



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE CHIAPAS



FACULTAD DE CIENCIAS EN
FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PROCESOS DE CONTEO Y TIEMPOS DE ARRIBO
EN CADENAS DE MARKOV CON APLICACIONES
A MODELOS DE RIESGOS FINANCIEROS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
**MAESTRA EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

LIC. ELDA JANETH LÓPEZ PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALFREDO CAMACHO VALLE

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS;

NOVIEMBRE 2018.



Universidad Autónoma de Chiapas
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
 21 de noviembre de 2018
Oficio No. FCFM/0488/18

Dr. Alfredo Camacho Valle
Presidente y Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

“PROCESOS DE CONTEO Y TIEMPOS DE ARRIBO EN CADENAS DE MARKOV CON APLICACIONES A MODELOS DE RIESGOS FINANCIEROS”.

Ha sido aceptada para sustentar el Examen de Grado de Maestra en Ciencias Matemáticas de la **Lic. Elda Janeth López Pérez** con matrícula escolar: C070083.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

“Por la conciencia de la necesidad de servir”


Dr. Sendic Estrada Jiménez
DIRECCIÓN
FCFM

Director

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
 CP. Juan Manuel Aguiar Gámez - Encargado de Posgrado FCFM
 Archivo / Minutario
 SEJ /jmag

Índice general

Índice general	3
Índice de cuadros	5
Índice de figuras	6
RESUMEN	8
AGRADECIMIENTOS	9
Glosario	10
Abreviaturas	11
Introducción	12
1. Antecedentes de Probabilidad	13
1.1. Espacio de Probabilidad	13
1.2. Función de Distribución	14
1.3. Variable Aleatoria	15
1.4. Variable aleatoria discreta	15
1.4.1. Función de densidad	15
1.4.2. Valor esperado y varianza	16
1.5. Variable aleatoria continua	16
1.5.1. Función de densidad	16
1.5.2. Valor esperado y varianza	17
1.6. Función de Distribución Conjunta	17
1.7. Función Generadora de Momentos	17
1.8. Suma de variables aleatorias independientes	18
1.9. Esperanza y varianza condicional	19
1.10. Algunos Modelos de Distribuciones Discretas	21
1.11. Función de Supervivencia	23
1.12. Simulación Monte-Carlo	23
2. Cadena de Markov	25
2.1. Procesos Estocásticos	25
2.2. Definición: Cadena de Markov	25

2.3.	Probabilidad de transición en m pasos $p_{ij}(m)$	26
2.4.	Vector de Probabilidades Iniciales	27
2.5.	Clasificación de estados de una cadena de Markov	28
2.5.1.	Periodos	30
2.6.	Descomposición del espacio de estados	30
2.7.	Tiempos de ocupación	31
2.8.	Cálculo de Probabilidades de Absorción	32
2.9.	Comportamiento asintótico	33
2.10.	Tiempos de arribo y recurrencia	34
2.10.1.	Tiempo de recurrencia	35
2.10.2.	Tiempo de segundo arribo	36
3.	Proceso de Conteo y función de pérdida asociada	37
3.1.	Defnición de proceso de conteo	37
3.2.	Función de densidad del proceso de conteo	39
3.3.	Valor Esperado y Varianza del proceso de conteo	40
3.4.	Función de pérdida	40
3.4.1.	Función de pérdida total con pérdida constante	40
3.4.2.	Función de pérdida total con pérdidas aleatorias	41
3.5.	Función de Pérdida por Activo	44
3.5.1.	Valor esperado, varianza y FGM de pérdida por activo	44
3.5.2.	Función de Pérdida de Cartera	45
4.	Análisis de Caso	47
4.1.	Análisis de tiempos de arribo en riesgos crediticios	47
4.1.1.	Tiempo de primer Arribo al estado de default	48
4.1.2.	Tiempo de segundo arribo al estado de default	56
4.1.3.	Tiempo del tercer arribo al estado de default	57
4.1.4.	Tiempo del k -ésimo arribo al estado de default	57
4.2.	Análisis de función de pérdida en riesgos crediticios	58
4.2.1.	Función de pérdida de variables aleatorias	58
4.2.2.	Función de pérdida de Cartera	62
	Conclusión	65
	Futura investigación	66
A.	Código de simulación Monte-Carlo en Matlab® para tiempos de arribo	67
A.1.	Tiempo de primer arribo al estado de default D	67
A.2.	Tiempo de segundo arribo al estado de default D	68
A.3.	Tiempo del k -ésimo arribo al estado de default D	69
B.	Código de Simulación Monte-Carlo en Matlab® para función de pérdida	70
B.1.	Pérdida total de pérdidas aleatorias	70
B.2.	Pérdida total de cartera de inversión	71
	Bibliografía	73

Índice de cuadros

4.1.	Tiempo esperado de primer arribo a D .	49
4.2.	Varianza del tiempo de primer arribo a D .	49
4.3.	Tiempo esperado de segundo arribo a D .	57
4.4.	Varianza del tiempo de segundo arribo a D .	57
4.5.	Tiempo esperado de tercer arribo a D .	57
4.6.	Varianza del tiempo de tercer arribo a D .	57
4.7.	Estadísticos de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$.	59
4.8.	Estadísticos de función de pérdida de cartera de 5 activos en un tiempo $t = 100$.	63

Índice de figuras

2.1. Cadena de Markov absorbente	28
4.1. Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo del tiempo de primer arribo al estado desastroso D	48
4.2. Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 1.	49
4.3. Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 2.	50
4.4. Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 3.	50
4.5. Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 4.	51
4.6. Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 5.	51
4.7. Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 6.	52
4.8. Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 7.	52
4.9. Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 1.	53
4.10. Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 2.	53
4.11. Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 3.	54
4.12. Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 4.	54
4.13. Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 5.	55
4.14. Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 6.	55
4.15. Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 7.	56
4.16. Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo del tiempo de segundo arribo al estado desastroso D	56
4.17. Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo del tiempo de k -ésimo arribo al estado desastroso D	58

4.18. Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo de función de pérdida con pérdidas aleatorias.	59
4.19. Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 1.	60
4.20. Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 2.	60
4.21. Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 3.	60
4.22. Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 4.	61
4.23. Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 5.	61
4.24. Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 6.	61
4.25. Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 7.	62
4.26. Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo de la función de pérdida de cartera al momento t	63
4.27. Histograma de función de pérdida de cartera de 5 activos en un tiempo $t = 100$	64

RESUMEN

Uno de los problemas más importantes que se trata en el área de matemáticas financieras es el riesgo financiero, mismo que refiere a la probabilidad de ocurrencia de un evento que tendrá consecuencias financieras negativas para una organización. En particular el default crediticio, el cual es asociado al incumplimiento de un pago contratado. El concepto se relaciona habitualmente con las instituciones financieras y los bancos, pero afecta también a empresas y organismos de otros sectores. El motivo para crear modelos de riesgo crediticio radica en la necesidad de calcular cuánto capital económico es necesario para sustentar las actividades de toma de riesgo de un banco. Tener conocimiento del momento de arribo a un estado de riesgo o desastrosos (también conocido como estado de default) es de vital importancia en la toma de decisiones, además de saber cuantas veces se cae en dicho estado, brindaría el monto aproximado de capital a cubrir para evitar pérdidas fatales.

Teoría de primer arribo y retorno ya ha sido tratada con anterioridad, sin embargo en este trabajo se presentan 4 resultados, inicialmente se introduce el concepto de tiempos de arribo en un sistema de multiestados de una cadena de Markov discreta, del cual se determina la función de densidad a través de la convolución de la función de sobrevivencia y función de densidad de primer arribo, la generadora de momentos, valor esperado y varianza para el primer tiempo de arribo, segundo tiempo de arribo y k-ésimo tiempo de arribo, que representa el primer resultado obtenido en este trabajo y tiene amplias aplicaciones en diversas áreas del conocimiento. Posteriormente se introduce el concepto de procesos de conteo en un sistema de multiestados asumiendo un modelo de Markov a tiempo discreto del cual se extrajo la función de densidad asociada, la generadora de momentos, valor esperado y varianza de dicho proceso, lo cual representó el segundo resultado de este trabajo. Luego, se introduce el concepto de función de pérdida que se basa en una combinación no lineal del proceso de conteo y una variable aleatoria asociada al monto de pérdida con distribución conocida, del cual se generó una función de densidad, valor esperado y varianza, lo cual es el tercer resultado. Finalmente, se presenta resolución a problemas asociados a sistemas de multiestados y pérdida de cartera a través de simulación Monte-Carlo.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente gratitud a mis padres: Elda Pérez Roblero, Jose A. López Gomez y hermanos: Jose Luis, Leticia por su apoyo incondicional, consejos, comprensión, amor y por ayudarme con los recursos necesarios para estudiar.

Gracias a mi asesor de tesis, el Dr. Alfredo Camacho Valle por su apoyo día a día en mi formación académica, por haberme brindado la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento científico, así como también de orientación, crítica constructiva, lo cual fue crucial en este trabajo.

De igual forma, agradecimiento al Dr. Armando Mendoza por su apoyo, conocimiento y orientación brindado durante mi formación en la maestría.

Al comité de maestría de la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas por haberme aceptado ser parte de ella, así como también a los diferentes docentes que me brindaron sus conocimientos, finalmente, agradezco al CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (CONACYT) por el apoyo para concluir con mis estudios de maestría.

Este trabajo es dedicado a mis padres y hermanos.

Glosario

Símbolo	Descripción
Ω	Espacio muestral
\mathfrak{F}	σ -álgebra
$\Psi_i(t)$	Función de supervivencia en i al momento t .
T	Variable aleatoria que representa el tiempo de supervivencia.
p_i	Probabilidad inicial
$p_{ij}(t)$	Probabilidad de transición de i a j al momento t
$M_Y(s)$	Función generadora de momentos asociada a la variable aleatoria Y
$Y(t)$	Variable aleatoria asociada al primer arribo exactamente al momento t
$Y^{(2)}(t)$	Variable aleatoria asociada al segundo arribo exactamente al momento t
$Y^{(k)}(t)$	Variable aleatoria asociada al k -ésimo arribo exactamente al momento t
$N(t)$	Proceso de conteo
$P_T(t)$	Variable aleatoria asociada a la pérdida total por arribo
$P_{T_i}(t)$	Variable aleatoria asociada a la pérdida total ocurrida por el activo i

Algunas abreviaturas

Abreviatura	Descripción
v.a.	Variable aleatoria
f.d.	Función de densidad
FDC	Función de distribución conjunta
FGM	Función generadora de momentos

Introducción

El análisis de riesgos financieros se ha convertido en uno de los problemas más importantes a estudiar en el área de matemáticas financieras. En especial nos interesa el estudio de riesgos crediticios, el cual se basa en el sistema de calificación, que es una evaluación de la capacidad de un deudor para realizar sus pagos en su totalidad y puntualmente, con el fin de estimar los riesgos y facilitar la toma de decisiones de los inversionistas. Así, evitar sucesos fatales para la empresa u organización. Por consiguiente, el problema se trata de estimar el tiempo en el que un deudor no cumpla con su deuda.

Inicialmente se introduce conceptos básicos de probabilidad y resultados que se aplican en posteriores capítulos, luego, se considera el sistema de multiestados de una cadena de Markov a tiempos discretos ya que es una de las herramientas más utilizadas en procesos estocásticos dado que presenta aplicaciones a muchas áreas del conocimiento por su simplicidad. En particular en teoría de riesgo nos interesa conocer el tiempo de arribo (ingreso) a un estado desastroso, ya que eso implica un costo para el poseedor de un activo.

Capítulo 1

Antecedentes de Probabilidad

En este capítulo se describirán conceptos básicos de la teoría de probabilidad, además de resultados relevantes que nos serán de gran utilidad en los próximos capítulos.

1.1. Espacio de Probabilidad

Considere un experimento cuyo resultado no puede ser predeterminado (experimento aleatorio), sin embargo, las posibles salidas son conocidas. El modelo fundamental para describir un experimento aleatorio, es el espacio de probabilidad. A continuación se presentan los componentes de dicho espacio.

Se introduce a cada experimento el conjunto Ω que representa todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, es llamado espacio muestral. Cuyos elementos se les conoce como sucesos o eventos.

De igual forma, se asocia con Ω a la clase \mathfrak{F} , de subconjuntos de Ω , que representa todos los eventos o conjuntos de interés.

Definición 1.1. Sea Ω un espacio muestral y sea \mathfrak{F} una colección de subconjuntos de Ω . Se dice que \mathfrak{F} es una σ -álgebra de eventos de Ω , si se cumplen los siguientes axiomas:

1. $\Omega \in \mathfrak{F}$
2. Si $A \in \mathfrak{F}$, entonces $A^c \in \mathfrak{F}$
3. Si A_j es una sucesión de elementos de \mathfrak{F} , entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{F}$

Otro componente del modelo es, una medida de probabilidad (o simplemente probabilidad), esto es, una función que asigna a cada evento la probabilidad que tiene de ocurrir al observar un experimento aleatorio, que debe satisfacer ciertas propiedades.

Definición 1.2. Sea Ω un espacio muestral y \mathfrak{F} una σ -álgebra. Una función P definida en \mathfrak{F} se llama medida de probabilidad (o probabilidad) si cumple las siguientes condiciones:

1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathfrak{F}$.
2. $P(\Omega) = 1$.

3. Sea $\{A_j\}$, $A_j \in \mathfrak{F}$, $j = 1, 2, \dots$, una sucesión disjunta de eventos, es decir, $A_j \cap A_k = \emptyset$ para $j \neq k$. Entonces

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

Esta última propiedad es conocida como aditividad contable, donde la idea es que toda medida debe permitir medir por partes.

Definición 1.3. La terna $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ se llama espacio de probabilidad.

Las propiedades de \mathfrak{F} garantizan que si hacemos las operaciones usuales (unión, intersección, complementos, diferencias) de elementos de \mathfrak{F} , obtenemos conjuntos que llamaremos medibles.

1.2. Función de Distribución

Definición 1.4. Considere la clase \mathfrak{D} que reúne todos los conjuntos abiertos de \mathbb{R} . La σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} se define como la σ -álgebra generada por \mathfrak{D} , y se denota por $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Esto es $\sigma(\mathfrak{D}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Los subconjuntos que pertenecen a $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ son llamados conjuntos de Borel o simplemente borelianos.

Se asume un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ sobre el cual se define una variable aleatoria X con valores reales. Si A es un intervalo de \mathbb{R} y se desea calcular la probabilidad de que la variable X tome valores en A , se debe considerar el conjunto

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

que es la pre-imagen de A por la función X . Como la función X está definida en la colección \mathfrak{F} en consecuencia es posible calcular su probabilidad. Por lo tanto,

$$P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}). \quad (1.1)$$

Donde, la relación (1.1) vale para todo $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, dicha relación permite definir una probabilidad (medida) P_X sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ inducida por la variable aleatoria X , de la siguiente manera:

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \quad (1.2)$$

Esta medida de probabilidad se conoce como la distribución o la ley de X , la cual contiene toda la información probabilística sobre la variable aleatoria X .

Definición 1.5. Una función de valor real F definida en $(-\infty, \infty)$ que es creciente, continua por la derecha, tiene límites por la izquierda y satisface

$$F(-\infty) = 0 \quad y \quad F(+\infty) = 1,$$

se llama función de distribución.

1.3. Variable Aleatoria

Definición 1.6. Sea Ω un espacio muestral y \mathfrak{F} una σ -álgebra. Una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de un solo valor se denomina variable aleatoria si las imágenes inversas bajo X de todos los conjuntos de Borel en \mathbb{R} son eventos, es decir, si

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}, \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \quad (1.3)$$

En otras palabras, una variable aleatoria es una función de valor real del resultado del experimento. Recordemos que:

- Una función de una variable aleatoria define otra variable aleatoria.
- Es posible asociar con cada variable aleatoria ciertos valores de interés, tales como la media y la varianza.
- Es posible extender el concepto de variable aleatoria a variables aleatorias condicionadas.
- La independencia entre eventos se extiende a variables aleatorias.

Si una función F satisface las propiedades de la definición 1.5 entonces existe una variable aleatoria X definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tal que F es la función de distribución de X .

Es útil distinguir la función de distribución de una variable aleatoria X usando la notación F_X . Además, si F es la función de distribución de una variable aleatoria X , se escribe $X \sim F$ y si X y Y son variables aleatorias con la misma función de distribución se dice que son igualmente distribuidas y se escribe $X \sim Y$.

1.4. Variable aleatoria discreta

Ahora, se presenta la noción de variable aleatoria discreta.

Definición 1.7. Una variable aleatoria se llama discreta si el conjunto de valores que puede tomar es finito o a lo sumo numerable infinito.

1.4.1. Función de densidad

Para una variable aleatoria discreta X , sus probabilidades se obtienen por la función de densidad de X , denotada como p_X .

Definición 1.8. Sea una v.a. discreta X y una colección de números $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que satisface $P(X = x_i) = p_i \geq 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, a la función $p_X(x_i) = p_i$ se le denomina función de densidad de la v.a. X .

Además, la función de distribución F de X viene dado por,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i). \quad (1.4)$$

Donde, dicha función acumula probabilidad hasta el valor x .

1.4.2. Valor esperado y varianza

Si X es una v.a. discreta, el momento de orden n de X está dado por

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \sum_i x_i^n P(X = x_i) \\ &= \sum_i x_i^n p_X(x_i). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Siempre y cuando la serie en (1.5) converja absolutamente. Si esta serie diverge se dice que el momento no existe.

El primer momento, que corresponde a $n = 1$, se conoce como la media, el valor esperado o esperanza de X , y lo denotaremos por $E[X]$, es decir:

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x p_X(x) \quad (1.6)$$

El momento central o centrado de orden n es el momento de orden n de la variable $X - E[X]$, siempre que $E[X]$ exista. El primer momento central es cero. El segundo momento central se conoce como la varianza de X y se denota por $Var(X)$. Así,

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2. \quad (1.7)$$

1.5. Variable aleatoria continua

Se introduce ahora el concepto de variable aleatoria continua.

Definición 1.9. Una variable aleatoria X es continua si su función de distribución F es continua.

1.5.1. Función de densidad

Definición 1.10. La función $f(x)$ definida sobre el conjunto de los números reales es una función de densidad para la variable aleatoria continua X , si:

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
3. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Notar que, si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

Además, si F es diferenciable en x entonces la función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.8)$$

1.5.2. Valor esperado y varianza

El valor esperado de una variable aleatoria continua X se define por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (1.9)$$

La varianza de una variable aleatoria continua X esta definido por:

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \quad (1.10)$$

1.6. Función de Distribución Conjunta

Definición 1.11. Sea un par de variables aleatorias (X, Y) definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, su función de distribución conjunta $F_{X,Y}$ está definida por

$$F_{X,Y}(x, y) = F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y). \quad (1.11)$$

Si ambas variables son discretas y toman valores $x_i, i \geq 1$ y $y_j, j \geq 1$ respectivamente, la función de densidad conjunta de X y Y es

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i \geq 1, \quad j \geq 1. \quad (1.12)$$

Además, las funciones de probabilidad marginales se definen por:

$$f_X(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i, y_j) \quad \text{y} \quad f_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i, y_j).$$

1.7. Función Generadora de Momentos

Se presenta la **función generadora de momentos (F.G.M.)** asociada a una variable aleatoria, la cual nos permite calcular fácilmente los momentos de dicha variable.

La F.G.M. de una variable aleatoria X es denotada como la función $M_X(s)$ de un parámetro libre s , dado por $M_X(s) = E[e^{sX}]$, siempre que este valor esperado exista. Cuando X es una variable aleatoria discreta, la función generadora de momentos correspondiente está definida por:

$$M(s) = \sum_x e^{sx} f_X(x), \quad (1.13)$$

tomando la derivada respecto a s de ambos lados de la definición se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} M(s) &= \frac{d}{ds} \sum_x e^{sx} f_X(x) \\ &= \sum_x \frac{d}{ds} e^{sx} f_X(x) \\ &= \sum_x x e^{sx} f_X(x) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Esta igualdad se cumple para todos los valores de s . Considerando el caso especial donde $s = 0$, se obtiene,

$$\left. \frac{d}{ds} M(s) \right|_{s=0} = \sum_x x f_X(x) = E[X] \quad (1.15)$$

De igual forma para la segunda derivada de la F.G.M. $M(s)$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{ds^2} M(s) \right|_{s=0} &= \sum_x x^2 e^{sx} f_X(x) \Big|_{s=0} \\ &= \sum_x x^2 f_X(x) \\ &= E[X^2] \end{aligned} \quad (1.16)$$

En general, la derivada n -ésima de la F.G.M. $M(s)$ respecto a s , es dada por;

$$\left. \frac{d^n}{ds^n} M(s) \right|_{s=0} = \sum_x x^n f_X(x) = E[X^n] \quad (1.17)$$

1.8. Suma de variables aleatorias independientes

Particularmente, usar la función generadora de momentos es conveniente cuando se trata de una suma de variables aleatorias. Puesto que la suma de variables aleatorias independientes corresponde al producto de funciones generadoras de momentos.

Definición 1.12. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variables aleatorias con espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, decimos que X_1, X_2, \dots, X_n son independientes si $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \in B_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i) \quad (1.18)$$

Sean X y Y variables aleatorias independientes, tal que $W = X + Y$. Por definición se sabe que la F.G.M. asociada a W es,

$$M_W(s) = E[e^{sW}] = E[e^{s(X+Y)}] = E[e^{sX} e^{sY}]. \quad (1.19)$$

considere s un valor fijo. Adeás, como X y Y son v.a. independientes, entonces también e^{sX} y e^{sY} son variables aleatorias independientes. Por lo tanto, el valor esperado de su producto es el producto de sus valores esperados, esto es;

$$M_W(s) = E[e^{sX}]E[e^{sY}] = M_X(s)M_Y(s). \quad (1.20)$$

De igual forma, si X_1, \dots, X_n es una colección de variables aleatorias independientes, tal que:

$$W = X_1 + \dots + X_n$$

Entonces

$$M_W(s) = M_{X_1}(s) \dots M_{X_n}(s). \quad (1.21)$$

1.9. Esperanza y varianza condicional

En esta sección se definirá la esperanza y varianza condicional para obtener un par de resultados importantes que se aplicarán en el capítulo.

Sean X y Y variables aleatorias discretas definidas en los espacios de probabilidad $(\Omega_X, \mathfrak{F}_X, P_X)$ y $(\Omega_Y, \mathfrak{F}_Y, P_Y)$ respectivamente, vale mencionar la siguiente definición.

Definición 1.13. Sean X y Y variables aleatorias discretas. La esperanza condicional de X dado que $Y = y \in \Omega$, donde $f_Y(y) > 0$, se define por

$$E[X|Y = y] = \sum_x \frac{x f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad (1.22)$$

siempre y cuando la suma sea absolutamente convergente. Donde $f_{X,Y}$ es la función de densidad conjunta de X y Y .

Note que, conforme y varía (sobre todos los posibles valores de Y) en la ecuación (1.22), se obtiene una función de Y , la cual se denotará por $E(X|Y)$. Entonces, $E(X|Y)$ es una variable aleatoria tal que

$$E(X|Y)(\omega) = E[X|Y = Y], \quad \text{si } Y(\omega) = Y, \quad (1.23)$$

donde y_1, y_2, \dots son los posibles valores de Y . Por ello, a la variable aleatoria $E(X|Y)$ le llamaremos esperanza condicional de X dado Y .

Teorema 1.1. Sea X una variable aleatoria discreta con esperanza finita y Y cualquier variable aleatoria discreta. Entonces,

$$E[E[X|Y]] = E[X], \quad (1.24)$$

siempre que ambos lados existan. A este resultado también se le conoce como esperanzas iteradas.

Demostración. Asuma $\Omega_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ y $\Omega_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ ambas de naturaleza discreta, además, suponga $Y = y \in \Omega_Y$. Siempre que las sumatorias sean absolutamente convergentes se tiene que,

$$\begin{aligned} E[E[X|Y]] &= \sum_y E[X|Y = y] f_Y(y) \\ &= \sum_y \left(\sum_x \frac{x f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \right) f_Y(y) \\ &= \sum_x x f_X(x) \\ &= E[X]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

□

Definición 1.14. Sean X y Y variables aleatorias discretas. Se define la varianza condicional de X dado $Y = y \in \Omega$, como,

$$\text{Var}(X|Y = y) = E[(X - E[X|Y = y])^2|Y = y] \quad (1.26)$$

Observe que la varianza condicional es una función de la variable aleatoria Y . Por lo tanto, es en sí misma una variable aleatoria que se denotará por $\text{Var}(X|Y)$.

Teorema 1.2. Sea X una variable aleatoria discreta con esperanza finita y Y cualquier variable aleatoria discreta. Tal que la varianza condicional de X dado Y , existe. Entonces,

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}(E[X|Y]) \quad (1.27)$$

Demostración. Es evidente que,

$$X - E[X] = (X - E[X|Y]) + (E[X|Y] - E[X]) \quad (1.28)$$

Luego, se eleva al cuadrado ambos lados y después se toman las esperanzas, así

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - E[X])^2] = E[((X - E[X|Y]) + (E[X|Y] - E[X]))^2] \\ &= E[(X - E[X|Y])^2] + E[(E[X|Y] - E[X])^2] \\ &\quad + 2E[(X - E[X|Y])(E[X|Y] - E[X])] \end{aligned} \quad (1.29)$$

Usando resultado del teorema anterior, se tiene que,

$$E[(X - E[X|Y])^2] = E[E[(X - E[X|Y])^2|Y]]$$

Sin embargo,

$$E[E[(X - E[X|Y])^2|Y]] = E[\text{Var}(X|Y)] \quad (1.30)$$

Por otro lado, el segundo término se puede expresar como,

$$E[(E[X|Y] - E[X])^2] = E[(E[X|Y] - E[E[X|Y]|Y])^2|Y] = \text{Var}(E[X|Y]), \quad (1.31)$$

de igual forma por teorema $E[E[X|Y]] = E[X]$.

Sea $\alpha(Y) = 2(E[X|Y] - E[X])$, finalmente el tercer término es,

$$\begin{aligned} E[(X - E[X|Y])\alpha(Y)] &= E[X\alpha(Y)] - E[E[X|Y]\alpha(Y)] \\ &= E[X\alpha(Y)] - E[E[X\alpha(Y)|Y]] \\ &= E[X\alpha(Y)] - E[X\alpha(Y)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Por tanto, de (1.30), (1.31) y (1.32) se obtiene que:

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}(E[X|Y])$$

□

1.10. Algunos Modelos de Distribuciones Discretas

A continuación algunas distribuciones discretas de probabilidad de variables aleatorias importantes.

- **DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA.** Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme discreta sobre el conjunto finito de números $\{x_1, \dots, x_n\}$ si la probabilidad de que X tome cualquiera de estos valores es la misma, es decir, $\frac{1}{n}$. Esta distribución surge en espacios de probabilidad equiprobables, esto es, en situaciones en donde tenemos n resultados diferentes y todos ellos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Los juegos de lotería son un ejemplo donde puede aplicarse esta distribución de probabilidad. Entonces, se escribe $X \sim \text{unif}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si la función de densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x = x_1, x_2, \dots, x_n. \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Donde, $E[X] = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$ y $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - E[X])^2}{n}$. Información más detallada consultar [Fel66].

- **DISTRIBUCIÓN BERNOULLI.** Un ensayo Bernoulli se define como aquel experimento aleatorio con únicamente dos posibles resultados, llamados genéricamente éxito y fracaso, con probabilidades respectivas p y $1 - p$. Si se define la variable aleatoria X como aquella función que lleva el resultado éxito al número 1 y el resultado fracaso al número 0, entonces se dice que X tiene una distribución Bernoulli con parámetro $p \in (0, 1)$, y se escribe como $X \sim \text{Ber}(p)$. La función de densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & \text{si } x = 0, 1. \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Así, $E[X] = p$ y $\text{Var}(X) = p(1-p)$. Información más detallada consultar [Fel73].

- **DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.** Suponga ahora que se tiene una serie de n ensayos independientes Bernoulli en donde la probabilidad de éxito en cualesquiera de estos ensayos es p . Si denotamos por E el resultado éxito y por F el resultado fracaso, entonces el espacio muestral consiste de todas las posibles sucesiones de longitud n de caracteres E y F . Usando el principio multiplicativo, es obvio ver que el conjunto Ω tiene 2^n elementos. Si ahora se define la variable aleatoria X como aquella que cuenta el número de éxitos en cada una de estas sucesiones, esto es, $X(EE\dots EE) = n$, $X(FE\dots EE) = n - 1$, ..., $X(FF\dots FF) = 0$, entonces tenemos que X puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots, n$ con las probabilidades que aparecen a continuación. Se dice entonces que X tiene una distribución binomial con parámetros n y p , y se escribe $X \sim \text{bin}(n, p)$, tal que la función de densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, n. \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Además, $E[X] = np$ y $\text{Var}(X) = np(1-p)$. Información más detallada consultar [Fel73].

- **DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA.** Suponga que se tiene ahora, una sucesión infinita de ensayos independientes Bernoulli, en cada uno de los cuales la probabilidad de éxito es p . Para cada una de estas sucesiones se define la variable aleatoria X como el número de fracasos antes de obtener el primer éxito. Por ejemplo, $X(FEFEFF\dots) = 1$, $X(EFFEEE\dots) = 0$, $X(FFFEFEE\dots) = 3$. Observe que X puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots$ y la probabilidad de que X tome el valor entero $x \geq 0$ es $p(1-p)^x$. Así, se dice que X tiene una distribución geométrica con parámetro p , el cual se escribe $X \sim \text{geo}(p)$, cuando la función de densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Donde, $E[X] = \frac{(1-p)}{p}$ y $Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$. El nombre de esta distribución proviene del hecho de que cuando se escribe la suma de todas las probabilidades, se obtiene una suma geométrica. Cabe mencionar que la inspección sucesiva de artículos hasta encontrar un defectuoso, en un proceso de control de calidad, puede modelarse usando una distribución geométrica. Información más detallada consultar [Fel73].

- **DISTRIBUCIÓN POISSON.** Suponga que se desea observar el número de ocurrencias de un cierto evento dentro de un intervalo de tiempo dado, por ejemplo, el número de clientes que llegan a un cajero automático durante la noche, o tal vez se desea registrar el número de accidentes que ocurren en cierta avenida durante todo un día. Para modelar este tipo de situaciones es posible definir la variable aleatoria X como el número de ocurrencias de este evento en el intervalo de tiempo dado. Es claro entonces que X puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots$, y en principio no se pone una cota superior para el número de observaciones del evento.

Adicionalmente suponga que se conoce la tasa media de ocurrencia del evento de interés, que se denota por la letra λ (lambda). El parámetro λ es positivo y se interpreta como el número promedio de ocurrencias del evento, por unidad de tiempo. Se dice que X tiene una distribución Poisson con parámetro $\lambda > 0$, y se escribe $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ si la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor entero $x \geq 0$ se define por

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Así, $E[X] = \lambda$ y $Var(X) = \lambda$. Además, cuando $X \sim \text{bin}(n, p)$ y n es grande, la distribución binomial puede ser aproximada mediante la distribución Poisson de parámetro $\lambda = np$.

Información más detallada sobre temas de probabilidad puede encontrarse en [Une10], [Fel73], [HPS71], [Kol50], [MGB83], [Bla79].

1.11. Función de Supervivencia

El área de análisis la función de supervivencia tiene aplicación en una diversidad de áreas del conocimiento tales como la fertilidad, mortalidad y migración, para mayor información consultar [Col94], [LW03]. La supervivencia en un estado S es la probabilidad de permanecer ahí por un cierto tiempo t , dado que al momento cero estaba en S .

Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ sobre el cual se define la variable aleatoria continua T , que representa el tiempo de espera (tiempo de supervivencia) hasta la ocurrencia de un evento con función de densidad $f(t)$ y función acumulada $F(t) = P[T < t]$, donde se obtiene la probabilidad de que el evento ha ocurrido durante el tiempo $t > 0$.

Así, la función de supervivencia viene dada por:

$$\Psi(t) = P[T \geq t] = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx. \quad (1.33)$$

Lo cual proporciona la probabilidad de que el suceso de interés no ha ocurrido durante el tiempo t , es decir, la función de supervivencia es el complemento de la f.d. $F(t)$.

En el caso que T sea una variable aleatoria discreta con función de densidad $p(t)$ y función acumulada $F(t) = P[T < t]$, la función de supervivencia está dada por:

$$\Psi(t) = P[T \geq t] = 1 - F(t) = \sum_{t=T}^{\infty} p(t). \quad (1.34)$$

1.12. Simulación Monte-Carlo

La simulación Monte Carlo es un método no determinista o estadístico numérico, el cual se usa para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. El método se llamó así en referencia al Casino de Montecarlo (Mónaco) por ser la capital del juego de azar, al ser la ruleta un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Montecarlo datan aproximadamente de 1944 y se mejoraron enormemente con el desarrollo de la computadora [PV13].

El uso de los métodos de Monte Carlo como herramienta de investigación, proviene del trabajo realizado en el desarrollo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial en el Laboratorio Nacional de Los Álamos en EE. UU [LDL96]. Dicho proyecto conllevó a la simulación de problemas probabilísticos de hidrodinámica relacionados a la difusión de neutrones en el material de fisión. Esta difusión posee un comportamiento extraordinariamente aleatorio. En la actualidad es parte fundamental de los algoritmos de trazado de rayos para la generación de imágenes 3D.

El método de Monte Carlo proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos dando así la posibilidad a la realización de experimentos con muestras de números pseudoaleatorios en una computadora [LK91]. El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinista. A diferencia de los métodos

numéricos que se basan en evaluaciones en N puntos en un espacio M -dimensional para producir una solución aproximada, el método de Monte Carlo tiene un error absoluto de la estimación que decrece como $\frac{1}{\sqrt{N}}$ en virtud del teorema del límite central [Chu68].

Además el método de Monte Carlo cuyo fundamento matemático es probabilístico, nos permite aproximar el valor de una integral [Dan01]. Puesto que se sabe por la Ley de los Grandes Números [New] que un buen estimador del valor esperado de una variable aleatoria continua X con distribución F es el valor promedio de una muestra finita de variables aleatorias, independientes con distribución F . Es decir

$$E(X) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \quad (1.35)$$

Luego, como la esperanza de una variable aleatoria continua es una integral, la media muestral se puede usar para estimar el valor de una integral. Esta es la idea que está detrás del método de Monte-Carlo. Este concepto se puede generalizar para estimar el valor esperado de una función G continua cuyo argumento es una variable aleatoria con distribución F . Si se tiene una muestra de variables aleatorias, independientes, idénticamente distribuidas con distribución G , entonces

$$E(G(x)) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G(X_i) \quad (1.36)$$

La simulación Monte-Carlo es de gran utilidad para aproximar la solución a diversos fenómenos de naturaleza Markoviana ([Raf10], [IM16], [Ros99]). La idea principal de la simulación es generar un gran número de veces el sistema analizado y obtener los estadísticos principales que convergen al valor real del parámetro a estimar [Bil68] - [Une10].

Capítulo 2

Cadena de Markov

En esta sección se introduce a la noción de cadena de Markov, iniciando por el concepto de proceso estocástico, posteriormente definiciones y resultados que servirán para los siguientes capítulos.

2.1. Procesos Estocásticos

Definición 2.1. *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $(X_t)_{t \in T}$, definidas todas sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y con valores en un espacio de estados, denotado por I , sus elementos se llaman estados.*

Si $\omega \in \Omega$ es fijo, se obtiene una función $X_t(\omega) : T \rightarrow I$ que se conoce como una *trayectoria* del proceso.

El parámetro t se interpreta como el tiempo, a partir del cual se puede considerar dos casos más comunes de procesos:

- Procesos a tiempo discreto, cuando T es un conjunto discreto: $T = \mathbb{N}$.
- Procesos a tiempo continuo, cuando T es un conjunto continuo: por ejemplo, $T = [0, 1]$, $T = [0, \infty)$, $T = \mathbb{R}$.

Respecto al espacio de estados I , también se consideran dos casos:

- Espacio de estado discreto, esto es, $I = \mathbb{N}$ o $I = \mathbb{Z}$.
- Espacio de estado continuo; por ejemplo, $I = [0, \infty)$, $I = \mathbb{R}$, etc.

2.2. Definición: Cadena de Markov

Definición 2.2. *Una Cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto, es decir es una sucesión de variables aleatorias X_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ que toman valores en un conjunto finito o numerable I , conocido como espacio de estados, y que satisface la siguiente propiedad:*

$$P[X_{t+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i_t] = P[X_{t+1} = j | X_t = i_t], \quad (2.1)$$

para todo $t \geq 0$ y cualesquiera estados $i_0, i_1, \dots, i_t, j \in I$.

Note que, el evento $X_{t+1} = j$ sólo depende del estado inmediatamente anterior del sistema X_t , la ecuación (2.1), se conoce como la propiedad de Markov. Por otra parte, una cadena de Markov se denomina homogénea, si:

$$P[X_{t+s} = j | X_s = i] = P[X_t = j | X_0 = i], \forall t, s \in T. \quad (2.2)$$

Esto es, las probabilidades son las mismas en cada dos pasos consecutivos.

Para una cadena de Markov homogénea finita con n estados se introduce la notación

$$p_{ij} = P(X_t = j | X_{t-1} = i), \quad (2.3)$$

que indica la probabilidad de que X_t esté en el estado j dado que X_{t-1} está en el estado i , donde $i, j = 1, 2, \dots, n$. Si $p_{ij} > 0$ entonces se dice que el estado i puede comunicar con j . La comunicación puede ser mutua si también $p_{ji} > 0$. Para cada i fijo, la sucesión de valores $\{p_{ij}\}$ es una distribución de probabilidad, ya que en cualquier paso puede ocurrir alguno de los estados $1, 2, \dots, n$ y son mutuamente excluyentes. Los valores p_{ij} se denominan probabilidades de transición a un paso de i a j que satisfacen la condición

$$p_{ij} > 0, \quad \text{tal que} \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1,$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Todos los valores de $\{p_{ij}\}$ se representan en una matriz de transición A de tamaño $n \times n$, dada por

$$A = [p_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Que incluye todas las combinaciones posibles de transición de i a j en la unidad de tiempo.

2.3. Probabilidad de transición en m pasos $p_{ij}(m)$

Se define $p_{ij}(m)$ como la probabilidad de que la cadena X_t esté en el estado j después de m pasos (tiempos), dado que la cadena empezó en el estado i . Esto es,

$$p_{ij}(m) = P[X_m = j | X_0 = i], \quad (2.5)$$

por la propiedad de Markov se tiene que

$$p_{ij}(m) = \sum_{k=1}^n P[X_m = j, X_{m-1} = k | X_0 = i], \quad (2.6)$$

para $m \geq 2$, ya que la cadena debe haber pasado por uno de los n posibles estados en la etapa $m - 1$.

Note que, se tiene la siguiente igualdad, para tres posibles sucesos A, B y C ,

$$P[A \cap B|C] = P[A|B \cap C]P[B|C],$$

si se sustituye

$$\begin{aligned} A &\rightarrow (X_m = j) \\ B &\rightarrow (X_{m-1} = k) \\ C &\rightarrow (X_0 = i) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} p_{ij}(m) &= \sum_{k=1}^n P[X_m = j, X_{m-1} = k|X_0 = i] \\ &= \sum_{k=1}^n P[X_m = j|X_{m-1} = k, X_0 = i]P[X_{m-1} = k|X_0 = i] \\ &= \sum_{k=1}^n P[X_m = j|X_{m-1} = k]P[X_{m-1} = k|X_0 = i] \\ &= \sum_{k=1}^n p_{kj}(1)p_{ik}(m-1) = \sum_{k=1}^n p_{ik}(m-1)p_{kj}(1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Usando nuevamente la propiedad de Markov. La ecuación anterior se denomina de *Chapman-Kolmogorov*.

Haciendo m igual a 2, 3, ... se obtiene que las matrices con esos elementos son

$$[p_{ij}(2)] = [p_{ik}(1)p_{kj}(1)] = AA = A^2$$

$$[p_{ij}(3)] = [p_{ik}(2)p_{kj}(1)] = A^2A = A^3$$

puesto que, $p_{ik}(2)$ son los elementos de A^2 y así sucesivamente. Por tanto,

$$p_{ij}(m) = A^m \quad (2.8)$$

Definición 2.3. Una matriz A de Markov es regular si existe un entero positivo k , de modo que todos los elementos de la matriz A^k son estrictamente positivos.

2.4. Vector de Probabilidades Iniciales

Considere una cadena de Markov X_t con n posibles estados en los que la cadena puede estar en el tiempo de observación inicial $t = 1$. Sea $v = (v_1, \dots, v_n)$, el cual se llama vector de probabilidades si:

1. $v_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$.
2. $\sum_{i=1}^n v_i = 1$.

Donde, $v_i = P[X_0 = i]$, para $i = 1, \dots, n$. Así, el vector de probabilidades $v = (v_1, \dots, v_n)$ se llama vector de probabilidades iniciales de la cadena.

El vector de probabilidades iniciales y la matriz de transición determinan la probabilidad para el estado de la cadena en el segundo instante de tiempo, dicha probabilidad viene dada por el vector vA . Además, si las probabilidades de los diversos estados en el instante m se especifican por el vector de probabilidades w , entonces las probabilidades en el instante $m + 1$ se especifican por el vector de probabilidades wA .

2.5. Clasificación de estados de una cadena de Markov

Definición 2.4. Se dice que un estado i es absorbente si se satisfacen las condiciones:

1. $p_{ij}(m) = 0, \quad \forall j \neq i, m \in T.$
2. $p_{ii}(m) = 1, \quad \forall m \in T.$

Si esto ocurre, se dice que una vez que el sistema entra al estado i no se puede salir del mismo. Una cadena de Markov se denomina absorbente si tiene al menos un estado absorbente y el sistema puede migrar desde cualquier estado no absorbente a un estado absorbente. Como se observa en el siguiente ejemplo de 3 estados, donde se considera al estado 3 como absorbente:

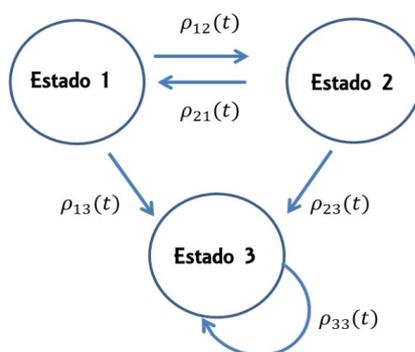


Figura 2.1: Cadena de Markov absorbente

Cuando se tiene una cadena con al menos un estado absorbente j , la información más importante que se puede obtener es:

1. El tiempo esperado antes de que el proceso llegue al estado absorbente j .
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$, para todo $i, j \in I$.

Por ello, es importante definir una submatriz B de A que contenga las probabilidades de transición entre estados no absorbentes en un solo paso. De igual forma, B^2 contiene la probabilidad de transición entre estados no absorbentes en dos pasos, y así sucesivamente

B^n proporciona la misma probabilidad en n pasos. Por lo tanto, el tiempo esperado antes de ser absorbido se puede obtener de la siguiente manera:

$$I + B + B^2 + B^3 + \dots = (I - B)^{-1} = C \quad (2.9)$$

donde C representa el tiempo esperado en que el sistema estará en cada estado no absorbente antes de ser absorbido, y la suma de cada fila de C es el tiempo promedio transcurrido antes de pasar a un estado absorbente. De esta manera, podemos definir una submatriz D de A desde estados no absorbentes hasta estados absorbentes. Así, D representa la probabilidad de transición desde un estado no absorbente a los absorbentes en un paso, y AD es la probabilidad de saltar de un estado no absorbente a un absorbente en un paso, y así sucesivamente. Por lo tanto, $A^n D$ corresponde a la probabilidad de saltar de un estado no absorbente a un estado absorbente en n pasos. Así

$$D + AD + A^2 D + \dots = (I + A + A^2 + A^3 + \dots)D = (I - A)^{-1}D = CD \quad (2.10)$$

Proporciona la probabilidad de transición esperada de pasar de un estado no absorbente a un estado absorbente a largo plazo.

Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión no negativa, independiente e idénticamente distribuida de variables aleatorias definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Definición 2.5. *La sucesión de aleatoria $(T_n, n \geq 0)$, donde:*

$$T_0 = 0, \quad (2.11)$$

$$T_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1, \quad (2.12)$$

se llama sucesión de renovación o proceso de renovación. Las variables aleatoria $T_n, n \geq 0$ se denominan tiempos de renovación y las variables aleatorias $X_n, n \geq 1$ se llaman tiempos de llegada (arribo).

Definición 2.6. *Un proceso de renovación $(T_n, n \geq l)$ es recurrente si $X_n < \infty$ para todo n ; de lo contrario se llama transitorio.*

Definición 2.7. *Se dice que un estado i es recurrente si el proceso de renovación asociado con sus sucesivos tiempos de retorno a i es recurrente. Es decir, con seguridad el sistema regresa al estado i en algún momento.*

Definición 2.8. *Se dice que un estado j es transitorio si el proceso de renovación asociado con sus sucesivos tiempos de retorno a j es transitorio. Esto es, hay una probabilidad positiva de que si la cadena inicia en j , nunca regrese a dicho estado.*

Proposición 2.1. 1. *Un estado i es transitorio si y sólo si*

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{ii}(m) < \infty. \quad (2.13)$$

2. *Un estado i es recurrente si y sólo si*

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{ii}(m) = \infty. \quad (2.14)$$

2.5.1. Periodos

Sea $i \in I$, y sea $d(i)$ el divisor común más grande del conjunto de enteros n , tal que $p_{ii}(n) > 0$.

Definición 2.9. Si $d(i) > 1$, se dice que el estado i es periódico con el período $d(i)$. Si $d(i) = 1$, entonces el estado i es aperiódico.

Claramente, si $p_{ii} > 0$, entonces i es aperiódico. Sin embargo, lo contrario no es necesariamente cierto. Además, note que si A es regular, entonces todos los estados son aperiódicos.

Definición 2.10. Una cadena de Markov, cuyos estados son todos aperiódicos se llama una cadena aperiódica de Markov.

2.6. Descomposición del espacio de estados

Definición 2.11. Un estado i conduce al estado j (escrito $i \triangleright j$) si existe un entero positivo m tal que

$$p_{ij}(m) > 0 \quad (2.15)$$

Definición 2.12. Los estados i y j se comunican si $i \triangleright j$ y $j \triangleright i$, o si $j = i$. Se escribe como $i \triangleleft \triangleright j$.

Definición 2.13. Un estado i es esencial si se comunica con cada estado al que conduce; de lo contrario, se llama inessential.

Teorema 2.1. (a) Si $i \triangleright j$ pero j no conduce al estado i entonces i es transitorio.
(b) Si i es recurrente e $i \triangleright j$ entonces j es recurrente.

La relación $\triangleleft \triangleright$ define una relación de equivalencia sobre el espacio de estado I , lo que resulta en una partición de I . La clase de equivalencia que contiene al estado i está representada por $C(i)$.

Definición 2.14. Una cadena de Markov es irreducible si todos los estados se comunican entre sí. Es decir que se puede llegar a cualquier estado j desde otro estado i , esto es $p_{ij}(m) > 0$, para algún número $m \in \mathbb{N}$.

Claramente, si la matriz de transición A es regular, la cadena de Markov es tanto irreducible como aperiódica. Tal cadena de Markov se dice que es ergódica.

Definición 2.15. Se dice que un subconjunto D del espacio de estados I es cerrado si $\sum_{j \in D} p_{ij} = 1, \forall i \in D$, es decir, desde ningún estado de D se tiene acceso a ningún estado fuera de D .

Equivalentemente, D es cerrado sí y sólo sí

$$p_{ij}(m) = 0 \quad i \in D, j \notin D \text{ y } m \geq 1$$

Si D es cerrado y la cadena comienza en D entonces, con probabilidad 1 se queda en D todo el tiempo. Si a es un estado absorbente entonces $\{a\}$ es cerrado. Para mayor información, consultar [Cin69], [Cin75].

2.7. Tiempos de ocupación

Para cualquier estado j , y para $m \in \mathbb{N}$, se define la v.a. $N_j(m)$ como el número de veces que el estado j está ocupado en las primeras m transiciones:

$$N_j(m) = \text{número}\{k \in \{1, \dots, m\} : X_k = j\}. \quad (2.16)$$

Por definición, la v.a. $N_j(m)$ se denomina tiempo de ocupación del estado j en las primeras m transiciones. La v.a.

$$N_j(\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} N_j(m)$$

Es llamada el tiempo total de ocupación del estado j . Para cualquier estado j y $m \in \mathbb{N}$ se define:

$$Z_j(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } X_m = j, \\ 0, & \text{si } X_m \neq j. \end{cases}$$

Es posible escribir:

$$N_j(m) = \sum_{v=1}^m Z_j(v). \quad (2.17)$$

Sea $f_{ij}(m)$ la probabilidad de arribar al estado j exactamente al momento m , dado que al momento cero se encuentra en el estado i , notar que:

$$P(N_j(\infty) \geq 0 | X_0 = i) = f_{ij}. \quad (2.18)$$

Luego, sea g_{ij} la probabilidad condicional de un número infinito de visitas al estado j , iniciando con $X_0 = i$, es decir:

$$g_{ij} = P(N_j(\infty) = \infty | X_0 = i). \quad (2.19)$$

Se puede demostrar que:

$$g_{ii} = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{ii}(m), \quad (2.20)$$

consultar dicha demostración en [IM76]

$$g_{ij} = f_{ij} \cdot g_{jj}, \quad (2.21)$$

Así,

$$g_{ii} = 1 \iff f_{ii} = 1 \iff i \text{ es recurrente}, \quad (2.22)$$

$$g_{ii} = 0 \iff f_{ii} < 1 \iff i \text{ es transitorio}, \quad (2.23)$$

Estos resultados se pueden interpretar como que el sistema visitará un estado recurrente un número infinito de veces y que visitará un estado transitorio un número finito de veces.

2.8. Cálculo de Probabilidades de Absorción

Proposición 2.2. (i) Si i es recurrente y $j \in C(i)$, entonces $f_{ij} = 1$.

(ii) Si i es recurrente y $j \notin C(i)$, entonces $f_{ij} = 0$.

Demostración. (i) De la definición de las probabilidades g_{ij} , se tiene que, para todo entero positivo m :

$$g_{ij} = \sum_{k \in I} p_{ik}(m)g_{kj}, \quad (2.24)$$

o

$$1 - g_{ij} = \sum_{k \in I} p_{ik}(m)(1 - g_{kj}). \quad (2.25)$$

Como i está comunicado con j y por hipótesis el estado i es recurrente, por teorema 2.1. se sabe que el estado j es también recurrente. Así, por (2.22) $g_{jj} = 1$. De (2.25), se tiene que para todo $m \geq 0$:

$$p_{jk}(m)(1 - g_{kj}) = 0. \quad (2.26)$$

Además el estado j conduce al estado i , es decir, existe un entero positivo N , tal que:

$$p_{ij}(N) \geq 0.$$

Usando (2.26) para $k = i$, se obtiene:

$$g_{ij} = 1.$$

Por lo tanto, usando (2.21), se tiene que:

$$f_{ij} = 1.$$

(i) Como $C(i)$ es una clase recurrente, está cerrada. Por lo tanto, si $j \notin C(i)$, entonces i no conduce a j , así:

$$f_{ij} = 0.$$

□

Proposición 2.3. Sea E el conjunto de todos los estados transitorios de I , y sea C una clase recurrente. Para todo $j, k \in C$,

$$f_{ij} = f_{ik}. \quad (2.27)$$

Etiquetando este valor común como f_{iC} , las probabilidades $(f_{iC}, i \in E)$ satisfacen el sistema lineal:

$$f_{iC} = \sum_{k \in E} p_{ik}f_{kC} + \sum_{k \in C} p_{ik}, \quad i \in E. \quad (2.28)$$

Demostración. De (2.18), se obtiene

$$f_{ij} = \sum_{k \in I} p_{ik} P(N_k(\infty) > 0 | J_1 = k), \quad (2.29)$$

o

$$f_{ij} = \sum_{k \in I} p_{ik} f_{kj}. \quad (2.30)$$

Usando la proposición anterior, se obtiene que:

$$f_{iC} = \sum_{k \in E} p_{ik} f_{kC} + \sum_{k \in C} p_{ik}, \quad i \in E. \quad (2.31)$$

□

Definición 2.16. La probabilidad f_{iC} introducida en la Proposición 2.3 se le denomina probabilidad de absorción en la clase C , a partir del estado i .

Si la clase C es recurrente:

$$f_{iC} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in C, \\ 0, & \text{si } i \text{ es recurrente, } i \notin C. \end{cases}$$

2.9. Comportamiento asintótico

Considere una cadena de Markov aperiódica irreductible que es positiva recurrente. Supongamos que existe el siguiente límite:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_j(m) = \Pi_j, j \in I. \quad (2.32)$$

Iniciamos con $Z(0) = i$. La siguiente relación se obtiene de resultado anterior

$$p_j(m+1) = \sum_{k \in I} p_k(m) p_{kj} \quad (2.33)$$

se convierte en:

$$p_{ij}(m+1) = \sum_{k \in I} p_{ik}(m) p_{kj}, \quad (2.34)$$

porque

$$p_j(m) = p_{ij}(m) \quad (2.35)$$

Como el espacio de estados I es finito, de (2.32) y (2.34) se obtiene:

$$\Pi_j = \sum_{k \in I} \Pi_k \rho_{kj} \quad (2.36)$$

y de (2.35) se llega a

$$\sum_{i \in I} \Pi_i = 1 \quad (2.37)$$

Donde,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{ij}(m) = \Pi_j, \quad i, j \in I, \quad (2.38)$$

se llama resultado ergódico, ya que el valor del límite en la ecuación anterior es independiente del estado inicial i . Se sabe que

$$p_i(m) = \sum_j p_j p_{ji}(m), \quad i, \in I. \quad (2.39)$$

y por resultado de (2.38), notar que para cualquier distribución inicial p :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_i(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_j p_j p_{ji}(m) = \sum_j p_j \Pi_i = \Pi_i \quad (2.40)$$

Por tanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_i(m) = \Pi_i. \quad (2.41)$$

Esto muestra que el comportamiento asintótico de una cadena de Markov está dado por la existencia (o inexistencia) del límite de la matriz de transición A . En la siguiente proposición se da un resultado importante correspondiente al comportamiento asintótico de A . La prueba se puede encontrar en Chung (1960), Parzen (1962) o Feller (1957).

Proposición 2.4. *Para cualquier cadena de Markov aperiódica con matriz de transición A y que tenga un número finito de estados, se tiene:*

a) *Si el estado j es recurrente (necesariamente positivo), entonces*

$$1. \quad i \in C(j) \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} p_{ij}(m) = \frac{1}{m_{jj}},$$

$$2. \quad i \text{ recurrente y no esta en } C(j) \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} p_{ij}(m) = 0,$$

b) *Si j es transitorio, entonces para todo $i \in I$:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{ij}(m) = 0 \quad (2.42)$$

2.10. Tiempos de arribo y recurrencia

Dada la variable aleatoria $T \in \mathbb{N}$ se introduce el primer tiempo de arribo T_1 al estado j dado que al momento cero se encuentra en el estado i , es decir,

$$T_1 = \min\{t \in T : X_0 = i, X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{t-1} \neq j, X_t = j\}.$$

Sea $f_{ij}(t)$ la probabilidad de primer arribo a j exactamente en el tiempo t . Notar que $f_{ij}(t)$ es diferente a $p_{ij}(t)$, dado que la probabilidad de transición de i a j en t tiempos incluye el primer arribo en t , así como cualquier otra trayectoria que incluya un arribo previo a t , por tanto

$$f_{ij}(t) \leq p_{ij}(t), \quad (2.43)$$

En el caso de ser iguales, se interpreta como que la única forma posible de transitar de i a j en un tiempo t es que se arribe a j exactamente al momento t . Tal es el caso de arribar a j en $t = 1$, claramente

$$p_{ij}(1) = f_{ij}(1). \quad (2.44)$$

Si $t = 2$, equivale a que al momento 1 el sistema arriba a cualquier estado k diferente de j y al instante 2 transitar de k a j , esto es,

$$f_{ij}(2) = \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq j}} p_{ik} p_{kj} = \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq j}} p_{ik} f_{kj}(1). \quad (2.45)$$

Siguiendo la misma lógica, para $t = 3$, implica que por cualquier trayectoria posible el sistema transita de i a k en un paso, con $k \neq j$, para después arribar al estado j por primera vez en dos pasos, es decir,

$$f_{ij}(3) = \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq j}} p_{ik} f_{kj}(2). \quad (2.46)$$

Generalizando,

$$f_{ij}(m) = \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq j}} p_{ik} f_{kj}(m-1). \quad (2.47)$$

Esto es, el calculo de las probabilidades de primer arribo se reduce a un caso recursivo.

2.10.1. Tiempo de recurrencia

Se introduce ahora, el concepto de tiempo de recurrencia. Se asume un sistema que sigue una cadena de Markov con espacio de estados I , sea $j \in I$. Se define el tiempo de recurrencia T_2 de j , como el momento en el cual el sistema vuelve a estar en j , es decir,

$$T_2 = \min\{t \in T : X_0 = j, X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{t-1} \neq j, X_t = j\}.$$

Ahora, se define la función $f_j(t)$ como la probabilidad de recurrencia a j en un tiempo dado t .

Al igual que en el caso del primer arribo, notar que $f_j(t)$ y $p_{jj}(t)$ son probabilidades diferentes, dado que $p_{jj}(t)$ incluye a $f_j(t)$ y cualquier trayectoria posible, así,

$$f_j(t) \leq p_{jj}(t), \quad (2.48)$$

En el caso de $t = 1$, claramente $f_j(1) = p_{jj}(1)$. Similar, al caso de primer arribo, para $t = 2$, se tiene que,

$$f_j(2) = \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq j}} p_{jk} f_{kj}(1). \quad (2.49)$$

De igual forma, generalizando

$$f_j(m) = \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq j}} p_{jk} f_{kj}(m-1). \quad (2.50)$$

2.10.2. Tiempo de segundo arribo

Suponga una cadena de Markov tal que al momento cero se encuentra en un estado i y al instante m arriba a j por primera vez, posteriormente permanece un tiempo h' en j para al siguiente instante h arribar a un estado $k \neq j$, finalmente en un tiempo $t - h - h' - 1$ arriba nuevamente a j dado el momento $h + h'$.

Así, t es denotado como el tiempo de segundo arribo a j , con probabilidad de ocurrencia $f_{ij}^2(t)$. Similarmente, el proceso puede extenderse hasta el tiempo exacto del n -ésimo arribo con probabilidad de ocurrencia $f_{ij}^n(t)$.

La solución numérica de las funciones de arribo resulta muy compleja, [WSD95], [CE12], [BMB04], [MA96] presentan solución a diversos problemas de cadenas de Markov a través del método Monte-Carlo. En el siguiente capítulo se presenta una aplicación de estos conceptos para métodos de conteo y una aplicación para la función de pérdida de activos.

Capítulo 3

Proceso de Conteo y función de pérdida asociada

Los procesos de conteo ([Odd12], [PONEJO85]) representan uno de los principales desafíos en las matemáticas aplicadas y se reduce a una variable aleatoria $N(t)$ misma que indica el número de eventos ocurridos, asociada a una variable aleatoria dada de tiempo de vida. En su caso más general dicho tiempo de vida se asocia a una distribución exponencial de la cual es posible definir un proceso de conteo asociado al reemplazo instantáneo del elemento al ocurrir su mortalidad, dicha variable es de distribución Poisson. Tal [DJ10] y tal [Lui11] libro desarrollan teoría detallada sobre los procesos de Poisson y sus características. Por consiguiente, es importante mencionar que los procesos de renovación (teoría más detallada ver [JR06], [Alv16]) son una generalización del proceso de Poisson dado que relaja el supuesto de que la variable aleatoria tiempo de vida es de distribución exponencial. Este tipo de procesos han sido ampliamente utilizados en diversas áreas del conocimiento. No obstante dicho tipo de proceso presenta la limitante de asumir la renovación instantánea una vez que ocurre la mortalidad. De igual manera se limita a un proceso de vida y muerte.

En este capítulo se introduce procesos de conteo en sistemas de multiestados (el espacio de estados tiene más de un elemento) en el cual el proceso de renovación no es instantánea, sino que representa en sí una variable aleatoria bajo el supuesto que cada estado asociado al sistema tiene una función de sobrevivencia, ajustada a la distribución geométrica; resultado que representa la aportación de este trabajo.

3.1. Definición de proceso de conteo

Se asume un sistema, el cual se desarrolla en una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ homogénea finita con espacio de multiestados $I = \{1, \dots, n\}$ en el tiempo $t \in T = \mathbb{N}$. Sea A la matriz de transición asociada a la cadena de Markov X_t , dada por:

$$A_{n \times n} = [p_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Tal que, $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$ y $p_{ij} = P[X_1 = j | X_0 = i]$, esto es, la probabilidad de estar en el estado j en el tiempo $t = 1$ dado que anteriormente el sistema estaba en i en el tiempo $t = 0$.

Se desea conocer cuántas veces el sistema ingresará al estado $j = n$ en un tiempo t fijo; es conveniente considerar una partición de I dado por $S = \{S_1, S_2\}$ donde $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $S_1 \cup S_2 = S = I$. De esta forma, S_1 esta formado por los primeros $n - 1$ estados de I , $S_1 = \{1, 2, \dots, n - 1\}$ y $S_2 = \{n\}$, donde existe al menos una ruta de ir de S_1 a S_2 . Además, por simplicidad se supone que S_1 es irreductible, S_1 y S_2 están comunicados.

Definición 3.1. *Sea un sistema en una cadena de Markov con espacio de estados I . Se define la variable aleatoria $N(t)$ la cual se denomina proceso de conteo, que representa el número de veces que el sistema ingresa (pasa) a un estado $j \in I$ en un tiempo $t \in T$, dado que al momento cero el sistema se encuentra en un estado $i \neq j$, $i \in I$.*

Teorema 3.1. *Sea $N(t)$ un proceso de conteo asociado al estado i perteneciente al espacio de estados I que representa un proceso de Markov a tiempo discreto. Se asume $t \in T$ tal que $t < \infty$, entonces:*

- Si t es par,

$$N(t) = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{t}{2} \right\} \quad (3.1)$$

- Si t es impar,

$$N(t) = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{t+1}{2} \right\} \quad (3.2)$$

Demostración. Para cada caso por inducción.

Sea $t \in T$, si $t = 2$ y $X_0 \in S_1$. Entonces, $X_1 \in S_1$ ó $X_1 = n$, con probabilidad 1.

Si $X_1 \in S_1 \Rightarrow X(2) \in S_1$ ó $X(2) = n$, con probabilidad 1. Es decir, $N(2) = 1$ ó $N(2) = 0$.

Si $X_1 = n \Rightarrow X(2) = n$ ó $X(2) \in S_1$, con probabilidad 1. Esto es, $N(2) = 1$ ó $N(2) = 0$, con probabilidad 1.

Así

$$N(t) = \{0, 1\} = \left\{ 0, \frac{2}{2} \right\}$$

Sea $t \in T$, t par y $X_0 \in S_1$. Entonces, suponemos

$$N(t) = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{t}{2} \right\}$$

Sea $t + 2 \in \Omega$, por la hipótesis, sabemos que a lo más $N(t) = \frac{t}{2}$, es decir, $X(t) = n \Rightarrow X(t + 1) = n$ ó $X(t + 1) \in S_1$, con probabilidad 1.

Si $X(t+1) = n \Rightarrow X(t+2) = n$ ó $X(t+2) \in S_1$, con probabilidad 1, es decir, $N(t+2) = \frac{t}{2} + 1 = \frac{t+2}{2}$ ó $N(t+2) = \frac{t}{2}$.

Si $X(t+1) \in S_1 \Rightarrow X(t+2) \in S_1$ ó $X(t+2) = n$, con probabilidad 1, es decir, $N(t+2) = \frac{t+2}{2}$ ó $N(t+2) = \frac{t}{2}$.

Por tanto,

$$N(t) = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{t+2}{2} \right\} \quad (3.3)$$

Si t es par. □

De igual forma, para t impar se demuestra que $N(t) = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{t+1}{2} \right\}$.

3.2. Función de densidad del proceso de conteo

Se considera la cadena de Markov $\{X_t\}$ como se describió anteriormente, con espacio de estados I tal que al momento $t = 0$ se encuentra en un estado $i \neq j$, $i, j \in I$. Se introduce ahora, la función de densidad asociada a la variable aleatoria $N(t)$ denotada por $h[N(t)]$. Se desea conocer el número de veces que el sistema ingresará (arribará) por el estado $j = n$.

Por comodidad de notación se define la variable aleatoria $Y^{(r)}(t)$, dada por:

$$Y^{(r)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si el sistema arriba a } n \text{ exactamente al momento } t \text{ por } r\text{-ésima vez.} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Para $t \in T$ fijo, donde $Y^{(r)}(t) \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Así, la probabilidad de pasar (arribar) una vez por el estado n , será:

$$\begin{aligned} h(1) = P[N(t) = 1] &= \sum_{t'=1}^t P[Y(t') = 1 | X_0 \in S_1] [P[X_{t-t'} = n] \\ &+ \sum_{t''=t'+1}^T P[X_{t''} \in S_1 | X_{t'} = n] P[X_{t-t''} \in S | X_{t''} \in S] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Note que,

$$h(1) = P[N(t) = 1] = \sum_{h=1}^t P[Y(h) = 1 | X_0 \in S_1] \Psi_{S_1}(t-h) \quad (3.5)$$

Donde, $\Psi_{S_1}(t-h)$ es la función de sobrevivencia sobre S_1 en el tiempo $t-h$.

Luego, para obtener la probabilidad de arribar por segunda vez al estado n , es:

$$h(2) = P[N(t) = 2] = \sum_{h=1}^t P[Y^{(2)}(h) = 1 | X_0 \in S_1] \Psi_{S_1}(t-h) \quad (3.6)$$

En general, tocar por r -ésima vez el estado n en el tiempo t , esta dado por:

$$h(r) = P[N(t) = r] = \sum_{h=1}^t P[Y^{(r)}(h) = 1 | X_0 \in S_1] \Psi_{S_1}(t - h) \quad (3.7)$$

Equivale a que en un tiempo anterior o igual a t ocurrió un r -ésimo arribo y posteriormente a ese tiempo ya no ocurrió ninguno. Notar que el cálculo numérico de la función de densidad h resulta muy compleja, dado que representa la suma de las probabilidades de todas las posibles trayectorias, por ello, la solución se plantea a través de simulación Monte-Carlo.

3.3. Valor Esperado y Varianza del proceso de conteo

Esperanza y varianza para t impar.

$$E[N(t)] = \sum_{r=0}^{\frac{t+1}{2}} rh(r) \quad (3.8)$$

$$Var[N(t)] = \sum_{r=0}^{\frac{t+1}{2}} r^2 h(r) - (E[N(t)])^2 \quad (3.9)$$

Esperanza y varianza para t par.

$$E[N(t)] = \sum_{r=0}^{\frac{t}{2}} rh(r) \quad (3.10)$$

$$Var[N(t)] = \sum_{r=0}^{\frac{t}{2}} r^2 h(r) - (E[N(t)])^2 \quad (3.11)$$

3.4. Función de pérdida

En esta sección nos centraremos a la función de pérdida asociada dada la ocurrencia de un evento, asumiendo multiples elementos inmersos en nuestro sistema que se desarrolla en una cadena de Markov, exponiéndose cada uno de ellos a arribar cierto número de veces al estado n , con un costo (pérdida) asociado fijo c por cada arribo y posteriormente con una variable aleatoria de costo asociado, lo que representa otro resultado de este trabajo.

3.4.1. Función de pérdida total con pérdida constante

Se asume que la pérdida asociada a cada arribo del sistema al estado n es una constante c y que existen β elementos al que les asociaremos el mismo sistema en dicha cadena de Markov antes mencionado, así, la pérdida asociada a cada arribo de cada uno de los elementos al estado n en un tiempo dado $t \in \Omega$ será;

$$P(t) = cN(t) \quad (3.12)$$

Donde, $N(t)$ es el número de arribos al estado n .

Considere ahora, la variable aleatoria $P_T(t)$ asociada a la pérdida total por arribo de los β elementos al estado n , entonces:

$$P_T(t) = cN_1(t) + cN_2(t) + \dots + cN_\beta(t) \quad (3.13)$$

En el cual N_i indica el número de arribos al estado n del i -ésimo elemento para $i = 1, 2, \dots, \beta$.

Así, la función generadora de la variable aleatoria $P_T(t)$, viene dada por,

$$M_{P_T}(s) = E[e^{sc \sum_{i=1}^{\beta} N_i(t)}] = E \left[\prod_{i=1}^{\beta} e^{sc N_i(t)} \right] \quad (3.14)$$

Asumiendo independencia entre las variables aleatorias N_i , se tiene que:

$$M_{P_T}(s) = E \left[\prod_{i=1}^{\beta} e^{sc N_i(t)} \right] = \prod_{i=1}^{\beta} E[e^{sc N_i(t)}] = \prod_{i=1}^{\beta} M_{N_i(t)}(sc) \quad (3.15)$$

Dado N_i idénticamente distribuidos.

$$M_{P_T}(s) = [M_{N(t)}(sc)]^\beta \quad (3.16)$$

Por lo tanto, el valor esperado de la pérdida total por arribo al estado n de los β elementos, será,

$$\begin{aligned} E[P_T(t)] &= \left. \frac{d}{ds} M_{P_T}(s) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} [M_{N(t)}(sc)]^\beta \right|_{s=0} \\ &= \beta [M_{N(t)}(sc)]^{\beta-1} \left. \frac{d}{ds} M_{N(t)}(sc) \right|_{s=0} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Además, la varianza será:

$$\begin{aligned} Var(P_T(t)) &= \left. \frac{d^2}{ds^2} M_{P_T}(s) \right|_{s=0} - (E[P_T(t)])^2 \\ &= \left. \frac{d^2}{ds^2} M_{P_T}(s) \right|_{s=0} - \left[\beta [M_{N(t)}(sc)]^{\beta-1} \left. \frac{d}{ds} M_{N(t)}(sc) \right|_{s=0} \right]^2 \end{aligned}$$

3.4.2. Función de pérdida total con pérdidas aleatorias

Sea la variable aleatoria Λ asociada a la pérdida económica dado un arribo al estado de default (desastroso) n en un tiempo menor o igual a t , con función de densidad conocida $f_\Lambda(\lambda)$ y función acumulada $F_\Lambda(\lambda) = P[\Lambda < \lambda | T = t]$.

Así, la pérdida al tiempo t estará dada por:

$$P(t) = \Lambda(t)N(t). \quad (3.18)$$

Donde $N(t)$ representa el número de arribos al estado n en un tiempo dado $T = t$ y es de naturaleza aleatoria.

Se introduce ahora, un grupo de elementos independientes w , donde a cada uno se le asocia el sistema en cadena de Markov con espacio de estados I , definido en la sección anterior. De tal forma que la pérdida total al tiempo t , denotada por la variable aleatoria $P_T(t)$ será

$$P_T(t) = \sum_{i=1}^w \Lambda_i(t) N_i(t). \quad (3.19)$$

Donde Λ_i representa la pérdida asociada al elemento i . Suponga $\Lambda_1(t) = \lambda_1(t), \dots, \Lambda_w(t) = \lambda_w(t)$ y $N_i(t)$ independiente e idénticamente distribuida. Así,

$$\begin{aligned} E[P_T(t)|\Lambda_i(t) = \lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, w] &= E \left[\sum_{i=1}^w \lambda_i(t) N_i(t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^w \lambda_i(t) E[N_i(t)] = \sum_{i=1}^w \lambda_i \mu_{N(t)} \\ &= \mu_{N(t)} \sum_{i=1}^w \lambda_i(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Generalizando,

$$E[P_T(t)|\Lambda_i(t) = \lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, w] = \mu_{N(t)} \sum_{i=1}^w \Lambda_i(t) \quad (3.21)$$

Luego, por teorema 1.1 y (3.20) se tiene que,

$$\begin{aligned} E[P_T(t)] &= E[E[P_T(t)|\Lambda_i(t) = \lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, w]] \\ &= E \left[\mu_{N(t)} \sum_{i=1}^w \lambda_i(t) \right] = \mu_{N(t)} \sum_{i=1}^w E[\lambda_i(t)] \\ &= \mu_{N(t)} \sum_{i=1}^w E[\Lambda_i(t)] = I \mu_{N(t)} E[\Lambda(t)] \end{aligned} \quad (3.22)$$

De igual forma,

$$\begin{aligned} Var(P_T(t)|\Lambda_i(t) = \lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, w) &= Var \left(\sum_{i=1}^w \lambda_i(t) N_i(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^w \lambda_i^2(t) Var(N_i(t)) = \sum_{i=1}^w \lambda_i^2(t) \sigma_{N(t)}^2 \\ &= \sigma_{N(t)}^2 \sum_{i=1}^w \lambda_i^2(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Generalizando,

$$Var(P_T(t)|\Lambda_i(t) = \lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, w) = \sigma_{N(t)}^2 \sum_{i=1}^w \Lambda_i^2(t) \quad (3.24)$$

Por teorema 1.2, (3.21) y (3.24), se tiene,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(P_T) &= E[\text{Var}(P_T(t)|\Lambda_i(t) = \lambda_i(t), i = 1, \dots, w)] \\
 &+ \text{Var}(E[P_T(t)|\Lambda_i(t) = \lambda_i(t), i = 1, \dots, w]) \\
 &= E\left[\sigma_{N(t)}^2 \sum_{i=1}^w \Lambda_i^2(t)\right] + \text{Var}\left(\mu_{N(t)} \sum_{i=1}^w \Lambda_i(t)\right) \\
 &= \sigma_{N(t)}^2 \sum_{i=1}^w E[\Lambda_i^2(t)] + \mu_{N(t)}^2 \sum_{i=1}^w \text{Var}(\Lambda_i(t)) \\
 &= w\sigma_{N(t)}^2 E[\Lambda^2(t)] + w\mu_{N(t)}^2 \sigma_{\Lambda(t)}^2
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Introduzca ahora, la FGM de $P_T(t)$, dado $\Lambda_i = \lambda_i, \forall i = 1, \dots, w$. Así

$$\begin{aligned}
 M_{P_T(t)}[s|\Lambda_i = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, w] &= E[e^{sP_T(t)}|\Lambda_i = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, w] \\
 &= E\left[e^{s(\sum_{i=1}^w \lambda_i(t)N_i(t))}|\Lambda_i = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, w\right] \\
 &= E\left[e^{\sum_{i=1}^w s\lambda_i(t)N_i(t)}|\Lambda_i = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, w\right] \\
 &= \prod_{i=1}^w M_{N_i(t)}(s\lambda_i(t))
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Generalizando

$$E\left[e^{\sum_{i=1}^w s\Lambda_i(t)N_i(t)}|\Lambda_i, i = 1, 2, \dots, w\right] = \prod_{i=1}^w M_{N_i(t)}(s\Lambda_i(t)) \tag{3.27}$$

Se asume Λ_i con distribución continua con función de densidad $f_{\Lambda_i}(\lambda_i)$, donde $\Omega_{\Lambda} = (0, \infty), \forall i = 1, \dots, w$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 E[e^{sP_T(t)}] &= E[e^{sP_T(t)}|\Lambda_i, i = 1, 2, \dots, w] \\
 &= \prod_{i=1}^w \int_0^{\infty} M_{N_i(t)}(s\Lambda_i(t)) f_{\Lambda_i}(\lambda_i) d\lambda_i
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dado los λ_i 's independientes e idénticamente distribuidos, se tiene

$$E[e^{sP_T(t)}] = \left[\int_0^{\infty} M_{N(t)}(s\Lambda(t)) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \right]^w \tag{3.29}$$

Ahora, suponga que Λ_i es una variable aleatoria discreta con función de densidad conocida $f_{\Lambda_i}(\lambda_i)$, donde $\Omega_{\Lambda_i(t)} = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots\}$, de esta forma, puede demostrarse que:

$$M(e^{sP_T(t)}) = \sum_{\lambda_i \in \Omega} M_{N(t)}(s\lambda_i(t)) f_{\Lambda}(\lambda_i(t)) \tag{3.30}$$

3.5. Función de Pérdida por Activo

Suponga un sistema que se desarrolla en una cadena de Markov y un activo en un estado de riesgo dado, el cual se denota por i al momento $t = 0$, donde $i \in \{1, \dots, w\}$. Además, defina la variable aleatoria $N_i(t)$ como el número de arribos (eventos ocurridos) al estado de default entre cero y t , del activo i . Claramente, si t es impar, entonces

$$\Omega_{N_i(t)} = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{t+1}{2} \right\},$$

pero, si t es par,

$$\Omega_{N_i(t)} = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{t}{2} \right\},$$

donde, $t \in \Omega$, como se vió en teorema 3.1.

Así el monto total de la pérdida ocurrida por el activo i , será

$$P_{T_i}(t) = \sum_{k=1}^{N_i(t)} \Lambda_k(t), \quad (3.31)$$

donde, Λ_k es la pérdida asociada del k -ésimo arribo al estado de default.

3.5.1. Valor esperado, varianza y FGM de pérdida por activo

Sea $r \in \mathbb{N}$ un número fijo, dado que la variable $P_{T_i}(t)$ es independiente de $N_i(t)$, entonces $P_{T_i}(t)$ es independiente del evento $\{N_i(t) = r\}$, además las variables aleatorias $\Lambda_k(t)$ son independientes e idénticamente distribuidas. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E[P_{T_i}(t)|N_i(t) = r] &= E[\Lambda_1 + \dots + \Lambda_{N_i(t)}|N_i(t) = r] \\ &= E[\Lambda_1 + \dots + \Lambda_r|N_i(t) = r] \\ &= E[\Lambda_1 + \dots + \Lambda_r] \\ &= rE[\Lambda(t)] \end{aligned}$$

Esto es cierto para cada $n \in \mathbb{N}$, por tanto,

$$E[P_{T_i}(t)|N_i(t)] = N_i(t)E[\Lambda(t)]. \quad (3.32)$$

Donde, $E[\Lambda(t)]$ es un valor conocido.

Por resultado de teorema 1.1. (esperanzas iteradas), se obtiene

$$E[P_{T_i}(t)] = E[E[P_{T_i}(t)|N_i(t)]] = E[N_i(t)E[\Lambda(t)]] = E[\Lambda(t)]E[N_i(t)]. \quad (3.33)$$

De igual forma, se obtiene la varianza de $P_{T_i}(t)$,

$$\begin{aligned} Var(P_{T_i}(t)|N_i(t) = r) &= Var(\Lambda_1 + \dots + \Lambda_{N_i(t)}|N_i(t) = r) \\ &= Var(\Lambda_1 + \dots + \Lambda_r) \\ &= rVar(\Lambda(t)). \end{aligned}$$

Donde, $Var(\Lambda(t))$ es conocido. Como lo anterior es cierto para $r \in \mathbb{N}$, entonces,

$$Var(P_{T_i}(t)|N_i(t)) = N_i(t)Var(\Lambda(t)). \quad (3.34)$$

Usando teorema 1.2. de varianza condicional, se tiene,

$$\begin{aligned} Var(P_{T_i}(t)) &= E[Var(P_{T_i}(t)|N_i(t))] + Var(E[P_{T_i}(t)|N_i(t)]) \\ &= E[N_i(t)Var(\Lambda(t)) + Var(N_i(t)E[\Lambda(t)])] \\ &= E[N_i(t)Var(\Lambda(t)) + (E[\Lambda(t)])^2Var(N_i(t))]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

La función generadora de momentos sociada a $P_{T_i}(t)$ se obtiene de manera similar. Sea $r \in \mathbb{N}$ un valor fijo, tal que $N_i(t) = r$, la función generadora de momentos de $P_{T_i}(t)$ condicionado a $N_i(t) = r$ es $E[e^{sP_{T_i}(t)}|N_i(t) = r]$. Sin embargo dada la condición $N_i(t) = r$, $P_{T_i}(t)$ es la suma de las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\Lambda_1(t) + \dots + \Lambda_r(t)$, así

$$\begin{aligned} E[e^{sP_{T_i}(t)}|N_i(t) = r] &= E[e^{s\Lambda_1(t)} \dots e^{s\Lambda_{N_i(t)}(t)}|N_i(t) = r] = E[e^{s\Lambda_1(t)} \dots e^{s\Lambda_r(t)}] \\ &= E[e^{s\Lambda_1(t)}] \dots E[e^{s\Lambda_r(t)}] \\ &= [M_{\Lambda(t)}(s)]^r \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usando el resultado de esperanzas iteradas, la función generadora de momentos (incondicional) asociada a $P_{T_i}(t)$, será,

$$\begin{aligned} E[e^{sP_{T_i}(t)}] &= E[E[e^{sP_{T_i}(t)}|N_i(t)]] = E[[M_{\Lambda(t)}(s)]^{N_i(t)}] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} [M_{\Lambda(t)}(s)]^r h_{N_i(t)}(r). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Donde, $h_{N_i(t)}$ es la función de densidad asociada a la variable aleatoria $N_i(t)$, como se vió en la sección 4.1.

Este último resultado es similar a la función generadora de momentos $M_{N_i(t)}(s) = E[e^{sN_i(t)}]$ asociada con $N_i(t)$, excepto que e^s es reemplazada por $M_{\Lambda(t)}(s)$.

3.5.2. Función de Pérdida de Cartera

Se supone una cartera con r_j activos en cada estado (nivel) de riesgo, donde $j = 1, \dots, n$ representa todos los estados del sistema, tal que en cada activo se tiene un monto de inversión dado por I_{r_j} . Suponga que en cada estado el monto de inversión se repite equitativamente entre el número de activos que se tienen en dicho nivel de riesgo.

Se introduce ahora, la función de pérdida asociada al monto de inversión I_{r_j} de cada activo en un tiempo dado t , tal que para cada activo en un tiempo dado t se le asigna una función de densidad para la variable aleatoria y monto de la pérdida en caso de arribar al estado de default (es decir, el peor estado), denotado por $\Lambda(t)$.

Así, usando (3.31), la pérdida total asociada a la cartera en caso que ocurra al menos un arribo al estado de default estará dada, por:

$$\mathbb{P}_T(t) = \sum_{i=1}^{r_j} P_{T_i}(t), \quad (3.38)$$

que representa una variable aleatoria. En el cual, $P_{T_i}(t)$ es la pérdida asociada al i -ésimo activo, con $i = 1, \dots, r_j$ y $j = 1, \dots, n$ representa todos los estados del sistema, donde $P_{T_i}(t) = \sum_{k=1}^{N_i(t)} \Lambda_k(t)$, como se vió en la sección anterior, $\Lambda_k(t)$ es el monto de pérdida asociado del k -ésimo arribo al estado de default. y $N_i(t)$ representa la variable aleatoria asociada al número de arribos al estado de default en un tiempo t del i -ésimo activo .

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}_T(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{k=1}^{N_i(t)} \Lambda_{ik}(t), \quad (3.39)$$

es decir, la pérdida total de la cartera será una función de las variables aleatorias asociadas a la pérdida en el estado j y el número de veces que ocurrió el evento del activo i -ésimo del j -ésimo nivel de riesgo del espacio de estados. Entonces, el valor esperado de la pérdida total de la cartera, será

$$E[\mathbb{P}_T(t)] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{k=1}^{E[N_i(t)]} E[\Lambda_{ik}(t)]. \quad (3.40)$$

y su varianza

$$\begin{aligned} Var[\mathbb{P}_T(t)] &= E[(\mathbb{P}_T(t))^2] - (E[\mathbb{P}_T(t)])^2 \\ &= E \left[\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{k=1}^{N_i(t)} \Lambda_{ik}(t) \right)^2 \right] - \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{k=1}^{E[N_i(t)]} E[\Lambda_{ik}(t)] \right)^2 \end{aligned}$$

Capítulo 4

Análisis de Caso

En este capítulo se introduce un caso de aplicación de los resultados que se obtuvieron en los capítulos 2 y 3, a través de resolución via simulación Monte-Carlo en matlab® para tiempos de arribo de sistemas de multiestados, posteriormente resolución via Monte-Carlo de la función de pérdida de variables aleatorias y función de pérdida de cartera, debido a la complejidad de su solución, lo cual representa el último resultado de este trabajo.

4.1. Análisis de tiempos de arribo en riesgos crediticios

Suponga el sistema de riesgos crediticios de Standar & poor's [SPs11] para empresas multinacionales de Estados Unidos, que se clasifica en escala AAA , AA , A , BBB , BB , B , C y D donde el estado AAA representa la de menor riesgo, es decir, una firma en dicho estado tendrá la probabilidad más baja de ocurrir en default (es decir, un credito que no se paga) y así sucesivamente hasta la clase C , que representa la calificación de una firma con alta probabilidad de default. Finalmente la clase D representa la probabilidad que una firma ocurra en default.

Nos interesa conocer el tiempo de arribo a la clase (estado) D , puesto que dicho estado es de mayor riesgo en generar pérdidas para la empresa. Para ello, se propone la solución via simulación Monte-Carlo en matlab mediante el algoritmo especificado en nuestro programa (anexo A).

Asuma que dicho sistema se desarrolla en una Cadena de Markov con espacio de estados, denotado como $I = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, C, D\}$, el cual consta de 8 estados. Donde, su matriz de transición P viene dada por:

$$P = \begin{pmatrix} & AAA & AA & A & BBB & BB & B & C & D \\ AAA & 0,9933 & 0,0063 & 0 & 0,0002 & 0,0002 & 0 & 0 & 0 \\ AA & 0,0004 & 0,9894 & 0,0101 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0,0001 & 0,0018 & 0,9937 & 0,0043 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ BBB & 0 & 0,0003 & 0,003 & 0,9922 & 0,004 & 0,0003 & 0,0001 & 0,0001 \\ BB & 0,0002 & 0,0004 & 0,0004 & 0,0080 & 0,9778 & 0,0111 & 0,0017 & 0,0004 \\ B & 0 & 0,0001 & 0,0011 & 0,0005 & 0,0084 & 0,9736 & 0,0152 & 0,0011 \\ C & 0 & 0,0001 & 0,0008 & 0 & 0,0032 & 0,0129 & 0,9579 & 0,0251 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,005 & 0,015 & 0,98 \end{pmatrix}$$

4.1.1. Tiempo de primer Arribo al estado de default

Se asume el espacio de estados $I = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, C, D\}$ y se considera el estado 1 como la clase AAA, estado 2 como la clase AA, así, sucesivamente, estado 8 como la clase D. Así, se estima el tiempo de primer arribo a D con 100000 simulaciones vía Monte-Carlo, usando los datos de la matriz P a través del siguiente diagrama de flujo, donde se incluye la estimación de la función de densidad y función acumulada del tiempo de primer arribo a D.

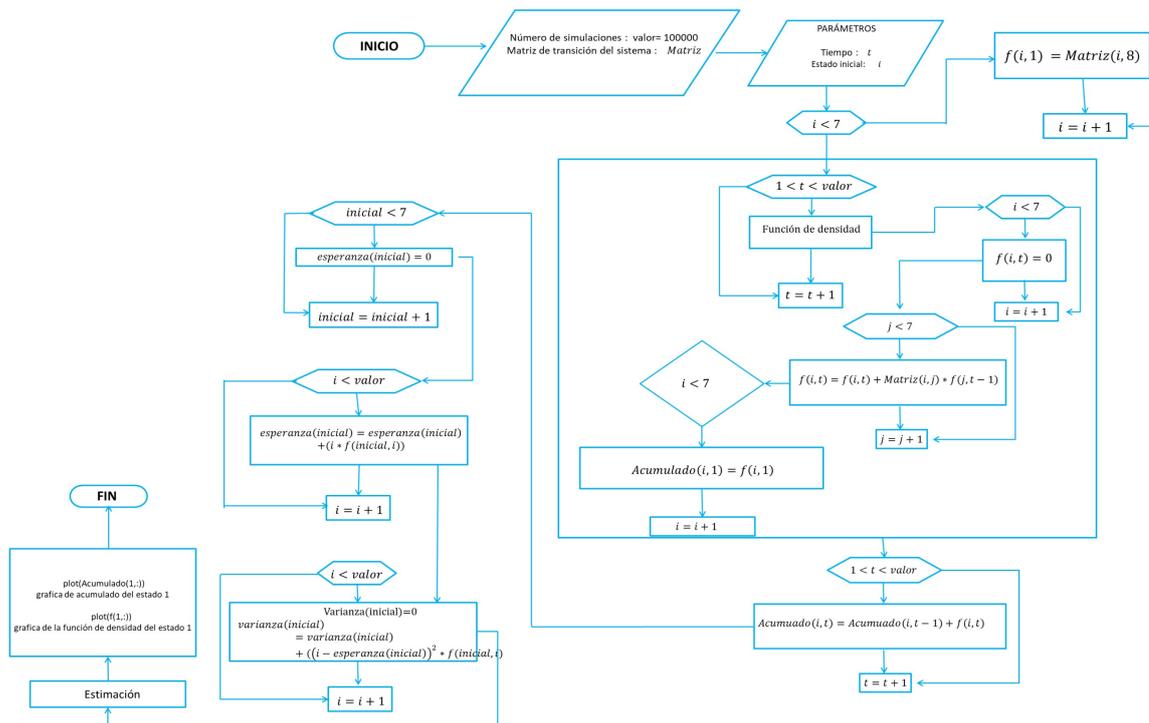


Figura 4.1: Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo del tiempo de primer arribo al estado desastroso D.

Se obtiene el tiempo esperado y varianza de primer arribo al estado 8 (estado D), dado el estado inicial correspondiente. Donde, dichos valores del tiempo pueden ser horas, días, meses, etc.

Estado Inicial	1	2	3	4	5	6	7
Tiempo esperado	1741	1625	1525	1260	890	590	305

Cuadro 4.1: Tiempo esperado de primer arribo a D .

Estado Inicial	1	2	3	4	5	6	7
Varianza	1769800	1741800	1729900	1647200	1395600	1038400	600200

Cuadro 4.2: Varianza del tiempo de primer arribo a D .

A continuación, se presentan las gráficas de las funciones de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado cada estado inicial.

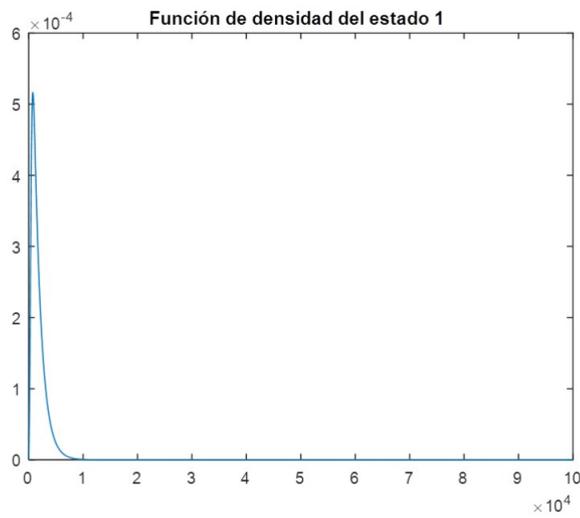


Figura 4.2: Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 1.

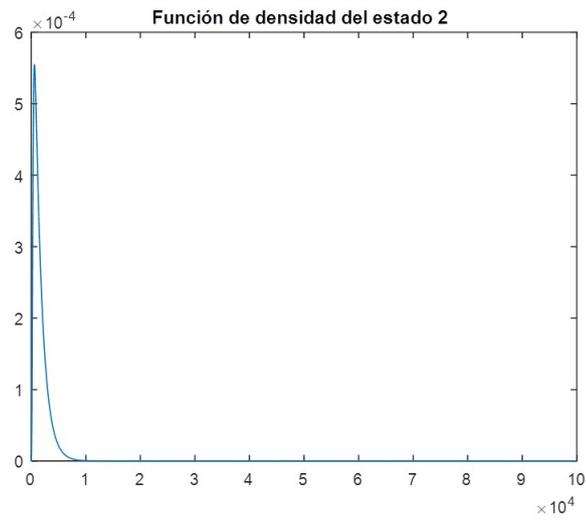


Figura 4.3: Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 2.

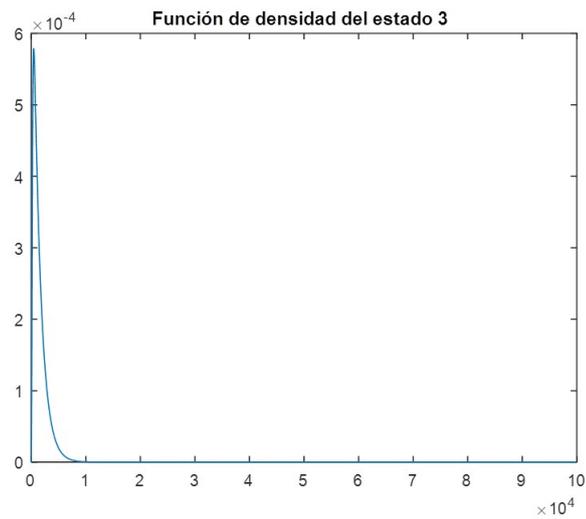


Figura 4.4: Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 3.

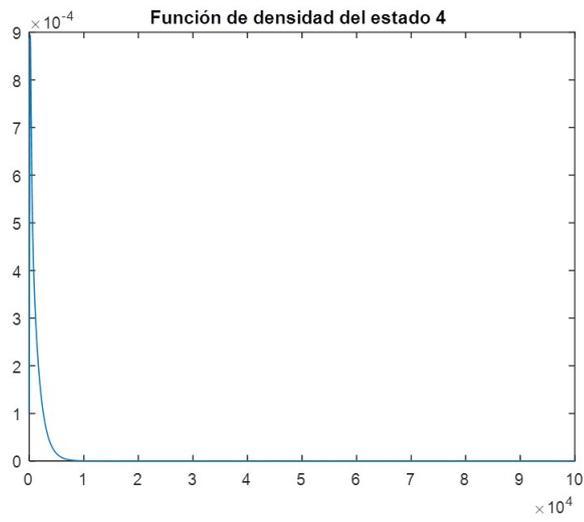


Figura 4.5: Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 4.

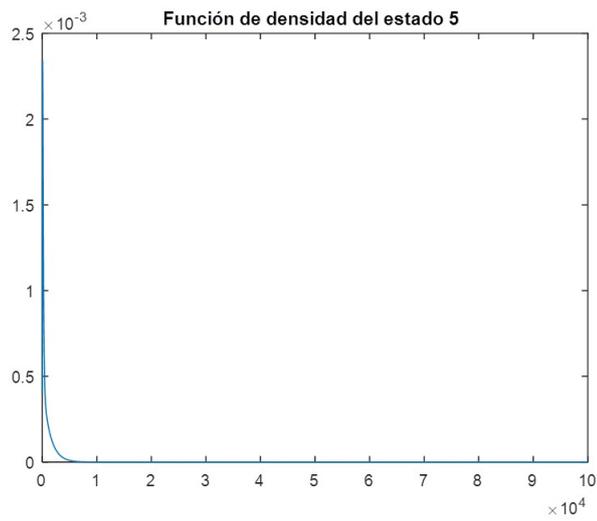


Figura 4.6: Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 5.

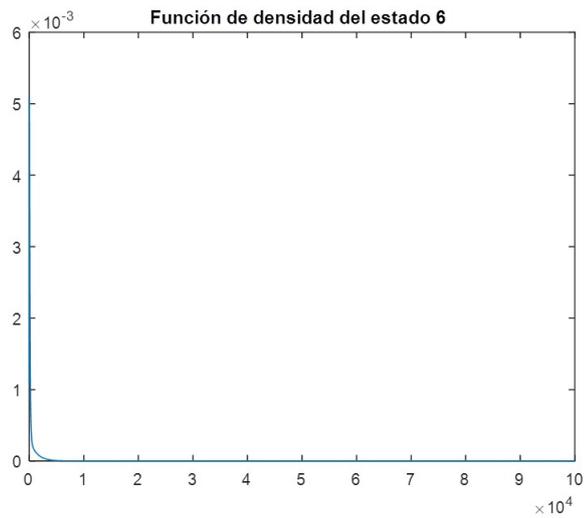


Figura 4.7: Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 6.

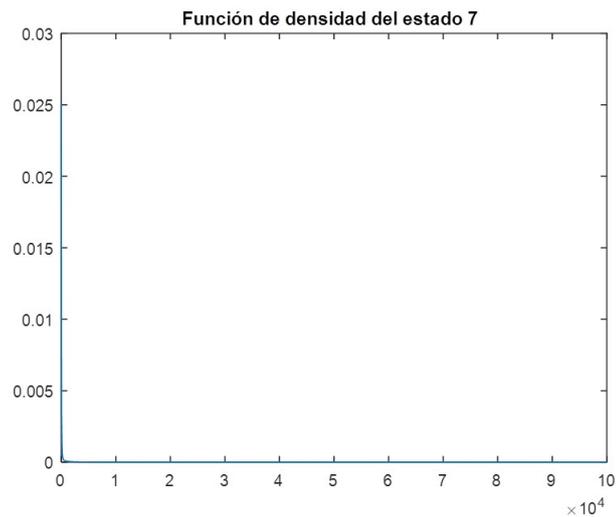


Figura 4.8: Gráfica de la función de densidad del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 7.

Se presentan las gráficas de las funciones acumuladas del tiempo de primer arribo al estado 8 dado cada estado inicial.

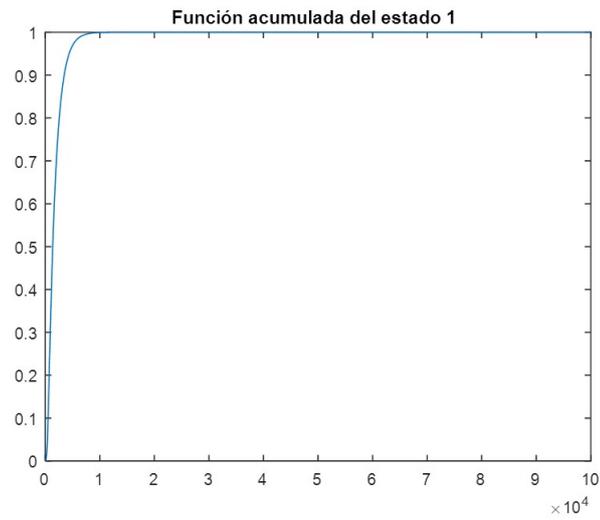


Figura 4.9: Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 1.

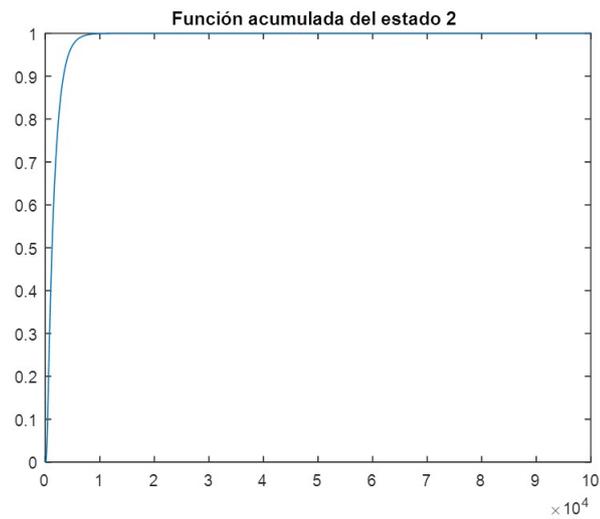


Figura 4.10: Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 2.

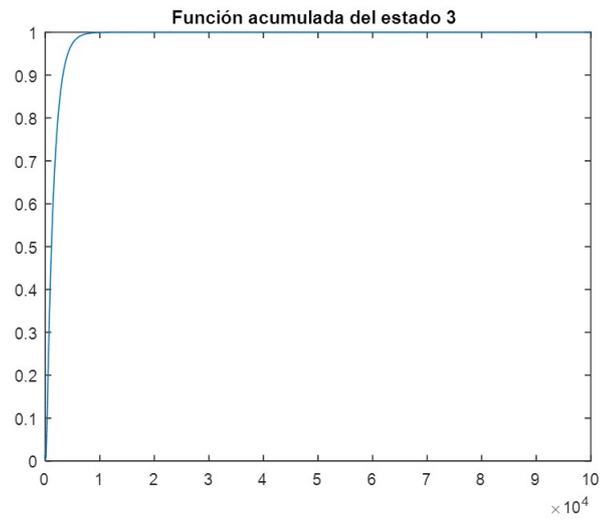


Figura 4.11: Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 3.

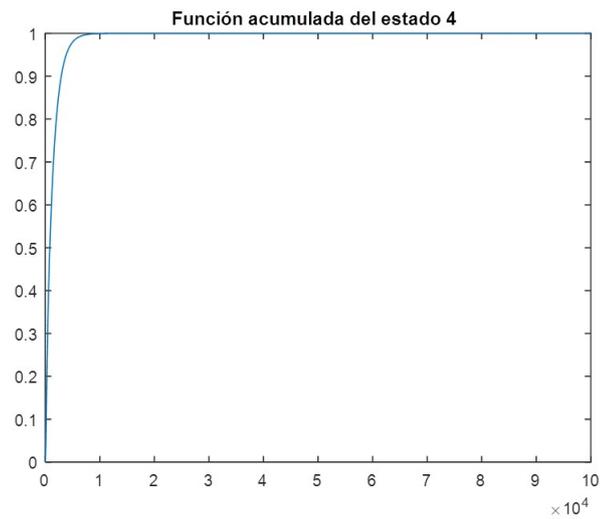


Figura 4.12: Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 4.

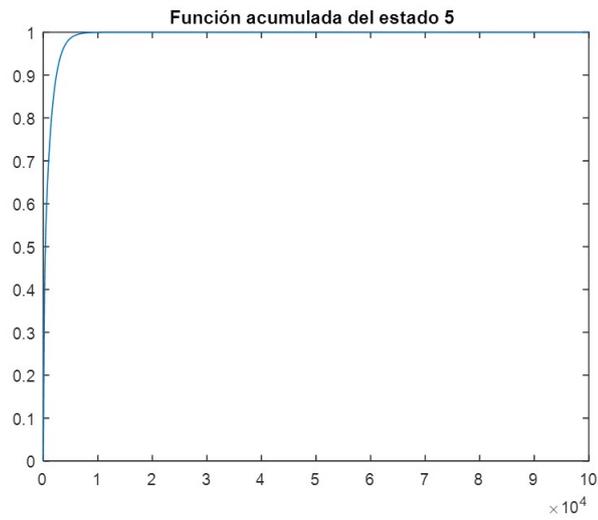


Figura 4.13: Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 5.

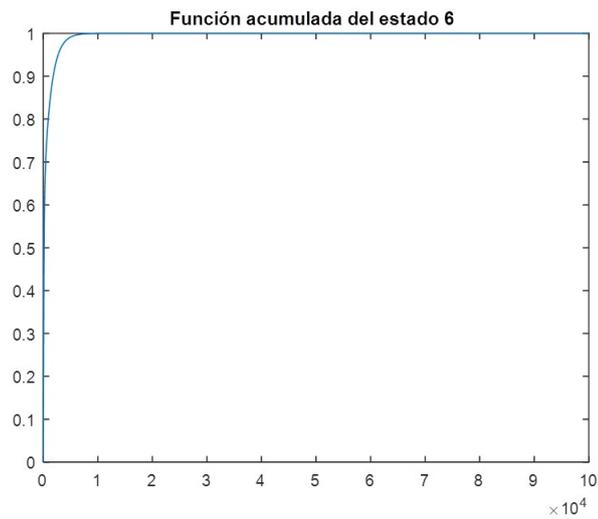


Figura 4.14: Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 6.

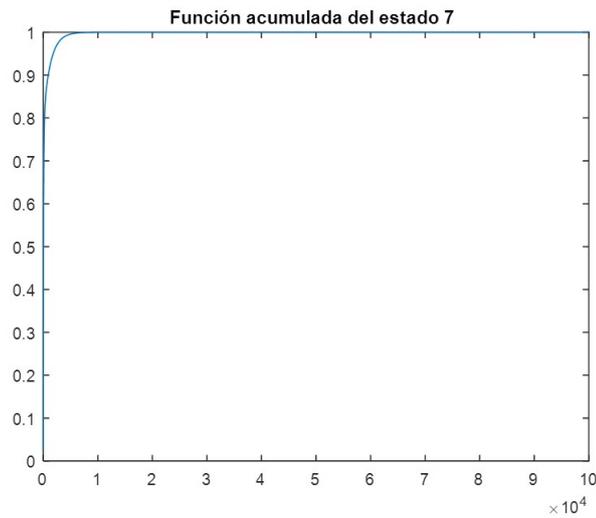


Figura 4.15: Gráfica de la función acumulada del tiempo de primer arribo al estado 8 dado el estado inicial 7.

4.1.2. Tiempo de segundo arribo al estado de default

Se propone estimación del tiempo de segundo arribo al estado 8 via simulación Monte-Carlo en matlab mediante el algoritmo especificado en el siguiente diagrama de flujo y haciendo uso de la matriz de transición P .

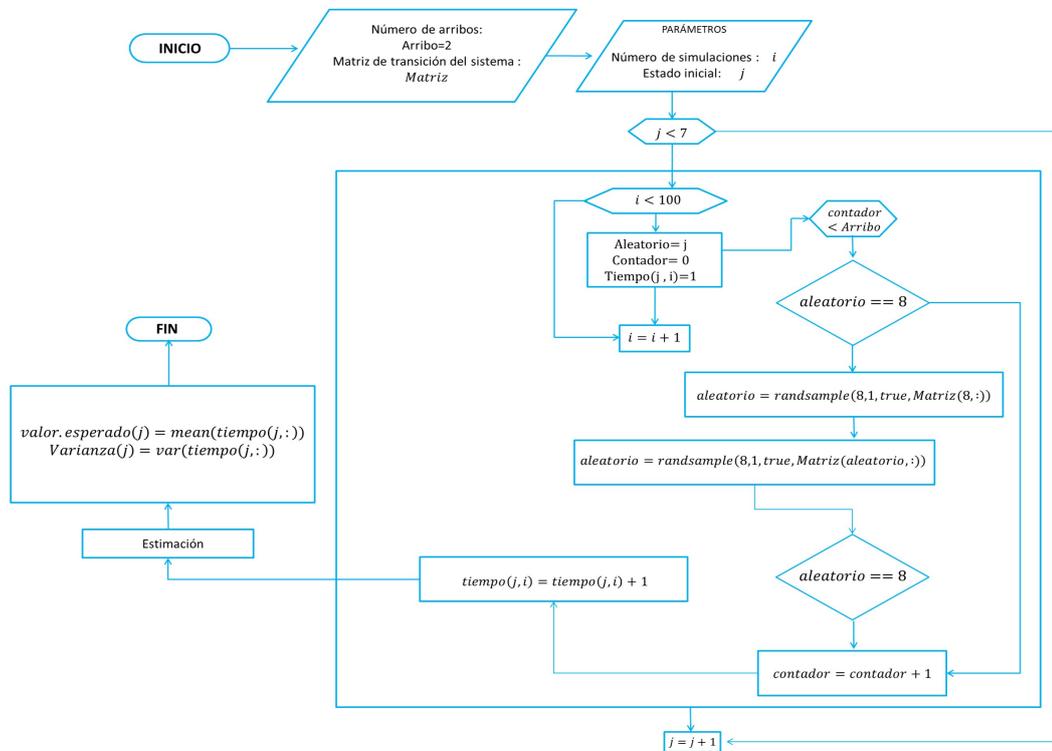


Figura 4.16: Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo del tiempo de segundo arribo al estado desastoso D .

Así, se obtiene el tiempo esperado y varianza del segundo arribo al estado 8 (estado D) para 100 simulaciones, dado el estado inicial correspondiente. Donde, dichos valores del tiempo pueden ser horas, días, meses, etc.

Estado Inicial	1	2	3	4	5	6	7
Tiempo esperado	2241	2163	2002	2037	1038	1082	746

Cuadro 4.3: Tiempo esperado de segundo arribo a D .

Estado Inicial	1	2	3	4	5	6	7
Varianza	2981600	3108100	2637900	2962000	807500	1721000	1904500

Cuadro 4.4: Varianza del tiempo de segundo arribo a D .

4.1.3. Tiempo del tercer arribo al estado de default

De igual forma, haciendo uso de la matriz de transición P y por medio del algoritmo del diagrama de flujo de la sección anterior se estima el tiempo de tercer arribo por simulación Monte-Carlo en matlab. Así, se tiene el tiempo esperado y varianza del tercer arribo al estado 8 (estado D) para 100 simulaciones, dado el estado inicial correspondiente. Donde, dichos valores del tiempo pueden ser horas, días, meses, etc.

Estado Inicial	1	2	3	4	5	6	7
Tiempo esperado	2726	2494	2115	1828	1793	1291	876

Cuadro 4.5: Tiempo esperado de tercer arribo a D .

Estado Inicial	1	2	3	4	5	6	7
Varianza	3136000	3250100	2112800	2025700	2622700	1801000	877700

Cuadro 4.6: Varianza del tiempo de tercer arribo a D .

4.1.4. Tiempo del k -ésimo arribo al estado de default

Notar que, si k es muy grande, entonces calcular el tiempo del k -ésimo arribo es muy complejo. Se recomienda estimar la solución por medio de simulación Monte-Carlo a través del algoritmo especificado en el siguiente diagrama de flujo.

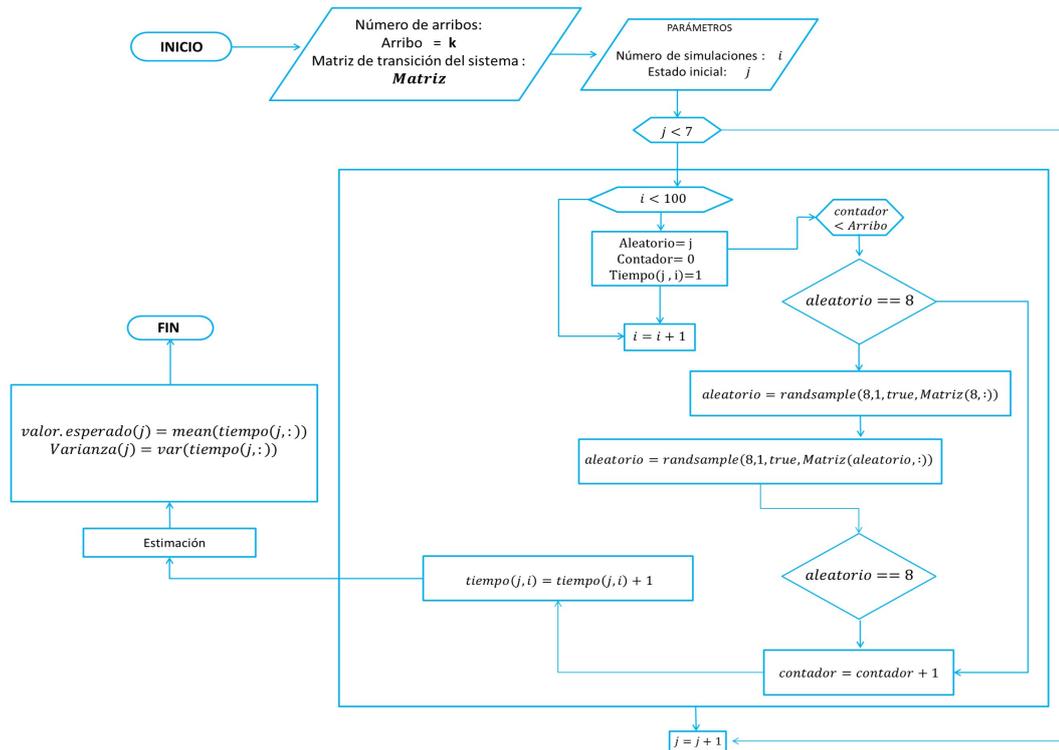


Figura 4.17: Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo del tiempo de k -ésimo arribo al estado desastroso D .

Observar que, para estimar el tiempo del cuarto arribo a D solo se le asigna el valor a $Arribo = 4$ en el algoritmo.

4.2. Análisis de función de pérdida en riesgos crediticios

Considere los datos antes mencionados de riesgos crediticios de Standar & poor's para empresas multinacionales de Estados Unidos.

4.2.1. Función de pérdida de variables aleatorias

Se asume una cartera de inversión con β activos cada uno de ellos con la misma calificación de riesgo crediticio y el mismo monto de inversión, note que dado la igualdad de riesgos el inversionista es indiferente al monto de inversión por activo por lo que se deduce montos iguales. De esta forma las funciones de densidad de pérdida asociadas en caso de arribar al estado de default D , son iguales e independientes. Así por la ecuación (3.18) se puede deducir que para un tiempo $T = t$, la pérdida total de β activos será,

$$P_T(t) = \sum_{i=1}^{\beta} \Lambda_i(t) N_i(t),$$

donde Λ representa la variable aleatoria asociada a la pérdida dado la ocurrencia del estado de default D en el intervalo de tiempo $[0, t]$ y $N(t)$ es la variable aleatoria que establece el número de arribos a dicho estado de default entre cero y t , tal como se definió en el capítulo anterior.

Observe que para t grande al obtener $N_i(t)$ es necesario una gran cantidad de sumas de probabilidades, lo cual resulta muy complejo de calcular. De esta forma, se propone la solución via simulación Monte-Carlo mediante el algoritmo del diagrama de flujo especificado en el programa.

Suponga que a cada arribo de un activo al estado de default D se le asocia un monto de pérdida con una distribución uniforme de 1,000 – 10,000 y suponga 10 activos en un tiempo $t = 100$.

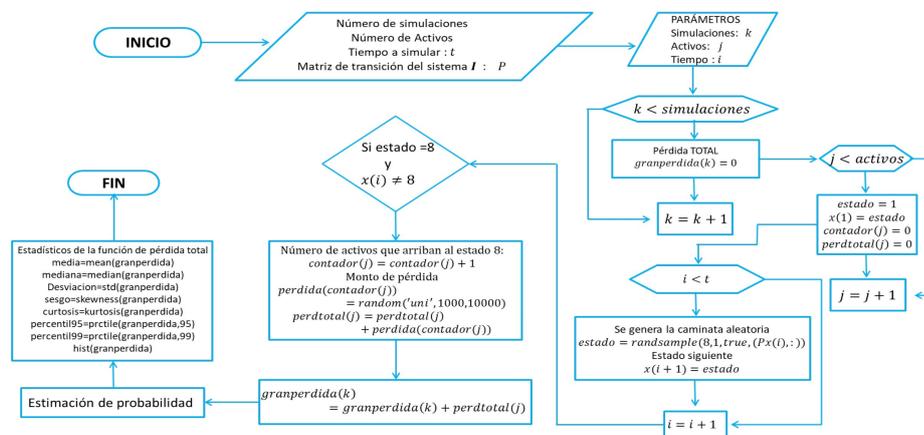


Figura 4.18: Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo de función de pérdida con pérdidas aleatorias.

Así se desarrolla en matlab la simulación Monte-Carlo (ver anexo No. B.1.). De esta forma, se obtuvieron los estadísticos e histograma de la función de pérdida total.

ESTADO	MEDIA	MEDIANA	DESVIACIÓN ESTD.	SESGO	CURTOSIS	PERCENTIL 95	PERCENTIL 99
1	35.65	0	356.59	9.84	98.01	0	1783
2	122.85	0	730.91	6.2	42.09	0	4690.7
3	576.22	0	2480.6	4.79	26.17	3487.40	14567
4	2779.6	0	5421.7	2.5	10.3	13813	24856
5	12103	9474.5	9741	0.9043	3.37	30643	41109
6	27930	25130	14087	0.8066	3.79	55209	70133
7	49819	49165	14425	0.1207	2.53	74861	80710

Cuadro 4.7: Estadísticos de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$.

Note que, el dato más importante de los estadísticos son los percentiles 95 y 99, puesto que nos indican las pérdidas en el peor de los casos, lo cual es de gran ayuda para generar estrategias de cobertura de riesgos.

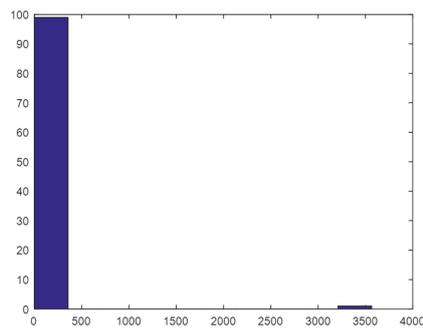


Figura 4.19: Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 1.

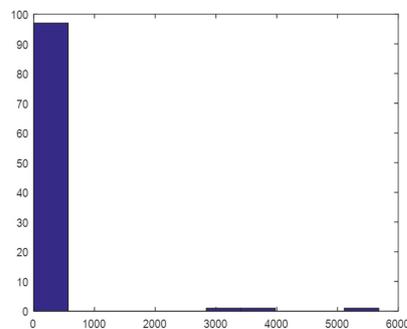


Figura 4.20: Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 2.

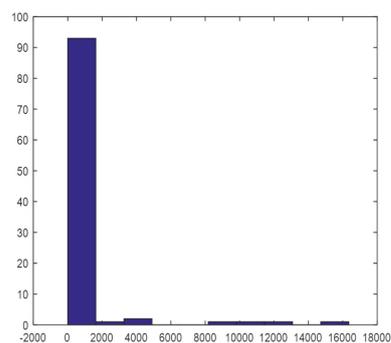


Figura 4.21: Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 3.

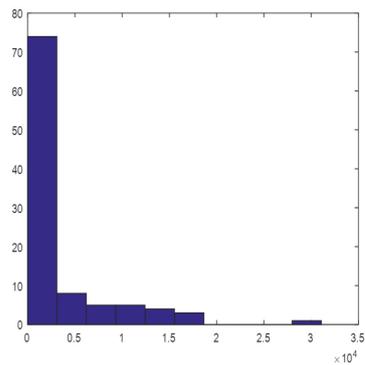


Figura 4.22: Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 4.

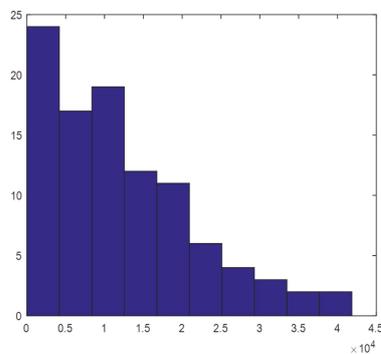


Figura 4.23: Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 5.

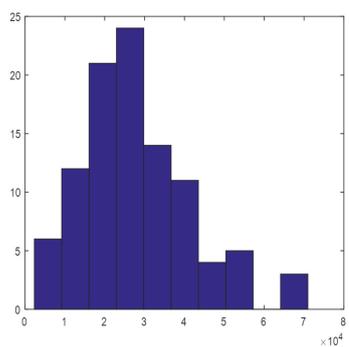


Figura 4.24: Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 6.

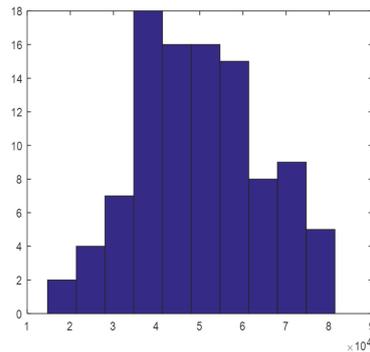


Figura 4.25: Histograma de función de pérdida total de 10 activos en un tiempo $t = 100$ del estado 7.

4.2.2. Función de pérdida de Cartera

Suponga ahora que se tiene una cartera con r activos, tal que n_1 corresponda a aquellos rankeados como *AAA*, n_2 a aquellos como *AA* y así sucesivamente hasta n_7 con cartera *C*.

Por simplicidad se asume que a cada activo en la misma cartera se le asigna el mismo monto, de igual forma por razones que el caso anterior. De esta manera, la pérdida total que aglomeran todos los activos, estará dado de acuerdo a la ecuación (3.31), por:

$$P_T(t) = \sum_{i=1}^7 P_{T_i}(t), \quad (4.1)$$

donde P_{iT} representa el monto asociado a la pérdida del activo i , para $i = 1, \dots, 7$.

Se supone que para cada estado se tendrá 5 activos invertidos, cada uno con el mismo monto en un tiempo $t = 100$ y por simulación Monte-Carlo se estima la función de pérdida a través del siguiente diagrama de flujo,

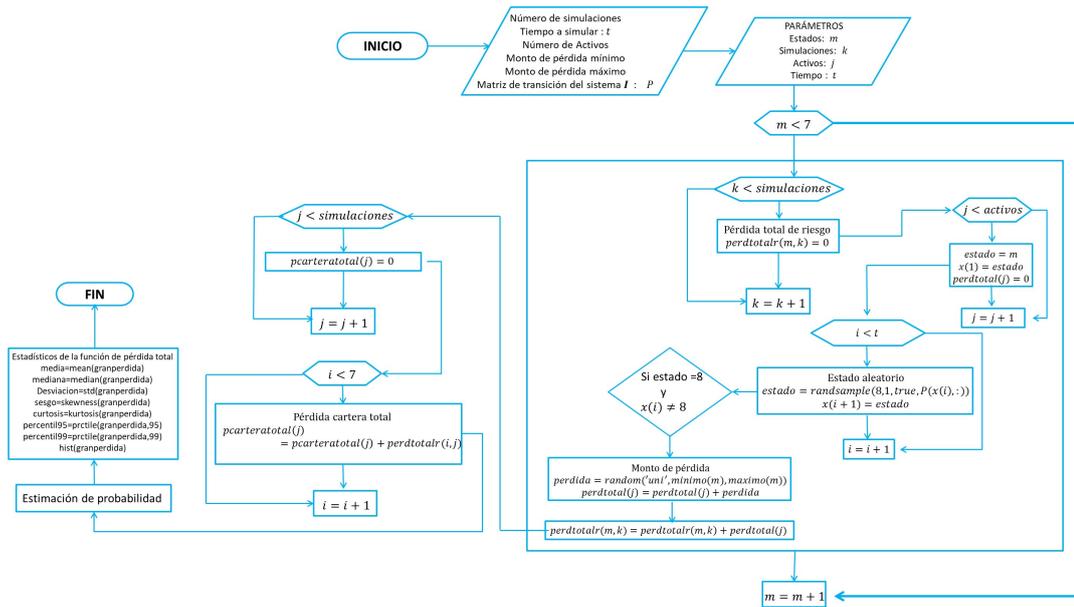


Figura 4.26: Diagrama de flujo de simulación Monte-Carlo de la función de pérdida de cartera al momento t .

El cual fue ejecutado en matlab (ver anexo No. B.2.). Se obtiene los siguientes estadísticos e histograma.

MEDIA	39167
MEDIANA	37481
DESVIACIÓN ESTD.	14148
SESGO	0.4784
CURTOSIS	3.37
PERCENTIL 95	65209
PERCENTIL 99	73136

Cuadro 4.8: Estadísticos de función de pérdida de cartera de 5 activos en un tiempo $t = 100$.

Notar que, de acuerdo al percentil 99 se debe tener un monto de cobertura de \$73,136 para evitar pérdidas desastrosas.

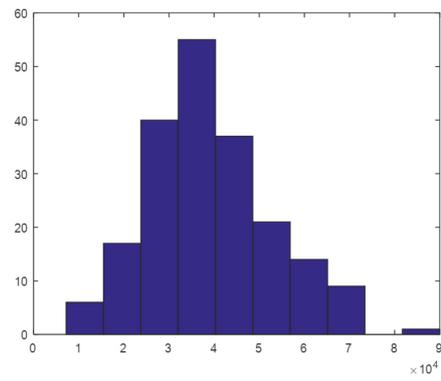


Figura 4.27: Histograma de función de pérdida de cartera de 5 activos en un tiempo $t = 100$.

Conclusión

El motivo para crear modelos de riesgo crediticio radica en la necesidad de calcular cuánto capital económico es necesario para sustentar las actividades de toma de riesgo de un banco, ya que por cada arribo al estado desastroso se genera una pérdida. Es por ello, que en este trabajo se estudió el tiempo de primer arribo, segundo arribo y k -ésimo arribo a un estado desastroso.

En el capítulo 2, se presentó la teoría de cadenas de Markov para calcular los tiempos de arribo de un sistema. Sin embargo la solución numérica de las funciones de arribo resulta muy compleja, por ello, en el capítulo 4 se presentó una aplicación de como estimar tiempos de arribo por medio de simulación Monte-Carlo en Matlab® , donde, el estudio del segundo y k -ésimo arribo quedan caracterizados por el primer arribo gracias a la hipótesis de homogeneidad de la cadena de Markov. Puesto que, entre más grande sea el k -ésimo arribo por conocer es muy grande la suma de probabilidades por calcular. Así, se obtiene información de los tiempos de arribo al estado de desastre, lo cual facilita la toma de decisiones para evitar riesgos en diferentes áreas.

En el capítulo 3, se hizo uso del concepto de proceso de conteo y variables aleatorias que se asocian a cierto monto de pérdida ya sea constante o aleatoria, lo cual se emplea para desarrollar una función de pérdida de pérdidas aleatorias y función de pérdida de cartera de inversión, sin embargo ambas funciones consideran la variable aleatoria asociada al número de veces que el sistema arriba al estado de desastre. Así, entre más grande sea el número de eventos ocurridos mas compleja es la solución de dichas funciones de pérdida, para ello, se hace una estimación por simulación Monte-Carlo en Matlab® .

Futura investigación

Con el fin de incrementar los alcances del modelo propuesto, se propone los siguientes trabajos de investigación:

- Generalizar los procesos del sistema de Markov a tiempo continuo.
- Extender la teoría de procesos a un sistema Semi-Markov a tiempo discreto y continuo.
- Considerar los procesos no homogéneos.
- Aplicación de la teoría de conteo en estados múltiples y función de pérdida a seguros de daños.

Apéndice A

Código de simulación Monte-Carlo en Matlab® para tiempos de arribo

A.1. Tiempo de primer arribo al estado de default D

```
clear
% clc
Matriz=[0.9933 0.0063 0.0000 0.0002 0.0002 0.0000 0.0000 0.0000;
0.0004 0.9894 0.0101 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000;
0.0001 0.0018 0.9937 0.0043 0.0001 0 0.0000 0.0000;
0.0000 0.0003 0.0030 0.9922 0.0040 0.0003 0.0001 0.0001;
0.0002 0.0004 0.0004 0.0080 0.9778 0.0111 0.0017 0.0004;
0.0000 0.0001 0.0011 0.0005 0.0084 0.9736 0.0152 0.0011;
0.0000 0.0001 0.0008 0.0000 0.0032 0.0129 0.9579 0.0251;
0 0 0 0 0 0.005 0.015 .98];
valor=100000; % numero de simulaciones
for i=1:7
    f(i,1)=Matriz(i,8);
end
for t=2:valor % función de densidad
    for i=1:7
        f(i,t)=0;
        for j=1:7
            f(i,t)=f(i,t)+Matriz(i,j)*f(j,t-1);
        end
    end
end
end

for i=1:7 % función acumulada
    Acumulado(i,1)=f(i,1);
    for t=2:valor
        Acumulado(i,t)=Acumulado(i,t-1)+f(i,t);
    end
end
end
```

```

for inicial=1:7
esperanza(inicial)=0;
    for i=1:valor
        esperanza(inicial)=esperanza(inicial)+(i*f(inicial,i));
    end
varianza(inicial)=0;
    for i=1:valor
        varianza(inicial) = varianza(inicial)
        + ((i-esperanza(inicial))^2)*f(inicial,i);
    end
end
plot(Acumulado(1,:))%grafica de acumulado del estado 1
plot(f(1,:))%grafica de la función de densidad del estado 1

```

A.2. Tiempo de segundo arribo al estado de default

D

```

clear
% clc
Matriz=[0.9933 0.0063 0.0000 0.0002 0.0002 0.0000 0.0000 0.0000;
0.0004 0.9894 0.0101 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000;
0.0001 0.0018 0.9937 0.0043 0.0001 0 0.0000 0.0000;
0.0000 0.0003 0.0030 0.9922 0.0040 0.0003 0.0001 0.0001;
0.0002 0.0004 0.0004 0.0080 0.9778 0.0111 0.0017 0.0004;
0.0000 0.0001 0.0011 0.0005 0.0084 0.9736 0.0152 0.0011;
0.0000 0.0001 0.0008 0.0000 0.0032 0.0129 0.9579 0.0251;
0 0 0 0 0 0.005 0.015 .98];
Arribo=2;
for j=1:7
    for i=1:100 %numero de simulaciones(100 datos que pasaron
    por segunda vez a 8)
        aleatorio=j;
        contador=0;
        tiempo(j,i)=1;
        while contador < Arribo
            if aleatorio==8
                aleatorio=randsample(8,1,true,Matriz(8,:));
            else
                aleatorio=randsample(8,1,true,Matriz(aleatorio,:));
                if aleatorio==8
                    contador=contador+1;
                end
            end
        end
        tiempo(j,i)=tiempo(j,i)+1;
    end
end

```

```

        end
    end
    Valor.esperado(j)=mean(tiempo(j,:));
    Varianza(j)=var(tiempo(j,:));
end

```

A.3. Tiempo del k -ésimo arribo al estado de default D

```

clear
% clc
Matriz=[0.9933 0.0063 0.0000 0.0002 0.0002 0.0000 0.0000 0.0000;
0.0004 0.9894 0.0101 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000;
0.0001 0.0018 0.9937 0.0043 0.0001 0 0.0000 0.0000;
0.0000 0.0003 0.0030 0.9922 0.0040 0.0003 0.0001 0.0001;
0.0002 0.0004 0.0004 0.0080 0.9778 0.0111 0.0017 0.0004;
0.0000 0.0001 0.0011 0.0005 0.0084 0.9736 0.0152 0.0011;
0.0000 0.0001 0.0008 0.0000 0.0032 0.0129 0.9579 0.0251;
0 0 0 0 0 0.005 0.015 .98];
Arribo=k; % número de arribos
for j=1:7
    for i=1:100 %numero de simulaciones(100 datos que
        arribaron por k-ésima vez a 8)
        aleatorio=j;
        contador=0;
        tiempo(j,i)=1;
        while contador < Arribo
            if aleatorio==8
                aleatorio=randsample(8,1,true,Matriz(8,:));
            else
                aleatorio=randsample(8,1,true,Matriz(aleatorio,:));
                if aleatorio==8
                    contador=contador+1;
                end
            end
            tiempo(j,i)=tiempo(j,i)+1;
        end
    end
    Valor.esperado(j)=mean(tiempo(j,:));
    Varianza(j)=var(tiempo(j,:));
end

```

Apéndice B

Código de Simulación Monte-Carlo en Matlab® para función de pérdida

B.1. Pérdida total de pérdidas aleatorias

El código de simulación Monte-Carlo para obtener los estadísticos e histograma de la función de pérdida total en caso de que 10 activos arriben al estado de default D , en un tiempo $t = 100$ es,

```
clc
clear
simulaciones=100
activos=10
t=100 % tiempo a simular
%matriz de transicion del sistema I
P=[0.9933 0.0063 0 0.0002 0.0002 0 0 0;
0.0004 0.9894 0.0101 0.0001 0 0 0 0;
0.0001 0.0018 0.9937 0.0043 0.0001 0.0001 0 0;
0 0.0003 0.0030 0.9922 0.0040 0.0003 0.0001 0.0001;
0 0.0004 0.0004 0.0080 0.9778 0.0111 0.0017 0.0004;
0 0 0.0011 0.0005 0.0084 0.9736 0.0152 0.0011;
0 0 0.0008 0 0.0032 0.0129 0.9579 0.0251;
0 0 0 0 0 0.005 0.015 0.98]
for k=1:simulaciones
    granperdida(k)=0
    for j=1:activos
        estado=1 % estado del sistema
        X_1=estado
        contador(j)=0
        perdtotal(j)=0
        for i=1:t % se genera la caminata aleatoria
            estado=randsample(8,1,true,P(x(i),:))
            x(i+1)=estado % estado siguiente
            if estado==8 && x(i)~=8
```

APÉNDICE B. CÓDIGO DE SIMULACIÓN MONTE-CARLO EN MATLAB® PARA FUNCIÓN D

```
        contador(j)=contador(j)+1 % No. de activos
                                %que arriban al edo. 8
        perdida(contador(j))= random('uni', 1000, 10000)
        perdtotal(j)=perdtotal(j)+perdida(contador(j))
    end
end
granperdida(k)= granperdida(k)+ perdtotal(j)
end

end

% estadísticos de la función de pérdida total
media=mean(granperdida)
mediana=median(granperdida)
Desviacion=std(granperdida)
sesgo=skewness(granperdida)
curtosis=kurtosis(granperdida)
percentil95=prctile(granperdida,95)
percentil99=prctile(granperdida,99)
% histograma de pérdida total
hist(granperdida)
```

B.2. Pérdida total de cartera de inversión

Código de simulación Monte-Carlo de la pérdida total de una cartera con 5 activos invertidos, en un tiempo $t = 100$ y 7 estados del sistema I .

```
clc
clear
simulaciones=200
t=100 %tiempo a simular
activos=5
%monto de pérdida mínimo
minimo=[7000; 6000; 5000; 4000; 3000; 2000; 1000]
%monto de pérdida máximo
maximo=[18000; 16000; 14000; 12000; 10000; 8000; 6000]
% matriz de transicion del sistema I
P=[0.9933 0.0063 0 0.0002 0.0002 0 0 0;
0.0004 0.9894 0.0101 0.0001 0 0 0 0;
0.0001 0.0018 0.9937 0.0043 0.0001 0.0001 0 0;
0 0.0003 0.0030 0.9922 0.0040 0.0003 0.0001 0.0001;
0 0.0004 0.0004 0.0080 0.9778 0.0111 0.0017 0.0004;
0 0 0.0011 0.0005 0.0084 0.9736 0.0152 0.0011;
0 0 0.0008 0 0.0032 0.0129 0.9579 0.0251;
0 0 0 0 0 0.005 0.015 0.98]
for m=1:7
    for k=1:simulaciones
```

APÉNDICE B. CÓDIGO DE SIMULACIÓN MONTE-CARLO EN MATLAB® PARA FUNCIÓN D

```
perdtotalr(m,k)=0 % pérdida total de riesgo
for j=1:activos
    estado=m
    X_1=estado
    perdtotal(j)=0
    for i=1:t
        estado=randsample(8,1,true,P(x(i),:))
        x(i+1)=estado%estado siguiente
        if estado==8 && x(i)~=8
            perdida= random('uni', minimo(m), maximo(m))
            perdtotal(j)=perdtotal(j)+perdida
        end
    end
    perdtotalr(m, k)=perdtotalr(m,k)+perdtotal(j)
end
end
end
for j=1:simulaciones
    pcarteratotal(j)=0
    for i=1:7
        pcarteratotal(j)=pcarteratotal(j)+perdtotalr(i,j)
    end
end
end
% Estadísticos de pérdida total de cartera
media=mean(pcarteratotal)
mediana=median(pcarteratotal)
Desviacion=std(pcarteratotal)
sesgo=skewness(pcarteratotal)
curtosis=kurtosis(pcarteratotal)
percentil95=prctile(pcarteratotal,95)
percentil99=prctile(pcarteratotal,99)
% Histograma de pérdida total de cartera
hist(pcarteratotal)
```

Bibliografía

- [Alv16] ÁLVARO CALVACHE ARCHILA. *Función de Disponibilidad en Procesos de Renovación y aproximaciones útiles de ella*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, marzo de 2016.
- [Bha60] A.T. BHARUCHA-REID . ELEMENTS OF THE THEORY OF MARKOV PROCESSES AND THEIR APPLICATIONS. McGraw Hill Series in Probability and Statistics, 1960.
- [Bil68] BILLINGSLEY P., (1968). *Convergence of probability measures*. John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney.
- [Bla79] BLAKE I. F. *An introduction to applied probability*. John Wiley and Sons, 1979.
- [BMB04] BOB MAU, MICHAEL A. NEWTON AND BRET LARGET. *Bayesian Phylogenetic Inference via Markov Chain Monte Carlo Methods*. First published: 26 May 2004.
- [CM70] D.R. COX AND H.D. MILLER . *The Theory Stochastic Processes*. Methuen, 1970.
- [Cin69] CINLAR E.,(1969) *Markov renewal theory*. Advances in AppL Probability 1, 123-187.
- [CE12] CHARLES J. GEYER AND ELIZABETH A. THOMPSON. *Annealing Markov Chain Monte Carlo with Applications to Ancestral Inference* Pages 909-920, Published online: 27 Feb 2012.
- [Chu68] CHUNG, K. L., *A Course in Probability Theory*, New York, Harcourt, Brace and World, Inc., 1968.
- [Cin75] CINLAR, E. (1975B). *Introduction to stochastic processes*. Prentice Hall, New York.
- [Col94] COLLET D. *Modelling survival data in medical research*. London: Chapman and Hall; 1994.
- [Dan01] PEÑA SÁNCHEZ DE RIVERA, DANIEL. *Deducción de distribuciones: el método de Monte-Carlo*, en Fundamentos de Estadística. Madrid: Alianza Editorial, 2001.

- [Dav14] DAVID ARANGO SAMPAYO. *Un estudio sobre tiempos de primer arribo y estrategias óptimas de inversión aplicados al esquema de retiro programado*, Escuela de Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 2014.
- [DJ10] DIMITRI P. BERTSEKAS AND JOHN N. TSITSIKLIS. *Introduction to Probability*. Electrical Engineering and Computer Science Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts, 2010.
- [Fel73] FELLER W. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. Limusa, 1973.
- [Fel66] FELLER W. (1966). *An introduction to probability theory and its applications*. Vol.II. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [HPS71] HOEL P. G., PORT S. C., STONE C. J.. *Introduction to probability theory*. Houghton Mifflin, 1971.
- [IM76] ISAACSON D. L, MADSEN R. W. (1976), *Markov chains. Theory and Applications*. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, New York-London-Sydney.
- [IM16] MORALES GARAY, ISMAEL; CASTRO ESQUIVEL, MARLYN. *PROYECCIONES DEMOGRÁFICAS Y ACTUARIALES POR MEDIO DEL MÉTODO DE CADENAS DE MARKOV CON MONTE-CARLO*. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, vol. 23, núm. 1, enero, 2016, pp. 241-253. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
- [JR06] JACQUES JANS SEN, Solvay Business School, Brussels, Belgium and RAIMONDO MANCA, Universita di Roma "La Sapienza, Italy" (2006 Springer Science). *Applied Semi-Markov Processes*.
- [KM97] KIJIMA AND MASAOKI . *Markov Processes for Stochastic Modeling (1st edición)*. Cambridge: Chapman and Hall, 1997.
- [Kol50] KOLMOGOROV A. N. *Foundations of the theory of probability*. Chelsea Publishing Company, 1950.
- [LDL96] LAMBERTON, DAMIEN Y LAPEYRE, BERNARD. *Introduction to Stochastic Calculus. Applied to Finance*. Chapman y Hall. 1996.
- [Lei09] LEIF MEJLBRO. *Stochastics Processes 1*. Ventus Publishing, 2009.
- [LK91] LAW M. A. M. AND KELTON W. D. *Simulation Modeling and Analysis*. Mc. Graw-Hill. 1991.
- [LW03] LEE ET, WANG JW. *Satistical Methods for survival data analysis*. 3rd. ed. Belmont, CA: Lifetime learning Publications; 2003.

- [Lui11] LUIS RINCÓN. *Introducción a los PROCESOS ESTOCÁSTICOS*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, Circuito Exterior de CU 04510 México DF, enero 2011.
- [MA96] MARK JERRUM AND ALISTAIR SINCLAIR. *THE MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHOD: AN APPROACH TO APPROXIMATE COUNTING AND INTEGRATION*, 1996.
- [MGB83] MOOD A. M., GRAYBILL F. A., BOES D. C. *Introduction to the theory of statistics*. McGraw Hill, 1983.
- [New] NEWMAN JAMES, Editor. *La Ley de los Grandes Números*, El mundo de las Matemáticas Vol. 3. Sigma. Ediciones Grijalbo
- [Odd12] ODD O. AALEN. *Introduction to Counting Processes*, BGC1 course, Dept. of Biostatistics, IMB, University of Oslo, March 2012.
- [PONEJO85] PER KRAGH ANDERSEN, ORNULF BORGAN, NILS LID HJORT, ELJA ARJAS, JON STENE AND ODD AALEN. *Counting Process Models for Life History Data*, Scandinavian Journal of Statistics Vol. 12, No. 2 (1985), pp. 97-158
- [PV13] PATRICIA SAAVEDRA BARRERA Y VÍCTOR HUGO IBARRA. *El método Monte-Carlo y su aplicación a finanzas*, . 1-Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 2-Escuela de Actuaría, Universidad Anáhuac, 2013.
- [Raf10] TERRAZAS PASTOR, RAFAEL. *APLICACIÓN DE LA SIMULACIÓN A UN SISTEMA DE COLAS DE CANAL SIMPLE*. Universidad Católica Boliviana San Pablo Cochabamba, Bolivia, diciembre, 2010.
- [Ros99] ROSS, S., *Simulation*. Academic Press, San Diego CA, 1999.
- [SPs11] STANDARD & POORS: *Guide to Credit Rating Essentials*, standardandpoors.com, New York (2011). <http://www.understandingratings.com/>
- [Une10] *Teoría de la Medida y Probabilidades*. Dpto. Matemáticas. UNEX 14 de diciembre de 2010.
- [WSD95] W.R. GILKS, S. RICHARDSON, DAVID SPIEGELHALTER. *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. 1st Edition, december 1995, New York. Chapman and Hall.