id_{H_p(X)} = H_p(id_X) = H_p(g \circ f) = H_p(g) \circ H_p(f),$$

análogamente, se tiene

$$H_p(f) \circ H_p(g) = id_{H_p(Y)}.$$

Así,

$$H_p(f) : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$$

es isomorfismo, con inversa

$$H_p(g) : H_p(Y) \longrightarrow H_p(X).$$

□

Es inmediato que, de la proposición anteror, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.5.25. *Sea $A \subset X$ un retracto por deformación de X, $i : A \hookrightarrow X$ la inclusión natural. Se tiene entonces que $H_p(i) : H_p(A) \longrightarrow H_p(X)$ es un isomorfismo.*

Demostración. A tiene el mismo tipo de homotopía que X. □

Podemos generalizar todo lo anterior a la categoria de parejas de espacios.

Definición 1.5.26. *Una pareja de espacios es un par ordenado de espacios topológicos (X,A) tal que $A \subset X$ es subespacio.*

Una función $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ entre parejas de espacios es una función $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$.

Observemos que si (X,A) es una pareja de espacios, se tiene que la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es continua e induce un morfismo $i_p : \Delta_p(A) \longrightarrow \Delta_p(X)$ el cual es claramente inyectivo.

Tenemos así, una sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow \Delta_p(A) \longrightarrow \Delta_p(C) \longrightarrow \Delta_p(X)/\Delta_p(A) \longrightarrow 0$$

ya que, como $\Delta_p(X)$ es abeliano, se tiene que $\Delta_p(A)$ es subgrupo normal de $\Delta_p(X)$ y así $\Delta_p(X)/\Delta_p(A)$ es un grupo abeliano, el cual lo denotamos por $\Delta_p(X,A)$.

Vamos a denotar por $\Delta_*(X)$ al complejo de cadena asociado a X

$$\cdots \longrightarrow \Delta_{p+1}(X) \longrightarrow \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_{p-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Sea (X,A) una pareja de espacios. Vamos a decir que $\Delta_*(A)$ es subcomplejo de $\Delta_*(X)$ y lo denotamos por $\Delta_*(A) < \Delta_*(X)$; tenemos así el complejo de cadena cociente asociado $\Delta_*(X)/\Delta_*(A)$, el cual le llamamos el cociente de $\Delta_*(X)$ por $\Delta_*(A)$ y lo denotaremos por $\Delta_*(X,A)$. De esto, tenemos una sucesión exacta de morfismos de complejos de cadena, esto es, tenemos

$$0 \longrightarrow \Delta_*(A) \xrightarrow{i_*} \Delta_*(X) \xrightarrow{\pi_*} \Delta_*(X)/\Delta_*(A) \longrightarrow 0$$

Observación 1.5.27.

- *Note que un elemento $[c] \in \Delta_p(X,A) = \Delta_p(X)/\Delta_p(A)$ esta representado por $c \in \Delta_p(X)$ y $\overline{\partial} : \Delta_p(X,A) \longrightarrow \Delta_{p-1}(X,A)$ está definido mediante $\overline{\partial}_p[c] = [\partial_p(c)]$.*
- *c_1 y c_1 representan el mismo elemento de $\Delta_p(X,A)$ si $c_1 - c_2 \in \Delta_p(A)$.*
- *$[c] \in Ker\overline{\partial}_p \Leftrightarrow \partial_p c \in \Delta_{p-1}(A)$.*
- $$\begin{aligned} [c] \in \Delta_p(X,A) &\Leftrightarrow [c] = \overline{\partial}_{p+1}([d]) \\ &\Leftrightarrow [c] = [\partial_{p+1}(d)] \\ &\Leftrightarrow c = \partial_{p+1}(d) + e, \quad e \in \Delta_p(A). \end{aligned}$$

Definición 1.5.28. *Sea (X,A) una pareja de espacios.*

- *Los elementos de $\Delta_p(X,A)$ se llaman p-cadenas de X relativas a A.*
- *Decimos que $c \in \Delta_p(X)$ es un p-ciclo relativo a A si $\partial_p(c) \in \Delta_{p-1}(A)$. El conjunto de p-ciclos relativos a A se denota por $Z_p(X,A) \subset \Delta_p(X)$.*

- *Diremos que $c \in \Delta_p(X)$ es una p-frontera relativa a A si existen $d \in \Delta_{p+1}(X)$, $e \in \Delta_p(A)$ tales que $c = \partial_{p+1}(d) + e$. El conjunto de p-fronteras relativas a A se denota $B_p(X,A) \subset \Delta_p(X)$.*

Observación 1.5.29.

- $[c] \in Ker\overline{\partial}_p \Longleftrightarrow c \in Z_p(X,A)$.
- $[c] \in Im\overline{\partial}_{p+1} \Longleftrightarrow c \in B_p(X,A)$.

Definición 1.5.30. *Sea (X,A) una pareja de espacios. Llamamos al p-ésimo grupo de homología asociado con el complejo $\Delta_*(X,A)$ el p-ésimo grupo de homología relativa a A y se denotará por $H_p(X,A)$.*

Notemos que se tiene

$$H_p(X,A) = Ker\overline{\partial}_p / Im\overline{\partial}_{p+1} = Z_p(X,A)/B_p(X,A).$$

Lema 1.5.31 (Morfismo conexión)**.** *Sea*

$$0 \longrightarrow \Delta_*(A) \xrightarrow{i_*} \Delta_*(X) \xrightarrow{\pi_*} \Delta_*(X,A) \longrightarrow 0$$

la sucesión exacta de morfismo de complejos de cadenas. Para cada $p \geq 0$, existe entonces un morfismo

$$\partial_* : H_p(X,A) \longrightarrow H_{p-1}(A).$$

Demostración. El morfismo conexión tiene regla de asignación $\partial_*[\alpha] = [\partial_p \alpha]$ con $\partial_p \alpha \in Z_{p-1}(A)$. □

Teorema 1.5.32 (Sucesión exacta larga de homología)**.** *Dada una pareja de espacios (X,A), se tiene una sucesión exacta larga de grupos abelianos*

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{H_p(i)} H_p(X) \xrightarrow{H_p(\pi)} H_p(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \longrightarrow H_{p-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

donde ∂_* es el morfismo conexión, $H_p(i)$ es el inducido por la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ y $H_p(\pi)$ es el inducido por la proyección $\pi : \Delta_p(X) \to \Delta_p(X,A)$, todos asociados al complejo de cadena

$$0 \longrightarrow \Delta_*(A) \xrightarrow{i_*} \Delta_*(X) \xrightarrow{\pi_*} \Delta_*(X,A) \longrightarrow 0$$

Una aplicación inmediata de lo anterior es el siguiente corolario.

Corolario 1.5.33. *Suponga que la pareja de espacios (X,A) satisface $H_p(X,A) = 0$ para todo p. Se tiene entonces que $H_p(X) = H_p(A)$ para todo p.*

Demostración. La sucesión exacta es en este caso

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_p(A) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

en particular

$$0 \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{H_p(i)} H_p(X) \longrightarrow 0$$

es exacta, así $H_p(i)$ es isomorfismo. □

Valen muchas propiedades análogos a lo visto anteriormente, que daremos a continuación. Ver proposición 2.19 de [8].

Definición 1.5.34.

- *Dos funciones de parejas de espacios $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ se dicen homotópicas relativas al par si existe $H : X \times I \longrightarrow Y$ una homotopía de f a g tal que $H(a, t) \in B$ para todo $a \in A$ y todo $t \in I$.*
- *Dos parejas de espacios (X, A), (Y, B) tienen el mismo tipo de homotopía si existen funciones $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, $g : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ tales que $g \circ f \simeq_{par} id_{(X,A)}$ y $f \circ g \simeq_{par} id_{(Y,B)}$.*

Lema 1.5.35. *Sea $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ continua, se tiene que $f_p : \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_p(Y)$ tal que $f_p(\Delta_p(A)) \subset \Delta_p(B)$ induce un morfismo de grupos $f_p : \Delta_p(X, A) \longrightarrow \Delta_p(Y, B)$ el cual pasa a homología, es decir,*

$$H_p(f) : H_p(X, A) \longrightarrow H_p(Y, B).$$

Valen las propiedades funtoriales.

Teorema 1.5.36. *Para $id_{(X,A)} : (X, A) \longrightarrow (X, A)$, $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, $g : (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$ funciones de parejas, valen*

- $H_p(id_{(X,A)}) = id_{H_p(X,A)}$
- $H_p(g \circ f) = H_p(g) \circ H_p(f)$

Teorema 1.5.37 (Invarianza homotópica)**.** *Si $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ son funciones homotópicas entre parejas entonces*

$$H_p(f) = H_p(g) : H_p(X, A) \longrightarrow H_p(Y, B).$$

En particular, si $(X, A) \simeq_{par} (Y, B)$ entonces $H_p(X, A)$ es isomorfo a $H_p(Y, B)$.

El siguiente teorema es de suma importancia a la hora de hacer cálculos con homología.

Teorema 1.5.38 (Excisión)**.** *Dados $Z \subset A \subset X$ subespacios de X tales que la clausura de Z está contenido en el interior de A, se tiene entonces que la inclusión $i : (X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ induce ismomorfismos*

$$H_p(i) : H_p(X - Z, A - Z) \longrightarrow H_p(X, A)$$

para todo p. Equivalentemente, para subespacios $A, B \subset X$ tales que $int(A) \cup int(B) = X$, se tiene entonces que la inclisión $i : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismos

$$H_p(i) : H_p(B, A \cap B) \longrightarrow H_p(X, A)$$

para todo p.

Demostración. Ver el teorema 2.20 de [8]. □

Corolario 1.5.39 (Homología local)**.** *Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ un punto cerrado. Se tiene que para cualquier vecindad abierta U de x_0 vale*

$$H_p(X, X - \{x_0\}) = H_p(U, U - \{x_0\}),$$

es decir, la homología de $(X, X - \{x_0\})$ depende solo de la homología alrededor de x_0.

Demostración. Sea $U = B$ y $A = X - \{x_0\} \subset X$ es abierto, así, $intB = U$ y $intA = A$ y $intA \cup intB = X$. Usando el teorema anterior se tiene un isomorfismo

$$H_p(i) : H_p(U, U - \{x_0\}) \longrightarrow H_p(X, X - \{x_0\}).$$

□

Otro teorema muy importante al calcular homología es el de Mayer-Vietoris.

Lema 1.5.40 (Complejo de cadena de Mayer-Vietoris)**.** *Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$ subespacios tales que $X = intA \cup intB$. Consideremos las inclusiones naturales*

$$i^A : A \cap B \hookrightarrow A \quad i^B : A \cap B \hookrightarrow B$$
$$j^A : A \hookrightarrow X \quad j^B \hookrightarrow X.$$

Se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow \Delta_*(A \cap B) \xrightarrow{\mu} \Delta_*(A) \oplus \Delta_*(B) \xrightarrow{\nu} \Delta'_*(X) \longrightarrow 0$$

es exacta; aquí

- $\mu_p(c) = (i^A_p(c), i^B_p(c))$

- $\Delta'_p(X) := j^A_p(\Delta_p(A)) + j^B_p(\Delta_p(B))$ *es subgrupo de* $\Delta_p(X)$.
- $\nu_p(a,b) = j^A_p(a) - j^B_p(b)$.

Teorema 1.5.41 (Mayer-Vietoris)**.** *Sean X, A, B, como en el lema anterior. Se tiene entonces que existe una sucesión exacta larga en homología*

$$\cdots \longrightarrow H_p(A\cap B) \longrightarrow H_p(A)\oplus H_p(B) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

Terminamos esta sección con un ejemplo de cálculo de homología.

Ejemplo 1.5.42 (Homología de S^n)**.** *Sea* S^n *la n-esfera. Sea*

$$S^n = D^n_{++} \cup D^n_{--}$$

donde D^n_{++}, D^n_{--} *son los hemisferios superior e inferior paro abarcando un* poco más *uno del otro; por ejemplo* $D^n_{++} = \{(x_1,...,x_{n+1} \in S^n : x_{n+1} \geq -\varepsilon \;\; y \;\; 1 > \varepsilon > 0 \;\; dado\}$. *Se tiene que*

$$int D^n_{++} \cup int D^n_{--} = S^n.$$

Podemos aplicar el teorema de Mayer-Vietoris, así consideramos la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H_p(D^n_{++}) \oplus H_p(D^n_{--}) \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow H_{p-1}(D^n_{++} \cap D^n_{--}) \longrightarrow \cdots$$

Como D^n_{++}, D^n_{--} *tiene el mismo tipo de homotopía que un punto, pues ambos son cantráctiles, así* $H_p(D^n_{++}) = H_p(D^n_{--}) = 0$*; se tiene lo siguiente.*

Para $p > 1$ *se tiene que la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow H_{p-1}(D^n_{++} \cap D^n_{--}) \longrightarrow 0$$

es decir, $H_p(S^n) = H_{p-1}(D^n_{++} \cap D^n_{--})$ *y como* $D^n_{++} \cap D^n_{--}$ *se retrae a* $S^{n-1} \subset S^n$ *se tiene entonces que*

$$H_p(S^n) = H_{p-1}(S^{n-1}).$$

Con esto, se tiene que

- *Para* $p > n > 0$,

$$H_p(S^n) = H_{p-1}(S^{n-1}) = \cdots = H_{p-n}(S^0) = 0 + 0 = 0.$$

- *Para* $n > p > 1$,

$$H_p(S^n) = H_{p-1}(S^{n-1}) = \cdots = H_1(S^{n-p+1>1}) = \pi_1(S^{n-p+1>1}) = 0.$$

- *Para $p = n$,*

$$H_n(S^n) = H_{n-1}(S^{n-1}) = \cdots = H_1(S^1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

En resumen, para $n > 0, p > 0$, tenemos

$$H_p(S^n) = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \mathbb{Z} & p = n. \end{cases}$$

Para terminar esta sección vamos a dar el siguiente resultado, el cual es muy útil en el cálculo de la homología de espacios CW-complejos. Éstos los vamos a utilizar al final de la sección 3.4 del capítulo 3 de esta tesis, para demostrar el corolario 3.4.6.

Teorema 1.5.43. *Sean X un espacio CW-complejo, $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Se tiene que*

a) $H_p(X^n, X^{n-1}) = 0$ *para $p \neq n$. , y $H_n(X^n, X^{n-1})$ es abeliano libre con base en correspondencia biyectiva con las n-celdas de X^n.*

b) $H_p(X^n) = 0$ *si $p > n$. En particular, si X es de dimensión finita entonces $H_p(X) = 0$ para $p > dim(X)$.*

c) $H_p(X^n, X^m) = 0$ *si $p > n$ ó $p \leq m$.*

No daremos la demostración del teorema anterior, pues se salen de nuestros intereses, ya que por ejemplo, en el inciso b), requiere de definir un concepto de sucesión exacta larga de una terna de espacios (X, A, B), donde $B \subset A \subset X$ son subespacios. El lector interesado en ésto, puede consultar [8, lema 2.34].

1.6. Orientación en variedades

En esta sección estudiaremos la noción de orientación de una variedad topológica, determinado de alguna manera mediante su homología local. Daremos una condición necesaria, mediante el grupo fundamental, para saber cuando una variedad topológica es orientable. También caracterizaremos la homología de una variedad orientable. En esta sección nos hemos basado principalmente en el libro [25].

Para empezar, recordemos qué es una variedad n-dimensional [15] [28].

Definición 1.6.1. *Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff M tal que para cada punto $p \in M$ existe una vecindad abierta de p que es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$. En ocasiones a M simplemente le diremos n-variedad topológica.*

Veamos algunos ejemplos de estos espacios.

Ejemplo 1.6.2.

a) *Es claro que* $\mathbb{R}^n$ *es una n-variedad topológica y cualquier abierto no vacío de* $\mathbb{R}^n$ *es también una n-variedad.*

b) *Se puede probar que que todo abierto no vacío de una variedad topológica es una variedad topológica de la misma dimensión.*

c) *Si* M *y* N *son variedades topológicas de dimensión* n *y* m*, respectivamente; se tiene entonces que* $M \times N$*, con la topología producto, es una variedad topológica de dimensión* $n+m$*.*

d) *Dado* $n \geq 1$*, sea* $S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 = 1\}$*, la n-esfera unitaria, que con la topología inducida por la de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *es un espacio topológico compacto (cerrado y acotado de* $\mathbb{R}^{n+1}$*). Veamos que* S^n *es una variedad topológica de dimensión* n*. Claramente* S^n *es de Hausdorff.*

Para cada $i = 1, ..., n+1$*, consideremos las* semiesferas abiertas

$$U_i^+ = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_i > 0\},$$
$$U_i^- = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_i < 0\}.$$

Claramente $U_i^{\pm}$ *son abiertos de* S^n *y se tiene que*

$$S^n = \cup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^-).$$

Consideremos el n-disco abierto centrado en el origen de radio 1*,*

$$D^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots x_n^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

y definamos las funciones

$$\phi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \longrightarrow D^n$$

por

$$\phi_i^{\pm}(x_1, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}).$$

Se tiene que $\phi_i^{\pm}$ *es continua, con inversa*

$$(\phi_i^{\pm})^{-1} : D^n \longrightarrow U_i^{\pm}$$

dada por

$$(\phi_i^{\pm})^{-1}(y_1, ..., y_n) = \left(y_1, ..., y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2}, y_i, ..., y_n \right).$$

Como $(\phi_i^{\pm})^{-1}$ *también es continua, deducimos que* $\phi_i^{\pm}$ *es un homeomorfismo. Por lo tanto,* S^n *es una n-variedad topológica.*

e) Veamos que, $\mathbb{RP}^n$, el espacio proyectivo real de dimensión n es una variedad topológica de dimensión n.

Recordemos que el espacio proyectivo real de dimensión n es el espacio cociente $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - 0)/\sim$, donde la relación de equivalencia $\sim$ está definido como sigue: dados $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - 0$,

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } \lambda \in \mathbb{R} - 0 \text{ tal que } x = \lambda y.$$

Consideremos la proyección natural al cociente $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} - 0 \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, el cual es una función cociente y es sobreyectiva.

En el ejemplo 1.2.16 verificamos que $\mathbb{RP}^n$ es un espacio de Hausdorff.

Por otro lado, para cada $i = 1, \ldots, n+1$, sean

$$O_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1} - 0$$

subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^{n+1} - 0$.

Como Π es continua y sobreyectiva, tenemos que $\Pi^{-1}(\Pi(O_i)) = O_i$. Así, el conjunto $V_i = \Pi(O_i)$ es abierto en $\mathbb{RP}^n$. Notemos que

$$V_i = \Pi(O_i) = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}] : x_i \neq 0\} \subset \mathbb{RP}^n.$$

Definamos

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

por

$$\varphi_i([x_1, \ldots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right).$$

Se puede verificar fácilmente que φ_i es biyectiva.

Veamos que φ_i es continua. Consideremos la composición

$$O_i \xrightarrow{\Pi} V_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^n$$

Se tiene que

$$\varphi_i \circ \Pi : O_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

está dada por

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right),$$

la cual es claramente continua. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, se tiene que

$$(\varphi_i \circ \Pi)^{-1}(A) = \Pi^{-1}(\varphi_i^{-1}(A))$$

es abierto en O_i, como Π es continua, se tiene que $\varphi_i^{-1}(A)$ es abierto en V_i; por lo tanto, φ_i es continua.

La inversa de φ_i es la función

$$\psi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i$$

dada por

$$\psi_i(x_1, ..., x_n) = [x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_i, ..., x_n],$$

la cual es continua, pues si consideramos, para cada $i = 1, ..., n+1$, la función continua $h_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - 0$ definido por $h_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_i, ..., x_n)$, se tiene que la siguiente composición

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{h_i} \mathbb{R}^{n+1} - 0 \xrightarrow{\Pi} V_i$$

es continua y es inmediato que $\psi_i = \Pi \circ h_i$ es continua.

Por lo tanto, φ_i es homeomorfismo y ademńas, no es difícil verificar que $\cup_i V_i = \mathbb{RP}^n$.

La siguiente proposición es el punto de partida hacia la orientación de variedades mediante la homología.

Proposición 1.6.3 (Homología local)**.** *Sea $x_0 \in X$ un punto cerrado. Se tiene que para cualquier vecindad $V \subset X$ de x_0 tal que $x_0 \in int(V)$ vale que*

$$H_q(X, X - \{x_0\}) = H_q(V, V - \{x_0\}),$$

es decir, la homología de $(X, X - \{x_0\})$ depende solo de la topología alrededor de x_0.

Demostración. Nos fijamos en $A := X - \{x_0\} \subset X$ que es abierto en X, así $A = int(A)$. Consideremos $U := X - V$. Afirmamos que $x_0 \notin \overline{U}$, pues $int(A) \cap U = int(V) \cap (X - V) = \emptyset$. Por lo tanto, $\overline{U} \subset X - \{x_0\} = int(A)$. Se tiene entonces, por el teorema de excisión, que

$$H_q(V, V - \{x_0\}) = H_q(X - U, A - U) = H_q(X, A) = H_q(X, X - \{x_0\}).$$

□

Recordemos los siguientes resultados.

Proposición 1.6.4. *Sean $x_0 \in X$ y V una vecindad de x_0. Si ∂V es retracto por deformación de $V - \{x_0\}$ entonces*

$$H_q(\partial V) = H_q(V - \{x_0\}).$$

Proposición 1.6.5. *Sea X espacio topológico y $V \subset X$ subespacio. Si V es contráctil entonces*

$$H_q(V) = 0 \quad \forall q > 0.$$

Tenemos el siguiente resultado

Proposición 1.6.6. *Sean $x_0 \in X$ y V una vecindad de x_0. Si V es contráctil y ∂V es retracto por deformación de $V - \{x_0\}$ entonces*

$$H_q(V, V - \{x_0\}) = H_{q-1}(\partial V) \quad \forall\, q > 1.$$

Demostración. Consideremos la pareja $(V, V - \{x_0\})$, se tiene una sucesión exacta larga en homología

$$\cdots \longrightarrow H_q(V) \longrightarrow H_q(V, V - \{x_0\}) \longrightarrow H_{q-1}(V - \{x_0\}) \longrightarrow \cdots$$

Si $q > 1$ tenemos que

$$0 \longrightarrow H_q(V, V - \{x_0\}) \xrightarrow[\text{iso}]{} H_{q-1}(V - \{x_0\}) \longrightarrow 0.$$

Así, tenemos que

$$H_q(V, V - \{x_0\}) = H_{q-1}(\partial V).$$

$\square$

Proposición 1.6.7. *Para una n-variedad M y $n > 1$. Se tiene que*

$$H_n(M, M - \{x_0\}) = \mathbb{Z} \quad \forall\ x_0 \in M.$$

Demostración. Sea $x_0 \in M$. Como M es una n-variedad, se tiene entonces que existe $V \subset M$ cerrado en M, la cual es homeomorfo a la n-bola cerrada, D^n, en $\mathbb{R}^n$, tal que $x_0 \in int(V)$ con (V, x_0) homeomorfo a $(D^n, 0)$. Así, ∂V es retracto por deformación de $V - \{x_0\}$ y V es contráctil, además $\partial V \approx S^{n-1}$.

De lo anterior, si $q > 1$ se tiene que

$$H_q(M, M - \{x_0\}) = H_q(V, V - \{x_0\}) = H_{q-1}(\partial V) = H_{q-1}(S^{n-1}).$$

Así, si $q = n$ se tiene que

$$H_n(M, M - \{x_0\}) = H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}.$$

$\square$

Definición 1.6.8. *Sea M una n-variedad. Una orientación local de M en $x_0 \in M$ es un generador de $H_n(M, M - \{x_0\}) = \mathbb{Z}$.*

Siguiendo la notación de la proposición anterior tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} H_n(M, M - \{x_0\}) &= H_n(V, V - \{x_0\}) \\ &= H_n(V, \partial V) \\ &= H_n(D^n, D^n - \{0\}) \\ &= H_n(D^n, S^{n-1}) \\ &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Así, considerando la inclusión $i : (V, \partial V) \to (M, M - \{x_0\})$, si $\{v\}$ denota un generador de $H_n(V, \partial V) = \mathbb{Z}$, a este generador $\{v\}$ le llamamos *clase fundamental*.

Tenemos así que $\{v\}_{x_0} := i_*\{v\}$ es una orientación local para M en x_0.

En general, si $\alpha \in H_n(V, \partial V)$ entonces podemos definir $\alpha_{x_0} := i_*(\alpha) \in H_n(M, M - \{x_0\})$.

Definición 1.6.9. *Una función*

$$o : M \to \bigsqcup_{x_0 \in M} H_n(M, M - \{x_0\})$$

se llama orientación de M si,

i) $o(x) \in H_n(M, M - \{x_0\})$ es orientación local en x.

ii) Para cada n-bola $V \subset M$ (es decir, $V \approx D^n$)) se puede elegir $\{v\} \in H_n(V, \partial V)$ clase fundamental tal que $o(x) = \{v\}_x \; \forall \; x \in int(V)$.

Decimos que M es orientable si existe una orientación para M.

Definición 1.6.10. *Sea M una n-variedad topológica. Definimos*

$$\widehat{M} = \{(x, o(x)) : x \in M, o(x) \in H_n(M, M - \{x\}) \text{ es orientación local}\}.$$

Analicemos la proyección natural a la primera entrada

$$\begin{array}{rcl} p : \widehat{M} & \longrightarrow & M \\ (x, o(x)) & \mapsto & x \end{array}$$

Observación 1.6.11.

i) p es suprayectiva.

ii) *La preimágen $p^{-1}(x)$ tiene exactamente 2 elementos (hay 2 generadores en $H_n(M, M - \{x_0\}) = \mathbb{Z}$).*

iii) *Si $B \subset M$ es una n-bola, se tiene entonces que*

$$p^{-1}(intB) = \{(x, \alpha_x) : x \in intB\} \cup \{(x, -\alpha_x) : x \in intB\}$$

donde $\alpha \in H_n(B, \partial B)$ es clase fundamental.

Denotemos por

$$B_\alpha = \{(x, \alpha_x) : x \in intB\} \quad y \quad B_{-\alpha} = \{(x, -\alpha_x) : x \in intB\},$$

se tiene que

$$B_\alpha \cap B_{-\alpha} = \emptyset.$$

iv) *Para una n-bola $B \subset M$ con clase fundamental α, se tiene que la restricción*

$$p_\alpha := p\,|_{B_\alpha} : B_\alpha \to intB$$

es una biyección.

Definición 1.6.12. *Decimos que un conjunto $\widehat{U} \subset \widehat{M}$ es abierto si $p_\alpha(\widehat{U} \cap B_\alpha) \subset M$) es abierto en M, para todo $\alpha \in H_n(B, \partial B)$ clase fundamental y para todo n-bola B.*

Proposición 1.6.13. *La colección de los conjuntos abiertos ,$\widehat{U}$, de la definición anterior forman una topología para $\widehat{M}$.*

Proposición 1.6.14. *La topología de $\widehat{M}$ hace a $p_\alpha : B_\alpha \to intB$ un homeomorfismo.*

Lema 1.6.15. *Se tiene que $B_\alpha \subset \widehat{M}$ es abierto.*

Demostración. Por la definición de la topología, queremos ver que $p_{\alpha'}(B_\alpha \cap B'_{\alpha'})$ es abierto en M, para todo α' clase fundamental de $H_n(B', \partial B')$ y $B' \subset M$ n-bola.

Fijamos $B' \subset M$ n-bola y $\alpha' \in H_n(B', \partial B')$. Se tiene que

$$p_{\alpha'}(B_\alpha \cap B'_{\alpha'}) = \{x \in intB \cap intB' : \alpha_x = \alpha'_\alpha\} \subset M.$$

Denotemos por $U = \{x \in intB \cap intB' : \alpha_x = \alpha'_x\} \subset M$. Sea $x \in U$, así $x \in intB \cap intB'$, se tiene que existe una n-bola B'' conteniendo a x en su interior tal que $B'' \subset intB \cap intB'$.

Veamos que $intB'' \subset U$. Para cada $y \in inyB''$, $M - intB''$ es retracto por deformación de $M - \{y\}$, así, se tiene que $H_n(M, M - intB'') = H_n(M, M - \{y\})$.

La condición $\alpha_y = \alpha'_y$ significa que α y α' tienen la misma imagen en $H_n(M, M - intB'')$.

$$\begin{tikzcd} & \alpha' \in H_n(B', \partial B') \arrow[d] \\ \alpha \in H_n(B, \partial B) \arrow[r] & H_n(M, M - \{y\}) = H_n(M, M - intB'') \end{tikzcd}$$

La condición $\alpha_y = \alpha'_y$ es entonces independiente de $y \in intB''$ y como para $y = x$ ya se tiene $\alpha_x = \alpha'_x$, se sigue que $\alpha_y = \alpha'_y$ para todo $y \in intB''$, es decir, $intB'' \subset U$.

Así, para cada $x \in U$ hemos encontrado una n-bola B'' conteniendo a x en su interior y $B'' \subset U$, así, U es abierto. □

Teorema 1.6.16.

- *$p : \widehat{M} \to M$ es un cubriente de 2 hojas.*
- *Una función*
$$o : M \to \bigsqcup_{x \in M} H_n(M, M - \{x\})$$
es una orientación si y solo si
$$\begin{array}{rcl} s : M & \longrightarrow & \widehat{M} \\ x & \mapsto & (x, o(x)) \end{array}$$
es una sección de p (es decir, s es continua tal que $p \circ s = id_M$.)

Demostración.

- Por la observación 1.6.11 y proposición 1.6.14.
- $(\Rightarrow)$ Si
$$o : M \to \bigsqcup_{x \in M} H_n(M, M - \{x\})$$
es una orientación, se tiene que para cada n-bola $B \subset M$, se puede elegir $\alpha \in H_n(B, \partial B)$ una clase fundamental tal que $o(x) = \alpha_x$ para todo $\alpha \in intB$.

  Así,
$$\begin{array}{rcl} s : M & \longrightarrow & \widehat{M} \\ x & \mapsto & (x, o(x)) \end{array}$$
es una función tal que $s\,|_{intB}: intB \to B_\alpha$ es la inversa de $p_\alpha : B_\alpha \to intB$, el cual es homeomorfismo y así $s\,|_{intB}$ es continua.

  $(\Leftarrow)$ Reciprocamente, si
$$\begin{array}{rcl} s : M & \longrightarrow & \widehat{M} \\ x & \mapsto & (x, o(x)) \end{array}$$
es una sección de p, se tiene que s es continua. Como $B \subset M$, se tiene que $intB$ es conexo, así $s(intB) \subset B_\alpha$ para algún α clase fundamental (B_α es una de las 2 hojas, ya que $B_\alpha \cap B_{-\alpha} = \emptyset$), esto quiere decir que hay una clase fundamental $\alpha \in H_n(B, \partial B)$ tal que $s(x) = (x, \alpha_x)$ para todo $x \in intB$, es decir, $o(x) = \alpha_x$ para todo $x \in intB$. Así, o es orientación. □

El siguiente corolario es importante, pues reescribe orientabilidad en términos de cubrientes.

Corolario 1.6.17. *M es orientable si y solo si $p : \widehat{M} \to M$ es un cubriente trivial.*

Demostración. Si M es orientable, se tiene que existe una orientación o y por el teorema anterior existe $s : M \to \widehat{M}$ una sección de $p : \widehat{M} \to M$.

Consideremos $S^0 = \{-1, 1\}$. Afirmamos que $p_1 : M \times S^0 \to M$ equivale a $p : \widehat{M} \to M$.

Consideremos

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M \times S^0 & \longrightarrow & \widehat{M} \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & (x, \varepsilon o(x)), \end{array}$$

φ es continua y hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times S^0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & \widehat{M} \arrow[d, "p"] \\ & M \end{tikzcd}$$

se verifica que φ es homeomorfismo.

Recíprocamente, Si $p : \widehat{M} \to M$ es un cubriente trivial, se tiene entonces que existe un homeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M \times S^0 & \longrightarrow & \widehat{M} \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & (x, \varepsilon o(x)), \end{array}$$

que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} M \times S^0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & \widehat{M} \arrow[d, "p"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Se tiene una sección de p

$$\begin{array}{rcl} s : M & \longrightarrow & \widehat{M} \\ x & \mapsto & \varphi(x, 1). \end{array}$$

Así, o es una orientación y M es orientable $\square$

Para concluir esta sección reescribiremos la condición de orientabilidad en términos del grupo fundamental (proposición 1.6.21).

Consideremos la aplicación cubriente $p : \widehat{M} \to M$ y $x_0 \in M$. Sea $\omega : [0, 1] \to M$ un camino tal que $\omega(0) = x_0$ y $\omega(1) = x_1$. Eligiendo orientaciones locales $o(x_0)$ sobre x_0, se tiene entonces que existe un único camino

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\omega} : [0, 1] & \longrightarrow & \widehat{M} \\ t & \mapsto & (\omega(t), o(\omega(t))), \end{array}$$

con $\widehat{\omega}(0) = (x_0, o(x_0))$, levantando a ω,

$$\begin{tikzcd} & \widehat{M} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\widehat{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & M \end{tikzcd}$$

es decir, $\omega = p \circ \widehat{\omega}$. Supongamos que $\widehat{\omega}(1) = (x_1, o(x_1))$, en este caso decimos que la orientación local $o(x_1)$ en x_1 viene de trasladar la orientación local $o(x_0)$ a través de ω y escribimos $o(x_1) = o_\omega(x_1)$.

Definición 1.6.18. *Un lazo $\widehat{\omega} : I \longrightarrow \widehat{M}$ se dice que preserva orientación si $o_\omega(x_1) = o(x_0)$ y que invierte orientación si $o_\omega(x_1) = -o(x_0)$.*

Teorema 1.6.19.

1) $o_\omega(x_1)$ solo depende de la clase de homotopía de ω, esto es,

$$\omega \simeq_c \omega' \quad \Rightarrow \quad o_\omega(x_1) = o_{\omega'}(x_1).$$

Así, si $\omega \simeq_c 0$ entonces ω preserva orientación.

2) Si ω, γ son caminos conectables entonces

$$o_{\omega * \gamma}(x_1) = o_\gamma(o_\omega(x_1)).$$

3) Si ω es un lazo entonces $\omega * \omega$ preserva orientación.

Corolario 1.6.20. *Se tiene que el conjunto*

$$\{[\omega] \in \pi_1(M, x_0) : \omega \text{ preserva orientación}\}$$

es subgrupo de $\pi_1(M, x_0)$.

Observación. Se tiene que

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(\widehat{M}, \widehat{x_0})) &= \{[p \circ \gamma] : [\gamma] \in \pi_1(\widehat{M}, \widehat{x_0})\} \\ &= \{[\omega] \in \pi_1(M, x_0) : \omega \text{ preserva orientación}\}. \end{aligned}$$

Proposición 1.6.21. *Sea M una n-variedad arco-conexa. M es orientable si y solo si*

$$p_*(\pi_1(\widehat{M}, \widehat{x_0})) = \pi_1(M, x_0).$$

Demostración. Si M es orientable, se tiene que p es cubriente trivial, es decir, $\widehat{M} = M \times S^0$. Sea $\omega : I \to M$ un lazo en x_0, así, se tiene un lazo $\widehat{\omega} : I \to \widehat{M}$, $\widehat{\omega}(t) = (\omega(t), 1)$, levantando a ω,

$$\begin{tikzcd} & \widehat{M} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\widehat{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & M \end{tikzcd}$$

esto es, $p \circ \widehat{\omega} = \omega$; así, se tiene que

$$[\omega] = [p \circ \widehat{\omega}] = p_*[\widehat{\omega}] \in p_*(\pi_1(\widehat{M}, \widehat{x}_0)).$$

Recíprocamente, si $p_*(\pi_1(\widehat{M}, \widehat{x}_0)) = \pi_1(M, x_0)$, en particular se tiene que

$$(id_M)_*(\pi_1(M, x_0)) = \pi_1(M, x_0) \subset p_*(\pi_1(\widehat{M}, \widehat{x}_0)).$$

Como M es arco-conexo, se tiene entonces que existe un único $s : M \to \widehat{M}$ levantando a id_M,

$$\begin{tikzcd} & (\widehat{M}, \widehat{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (M, x_0) \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[r, "id_M"'] & (M, x_0) \end{tikzcd}$$

es decir, $p \circ s = id_M$, así, $s : M \to \widehat{M}$ es sección global del cubriente $p : \widehat{M} \to M$, con esto, se tiene que p es trivial y M es orientable. □

Observación. Si $H = p_*(\pi_1((\widehat{M}, \widehat{x}_0))$ es subgrupo propio de $G = \pi_1(M, x_0)$, se tiene que H es de índice 2, pues todo lazo $\omega \in G$ satisface $\omega^2 \in H$; y así, H es subgrupo normal de G.

Corolario 1.6.22. *Para una n-variedad arco-conexa M se tiene que si $\pi_1(M)$ no contiene subgrupos de índice 2 entonces M es orientable.*

Corolario 1.6.23. *Si M es n-variedad arco-conexa y simplemente conexa entonces es orientable.*

Los siguientes dos resultados son muy importantes, pues nos dan información de la homología de una variedad orientable. La demostración puede consultarse en [13].

Teorema 1.6.24. *Sea M una n-variedad topológica y $A \subset M$ un subconjunto compacto orientable con un número finito k de componentes conexas. Se tiene entonces que*

$$H_n(M, M - A) = \mathbb{Z}^k.$$

Para las variedades compactas y conexas tenemos una caracterización muy simple de la orientabilidad en términos de su homología:

Corolario 1.6.25. *Si M es una n-variedad topológica compacta y conexa entonces se cumple que*

$$H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } M \text{ es orientable} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1.7. Algunas palabras sobre la conjetura de Poincaré

En 1904, el matemático francés, Henri Poincaré planteó un problema sobre topología de variedades de dimensión 3. Popularmente se le llama conjetura de Poincaré, a pesar de que el célebre matemático francés lo planteó como una pregunta [22].

Poincaré observa que una propiedad caracteristica de la 2-esfera S^2 es que se trata de una 2-variedad simplemente conexa, o sea, toda curva cerrada y sin autountersecciones contenida en la variedad se puede deformar a un punto de manera continua. Esto le lleva a plantearse si la misma cuestión es cierta en dimensión 3. Así, formula una pregunta

¿Es la 3-esfera la única 3-variedad cerrada tal que toda curva cerrada simple se contrae a un punto?

Poco después, se plantea como conjetura que, usando un lenguaje actual, quedando del siguiente modo.

Conjetura 1.7.1 (Poincaré)**.** *Toda* 3*-variedad cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera S^3.*

Esta conjetura ha sido abordada de una u otra manera por todos los topologos que han estudiado variedades tridimensionales en los últimos cien años. Este problema tardó más de un siglo en resolverse, hasta que en el 2006, el matemático ruso G. Perelman dió una demostración de la conjetura de Poincaré [16], [21], [12].

De hecho, Perelman demostró otro problema, conocido como la conjetura de geometrización de Thurston, enunciada por William P. Thurston [27], el cual dice que cualquier 3-variedad es geométrica o se puede descomponer (por cirugía a lo largo de esferas y toros incompresibles) en variedades gaométricas. Este teorema de geometrización implica, de manera particular, la veracidad de la conjetura de Poincaré [16], [21], [12].

En este trabajo de tesis, a la conjetura de Poincaré, le vamos a llamar teorema de Perelman-Poincaré, pues aunque el teorema de Perelman es el teorema de geometrización, le atribuimos, de hecho, a Perelman la demostración de la conjetura de Poincaré, y lo enunciamos como sigue.

Teorema 1.7.2 (Perelman-Poincaré)**.** *Toda* 3*-variedad cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a* S^3.

Capítulo 2

El hiperespacio producto simétrico de un continuo

La teoría de continuos e hiperespacios es un área muy interesante en la matemática. En 1883, G. Cantor [6] da las primeras nociones del concepto de continuo. Los hiperespacios tuvieron sus inicios aproximadamente en 1900, con los trabajos de F. Hausdorff [9] y L. Vietoris [29].

En este capítulo estudiamos el concepto de un continuo y sus hiperespacios, y nos adentramos en el estudio de hiperespacios conocidos como los productos simétricos y mostramos que estos son, también, continuos. También estudiamos modelos geométricos de los productos simétricos.

2.1. Definición y ejemplos de continuos

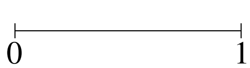
Esta sección esta dedicado principalmente para familiazarnos con el concepto de un continuo.

Definición 2.1.1. *Un continuo es un espacio métrico no vacío compacto y conexo.*

A continuación, damos algunos ejemplos más usuales de continuos.

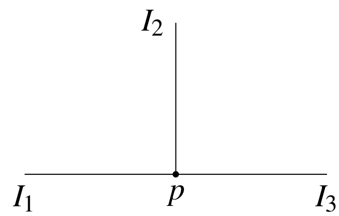
Ejemplo 2.1.2.

a) *El intervalo cerrado* $[0,1]$ *es un continuo que denotaremos por* I. *Un arco es cualquier espacio homeomorfo a* $[0,1]$. *Así, un arco es un continuo, ya que* $[0,1]$ *es un continuo.*



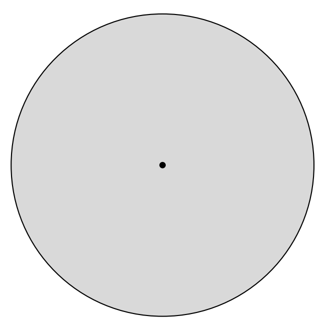
$[0,1]$

b) *Un triodo simple* T_3 *es la unión de tres arcos* I_1, I_1, I_3 *que coinciden exactamente en un punto extremo* p *y tales que, por pares, los conjuntos* $I_1 \setminus \{p\}$, $I_2 \setminus \{p\}$ *y* $I_3 \setminus \{p\}$ *son disjuntos. Un triodo simple es un continuo.*



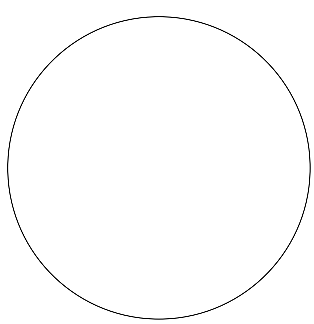
T_3

c) *Dado* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $\varepsilon > 0$, *la bola cerrada* $B_d(x, \varepsilon)$ *es un continuo. En particular,* $D^n = \{a \in \mathbb{R}^n : \| a \| \leq 1\}$, *el n-disco es un continuo.*

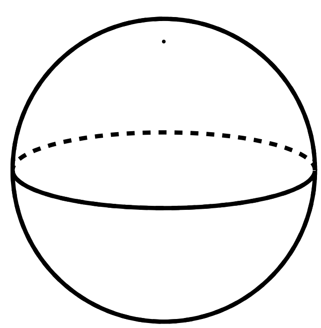


D^2

d) *Se tiene que la n-esfera,* S^n, *es un continuo. En particular, el círculo unitario* S^1 *es un continuo. Cualquier continuo homeomorfo a* S^1 *se llama curva cerrada simple.*

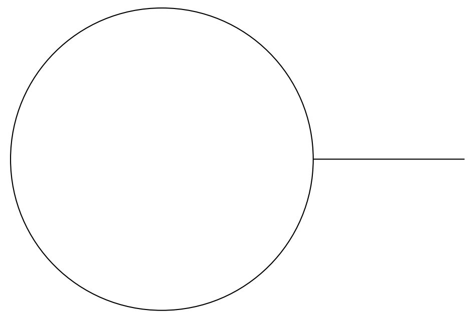


S^1



S^2

e) *Sea* $P = S^1 \cup ([1,2] \times \{0\})$. *Se tiene que* P *es un continuo, el cual se conoce como la paleta.*



P

Existen continuos no tan triviales, más complejos, que son objeto de estudio en la teoria de continuos, tales como la curva senoidal del topólogo, el Círculo de Varsovia, hay continuos que se pueden construir a partir de otros continuos, tal como el cubo de Hilbert, la carpeta de Sierpinski y la curva universal de Menger. No estudiaremos estos tipos de continuos, ya que se salen de nuestros propósitos. El lector interesado en estos temas puede consultar [20].

2.2. Hiperespacios

En esta sección estudiaremos algunos hiperespacio de un continuo y algunos de sus propiedades; el cual, dotado de un métrica, resulta ser un continuo.

Definición 2.2.1. *Un hiperespacio de un continuo X es una colección de subconjuntos de X que satisface cierta propiedad específica.*

Los hiperespacios de un continuo X más estudiados son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \ \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\}.$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$
$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como se puede ver, todos estos subconjuntos se definen de 2^X, además se tiene que $F_1(X) = \{\{p\} : p \in X\}$, $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.2. *Dados* $\varepsilon > 0$, $p \in X$ *y* $A \in 2^X$. *Se definen:*

$$B_d^X(\varepsilon, p) = \{q \in X : d(p,q) < \varepsilon\} \quad y$$
$$N_d^X(\varepsilon, A) = \{x \in X : \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } d(a,x) < \varepsilon\}.$$

A $B_d^X(\varepsilon, p)$ se le llama bola de radio ε centrada en p y a $N_d^X(\varepsilon, A)$ se le llama la nube de radio ε centrada en A.

En general y cuando no exista confusión con respecto a la métrica d y el espacio X en que se estén definiendo dichos conjuntos usaremos la siguiente notación:

$$B_d^X(\varepsilon, p) = B_\varepsilon(p),$$
$$N_d^X(\varepsilon, A) = N(\varepsilon, A).$$

Proposición 2.2.3. *Se tiene que*

$$B(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$$

Demostración. Si $x \in N(\varepsilon, A)$ entonces existe $a \in A$ tal que $d(a,x) < \varepsilon$, así, $x \in B_\varepsilon(a)$ para algún $a \in A$, se tiene entonces que

$$x \in \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$$

Si $x \in \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$ entonces existe $a \in A$ tal que $x \in B_\varepsilon(a)$, así, $d(a,x) < \varepsilon$, se tiene entonces que $x \in N(\varepsilon, A)$. □

Observemos que $N(\varepsilon, A)$ es un conjunto abierto.

Definición 2.2.4. *Definamos $H : 2^X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mediante*

$$H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \;\; y \;\; B \subseteq N(\varepsilon, A)\},$$

para todo $A, B \in 2^X$.

Teorema 2.2.5. *Se tiene que $H(A,B)$ es una métrica para 2^X.*

Demostración.

a) H está bien definida:

Sean $A, B \in 2^X$. Como $A \neq \emptyset$ entonces existe $a \in A$. Como $B \subset X$ es cerrado y X es compacto entonces B es compacto, por lo que B es acotado, así, existe $x \in X$ y $\delta > 0$ tal que $B \subseteq B_\delta(x)$. Sea $\varepsilon = d(a,x) + \delta > 0$,así

$$B \subseteq B_\varepsilon(a) \subseteq N(\varepsilon, A);$$

pues, para $b \in B$, obtenemos que

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < d(a,x) + \delta = \varepsilon.$$

Por tanto, se tiene que
$$B \subseteq N(\varepsilon, A).$$
Análogamente, sea $\varepsilon_1 > 0$ tal que
$$A \subseteq N(\varepsilon_1, B).$$
Sea $\varepsilon_2 = \{\varepsilon, \varepsilon_1\}$ entonces se tiene que
$$A \subseteq N(\varepsilon_1, B) \subseteq N(\varepsilon_2, B) \;\text{ y }\; B \subseteq N(\varepsilon, A) \subseteq N(\varepsilon_2, A).$$
Por lo tanto,
$$\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \;\text{ y }\; B \subseteq N(\varepsilon, A)\} \neq \emptyset,$$
pues ε_2 está en el conjunto anterior y como éste es acotado inferiormente por el cero, se tiene entonces que existe el ínfimo;
$$inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \;\text{ y }\; B \subseteq N(\varepsilon, A)\}.$$
Con esto probamos que $H(A,B)$ está bien definida.

b) Para todo $A, B \in 2^X$, se tiene que $H(A,B) \geq 0$, pues $H(A,B)$ es ínfimo de puros términos positivos.

c) Para todo $A, B \in 2^X$, es claro que se tiene que $H(A,B) = H(B,A)$, pues en la definición de H, A y B juegan papeles simétricos.

d) Sean $A, B \in 2^X$, veamos que $H(A,B) = 0 \;\Leftrightarrow\; A = B$.

En efecto, si $A = B$ entonces
$$H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\varepsilon, A)\} = 0.$$
Supongamos que $H(A,B) = 0$. Veamos que $B \subset A$ y $A \subset B$.

Veamos primero la contensión $B \subset A$. Sea $b \in B$. Como A es cerrado se tiene que $A = \overline{A}$, donde $\overline{A}$ denota la cerradura de A en X, así, es sufuciente ver que $b \in \overline{A}$, esto es, para todo $\delta > 0$ se tiene que $B_\delta(b) \cap A \neq \emptyset$.

Sea
$$\delta > 0 = H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \;\text{ y }\; B \subseteq N(\varepsilon, A)\},$$
entonces existe
$$\varepsilon \in \{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \;\text{ y }\; B \subseteq N(\varepsilon, A)\}$$

tal que $\varepsilon < \delta$, así

$$A \subseteq N(\varepsilon, B) \subset N(\delta, B) \;\; \text{y} \;\; B \subseteq N(\varepsilon, A) \subset N(\delta, A).$$

Como $B \subset N(\delta, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a,b) < \delta$, es decir, $a \in B_\delta(b)$, por lo tanto

$$B_\delta(b) \cap A \neq \emptyset.$$

por lo tanto $b \in \overline{A} = A$. De manera similar se prueba que $A \subset B$. Por lo tanto $A = B$.

e) Antes de probar la desigualdad del triángulo, primero vamos a demostrar el siguiente hecho.

Sean $A, B, C \in 2^X$ y $\varepsilon, \delta > 0$. Si $A \subseteq N(\varepsilon, C)$ y $C \subseteq N(\delta, B)$ entonces $A \subseteq N(\varepsilon + \delta, B)$. En efecto, sea $a \in A \subseteq N(\varepsilon, C)$,así, existe $c \in C$ ta que $d(c,a) < \varepsilon$; como $c \in C \subseteq N(\delta, B)$ entonces existe $b \in B$ tal que $d(b,c) < \delta$; así tenemos que

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < \varepsilon + \delta.$$

Por lo tanto $A \subseteq N(\varepsilon + \delta, B)$.

Ahora, sean $A, B, C \in 2^X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&H(A,C) + H(C,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, C) \;\; \text{y} \;\; C \subseteq N(\varepsilon, A)\} \\
&+ inf\{\delta > 0 : C \subseteq N(\delta, B) \;\; \text{y} \;\; B \subseteq N(\delta, C)\} \\
&= inf\{\varepsilon + \delta > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, C) \;\; \text{y} \;\; C \subseteq N(\varepsilon, A) \;\; \text{y} \;\; C \subseteq N(\delta, B) \\
&\text{y} \;\; B \subseteq N(\delta, C)\} \\
&\geq inf\{\varepsilon + \delta > 0 : A \subseteq N(\varepsilon + \delta, B) \;\; \text{y} \;\; B \subseteq N(\varepsilon + \delta, A)\} \\
&= inf\{\lambda > 0 : A \subseteq N(\lambda, B) \;\; \text{y} \;\; B \subseteq N(\lambda, A)\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos

$$H(A,C) + H(C,B) \geq H(A,B).$$

□

Definición 2.2.6. *La métrica $H(A,B)$ para 2^X se le llama la métrica de Hausdorff para 2^X.*

Así, tenemos que $(2^X, H)$ es un espacio métrico. De hecho, en [20, teorema 4.13] se prueba que 2^X es un espacio topológico compacto y en [14, corolario 6.12], 2^X es conexo por trayectorias (en particular, conexo). Por lo que 2^X con la métrica de Hausdorff resulta ser un continuo [14, corolario 6.13].

Para entender un poco más al hiperespacio 2^X con la métrica de Hausdorff, veamos una de sus propiedades.

Teorema 2.2.7. *Sean $A,B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Se tiene entonces que $H(A,B) < \varepsilon$ si y solo si $A \subseteq N(\varepsilon,B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon,A)$.*

Demostración. Supongamos primero que $H(A,B) < \varepsilon$, entonces existe

$$\delta' \in \{\delta > 0 : A \subseteq N(\delta,B) \ \text{ y } \ B \subseteq N(\delta,A)\}$$

tal que $\delta' < \varepsilon$; se tiene entonces que $A \subseteq N(\delta',B) \subseteq N(\varepsilon,B)$ y $B \subseteq N(\delta',A) \subseteq N(\varepsilon,A)$, por lo tanto $A \subseteq N(\varepsilon,B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon,A)$.

Ahora, supongamos que $A \subseteq N(\varepsilon,B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon,A)$. Consideremos la familia $\mathscr{N} = \{N(\delta,A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$. Sea $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$, pues $B \subseteq N(\varepsilon,A)$. Tomando $\delta_0 > 0$ tal que $d(a,b) < \delta_0 < \varepsilon$, tenemos que $b \in N(\delta_0,A$ y $N(\delta_0,A) \in \mathscr{N}$. Lo anterior muestra que $\mathscr{N}$ es una cubierta abierta para B. Como B es compacto, existen $\delta_1,\delta_2,...,\delta_n \in (0,\varepsilon)$ tales que $B \subset \cup_{i=1}^{n} N(\delta_i,A)$. Consideremos $\gamma_1 = \text{máx}\{\delta_1,...,\delta_n\}$, se tiene entonces que $\gamma_1 \in (0,\varepsilon)$ y $B \subseteq N(\gamma_1,A)$. De manera análoga obtenemos que existe $\gamma_2 \in (0,\varepsilon)$ tal que $A \subseteq N(\gamma_2,B)$. Tomando $\gamma = \text{máx}\{\gamma_1,\gamma_2\}$, se tiene que $A \subseteq N(\gamma,B)$ y $B \subseteq N(\gamma,A)$. Así,

$$\gamma \in \{\delta > 0 : A \subseteq N(\delta,B) \ \text{ y } \ B \subseteq N(\delta,A)\}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$H(A,B) \leq \gamma < \varepsilon.$$

□

2.3. Productos simétricos

Ahora nos encaminaremos hacia nuestros propósitos enfocandonos en un hiperespacio en particular, los llamados productos siméticos, que esencialmente éstos son los hiperespacios en los que estaremos interesados; los cuales fueron introducidos por primera vez por los matemáticos K. Borsuk y S. Ulam [4].

Definición 2.3.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, al hiperespacio $F_n(X)$ se le llama el n-ésimo producto simétrico de X.*

Hemos visto que $F_n(X) \subset 2^X$, así, la restricción de la métrica de Hausdorff de 2^X a $F_n(X)$ hace de $F_n(X)$ un espacio métrico. Como primer resultado tenemos que $F_1(X)$ es homeomorfo a X.

Teorema 2.3.2. *La función $f : X \longrightarrow F_1(X)$ definida, para cada $x \in X$, mediante $f(x) = \{x\}$, es un homeomorfismo.*

Demostración. Es claro que la función f es biyectiva.

Para ver la continuidad de f. Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que si $x, y \in X$ tales que $d(x,y) < \varepsilon$ entonces $H(\{x\},\{y\}) < \varepsilon$, pues $\{x\} \subset N(\varepsilon,\{y\})$ y $\{y\} \subset N(\varepsilon,\{x\})$. Por lo tanto f es uniformemente continua, y por lo tanto continua. ASí que f es una función suprayectiva y continua entre el espacio compacto X y el espacio Hausdorff $F_1(X)$, lo que implica que f es un homeomorfismo. □

Así, podemos pensar a X contenido en $F_n(X)$, ya que $F_1(X)$ es una imágen homeomorfa de X contenido en $F_n(X)$.

Consideremos el producto topológico $X^n = \prod_{i=1}^{n} X_i$, donde $X_i = X$, para todo $i \in \{1,...,n\}$. Al considerar la métrica del máximo en X^n, esto es, para $x = (x_i)$ y $y = (y_i)$ en X^n, definimos la distancia de x a y como

$$\rho(x,y) = \text{máx}\{d_X(x_i,y_i) : i \in \{1,...,n\}\},$$

se tiene entonces que ρ es una métrica para X^n y la topología inducida por esta métrica es la topología producto de X^n, ver [19, teorema 20.3].

A la métrica ρ definida para X^n, se le conoce también como métrica producto. El siguiente resultado nos da una relación entre X^n y $F_n(X)$.

Proposición 2.3.3. *Consideremos la función $f : X^n \longrightarrow F_n(X)$, dada por $f(x_1,x_2,...,x_n) = \{x_1,x_2,...,x_n\}$, para cada $(x_1,x_2,...,x_n) \in X^n$. Se tiene entonces que f es una función continua y sobreyectiva.*

Demostración. Primero veamos que f es sobreyectiva. Si $A \in F_n(X)$ entonces $A = \{x_1,...,x_m\}$ con $m \leq n$ y $a_i \in X$ para cada $i \in \{1,...,m\}$. Si $m = n$ entonces $f(x_1,..,x_m) = A$. Si $m < n$, basta considerar $a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_n = a_m$ para tener que $f(a_1,...,a_m,a_{m+1},...,a_n) = A$. Por lo tanto f es sobreyectiva.

Ahora demostraremos que f es uniformemente continua y por lo tanto continua. Sea $\varepsilon > 0$. supongamos que $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n) \in X^n$ y que $\rho(x,y) < \varepsilon$. Se tiene entonces que $d_X(x_i,y_i) < \varepsilon$, para todo $i \in \{1,...,n\}$. Luego, como $x_i \in f(x)$ y $y_i \in f(y)$, tenemos que $f(x) \subseteq N(\varepsilon, f(y))$ y $f(y) \subseteq N(\varepsilon, f(x))$, luego, por el teorema 2.2.7, se tiene que $H(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Así, f es uniformemente continua y en consecuencia continua. □

Así, $F_n(X)$ es imagen continua de X^n,y ya que X es un continuo, esto implica que X^n es un continuo, ver [14] [19]. Así, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3.4. *El hiperespacio $F_n(X)$ es un continuo.*

2.3.1. Algunos ejemplos de productos simétricos

Por lo general resulta difícil imaginar cómo es el hiperespacio de un continuo dado. Por esta razón recurrimos a los modelos geométricos, para tener una visualización.

Un modelo geométrico de un hiperespacio es algún espacio topológico bien conocido, el cual es homeomorfo a dicho hiperespacio y que en varias ocasiones lo podemos visualizar geométricamente. En lo que sigue, damos algunos ejemplos de estos hiperespacios.

Modelo de $F_2([0,1])$

El continuo más sencillo es el intervalo unitario $[0,1]$. Veamos cual es el modelo para el segundo producto simétrico $F_2([0,1])$.

Consideremos la función $f:[0,1]^2 \longrightarrow F_2([0,1])$ dado por $f(x,y)=\{x,y\}$ que, por la proposición 2.3.3, es continua y sobreyectiva.

Sea $T=\{(a,b)\in I^2 : 0\le a\le b\le 1\}$. Notemos que T es el triángulo superior del cuadrado unitario I^2 respecto a la diagonal principal $y=x$. Ahora consideremos la restrcción

$$f|_T : T \longrightarrow F_2([0,1]),$$

se tiene entonces que $f|_T$ es una función continua, ya que f es continua. Se puede verificar fácilmente que $f|_T$ es sobreyectiva, y de hecho es biyectiva, ya que se puede verificar que tiene por inversa a la función

$$g : F_2([0,1]) \longrightarrow T$$

definido por

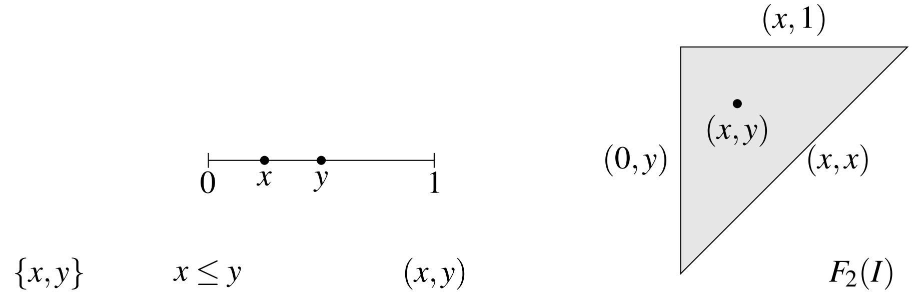
$$g(\{x,y\}) = (\text{mín}\{x,y\}, \text{máx}\{x,y\}).$$

Se tiene así, que $f|_T$ es biyectiva.

Por lo tanto, tenemos que $f|_T$ es una función biyectiva y continua, que va de un espacio compacto a un espacio Hausdorff, lo que implica que $f|_T$ es un homeomorfismo. Esto es, $F_2([0,1])$ es homeomorfo al triángulo T.

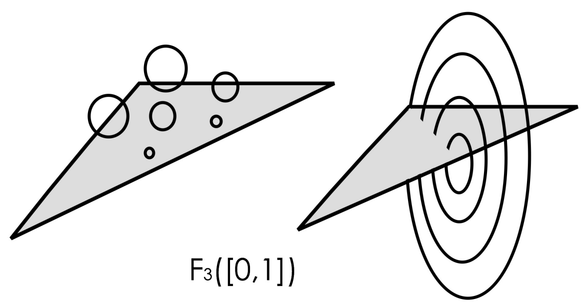
Notemos que $F_1([0,1])$ queda representado en la diagonal principal del triańgulo T.

Notemos que T es homeomorfo a I^2, así $F_2([0,1])$ es homeomorfo a I^2.



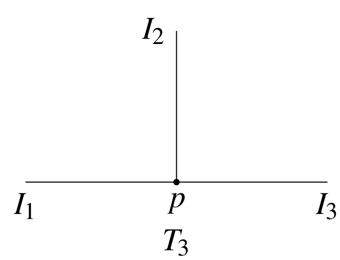
Modelo de $F_3([0,1])$

Para conocer un modelo para $F_2([0,1])$, vamos a considerar la función $g : F_3([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida, para cada $A \in F_2([0,1])$, por $g(A) = (\text{mín}A, \text{máx}A)$. Se tiene entonces que g es una función continua cuya imagen es un triángulo T como en el ejemplo anterior. Dado $(a,b) \in T$, la preimagen $g^{-1}(a,b)$ es el conjunto $\{\{a,b,c\} : a \leq c \leq b\}$. En el caso que $a < b$, se tiene que el conjunto $\{\{a,b,c\} : a \leq c \leq b\}$ es una curva cerrada simple, ya que c corre sobre el intervalo $[a,b]$ y $\{a,a,b\} = \{a,b,b\}$. En el caso que $a = b$, se tiene que $\{\{a,b,c\} : a \leq c \leq b\} = \{\{a\}\}$. Así, para el modelo de $F_3([0,1])$ necesitamos poner un círculo en cada punto $(a,b) \in T$ si $a < b$. Esto se puede hacer tomando un sólido de revolución R que puede ser obtenido rotando T al rededor de su diagonal principal. Notemos que R es homeomorfo a I^3, así $F_3([0,1])$ es homeomorfo a I^3.



Modelo de $F_2(T_3)$

Consideremos el triodo simple T_3 formado por los arcos I_1, I_2 y I_3, que se intersectan por pares, exactamente, en el punto extremo p de cada uno de ellos.



Para construir un modelo geométrico de $F_2(T_3)$, podemos considerar los arcos $J_1 = I_2 \cup I_3$, $J_2 = I_1 \cup I_3$ y $J_3 = I_1 \cup I_2$. Ya vimos que $F_2(J_k)$ es un triángulo. Notemos que si $a,b \in T_3$ entonces $a \in I_i$ y $b \in I_j$, para algún $i,j \in \{1,2,3\}$. De modo que $\{a,b\} \subset J_i$ para algún $i \in \{1,2,3\}$. Esto muestra que

$$F_2(T_3) = F_2(J_1) \cup F_(J_2) \cup F_2(J_3).$$

De modo que si sabemos como pegar los conjuntos $F_2(J_1)$, $F_2(J_2)$ y $F_2(J_3)$, obtendremos un modelos para $F_2(T_3)$. Notemos que

$$\{a,b\} \in F_2(J_1) \cap F_2(J_2)$$

si y solo si $\{a,b\} \subset J_1$ y $\{a,b\} \subset J_2$, es decir, si y solo si

$$\{a,b\} \subset J_1 \cap J_2 = I_3,$$

si y solo si

$$\{a,b\} \in F_2(I_3).$$

Esto muestra que

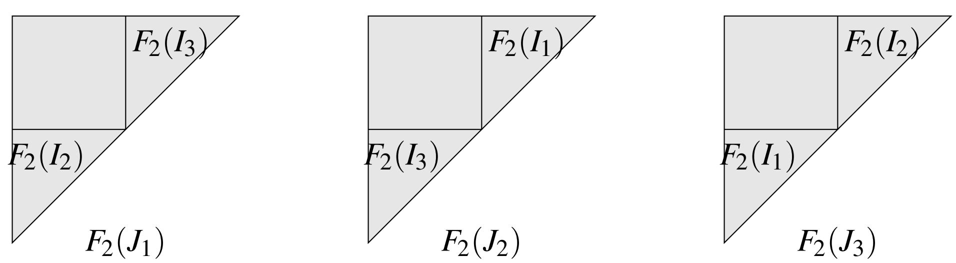
$$F_2(J_1) \cap F_2(J_2) = F_2(I_3).$$

Análogamente se tienen

$$F_2(J_2) \cap F_2(J_3) = F_2(I_1),$$

$$F_2(J_1) \cap F_2(J_3) = F_2(I_2).$$

Ahora, observemos que $F_2(I_3)$ es un subtrángulo de $F_2(J_1)$ y de $F_2(J_2)$ de manera que tenemos que pegar $F_2(J_1)$ y $F_2(J_2)$ por ese subtriángulo, caso parecido a lo que se tiene que hacer con los triángulos $F_2(I_1)$ y $F_2(I_2)$. En la siguiente figura se muestra como se pegan $F_2(J_1)$, $F_2(J_2)$ y $F_2(J_3)$, y el resultado que se obtiene del pegado en la figura 2.1.



Modelo de $F_2(S^1)$

Ahora consideremos la circunferencia unitaria S^1, veamos un modelo geométrico para $F_2(S^1)$.

Primero, notemos que el círculo S^1 se puede obtener del intervalo $[0,1]$ identificando el 0 con el 1, esto es,

$$S^1 = I/(0 \sim 1).$$

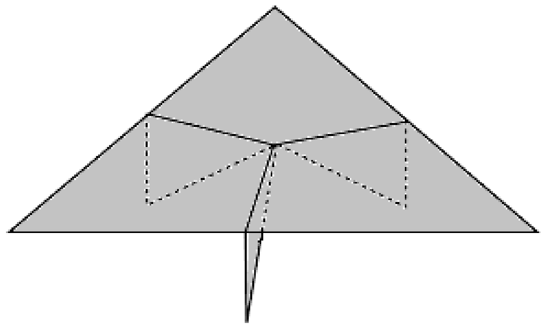


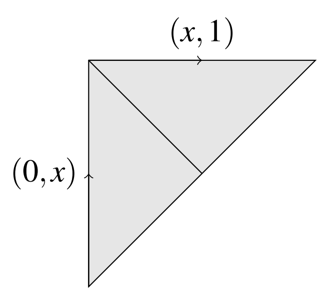
Figura 2.1: $F_2(T_3)$

Así, para ver un modelo geométrico de $F_2(S^1)$ podemos fijarnos en $F_2(I)$ e identificar, $\sim$, adecuadamente sus puntos en $F_2(I)$ que tienen al 0 con aquellos que tienen al 1, esto es,

$$F_2(S^1) = F_2(I)/\sim,$$

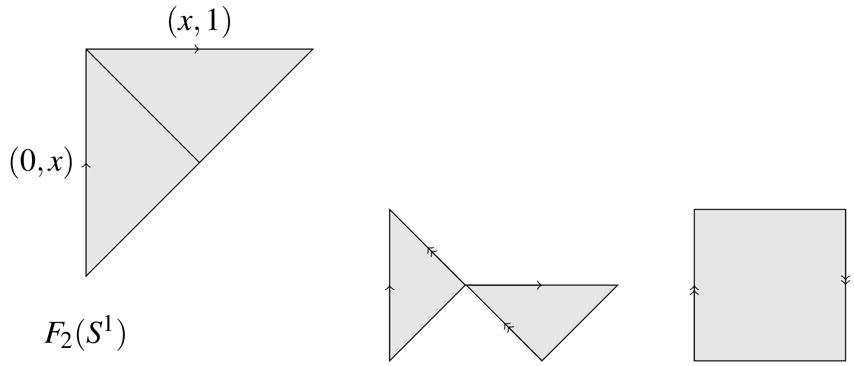
donde $\sim$ significa identificar adecuadamente puntos en $F_2(S^1)$ que tiene al 0 con los que tienen al 1, esto lo veremos a continuación.

Como hemos visto, $F_2(I)$ es un triángulo T como en la siguiente figura; los puntos que tienen al 0, el conjunto $\{\{0,y\} : y \in I\}$ quedan representado en el lado izquierdo del T, los puntos en $F_2(I)$ que tienen al 1, es decir, el conjunto $\{\{x,1\} : x \in I\}$ quedan representados en el lado superior de T. Pensando en $F_2(S^1)$, notemos que se tiene que $\{0,x\} = \{x,1\}$, esto es, los puntos en T de la forma $(0,x)$ se identifican con los puntos de la forma $(x,1)$, como se indica en la siguiente figura.



$F_2(S^1)$

Con esto, hacemos los siguientes cortes y pegados como se indica en la siguiente figura para obtener $F_2(S^1)$.



Notemos que la última figura es la banda de Moebius. Por lo tanto, $F_2(S^1)$ es homeomorfo a la banda de Moebius.

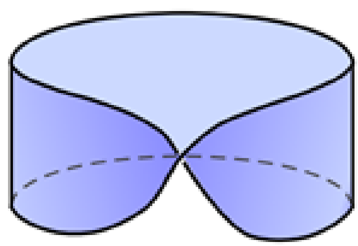


Figura 2.2: $F_2(S^1)$

En el siguiente capitulo haremos un estudio detallado sobre el n-ésimo producto simétrico del círculo, en particular veremos un modelo para $F_3(S^1)$, el cual es muy interesante, pues este hiperespacio ya no se puede visualizar geométricamente.

Capítulo 3

Sobre el hiperespacio producto simétrico del círculo

El hiperespacio n-ésimo producto simétrico de un continuo X es una interesante construcción en topología; tiene su origen en 1931 cuando K. Borsuk y S. Ulam los definen en el artículo [4] y muestran que para el caso cuando X es el intervalo unitario $I = [0,1]$, se cumple que $F_n(I) = I^n$ para cada $n = 1,2,3$ y que para cada $m \geq 4$, $F_m(I)$ no puede ser encajado en $\mathbb{R}^m$; además de otros resultados. Otros autores han investigado la estructura topológica de los productos simétricos. Por ejemplo Molski [17] demostró que $F_2(I^2)$ es homeomorfo a I^4 y para $n \geq 3$ se tiene que ni $F_n(I^2)$ ni $F_2(I^n)$ pueden ser encajados en $\mathbb{R}^{2n}$. En este sentido, Schori [23] investigó una caracterización de los espacios $F_n(I^m)$ usando ciertas relaciones de equivalencias, en particular, da una descripción de $F_n(I)$ como el espacio producto $c(D^{n-2}) \times I$, donde $D^{n-2} = \{A \in F_n(I) : 0,1 \in A\}$ y $c(Z)$ es el cono de un espacio topológico Z. Además, Andersen-Marjanović-Schori [2] estudiaron los espacios D^n y muestran que D^2 es homeomorfo al espacio gorro de bufón (el nombre de gorro de bufón viene de su traducción del inglés *Dunde Hat*) [31], en general, D^{2n} es contráctil y D^{2n+1} tiene el mismo tipo de homotopía de S^{2n+1}. Para $n \geq 2$, ellos llamaron a D^{2n} espacio gorro de bufón de dimensión mayor.

Otro caso interesante es el espacio $F_n(S^1)$. En [5] R. Bott corrige la afirmación de Borsuk [3] y demuestra que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a la 3-esfera S^3. N. Chinen y A. Koyama en [7] describen el espacio $F_n(S^1)$ mediante los espacios de identificación D^m.

Este capítulo está enfocado principalmente al estudio del hiperespacio $F_n(S^1)$ y está basado en el artículo [7] de N. Chinen y A. Koyama. Veremos la relación que hay de $F_n(S^1)$ con los espacios Dunde Hat de dimensiónes mayores. Estudiaremos propiedades interesantes de $F_n(S^1)$, tales como, que $F_n(S^1)$ es una compactificación de un cono abierto; veremos el tipo de homotopía que tiene y analizamos si es una variedad o no. En particular, como consecuencia, daremos una demostración alternativa del teorema de Bott [5], que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3.

3.1. Espacios *gorro de bufón* de dimensiones mayores

En esta sección estudiaremos los espacios D^n. Uno de los objetivos en esta parte es ver que los espacios D^{2n} son contráctiles y que D^{2n+1} tiene el mismo tipo de homotopía que S^{2n+1}.

Comenzamos definiendo el espacio gorro de bufón clásico.

Definición 3.1.1. *Se define una relación de equivalencia* $\equiv$ *en* $\Delta^2 = \{(x_1,x_2) \in [0,1]^2 : x_1 \leq x_2\}$ *generado como sigue:* $(x_1,x_2) \equiv (x_1',x_2')$ *si y solo si*

$$x_1 = 0, x_2' = 1 \;\; y \;\; x_2 = x_1' \;\; o \;\; x_1 = 0 \;\; y \;\; x_2 = x_1' = x_2' \;\; o \;\; x_2 = 1 \;\; y \;\; x_1 = x_1' = x_2'.$$

Decimos que $\Delta^2/\equiv$ *es un gorro de bufón.*

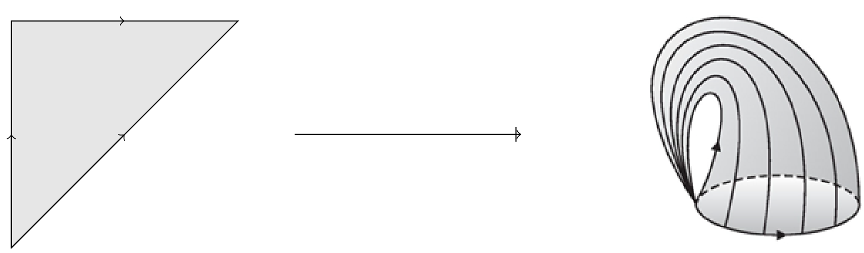


Figura 3.1: Gorro de Bufón

Para poder definir los espacios gorro de bufón de dimensiones mayores, necesitamos introducir algo de notación.

Denotamos por I al intervalo unitario $[0,1]$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, I^n el n-ésimo producto cartesiano de I, T^n el n-ésimo producto cartesiano de S^1.

Retomando la idea de que se tiene la identificación $S^1 = I/(0 \sim 1)$.

Definimos $q : I \longrightarrow S^1$ por $q(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ y $q_n : I^n \longrightarrow T^n$ por $q_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (q(x_1),q(x_2),\cdots,q(x_n))$. Se tiene que q y q_n son continuas y sobreyectivas.

Para cada $\{x_1,...,x_n\} \subset I$, estos puntos los podemos ordenar $x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Así, nos fijamos en el punto $(x_1,...,x_n) \in I^n$.

Así, definimos los siguientes conjuntos, los cuales en las figuras 3.2 y 3.3 se da una idea gráfica para el caso $n = 3$.
Para $0 \leq s < t \leq 1$

$$\begin{aligned}
\Delta^n &= \{(x_1, \cdots, x_n) \in I^n : x_1 \leq \cdots \leq x_n\} \\
\widetilde{\Delta^n} &= \{x \in \Delta^n : 0 < x_1 < \cdots < x_n < 1\} \\
\Delta^n(s,t) &= \{x \in \Delta : s \leq x_1, x_n \leq t\} \\
\Delta^n_0(s,t) &= \{x \in \Delta^n(s,t) : s = x_1\} \\
\Delta^n_1(s,t) &= \{x \in \Delta^n(s,t) : t = x_n\} \\
\Delta^n_{0,1}(s,t) &= \Delta^n_0(s,t) \cap \Delta^n_1(s,t) = \{x \in \Delta^n(s,t) : s = x_1, t = x_n\}
\end{aligned}$$

Para $0 \leq t \leq 1/2$, se define

$$\begin{aligned}
\alpha_t = 1/2 - t, \beta_t &= 1/2 + t \in I \\
a_0(t) = (\alpha_t, \cdots, \alpha_t), a_1(t) &= (\beta_t, \cdots, \beta_t) \in \Delta^n \\
\Delta^n_0(t) &= \Delta^n_0(\alpha_t, \beta_t) \\
\Delta^n_1(t) &= \Delta^n_1(\alpha_t, \beta_t) \\
\Delta^n(t) &= \Delta^n_0(t) \cup \Delta^n_1(t) \\
\Delta^n_{0,1}(t) &= \Delta^n_0(t) \cap \Delta^n_1(t).
\end{aligned}$$

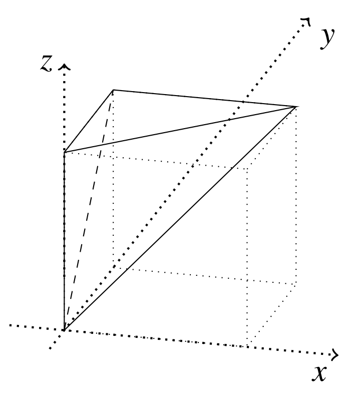


Figura 3.2: Δ^3

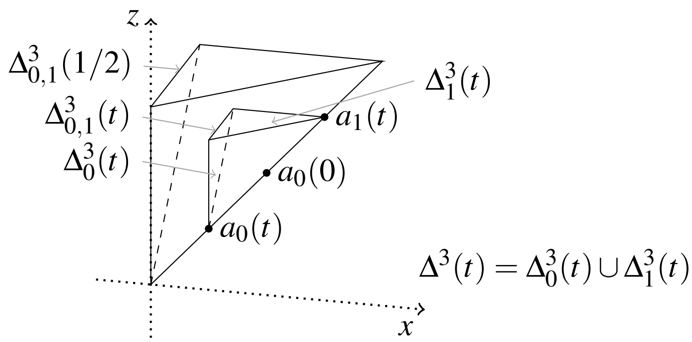


Figura 3.3: $\Delta^3(\alpha_t, \beta_t)$

Sea $F_n(I)$ el n-ésimo producto simétrico de I y $p_{F_n(I)} : I^n \longrightarrow F_n(I)$ la proyección, también, sea $F_n(S^1)$ el n-ésimo producto simétrico de S^1 y sea $p_{F_n(S^1)} : (S^1)^n \longrightarrow F_n(S^1)$ la proyección. Denotamos por

$$\begin{aligned} r_n &= p_{F_n(S^1)} \circ (q_n \mid_{\Delta^n}) : \Delta^n \longrightarrow F_n(S^1) \\ r'_n &= p_{F_n(I)} \mid_{\Delta^n} : \Delta^n \longrightarrow F_n(I) \\ I^1_0(n+2) &= r'_{n+2}(\Delta^{n+2}_{0,1}(1/2)). \end{aligned}$$

El espacio más importante para definir los espacios gorro de bufón de dimensiones mayores, es lo siguiente, el cual lo describimos mediante la siguiente notación.

$$D^n = r_{n+2}(\Delta^{n+2}_{0,1}(1/2))$$

Definición 3.1.2. *A los espacios D^{2n} se les denomina gorro de bufón de dimesiones mayores [2].*

Éstos espacios fueron definidos por Andersen-Marjanović-Schori en [2].

Necesitamos unos resultados previos.

Lema 3.1.3.

1) *Ambos $r_n : \Delta^n \longrightarrow F_n(S^1)$ y $r'_n : \Delta^n \longrightarrow F_n(I)$ son suprayectivas.*

2) *Para cada $z \in \widetilde{\Delta^n}$, las preimagenes $r_n^{-1}(r_n(z))$ y $r'^{-1}_n(r'_n(z))$ son degenerados.*

3) *Sea* $0 < s < t < 1$. *Se tiene que, si* $x \in \Delta^n_{0,1}(s,t)$ *implica* $r_n^{-1}(r_n(x)) \subset \Delta^n_{0,1}(s,t)$ *y* $r_n'^{-1}(r_n'(x)) \subset \Delta^n_{0,1}(s,t)$.

Demostración.

1) Veamos que $r_n : \Delta^n \longrightarrow F_n(S^1)$ es suprayectiva. Sea $A \in F_n(S^1)$, así existe $(y_1, \cdots, y_n) \in T^n$ tal que $p_{F_n(S^1)}(y_1, \cdots, y_n) = A$.

   Por otro lado, para cada $i = 1, \cdots, n$, existe $x_i \in I$ tal que $q(x_i) = y_i$. Consideremos el punto $(x_1, ..., x_n) \in I^n$ y sea $(x_1', ..., x_n') \in \Delta^n$ una permutación de $(x_1, ..., x_n)$, se tiene entonces que $q_n(x_1', ..., x_n') = (q(x_1'), ..., q(x_n')) = (y_1', ..., y_n')$ es también una permutación de $(y_1, ..., y_n)$ tal que $\{y_1', \cdots, y_n'\} = \{y_1, \cdots, y_n\}$. Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} r_n(x_1', ..., x_n') &= p_{F_n(S^1)} \circ q_n \mid_{\Delta^n} (x_1', ..., x_n') \\ &= p_{F_n(S^1)}(y_1', ..., y_n') \\ &= \{y_1', \cdots, y_n'\} \\ &= \{y_1, \cdots, y_n\} \\ &= p_{F_n(S^1)}(y_1, ..., y_n) \\ &= A. \end{aligned}$$

   Así, r_n es suprayectiva.

   Similarmente se ve que r_n' es suprayectiva.

2) Supongamos que $z \in \widetilde{\Delta^n}$, así $z = (z_1, ..., z_n) \in \Delta^n$ y $0 < z_1 < \cdots < z_n < 1$; entonces $r_n'(Z) = \{z_1, \cdots, z_n\}$, observemos que $|r_n'(z)| = n$. Sea $y = (y_1, ..., y_n) \in r_n'^{-1}(r_n'(z))$, así $y \in \Delta^n$ y además $r_n'(y) = r_n'(z)$, es decir $\{y_1, \cdots, y_n\} = \{z_1, \cdots, z_n\}$; se tiene entonces que $0 < y_1 < \cdots < y_n < 1$, así $y \in \widetilde{\Delta^n}$, luego, necesariamente se tiene que $y_1 = z_1, y_2 = z_2, ..., y_n = z_n$, o sea que $y = z$.

   Ahora, sea $y = (y_1, ..., y_n) \in r_n^{-1}(r_n(z))$, así $y \in \Delta^n$ y $\{q(y_1), \cdots, q(y_n)\} = r_n(y) = r_n(z) = \{q(z_1) \cdots, q(z_n)\}$; además notemos que $|r_n(z)| = n$, pues q es inyectiva en el intervalo $(0,1)$. Así, se tiene que $|r_n(y)| = n$. Como $r_n(y) = r_n(z)$, se tiene que $y_i \neq 0, 1$ para todo $i = 1, ..., n$. Además, para cada i se tiene que existe un único j tal que $q(y_i) = q(z_j)$, como q es inyectiva en $(0,1)$, implica que $y_i = z_j$, esto implica que $\{y_1, ..., y_n\} = \{z_1, ..., z_n\}$, se tiene entonces que $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < 1$, así $y \in \widetilde{\Delta^n}$, y lo que implica necesariamente que $y = z$.

3) Sea $0 < s < t < 1$. Si $x = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \in \Delta^n_{0,1}(s,t)$ entonces $0 < s = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = t < 1$; así, $r_n'(x) = \{s, x_2, \cdots, x_{n-1}, t\}$. Sea $y =$

$(y_1,...,y_n) \in r_n'^{-1}(r_n'(x))$, así $r_n'(y) = r_n'(x)$, es decir, $\{y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n\} = \{s, x_2, \cdots, x_{n-1}, t\}$, se tiene entonces que $0 < y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n < 1$ y $s = y_i$ y $t = y_j$, entonces se tiene que $y_1 = s$ y $y_n = t$, y así $y \in \Delta^n_{0,1}(s,t)$.

Por otro lado tenemos que $r_n(x) = \{q(s), q(x_2), \cdots, q(x_{n-1}), q(t)\}$. Sea $y = (y_1,...,y_n) \in r_n^{-1}(r_n(x))$, así

$$\{q(y_1), \cdots, q(y_n)\} = r_n(y) = r_n(x) = \{q(s), \cdots, q(t)\}.$$

Notemos que $\{q(s), \cdots, q(t)\} \cap r_n([0,s)) = \emptyset$ y $\{q(s), \cdots, q(t)\} \cap r_n((t,1]) = \emptyset$; se tiene entonces que $0 < y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n < 1$ y además $q(s) = q(y_i), q(t) = q(y_j)$, lo cual implica que $s = y_i, t = y_j$, se tiene entonces que $y_1 = s, y_n = t$ y así $y \in \Delta^n_{0,1}(s,t)$.

$\square$

Lema 3.1.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que D^n es homeomorfo a $I^1_0(n+2)$.*

Demostración. Definamos $\varphi : D^n \longrightarrow I^1_0(n+2)$ por $r_{n+2}(x) \longmapsto r'_{n+2}(x)$. Para ver que φ esta bien definida, primero mostremos que para cada punto $x = (x_1,...,x_2) \in \Delta^n_{0,1}(1/2)$ se tiene que $r^{-1}_{n+2}(r_{n+2}(x)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2) = r'^{-1}_{n+2}(r'_{n+2}(1/2)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2)$. En efecto, sea $x' = (0, x'_2, ..., x'_{n-1}, 1) \in r^{-1}_{n+2}(r_{n+2}(x)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2)$ y sean $A = \{0, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1\}$, $A' = (0, x'_2, \cdots, x'_{n-1}, 1\}$ y $k = |A| \geq 2$. Como $0, 1 \in A \cap A'$, sea $x_i \in A$ tal que $0 < x_i < 1$. Como $\{q(0) = q(1), q(x_2), \cdots, q(x_{n+1})\} = \{q(0) = q(1), q(x'_2), \cdots, q(x'_{n+1}\}$, entonces se tiene que $q(x_i) = q(x'_j)$ para algún $0 < x'_j < 1$, pues de lo contrario si $x'_j = 0$ o $x'_j = 1$, se tendría $q(x_i) = q(0)$ o $q(x_i) = q(1)$ y la inyectividad de q implicaría que $x_i = 0$ o $x_i = 1$, lo cual no puede ser; por lo tanto, otra vez por la inyectividad de q, se tiene que $x_i = x'_j$ y así $x_i \in A'$. Por lo tanto, $A \subset A'$. Similarmente se prueba que $A' \subset A$. Por lo tanto se tiene que $A = A'$. Ahora, usando la definición de r'_{n+2} se tiene que $r'_{n+2}(x') = A' = A = r'_{n+2}(x)$,así $x' \in r'^{-1}_{n+2}(r'_{n+2}(x))$, por lo tanto se tiene $r^{-1}_{n+2}(r_{n+2}(x)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2) \subset r'^{-1}_{n+2}(r'_{n+2}(x)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2)$.

Ahora, sea $x' = (0, x'_2, ..., x'_{n+1}, 1) \in r'^{-1}_{n+2}(r'_{n+2}(x)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2)$ y sean $A = \{0, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1\}$, $A' = (0, x'_2, \cdots, x'_{n-1}, 1\}$ y $k = |A| \geq 2$. Se tiene entonces que $A = r'_{n+2}(x) = r'_{n+2}(x') = A'$. Así, existen $y_1, y_2, ..., y_k \in I$ tales que $0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_{k-1} < y_k = 1$ y $A = \{y_1, \cdots, y_k\}$. Entonces por definición tenemos que $r_{n+2}(x') = \{q(y_1), \cdots, q(y_{k-1})\} = r_{n+2}(x)$, de donde $x' \in r^{-1}_{n+2}(r_{n+2}(x))$, por lo tanto,

$$r'^{-1}_{n+2}(r'_{n+2}(x)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2) \subset r^{-1}_{n+2}(r_{n+2}(x)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2).$$

Así, $r^{-1}_{n+2}(r_{n+2}(x)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2) = r'^{-1}_{n+2}(r'_{n+2}(1/2)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2)$.

Con lo anterior, tenemos que φ está bien definida, pues, supongamos que $r_{n+2}(x) = r_{n+2}(x')$, se tiene así que $x' \in r_{n+2}^{-1}(r_{n+2}(x)) = r_{n+2}'^{-1}(r_{n+2}'(x))$, por lo tanto $r_{n+2}'(x) = r_{n+2}'(x')$.

Ahora φ es un homeomorfismo, ya que φ es continua, pues r_{n+2}' es continua, y tiene inversa

$$\psi : I_0^1(n+2) \longrightarrow D^n$$

definido por

$$r_{n+2}'(y) \longmapsto r_{n+2}(y),$$

está bien definida y es continua, pues r_{n+2} es continua. $\square$

Aplicando el lema anterior, tenemos el siguiente.

Ejemplo 3.1.5.

1) D^0 *es un punto, ya que*

$$D^0 = I_0^1(2) = r_2'(\Delta_{0,1}^2(1/2)) = r_2'(\{(0,1)\}) = \{\{0,1\}\}.$$

2) D^1 *es homeomorfo a* S^1*. En efecto, recordemos que*

$$\Delta_{0,1}^3(1/2) = \{(0,x_2,1) : x_2 \in I\},$$

así tenemos que $D^1 = I_0^1(3) = r_3'(\Delta_{0,1}^3(1/2)) = \{\{0,x_2,1\} : x_2 \in I\}$*, el cual este último conjunto es homeomorfo a* S^1*.*

3) D^2 *es homeomorfo al espacio gorro de bufón clásico (Véase la definición 3.1.1). Consideremos el homeomorfismo* $f : \Delta^2 \to \Delta_{0,1}^4(1/2)$ *definido por* $f(a,b) = (0,a,b,1)$*. Definimos la función* $h : \Delta^2 \to I_0^1(4)$ *por* $h(a,b) = r_4'(f(a,b)) = \{0,a,b,1\}$*. Notemos que* h *es continua y suprayectiva. El lado de* Δ^2 *dado por el conjunto* $\{(0,b) : b \in I\}$ *es enviado, bajo* h*, sobre* $I_0^1(3) \approx S^1$*. Igualmente, los lados dados por los conjuntos* $\{(b,1) : b \in I\}$ *y* $\{(b,b) : b \in I\}$ *son enviados sobre* $I_0^1(3)$ *por* h*. En consecuencia, bajo la función* h*, los lados de* Δ^2 *son identificados como se indica en la definición de gorro de bufón. Además, la función* h *restringido al interior de* Δ^2 *es inyectiva, y así* D^2 *representa el espacio* $I_0^1(4)$*.*

Es sabido que el espacio gorro de bufón D^2 es contráctil [31]. A continuación, veremos que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ D^{2n} es contráctil y D^{2n+1} tiene el mismo tipo de homotopía que la $(2n+1)$-esfera S^{2n+1} [2].

Consideremos el homeomorfismo

$$h : \Delta^n \longrightarrow \Delta_{0,1}^{n+2}(1/2)$$

definido por

$$h(x_1,...,x_n) = (0,x_1,...,x_n,1).$$

Definamos ala función

$$h_n : \Delta^n \longrightarrow D^n$$

por

$$\begin{aligned} h_n(x_1,...,x_n) &= r'_{n+2}(h(x_1,...,x_n)) \\ &= \{0,x_1,\cdots,x_n,1\}. \end{aligned}$$

Se tiene que h_n es continua y suprayectiva.

Lema 3.1.6. *La función $h_n : (\Delta^n, fr(\Delta^n)) \to (D^n, D^{n-1})$, con $n \geq 1$, como una función de pares, es un homeomorfismo relativo y por lo tanto, se tiene $D^n \approx \Delta^n \cup_{\overline{h_n}} D^{n-1}$, el CW-complejo obtenido adjuntando Δ^n a D^{n-1} con la función $\overline{h_n} = h_n \mid_{fr(\Delta^n)}$. Donde $fr(\Delta^n)$ denota la frontera de Δ^n.*

Demostración. Véase [2]. □

Así, tenemos la sucesión de CW-complejos

$$D^0 \subset D^1 \subset \cdots \subset D^{n-1} \subset D^n,$$

donde D^n es formado pegando la n-celda Δ^n a D^{n-1} con la función $\overline{h}_n$.

El uso de coordenadas cartesianas en la descripción de Δ^n ha sido muy conveniente para la construcción de D^n.

Ahora cambiamos a coordenadas baricentricas para un n-simplejo.

Sea $\sigma^n = [v_0, v_1, ..., v_n]$ un n-simplejo estandar, así, cada punto $x \in \sigma^n$ está únicamente determinado por $x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ tal que $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ y cada $\lambda_i \geq 0$.

Entonces definimos el homeomorfismo

$$\phi_n : \sigma^n \longrightarrow \Delta^n$$

por

$$\phi_n(x) = (\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, ..., \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1})$$

y así, la función

$$p_n : \sigma^n \longrightarrow D^n$$

definido por

$$p_n(x) = \{0, \lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, ..., \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}, 1\},$$

es topológicamente equivalente a

$$h_n : \Delta^n \longrightarrow D^n.$$

Esto es, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \sigma^n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\phi_n"] & D^n \arrow[d, "id"] \\ \Delta^n \arrow[r, "h_n"] & D^n \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $p_n = h_n \circ \phi_n$, donde las flechas verticales son homeomorfismos.

También tenemos un resultado de pegado correspondiente al lema 3.1.6. Esto es, tenemos

Lema 3.1.7. *Para cada $n \geq 1$, se tiene que*

$$D^n \approx \sigma^n \cup_{\overline{p_n}} D^{n-1}$$

donde

$$\overline{p_n} = p_n \mid_{\partial \sigma^n} .$$

Donde $\partial \sigma^n$ denota la frontera de un n-simplejo σ^n.

Sea $d_i^n : \sigma^n \longrightarrow \partial \sigma^{n+1}$, $i = 0, 1, ..., n+1$, las funciones cara la cual toma σ^n simplicialmente sobre la n-cara de $\sigma^{n+1} = [v_0, v_1, ..., v_{n+1}]$ opuesta al vértice v_i.

Lema 3.1.8. *El siguiente diagrama conmuta, donde $\overline{p}_{n+1} : \partial \sigma^{n+1} \to D^n$ es la restricción de p_{n+1} a $\partial \sigma^{n+1}$. Esto es, para todos los índices permitidos, se tiene*

$$p_n = \overline{p}_{n+1} \circ d_i^n$$

$$\begin{tikzcd} \sigma^n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_i^n"'] & D^n \\ \partial \sigma^{n+1} \arrow[ur, "\overline{p}_{n+1}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración se sigue de la definición, aquí lo ilustraremos para el caso $n = 2$ y $i = 1$.

Si $x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \sigma^2$, entonces $d_1^2(x) = \lambda_0 v_0 + 0 v_1 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3 \in \partial \sigma^3$ y

$$\begin{aligned} \overline{p}_3 \circ d_1^2(x) &= \{0, \lambda_0, \lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, 1\} \\ &= \{0, \lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, 1\} \\ &= p_2(x). \end{aligned}$$

□

Sea $f : (\partial\sigma^{n+1}, (\sigma^{n+1})^{(n-1)}) \to (X, x_0)$ cualquier función sobre un espacio punteado (X, x_0), donde $(\sigma^{n+1})^{(n-1)}$ es el $(n-1)$-esqueleto de σ^{n+1}. Entonces f representa un elemento $[f]$ de $\pi_n(X, x_0)$. Por otro lado, tenemos las funciones caras $d_i^n : \sigma^n \to \partial\sigma^{n+1}$ para $i = 0, 1, ..., n+1$, y así, la composición $f \circ d_i^n : (\sigma^n, \partial\sigma^n) \to (X, x_0)$ representa un elemento $[f \circ d_i^n]$ de $\pi_n(X, x_0)$ para todo $i = 0, 1, ..., n+1$.

El siguiente resultado es una de las varias versiones del Teorema de la Adición de Homotopía, usaremos éste en particular, el cual se puede encontrar en [11, p. 165].

Teorema 3.1.9 (Teorema de la Adición de Homotopía)**.** *Para cualquier función*

$$f : (\partial\sigma^{n+1}, (\sigma^{n+1})^{(n-1)}) \longrightarrow (X, x_0)$$

y $n \geq 2$, siempre tenemos que

$$[f] = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i [f \circ d_i^n],$$

y para $n = 1$, se tiene

$$[f] = [f \circ d_2^1] * [f \circ d_0^1] * [f \circ d_1^1]^{-1}.$$

Ahora, hemos llegado al siguiente teorema principal de esta sección.

Teorema 3.1.10. *Para cada $n \geq 0$, el espacio D^{2n} es contráctil y D^{2n+1} es del mísmo tipo de homotopía que S^{2n+1}.*

Demostración. Ya hemos visto que D^0 y D^2 son contráctiles y que D^1 es homeomorfo a S^1.

Sea $n > 2$ impar y supongamos que D^{n-1} es contráctil. Ahora, se tiene que $D^n \approx \sigma^n \cup_{\overline{p}_n} D^{n-1}$ y como D^{n-1} es contráctil, por el teorema 1.3.5, la función cociente

$$p : D^n \longrightarrow D^n / D^{n-1}$$

es una equivalencia homotópica. Además, D^n/D^{n-1} es homeomorfo a S^n, ya que este es equivalente a $\sigma^n / \partial\sigma^n$. Esto verifica que $D^n \simeq S^n$, para n impar.

Ahora aplicamos el teorema de la adición de homotopía a la función de pares

$$p \circ \overline{p}_{n+1} : (\partial\sigma^{n+1}, (\sigma^{n+1})^{(n-1)}) \longrightarrow (S^n, *).$$

Por el lema 3.1.8, se tiene

$$\overline{p}_{n+1} \circ d_i^n = p_n$$

y combinando esto con el teorema de la adición de homotopía, tenemos que

$$\begin{aligned}[p\circ\overline{p}_{n+1}] &= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i[p\circ\overline{p}_{n+1}\circ d_i^n] \\ &= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i[p\circ p_n].\end{aligned}$$

Como n es impar, se sigue que

$$[p\circ\overline{p}_{n+1}] = [p\circ p_n].$$

Así, $[p\circ\overline{p}_{n+1}]\in\pi_n(S^n,*)$, como un elemento de $\pi_n(S^n,*)$, es representado por

$$p\circ p_n : (\sigma^n,\partial\sigma^n)\longrightarrow(S^n,*)$$

la cual representa el elemento identidad de $\pi_n(S^n)$.

Consecuentemente,

$$p\circ\overline{p}_{n+1} : \partial\sigma^{n+1}\longrightarrow S^n$$

es homotópico a un homeomorfismo y es por tanto una equivalencia homotópica.

Por hipótesis, D^{n-1} es contráctil y así, $p : D^n\longrightarrow D^n/D^{n-1}$ es una equivalencia homotópica por el teorema 1.3.5.

Como $p\circ\overline{p}_{n+1}$ y p son equivalencias homotópicas, se sigue que

$$\overline{p}_{n+1} : \partial\sigma^{n+1}\longrightarrow D^n$$

es una equivalencia homotópica. Se sigue del teorema 1.3.6 que

$$D^{n+1}\approx\sigma^{n+1}\cup_{\overline{p}_{n+1}}D^n$$

y σ^{n+1} tienen el mismo tipo de homotopía y así, D^{n+1} es contráctil, pues σ^{n+1} es contráctil. □

Para terminar esta sección vamos a probar unos resultados relacionados con los espacios D^n, los cuales, éstos exhiben a los espacios D^n como subespacios del producto simétrico del círculo.

Proposición 3.1.11. *Para cada $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 2$, se tiene que $r_n(\Delta_0^n(1/2))$ es homeomorfo a D^{n-1}.*

Demostración. Recordemos que

$$\Delta_0^n(1/2) = \{(x_1,x_2,...,x_n)\in\Delta^n : 0 = x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq 1\}\quad \text{y}$$
$$\Delta_{0,1}^{n+1}(1/2) = \{(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1})\in\Delta^{n+1} : 0 = x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq x_{n+1} = 1\}.$$

Definimos $f : \Delta_0^n(1/2) \to \Delta_{0,1}^{n+1}(1/2)$ por $f(0,x_2,...,x_n) = (0,x_2,...,x_n,1)$.

Es fácil ver que para cada $x \in \Delta_0^n(1/2)$ se tiene que $r_n(x) = r_{n+1}(f(x))$.

Por otra parte, mostremos que para cada $x \in \Delta_0^n(1/2)$ se tiene que $f(r_n^{-1}(r_n(x))) = r_{n+1}^{-1}(r_{n+1}(f(x))) \cap \Delta_{0,1}^{n+1}(1/2)$.

Sea $y \in f(r_n^{-1}(r_n(x)))$, así $y = f(x')$ con $x' \in r_n^{-1}(r_n(x))$, $x' \in \Delta_0^n(1/2)$, entonces, como $r_n(x') = r_n(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} r_{n+1}(y) &= r_{n+1}(f(x')) \\ &= r_n(x') \\ &= r_n(x) \\ &= r_{n+1}(f(x)), \end{aligned}$$

se tiene entonces que $y \in r_{n+1}^{-1}(r_{n+1}(f(x))) \cap \Delta_{0,1}^{n+1}(1/2)$.

Ahora, supongamos que $y = (0,y_2,...,y_n,1) \in r_{n+1}^{-1}(r_{n+1}(f(x))) \cap \Delta_{0,1}^{n+1}(1/2)$, así, se tiene $r_{n+1}(y) = r_{n+1}(f(x))$; notamos que $y = f(0,y_,...,y_n)$ y $y' = (0,y_2,...,y_n) \in \Delta_0^n(1/2)$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} r_n(y') &= r_{n+1}(y) \\ &= r_{n+1}(f(x)) \\ &= r_n(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y' \in r_n^{-1}(r_n(x))$; se tiene entonces que $y = f(y') \in f(r_n^{-1}(r_n(x)))$. Así, se tiene que

$$f(r_n^{-1}(r_n(x))) = r_{n+1}^{-1}(r_{n+1}(f(x))) \cap \Delta_{0,1}^{n+1}(1/2).$$

Por lo tanto, f induce una función

$$F : r_n(\Delta_0^n(1/2)) \to r_{n+1}(\Delta_{0,1}^{n+1}(1/2)) = D^{n-1}$$

dado por

$$z = r_(x) \mapsto r_{n+1}(f(x)).$$

Veamos que F está bien definida: si $r_n(x) = r_n(y)$ entonces $y \in r_n^{-1}(r_n(x))$, así se tiene que $f(y) \in f(r_n^{-1}(r_n(x))) = r_{n+1}^{-1}(r_{n+1}(f(x))) \cap \Delta_{0,1}^{n+1}(1/2)$; por lo tanto $r_{n+1}(f(x)) = r_{n+1}(f(y))$.

Observemos que la inversa

$$F^{-1} : r_{n+1}(\Delta_{0,1}^{n+1}(1/2)) = D^{n-1} \to r_n(\Delta_0^n(1/2))$$

está dado por

$$w = r_{n+1}(y) \mapsto r_n(f^{-1}(y)).$$

$\square$

Proposición 3.1.12. *Sea $0 < t \leq 1/2$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Se tiene entonces que $r_n(\Delta_{0,1}(t))$ es homeomorfo a D^{n-2}.*

Demostración. Asumamos que $0 < t < 1/2$. Recordemos que

$$\Delta^n_{0,1}(t) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Delta^n : \alpha_t = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = \beta_t\} \quad \text{y}$$
$$\Delta^n_{0,1}(1/2) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Delta^n : 0 = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = 1\}.$$

Definamos $\varphi : [\alpha_t, \beta_t] \to I$ por $\varphi((1-s)\alpha_t + s\beta_t) = s$ para cada $s \in I$, y $f : \Delta^n_{0,1}(t) \to \Delta^n_{0,1}(1/2)$ por $f(\alpha_t, x_2, ..., x_{n-1}, \beta_t) = (0, \varphi(x_2), ..., \varphi(x_{n-1}), 1)$. Se tiene que φ y f son homeomorfismos.

Afirmamos que para cada $x \in \Delta^n_{0,1}(t)$ se tiene que

$$f(r_n^{-1}(r_n(x))) = r_n^{-1}(r_n(f(x))) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2).$$

En efecto, si $x = (\alpha_t, x_2, ..., x_{n-1}, \beta_t) \in \Delta^n_{0,1}(t)$, sea $y \in f(r_n^{-1}(r_n(x)))$, así $y = f(x')$ con $x' \in r_n^{-1}(r_n(x))$, $x' \in \Delta^n_{0,1}(t)$, es decir, $x' = (\alpha_t, x'_2, ..., x'_{n-1}, \beta_t) \in \Delta^n_{0,1}(t)$ y además $r_n(x') = r_n(x)$.

Por lo tanto

$$y = f(x') = f(\alpha_t, x'_2, ..., x'_{n-1}, \beta_t) = (0, \varphi(x'_2), ..., \varphi(x'_{n-1}), 1)$$

entonces

$$r_n(y) = \{q(0), q(\varphi(x'_2)), \cdots, q(\varphi(x'_{n-1})), q(1)\}.$$

Sea $z \in r_n(y)$, así $z = q(\varphi(x'_i))$; como $r_n(x') = r_n(x)$ entonces $q(x'_i) = q(x_j)$, como $0 < t < 1/2$, se tiene que q es inyectiva en $[\alpha_t, \beta_t]$, así se tiene que $x'_i = x_j$, entonces $\varphi(x'_i) = \varphi(x_j)$, lo que implica que $z = q(\varphi(x'_i)) = q(\varphi(x_j)) \in r_n(f(x))$. Por lo tanto, $r_n(y) \subset r_n(f(x))$. Similarmente se ve que $r_(f(x)) \subset r_n(y)$. Así se tiene que $r_n(y) = r_n(f(x))$. Por lo tanto, $y \in r_n^{-1}(r_n(f(x))) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2)$.

Ahora, sea $y \in r_n^{-1}(r_n(f(x)) \cap \Delta^n_{0,1}(1/2)$, así $y = (0, y_2, ..., y_{n-1}, 1)$ y $r_n(y) = r_n(f(x))$, es decir,

$$\{q(0), q(y_2), \cdots, q(y_{n-1}), q(1)\} = \{q(0), q(\varphi(x_2)), \cdots, q(\varphi(x_{n-1})), q(1)\}.$$

Queremos demostrar que $y \in f(r_n^{-1}(r_n(x)))$, es decir, existe $x' \in r_n^{-1}(r_n(x))$ tal que $f(x') = y$. Veamos, como $y \in \Delta^n_{0,1}(1/2)$ y f es homeomorfismo, existe $x' \in \Delta^n_{0,1}(t)$ tal que $f(x') = y$.

Ahora, basta ver que $r_n(x') = r_n(x)$. Supongamos que $x' = (\alpha_t, x'_2, ..., x'_{n-1}, \beta_t)$. Así, sea $z \in r_n(x')$ entonces $z = q(x'_i)$; como $r_n(y) = r_n(f(x))$, por un lema anterior se tiene que $r'_n(y) = r'_n(f(x))$, es decir,

$$\{0, y_2, \cdots, y_{n-1}, 1\} = \{0, \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_{n-1}), 1\},$$

como $y = f(x')$, así se tiene que

$$\{0, \varphi(x_2'), \cdots, \varphi(x_{n-1}'), 1\} = \{0, \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_{n-1}), 1\}$$

entonces $\varphi(x_i') = \varphi(x_j)$, como φ es inyectiva implica que $x_i' = x_j$. Por lo tanto, $z = q(x_i') = q(x_j)$, así $z \in r_n(x)$. Por lo tanto, $r_n(x') \subset r_n(x)$. Se puede comprobar que $r_n(x) \subset r_n(x')$. Así, se tiene que $r_n(x') = r_n(x)$, de donde $x' \in r_n^{-1}(r_n(x))$. Por lo tanto, $y = f(x') \in f(r_n^{-1}(r_n(x)))$. Así, hemos mostrado que para cada $x \in \Delta_{0,1}^n(t)$ se tiene $f(r_n^{-1}(r_n(x))) = r_n^{-1}(r_n(f(x))) \cap \Delta_{0,1}^n(1/2)$.

Ahora, definamos

$$F : r_n(\Delta_{0,1}^n(t)) \to r_n(\Delta_{0,1}^n(1/2)) = D^{n-2},$$

inducido por f, dado por

$$F(r_n(x)) = r_n(f(x)).$$

Veamos que F está bien definido: supongamos que $r_n(x) = r_n(y)$, así se tiene que $y \in r_n^{-1}(r_n(x))$, de donde $f(y) \in f(r_n^{-1}(r_n(x))) = r_n^{-1}(r_n(f(x)))$ y por lo tanto $r_n(f(x)) = r_n(f(y))$.

La inversa

$$F^{-1} : r_n(\Delta_{0,1}^n(1/2)) = D^{n-2} \to r_n(\Delta_{0,1}^n(t))$$

está dado por

$$F^{-1}(r_n(y)) = r_n(f^{-1}(y)).$$

□

3.2. $F_n(S^1)$ es una compactificación de el cono abierto de $\Sigma\Delta_{0,1}^n(t)$

El cono $c(X)$ de un espacio métrico X es el espacio identificación $X \times [0,1]/X \times \{1\}$. Sea $\varphi : X \times [0,1] \to X \times [0,1]/X \times \{1\}$ la función cociente. Entonces llamamos a la imagen $\varphi(X \times \{1\})$ el punto cono. El cono abierto de X es la imagen $\varphi(X \times (0,1])$ y lo denotamos por $c^o(X)$. Supongamos que un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $v_0 \in \mathbb{R}^n$ están en posición general. Entonces llamamos al conjunto $\{(1-s)v_0 + sx \in \mathbb{R}^n : x \in X, 0 \leq s \leq 1\}$ el cono geométrico de X con vértice v_0. La suspensión ΣX de X es el espacio cociente de $X \times [-1,1]$ por la relación de equivalencia inducido por $(x,-1) \sim (x',-1)$ y $(x,1) \sim (x',1)$. A saber, $\Sigma X = X \times [-1,1]/\{X \times \{-1\}, X \times \{1\}\}$. Lamamos a los puntos identificados $X \times \{-1\}$ y $X \times \{1\}$ los puntos suspensión de ΣX. Una compactificación de un espacio topológico X es un espacio topológico compacto Y tal que $X \subset Y$ y $\overline{X} = Y$, esto es, X es denso en Y; a $Y \setminus X$ le llamamos residuo de X.

Lema 3.2.1. *Sea $0 < t < 1/2$ y $j = 0,1$. Se tiene entonces que $r_n(\Delta^n_j(t))$ es homeomorfo al cono $c(r_n(\Delta^n_{0,1}(t)))$ de $r_n(\Delta^n_{0,1}(t))$ con el punto de cono $r_n(a_j(t))$.*

Demostración. Recordemos que

$$\begin{aligned}\Delta^n_0(t) &= \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \Delta^n : \alpha_t = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \beta_t\} \quad \text{y}\\ \Delta^n_{0,1}(t) &= \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \Delta^n : \alpha_t = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = \beta_t\}.\end{aligned}$$

Aquí podemos identificar el cono $c(\Delta^n_{0,1}(t))$ con el cono geométrico de $\Delta^n_{0,1}(t)$ con el vértice $a_0(t)$ y así escribir

$$c(\Delta^n_{0,1}(t)) = \{(1-s)a_0(t) + sx \in \mathbb{R}^n : x \in \Delta^n_{0,1}(t), 0 \leq s \leq 1\}.$$

Notamos que $c(\Delta^n_{0,1}(t)) = \Delta^n_0(t)$: pues, para cualquier punto $x = (\alpha_t, x_2, ..., x_{n-1}, \beta_t) \in \Delta^n_{0,1}(t)$ y $0 \leq s \leq 1$. Ya que $\alpha_t \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \beta_t$, tenemos que

$$\alpha_t \leq (1-s)\alpha_t + sx_2 \leq \cdots \leq (1-s)\alpha_t + sx_i \leq \cdots \leq (1-s)\alpha_t + s\beta_t \leq \beta_t.$$

Así,

$$\begin{aligned}(1-s)a_0(t) + sx = (\alpha_t, (1-s)\alpha_t + sx_2, ..., (1-s)\alpha_t + sx_{n-1}, (1-s)\alpha_t + s\beta_t)\\ \in \Delta^n_0(\alpha_t, (1-s)\alpha_t + s\beta_t) \subset \Delta^n_0(t).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Así, se tiene que $c(\Delta^n_{0,1}(t)) \subset \Delta^n_0(t)$. Sea $x = (\alpha_t, x_2, ..., x_n) \in \Delta^n_0(t)$. Ya que $\alpha_t \leq x_n \leq \beta_t$, existe $s \in I$ tal que $x_n = (1-s)\alpha_t + s\beta_t$. Si $s = 0$ entonces $x_i = \alpha_t$ $\forall i = 1, ..., n$, así $x = a_0(t) \in c(\Delta^n_{0,1}(t))$.

Asumamos que $s > 0$. Así, para cada $i = 1, ..., n$, sea $x'_i = \frac{1}{s}(x_i - (1-s)\alpha_t)$. Ya que $\alpha_t \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, se tiene que

$$\alpha_t = \frac{1}{s}(\alpha_t - (1-s)\alpha_t) \leq \frac{1}{s}(x_2 - (1-s)\alpha_t) \leq \cdots \leq \frac{1}{s}(x_n - (1-s)\alpha_t) = \beta_t = x'_n,$$

luego $x' = (\alpha_t, x'_2, ..., x'_{n-1}, \beta_t) \in \Delta^n_{0,1}(t)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}x &= (\alpha_t, x_2, ..., x_{n-1}, \beta_t)\\ &= (\alpha_t, (1-s)\alpha_t + sx'_2, ..., (1-s)\alpha_t + sx'_{n-1}, (1-s)\alpha_t + s\beta_t)\\ &= (1-s)a_0(t) + sx' \in c(\Delta^n_{0,1}(t)).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Por lo tanto, se tiene que $c(\Delta^n_{0,1}(t)) = \Delta^n_0(t)$.

Por la ecuación 3.1, note que todo s-nivel de $c(\Delta^n_{0,1}(t))$ es igual a $\Delta^n_{0,1}(\alpha_t, (1-s)\alpha_t + s\beta_t) \subset \Delta^n_0(t)$.

Tomemos puntos

$$x = (\alpha_t, x_2, \ldots, x_{n-1}, \beta_t),\ x' = (\alpha_t, x'_2, \ldots, x'_{n-1}, \beta_t) \in \Delta^n_{0,1}(t).$$

Tenemos que si $r_n(x) = r_n(x')$, por la ecuación 3.1, se tiene que $r_n((1-s)a_0(t)+sx) = r_n((1-s)a_0(t)+sx')$ para cada $s \in I$; pues, sea $y \in r_n((1-s)a_0(t)+sx)$, así $y = q((1-s)\alpha_t + sx_i)$; por otro lado, por hipótesis tenemos que $q(x_i) \in r_n(x) = r_n(x')$ entonces $q(x_i) = q(x'_k)$, como $0 < t < 1/2$ entonces q es inyectiva en $[\alpha_t, \beta_t]$, así $x_i = x'_k$ entonces $(1-s)\alpha_t + sx_i = (1-s)\alpha_t + sx'_k$, por lo tanto $y = q((1-s)\alpha_t + sx_i) = q((1-s)\alpha_t + sx'_k)$, de donde $y \in r_n((1-s)a_0(t)+sx')$, así $r_n((1-s)a_0(t)+sx) \subset r_n((1-s)a_0(t)+sx')$. Similarmente se prueba la otra contensión.

También tenemos que si $r_n((1-s)a_0(t)+sx) = r_n((1-s)a_0(t)+sx')$ para algún $s \in (0,1]$, por la ecuación 3.1 y el lema 3.1.3(3), tenemos similarmente que $x' \in r_n^{-1}(r_n(x)) \subset \Delta^n_{0,1}(t)$: en efecto, la contesión $r_n^{-1}(r_n(x)) \subset \Delta^n_{0,1}(t)$ es claro por el lema 3.1.3(3). Por otro lado, si $y \in r_n(x)$ entonces $y = q(x_i)$; por hipótesis tenemos que $q((1-s)\alpha_t + sx_i) \in r_n((1-s)a_0(t)+sx) = r_n((1-s)a_0(t)+sx')$, así que $q((1-s)\alpha_t + sx_i) = q((1-s)\alpha_t + sx'_k)$ entonces $(1-s)\alpha_t + sx_i = (1-s)\alpha_t + sx'_k$, por inyectividad de q; de donde $x_i = x'_k$, así $y = q(x_i) = q(x'_k) \in r_n(x')$. Por lo tanto, $r_n(x) \subset r_n(x')$. Similarmente se muestra la otra contensión.

Por lo tanto, el homeomorfismo

$$f_0 : c(\Delta^n_{0,1}(t)) \to \Delta^n_0(t)$$

dado por

$$f_0((1-s)a_0(t)+sx) = (1-s)a_0(t)+sx,$$

induce el homeomorfismo

$$F_0 : c(r_n(\Delta^n_{0,1}(t)) \to r_n(\Delta^n_0(t))$$

dado por

$$[r_n(x), s] \mapsto r_n((1-s)a_0(t)+sx);$$

y se tiene que $F_0[r_n(x),0] = r_n(a_0(t))\ \forall r_n(x) \in r_n(\Delta^n_{0,1}(t))$ y $F_0[r_n(x),1] = r_n(x)\ \forall r_n(x) \in r_n(\Delta^n_{0,1}(t))$.

Similarmente tenemos que $r_n(\Delta^n_1(t))$ es homeomorfo al cono $c(r_n(\Delta^n_{0,1}(t))$ con el punto cono $r_n(a_1(t))$. □

Lema 3.2.2. *Sea $0 < t < 1/2$. Se tiene entonces que $r_n(\Delta^n(t))$ es homeomorfo a la suspensión $\Sigma r_n(\Delta^n_{0,1}(t))$ de $r_n(\Delta^n_{0,1}(t))$ con puntos de suspensión $r_n(a_1(t))$ y $r_n(a_0(t))$.*

Demostración. Por el lema 3.2.1 tenemos que $r_n(\Delta^n_1(t)) \cong c(r_n(\Delta^n_{0,1}(t)))$ y $r_n(\Delta^n_0(t)) \cong c(r_n(\Delta^n_{0,1}(t)))$ con puntos conos $r_n(a_1(t))$ y $r_n(a_0(t))$ respectivamente.

Ahora veamos que la intersección de estos conos solo se da en la base de los conos, es decir, que $r_n(\Delta^n_1(t)) \cap r_n(\Delta^n_0(t)) = r_n(\Delta^n_{0,1}(t)$. Sea $y \in r_n(\Delta^n_1(t)) \cap r_n(\Delta^n_0(t))$, así $y = r_n(x) = r_n(x')$ con $x \in \Delta^n_1(t)$, $x' \in \Delta^n_0(t)$; supongamos que $x = (x_1, x_2, ..., \beta_t) \in \Delta^n_1(t)$ y $x' = (\alpha_t, x'_2, ..., x'_n) \in \Delta^n_0(t)$; como $r_n(x) = r_n(x')$ y $0 < \alpha_t \leq x_1$, se tiene entonces que $\alpha_t = x_1$, pues de lo contrario, si $\alpha_t < x_1$ entonces $q(\alpha_t) \neq q(x_1)$, por inyectividad de q; como $q(\alpha_t) = q(x_i)$, por ser q inyectiva, se tiene entonces que $\alpha_t = x_i \geq x_1 > \alpha_t$, lo cual es una contradicción. Así, se tiene que $x = (\alpha, x_2, ..., x_{n-1}, \beta_t) \in \Delta^n_{0,1}(t)$. De donde, $y = r_n(x) \in r_n(\Delta^n_{0,1}(t))$. Así, $r_n(\Delta^n_1(t)) \cap r_n(\Delta^n_0(t)) \subset r_n(\Delta^n_{0,1}(t)$. La otra contensión es clara, pues $\Delta^n_1(t) \cap \Delta^n_0(t) = \Delta^n_{0,1}(t)$, y por lo tanto se tiene la igualdad $r_n(\Delta^n_1(t)) \cap r_n(\Delta^n_0(t)) = r_n(\Delta^n_{0,1}(t)$.

Con lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\Sigma r_n(\Delta^n_{0,1}(t)) &\cong r_n(\Delta^n_1(t)) \cup r_n(\Delta^n_0(t)) \\ &= r_n(\Delta^n_1(t) \cup \Delta^n_0(t)) \\ &= r_n(\Delta^n(t)),\end{aligned}$$

con puntos de suspensión $r_n(a_1(t))$ y $r_n(a_0(t))$. □

Lema 3.2.3. *Se tiene que* $r_n(\Delta^n(1/2)) = r_n(\Delta^n_0(1/2)) = r_n(\Delta^n_1(1/2))$.

Demostración. Mostremos que $r_n(\Delta^n_0(1/2)) = r_n(\Delta^n_1(1/2))$. Para cualquier punto $x = (0, x_2, ..., x_n) \in \Delta^n_0(1/2)$ definimos el punto $x' = (x_2, ..., x_n, 1) \in \Delta^n_1(1/2)$. Como $q(0) = q(1)$ entonces $r_n(x) = r_n(x')$. Así, $r_n(\Delta^n_0(1/2)) \subset r_n(\Delta^n_1(1/2))$. Similarmente se tiene $r_n(\Delta^n_0(1/2)) \supset r_n(\Delta^n_1(1/2))$.

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}r_n(\Delta^n(1/2)) &= r_n(\Delta^n_0(1/2) \cup \Delta^n_1(1/2)) \\ &= r_n(\Delta^n_0(1/2)) \cup r_n(\Delta^n_1(1/2)) \\ &= r_n(\Delta^n_0(1/2)).\end{aligned}$$

□

Ahora, vamos a demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2.4. *Sea* $0 < t < 1/2$ *fijo. Se tiene entonces que* $F_n(S^1) \setminus r_n(\Delta^n(1/2))$ *es homeomorfo al cono abierto* $c^o(\Sigma r_n(\Delta^n_{0,1}(t)))$ *de* $\Sigma r_n(\Delta^n_{0,1}(t))$ *con punto cono* $r_n(a_0(0)) = r_n(a_1(0))$. *A saber,* $F_n(S^1)$ *es una compactificación de* $c^o(\Sigma r_n(\Delta^n_{0,1}(t)))$ *cuyo residuo es homeomorfo a* $r_n(\Delta^n_0(1/2))$.

Demostración. Consideremos el conjunto de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$A = \{(1-s)C + sx : x \in \Delta^n(t),\ 0 \leq s < \gamma_t\},$$

donde $C = a_0(0) = (1/2, ..., 1/2)$ y $\gamma_t = 1/2t$.

Consideremos la proyección canónica al cociente

$$p : \Delta^n(t) \times [0, \gamma_t) \to \Delta^n(t) \times [0, \gamma_t)/\Delta^n(t) \times \{0\}.$$

Definamos

$$g : \Delta^n(t) \times [0, \gamma_t) \to A$$

dado por

$$(x, s) \mapsto (1-s)C + sx,$$

notemos que g está bien definida y es continua.

Ahora, sea $[x, s] \in \Delta^n(t) \times [0, \gamma_t)/\Delta^n(t) \times \{0\}$. Así, tenemos que

$$g(p^{-1}([x, s])) = g(\{(y, w) : p(y, w) \in [x, s]\}).$$

Si $s \neq 0$ entonces se tiene que $p^{-1}([x, s]) = \{(x, s)\}$. Así, tenemos que $g(\{(x, s)\} = \{(1-s)C + sx\}$.

Si $s = 0$ entonces $p^{-1}([x, 0]) = \Delta^n(t) \times \{0\}$. Así, tenemos que $g(\Delta^n(t) \times \{0\}) = \{C\}$.

Por lo tanto, tenemos que g es constante en cada $p^{-1}([x, s])$. Así, por el Lema de la transgresión (propiedad universal del cociente) existe una única función continua

$$h : \Delta^n(t) \times [0, \gamma_t)/\Delta^n(t) \times \{0\} \to A$$

tal que

$$h[x, s] = (1-s)C + sx.$$

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n(t) \times [0, \gamma_t) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & A \\
\Delta^n(t) \times [0, \gamma_t)/\Delta^n(t) \times \{0\} \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que h es inyectiva: sea $[x, s], [x', s'] \in \Delta^n(t) \times [0, \gamma_t)/\Delta^n(t) \times \{0\}$ tales que

$$(1-s)C + sx = (1-s')C + s'x'.$$

Se tiene entonces que

$$(1-s)/2 + sx_i = (1-s')/2 + s'x'_i \quad \forall i = 1, ..., n.$$

En particular, tenemos que

$$(1-s)/2 + sx_1 = (1-s')/2 + s'x'_1,$$

$$(1-s)/2+sx_n=(1-s')/2+s'x'_n.$$

Si $s=0$ entonces tenemos que

$$1/2=(1-s')/2+s'x'_1,$$

$$1/2=(1-s')/2+s'x'_n,$$

así, tenemos

$$0=s'(x'_1-1/2),$$
$$0=s'(x'_n-1/2),$$

tenemos entonces que

$$s'=0 \quad \text{o} \quad x'_1-1/2=0,$$

$$s'=0 \quad \text{o} \quad x'_n-1/2=0.$$

Así, tenemos que

$$s'=0 \quad \text{o} \quad x'_1=1/2=x'_n.$$

Notamos que si $x'_1=1/2=x'_n$ entonces se tiene que $x'_1=x'_2=\cdots=x'_n=1/2$ y así se sigue que $x'=C\notin\Delta^n(t)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, si $s=0$ entonces $s'=0$ de donde tenemos que $[x,s]=[x,0]=[x',0]=[x',s']$.

Ahora, si $s\neq 0$ y $s'\neq 0$; por la figura 3.4, tenemos que $(x_1,x_n)=(x'_1,x'_n)$.

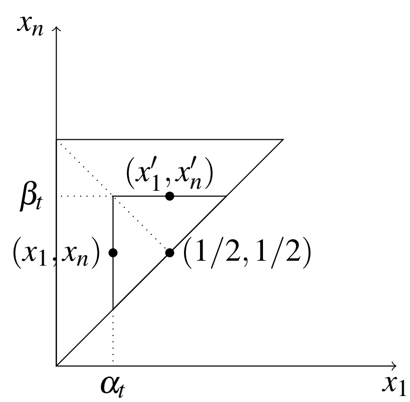


Figura 3.4:

Así, tenemos que

$$1/2-s/2+sx_1=1/2-s'/2+s'x_1,$$

$$1/2-s/2+sx_n=1/2-s'/2+s'x_n,$$

luego

$$0 = (s-s')/2 - (s-s')x_1,$$
$$0 = (s-s')/2 - (s-s')x_n,$$

luego tenemos

$$0 = (s-s')(1/2 - x_1),$$
$$0 = (s-s')(1/2 - x_n),$$

entonces tenemos que

$$s - s' = 0 \quad \text{o} \quad x_1 = 1/2 = x_n.$$

Vemos que $x_1 = x_n = 1/2$ no se puede dar, entonces $s - s' = 0$, así $s = s'$. Se tiene entonces que $x_i = x_i'$, $i = 1, \ldots, n$, luego, $x = x'$. Así, $(x,s) = (x',s')$, de donde $[x,s] = [x',s']$.

Tenemos que h es suprayectiva, pues sea $(1-s)C + sx \in A$. Tenemos que $[x,s] \in \Delta^n(t) \times [0,\gamma_t)/\Delta^n(t) \times \{0\}$ y así $h[x,s] = (1-s)C + sx$.

Por lo tanto, h es biyectiva.

La inversa de h es la función

$$h^{-1} : A \longrightarrow \Delta^n(t) \times [0,\gamma_t)/\Delta^n(t) \times \{0\}$$

dado por

$$(1-s)C + sx \longmapsto [x,s],$$

la cual es continua, pues si consideramos la función continua $g' : A \longrightarrow \Delta^n(t) \times [0,\gamma_t)$ dado por $g'((1-s)C + sx) = (x,s)$, se tiene que la siguiente composición

$$A \xrightarrow{g'} \Delta^n(t) \times [0,\gamma_t) \xrightarrow{p} \Delta^n(t) \times [0,\gamma_t)/\Delta^n(t) \times \{0\}$$

es continua, y es inmediato que $h^{-1} = p \circ g'$ es continua.

Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

Por otra parte, notamos que $c^o(\Delta^n(t))$ es homeomorfo a $\Delta^n(t) \times [0,\gamma_t)/\Delta^n(t) \times \{0\}$, pues $[0,1)$ es homeomorfo a $[0,\gamma_t)$. Por lo tanto, tenemos que

$$c^o(\Delta^n(t)) = A.$$

Ahora demostraremos que $\Delta^n \setminus \Delta^n(1/2) = c^o(\Delta^n(t))$. Sea $(1-s)C + sx \in c^o(\Delta^n(t))$ con $0 \le s < \gamma_t$ y $x \in \Delta^n(t)$. Se tiene entonces que

$$(1-s)C + sx = ((1-s)/2 + sx_1, \ldots, (1-s)/2 + sx_n),$$

como $s < \gamma_t = 1/2t$, entonces $2ts < 1$, lo que implica que $0 < 1 - 2st$ y también $1 + 2st < 2$, de donde tenemos que $(1-2st)/2 > 0$ y $(1+2st)/2 < 1$.

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}(1-s)/2+sx_1 \geq (1-s)/2+s\alpha_t &= (1-s)/2+s(1/2-t)\\ &= 1/2-st\\ &= (1-2st)/2>0,\end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned}(1-s)/2+sx_n \leq (1-s)/2+s\beta_t &= (1-s)/2+s(1/2+t)\\ &= 1/2+st\\ &= (1+2st)/2<1.\end{aligned}$$

Como $\alpha_t \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq \beta_t$, tenemos que

$$0<(1-s)/2+sx_1 \leq \cdots \leq (1-s)/2+sx_n<1.$$

Así, $(1-s)C+sx \in \Delta^n \setminus \Delta^n(1/2)$. Por lo tanto, $c^o(\Delta^n(t)) \subset \Delta^n \setminus \Delta^n(1/2)$.

Sea $x \in \Delta^n \setminus \Delta^n(1/2)$ con $x \neq C$.

Como se ve en la figura 3.5, existe $\lambda \in (0,\infty)$ y $(x'_1,x'_n) \in \Delta^2(t)$ tal que

$$(x'_1,x'_n) = ((1-\lambda)/2+\lambda x_1,(1-\lambda)/2+\lambda x_n).$$

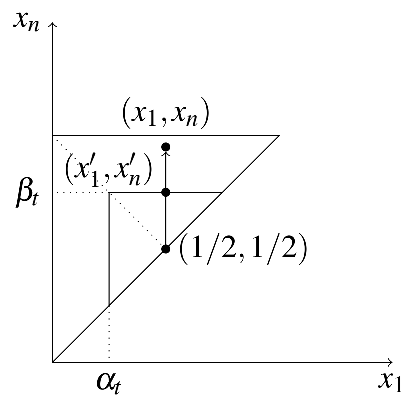


Figura 3.5:

Por lo tanto, definimos $x'_i = (1-\lambda)/2+\lambda x_i$ para cada $i=1,\ldots,n$ y consideremos en punto $x' = (x'_1,\ldots,x'_n) \in \mathbb{R}^n$. Así, tenemos que $\alpha_t \leq x'_1 \leq \cdots \leq x_n \leq \beta_t$ y $x'_1 = \alpha_t$ o $x'_n = \beta_t$; se tiene entonces que $x' \in \Delta^n(t)$.

Definamos $\mu = \lambda^{-1} > 0$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned}(1-\mu)C + \mu x' &= (1-\mu)C + \mu((1-\lambda)C + \lambda x)) \\ &= (1-\lambda^{-1})C + \lambda^{-1}(1-\lambda)C + \lambda^{-1}\lambda x \\ &= (1-\lambda^{-1})C + (\lambda^{-1}-1)C + x \\ &= x.\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\mu < \gamma_t$. Supongamos que $\mu \geq \gamma_t$, así $\mu \geq 1/2t$ entonces $0 \geq 1/2 - \mu t$ y $1/2 + \mu t \geq 1$. Si $x_1' = \alpha_t$ entonces

$$\begin{aligned}(1-\mu)/2 + \mu\alpha_t &= 1/2 + \mu(\alpha_t - 1/2) \\ &= 1/2 + \mu(-t) \\ &= 1/2 - \mu t \leq 0,\end{aligned}$$

la cual es una contradicción. Si $x_n' = \beta_t$ entonces

$$\begin{aligned}(1-\mu)/2 + \mu\beta_t &= 1/2 + \mu(\beta_t - 1/2) \\ &= 1/2 + \mu t \geq 1,\end{aligned}$$

la cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\gamma_t > \mu > 0$. Así, $x \in c^o(\Delta^n(t))$ y así $\Delta^n \setminus \Delta^n(1/2) \subset c^o(\Delta^(t))$. Por lo tanto, $\Delta^n \setminus \Delta^n(1/2) = c^o(\Delta^n(t))$.

Sea $0 \leq s < \gamma_t$ y $x \in \Delta^n(t)$. Entonces

$$(1-s)C + sx = ((1-s)/2 + sx_1, ..., (1-s)/2 + sx_n).$$

Para cualquier $x' \in r_n^{-1}(r_n(x))$, tenemos que $r_n(x') = r_n(x)$. Así, tenemos que $q(x_i') = q(x_j)$, como $0 < t < 1/2$ y q es inyectiva, así $x_i' = x_j$, se tiene entonces que

$$(1-s)/2 + sx_i' = (1-s)/2 + sx_j$$

entonces

$$q((1-s)/2 + sx_i') = q((1-s)/2 + sx_j),$$

como

$$(1-s)C + sx' = ((1-s)/2 + sx_1', ..., (1-s)/2 + sx_n'),$$

tenemos que

$$r_n((1-s)C + sx') = r_n((1-s)C + sx),$$

así

$$(1-s)C + sx' \in r_n^{-1}(r_n((1-s)C + sx)).$$

Ahora, supongamos que existen $y,z\in\Delta^n\setminus\Delta^n(1/2)$ con $r_n(y)=r_n(z)\neq r_n(C)$. Como se vió anteriormente, existen $y',z'\in\Delta^n(t)$ y $\lambda,\lambda'\in[0,\gamma_t)$ tales que

$$y=(1-\lambda)C+\lambda y' \ \text{ y } \ z=(1-\lambda')C+\lambda' z'.$$

Ya que $r_n(y)=r_n(z)$, se tiene que $y_1=z_1$ y $y_n=z_n$. Así,

$$(1-\lambda)/2+\lambda y'_1=y_1=z_1=(1-\lambda')/2+\lambda' z'_1,$$

$$(1-\lambda)/2+\lambda y'_n=y_n=z_n=(1-\lambda')/2+\lambda' z'_n,$$

como vimos anteriormente, tenemos que $(y'_1,y'_n)=(z'_1,z'_n)$, lo que implica que $\lambda=\lambda'$. Así, si $y_i=z_j$ para algunos i,j, entonces $y'_i=z'_j$. Por lo tanto tenemos que $r_n(y')=r_n(z')$. Además, notamos que $\lambda=\lambda'$ implica que $y,z\in\Delta^n(t')$ para algún $t'\in[0,1/2)$.

Por lo tanto la función identidad

$$c^o(\Delta^n(t))\to\Delta^n\setminus\Delta^n(1/2)$$

induce el homeomorfismo

$$\varphi_n: c^o(r_n(\Delta^n(t)))\to r_n(\Delta^n\setminus\Delta^n(1/2))$$

dado por

$$[r_n(x),s]\mapsto r_n((1-s)C+sx).$$

En efecto, φ_n es un hemeomorfismo, pues si consideramos la función continua

$$\psi: r_n(\Delta^n(t))\times[0,1)\longrightarrow r_n(\Delta^n\setminus\Delta^n(1/2))$$

definido por

$$(r_n(x),s)\longmapsto r_n((1-s)C+sx),$$

luego, se tiene que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
r_n(\Delta^n(t))\times[0,1) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & r_n(\Delta^n\setminus\Delta^n(1/2)) \\
c^o(r_n(\Delta^n(t))) \arrow[ur, "\varphi_n"'] &
\end{tikzcd}$$

esto es, se tiene que $\varphi_n\circ\pi=\psi$ es continua, donde π es la proyección al cociente; por el lema de la transgresión, se tiene que φ_n es continua, con inversa

$$\phi_n: r_n(\Delta^n\setminus\Delta^n(1/2))\longrightarrow c^o(r_n(\Delta^n(t)))$$

definido por

$$r_n((1-s)C+sx) \longmapsto [r_n(x),s],$$

la cual es continua, pues si consideramos la función continua $\psi' : r_n(\Delta^n \setminus \Delta^n(1/2)) \longrightarrow r_n(\Delta^n(t)) \times [0,1)$ definido por $r_n((1-s)C+sx) \longmapsto (r_n(x),s)$, se tiene que la siguiente composición

$$r_n(\Delta^n \setminus \Delta^n(1/2)) \xrightarrow{\psi'} r_n(\Delta^n(t)) \times [0,1) \xrightarrow{\pi} c^o(r_n(\Delta^n(t)))$$

es continua, y es inmediato que $\phi_n = \pi \circ \psi'$ es continua.

Que φ_n sea biyectiva, ya lo verificamos en el párrafo antes de la definición de φ_n. Por lo tanto, φ_n es homeomorfismo.

Por el lema 3.2.2 tenemos que

$$\varphi_n : c^o(\Sigma r_n(\Delta^n_{0,1}(t))) \to F_n(S^1) \setminus r_n(\Delta^n(1/2))$$

es homeomorfismo.

Para la segunda parte del teorema, tenemos por el lema 3.2.3, que $r_n(\Delta^n(1/2)) = r_n(\Delta_0(1/2))$.

Se tiene que $F_n(S^1) = F_n(S^1) \setminus r_n(\Delta^n(1/2)) \cup r_n(\Delta^n(1/2))$ es compacto.

Ahora veamos que $\overline{F_n(S^1) \setminus r_n(\Delta^n(1/2))} = F_n(S^1)$. Para esto, veamos que cualquier punto en $F_n(S^1)$, es límite de una sucesión de $F_n(S^1) \setminus r_n(\Delta^n(1/2))$. En efecto, para cada punto $y \in \Delta^n$, consideramos la recta $(1-t)C+ty$, con $0 \leq t \leq 1$, que une C con y. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $t_m = 1-1/m$ y definamos los puntos $(1-t_m)C+t_my$, observemos que $0 \leq t_m < 1$. Se tiene entonces que $\{(1-t_m)C+t_my\}$ converge a $(1-1)C+1y = y$, ya que $\{t_m\}$ converge a 1. Es fácil verificar que, como $t_m < 1$, se tiene que $\{(1-t_m)C+t_my\} \subset \Delta^n \setminus \Delta^n(1/2)$. Con lo anterior, para cada puntos $r_n(y) \in r_n(\Delta^n) = F_n(S^1)$, existe la sucesión $\{r_n((1-t_m)C+t_my)\} \subset F_n(S^1) \setminus r_n(\Delta^n(1/2))$ que converge a $r_n(y)$, ya que r_n es continua.

Así, se tiene que $\overline{F_n(S^1) \setminus r_n(\Delta^n(1/2))} = F_n(S^1)$. Por lo tanto, $F_n(S^1)$ es una compactificación de $c^o(\Sigma r_n(\Delta^n_{0,1}(t)))$ cuyo residuo es homeomorfo a $r_n(\Delta^n_0(1/2))$. □

Acabamos esta sección dando una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 3.2.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Se tiene entonces que existe un subconjunto cerrado R de $F_n(S^1)$ el cual es homeomorfo a D^{n-1} tal que $F_n(S^1) \setminus R$ es homeomorfo al cono abierto $c^o(\Sigma D^{n-2})$ sobre ΣD^{n-2}.*

3.3. Tipo de homotopía de $F_n(S^1)$

Vamos a ver que el tipo de homotopía de $F_n(S^1)$ está relacionado con esferas de ciertas dimensiones.

Antes, vamos a probar un resultado técnico.

Teorema 3.3.1. *Sea* $0 < t_0 < 1/2$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $K = \bigcup_{t_0 \le t \le 1/2} r_n(\Delta^n(t))$. *Se tiene entonces que existe un retracto por deformación de* K *a* $r_n(\Delta^n(1/2))$.

Demostración. Para cada $x \in \Delta^n(t_0)$ definamos

$$x' = s_0(x - C) + C \in \Delta^n(1/2), \tag{3.3}$$

donde $s_0 = 1/2t_0$ y $C = a_0(0) = (1/2, ..., 1/2) \in \Delta^n$.

Hemos visto que, efectivamente, $x' \in \Delta^n(1/2)$, pues $s_0(\alpha_{t_0} - 1/2) + 1/2 = 0$ y $s_0(\beta_{t_0} - 1/2) + 1/2 = 1$, así $x \in \Delta^n_j(t_0)$ implica que $x' \in \Delta^n_j(1/2)$ para $j = 0, 1$.

Consideremos el conjunto

$$Z = \{(1-\mu)x + \mu x' : \mu \in I,\ x \in \Delta^n(t_0)\}.$$

Para puntos $x, y \in \Delta^n(t_0)$ supongamos que existen $\mu, \nu \in I$ tales que

$$(1-\mu)x + \mu x' = (1-\nu)y + \nu y'.$$

Tenemos que

$$(1-\mu)x_i + \mu x'_i = (1-\nu)y_i + \nu y'_i \quad \forall i = 1, ..., n.$$

En particular, se tiene

$$((1-\mu)x_1 + \mu x'_1, (1-\mu)x_n + \mu x'_n) = ((1-\nu)y_1 + \nu y'_1, (1-\nu)y_n + \nu y'_n).$$

Como hemos visto, tenemos entonces que $(x_1, x_n) = (y_1, y_n)$, y entonces también $(x'_1, x'_n) = (y'_1, y'_n)$.

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
(1-\mu)x_1 + \mu x'_1 = (1-\nu)x_1 + \nu x'_1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 - \mu x_1 + \mu x'_1 = x_1 - \nu x_1 + \nu x'_1 \\
&\Rightarrow \quad \mu(-x_1 + x'_1) = \nu(-x_1 + x'_1) \\
&\Rightarrow \quad (\mu - \nu)(-x_1 + x'_1) = 0 \\
&\Rightarrow \quad (\mu - \nu) = 0 \ \text{ o } \ -x_1 + x'_1 = 0.
\end{aligned}$$

Similarmente, de $(1-\mu)x_n + \mu x'_n = (1-\nu)x_n + \nu x'_n$, se tiene que $(\mu - \nu) = 0$ o $-x_n + x'_n = 0$. Así, se tiene que

$$(\mu - \nu) = 0 \ \text{ o } \ -x_1 + x'_1 = 0 = -x_n + x'_n.$$

Si suponemos que $-x_1 + x'_1 = 0 = -x_n + x'_n$; por un lado tenemos que $-x_1 + ((1 - s_0)/2 + s_0 x_1) = 0$, luego $x_1 + s_0 x_1 = -(1-s_0)/2$, luego $-x_1(1-s_0) = -(1-s_0)/2$, así $x_1 = 1/2$; por otro lado tenemos, similarmente, que $x_n = 1/2$, y por lo tanto, se tiene que $x = C \notin \Delta^n(t_0)$, la cual es una contradicción. Por lo tanto, se tiene entonces que $\mu - \nu = 0$, es decir, $\mu = \nu$.

Así, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&(1-\mu)x_i + \mu x_i' = (1-\mu)y_i + \mu y_i' \\
&\Rightarrow (1-\mu)x_i + \mu((1-s_0)/2 + s_0 x_i) = (1-\mu)y_i + \mu((1-s_0)/2 + s_0 y_i) \\
&\Rightarrow (1-\mu)x_i + \mu s_0 x_i = (1-\mu)y_i + \mu s_0 y_i \\
&\Rightarrow (1-\mu+\mu s_0)x_i = (1-\mu+\mu s_0)y_i \\
&\Rightarrow (1-\mu+\mu s_0)(x_i - y_i) = 0 \\
&\Rightarrow 1-\mu+\mu s_0 = 0 \quad \text{o} \quad x_i - y_i = 0.
\end{aligned}
$$

Si $1-\mu+\mu s_0 = 0$ entonces $\mu - \mu s_0 = 1$, luego $\mu(1-s_0) = 1$, lo que implica que $\mu = 1/(1-s_0) < 0$, pues $1 - s_0 < 0$, la cual es una contradicción, pues $\mu \in I$.

Por lo tanto, $x_i - y_i = 0$, así $x_i = y_i \ \forall i = 1, \ldots, n$, por lo tanto $x = y$.

Esto muestra que Z es homeomorfo a $\Delta^n(t_0) \times I$. Como $\Delta^n(t_0)$ es homeomorfo a $\Delta^n(1/2)$, se tiene que $\Delta^n(t_0) \times I$ es homeomorfo a $\Delta^n(1/2) \times I$, así se tiene también que Z es homeomorfo a $\Delta^n(1/2) \times I$.

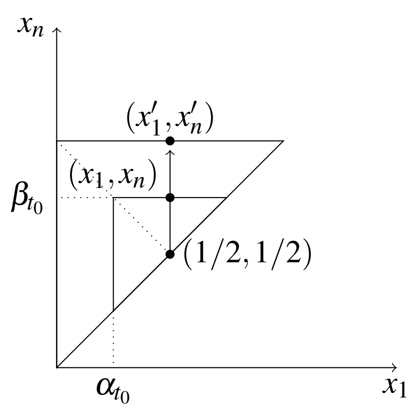


Figura 3.6:

A continuación, mostremos que $Z = \bigcup_{t_0 \leq t \leq 1/2} \Delta^n(t)$.

Es claro que $Z \subset \Delta^n$.

Para $\mu \in I$, se tiene que $(1-\mu)\alpha_{t_0} = \alpha_t$ para algún $t_0 \leq t \leq 1/2$ si y solo si $(1-$

$\mu)\beta_{t_0}+\mu=\beta_t$. En efecto,

$$\begin{aligned}(1-\mu)\alpha_{t_0}=\alpha_t &\Rightarrow (1-\mu)(1/2-t_0=1/2-t\\ &\Rightarrow 1/2-\mu/2-(1-\mu)t_0=1/2-t\\ &\Rightarrow t-\mu/2=(1-\mu)t_0.\end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}(1-\mu)\beta_{t_0}+\mu &= (1-\mu)(1/2+t_0)+\mu\\ &= 1/2-\mu/2+(1-\mu)t_0+\mu\\ &= 1/2+\mu/2+(1-\mu)t_0\\ &= 1/2+\mu/2+t-\mu/2\\ &= 1/2+t\\ &= \beta_t.\end{aligned}$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned}(1-\mu)\beta_{t_0}+\mu=\beta_t &\Rightarrow (1-\mu)(1/2+t_0)+\mu=1/2+t\\ &\Rightarrow 1/2+\mu/2+(1-\mu)t_0=1/2+t\\ &\Rightarrow \mu/2-t=-(1-\mu)t_0.\end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}(1-\mu)\alpha_{t_0} &= (1-\mu)(1/2-t_0)\\ &= 1/2-\mu/2-(1-\mu)t_0\\ &= 1/2-\mu/2+\mu/2-t\\ &= 1/2-t\\ &= \alpha_t.\end{aligned}$$

Así, para cualquier $x\in\Delta_0^n(t_0)$ o $\Delta_1^n(t_0)$, se tiene entonces que $(1-\mu)x+\mu x'\in\Delta_0^n(t)$ o $\Delta_1^n(t)$ para algún $t_0\le t\le 1/2$, respectivamente.

Por lo anterior, si $(1-\mu)x+\mu x'\in Z$, se tiene entonces que $(1-\mu)x+\mu x'\in\Delta^n(t)$ para algún $t_0\le t\le 1/2$. Por lo tanto, $Z\subset\bigcup_{t_0\le t\le 1/2}\Delta^n(t)$.

Ahora, sea $y\in\bigcup_{t_0\le t\le 1/2}\Delta^n(t)$.

Como $(y_1,y_n)\in\bigcup_{t_0\le t\le 1/2}\Delta^2(\alpha_t,\beta_t)$, como se ve en la figura 3.7, podemos encontrar $\lambda\in I$ y $(x_1,x_n)\in\Delta^2(t_0)$ tales que

$$(x_1,x_n)=((1-\lambda)/2+\lambda y_1,(1-\lambda)/2+\lambda y_n).$$

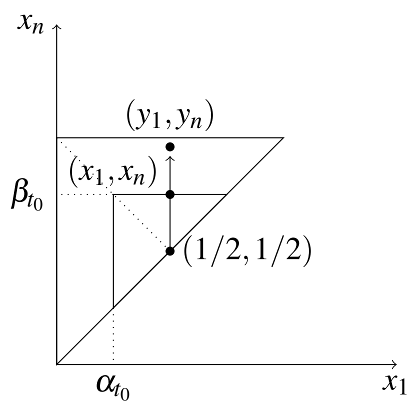


Figura 3.7:

Definamos $x_i = (1-\lambda)/2 + \lambda y_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, así obtenemos los puntos

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta^n(t_0) \ \text{ y } \ x' = s_0(x - C) + C \in \Delta^n(1/2).$$

Definamos $\mu = (1-\lambda)/(s_0 - 1)\lambda \geq 0$. Como $1 - \mu + \mu s_0 = \lambda^{-1}$ y $\mu(s_0 - 1) = (1-\lambda)/\lambda$, se tiene que, para cada $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
(1-\mu)x_i + \mu x_i' &= (1-\mu)x_i + \mu(s_0(x_i - 1/2) + 1/2) \\
&= (1-\mu)x_i + \mu s_0 x_i - \mu s_0/2 + \mu/2 \\
&= (1 - \mu + \mu s_0)x_i + \mu(1 - s_0)/2 \\
&= (1/\lambda)x_i + \mu(1 - s_0)/2 \\
&= (1/\lambda)((1-\lambda)/2 + \lambda y_i) + \mu(1 - s_0)/2 \\
&= (1-\lambda)/2\lambda + y_i + ((1-\lambda)/(s_0 - 1)\lambda)((1 - s_0)/2) \\
&= (1-\lambda)/2\lambda + y_i - ((1-\lambda)/(s_0 - 1)\lambda)((s_0 - 1)/2) \\
&= (1-\lambda)/2\lambda + y_i - (1-\lambda)/2\lambda \\
&= y_i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu \in I$ y $y \in Z$, así $\bigcup_{t_0 \leq t \leq 1/2} \Delta^n(t) \subset Z$. Por lo tanto, $Z = \bigcup_{t_0 \leq t \leq 1/2} \Delta^n(t)$ y $r_n(Z) = K$.

Es más, mostramos esencialmente que

$$\Delta^n(1/2) = \{x' : x \in \Delta^n(t_0)\}$$

y existe el homeomorfismo natural

$$F : \Delta^n(1/2) \times I \to \bigcup_{t_0 \leq t \leq 1/2} \Delta^n(t)$$

definido por
$$F(x,\mu) = (1-\mu)x + \mu x'.$$

Definimos
$$H: \bigcup_{t_0 \le t \le 1/2} \Delta^n(t) \times I \to \bigcup_{t_0 \le t \le 1/2} \Delta^n(t)$$
por
$$H((1-\mu)x + \mu x', u) = (1-(\mu+(1-\mu)u))x + (\mu+(1-\mu)u)x', \tag{3.4}$$
para cada $x \in \Delta^n(t_0)$ y cada $u \in I$.

Es claro que $H_0 = id_Z$, $H_u \mid_{\Delta^n(1/2)} = id_{\Delta^n(1/2)}$ y $H_1(Z) = \Delta^n(1/2)$.

Para cada $x \in \Delta^n(t_0)$, $u \in I$, por las igualdades 3.3 y 3.4, tenemos que
$$H((1-\mu)x + \mu x', u) = (1-\nu)x + \nu x' = (1-\nu+\nu s_0)x + \nu(1-s_0)C,$$
donde $\nu = \mu + (1-\mu)u$. Así, para cualquier $y \in r_n^{-1}(r_n(x))$ y cualquier $\mu \in I$, podemos ver que
$$r_n(H((1-\mu)x + \mu x', \mu)) = r_n(H((1-\mu)y + \mu y', \mu)).$$
Así, H induce una función continua
$$\overline{H} : K \times I \to K$$
dado por
$$(r_n((1-\mu)x + \mu x'), u) \mapsto r_n(H((1-\mu)x + \mu x', u)).$$

Supongamos que existen $\overline{x}, \overline{y} \in \bigcup_{t_0 \le t \le 1/2} \Delta^n(t)$ tales que $r_n(\overline{x}) = r_n(\overline{y})$. Como se vió anteriormente, existen $\mu, \mu' \in I$ y $x, y \in \Delta^n(t_0)$ tales que
$$\overline{x} = (1-\mu)x + \mu x', \;\; \overline{y} = (1-\mu')y + \mu' y',$$
como $r_n(\overline{x}) = r_n(\overline{y})$, se tiene que $\overline{x}_1 = \overline{y}_1$ y $\overline{x}_n = \overline{y}_n$. Así, se tiene que
$$(1-\mu)x_1 + \mu x_1' = \overline{x}_1 = \overline{y}_1 = (1-\mu')y_1 + \mu' y_1',$$
$$(1-\mu)x_n + \mu x_n' = \overline{x}_n = \overline{y}_n = (1-\mu')y_n + \mu' y_n'.$$
Como vimos anteriormente, tenemos que $(x_1, x_n) = (y_1, y_n)$ y $(x_1', x_n') = (y_1', y_n')$, lo que implica que $\mu = \mu'$. Así, se tiene que $x = y$. Además, si $\overline{x}_i = \overline{y}_j$ para algunos i, j, entonces $x_i = y_j$. Por lo tanto tenemos que $r_n(x) = r_n(y)$.

Con lo anterior, se tiene entonces que
$$\overline{H} : K \times I \to K$$
está bien definido, tal que $\overline{H}_0 = id_K$, $\overline{H}_u \mid_{r_n(\Delta^n(1/2))} = id_{r_n(\Delta^n(1/2))}$ y $\overline{H}_1(K) = r_n(\Delta^n(1/2))$. Por lo tanto $\overline{H}_1 : K \to r_n(\Delta^n(1/2))$ es un retracto por deformación, el cual prueba el teorema. $\square$

Ahora, damos los resultados principales de esta sección.

Teorema 3.3.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que $F_{2n+1}(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía de la $(2n+1)$-esfera S^{2n+1}.*

Demostración. Por el teorema 3.2.4, proposiciones 3.1.11 y 3.1.12, se tiene que $F_{2n+1}(S^1) \setminus r_{2n+1}(\Delta^{2n+1}(1/2))$ es homeomorfo al cono abierto $c^o(\Sigma D^{2n-1})$ de ΣD^{2n-1} y $F_{2n+1}(S^1)$ es una compactificación de $c^o(\Sigma D^{2n-1})$ cuyo residuo es homeomorfo a D^{2n}.

Sea
$$p : F_{2n+1}(S^1) \longrightarrow F_{2n+1}(S^1)/r_{2n+1}(\Delta^{2n+1}(1/2))$$
la proyección al cociente. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} F_{2n+1}(S^1)/r_{2n+1}(\Delta^{2n+1}(1/2)) &= \Sigma r_{2n+1}(\Delta^{2n+1}(t)) \\ &= \Sigma\Sigma r_{2n+1}(\Delta^{2n+1}_{0,1}(t)) \\ &= \Sigma^2(D^{2n-1}), \end{aligned}$$

esto es, $F_{2n+1}(S^1)/r_{2n+1}(\Delta^{2n+1}(1/2))$ es homeomorfo a la doble suspensión $\Sigma^2(D^{2n-1})$. Por el teorema 3.1.10 se tiene que D^{2n-1} tiene el mismo tipo de homotopía que S^{2n-1}, se tiene así, que $\Sigma^2(D^{2n-1})$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\Sigma^2(S^{2n-1}) = S^{2n+1}$. Por lo tanto, $F_{2n+1}(S^1)/r_{2n+1}(\Delta^{2n+1}(1/2))$ tiene el mismo tipo de homotopía que S^{2n+1}.

Por otro lado, por el lema 3.2.3 y proposición 3.1.11 se tiene que $r_{2n+1}(\Delta^{2n+1}(1/2)) = D^{2n}$ y por el teorema 3.1.10 se tiene que D^{2n} es contráctil; por lo tanto, p es una equivalencia homotópica, esto es, $F_{2n+1}(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que la $(2n+1)$-esfera S^{2n+1}. □

Teorema 3.3.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que $F_{2n}(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que la $(2n-1)$-esfera S^{2n-1}.*

Demostración. Definamos los siguientes conjuntos

$$K_0 = \bigcup_{1/4 \leq t \leq 1/2} r_{2n}(\Delta^{2n}(t)) \quad \text{y} \quad K_1 = Cl(F_{2n}(S^1) \setminus K_0).$$

Es claro que se tiene que $K_1 \cup K_0 = F_{2n}(S^1)$ y $K_1 \cap K_0 = r_{2n}(\Delta^{2n}(1/4))$.

Para cada $z \neq r_{2n}(C) \in K_1$, donde $C = (1/2, ..., 1/2)$, como r_{2n} es sobreyectiva se tiene que existe $x \in \Delta^{2n}$ tal que $r_{2n}(x) = z$; nos fijamos en la recta $(1-s)C + sx$ que pasa por C y por x, y consideramos el punto de esta recta que intersecta a $\Delta^{2n}(1/4)$, esto es, para x definimos $p(x) = (1-s_0)C + s_0 x$, donde $s_0 = \frac{1}{4t}$, con $0 \leq t \leq 1/2$. Para C definimos $p(C) = (1/4, 1/2, ..., 1/2, 3/4)$. Notemos que $p(x) \in \Delta^{2n}(1/4)$.

Ahora parametrizamos el segmento de x a $p(x)$, esto es, $(1-u)x + up(x)$, con $0 \leq u \leq 1$, como en la figura 3.9.

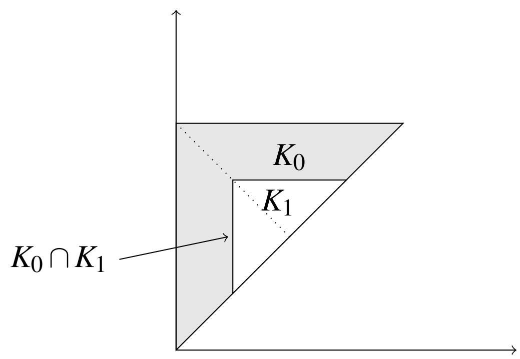


Figura 3.8:

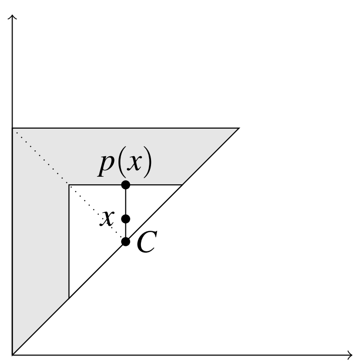


Figura 3.9:

Definamos

$$R_1 : K_1 \longrightarrow K_1 \cap K_0$$

por

$$R_1(r_{2n}(x)) = r_{2n}(p(x)).$$

Observemos que si $x \in K_1 \cap K_0$, no es difícil verificar que $p(x) = x$, así, se verifica que $R_1(r_{2n}(x)) = r_{2n}(p(x)) = r_{2n}(x)$.

Así, se tiene que R_1 es continua y es una retracción.

Definamos

$$H^{(1)} : K_1 \times I \longrightarrow K_1$$

por

$$(r_{2n}(x), u) \longmapsto r_{2n}((1-u)x + up(x)).$$

Se puede mostrar, como en los teoremas anteriores, que para cualquier $y \in r_{2n}^{-1}(r_{2n}(x))$ y $u \in I$ se tiene que $(1-u)y + up(y) \in r_{2n}^{-1}(r_{2n}((1-u)x + up(x)))$. Por lo tanto, $H^{(1)}$ está bien definida y es continua. Como $H_1^{(1)} = R_1$ y $H_0^{(1)} = id_{K_1}$, se tiene que R_1 es homotópica a la identidad id_{K_1}, Así, $H^{(1)}$ es una retracción de K_1 sobre $K_1 \cap K_0$.

Por otra parte, por el teorema 3.3.1, existe una retracción

$$R_0 : K_0 \longrightarrow r_{2n}(\Delta^{2n}(1/2)),$$

la cual es homotópica a la identidad id_{K_0}. Así, existe una homotopía

$$H^{(2)} : K_0 \times I \longrightarrow K_0$$

tal que $H_0^{(2)} = id_{K_0}$ y $H_1^{(2)} = R_0$, que es una retracción por deformación de K_0 sobre $r_{2n}(\Delta^{2n}(1/2))$.

Ahora definamos una retracción

$$R : F_{2n}(S^1) = K_1 \cup K_0 \longrightarrow r_{2n}(\Delta^{2n}(1/2))$$

mediante

$$R(r_{2n}(x)) = \begin{cases} R_0(R_1(r_{2n}(x))) & r_{2n}(x) \in K_1 \\ R_0(r_{2n}(x)) & r_{2n}(x) \in K_0. \end{cases}$$

Se tiene que R es continua y bien definida por el lema del pegado.

Veamos que R es homotópica a la identidad $id_{F_{2n}(S^1)}$; para esto, definimos una homotopía

$$H : F_{2n}(S^1) \times I \longrightarrow F_{2n}(S^1)$$

dado por

$$H(r_{2n}(x), v) = \begin{cases} H^{(2)}(H^{(1)}(r_{2n}(x), v), v) & r_{2n}(x) \in K_1 \\ H^{(2)}(r_{2n}(x), v) & r_{2n}(x) \in K_0. \end{cases}$$

Se tiene que $H_0 = id_{F_{2n}(S^1)}$ y $H_1 = R$. Con lo anterior, H es una retracción por deformación de $F_{2n}(S^1)$ sobre $r_{2n}(\Delta^{2n}(1/2))$, esto es, $r_{2n}(\Delta^{2n}(1/2))$ es retracto por deformación de $F_{2n}(S^1)$. Así, $F_{2n}(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $r_{2n}(\Delta^{2n}(1/2)) = D^{2n-1}$ y D^{2n-1} tiene el mismo tipo de homotopía que S^{2n-1}. Por lo tanto, $F_{2n}(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que S^{2n-1}. □

Se sabe que $F_2(S^1)$ es homeomorfo a la banda de Moebius. Con el resultado anterior, obtenemos el siguiente.

Corolario 3.3.4. *Cualquier $F_{2n}(S^1)$ no es una $2n$-variedad cerrada.*

Demostración. Supongamos que $F_{2n}(S^1)$ es una $2n$-variedad. Por el teorema 3.3.3 tenemos que $F_{2n}(S^1)$ tiene en mismo tipo de homotopía que S^{2n-1}, así, se tiene que $\pi_1(F_{2n}(S^1)) = \pi_1(S^{2n-1}) = 0$ es trivial; luego por el corolario 1.6.23, se tiene que $F_{2n}(S^1)$ es orientable. Por otra parte, por el corolario 1.6.25, se tiene que $H_{2n}(F_{2n}(S^1)) = \mathbb{Z}$, lo que es una contradicción, pues $H_{2n}(F_{2n}(S^1)) = H_{2n}(S^{2n-1}) = 0$. □

3.4. $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3

En el caso de $n = 3$, el teorema 3.2.4 implica el siguiente resultado más preciso.

Teorema 3.4.1. *Se tiene que $F_3(S^1) \setminus r_3(\Delta^3(1/2))$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ y $F_3(S^1)$ es una compactificación de $\mathbb{R}^3$ cuyo residuo es homeomorfo al* gorro de bufón D^2.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} F_3(S^1) \setminus r_3(\Delta^3(1/2)) &= c^o(\Sigma r_3(\Delta_{0,1}(t))) \\ &= c^o(\Sigma D^1) \\ &= c^o(\Sigma S^1) = c^o(S^2) = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Con esto y por el teorema 3.2.4 se sigue lo que queremos demostrar. □

Algo muy importante es ver que $F_3(S^1)$ es una 3-variedad, lo cual probamos a continuación.

Proposición 3.4.2. $F_3(S^1)$ *es una* 3*-variedad.*

Demostración. Por el teorema 3.4.1 anterior, se tiene que $F_3(S^1) \setminus r_3(\Delta^3(1/2))$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$. Así, todo punto $x \in F_3(S^1) \setminus r_3(\Delta^3(1/2))$ tiene una vecindad, la cual es homeomorfa a $\mathbb{R}^3$. Veamos ahora que todo $z \in \Delta^3(1/2)$ tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^3$. Escribamos $q_3(z) = (s,t,u)$ tal que $(1,0) \in \{s,u\}$. Se tiene entonces que existe un homeomorfismo $h : S^1 \longrightarrow S^1$ tal que

$$p_{F_3(S^1)}(h(s),h(t),h(u)) \in F_3(S^1) \setminus r_3(\Delta^3(1/2));$$

podemos considerar un homeomorfismo h como una rotación que mueva a los puntos s,t,u con un ángulo adecuado, que no sean los ángulos *complementarios* de s,t,u. Sea $H : F_3(S^1) \longrightarrow F_3(S^1)$ el homeomorfismo inducido por $h \times h \times h \times : T^3 \longrightarrow T^3$ tal que $H \circ r_3(z) \in F_3(S^1) \setminus r_3(\Delta^3(1/2))$. Por lo tanto, $r_3(z)$ tiene una vecindad la cual es homeomorfa a $\mathbb{R}^3$. □

En 1949, K. Borsuk en su artículo [3] se equivocó en afirmar que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a $S^1 \times S^2$. Tres años después, en 1952, R. Bott corrige la afirmación de Borsuk y demuestra que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 [5]. Estos matemáticos, para sus demostraciones, utilizaron técnicas de cortes y pegados. A continuación damos una demostración alternativa del teorema de Bott, con base en el teorema de Perelman-Poincaré (teorema 1.7.2). En cierto sentido, tal demostración es alternativa y moderna, pues en los años cincuentas aún no se había demostrado la conjetura de Poincaré sino hasta recientemente en 2006.

Del teorema 3.3.2, proposición 3.4.2 y teorema 1.7.2 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.4.3 (Bott,1952)**.** *$F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3.*

Demostración. El teorema 3.3.2 nos dice que $F_3(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que S^3 y el lema 3.4.2 nos dice que $F_3(S^1)$ es una 3-variedad. Ahora bien, el teorema de Perelman-Poincaré (teorema 1.7.2) nos dice que la única 3-variedad compacta y conexa, con el mismo tipo de homotopía que S^3 es S^3; por lo tanto tenemos que $F_3(S^1)$ es homeomorfa a S^3. $\square$

Estudiar el tipo de homotopía y la orientabilidad de variedades ha sido muy importante para conocer las propiedades de $F_n(S^1)$, con esto, hemos visto, por ejemplo, que $F_{2n}(S^1)$ no es una $2n$-variedad cerrada.

Para finalizar este capítulo damos algunos resultados, los cuales nos dan otras propiedades interesantes acerca de $F_n(S^1)$. En [7] se tiene el siguiente resultado, el cual nos dice para cuales $n \in \mathbb{N}$, $F_n(S^1)$ no es una n-variedad.

Teorema 3.4.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, se tiene que $F_n(S^1)$ no es una n-variedad.*

No daremos la demostración del teorema anterior, ya que se requiere de construcciones más complejas; el lector interesado puede consultar [7, teorema 6.4]. De hecho, en ese mismo artículo se muestra más fuertemente que $F_n(S^1)$ no admite variedades de dimensión n. De modo preciso:

Teorema 3.4.5. *Para cada entero $n \geq 4$, no existe ningún encaje de una n-variedad cerrada orientable en $F_n(S^1)$.*

La demostración del teorema anterior requiere de técnicas de cohomología, por tal motivo, no damos la demostración, pero el lector interesado puede consultar [7, teorema 7.1].

Corolario 3.4.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que existe un encaje de la n-esfera S^n en $F_n(S^1)$ si y solo si $n = 1, 3$.*

Para justificar la demostración del corolario anterior, notemos que si $n = 1,3$ se tiene, de hecho, que $S^1 = F_1(S^1)$ y que $S^3 = F_3(S^1)$. Recíprocamente, si $n \neq 1,3$, el teorema anterior nos dice que para cada entero $n \geq 4$, no se puede encajar S^n en $F_n(S^1)$. Para terminar, basta ver por qué no se puede encajar S^2 en $F_2(S^1)$.

Sabemos que $F_2(S^1)$ es homeomorfo a la banda de Moebius, que lo denotaremos por M. Recordemos que M es el espacio que se obtiene de indentificar los lados del cuadrádo representado en la figura 3.10.

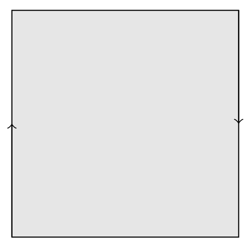


Figura 3.10: La Banda de Moebius M

Se sabe que M es un espacio CW-complejo de dinensión 2, considerando la descomposición celular de M que tiene en la figura 3.11.

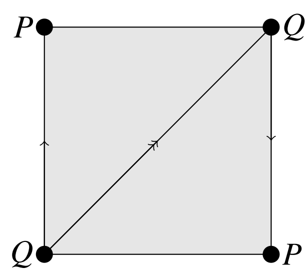


Figura 3.11: Celdas de M

Supongamos que existe un encaje de S^2 en $F_2(S^1)$, así, S^2 es hoemeomorfo a su imagen en $F_2(S^1)$. Ya que $F_2(S^1)$ es homeomorfo a M, vamos a pensar a S^2 como subespacio CW de M. Consideremos la sucesión exacta larga de la pareja (M, S^2) (véase el teorema 1.5.32)

$$\cdots \longrightarrow H_3(M, S^2) \longrightarrow H_2(S^2) \longrightarrow H_2(M) \longrightarrow \cdots$$

Por el teorema 1.5.43 se tiene que $H_3(M, S^2) = 0$, y por el teorema 3.3.2 obtenemos que $F_2(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que S^1, así M tiene el mismo tipo de homotopía que S^1, luego, por la proposición 1.5.24 y el ejemplo 1.5.42, se tiene que $H_2(M) = H_2(S^1) = 0$.

Por lo tanto, la sucesión exacta larga anterior se reduce a lo siguiente,

$$0 \longrightarrow H_2(S^2) \longrightarrow 0,$$

como $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$, por lo tanto, se tiene que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, la cual es absurdo. Por lo tanto, no se puede encajar S^2 en $F_2(S^1)$.

Para lograr los propósitos principales de este trabajo de tesis ha sido muy importante haber repasado las herramientas de topología algebraica, por ejemplo el grupo fundamental, la orientabilidad y la homología, entre otros, ya que muestra la relevancia de ésta área de la matemática dentro de la teoría de continuos e hiperespacios. Hemos logrado conocer las propiedades de $F_n(S^1)$ de manera general, es decir, sabemos sus tipos de homotopía y cuando es una variedad o no; aunque no se han logrado encontrar explícitamente sus modelos geométricos para cada $n \geq 4$.

Como una propiedad muy importante es haber descrito a $F_n(S^1) \setminus r_n(\Delta^n(1/2))$ como el cono abierto de la suspensión del subespacio particular $r_n(\Delta^n_{0,1}(t))$, de donde $F_n(S^1)$ es una compactificación de éste cono abierto; en esto, los espacios gorro de bufón de dimensiones mayores juegan un papel muy impertante; ya que con esto nos permitió conocer de $F_n(S^1)$ sus propiedades de tipo de homtopía y de variedad. El saber que $F_3(S^1)$ es una 3-variedad y que es del mismo tipo de homotopía que S^3 nos ha permitido dar una demostración alterna y moderma del teorema de Bott, mediante el teorema de Perelman-Poincaré.

Nos hemos enfocado particularmente en $F_n(S^1)$, pero ciertamente el tema de productos simétricos, en general, el de hiperespacios de un continuo es muy amplio en el área de la teoría de continuos e hiperespacios.

Bibliografía

[1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint.*Springer-Verlag New York, 2002.

[2] R. N. Andersen, M.M. Marjanović, R. M. Schori. *Symmetric products and higher dimensional dunce hats.* Topology Proc. 18 (1993), 7-17.

[3] K. Borsuk. *On the third symmetric potency of the circumference.* Fund. Math. 36 (1949), 236-244.

[4] K. Borsuk, S. Ulam. *On symmetric products of topological spaces.* Bull. A. M. S. 37 (1931), 875-882.

[5] R. Bott. *On the third symmetric potency of* S^1. Fund. Math. 39 (1952), 264-268.

[6] G. Cantor. *Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten.* Math. Ann. 21 (1883), no. 4, 545-591.

[7] N. Chinen, A. Koyama. *On the symmetric hyperspace of the circle.* Topology and its applications. 157, p. 2613-2621. 2010.

[8] A. Hatcher. *Algebraic Topology.*Cambridge University Press; Edición: 1, 2001.

[9] F. Hausdorff. *Grundzunge der Mengenlehre.* Leipzig, 1914. Primera edic. New York, 1949.

[10] D. Hinrichsen, J. L. Fernández Muñis, A. Fraguela C., A. Álvarez P. *Topología General.* Aportaciones matemáticas, Textos 22, SMM, 2003.

[11] S. Hu. *Homotopy theory.* Academic Pres, New York, 1959.

[12] C. Huai-Dong and Z. Xi-Ping . *Hamilton-Perelman's Proof of the Poincaré Conjecture and the Geometrization Conjecture.* 2006.

[13] C. Ivorra Castillo. *Topología algebraica con aplicaciones a la geometría diferencial.* Pdf online.

[14] A. Illanes Mejía. *Hiperespacios de continuos.* Aportaciones matemáticas, Textos 28, nivel medio, SMM, 2004.

[15] J. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds.* Second Edition. GTM 202. Springer.2011.

[16] J. Milnor. *Topology through the centuries: low dimensional manifolds.* BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 52, Number 4, October 2015, 545–584.

[17] R. Molski. *On symmetric product.* Fund. Math. 44 (1957), 165-170.

[18] H.R. Morton. *Symmetric product of yhe circle.* Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967), 349-352.

[19] J. R. Munkres. *Topología.* 2a edición. Prentice Hall, Madrid, 2002.

[20] S. B. Nadler, Jr. *CONTINUUM THEORY, An Introduction.* Editorial Board. Pure and applied mathematics. 1992.

[21] G. Perelman. *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds.* preprint,arXiv.math.DG/0307245, July 17, 2003.

[22] H. Poincaré. *Cinquième Complement à l'analysis situs,* Rend. Circ. Mat. Palermo 18 (1904), 45-110. (También *Oeuvres,* Tome VI, Paris, 1953, p. 498.)

[23] R.M. Schori. *Hiperspaces and symmetric products of topological spaces.* Fund. Math. 39 (1968), 77-87.

[24] E.H. Spanier. *Algebraic Topology.* McGraw-Hill, New York, 1966.

[25] R. Stöcker, H. Zieschang. *Algebraische Topologie.* B.G. Teubner Stuttgart 1994.

[26] R. M. Switzer. *Algebraic Topology-Homology and Homotopy.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1975.

[27] W.P. Thurston. *Three-Dimesional Geometry and Topology, Volume 1.* Princeton University Pres. Princeton, New Jersey, 1997.

[28] L. W. Tu. *An introduction to Manifolds.* Second Edition. Springer, 2011.

[29] L. Vietoris. *Bereiche zweiter Ordnung.* Monats. Math. phys. 32 (1922), no. 1, 258-280.

[30] G. W. Whitehead. *Elements of Homotopy theory.* GTM 61. Spriger-Verlag New York, 1978.

[31] E.C. Zeeman. *On the dunce hat.* Topology 39 (1964), 341-358.