



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
CHIAPAS



FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

CONTROL DE PROCESOS
ESTOCÁSTICOS APLICADO A
PORTAFOLIO DE INVERSIÓN ÓPTIMO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS EN
MATEMÁTICAS

PRESENTA:

KARINA ITZELT DE LEÓN PALACIOS

DIRECTORES: DR. DANIEL HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

DR. FLORENCIO CORONA VÁZQUEZ

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS

JUNIO 2017



Universidad Autónoma de Chiapas
Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas
Dirección



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
16 de junio de 2017
Oficio No. FCFM/0200/17

Dr. Daniel Hernández Hernández
Dr. Florencio Corona Vázquez
Director y Asesor Coadyuvante
Presente.

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

“Control de procesos estocásticos aplicados a portafolio de inversión óptimo”

Ha sido aceptada para sustentar el Examen de Grado de Maestra en Ciencias Matemáticas de la **Lic. Karina Itzelt De León Palacios** con matrícula escolar: **C080041.**

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

“Por la conciencia de la necesidad de servir”



DIRECCIÓN
Dr. Sendic Estrada Jiménez FCFM
Director

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
Lic. Paola Morales Torres.- Encargada de Servicios Escolares de posgrado de la FCFM
Archivo / Minutario
SEJ / egav

Agradecimientos

A mis asesores de tesis: Dr. Florencio Corona Vázquez y en especial al Dr. Daniel Hernández Hernández¹ por guiarme en el desarrollo de este proyecto, la paciencia y el tiempo que me dio para resolver todas mis dudas. Gracias por estar al pendiente de mí, dispuesto a ayudarme.

A mi familia por todo el apoyo, amor, paciencia y comprensión que me brindaron durante la maestría y la elaboración de mi tesis. Gracias por sus consejos.

A los miembros de la comisión revisora: Dr. Héctor Jasso Fuentes, Dr. Saúl Campos, Dr. Armando Mendoza por dedicarle parte de su tiempo a mí y a mi tesis. Gracias por sus comentarios para mejorar esta memoria.

Agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (CIMAT), por permitirme formar parte de su comunidad y apoyarme en mi crecimiento profesional.

A todos mis profesores: Dr. Russell A. Quiñones Estrella, Dr. José Saúl Campos Orozco, Dr. Armando F. Mendoza Pérez, Dr. Alfredo Camacho Valle, Dr. Victor Rivero Mercado², Dr. José Luis Pérez Garmendia³, Dr. Rolando J. Biscay Lirio⁴, Dra. Lilia Leticia Ramírez Ramírez⁵ por brindarme su ayuda y conocimientos durante la maestría y después de ella.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por otorgarme la beca que ha hecho esto posible y por la cual mi única preocupación fue estudiar.

^{1,2,3,4,5} Profesor en CIMAT

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Mercado financiero	5
1.2. Portafolios	7
1.2.1. Tipos de portafolios	9
1.3. Arbitraje	9
1.4. Derivados	10
1.4.1. Tipos de derivados	11
1.4.2. Opciones	13
1.4.3. Opciones Vainilla	13
1.4.4. Opciones Exóticas	13
1.5. El modelo de Black-Scholes-Merton	14
1.6. Cambio de medida	16
1.7. Replicación financiera	17
1.8. Completez de mercado	17
1.9. Función de utilidad	22
1.10. Caídas	23
1.11. Cota de referencia	24
2. Estrategia de inversión óptima sin restricciones	27
2.1. Modelo del tipo Merton simple	27
2.2. Horizonte finito	29
2.2.1. Planteamiento del problema	29
2.3. Método de optimización para modelos continuos	30
2.3.1. Teoremas de verificación	33
2.4. Horizonte infinito	38
2.4.1. Planteamiento del problema	38
2.4.2. Teoremas de verificación	40

2.5. Implementación numérica	45
3. Estrategia de inversión óptima controlando caídas	49
3.1. Planteamiento del problema	50
3.2. Transformación del problema	52
3.3. Análisis para el caso $\lambda = 0$	55
3.3.1. Análisis de $V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M})$ para $\bar{W}_t^{w,\pi} \in [\alpha\bar{M}, \bar{M})$	56
3.3.2. Análisis de $V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi)$ para $\bar{W}_t^{w,\pi} = \bar{M}_t^\pi$	57
3.3.3. Estrategia óptima	59
3.3.4. Costo de las Caídas	60
3.3.5. Propiedades de la estrategia óptima	60
3.4. Análisis para el caso $\lambda > 0$	61
3.4.1. Cálculo de la tasa de crecimiento	63
3.5. Teoremas de verificación	63
3.6. Diferencias entre $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$	66
Conclusiones	68
Lista de abreviaturas y símbolos	73
Bibliografía	75

Introducción

El cálculo estocástico es una de las ramas de la teoría de procesos estocásticos que ha cobrado importancia debido a su eficiencia al modelar en tiempo continuo. Surge su aplicación en las finanzas como un intento de brindar respuestas claras y fundamentadas para el análisis del desempeño financiero de empresas, inversionistas, entre otros. Probablemente dirigido a agudizar los problemas relacionados con la supervivencia de instituciones financieras y todo lo que esto implica: quiebras, liquidez, rendimientos, etc. También debido a la necesidad de realizar de manera detallada y eficaz las decisiones de inversiones y financiamiento, así como llevar a cabo la organización y control para optimizar sus recursos.

La elección de portafolios es un problema central de los agentes financieros que surge naturalmente del preguntarse, *¿cuál es la mejor manera de extender su capital a través de un número de diferentes activos que maximicen el rendimiento y controlen el riesgo?*. Por supuesto, cada activo es único y ofrece sus propios resultados. Estos pueden ser resumidos por un *rendimiento esperado* y un *riesgo*. El primero cuantifica cuál sería la posible apreciación del precio del activo o ingreso que se derive de él durante un período de tiempo determinado. El segundo mide la incertidumbre de estos pagos para el inversor.

Desde hace mucho tiempo, se ha entendido que existe un equilibrio fundamental entre estos dos conceptos, dando lugar a un incontable número de oportunidades. Por un lado, encontramos los bonos a corto plazo que ofrecen rendimientos muy pequeños con absoluta certidumbre. En el otro, las acciones de crecimiento de pequeñas capitalizaciones que pueden prometer rendimientos asombrosos, pero sólo si la empresa tiene éxito de lo contrario, el inversionista podría perder completamente su capital.

Igual de importante es la forma en que los riesgos individuales se combinan en

el nivel del portafolio, en otras palabras, es importante saber cuál es el riesgo general del portafolio si los activos se combinan de cierta manera. Lo que tenemos que considerar es que los activos en el mundo real no son independientes. Esta es la idea fundamental detrás del concepto de diversificación: el riesgo general del portafolio puede ser menor que la suma de los riesgos de los activos individuales que lo constituyen.

El estudio asociado a la optimalidad de portafolios fue iniciado por H. Markowitz [19], que introdujo, entre otros conceptos, la noción de frontera eficiente entre el riesgo y el rendimiento (midiendo el riesgo con la desviación estándar). Hasta Markowitz, la elección del portafolio se rigió bajo la metodología de "abajo hacia arriba", básicamente se trata de que cada componente del portafolio (acciones, bonos, etc.) es elegido por su propio riesgo y sus características de rendimiento sin considerar su interacción con el resto del portafolio. Sin embargo, debido a los efectos de la diversificación, este análisis simple es insuficiente.

La decisión de mantener un valor no solo debe depender de una comparación simple de su riesgo esperado y perfil de rendimiento con el de otros valores, sino también de su impacto marginal en el perfil riesgo-rendimiento de todo el portafolio de inversión. Dicho de otra manera, la decisión de mantener un valor no puede hacerse de manera aislada, sino que depende de los otros valores que el inversionista ya posee o desea mantener.

La metodología de Markowitz ha sido perfeccionada y llamada Teoría Moderna de Portafolio (por sus siglas en inglés MPT).

Tiempo después, surgió el trabajo fundamental de Black-Scholes-Merton, cuyo modelo se convirtió en cimiento del estudio y desarrollo de muchos problemas en las matemáticas financieras. En los últimos años se han estudiado diferentes generalizaciones de este modelo clásico para explicar con mayor precisión la dinámica de los precios de los activos y así poder estructurar un portafolio que permita llevar al máximo las ganancias del inversionista.

En resumen, un concepto de gran importancia en finanzas, es el de maximizar la utilidad esperada de los portafolios de inversión, lo cual se traduce en optimizar nuestro portafolio y el éxito de éste, depende directamente de la capacidad de administrar el capital, donde claramente estará sujeto a varios factores que analizaremos en los siguientes capítulos de esta memoria.

Generalmente, en economía, un problema de optimización es presentado co-

mo una minimización de costos. Por ejemplo, la maximización de ingresos de una empresa mediante la minimización de sus costos de producción y a lo largo del tiempo, varios autores han tratado este problema. Tal como Z. Zhou y S. Grossman con el artículo *Optimal investment strategies for controlling drawdowns* [30], en donde se analiza el caso del inversionista que pretende no perder más de cierto porcentaje fijo del valor máximo de su portafolio. También *Risk Sensitive Control of finite state Markov Chain in discrete time, with portfolio management* [2] de T. Bielecki, D. Hernández y S. Pliska, que presentaron un modelo que permite optimizar la utilidad esperada a largo plazo de un portafolio de inversión sensible al riesgo.

El objetivo de este trabajo de tesis es encontrar una estrategia de inversión óptima para un problema de optimización de portafolio, donde el inversionista busca maximizar sus ganancias, considerando los riesgos exigidos en el desarrollo de éste y las pérdidas a lo largo de su trayectoria. Para lograr el objetivo es necesario comenzar con un modelo más sencillo, sin considerar pérdidas, ni cotas restrictivas.

Organizamos este trabajo de la siguiente manera. En el primer capítulo, presentaremos los preliminares necesarios para modelar los problemas anteriores. No obstante, durante el desarrollo de esta tesis iremos definiendo los conceptos y herramientas necesarias de la teoría de programación dinámica.

En el segundo capítulo, mostramos un modelo simple de optimización, el problema de portafolio de inversión para el caso sin restricciones en un horizonte finito, el cual se basará en encontrar una función de valor que nos proporcione la inversión óptima. Después expandiremos el resultado a tiempo continuo, el cual resolveremos a través de la tasa de crecimiento a largo plazo.

Luego, en el tercer capítulo, comenzaremos a agregar al modelo de mercado financiero ciertas restricciones que lo asemejan a un problema más real. Aquí introduciremos los conceptos de *cotas de referencia* y *caídas*, que no son más que restricciones para mantener cierto capital a través del tiempo y evitar pérdidas.

Esta inclusión en el modelo es necesaria debido a la existencia de un grupo especial de inversionistas que exige requisitos específicos. Su característica principal es que ellos no sólo están interesados en maximizar la utilidad del capital final de sus clientes, sino también en optimizar la trayectoria que el capital toma para llegar a su destino.

Consideraremos, por ejemplo, un cliente que elige entre dos fondos competitivos que ofertan rendimientos similares: asumiendo que las características de los otros fondos son idénticas (incluyendo el perfil de riesgo de la inversión), el cliente podría preferir que el fondo tenga las características de rendimiento *más agradables*, en las que *agradable* puede no sólo incluir la varianza de los rendimientos, sino criterios globales tal como las pérdidas.

Esencialmente este modelo se basa en el trabajo de Z. Zhou y S. Grossman [30], que fue presentado en los 90's, el cual emplea ampliamente la teoría de programación dinámica.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo iremos introduciendo los conceptos básicos y definiciones más importantes relacionados con las matemáticas financieras que serán empleados a lo largo de este trabajo de tesis. Recordemos que el objetivo principal es encontrar una solución al problema de inversión, que trata de maximizar la utilidad esperada del capital final encontrando la estrategia de mercado óptima, es importante definir y conocer los siguientes términos que pueden ser encontrados de manera más extensa en [11], [16], [17], [24].

1.1. Mercado financiero

Un mercado financiero, es un mecanismo que permite a los agentes económicos el intercambio de activos financieros, cuyas características son:

- **Liquidez.** El activo más líquido será el dinero. Luego, los diferentes tipos de depósitos, fondos públicos, obligaciones y para finalizar, los créditos comerciales.
- **Riesgo.** Está determinado por la solvencia que posee el emisor y las garantías que puede presentar para el acreedor.
- **Rentabilidad.** Es el rendimiento que obtiene el poseedor de un activo al aceptar el riesgo que implica la sesión temporal del dinero.

En este trabajo de tesis, se considerará un modelo de mercado financiero, en el cual se podrá invertir continuamente en $d + 1$ activos (bonos, créditos,

dinero, etc.) durante algún horizonte de tiempo T , donde $T \in (0, \infty)$. Estos activos evolucionan en el tiempo y asumiremos que sus precios están definidos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, equipado de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. La σ -álgebra \mathcal{F}_s se puede ver como la información disponible al tiempo s . Los precios de los activos en el tiempo se describen por las variables aleatorias S_t^i , $t \geq 0$, $i = 0, \dots, d$, las cuales son variables aleatorias medibles respecto a la σ -álgebra \mathcal{F}_t , para cada $t \geq 0$. Más aún, definimos el vector aleatorio de precios $\vec{S}_t = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)$, con valores dados en \mathbb{R}^{d+1} , para toda $t \geq 0$. El activo indizado por 0 es el activo libre de riesgo llamado *bono* y cuyo precio lo denotaremos por $B_t := S_t^0$. Este activo evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad B_0 = b_0 > 0.$$

Los activos indizados por $i = 1, \dots, d$ son llamados activos con riesgo y comúnmente se les conoce como *stocks*. La dinámica del precio S_t^i del i -ésimo activo al tiempo $t \geq 0$ sigue un movimiento Browniano geométrico dado de la siguiente forma

$$dS_t^i = S_t^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dZ_t^j \right], \quad S_0^i = s_i \in (0, \infty). \quad (1.1.1)$$

$$i = 1, \dots, d.$$

En este modelo, las fuentes de riesgo son modelados por componentes independientes de un movimiento Browniano d -dimensional $Z_t = (Z_t^1, Z_t^2, \dots, Z_t^d)'$, $t \geq 0$. Con esta interpretación, el coeficiente de volatilidad σ_t^{ij} de (1.1.1) modela la intensidad instantánea con la cual la j -ésima fuente de incertidumbre afecta el precio de i -ésimo stock al tiempo t . El movimiento Browniano Z es definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y denotaremos por $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ a la completación bajo \mathbb{P} de la filtración natural

$$\mathcal{F}_t^Z = \sigma(Z_s, 0 \leq s \leq t) \quad t \geq 0, \quad (1.1.2)$$

generada por Z .

El proceso de *tasa de interés* $\{r_t, t \geq 0\}$, el proceso vectorial de *tasa de apreciación* $\{\mu_t = (\mu_t^1, \dots, \mu_t^d)', t \geq 0\}$ y el proceso matricial de *volatilidades* $\{\sigma_t = (\sigma_t^{ij})_{d \times d}, t \geq 0\}$, son conocidos conjuntamente como los *coeficientes* del modelo de mercado. Asumiremos que estos coeficientes son progresivamente medibles con respecto a \mathbb{F} y satisfacen la condición

$$\int_0^T (|r_t| + \|\mu_t\| + \|\sigma_t\|^2) dt < \infty, \quad c.s. \quad (1.1.3)$$

con $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}$ la norma Euclidiana en \mathbb{R}^d .

Suponer que los coeficientes r_t, μ_t, σ_t son adaptados a \mathbb{F} , los hace esencialmente funcionales en la trayectoria del movimiento Browniano $\{Z_s, 0 \leq s \leq t\}$ hasta el tiempo t , para todo $t \geq 0$. Esta condición trae como consecuencia dos características deseables: excluir cualquier anticipación en el futuro y permitir la dependencia sobre el pasado de los precios.

1.2. Portafolios

Cuando hablamos de portafolios nos referimos a una selección de documentos que se cotizan en el mercado bursátil, \mathcal{M} , y en lo que una persona o empresa deciden colocar o invertir su dinero. Un portafolio está compuesto por una combinación de instrumentos de renta fija y/o renta variable y π_t^i representa la cantidad de dinero que se que invierte en cada uno de los activos disponibles $i = 1, \dots, d$.

El proceso $\pi := (\pi_t)_{t \geq 0}$ se supone adaptado a la filtración, es decir, $\{\mathcal{F}_t\}$ -medible. Esta hipótesis implica que las posiciones del portafolio en el tiempo $t \geq 0$, π_t^1, \dots, π_t^d son decididas con respecto a la información disponible en el tiempo t , ya que debe de ser realizada de una manera no anticipada, sin conocimiento de eventos futuros.

Si denotamos por $W_t^{w,\pi}$ al capital asociado al proceso π al tiempo $t \geq 0$, donde $W_0 = w$, entonces $W_t^{w,\pi} - \sum_{i=1}^d \pi_t^i$ es la cantidad invertida en el bono y así el *proceso de capital* $\{W_t^{w,\pi}, t \geq 0\}$, sigue la dinámica:

$$\begin{aligned} dW_t^{w,\pi} &= \sum_{i=1}^d \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(W_t^{w,\pi} - \sum_{i=1}^d \pi_t^i \right) \frac{dB_t}{B_t} \\ &= \sum_{i=1}^d \pi_t^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dZ_t^j \right] + \left(W_t^{w,\pi} - \sum_{i=1}^d \pi_t^i \right) r_t dt \\ &= r_t W_t^{w,\pi} dt + \pi_t' [(\mu_t - r_t \mathbf{1}_d) dt + \sigma_t dZ_t], \quad W_0 = w, \quad (1.2.1) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{1}_d$ es el vector de unos en \mathbb{R}^d . No es difícil ver que la solución de esta ecuación diferencial estocástica lineal con coeficientes aleatorios está dada por:

$$\gamma_t W_t^{w,\pi} = w + \int_0^t \gamma_s \pi_s' [\sigma_s dZ_s + (\mu_s - r_s \mathbf{1}_d) ds], \quad t \geq 0, \quad (1.2.2)$$

donde

$$\gamma_t := \frac{1}{B_t} = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \quad (1.2.3)$$

es el *factor de descuento* en \mathcal{M} . La interpretación financiera de (1.2.2) es que el proceso de capital descontado es la suma del capital inicial más las ganancias descontadas de haber invertido en los activos con riesgo al tiempo t .

A continuación se presentan las definiciones precisas de los procesos mencionados anteriormente.

Definición 1.1. Un proceso $\pi_t = \{(\pi_t^1, \dots, \pi_t^d)', t \geq 0\}$, a veces denotado como π , con valores en \mathbb{R}^d , que es \mathbb{F} -progresivamente medible y que satisface

$$\int_0^T \|\pi'_s \sigma_s\|^2 ds + \int_0^T |\pi'_s(\mu_s - r_s \mathbf{1}_d)| ds < \infty \text{ c.s.}$$

es llamado *estrategia de portafolio* o *estrategia de inversión*.

Definición 1.2. Para una $w \geq 0$ dada y una estrategia de inversión π , el proceso $\{W_t^{w,\pi}, t \geq 0\}$ como en (1.2.1) es llamado *proceso de capital* correspondiente al capital inicial w y estrategia de portafolio π y denotamos por $\{\bar{W}_t^{w,\pi} := \gamma_t W_t^{w,\pi}, t \geq 0\}$ al *proceso de capital descontado*.

Notemos que estamos permitiendo que tanto π_t^i como $W_t^{w,\pi} - \sum_{i=1}^d \pi_t^i$, para $i = 1, \dots, d$ tomen valores negativos, es decir, estamos permitiendo ventas en corto de los activos y préstamos a una tasa de interés $r(\cdot)$, por lo que necesitamos imponer alguna restricción sobre las estrategias de portafolio que se considerarán admisibles.

Definición 1.3. Una estrategia de portafolio π se dice que es *dominada* si el proceso asociado a las ganancias descontadas

$$G_t^\pi := \int_0^t \gamma_s \pi'_s [\sigma_s dZ_s + (\mu_s - r_s \mathbf{1}_d) ds], t \geq 0$$

está acotado inferiormente c.s. por alguna constante real, esto es, si

$$\mathbb{P}[G_t^\pi \geq q_\pi, \forall t \geq 0] = 1, \text{ para alguna } q_\pi \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.4. Llamaremos *admisible* a la estrategia de portafolio si ésta es dominada.

Además denotaremos como \mathcal{A} al conjunto de todas las estrategias admisibles. Es importante notar que \mathcal{A} no depende del capital inicial w .

1.2.1. Tipos de portafolios

La mayor ventaja que ofrecen los portafolios de inversión es que permiten diversificar el capital, repartiendo el riesgo al combinar de entre una amplia gama de activos de distinta naturaleza (acciones, depósitos a plazo, efectivo, monedas internacionales, bonos, bienes raíces), lo que permite disminuir el impacto de los distintos riesgos financieros a los cuales se encuentran expuestos los activos que lo componen. Partiendo de esto podemos clasificar los portafolios de inversión de la siguiente forma:

- De renta fija: integrados únicamente por activos de renta fija.
- De renta variable: se integran por instrumentos de inversión en renta variable.
- Corporativo: este portafolio es integrado solamente por acciones.
- Patrimonial: se integra por valores de renta fija y variable así como de acciones, es decir, es una combinación de los anteriores.
- De instrumentos financieros derivados: lo integran instrumentos como swaps, opciones y futuros.
- Mixtos: incluyen activos de cualquier tipo.

1.3. Arbitraje

Intuitivamente, una oportunidad de arbitraje es una operación con la que se obtiene una ganancia segura, por ejemplo, al comprar acciones y vender simultáneamente un mismo contrato, pero en diferentes mercados, obteniendo ganancias por la diferencia de precios. De manera formal diremos que:

Definición 1.5. Una *oportunidad de arbitraje* es un proceso de portafolio π dominado que satisface

$$\mathbb{P}(G_T^\pi \geq 0) = 1, \mathbb{P}(G_T^\pi > 0) > 0.$$

Es decir, comenzamos con capital inicial cero en el tiempo $t = 0$ y empleando la estrategia $\pi(\cdot)$, finalizamos al tiempo T con capital $W_T = W^{0,\pi}$ sin ninguna exposición al riesgo ($W_T \geq 0, c.s.$) y probabilidad positiva de ganar ($\mathbb{P}(W_T > 0) > 0$).

Definición 1.6. Decimos que el mercado \mathcal{M} es *libre de arbitraje* si no existen estrategias que satisfagan lo anterior.

La ausencia de oportunidades de arbitraje es parte de las condiciones de equilibrio general. Mientras que su existencia se debe a ineficiencias en el mercado, en el sentido de que los precios de los activos no fueron dados de manera razonable. Lo ideal es que en el mercado no existan oportunidades de arbitraje, para ello es necesario imponer algunas restricciones sobre el modelo de mercado.

Teorema 1.1. (i) Si \mathcal{M} es libre de arbitraje, entonces existe un proceso $\theta : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ progresivamente medible con respecto a \mathbb{F} , llamado proceso de precio de mercado al riesgo, tal que

$$\theta_t = \frac{\mu_t - r_t \mathbf{1}_b}{\sigma_t}, \quad t \geq 0. \quad (1.3.1)$$

(ii) Recíprocamente, si el proceso $\theta(\cdot)$ existe y además de (1.3.1) satisface

$$\int_0^T \|\theta_s\|^2 ds < \infty, \quad c.s. \quad (1.3.2)$$

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \int_0^T \theta'_s dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_s\|^2 ds \right\} \right] = 1, \quad (1.3.3)$$

entonces \mathcal{M} es libre de arbitraje.

Este resultado es una manera de verificar si en el modelo de mercado existen oportunidades de arbitraje, aunque es importante mencionar que del Teorema de Novikov (ver Karatzas y Shreve [16]) las condiciones (1.3.2) y (1.3.3) se satisfacen si $\mathbb{E}[\exp\{\frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_s\|^2 ds\}] < \infty$. Es decir, si θ_t satisface la condición de Novikov, entonces el mercado no admite arbitraje. En particular, esto sucede si el proceso $\theta(\cdot)$ es uniformemente acotado en (t, ω) .

Definición 1.7. Un modelo de mercado \mathcal{M} , para el cual existe un proceso $\theta : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, que es \mathbb{F} -progresivamente medible y que satisface (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), es llamado *estándar*.

1.4. Derivados

Los derivados financieros son actualmente uno de los instrumentos más importantes en el sistema financiero mundial. Surgen con la finalidad de que

las empresas y los inversionistas puedan cubrirse y anticiparse ante los movimientos del mercado. Pueden ser usados para cobertura, especulación y arbitraje. Algunos derivados son comercializados en intercambios, otros son negociados por instituciones financieras, agentes de fondos y corporaciones en el mercado *Over The Counter*.

Un derivado financiero es un contrato financiero cuyo valor depende del valor de otro activo, el cual es llamado activo subyacente y estos pueden ser divisas, renta fija, acciones, bonos, índices bursátiles, etc. Cada derivado financiero tiene características que lo diferencian de otros. Sin embargo, podemos mencionar algunas características comunes:

- El valor del derivado subyacente varía según el valor del activo subyacente.
- Los contratos no requieren una inversión inicial o ésta es muy pequeña en comparación de otros productos financieros que responden de manera similar a cambios en el mercado del activo subyacente y aunque esto permite mayores ganancias, también mayores pérdidas.
- La liquidación del contrato se realiza en una fecha futura.
- Pueden ser objeto de comercialización en los mercados financieros.

1.4.1. Tipos de derivados

Los derivados financieros se pueden clasificar en diferentes tipos según diferentes criterios tales como el tipo de contrato, el activo subyacente, finalidad, lugar de negociación o complejidad del producto.

En función del tipo de contrato. Por ejemplo, permutas financieras (swaps), contratos de futuros; ya sean negociados en un mercado financiero o no, las opciones y contratos por diferencia por mencionar algunos.

En función de la complejidad del contrato. Aquí podemos dividir en dos tipos, las *opciones vainilla* que son los convencionales y los conocidos como *opciones exóticas*.

En función del lugar de negociación. Los derivados se pueden negociar en mercados organizados (M.M.O.O.) o mercados *Over The Counter* (O.T.C.). En el primero, los contratos financieros son productos estandarizados, es decir, todos los participantes en el mercado acceden con las mismas

condiciones y mismos precios. Mientras que en el segundo los contratos se realizan según los acuerdos a los que llegan ambas partes.

En función del activo subyacente. Dada la naturaleza del activo subyacente, los derivados se pueden clasificar en financieros o no financieros. Los financieros es donde el activo subyacente es un producto financiero en sí mismo. Se incluyen derivados sobre acciones, divisas, tipos de interés, bonos, etc. Y los no financieros son aquellos cuyos activos subyacentes son generalmente productos y bienes como derivados sobre materias y otros productos básicos (metales, cereales, energía, etc.).

Según la finalidad. Dependiendo de la finalidad al que se negocie un derivado financiero, éste podrá ser especulativo o de cobertura.

Cobertura. Los utiliza la persona o ente económico que necesita protegerse de movimientos en el precio de un activo.

Especulación. Son utilizados por la persona o ente económico que busca aprovechar las fluctuaciones de los precios de activos para generar una ganancia. En este caso no busca mitigar riesgos, sino incrementar el riesgo al tratar de adelantarse a los movimientos del mercado con la finalidad de generar utilidades.

En los derivados de especulación se pueden tomar posiciones de tal manera que, con una pequeña cantidad de recursos invertidos, se pueden llegar a tener grandes ganancias si el precio del activo del derivado se mueve de acuerdo con lo que se está esperando. Sin embargo, de la misma manera, con una pequeña cantidad de recursos invertidos se pueden perder grandes cantidades de dinero si los precios se mueven en sentido contrario.

Para disminuir este riesgo de pérdida, se recurre a una de las reglas básicas de las inversiones: diversificar, es decir, si en lugar de hacer un derivado hacemos 10 con posiciones encontradas, el riesgo de pérdida disminuirá y las oportunidades de ganancia aumentarán.

Actualmente todos nos vemos afectados por los impactos que generan los movimientos en el tipo de cambio, tasas de interés y precio de las acciones de empresas. Por eso, al no tener derivados financieros dentro de nuestra estrategia de inversión, estaremos desaprovechando grandes oportunidades en los mercados.

Gracias a los avances en inversiones, hoy es posible incorporar derivados diversificados a nuestra estrategia y maximizar rendimientos, principalmente

en periodos de alta volatilidad en los mercados.

A continuación se presentan los derivados más usuales.

1.4.2. Opciones

Una opción es un instrumento financiero derivado que se establece en un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender bienes o valores. Hay dos tipos básicos de opciones; una opción de compra, usualmente llamada *call*, da a su propietario el derecho a comprar un activo en una fecha determinado por un cierto precio, mientras que una opción de venta, *put*, da al propietario el derecho a vender un activo en una fecha dada a un precio determinado. El activo sobre el que se instrumenta la opción se denomina el activo subyacente. El precio de compra o de venta garantizado en la opción es el precio de ejercicio (strike en inglés).

1.4.3. Opciones Vainilla

Las opciones tipo Vainilla, son las opciones clásicas y son un derecho a comprar o vender un activo a un precio y plazo determinados, esperando que este precio de ejercicio nos sea más favorable que la cotización de mercado. En caso de ocurrir esto, el producto se liquidará por diferencias. En función de su forma de ser ejercidas podemos diferenciar entre Europeas y Americanas. El método mayormente empleado para valuar opciones Europeas es el de Black-Scholes. Para las opciones Americanas, que rara vez son ejercidas antes de su fecha de ejercicio, se puede emplear el mismo método, suponiendo que su comportamiento es similar. El trabajo de Myron Scholes y Fisher Black [3], fue mejorado posteriormente por Robert C. Merton [20].

Opciones Europeas

Las opciones Europeas son las que solamente pueden ser ejercidas en una fecha determinada, llamada fecha de ejercicio.

Opciones Americanas

Las opciones Americanas son las que pueden ser ejercidas a lo largo de su vida hasta la fecha de ejercicio.

1.4.4. Opciones Exóticas

Las opciones Exóticas son opciones más complejas, dependen de toda la trayectoria y/o de la fecha de expiración. Las opciones Exóticas más usuales

encontramos a las opciones lookback y a las opciones Asiáticas. En ambos casos su solución está basada ecuaciones diferenciales parciales estándar. La primer opción tiene una fórmula de precio explícita, la cual se rige en el principio de reflexión para movimiento Browniano, mientras que la segunda recurre a métodos iterativos (ver J. Hull [15]).

Opciones Asiáticas

Una opción Asiática, es una opción cuyo payoff incluye un promedio de tiempo de los precios subyacentes. El promedio puede ser sobre el periodo del tiempo entre el inicio y expiración o sobre algún periodo de tiempo que empiece después que la iniciación de la opción y al finalizar la expiración de la opción.

Opcion Lookback

Una opción cuyo payoff es calculado en función del máximo alcanzado por el activo subyacente en un cierto periodo es llamado Opción Lookback. El payoff de esta opción es la diferencia entre el precio máximo del activo sobre el tiempo entre inicio y fecha de maduración y el precio del activo a la expiración.

1.5. El modelo de Black-Scholes-Merton

El modelo de Black-Scholes-Merton consiste en un mercado con dos activos. Un activo libre de riesgo, B_t , que evoluciona de tal manera que

$$dB_t = rB_t dt, \quad t \geq 0,$$

y un activo con riesgo, cuyos precios, $(S_t)_{t \geq 0}$, siguen la dinámica de un movimiento Browniano geométrico, es decir,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t, \quad t \geq 0,$$

donde Z_t un movimiento Browniano. Por otra parte, del Ejemplo 5.5 de F. Klebaner [18] llegamos a que aplicando la fórmula de Itô a $f(x) = \ln x$ podemos encontrar la solución a la dinámica de precios, que está dada por

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma Z_t \right\}, \quad (1.5.1)$$

y por tanto $\log S_t$ es un movimiento Browniano, no necesariamente estándar. Por las propiedades del movimiento Browniano tenemos que:

- S_t tiene trayectorias continuas.
- Los incrementos relativos, $\frac{S_t - S_u}{S_u}$ son independientes de $\sigma(S_k, 0 \leq k \leq u)$, es decir,

$$\frac{S_t - S_u}{S_u} = \frac{S_t}{S_u} - 1 \text{ y } \frac{S_t}{S_u} = \exp \left\{ \mu(t - u) + \sigma(Z_t - Z_u) \right\},$$

que es independiente de $\sigma(Z_k, 0 \leq k \leq u) = \sigma(S_k, 0 \leq k \leq u)$.

- Los incrementos relativos son estacionarios

$$\frac{S_t - S_u}{S_u} \sim \frac{S_{t-u} - S_0}{S_0}.$$

Por otra parte, consideremos a $\{W_t^{w,\pi}, t \geq 0\}$ como el proceso de capital del portafolio, el cual invierte en el mercado de dinero que paga una tasa de interés constante $r > 0$.

De (1.2.1) sabemos que a lo largo del tiempo, el inversionista mantiene ciertas unidades de un activo que pueden ser aleatorias, pero siempre adaptada a la filtración asociada con el movimiento Browniano $Z_t, t \geq 0$ y que el diferencial $dW_t^{w,\pi}$ depende de la ganancia de su posición en el mercado, la cual está dada por $\pi_t \frac{dS_t}{S_t}$ y de la ganancia por invertir en el activo libre de riesgo que es $(W_t^{w,\pi} - \pi_t) \frac{dB_t}{B_t}$, es decir:

$$\begin{aligned} dW_t^{w,\pi} &= \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (W_t^{w,\pi} - \pi_t) \frac{dB_t}{B_t} \\ &= \mu \pi_t dt + \sigma \pi_t dZ_t + r(W_t^{w,\pi} - \pi_t) dt \\ &= rW_t^{w,\pi} dt + \pi_t(\mu - r) dt + \sigma \pi_t dZ_t, \end{aligned}$$

de donde podemos interpretar lo siguiente:

- El término $rW_t^{w,\pi} dt$ representa la tasa de rendimiento subyacente promedio, r , sobre el portafolio.
- El término $(\mu - r) \pi_t dt$, es la prima de riesgo $\mu - r$ por invertir en los activos.
- El término $\sigma \pi_t dZ_t$, representa la volatilidad proporcional al tamaño de la inversión del activo.

El modelo de BSM es un modelo de mercado completo, pero bajo ciertas condiciones éste puede dejar de serlo. Esto se prueba en Ejemplo 1.2.

1.6. Cambio de medida

Una herramienta fundamental en la valuación teórica de muchos y diversos productos derivados es el Teorema de Girsanov¹. El cual construye una medida de probabilidad que permite transformar un movimiento Browniano con tendencia en un movimiento Browniano sin tendencia, definido en un espacio de probabilidad equivalente. Todo esto se resume en llevar el modelo con riesgo a un ambiente neutral al riesgo.

Teorema 1.2. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y Z una variable aleatoria no negativa c.s., con la propiedad de que $\mathbb{E}(Z) = 1$, entonces para $A \in \mathcal{F}$ se define

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

$\tilde{\mathbb{P}}$ es una nueva medida de probabilidad absolutamente continua con respecto a \mathbb{P} . Además, si X es una variable aleatoria no negativa, entonces

$$\tilde{\mathbb{E}}(X) = \mathbb{E}(XZ).$$

Si Z es estrictamente positiva c.s., entonces

$$\mathbb{E}(Y) = \tilde{\mathbb{E}}\left(\frac{Y}{Z}\right).$$

Teorema 1.3. Girsanov (1-dimensional).

Sea $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano estándar definido en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $(\theta)_{t \geq 0}$ un proceso adaptado a la filtración generada por W , $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, como en (1.3.1) tal que $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ c.s. Definamos

$$Z_t = \exp \left\{ - \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right\},$$

una martingala, entonces existe una medida de probabilidad

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

tal que $\tilde{\mathbb{P}} := \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Z_t) = 1$ y

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds.$$

es un \mathcal{F}_t -movimiento Browniano estándar.

¹Ver S. Shreve [26]

Para ejemplificar estos términos, consideremos la dinámica de precios dada por la ecuación (1.1.1) para $d = 1$, es decir

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \\ &= r S_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dZ_t \right). \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

donde el rendimiento medio esperado (μ) y la volatilidad instantánea (σ) son constantes. Si definimos a $\tilde{Z}_t = \theta t + Z_t$, donde $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ es el precio de mercado al riesgo. Entonces, podemos reescribir la ecuación (1.6.1) como

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{Z}_t. \quad (1.6.2)$$

Observemos que el coeficiente de tendencia μ se modificó sin alterar la varianza. Por ello, podemos concluir que el teorema de Girsanov proporciona una medida de probabilidad definida en el espacio muestral original y bajo el cual, \tilde{Z}_t es un movimiento Browniano. La nueva medida de probabilidad se dice que es neutral a riesgo, es decir, si dos agentes tienen diferentes expectativas sobre el rendimiento promedio de un activo, entonces pueden omitirlas en sus decisiones de inversión siempre y cuando la volatilidad del activo en cuestión se mantenga constante.

1.7. Replicación financiera

Encontrar un portafolio que está compuesto de diversos activos del mercado, de tal forma que el valor de dicho portafolio iguale el valor de algún reclamo contingente a lo largo de cierto tiempo es lo que se conoce como réplica o cobertura financiera. Para ejemplos y resultados más extensos ver [27].

Definición 1.8. Un portafolio de inversión es un *portafolio replicante* si está conformado por una posición de dinero en el banco y acciones tales que el valor final del portafolio es igual al final del producto derivado bajo cualquier estado de la naturaleza, es decir, si el portafolio replica al producto derivado.

1.8. Completez de mercado

Cuando hablamos de mercados completos nos referimos a la capacidad de tal mercado de replicar a través de una estrategia autofinanciable, cualquiera de los activos que lo componen. En términos matemáticos se refiere a la existencia y unicidad de una muy particular medida martingala equivalente.

Asumiremos que estamos en un modelo de mercado estándar \mathcal{M} , esto nos permite definir el *kernel de precios*, el cual es un proceso en término de la prima de mercado al riesgo, $\{\kappa_t, t \geq 0\}$ definido de la siguiente manera,

$$\kappa_t := \exp \left\{ - \int_0^t [r_s + \frac{1}{2} \|\theta_s\|^2] ds - \int_0^t \theta_s dZ_s \right\}. \quad (1.8.1)$$

Además, definiendo $\kappa := \kappa_T$, tenemos que $0 < \mathbb{E}[\kappa] < \infty$.

Definición 1.9. Sea $Y : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ una variable aleatoria \mathcal{F}_T -medible que satisface:

$$\mathbb{E}[\kappa Y] < \infty \quad (1.8.2)$$

se llama *activo contingente*.

Un activo contingente Y es *replicable*, si existe una estrategia π con

$$W_T^{w, \pi} = Y, \quad c.s. \quad (1.8.3)$$

Definición 1.10. Un modelo de mercado es llamado *completo* si cualquier activo contingente es replicable; de otro modo es llamado *incompleto*.

Para los modelos de mercado estándar, \mathcal{M} , hay un criterio muy simple de decidir cuando un mercado es completo, cuya prueba se encuentra en la página 8 de [17].

Teorema 1.4. *Un modelo de mercado estándar \mathcal{M} es completo si y sólo si la matriz σ_t es invertible c.s.*

Analicemos un mercado que admite más de una probabilidad neutral al riesgo y que por tanto, es incompleto.

Ejemplo 1.1. El modelo trinomial es un modelo de mercado incompleto. En efecto, supongamos que el modelo paga $1 + r$ al final del periodo y tiene un activo S , entonces al tiempo final puede tomar uno de los tres valores posibles: $S_u = uS$ con probabilidad p_u , $S_m = mS$ con probabilidad p_m o $S_d = dS$ con probabilidad p_d con $d < m < u$. Sabemos que bajo la valoración neutral al riesgo, el precio de cualquier activo puede escribirse como:

$$S = \frac{1}{1+r} [up_u^* + mp_m^* + dp_d^*].$$

Por lo tanto, para que (p_u^*, p_m^*, p_d^*) sean probabilidades neutrales al riesgo deben satisfacer, además de ser positivas, que:

$$\begin{cases} (1+r) = up_u^* + mp_m^* + dp_d^*, \\ 1 = p_u^* + p_m^* + p_d^*. \end{cases}$$

Las expresiones anteriores forman un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, de forma que o bien existen infinitas soluciones que satisfacen ambas ecuaciones o bien no tiene solución. Por otra parte, para comprobar que este mercado no es completo, usemos el hecho de que un activo derivado cualquiera con pagos X_u , X_m y X_d en los tres estados respectivamente puede replicarse mediante una cartera compuesta de Δ títulos del subyacente y β invertidos en el bono libre de riesgo si y sólo si Δ y β resuelven el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \beta(1+r) + \Delta S_u = X_u, \\ \beta(1+r) + \Delta S_m = X_m, \\ \beta(1+r) + \Delta S_d = X_d. \end{cases}$$

Notemos que tenemos tres ecuaciones y sólo dos incógnitas, por lo tanto, el sistema está sobre determinado y no tendrá solución salvo que:

$$\frac{X_u - X_m}{S_u - S_m} = \frac{X_m - X_d}{S_m - S_d}.$$

Pero esto no tiene por qué suceder para todos los productos derivados posibles que podamos diseñar. Por lo tanto, no se puede replicar el portafolio, es decir, el modelo es un modelo de mercado incompleto.

Otro ejemplo común de mercados completos es el modelo de Black Scholes.

Ejemplo 1.2. El modelo de Black-Scholes-Merton es un modelo de mercado completo: Supongamos que tenemos un mercado financiero con dos posibilidades de inversión:

Un bono que sigue la dinámica

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt, \tag{1.8.4}$$

con tasa de interés fijo $r \geq 0$.

Un activo con riesgo aleatorio, cuyo precio bajo la medida libre de riesgo es

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dZ_t \\ &= rdt + \sigma d\left(Z_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t\right) \\ &= rdt + \sigma d\tilde{Z}_t \text{ con } S_0 = x, \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

donde μ es el retorno medio y σ es la volatilidad, \tilde{Z} es un movimiento Browniano bajo la medida libre de riesgo.

Consideremos una opción Europea que paga $(S_t - K)^+$ al tiempo T . Sea $\pi = (a_t, b_t)$ una estrategia de inversión, donde a_t representa la cantidad de bonos y b_t de acciones de un agente en cada instante t , entonces si el valor del portafolio asociado a la estrategia π al tiempo t es:

$$W_t^{w,\pi} = a_t B_t + b_t S_t$$

u así se tiene que

$$W_T^{w,\pi} = a_T B_T + b_T S_T.$$

Para probar que el modelo es completo, Black y Scholes [3] propusieron buscar una función $g_t(x)$ tal que, $W_t^{w,\pi} = g_t(S_t)$ y verificar las siguientes propiedades:

Que el modelo sea *autofinanciable*, es decir, la variación del capital es producto únicamente de las variaciones de los precios de los activos B y S , esto es

$$dW_t^{w,\pi} = a_t dB_t + b_t dS_t. \quad (1.8.6)$$

Que *replique* la opción, es decir, en el momento de ejecución de la opción de portafolio sea igual en capital:

$$W_T^{w,\pi} = f(S_T), \quad (1.8.7)$$

lo cual se cumple si $g_T(S) = f(S)$.

Para encontrar el portafolio replicante necesitamos encontrar g tal que

$$W_t^{w,\pi} = a_t B_t + b_t S_t = g_t(S_t).$$

Notemos que g es función de S_t y t , entonces aplicando la fórmula de Itô obtenemos que:

$$dg_t = \left(r S_t \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial g}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial g}{\partial s} S_t \sigma d\tilde{Z}_t. \quad (1.8.8)$$

Por otro lado, queremos que $W_t^{w,\pi}$ sea autofinanciable. Entonces, sustituyendo (1.8.4)-(1.8.5) tenemos

$$\begin{aligned} dW_t^{w,\pi} &= a_t dB_t + b_t dS_t \\ &= r(a_t B_t + b_t S_t)dt + b_t \sigma S_t d\tilde{Z}_t \\ &= r g_t(S_t)dt + b_t \sigma S_t d\tilde{Z}_t. \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

Como buscamos que $W_t^{w,\pi} = g_t$, entonces igualamos los coeficientes dt de (1.8.8) y (1.8.9) tenemos:

$$rS_t \frac{\partial g_t}{\partial S}(S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 g_t}{\partial S^2}(S_t) + \frac{\partial g_t}{\partial t}(S_t) = r g_t(S_t).$$

Para poder replicar, necesitamos $g_T(S_T) = f(S_T)$. Así,

$$\begin{cases} rS_t \frac{\partial g_t}{\partial S}(S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 g_t}{\partial S^2}(S_t) + \frac{\partial g_t}{\partial t}(S_t) = r g_t(S_t), \\ g_T(S_T) = f(S_T), \end{cases}$$

es la ecuación de Black-Scholes-Merton. Una ecuación diferencial en derivadas parciales, donde la condición de réplica es la condición inicial. Luego, igualando el coeficiente $d\tilde{Z}_t$ obtenemos:

$$b_t = \frac{\partial g_t}{\partial S}(S_t), \tag{1.8.10}$$

lo cual indica el número de acciones necesarias para replicar la opción. Por lo tanto, el modelo es completo bajo condiciones de replica (1.8.10) y autofinanciamiento.

Adicionalmente, la solución² para tal opción está dada de la siguiente forma:

$$g_t(s) = sN(d_+(s, t)) - e^{-rT}KN(d_-(s, t)),$$

con

$$d_+(s, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln \frac{se^{r(T-t)}}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right),$$

$$d_-(s, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln \frac{se^{r(T-t)}}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right),$$

entonces, el valor de la opción que corresponde a $t = 0$ es

$$V_0(S_0) = S_0N(d_+) - e^{-rT}KN(d_-),$$

aquí

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln \frac{S_0e^{r(T)}}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2T \right).$$

²Ver Hull [15]

En los mercados completos, los precios de las reclamaciones contingentes están determinados exclusivamente por argumentos de replicación, pero en mercados incompletos entran factores subjetivos tales como expectativas de mercado y preferencias de riesgo. Esto se manifiesta en contratos de seguros, derivados de crédito, derivados del tiempo, contratos de energía, etc. Los flujos de efectivo a menudo no tienen nada que ver con los valores negociados en forma líquida. Por otra parte, en mercados incompletos, hay dos nociones distintas del *precio*:

- Es la menor cantidad de efectivo que permita cubrir una reclamación a un nivel aceptable de riesgo.
- Es la menor cantidad de dinero en efectivo que uno podría vender una reclamación sin empeorar su perfil de riesgo-retorno.

1.9. Función de utilidad

La utilidad es un concepto subjetivo ya que no es posible medirla, pero puede simularse utilizando funciones de utilidad, que relacionan la "cantidad" de utilidad con la cantidad consumida de ciertos bienes o servicios. En otras palabras, una función de utilidad asigna valores numéricos a cada cantidad de acciones invertidas. Claramente, un valor más elevado de la función de utilidad es preferido a un valor inferior, por lo que se le pide a la función que sea monótona creciente. Otra propiedad deseable es la aversión al riesgo, la cual nos indica que se desea la cuantía cierta a la perspectiva aleatoria. Esto da hincapié a representar a la función de utilidad de la siguiente manera:

$$U(\mu) = \int u d\mu, \quad (1.9.1)$$

donde U es la función real valuada y μ es la distribución de la posición financiera. Por lo tanto, podemos definir a la función de utilidad de la siguiente manera:

Definición 1.11. Una función $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *función de utilidad* si es continua en \mathbb{R} , estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

Observación 1.1. Partiendo de la representación, notemos que la función es monótona si y sólo si u es estrictamente creciente y tiene aversión al riesgo si y sólo si es estrictamente cóncava.

1.10. Caídas

Cuando de encontrar la estrategia de mercado óptima de inversión se trata, se debe considerar no sólo lo que el sistema gana históricamente, sino también lo que ha perdido. Las *caídas* (drawdown en inglés) miden eso, el retroceso actual en la curva de resultados respecto al máximo anterior de tal curva, es decir, es una forma de medir el riesgo de nuestra estrategia de inversión. Este término influye directamente en el capital mínimo que hemos de invertir, por tanto, debemos considerar las distintas caídas de nuestro sistema, ya que eventualmente los portafolios de inversión atraviesan por una racha de pérdidas y es importante tenerlas en cuenta.

Definición 1.12. Sea $W = (W_t^{w,\pi}, t \geq 0)$ el proceso de capital, asociado a una estrategia admisible, π . Entonces definimos la *caída*, al tiempo T como

$$D_T = \max \left\{ 0, \max_{t \in (0, T)} \{W_t^{w,\pi} - W_T^{w,\pi}\} \right\}. \quad (1.10.1)$$

y la *caída máxima* al tiempo T como

$$MD_T = \max_{\tau \in (0, T)} \left[0, \max_{t \in (0, \tau)} \{W_t^{w,\pi} - W_\tau^{w,\pi}\} \right]. \quad (1.10.2)$$

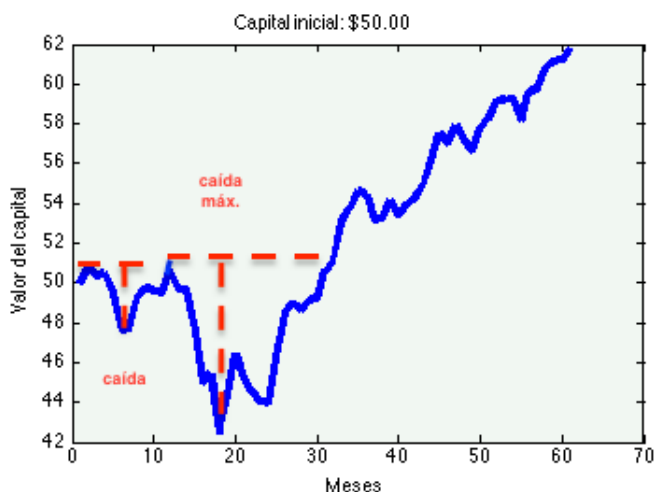


Figura 1.1: Gráfica de una caída y una caída máxima.

Con el propósito de identificar de manera adecuada los conceptos de *caída* y *caída máxima*, mostramos un ejemplo gráfico. La Figura 1.1, nos indica que el valor del capital fue de \$50.84 en el segundo mes y esta cantidad se

convierte en el primer máximo valor que alcanza su capital. Notemos que, por el quinto mes ocurrió una caída (el valor de su capital cayó hasta \$47.68), de la que sale al mes 12 cuando el valor del capital alcanza los \$51.47, pero justo por el mes 18, el valor del capital se redujo a \$42.41, es decir, se presentó una caída del 16.58 % (aprox. \$8.43) y ésta se convierte en la *caída máxima*.

En otras palabras, una *caída* es una pérdida del capital, mientras que una *caída máxima* viene a ser la peor racha de pérdidas ocurridas en todo el periodo de operación. Es importante notar que, para salir de una caída se debe recuperar el nivel del último máximo del capital. Con lo cual, se tienen dos posibles escenarios: alcanzamos un nuevo máximo del capital o estamos pasando por una caída.

1.11. Cota de referencia

Contar con una herramienta que permita comparar y evaluar el desempeño del portafolio de inversión es una ventaja en el sector financiero y éste es precisamente el propósito de una cota de referencia. Por lo tanto, podemos decir que:

Definición 1.13. Una *cota de referencia* (benchmark en inglés) es un indicador financiero que sirve como referencia para comparar el rendimiento de las distintas opciones de inversión.

Podemos interpretarlo como una especie de corte transversal de algún activo, que se construye de tal manera que sirva como guía general para tomar decisiones en el conjunto del modelo de mercado, y que frecuentemente es utilizado como elemento comparativo para medir la actuación de un inversionista.

En el Capítulo 2 presentamos un modelo de mercado sin restricciones. Como el propósito del análisis financiero es elegir la estrategia de mercado que nos permita obtener ganancias, consideramos sólo la restricción que nos garantiza que el modelo no caerá en *bancarrota*, es decir, debemos garantizar que el portafolio es mayor o igual a cero en cualquier tiempo t .

CAPÍTULO 2

Estrategia de inversión óptima sin restricciones

En este capítulo presentamos un modelo simple de tasa óptima de crecimiento para portafolios, es decir, un modelo sin restricciones. La única condición que se considera es que el capital sea no negativo para todo tiempo t , la cual representa la condición *sin bancarrota* y donde podemos encontrar una estrategia de inversión óptima explícita. Este es un caso particular del problema que fue inicialmente estudiado por Merton [20], [21] y es conocido bajo el nombre de *Merton terminal wealth problem*. El problema consiste en escoger la mejor inversión sobre un número de activos bajo un contexto de incertidumbre, de tal manera que esta inversión permita maximizar el rendimiento del capital de un agente en un horizonte finito o infinito de tiempo.

2.1. Modelo del tipo Merton simple

Se considera un agente, que puede ser una persona o una empresa, que posee al tiempo t una cierta cantidad de capital W_t dividida en acciones que compra o vende en la bolsa y en una cuenta en el banco B_t , durante un intervalo de tiempo $[0, T]$, donde T puede ser finito o infinito.

El agente pretende optimizar el portafolio, es decir, elegir la mejor combinación de acciones y dinero en el banco de tal manera que le permita maximizar su capital en el intervalo de tiempo considerado. El problema que enfrenta es la maximización de su capital sobre $[0, T]$ para lo cual deberá definir decisiones sobre éste. En este contexto, los controles son las cantidades que modifican el valor del capital, es decir, las proporciones entre las acciones y la cuenta en el banco. El agente debe de estudiar la evolución en el tiempo

de tales controles.

Por otra parte, puesto que se trabaja con cantidades cuyo valor es determinado solamente cuando la configuración del mundo no es conocida en el futuro, de manera natural emerge un modelo aleatorio.

Para el planteamiento de un problema de control óptimo debemos considerar los siguientes términos:

- **Estado del sistema.** Debemos considerar un sistema dinámico, es decir, que evoluciona con el tiempo, que es caracterizado completamente por su estado W en todo instante. Analizaremos el problema a tiempo continuo, comenzando con el caso en el horizonte finito y concluiremos con el análisis del problema en horizonte infinito. En este trabajo supondremos que el capital W varía continuamente y de manera aleatoria.

El número de variables de estado es considerado finito, más aún, en este caso en particular será igual a uno, ya que el capital toma valores en el conjunto de los números reales.

Denotaremos por $W_t^{w,\pi}(\omega)$ el estado del sistema en el instante $t \geq 0$ bajo el escenario $\omega \in \Omega$.

- **Decisión.** La dinámica $W_t^{w,\pi}$ del estado del sistema es influenciada por una decisión π_t que se modelará como un proceso cuyo valor puede ser decidido en todo instante t , según la información disponible en ese instante, en otras palabras, es un proceso adaptado a alguna filtración y toma sus valores en un espacio de control.
- **Criterio de costo.** Para representar el comportamiento del agente usualmente son utilizados dos criterios: el criterio de utilidad esperada y el criterio de media-varianza, tal como es el modelo de Markowitz [19]. Nosotros emplearemos en este trabajo el primer criterio.

Por otra parte, también consideraremos una función de utilidad del tipo de aversión al riesgo absoluto hiperbólico (HARA por sus siglas en inglés), de la forma

$$U(W) = \frac{W^{1-A}}{1-A}, \text{ con parámetro } 1 > A > 0. \quad (2.1.1)$$

Esto resulta vital para el desarrollo de este problema, ya que el método que emplearemos consiste en proponer una función que satisfaga ciertas condiciones y que esté en términos de (2.1.1).

Introduciremos la *función de valor* para que con la ayuda de los teoremas de verificación, probemos que ésta es una solución óptima para el problema de portafolio. Comenzaremos el análisis para el caso de horizonte finito y aunque para el caso de horizonte infinito genera resultados análogos, lo analizaremos a detalle en la Sección 2.3 .

2.2. Horizonte finito

El objetivo de esta sección es que el agente pueda resolver el problema de maximizar la utilidad esperada en el horizonte finito, es decir, considerando un modelo de mercado con periodo de tiempo $T < \infty$.

2.2.1. Planteamiento del problema

Dada una estrategia $\pi \in \mathcal{A}$, denotamos por $W_t^{w,\pi}$ al proceso de capital con condición inicial $W_0 = w > 0$. Como describimos en el Capítulo 1, éste se compone de dos tipos de activos, uno llamado activo con riesgo y otro llamado libre de riesgo. El activo libre de riesgo tiene una tasa de rendimiento fija, r , que llamamos tasa de interés, mientras que el activo con riesgo tiene una tasa de rendimiento que varía con el tiempo, $\mu + r$, es decir, el precio sigue un movimiento Browniano geométrico con deriva $\mu + r$ y varianza σ^2 :

$$dS_t = S_t \left((\mu + r)dt + \sigma dZ_t \right) \quad \text{con } S_0 > 0. \quad (2.2.1)$$

donde Z_t es un movimiento Browniano. Así, la dinámica del capital estará dada por

$$\begin{aligned} dW_t^{w,\pi} &= \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (W_t^{w,\pi} - \pi_t) \frac{dB_t}{B_t} \\ &= rW_t^{w,\pi} dt + \pi_t (\mu dt + \sigma dZ_t), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

donde π_t es la cantidad invertida en el activo con riesgo y $(W_t^{w,\pi} - \pi_t)$ es la cantidad invertida en el bono. La restricción $W_t^{w,\pi} \geq 0$ para todo t es impuesta.

Observación 2.1. Durante el desarrollo del problema, tanto del caso de horizonte finito como del horizonte infinito, emplearemos la notación π para representar a la cantidad invertida en el activo con riesgo, pero en algunas ocasiones, por practicidad, trabajaremos con la fracción del capital invertido en el activo con riesgo, la cual denotaremos por $\gamma = \frac{\pi}{W^{w,\pi}}$.

Este problema consiste en elegir la cantidad invertida en el activo, π , de tal manera que maximice la utilidad esperada del capital final.

El primer paso es definir la función de valor

$$\tilde{V}(T, w) = \max_{\pi} \mathcal{J}(T, w; \pi), \quad (2.2.3)$$

donde

$$\mathcal{J}(T, w; \pi) = \mathbb{E} [U(W_T^{w, \pi}) | W_0^{w, \pi} = w], \quad (2.2.4)$$

representa la utilidad en función del portafolio. Así, nuestro problema se reduce a determinar la función valor \tilde{V} y a encontrar los controles óptimos que la alcancen cuando éstos existen.

Para resolver un problema de optimización de portafolio de forma correcta, requerimos de ciertos criterios que nos harán más sencillo el planteamiento y la resolución. Por ello, dedicamos una sección adicional para establecer brevemente las herramientas y pasos fundamentales para el desarrollo de este problema.

2.3. Método de optimización para modelos continuos

Para resolver problemas de optimización de este tipo, es necesario asumir que el proceso de estados tiene la forma

$$dw_t = f(w_t, \pi_t)dt + g(w_t, \pi_t)dz_t, \quad w_0 = w. \quad (2.3.1)$$

Aquí, $w_t \in \mathbb{R}^d$ es el estado del sistema al tiempo t , π_t el control aplicado al tiempo t y z un movimiento Browniano estándar d -dimensional. Por otra parte, trabajaremos con un conjunto de controles admisibles que denotaremos por

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A} \cap \mathbb{H}^2, \quad (2.3.2)$$

donde \mathbb{H}^2 es el conjunto de todos los procesos estocásticos \mathcal{F} -progresivamente medibles con norma finita en $\mathcal{L}^2(\Omega \times [0, T])$. Por otro lado, para cada $\pi \in \mathcal{A}$, denotamos al **generador infinitesimal**¹ como

$$\mathcal{U}^\pi V(w) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(w, \pi) \frac{\partial^2 V}{\partial w_i \partial w_j} + \sum_{i=1}^d f_i(w, \pi) \frac{\partial V}{\partial w_i}. \quad (2.3.3)$$

¹Se define de manera formal en [13].

donde $a = (a_{ij}) = gg'$. Supongamos que f, g son de clase C^1 , con $\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial w}, \frac{\partial g}{\partial x}$ acotadas. En particular, para el problema de este capítulo, notemos de la ecuación (2.4.3) que el proceso de difusión toma los siguientes valores

$$f(w, \pi) = wr + \mu \pi, \quad g(w, \pi) = \sigma \pi.$$

Con lo cual,

$$\mathcal{U}^\pi V(t, w) = rw \frac{\partial V}{\partial w} + \mu \pi \frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2}. \quad (2.3.4)$$

El generador infinitesimal es parte esencial en la estructura de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman como mostraremos a continuación.

Consideraremos el problema en horizonte finito de la siguiente manera. Admitiremos estrategias de inversión, $\pi \in \mathcal{A}_0$ en un intervalo $0 \leq t \leq T$, progresivamente medibles tal que

$$\mathbb{E} \int_0^T |\pi_t|^p dt < \infty, \quad p > 0.$$

En particular, esta condición de integrabilidad se cumple si π es acotado. Sean $L(w, \pi), U(w)$ funciones continuas que satisfacen que para alguna constante positiva C y $k \in \mathbb{N}$

$$|L(w, \pi)| \leq C(1 + |w|^k + |\pi|^k),$$

$$|U(w)| \leq C(1 + |w|^k).$$

De manera general, el problema es maximizar $\mathbb{E}[\mathcal{P}]$, donde

$$\mathcal{P}(T, w, \pi) = \int_0^T L(w_t, \pi_t) dt + U(w_T). \quad (2.3.5)$$

Como hemos mencionado anteriormente, $\tilde{V}(T, w)$ denotará la función de valor, la cual es el supremo de \mathcal{P} sobre $\pi \in \mathcal{A}_0$.

Luego, para encontrar la solución del problema, necesitamos resolver la **ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman² para el horizonte finito**, la cual está definida como

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(t, w) + \sup_{\pi \in \mathcal{A}_0} [\mathcal{U}^\pi V(t, \cdot)(w) + L(w, \pi)], \quad (2.3.6)$$

²Esta ecuación se conoce en la literatura de control estocástico como de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), por analogía con las ecuaciones diferenciales parciales que resaltan en la teoría de Hamilton Jacobi del Cálculo de Variaciones.

con condición $V(T, w) = U(w)$.

Regresando al planteamiento del problema (2.2.3), notemos que para nuestro caso, $L(w, \pi) = 0$. Sustituyendo el valor del generador infinitesimal (2.3.4) en (2.3.6) obtenemos que la ecuación asociada al problema de horizonte finito es de la forma

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \sup_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[rw \frac{\partial V}{\partial w} + \mu \pi \frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} \right]. \quad (2.3.7)$$

junto con la condición terminal

$$V(T, w) = U(w), \quad w > 0. \quad (2.3.8)$$

Luego, para la solución de (2.3.7)-(2.3.8), proponemos una función suave de la siguiente forma

$$V(t, w) = U(w)h(t),$$

para alguna función positiva $h(t)$. Así, sustituyéndola en (2.3.7)-(2.3.8) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} 0 &= h' w^{1-A} + (1-A)h \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left\{ rw^{1-A} + \mu \pi w^{-A} - \frac{1}{2} A \sigma^2 \pi^2 w^{-(1+A)} \right\} \\ &= h' + (1-A)h \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left\{ r + \mu \frac{\pi}{w} - \frac{1}{2} A \sigma^2 \frac{\pi^2}{w^2} \right\} \\ &= h' + (1-A)h \max_{\gamma} \left\{ r + \mu \gamma - \frac{1}{2} A \sigma^2 \gamma^2 \right\} \\ &= h' + (1-A)h \left[r + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{A \sigma^2} \right], \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

con condición terminal

$$h(T) = 1. \quad (2.3.10)$$

Notemos de (2.3.9) que la cantidad que maximiza la ecuación es alcanzado en $\pi^* = \frac{\mu}{2\sigma^2} w$, este valor corresponde a la estrategia de inversión óptima. Por otra parte, la función h tiene que satisfacer (2.3.9)-(2.3.10), entonces

$$h(t) = e^{(T-t)\xi},$$

con $\xi := (1-A) \left[r + \frac{\mu^2}{2A\sigma^2} \right]$. Por lo tanto, la función V , solución de (2.3.7) está dada por

$$V(t, w) = U(w) e^{(T-t)\xi}, \quad (t, w) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+, \quad (2.3.11)$$

donde $\xi = (1 - A) \left[r + \frac{\mu^2}{2A\sigma^2} \right]$, y donde la estrategia de inversión óptima es

$$\pi_t^*(W_t^{w,\pi}) = \frac{\mu}{A\sigma^2} W_t^{w,\pi}. \quad (2.3.12)$$

Para probar que (2.3.11) es la función que da solución al problema de optimización de portafolio sin restricciones en el horizonte finito, necesitamos de una herramienta fundamental de la teoría de control estocástico, el teorema de verificación.

2.3.1. Teoremas de verificación

El paso crucial en el método de programación dinámica consiste en probar que dada una función suave y solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, ésta coincide con la función de valor, \tilde{V} , definida en (2.2.3). Este resultado es llamado teorema de verificación.

Existen diversos teoremas de verificación de la programación dinámica y como mencionamos antes, todos requieren de un cierto grado de suavidad en la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Para este problema en particular, recurriremos al teorema de verificación que se presenta a continuación y cuya demostración se encuentra en la página 51 de [29].

Teorema 2.1. *Sean $T < \infty$ y V una función suave. Asumamos que V tiene crecimiento cuadrático, es decir, existe una constante C tal que*

$$|V(t, w)| \leq C(1 + |w|^2), \quad (t, w) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (2.3.13)$$

(i) Si V es supersolución de (2.3.6), esto es,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t}(t, w) - \sup_{\pi \in \mathcal{A}_0} [\mathcal{U}^\pi V(t, \cdot)(w)] &\geq 0, \quad (t, w) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ V(T, w) &\geq U(w). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Entonces $V(t, w) \geq \tilde{V}(t, w)$.

(ii) Sea V solución a (2.3.6) y supongamos que existe una estrategia $\pi^* \in \mathcal{A}_0$ tal que,

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(t, w) + \mathcal{U}^{\pi^*} V(t, w).$$

Entonces, la ecuación diferencial estocástica

$$dW_s^{w,\pi^*} = (rW_s^{w,\pi^*} + \mu\pi_s^*) ds + \sigma\pi_s^* dZ_s, \quad W_0^{w,\pi^*} = w, \quad (2.3.15)$$

admite una única solución. Además se tiene que

$$V(t, w) = \tilde{V}(t, w). \quad (2.3.16)$$

y que el proceso $\pi^* \in \mathcal{A}_0$ es la estrategia de inversión óptima.

Es decir, el objetivo del teorema es verificar que la función \tilde{V} es igual a la función propuesta

$$V(t, w) = \frac{w^{(1-A)}}{(1-A)} e^{\xi(T-t)}, \quad (2.3.17)$$

donde

$$\xi = (1-A) \left[r + \frac{\mu^2}{2A\sigma^2} \right] \quad (2.3.18)$$

y que la estrategia óptima está dada por

$$\pi_t^*(W_t^{w,\pi}) = \frac{\mu}{A\sigma^2} W_t^{w,\pi}. \quad (2.3.19)$$

Notemos que por definición $V(t, w)$ es una función suave de w y t .

Probaremos que (2.3.17) con (2.3.18) y (2.3.19), satisface las condiciones del teorema de verificación a través de los siguientes resultados.

Lema 2.1. *Sea V la función definida por (2.3.17)-(2.3.18), entonces V satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman dada por (2.3.7).*

Demostración. Derivando la expresión de $V(t, w)$ tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial w} = w^{-A} e^{(T-t)\xi}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} = -Aw^{-(1+A)} e^{(T-t)\xi}.$$

Reemplazando en (2.3.4), obtenemos

$$\mathcal{U}^\pi V(t, w) = \left(r + \frac{\mu\pi}{w} - \frac{A\sigma^2\pi^2}{2w^2} \right) w^{1-A} e^{(T-t)\xi}. \quad (2.3.20)$$

Por otra parte, consideramos a \mathcal{U}^π como una función de π , entonces fijándonos en su segunda derivada

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}^\pi V(t, w)}{\partial \pi^2} = -A\sigma^2 w^{-(1+A)} e^{(T-t)\xi}, \quad (2.3.21)$$

notamos que es negativa, por tanto, es cóncava y su máximo es alcanzado en sus puntos extremos, esto es

$$\text{si hacemos } \frac{\partial \mathcal{U}^\pi V(t, w)}{\partial \pi} = 0, \text{ entonces } \pi^* = \frac{\mu}{A\sigma^2} w. \quad (2.3.22)$$

Así, sustituyendo esto en (2.3.20),

$$\mathcal{U}^\pi V(t, w) = w^{1-A} e^{(T-t)\xi} \left(r + \frac{\mu^2}{2A\sigma^2} \right). \quad (2.3.23)$$

Luego, puesto que $\frac{\partial V}{\partial t} = -\xi w^{1-A} e^{(T-t)\xi}$ y $\xi = r + \frac{\mu^2}{2A\sigma^2}$ entonces

$$w^{1-A} \xi e^{(T-t)\xi} = w^{1-A} e^{(T-t)\xi} \left(r + \frac{\mu^2}{2A\sigma^2} \right), \quad (2.3.24)$$

es decir, satisface que

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(t, w) + \sup_{\pi \in \mathcal{A}_0} [\mathcal{U}^\pi V(t, \cdot)(w)].$$

Por otra parte, como $V(t, w) = U(w) e^{\xi(T-t)}$, claramente $V(T, w) = U(w)$ para toda $w > 0$. Lo que verifica que $V(t, w)$ con (2.3.17)-(2.3.18) da solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman definida en (2.3.7). ■

Lema 2.2. Sean \tilde{V} definida como en (2.2.3), V como (2.3.17)-(2.3.18) y $\pi \in \mathcal{A}_0$ una estrategia arbitraria. Entonces,

$$\tilde{V}(t, w) \leq V(t, w).$$

Demostración. Como V una función suave que depende de t y w , aplicando la Fórmula de Itô³ obtenemos que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial w} dW_t^{w, \pi} + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} \pi^2 \sigma^2 dt.$$

Reemplazando la dinámica del capital (2.2.2) en esta ecuación tenemos que

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial w} (rW_t^{w, \pi} + \mu\pi) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} \pi^2 \sigma^2 \right] dt + \frac{\partial V}{\partial w} \sigma \pi dZ_t. \quad (2.3.25)$$

³Los resultados empleado del cálculo de Itô se basan de [28]

Como $\pi \in \mathcal{A}_0$ es una estrategia arbitraria, entonces del Lema 2.1

$$0 \geq \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial w} (rW_t^{w,\pi} + \pi\mu) + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} \right] dt. \quad (2.3.26)$$

Así, de (2.3.25) y (2.3.26)

$$dV(t, W_t^{w,\pi}) \leq \frac{\partial V}{\partial w}(t, W_t^{w,\pi}) \sigma \pi dZ_t. \quad (2.3.27)$$

Luego, tomando la esperanza de la integral entre $[t, T]$ de esta expresión obtenemos

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T V(s, W_s^{w,\pi}) ds \mid W_0^{w,\pi} = w \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{\partial V}{\partial w}(s, W_s^{w,\pi}) \sigma \pi dZ_s \mid W_0^{w,\pi} = w \right].$$

Además, dado que $\mathbb{E} \int_0^T |\pi_t|^p dt < \infty$, $p > 0$ y el proceso $M_s := \frac{\partial V}{\partial w}(s, W_s) \sigma \pi$ es adaptado y satisface $\mathbb{E} \int_t^T M_s^2 ds < \infty$, entonces $M \in \mathbb{H}^2$ y así M es una martingala cuya esperanza es nula. Usando esto y el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\mathbb{E} \left[V(T, W_T^{w,\pi}) \mid W_0^{w,\pi} = w \right] \leq V(t, w), \quad (2.3.28)$$

recordemos que $V(T, W_T^{w,\pi}) = U(W_T^{w,\pi})$, entonces tomando el máximo sobre el conjunto de controles admisibles tenemos que

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi}) \mid W_0^{w,\pi} = w \right] \leq \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} V(t, w) = V(t, w), \quad (2.3.29)$$

es decir,

$$\tilde{V}(t, w) \leq V(t, w). \quad \blacksquare$$

Lema 2.3. Sean V definida como (2.3.17)-(2.3.18) y $\pi^* \in \mathcal{A}_0$ la estrategia tal que se satisface la hipótesis (ii) del Teorema 2.1. Entonces

$$\tilde{V}(t, w) = V(t, w) \quad c.s.$$

Demostración. De manera análoga a la prueba del Lema 2.2, puesto que V una función suave que depende de t y w , aplicamos la Fórmula de Itô obteniendo que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial w} dW_t^{w,\pi^*} + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} \pi^{*2} \sigma^2 dt.$$

Reemplazando la dinámica del capital (2.2.2) en esta ecuación tenemos que

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial w} (rW_t^{w,\pi^*} + \mu\pi^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} \pi^{*2} \sigma^2 \right] dt + \frac{\partial V}{\partial w} \sigma \pi^* dZ_t. \quad (2.3.30)$$

Como $\pi^* \in \mathcal{A}_0$ es la estrategia óptima, entonces V satisface la ecuación (2.3.7) y por lo tanto

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial w} (rW_t^{w,\pi^*} + \pi^* \mu) + \frac{\sigma^2 \pi^{*2}}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} \right] dt. \quad (2.3.31)$$

Así, de (2.3.30) y (2.3.31)

$$dV(t, W_t^{w,\pi^*}) = \frac{\partial V}{\partial w}(t, W_t^{w,\pi^*}) \sigma \pi^* dZ_t. \quad (2.3.32)$$

Luego, tomando la esperanza de la integral entre $[t, T]$ de esta expresión obtenemos

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T V(s, W_s^{w,\pi^*}) ds \mid W_0^{w,\pi^*} = w \right] = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{\partial V}{\partial w}(s, W_s^{w,\pi^*}) \sigma \pi^* dZ_s \mid W_0^{w,\pi^*} = w \right].$$

Argumentando que $\mathbb{E} \int_0^T |\pi_t^*|^p dt < \infty$, $p > 0$ y el proceso $M_s := \frac{\partial V}{\partial w}(s, W_s) \sigma \pi^*$ es adaptado y satisface $\mathbb{E} \int_t^T M_s^2 ds < \infty$, entonces $M \in \mathbb{H}^2$ y así M es una martingala cuya esperanza es cero. Así, por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\mathbb{E} \left[V(T, W_T^{w,\pi^*}) \mid W_0^{w,\pi^*} = w \right] = V(t, w), \quad (2.3.33)$$

además como $V(T, W_T^{w,\pi^*}) = U(W_T^{w,\pi^*})$, entonces tomando el supremo sobre el conjunto de estrategias admisibles tenemos que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}_0} \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi^*}) \mid W_0^{w,\pi^*} = w \right] = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_0} V(t, w) = V(t, w), \quad (2.3.34)$$

es decir,

$$\tilde{V}(t, w) = V(t, w). \quad \blacksquare$$

Los Lemas 2.1, 2.2 y 2.3 prueban que la función propuesta satisface el Teorema 2.1. Por lo tanto, podemos concluir que la función definida por (2.3.17)-(2.3.18), junto con la estrategia óptima (2.3.19) dan solución al problema de optimización de portafolio sin restricciones para el horizonte finito.

2.4. Horizonte infinito

En esta sección, consideraremos el problema de inversión, donde el agente maximiza la tasa de crecimiento exponencial de la utilidad esperada cuando $T \rightarrow \infty$. Para ser más precisos, para cada $\pi \in \mathcal{A}_0$ y capital inicial $W_0^{w,\pi} = w$, definimos la **tasa de crecimiento a largo plazo** como

$$\xi^{w,\pi} = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-A)T} \ln \mathbb{E} \left[(1-A)U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right], \quad (2.4.1)$$

sujeto a la ecuación (2.4.3) y a la restricción $W_t^{w,\pi} \geq 0$, para todo t . El objetivo es encontrar a $\xi^{w,\pi}$ y la estrategia de inversión óptima que maximice dicha tasa de crecimiento.

Por la técnica de transformación logarítmica, el problema resulta ser equivalente a un problema de control estocástico del tipo ergódico. El análisis de este problema está basado en [21].

2.4.1. Planteamiento del problema

Consideremos el modelo de mercado descrito como en el caso anterior, es decir, el precio del activo con riesgo sigue un movimiento Browniano geométrico de la forma

$$dS_t = S_t \left((\mu + r)dt + \sigma dZ_t \right) \quad \text{con } S_0 > 0, \quad (2.4.2)$$

donde Z_t es un movimiento Browniano. Dada una estrategia admisible, la dinámica del capital está dada por

$$dW_t^{w,\pi} = rW_t^{w,\pi} dt + \pi_t (\mu dt + \sigma dZ_t), \quad (2.4.3)$$

con condición inicial $W_0^{w,\pi} = w > 0$ y donde $\pi \in \mathcal{A}$. Recordemos que \mathcal{A}_0 denota al conjunto de estrategias de inversión admisibles, es decir, el conjunto de todos los procesos estocásticos no anticipados, tal que el proceso de capital está bien definido por la ecuación (2.4.3) y tal que $W_t^{w,\pi} \geq 0$, para todo t . Al igual que en el caso de horizonte finito, supondremos que el portafolio tiene la función de utilidad de aversión al riesgo relativo constante definida en (2.1.1).

Denotaremos por ξ a la **máxima tasa de crecimiento a largo plazo** de la utilidad esperada del capital final, es decir,

$$\xi = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_0} \xi^{w,\pi}. \quad (2.4.4)$$

Para encontrar a ξ y a la estrategia de inversión óptima π^* , usaremos la técnica de Fleming y McEneaney [7], que consiste primero en notar que la tasa de crecimiento, resulta de hacer tender $T \rightarrow \infty$ de la función de valor para el horizonte finito (2.2.3).

El segundo paso es derivar la ecuación de programación dinámica asociada al problema, para ello, basta notar que

$$V(T, w) \sim e^{\xi T} \phi(w), \text{ cuando } T \rightarrow \infty. \quad (2.4.5)$$

Notemos que sustituyéndola en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para T , es decir en

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[rw \frac{\partial V}{\partial w} + \mu \pi \frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} \right], \quad (2.4.6)$$

obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para horizonte infinito

$$\xi \phi(w) = \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[rw \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} + \mu \pi \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial w^2} \right]. \quad (2.4.7)$$

En este caso, la función ϕ depende sólo de w , entonces el siguiente paso es proponer una solución de la forma

$$\phi(w) = U(w), \quad (2.4.8)$$

donde U es la función de utilidad definida en (2.1.1).

Por lo tanto, sustituyendo los valores de las derivadas de (2.4.8) en (2.4.7) obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \xi \phi(w) &= \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[rw \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} + \mu \pi \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial w^2} \right] \\ \xi &= (1 - A) \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[r + \mu \frac{\pi}{w} - \frac{\sigma^2 A}{2} \frac{\pi^2}{w^2} \right] \\ \xi &= (1 - A) \max_{\gamma} \left[r + \mu \gamma - \frac{\sigma^2 A}{2} \gamma^2 \right] \\ \xi &= (1 - A) \left[r + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{A \sigma^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

De aquí obtenemos que la inversión óptima en el activo con riesgo es $\pi^* = \frac{\mu}{A \sigma^2} w$ y que $\xi = (1 - A) \left[r + \frac{\mu^2}{2 A \sigma^2} \right]$. Por lo tanto, ahora tenemos que verificar que con la función dada por:

$$\phi(w) = U(w), \quad (2.4.10)$$

y que con la estrategia de inversión

$$\pi^* = \frac{\mu}{A\sigma^2}w, \quad (2.4.11)$$

podemos alcanzar la máxima tasa de crecimiento a largo plazo (2.4.4), más aún, ésta vale

$$\xi = (1 - A) \left[r + \frac{\mu^2}{2A\sigma^2} \right]. \quad (2.4.12)$$

Por otra parte, haciendo una transformación logarítmica

$$\hat{V} = \ln(V) = \xi T + \mathcal{V}(w),$$

donde

$$\mathcal{V}(w) = \ln \phi(w), \quad (2.4.13)$$

y sustituyéndola en

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial T} = \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[rw \frac{\partial \hat{V}}{\partial w} + \mu \pi \frac{\partial \hat{V}}{\partial w} + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial w^2} \right], \quad (2.4.14)$$

obtenemos que la ecuación diferencial parcial para ξ y \mathcal{V} es

$$\xi = \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[rw \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w} + \mu \pi \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w} + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial w^2} \right]. \quad (2.4.15)$$

2.4.2. Teoremas de verificación

Aunque el caso de horizonte de tiempo infinito produce esencialmente los mismos resultados que el caso de horizonte finito, es importante realizar el análisis de éste, particularmente porque el teorema de verificación está en torno a la tasa de crecimiento a largo plazo y no respecto a la función de valor como vimos en la Sección 2.3. Por ello, la solución que se propone se basa en el siguiente teorema de verificación de horizonte infinito, cuya demostración se puede encontrar en la página 877 de Fleming y Sheu [10].

Teorema 2.2. (i) Para una estrategia de control admisible arbitraria π_t

$$\xi \geq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right]. \quad (2.4.16)$$

(ii) Si π_t^* como en (2.4.11), (2.4.3). Entonces

$$\xi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right]. \quad (2.4.17)$$

ξ una constante definida como en (2.4.12).

El objetivo de esta sección es probar que con la estrategia de inversión óptima π^* definida en (2.4.11) podemos alcanzar el valor de la máxima tasa de crecimiento, es decir que (2.4.12) coincide con (2.4.4). Para ello, debemos probar que (2.4.12) satisface las hipótesis del teorema de verificación 2.2.

Lema 2.4. Sean ϕ la función definida por (2.4.10) y $\pi^* \mathcal{A}_0$ como en (2.4.11). Entonces ξ como en (2.4.12) satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (2.4.7), esto es

$$\xi \phi(w) = \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[\mathcal{U}^\pi \phi(w) \right]. \quad (2.4.18)$$

donde $\mathcal{U}^\pi \phi(w)$ es el generador infinitesimal definido en (2.3.3).

Demostración. Derivando la expresión de ϕ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial w} = w^{-A}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial w^2} = -A w^{-(1+A)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \xi \phi(w) - \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[\mathcal{U}^\pi \phi(w) \right] &= \xi \phi(w) - \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[r w \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} + \mu \pi \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial w^2} \right] \\ &= \xi - (1 - A) \left[r + \frac{\mu^2}{2A\sigma^2} \right]. \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Es decir, ξ definida por (2.4.12) satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. ■

Lema 2.5. Sean \mathcal{V} la función definida por (2.4.13), $\pi^* = \frac{\mu}{\sigma^2} w \in \mathcal{A}_0$. Entonces $\xi = (1 - A) \left[r + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right]$ satisface la ecuación (2.4.15), esto es

$$\xi = \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[\mathcal{U}^\pi \mathcal{V}(w) \right]. \quad (2.4.20)$$

donde $\mathcal{U}^\pi \mathcal{V}(w)$ es el generador infinitesimal definido en (2.3.3).

Demostración. Derivando la expresión de ϕ ,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w} = \frac{1-A}{w}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial w^2} = -\frac{(1-A)}{w^2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \xi - \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[\mathcal{U}^\pi \mathcal{V}(w) \right] &= \xi - (1-A) \max_{\pi \in \mathcal{A}_0} \left[rw \frac{\partial \mathcal{V}(w)}{\partial w} + \mu \pi \frac{\partial \mathcal{V}(w)}{\partial w} + \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}(w)}{\partial w^2} \right] \\ &= \xi - (1-A) \left[r + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Es decir, ξ satisface la ecuación (2.4.15). ■

Lema 2.6. Sean \mathcal{V} definida como (2.4.13), ξ como en (2.4.12) y $\pi \in \mathcal{A}_0$ una estrategia arbitraria. Entonces,

$$\xi \geq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right]. \tag{2.4.22}$$

Demostración. Reescribimos $\mathcal{V}(w)$ en forma exponencial, es decir, $\psi(w) = e^{\mathcal{V}(w)}$. Luego, usando Fórmula de Itô: entre 0 y θ , donde $\theta := T \wedge \tau_n$, y

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t |\psi_w(W_s^{w,\pi}) \sigma \pi_s|^2 ds \geq n \right\}$$

es un tiempo de paro, obtenemos que

$$\psi(W_\theta^{w,\pi}) = \psi(w) + \int_0^\theta \left[\mathcal{U}^\pi \psi(W_t^{w,\pi}) \right] dt + \int_0^\theta \sigma \pi_t \frac{\partial \psi(W_t^{w,\pi})}{\partial w} dZ_t. \tag{2.4.23}$$

Como $\mathbb{E} \left[\int_0^t |\pi_s|^2 ds \right] < \infty$, $p > 0$ y el proceso $M_s := \frac{\partial \psi}{\partial w} \sigma \pi_s dZ_s$ es adaptado, entonces $\mathbb{E} \left[\int_0^t M_s^2 ds \right] < \infty$ y así, M es una martingala local cuya esperanza es cero. Por lo tanto,

$$\mathbb{E} \left[\psi(W_\theta^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] = \psi(w) + \mathbb{E} \left[\int_0^\theta \left[\mathcal{U}^\pi \psi(W_t^{w,\pi}) \right] dt | W_0^{w,\pi} = w \right]. \tag{2.4.24}$$

Por otra parte, sabemos que ξ satisface la ecuación (2.4.15), entonces

$$\xi \geq \left[\mathcal{U}^\pi \mathcal{V}(w) \right]. \quad (2.4.25)$$

Entonces, de (2.4.24) y (2.4.25)

$$\mathbb{E} \left[\psi(W_\theta^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] \leq \psi(w) + \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^\xi dt | W_0^{w,\pi} = w \right]. \quad (2.4.26)$$

Luego, haciendo tender n a infinito,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\psi(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] &\leq \psi(w) + \mathbb{E} \left[\int_0^T e^\xi dt | W_0^{w,\pi} = w \right] \\ &= U(w) + e^\xi T. \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Dividiendo entre T y haciendo tender $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\psi(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\psi(w) + e^\xi T \right] \\ &= e^\xi. \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Calculando el logaritmo natural y sustituyendo el valor de $\psi(w) = U(w)$

$$\ln \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] \leq \xi. \quad (2.4.29)$$

Por otra parte,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \ln \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] \leq \ln \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right]. \quad (2.4.30)$$

Por lo tanto, de (2.4.29) y (2.4.30)

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \ln \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] \leq \xi, \quad (2.4.31)$$

tal como se quería probar. ■

Lema 2.7. Sean \mathcal{V} definida como (2.4.13), ξ como en (2.4.12) y $\pi^* \in \mathcal{A}_0$ la estrategia definida en (2.4.11). Entonces,

$$\xi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{E} \left[U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right]. \quad (2.4.32)$$

Demostración. Análogamente, reescribimos $\mathcal{V}(w)$ en su forma exponencial, es decir, $\psi(w) := e^{\mathcal{V}(w)}$. Luego, usando Fórmula de Itô: entre 0 y θ , donde $\theta := T \wedge \tau_n$, y

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t |\psi_w(W_s^{w,\pi^*}) \sigma \pi_s^*|^2 ds \geq n \right\}$$

es un tiempo de paro, obtenemos que

$$\psi(W_\theta^{w,\pi^*}) = \psi(w) + \int_0^\theta \left[\mathcal{U}^{\pi^*} \psi(W_t^{w,\pi^*}) \right] dt + \int_0^\theta \sigma \pi_t^* \frac{\partial \psi(W_t^{w,\pi^*})}{\partial w} dZ_t. \quad (2.4.33)$$

Como $\mathbb{E} \left[\int_0^t |\pi_s^*|^2 ds \right] < \infty$, $p > 0$ y el proceso $M_s := \frac{\partial \psi}{\partial w} \sigma \pi_s^* dZ_s$ es adaptado, entonces $\mathbb{E} \left[\int_0^t M_s^2 ds \right] < \infty$ y así, M es una martingala local cuya esperanza es cero. Por lo tanto,

$$\mathbb{E} \left[\psi(W_\theta^{w,\pi^*}) | W_0^{w,\pi^*} = w \right] = \psi(w) + \mathbb{E} \left[\int_0^\theta \left[\mathcal{U}^{\pi^*} \psi(W_t^{w,\pi^*}) \right] dt | W_0^{w,\pi^*} = w \right]. \quad (2.4.34)$$

Por otra parte, sabemos que ξ satisface la ecuación (2.4.15), entonces

$$\xi = \left[\mathcal{U}^\pi \mathcal{V}(w) \right]. \quad (2.4.35)$$

Entonces, de (2.4.34) y (2.4.35)

$$\mathbb{E} \left[\psi(W_\theta^{w,\pi^*}) | W_0^{w,\pi^*} = w \right] = \psi(w) + \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^\xi dt | W_0^{w,\pi^*} = w \right] \quad (2.4.36)$$

Luego, haciendo tender n a infinito,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\psi(W_T^{w,\pi^*}) | W_0^{w,\pi^*} = w \right] &= \psi(w) + \mathbb{E} \left[\int_0^T e^\xi dt | W_0^{w,\pi^*} = w \right] \\ &= U(w) + e^\xi T. \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

Dividiendo entre T y haciendo tender $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\psi(W_T^{w,\pi^*}) | W_0^{w,\pi^*} = w \right] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\psi(w) + e^\xi T \right] \\ &= e^\xi. \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

Calculando el logaritmo natural y sustituyendo el valor de $\psi(w) = U(w)$

$$\ln \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[U(W_T^{w, \pi^*}) | W_0^{w, \pi^*} = w \right] = \xi. \quad (2.4.39)$$

Por otra parte,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \ln \mathbb{E} \left[U(W_T^{w, \pi^*}) | W_0^{w, \pi^*} = w \right] = \ln \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[U(W_T^{w, \pi^*}) | W_0^{w, \pi^*} = w \right] \quad (2.4.40)$$

Por lo tanto, de (2.4.39) y (2.4.40)

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \ln \mathbb{E} \left[U(W_T^{w, \pi^*}) | W_0^{w, \pi^*} = w \right] = \xi, \quad (2.4.41)$$

tal como se quería probar. ■

2.5. Implementación numérica

Para la simulación, discretizamos el modelo con los siguientes parámetros:

- (i) Horizonte de tiempo $T = 50$.
- (ii) Capital inicial $W_0 = 100$.
- (iii) Valores iniciales del activo con riesgo y el libre de riesgo $S_0 = B_0 = 1$.
- (iv) Parámetros del activo $\mu = 0.06$, $\sigma = 0.02$, $r = 0.03$
- (v) El número de puntos de una trayectoria simulados es fijado a $N = 1000$ y el número de trayectorias para cada estrategia es $m = 10000$
- (vi) El coeficiente de aversión al riesgo es $A = 0.2$.

Elegimos estos valores porque una tasa de interés de 3% es una elección más realista, la elección de N y M toma un par de minutos simularlo y es considerablemente satisfactorio. Obteniendo así, la siguiente gráfica

Notemos de la figura 2.1 que el capital W_t^{x, π^*} , se comporta de manera favorable bajo la estrategia π^* dada como en (2.3.19), (2.4.11).

Se presentó un problema de control para un mercado sin restricciones, la única condición que se mantuvo fue la de conservar un capital positivo todo el tiempo, lo cual nos llevó a transformar el problema en un problema de optimización. Observamos que la fracción óptima del capital no se ve afectada por la incertidumbre en el horizonte temporal. En el siguiente capítulo se analiza el riesgo de inversión óptima para un inversionista que quiere no perder más de un cierto porcentaje fijo del valor máximo de su capital.

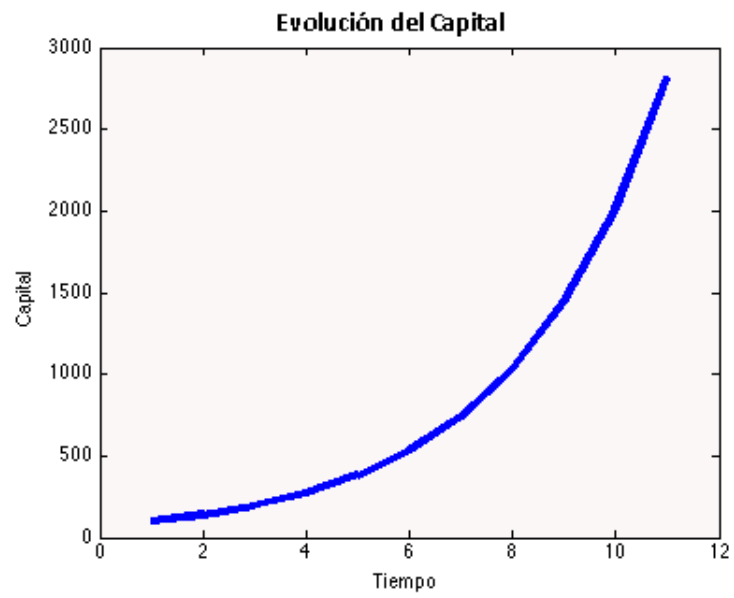


Figura 2.1: Gráfica del comportamiento del capital dada una estrategia óptima.

CAPÍTULO 3

Estrategia de inversión óptima controlando caídas

En el Capítulo 2 trabajamos en la estrategia de inversión óptima de un modelo de mercado sin restricciones, un modelo simple en el que únicamente restringíamos el proceso de capital, de tal manera que éste permaneciera no negativo durante todo el tiempo. Ahora analizaremos el problema de optimización de portafolio bajo la *restricción de caída* de que el proceso de capital nunca caiga por debajo de una fracción de su *máximo hasta la fecha*, mientras maximiza la tasa de crecimiento a largo plazo de su utilidad esperada del capital. Es decir, si denotamos por M_t , al máximo del capital alcanzado antes del tiempo t y por $W_t^{w,\pi}$ al capital al tiempo t bajo la estrategia π , entonces el objetivo es encontrar una estrategia de inversión óptima que además de satisfacer la condición $W_t^{w,\pi} \geq 0$, también cumpla que $W_t^{w,\pi} \geq \alpha M_t$ para todo t , donde α es un número en $(0, 1)$ y donde el horizonte es infinito. Este problema fue introducido y resuelto explícitamente por Grossman y Zhou [30].

Consideraremos la función de utilidad de aversión al riesgo constante definida en (2.1.1) y probaremos que la estrategia de inversión óptima involucra una inversión en el activo con riesgo al tiempo t en proporción a la diferencia $W_t^{w,\pi} - \alpha M_t$.

Es importante mencionar que nuevamente trabajaremos con el concepto de *crecimiento a largo plazo*, que en términos financieros se refiere a una estrategia de inversión en el que el valor de un activo se apreciará durante un período de tiempo relativamente largo, independientemente de que el creci-

miento se inicie inmediatamente o más adelante. El crecimiento a largo plazo es un término relativo, ya que el horizonte de inversión aunque difiere entre estilos de inversión, la apreciación percibida en el activo sigue siendo la misma, esto quiere decir que, el problema de optimización del portafolio en horizonte infinito arroja un resultado similar al problema en horizonte finito, tal como vimos en el problema del Capítulo 2.

3.1. Planteamiento del problema

Iniciaremos suponiendo un modelo de mercado financiero \mathcal{M} como hemos descrito desde el Capítulo 1, considerando sus condiciones de integrabilidad, es decir, un modelo que cuenta con un activo con riesgo y uno sin riesgo con tasa de rendimiento constante r y cuyo proceso de precios está dado por (2.4.2), donde los coeficientes de mercado¹ son progresivamente medibles con respecto a la filtración y satisfacen las condiciones establecidas en el Capítulo 1.

$$dW_t^{w,\pi} = rW_t^{w,\pi} dt + \pi_t[\mu dt + \sigma dZ_t], \quad W_0 = w. \quad (3.1.1)$$

donde de manera similar a (2.4.3), π_t es un proceso estocástico, no anticipado tal que $W_t^{w,\pi}$ está bien definido por la ecuación (3.1.1) y satisface la condición de no bancarrota

$$W_t^{w,\pi} \geq 0 \text{ para toda } t.$$

Por otra parte, sea λ un *factor de descuento*, cuya interpretación financiera hace referencia a la tasa de interés utilizada en el análisis del flujo de efectivo descontado para determinar el valor presente de los flujos de efectivo futuros y a la representación de la tasa mínima de rendimiento aceptable para el inversionista, o una tasa de inflación asumida. Comúnmente, los inversionistas y las empresas utilizan los flujos de efectivo descontados para evaluar la rentabilidad de la inversión de una empresa.

Como en este capítulo controlaremos caídas, tenemos que saber respecto a qué condiciones un evento de pérdida será considerada como una caída, por ello definimos al *máximo valor histórico del capital* (MVHC) como

$$M_t^\pi = \max\{M_0 e^{\lambda t}, W_s^{w,\pi} e^{\lambda(t-s)}; s \leq t\}, \quad (3.1.2)$$

donde $M_0 = w$ es un número positivo que denota el máximo valor histórico del capital inicial.

¹Véase página 8.

Observación 3.1. Supongamos que al tiempo t , la cantidad invertida en el activo con riesgo es $\pi_t = 0$ y así tenemos que (3.1.1) está ahora dada por

$$\frac{dW_t^{w,\pi}}{W_t^{w,\pi}} = r dt,$$

con lo cual

$$\ln(W_t^{w,\pi}) = rt + c.$$

Además, si $r = \lambda$, entonces

$$W_t^{w,\pi} = M_0 e^{\lambda t}, \quad M_0 = e^c > 0.$$

Haciendo un análisis similar para el tiempo $s \leq t$ podemos interpretar a M_t^π como el máximo entre el capital inicial y el tiempo $s \leq t$, es decir, M_t^π no es más que el máximo del capital hasta la fecha. Bajo este razonamiento podemos reescribir a M_t^π como

$$M_t^\pi = \max_{0 \leq s \leq t} \{W_s^{w,\pi}\}. \quad (3.1.3)$$

Ahora ya podemos definir la restricción *caída* y diremos que el capital satisface esta restricción si

$$\mathbb{P}[W_t^{w,\pi} > \alpha M_t^\pi \quad \forall 0 \leq t < \infty] = 1, \quad (3.1.4)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ es una constante dada. La interpretación de (3.1.4) es esta: el agente no permitirá que la caída $1 - \frac{W_t^{w,\pi}}{M_t^\pi}$ del capital desde su máximo a la fecha sea mayor o igual a la constante $1 - \alpha$ para cualquier instante $t \geq 0$. Por tal razón, él impone la restricción (3.1.4) casi seguramente. Equivalente, el capital debe de satisfacer la *cota de referencia*

$$W_t^{w,\pi} \geq \alpha M_t^\pi \text{ c.s. para toda } t. \quad (3.1.5)$$

Por otro lado, consideraremos únicamente los valores de λ tales que $\lambda \leq r$ para garantizar la estabilidad del modelo. Como veremos más adelante, haremos una transformación del problema para trabajar directamente con el capital descontado, como hemos definido en el Capítulo 1, éste está definido como e^{-rt} . Entonces, para valores de $\lambda > r$, el modelo no permite estrategias admisibles.

Observación 3.2. En particular si $\lambda = -\infty$, la restricción de caída $W_t^{w,\pi} \geq \alpha M_t^\pi$ se transforma en el problema con la restricción de no-bancarrotas del Capítulo 2, $W_t^{w,\pi} \geq 0$.

Como mencionamos al inicio del capítulo, emplearemos la función de utilidad U de la forma:

$$U(W) = \frac{W^{1-A}}{1-A} \quad (3.1.6)$$

donde $A > 0$, $A \neq 1$.

Nuestro objetivo es elegir una estrategia de mercado que maximice la tasa de crecimiento a largo plazo de la utilidad esperada del capital final, es decir, maximizar

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-A)T} \ln \mathbb{E} \left[(1-A)U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right]. \quad (3.1.7)$$

sujeito a la ecuación (3.1.1) y a la cota de referencia (3.1.5).

De manera similar al Capítulo 2, denotaremos por \mathcal{A} al conjunto de estrategias de mercado admisibles, es decir, el conjunto de todos los procesos estocásticos no anticipados tal que el proceso de capital está bien definido por la ecuación diferencial estocástica (3.1.1) y tal que se cumple (3.1.5). También denotaremos por ξ a la máxima tasa de crecimiento a largo plazo de la utilidad esperada del capital final

$$\xi := \sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-A)T} \ln \mathbb{E} \left[(1-A)U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right]. \quad (3.1.8)$$

Por la técnica de transformación logarítmica, el problema de sensibilidad al riesgo resulta ser equivalente a un problema de control estocástico de tipo ergódico.

3.2. Transformación del problema

Para facilitar el desarrollo del problema que plantearon Grossman y Zhou [30] es necesario trabajar con procesos descontados, es decir, necesitamos introducir el factor de descuento en las dinámicas que definimos anteriormente. Por ello, haremos una transformación del problema de capital al capital descontado que, recordando del Capítulo 1, hemos empleado bajo la notación barra.

Definamos a

$$\bar{W}_t^{w,\pi} = W_t^{w,\pi} e^{-\bar{\lambda}t} \text{ y } \bar{M}_t = M_t^\pi e^{-\bar{\lambda}t} = \max_{0 \leq s \leq t} \{\bar{W}_s^{w,\pi}\},$$

donde $\bar{\lambda} = r - \lambda$. Entonces tenemos ahora que la dinámica para $\bar{W}_t^{w,\pi}$ está dada por

$$\begin{aligned}
d\bar{W}_t^{w,\pi} &= d(W_t^{w,\pi} e^{-\lambda t}) \\
&= e^{-\lambda t} dW_t^{w,\pi} + W_t^{w,\pi} de^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} dW_t^{w,\pi} - \bar{\lambda} W_t^{w,\pi} e^{-\lambda t} dt \\
&= e^{-\lambda t} r W_t^{w,\pi} dt + e^{-\lambda t} \pi_t (\mu dt + \sigma dZ_t) - \bar{\lambda} W_t^{w,\pi} e^{-\lambda t} dt \\
&= r \bar{W}_t^{w,\pi} dt + \bar{\pi}_t (\mu dt + \sigma dZ_t) - \bar{\lambda} \bar{W}_t^{w,\pi} dt \\
&= \lambda \bar{W}_t^{w,\pi} dt + \bar{\pi}_t (\mu dt + \sigma dZ_t).
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

donde $\bar{\pi}_t = \pi_t e^{-\lambda t}$ y así la restricción (3.1.5) se transforma en

$$\bar{W}_t^{w,\pi} \geq \alpha \bar{M}_t \tag{3.2.2}$$

Observación 3.3. Al reemplazar $W_T^{w,\pi}$ por $e^{\lambda T} \bar{W}_T^{w,\pi}$ en (3.1.8) tenemos

$$\begin{aligned}
\xi &= \sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-A)T} \ln \mathbb{E} \left[(1-A)U(W_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] \\
&= \sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-A)T} \ln \mathbb{E} \left[(1-A)U(e^{\lambda T} \bar{W}_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] \\
&= \sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-A)T} \ln \mathbb{E} \left[(1-A)e^{(1-A)\lambda T} U(\bar{W}_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] \\
&= \bar{\lambda} + \sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-A)T} \ln \mathbb{E} \left[(1-A)U(\bar{W}_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right] \\
&= \bar{\lambda} + \bar{\xi},
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

donde

$$\bar{\xi} = \sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-A)T} \ln \mathbb{E} \left[(1-A)U(\bar{W}_T^{w,\pi}) | W_0^{w,\pi} = w \right]. \tag{3.2.4}$$

Así, si encontramos el valor de $\bar{\xi}$, entonces la solución al problema original se obtiene de manera inmediata, ya que $\bar{\xi} = \xi - \bar{\lambda}$ y $\bar{\pi}_t = \pi_t e^{-\lambda t}$.

La solución que proponemos se basa en el siguiente teorema de verificación, cuya prueba se encuentra en la página 273 de [30].

Teorema 3.1. *Si existe una constante $\bar{\xi}$ y una función V tal que se satisfacen las siguientes condiciones*

i) $\forall t > 0$, $V(w, m)$ satisface el principio de programación dinámica, es decir

$$V(w, m) = \sup_{\mathcal{A}} \mathbb{E} \left[V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi) e^{-\bar{\xi}t} | W_0^{w,\pi} = w \right], \tag{3.2.5}$$

donde $W_0 = w$, $M_0 = m$ son constantes positivas.

ii) Existe una estrategia de mercado $\pi^* \in \mathcal{A}$ tal que el supremo anterior sobre \mathcal{A} puede ser alcanzado por $\pi^* \forall t > 0$.

iii) Existen constantes positivas tales que

$$C_1(1 - A)U(w) \leq (1 - A)V(w, m) \leq C_2(1 - A)U(w)$$

entonces $\bar{\xi}$ es la máxima tasa de crecimiento a largo plazo de la utilidad esperada del capital final y es alcanzada siguiendo la estrategia π^* . Más aún, $\bar{\xi}$ también es la tasa de crecimiento del problema de horizonte finito. En otras palabras,

$$\bar{\xi} = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - A)T} \ln[(1 - A)L(w, m, T)],$$

donde $L(w, m, T)$ es la función de valor del problema de horizonte finito, es decir, $L(w, m, T) = \sup_{\mathcal{A}} \mathbb{E} [U(\bar{W}_T^{w, \pi}) | W_0^{w, \pi} = w]$.

Observación 3.4. Para construir una función V y una constante $\bar{\xi}$ tal que las condiciones del teorema se mantengan, encontraremos de mucha ayuda considerar un problema de optimización similar al problema de optimización de tasa de crecimiento, el cual consiste en maximizar la utilidad esperada del capital descontado a largo plazo, es decir,

$$\sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [U(\bar{W}_T^{w, \pi}) e^{-\bar{\xi}T} | W_0^{w, \pi} = w], \quad (3.2.6)$$

donde $\bar{\xi}$ es una constante. Notemos que el factor $e^{-\bar{\xi}T}$ nos garantiza que el límite definido en (3.2.6) no es trivial, es decir, el límite no es 0 ó infinito. Si tal $\bar{\xi}$ existe, entonces es la máxima tasa de crecimiento.

Definamos a la función de valor como

$$\tilde{V}(w, m) = \sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [U(W_T^{w, \pi}) e^{-\bar{\xi}T} | W_0^{w, \pi} = w]. \quad (3.2.7)$$

Si logramos construir $\bar{\xi}$ y $V(w, m)$ tales que satisfagan todas las hipótesis del teorema de verificación, entonces estaremos proporcionando una solución al problema de optimización (3.1.7). Con el fin de facilitar esta búsqueda, usaremos las siguientes propiedades² de la función de valor \tilde{V} .

²La prueba de estas proposiciones se encuentra en la página 245-246 de [30].

Proposición 3.1. *Si existe una constante $\bar{\xi}$ tal que $\tilde{V}(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi)$ es finito con $W_t^{x,\pi}$ satisface la restricción (3.2.2). Entonces $\tilde{V}(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi)$ es homogénea de grado $1 - A$ en $\bar{W}_t^{w,\pi}$ y \bar{M}_t^π , es decir, para toda k positiva,*

$$\tilde{V}(k\bar{W}_t^{w,\pi}, k\bar{M}_t^\pi) = k^{1-A}\tilde{V}(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi).$$

Proposición 3.2. *Supongamos que existe una constante $\bar{\xi}$ tal que $\tilde{V}(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi)$ es finito con $W_t^{x,\pi}$ que satisface la restricción (3.2.2). Entonces*

(i) *si \bar{M}_t^π constante, $\tilde{V}(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi)$ es una función creciente y cóncava de $\bar{W}_t^{w,\pi}$,*

(ii) *si $\bar{W}_t^{w,\pi}$ constante, $\tilde{V}(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi)$ es una función decreciente de \bar{M}_t^π .*

Bajo la hipótesis (i) de la Proposición 3.2, en la siguiente sección mostramos una solución de forma cerrada para V , $\bar{\xi}$ y una estrategia de inversión óptima, π_t^* para el valor de $\lambda = 0$.

3.3. Análisis para el caso $\lambda = 0$

Recordemos que $\bar{\lambda} = r - \lambda$, por lo cual, asumir que $\lambda = 0$ es equivalente a analizar el caso cuando $\bar{\lambda} = r$. Bajo esta suposición tenemos

$$d\bar{W}_t^{w,\pi} = \bar{\pi}_t(\mu dt + \sigma dZ_t). \quad (3.3.1)$$

Observación 3.5. Notemos que por definición, $\bar{W}_t^{w,\pi} \in [\alpha\bar{M}, \bar{M}]$. Por lo tanto, bajo la suposición que \bar{M} es constante, tendremos $d\bar{M} = 0$.

Después de esta observación, el primer paso es establecer la ecuación de **Hamilton-Jacobi-Bellman para el horizonte infinito**

$$\bar{\xi}V(\cdot) - \sup_{\pi} \left[\mathcal{U}^\pi V(\cdot) \right] = 0. \quad (3.3.2)$$

Entonces la ecuación de HJB asociada al problema está dada por

$$\bar{\xi}V = \max_{\pi} \left[\mu\bar{\pi} \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} + \frac{\sigma^2 \bar{\pi}^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2} \right]. \quad (3.3.3)$$

Igualando la primer derivada a cero, obtenemos que la inversión óptima está dada por

$$\bar{\pi}^* = -\frac{\mu}{\sigma^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \bigg/ \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2} \right). \quad (3.3.4)$$

Sustituyendo el valor de π^* en (3.3.3), obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$-\bar{\xi}V - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \right)^2 / \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2} \right) = 0. \quad (3.3.5)$$

Partiendo de esta ecuación, analizaremos la función V cuando el valor del capital se encuentra en el intervalo $[\alpha\bar{M}, \bar{M}]$.

3.3.1. Análisis de $V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M})$ para $\bar{W}_t^{w,\pi} \in [\alpha\bar{M}, \bar{M}]$

Basándonos en la Proposición 3.1, buscamos soluciones para la ecuación (3.3.5) de forma que

$$V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi) = V\left(\bar{M}_t^\pi \cdot \frac{\bar{W}_t^{w,\pi}}{\bar{M}_t^\pi}, \bar{M}_t^\pi \cdot 1\right) = (\bar{M}_t^\pi)^{1-A} f(u), \quad (3.3.6)$$

donde

$$u = \bar{W}^{w,\pi} / \bar{M}^\pi \text{ y } f(u) \equiv V(u, 1). \quad (3.3.7)$$

Observación 3.6. Con esto, $u = \bar{W}^{w,\pi} / \bar{M}^\pi \in [\alpha, 1)$.

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{W}} = \bar{M}^{-A} f'(u), \quad (3.3.8)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2} = (\bar{M})^{-(1+A)} f''(u), \quad (3.3.9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{M}} = (1-A)\bar{M}^{-A} f(u) - \bar{M}^{-A} u f'(u). \quad (3.3.10)$$

Así, sustituyendo las ecuaciones (3.3.8) y (3.3.9) en (3.3.5), obtenemos

$$-\bar{\xi}f(u) - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{[f'(u)]^2}{f''(u)} = 0, \quad \text{para } u \in (\alpha, 1). \quad (3.3.11)$$

Para poder caracterizar la solución de esta última ecuación, usaremos el siguiente resultado³:

³Demostración en la página 248 de [30].

Lema 3.1. *Sea a no negativa. Entonces, la ecuación diferencial*

$$f(u) + a \frac{[f'(u)]^2}{f''(u)} = 0 \quad (3.3.12)$$

tiene una solución general de la forma $f(u) = \rho(u+c)^{1/(1+a)}$, donde c y $\rho \neq 0$ son constantes.

Por lo tanto, usando el Lema 3.1 podemos escribir la solución de (3.3.11) de la forma $f(u) = \rho(u+c)^\beta$ con $\rho \neq 0$. Además, como

$$f'(u) = \beta\rho(u+c)^{\beta-1}, \quad f''(u) = \beta(\beta-1)\rho(u+c)^{\beta-2}, \quad (3.3.13)$$

entonces sustituyendo en (3.3.11), obtenemos que β necesariamente debe de satisfacer

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} \frac{\beta}{(1-\beta)}. \quad (3.3.14)$$

Luego, sustituimos los valores de (3.3.13) en (3.3.4) y obtenemos que, para $\bar{W}_t^{w,\pi} < \bar{M}_t^\pi$, la inversión óptima en el activo con riesgo está dada por

$$\bar{\pi}^* = \left[\frac{\mu}{\sigma^2(1-\beta)} \right] (u+c)\bar{M}. \quad (3.3.15)$$

Haciendo $\bar{\pi}_t = 0$ cuando $u = \alpha$, tenemos que $c = -\alpha$. Por otra parte, $u = \frac{\bar{W}_t^{w,\pi}}{\bar{M}_t^\pi}$, entonces

$$\bar{\pi}_t^* = \frac{\mu}{\sigma^2(1-\beta)} (u+c)\bar{M}_t = \frac{\mu}{\sigma^2(1-\beta)} (\bar{W}_t^{w,\pi} - \alpha\bar{M}_t^\pi), \quad (3.3.16)$$

la cual es una estrategia de inversión de proporción constante. Lo que desconocemos hasta ahora es el valor de la constante β . Para obtenerlo, tenemos que analizar el comportamiento cuando $u = 1$.

3.3.2. Análisis de $V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi)$ para $\bar{W}_t^{w,\pi} = \bar{M}_t^\pi$

Analizar la función en $u = 1$, es equivalente a analizarla en $\bar{W}_t^{w,\pi} = \bar{M}_t^\pi$, ya que definimos a u en (3.3.7). Para este caso necesitamos observar el comportamiento del proceso \bar{M}_t . Notemos que \bar{M}_t^π es un proceso creciente, continuo, tal que $M_0^\pi = m$, con m una constante no negativa, y por tanto, es un proceso de variación finita. Entonces, tanto $\bar{W}_t^{w,\pi}$ como \bar{M}_t^π son semi-martingalas

continuas.

Luego, como V satisface el siguiente principio de programación dinámica: para $h > 0$

$$V(w, m) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[e^{-\bar{\xi}h} V(\bar{W}_h^{w,\pi}, \bar{M}_h^{\pi})]. \quad (3.3.17)$$

Entonces, usando la fórmula de Itô en la ecuación (3.3.17), cuando $\bar{W} = \bar{M}$, obtenemos que la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada al problema es

$$0 = \sup_{\pi} \left\{ \mathbb{E} \int_0^h \left[-\bar{\xi}V + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \mu \bar{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \sigma^2 \bar{\pi}^2 \right] ds + \mathbb{E} \int_0^h \frac{\partial V}{\partial \bar{M}} d\bar{M} \right\}. \quad (3.3.18)$$

Luego, con ayuda de los siguientes resultados⁴, encontraremos el valor de β .

Lema 3.2. *Si $\partial V/\partial \bar{M} = 0$ en $\bar{W}_t^{w,\pi} = \bar{M}_t^{\pi}$. Entonces,*

$$\int_0^h \frac{\partial V}{\partial \bar{M}} d\bar{M} = 0 \text{ c.s.} \quad (3.3.19)$$

Con este lema, podemos dividir (3.3.18) entre h y hacer tender h a cero y así obtener que la ecuación de HJB asociada a este caso es

$$\max_{\pi} \left[-\bar{\xi}V + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \mu \bar{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \sigma^2 \bar{\pi}^2 \right] = 0. \quad (3.3.20)$$

Notemos que la ecuación (3.3.20) es igual a la ecuación de HJB para el caso $\bar{W}_t^{w,\pi} < \bar{M}_t$ dada en (3.3.2). Por lo tanto, la solución para el caso $\bar{W}_t^{w,\pi} = \bar{M}_t$ es la misma que en el caso anterior. Es decir, la estrategia óptima $\bar{\pi}^*$ está dada por (3.3.16) y la tasa de crecimiento a largo plazo es de la forma (3.3.14). El hecho que $\frac{\partial V}{\partial \bar{M}} = 0$ nos ayuda a determinar el valor explícito de la tasa de crecimiento a largo plazo (recordemos que nos falta encontrar el valor de β). Tal como se muestra a continuación.

Lema 3.3. *Si $\partial V/\partial \bar{M} = 0$ en $\bar{W}_t^{w,\pi} = \bar{M}_t^{\pi}$. Entonces*

$$\beta = (1 - A)(1 - \alpha) \quad (3.3.21)$$

y

$$\bar{\xi} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{1 - \alpha}{\alpha + A(1 - \alpha)} (1 - A). \quad (3.3.22)$$

⁴La prueba del Lema 3.3.19 se encuentra en la pág. 250 de [30]

Demostración. Como $\partial V/\partial \bar{M}_t = 0$, de la ecuación (3.3.10), tenemos que

$$(1 - A)\bar{M}_t^{-A}f(u) = \bar{M}_t^{-A}uf'(u),$$

además, dado que $u = 1$, entonces

$$(1 - A)f(1) = f'(1).$$

Por otra parte, sabemos que $f(u) = \rho(u - \alpha)^\beta$. Por lo tanto,

$$(1 - A)\rho(1 - \alpha)^\beta = \rho\beta(1 - \alpha)^{\beta-1},$$

es decir, $\beta = (1 - A)(1 - \alpha)$. Luego, sustituyendo este valor en (3.3.14) obtenemos el valor de $\bar{\xi}$. ■

3.3.3. Estrategia óptima

En conclusión, observamos de las subsecciones anteriores que la estrategia de inversión óptima para $\lambda = 0$ es

$$\bar{\pi}_t^* = \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha)A} (\bar{W}_t^{w,\pi} - \alpha \bar{M}_t^\pi). \quad (3.3.23)$$

Recordemos que la fracción del capital invertido en el activo para el caso sin restricciones del Capítulo 2 (donde $\alpha = 0$) era una constante igual a $\frac{\mu}{A\sigma^2}$. Entonces la razón de estos es

$$q_t = \frac{A(1 - \alpha/u)}{A(1 - \alpha) + \alpha}, \quad (3.3.24)$$

la cual siempre está entre 0 y 1. Por ejemplo, si tomamos $u = 1$, entonces

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{A(1 - \alpha)}{A(1 - \alpha) + \alpha} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{A(1 - \alpha) + \alpha}. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

El número $\frac{\alpha}{A(1 - \alpha) + \alpha}$ representa la medida que sigue una estrategia de inversión más conservadora (incluso el máximo hasta la fecha) en un intento de controlar las caídas.

3.3.4. Costo de las Caídas

Consideremos ahora a $\bar{\xi}_\alpha$ como la tasa de crecimiento cuando el grado de protección es α . Así, si $\bar{\xi}_0$ corresponde a la tasa de crecimiento del caso sin restricciones visto en el Capítulo 2, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\xi}_\alpha}{\bar{\xi}_0} &= \frac{(1-\alpha)A}{\alpha + (1-\alpha)A} \\ &= \frac{\alpha - \alpha + (1-\alpha)A}{\alpha + (1-\alpha)A} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)A}, \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

el cual es cercano a 1 para valores de A muy grandes o valores de α pequeños. Con lo que podemos decir que, la pérdida en la de tasa de crecimiento es minimal si la función de utilidad es muy aversa al riesgo o si el grado de protección es pequeño. Por otro lado, decimos que la pérdida en la tasa de crecimiento es maximal si la función de utilidad es neutral al riesgo o si el grado de protección es cercano al 100 %.

3.3.5. Propiedades de la estrategia óptima

Analicemos ahora la fracción del capital, γ_t , invertido en el activo con riesgo:

$$\gamma_t = \pi_t^* / \bar{W}_t^{w,\pi} = \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{(1-\alpha/u)}{\alpha + (1-\alpha)A}. \quad (3.3.27)$$

la cual es una función creciente de u . Además, notemos que

- Cuando $u = 1$, es decir, cuando el capital está en su punto más alto, entonces $\gamma = \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha + (1-\alpha)A}$.
- Cuando $u = \alpha$, es decir, cuando el capital se acerca a la cota restrictiva $\alpha \bar{M}_t^\pi$, tenemos que $\gamma = 0$.
- Cuando u es cercano a 1, la naturaleza estocástica de la cota restrictiva $\alpha \bar{M}_t^\pi$, crea una resistencia muy fuerte a los incrementos en γ . Además, se espera que cuando $u = 1$, éste se caiga, ya que $u = 1$ es una barrera reflejante para el proceso u .

3.4. Análisis para el caso $\lambda > 0$

El caso $\bar{\lambda} > 0$ corresponde a suponer que el proceso de la cota restrictiva incrementa en una tasa menor que r . Veremos que incluso una pequeña λ positiva puede mejorar significativamente el valor esperado de la tasa de crecimiento. La solución de este caso es análoga a la de la sección anterior. Así, partiremos del principio de programación dinámica dado en (3.2.5) y usaremos las propiedades de \tilde{V} dadas en las Proposiciones 3.1 y 3.2 para encontrar la función V , el valor de $\bar{\xi}$ y una estrategia de inversión óptima $\bar{\pi}$. Recordemos que para este caso, la dinámica del capital está dada por (3.2.1), es decir

$$d\bar{W}_t^{w,\pi} = \lambda \bar{W}_t^{w,\pi} dt + \bar{\pi}_t (\mu dt + \sigma dZ_t). \quad (3.4.1)$$

Análogo al caso anterior, partiendo de (3.2.5) y usando fórmula de Itô, tenemos que

$$0 = -\bar{\xi}V + \max_{\pi} \left[\frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \lambda \bar{W} + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \mu \bar{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2} \sigma^2 \bar{\pi}^2 \right] \quad (3.4.2)$$

Calculando la primer derivada de (3.4.2) e igualando a cero obtenemos que

$$\bar{\pi}^* = -\mu \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \bigg/ \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2}. \quad (3.4.3)$$

Sustituyendo (3.4.3) en (3.4.2) obtenemos

$$0 = -\bar{\xi}V + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \lambda \bar{W}_t^{w,\pi} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \right)^2 \bigg/ \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2}. \quad (3.4.4)$$

Por otra parte, la Proposición 3.1 nos motiva a buscar una función $V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi)$ tal que $V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi) = (\bar{M}_t^\pi)^{1-A} f(u)$, donde $u = \bar{W}_t^{w,\pi} / \bar{M}_t^\pi$ está entre α y 1. Así, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$0 = -\bar{\xi}f(u) + \lambda u f'(u) - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{[f'(u)]^2}{f''(u)}. \quad (3.4.5)$$

y sustituyendo los valores de las derivadas de $f(u)$ en (3.4.3), reescribimos a $\bar{\pi}^*$ de la siguiente manera

$$\bar{\pi}_t^* = -\frac{\mu f'(u)}{\sigma^2 f''(u)} \bar{M}_t^\pi. \quad (3.4.6)$$

A diferencia del caso anterior, ahora definimos $y(u) = f'(u)/f''(u)$. Entonces (3.4.5) se convierte en

$$-\bar{\xi}f(u) + \lambda u f'(u) - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} f'(u)y(u) = 0. \quad (3.4.7)$$

Luego, derivamos con respecto a u , dividimos entre $f''(u)$ y multiplicamos por -1 . Obteniendo que

$$\frac{\mu^2}{2\sigma^2} y(u)y'(u) + \left[\bar{\xi} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \lambda \right] y(u) - \lambda u = 0, \quad (3.4.8)$$

es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden, cuya solución general es de la forma

$$|y(u) - \theta_1 u|^{1-\delta} |y(u) - \theta_2 u|^{1+\delta} = c \quad (3.4.9)$$

para alguna constante c y donde $\theta_1 < 0$ y $\theta_2 > 0$ satisfacen que

$$\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) \theta^2 + \left[\bar{\xi} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \lambda \right] \theta - \lambda = 0, \quad (3.4.10)$$

y donde δ está definido como

$$\delta = -\frac{\bar{\xi} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \lambda}{\sqrt{\left(\bar{\xi} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \lambda\right)^2 + 2\lambda \frac{\mu^2}{\sigma^2}}}. \quad (3.4.11)$$

Ahora analizaremos el comportamiento de la función en los extremos:

- En $u = \alpha$, la inversión en el activo con riesgo debería ser cero y así $y(u) = 0$. Sustituyendo $y(u) = 0$ en (3.4.9), obtenemos que

$$c = (-\theta_1 \alpha)^{1-\delta} (\theta_2 \alpha)^{1+\delta} \quad (3.4.12)$$

- En $u = 1$, podemos usar la solución del caso de la sección anterior, usando el hecho que $\partial V / \partial \bar{M} = 0$. Entonces, de (3.3.10)

$$f'(1) = (1 - A)f(1).$$

Así, sustituyendo en la ecuación (3.4.7) obtenemos que

$$\bar{\xi} = (1 - A) \left[\lambda - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} y(1) \right]. \quad (3.4.13)$$

De esta ecuación notamos que podemos escribir $y(1)$ como una función que depende de $\bar{\xi}$

$$y(1) = \frac{(\bar{\xi} - (1 - A)\lambda)2\sigma^2}{(1 - A)\mu^2}. \quad (3.4.14)$$

De manera análoga, la ecuación (3.4.10), podemos representar a θ_1 y θ_2 en términos de $\bar{\xi}$. Al igual que en las ecuaciones (3.4.11) y (3.4.12), podemos escribir a δ y c como funciones de $\bar{\xi}$. Es decir, las ecuaciones (3.4.9)-(3.4.13) determinan el valor de la tasa de crecimiento. Luego, sustituyendo todos estos valores en la ecuación (3.4.9), cuando $u = 1$,

$$|y(1) - \theta_1|^{1-\delta} |y(1) - \theta_2|^{1+\delta} = c \quad (3.4.15)$$

obtenemos una ecuación algebraica para $\bar{\xi}$, permitiéndonos encontrar una solución de manera numérica.

3.4.1. Cálculo de la tasa de crecimiento

En principio, las ecuaciones (3.4.9)-(3.4.13) deben determinar el valor de la tasa de crecimiento. Por razones obvias, no es posible dar una expresión explícita para $\bar{\xi}$, pero cuando tratamos de resolver las ecuaciones de manera numérica, obtenemos una solución única.

Por el análisis del caso $\lambda = 0$ y del Capítulo 2, sabemos que el valor de $\bar{\xi} - (1 - A)\lambda$ deberá estar entre

$$(1 - A) \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{1 - \alpha}{\alpha + (1 - \alpha)A} \text{ y } (1 - A) \frac{\mu^2}{2A\sigma^2}. \quad (3.4.16)$$

Estas cotas para $\bar{\xi} - \lambda$ deberán ayudarnos para encontrar soluciones numéricas.

3.5. Teoremas de verificación

El objetivo de esta sección es verificar que $\bar{\xi}$ definida como en (3.3.22) y $\bar{\pi}^*$ como en (3.3.23) dan solución al problema de control de caídas. Primero verificaremos que la solución es válida para el caso $\lambda > 0$ para luego hacer tender λ a cero y mostrar que la solución también es factible para $\lambda = 0$.

Si $\lambda > 0$, necesitamos mostrar que existe una constante $\bar{\xi}$ y una función $y(u)$ negativa que satisfagan (3.4.9)-(3.4.13). Si esto se cumple, entonces $\bar{\xi}$ es la

máxima tasa de crecimiento y puede ser alcanzado usando la estrategia $\bar{\pi}^*$ y la fracción del capital invertido en el activo con riesgo es igual a $-\frac{\mu y(u)}{\sigma^2 u}$, donde $u = \bar{W}_t^{w,\pi} / \bar{M}_t^{w,\pi}$. Sea

$$V(w, m) = (m)^{1-A} f(u) \quad (3.5.1)$$

donde

$$f(u) = \frac{1}{(1-A)} \exp \left[\int_{\alpha}^u \frac{\bar{\xi}}{\lambda \nu - (\mu^2/2\sigma^2)y(\nu)} d\nu \right]. \quad (3.5.2)$$

Notemos que para llegar a la definición de $f(u)$, tuvimos que partir de la ecuación (3.4.7) y dividir entre $f'(u)$

$$\bar{\xi} \frac{f(u)}{f'(u)} = (1-A) \left[\lambda u - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} y(u) \right], \quad (3.5.3)$$

Luego, integrando $\frac{f'(u)}{f(u)}$, obtenemos que

$$f(u) = c \exp \left[\int_{\alpha}^u \frac{\bar{\xi}}{\lambda \nu - (\mu^2/2\sigma^2)y(\nu)} d\nu \right], \quad (3.5.4)$$

donde $c = (1-A)^{-1}$ es una constante que hace que $V(w, m)$ tenga el mismo signo que $U(w)$.

Por otra parte, notemos que $V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^{\pi})$ es un función suave de \bar{W} y \bar{M} para todo $\bar{W}_t^{w,\pi} \in [\alpha \bar{M}_t, \bar{M}_t]$. Verificaremos ahora que la función satisface las condiciones del Teorema 3.1 a través del siguiente Lema.

Lema 3.4. *Sean $V(w, m)$ la función definida por (3.5.1)-(3.5.2) y $\bar{\pi}$ una estrategia arbitraria. Entonces*

$$V(w, m) \geq \sup_{\mathcal{A}} \mathbb{E} [V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^{\pi}) e^{-\bar{\xi}t} | W_0^{w,\pi} = w]. \quad (3.5.5)$$

Demostración. Sea $\bar{\pi} \in \mathcal{A}$ arbitrario. Aplicando la fórmula de Itô para semimartingalas, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^{\pi}) e^{-\bar{\xi}t}] - V(w, m) \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \left[-\bar{\xi}V + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \lambda \bar{W} + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \mu \bar{\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2} \sigma^2 \bar{\pi}^2 \right] e^{-\bar{\xi}s} ds \\ &+ \mathbb{E} \int_0^t \frac{\partial V}{\partial \bar{M}} d\bar{M}_s \\ &= \mathbb{E}(I) + \mathbb{E}(II), \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

donde

$$I = \int_0^t \left[-\bar{\xi}V + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \lambda \bar{W} + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \mu \bar{\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2} \sigma^2 \bar{\pi}^2 \right] e^{-\bar{\xi}s} ds \quad (3.5.7)$$

y

$$II = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial \bar{M}} d\bar{M}_s. \quad (3.5.8)$$

Notemos que el integrando de I es menor o igual a cero, ya que por (3.4.2) sabemos que el máximo alcanzado sobre $\bar{\pi}$ de esa ecuación es cero. Así, $\mathbb{E}(I) \leq 0$. Por otra parte, como $\bar{W}_t^{w,\pi} = \bar{M}_t^\pi$, $\frac{\partial V}{\partial \bar{M}} = 0$. Entonces $II = 0$ y así por lo tanto $\mathbb{E}(II) = 0$. Es decir,

$$V(w, m) \geq \sup_{\mathcal{A}} \mathbb{E}[V(\bar{W}_t^{w,\pi}, \bar{M}_t^\pi) e^{-\bar{\xi}t}]. \quad (3.5.9)$$

■

Lema 3.5. *Para todo $t > 0$, la función $V(w, m)$ definida como en (3.5.1)-(3.5.2) y $\bar{\pi}^*$ la estrategia óptima definida en (3.3.23) satisface el principio de programación dinámica*

$$V(w, m) = \sup_{\mathcal{A}} \mathbb{E}[V(\bar{W}_t^{w,\pi^*}, \bar{M}_t^{\pi^*}) e^{-\bar{\xi}t} | W_0^{w,\pi^*} = w]. \quad (3.5.10)$$

Demostración. Sea $\bar{\pi}^*$ la estrategia de inversión óptima. Aplicando la fórmula de Itô para semimartingalas, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V(\bar{W}_t^{w,\pi^*}, \bar{M}_t) e^{-\bar{\xi}t}] - V(w, m) \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \left[-\bar{\xi}V + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \lambda \bar{W} + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \mu \bar{\pi}^* \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2} \sigma^2 \bar{\pi}^{*2} \right] e^{-\bar{\xi}s} ds \\ &+ \mathbb{E} \int_0^t \frac{\partial V}{\partial \bar{M}} d\bar{M}_s \\ &= \mathbb{E}(I) + \mathbb{E}(II) \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

donde

$$I = \int_0^t \left[-\bar{\xi}V + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \lambda \bar{W} + \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} \mu \bar{\pi}^* \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{W}^2} \sigma^2 \bar{\pi}^{*2} \right] e^{-\bar{\xi}s} ds \quad (3.5.12)$$

y

$$II = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial \bar{M}} d\bar{M}_s. \quad (3.5.13)$$

Análogamente, por (3.4.2) sabemos que el máximo es alcanzado en $\bar{\pi}^*$. Por lo tanto, $\mathbb{E}(I) = 0$. Por otra parte, como $\bar{W}_t^{w, \pi^*} = \bar{M}^{\pi_t^*}$, $\frac{\partial V}{\partial M} = 0$. Entonces $II = 0$ y $\mathbb{E}(II) = 0$. Es decir,

$$V(w, m) = \sup_A \mathbb{E}[V(\bar{W}_t^{w, \pi^*}, \bar{M}^{\pi_t^*}) e^{-\bar{\xi}t}]. \quad (3.5.14)$$

■

Lema 3.6. *Para $\lambda > 0$, existen C_1, C_2 constantes positivas tales que*

$$C_1(1 - A)U(w) \leq (1 - A)V(w, m) \leq C_2(1 - A)U(w).$$

Demostración. Dado que $V(w, m) = m^{1-A}f(u)$, donde $f(u)$ está definido como (3.5.2), es fácil ver que $V(w, m)$ y $U(w)$ tienen el mismo signo. Como $y(u)$ es negativo por construcción, entonces

$$\lambda\nu - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}y(\nu) \geq \lambda\alpha. \quad (3.5.15)$$

Por lo tanto, $(1 - A)f(u)$ está acotado por dos números positivos: C_1, C_2 y en consecuencia el lema se cumple. ■

Hemos probado que la función V definida por las ecuaciones (3.5.1)- (3.5.2), la constante $\bar{\xi}$ definida en (3.3.22) y la estrategia de inversión $\bar{\pi}^*$ como en (3.3.23) satisfacen las condiciones del Teorema 3.1, por lo tanto, concluimos que $\bar{\xi}$ es la máxima tasa de crecimiento y da solución al problema (3.1.7).

3.6. Diferencias entre $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$

A manera de conclusión, realizamos el análisis de las diferencias entre el caso $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$. Para el primer caso, tenemos que $\bar{\xi}$ tiene una forma cerrada, específicamente

$$\bar{\xi} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{1 - \alpha}{\alpha + A(1 - \alpha)} (1 - A). \quad (3.6.1)$$

Mientras que el caso cuando $\lambda > 0$, nos orilla a encontrar una solución de forma numérica y tal solución se encontrará entre

$$(1 - A) \left[\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{1 - \alpha}{\alpha + (1 - \alpha)A} + \lambda \right] \text{ y } (1 - A) \left[\frac{\mu^2}{2A\sigma^2} + \lambda \right].$$

Por otra parte, es importante recalcar que, de manera gráfica podemos notar que con un valor de λ positivo, podemos mejorar la tasa de crecimiento significativamente. La mejora marginal es más grande para los valores más pequeños de λ .

Conclusiones

Como vimos a lo largo de este trabajo, para resolver un problema de portafolio de inversión óptimo es necesario seguir los siguientes pasos

- Tener siempre en cuenta que el objetivo básico es encontrar el control óptimo (si éste existe) y la función de valor.
- Proponer una caracterización manejable de la función de valor, de ser posible con solución explícita, de lo contrario podemos encontrar una descripción cualitativa y resultados cuantitativos por aproximación numérica.

Las herramientas matemáticas que usamos para llevar a cabo esto son: el principio de programación dinámica y el cálculo estocástico. Por ello, podemos decir que encontrar una estrategia de inversión óptima empleando el control estocástico es una rigurosa combinación entre probabilidad, análisis estocástico y ecuaciones diferenciales parciales.

Por otro lado, como mencionamos al inicio, buscamos encontrar una estrategia de inversión óptima que se adapte a un problema del mundo real, un mundo donde los inversionistas son cada vez más exigentes y donde las condiciones del sistema bursátil no admiten intentos fallidos. Como consecuencia de esto y en complemento al problema del Capítulo 3, surge un problema de inversión óptimo a largo plazo en el que un inversionista trata de minimizar la probabilidad de caer por debajo de una tasa de crecimiento fija mientras controla las caídas. Desde un punto de vista matemático, se trata de un problema de control de desviación. Varios autores [10], [12], [23] relacionaron éste problema (sin tomar en cuenta las caídas) con el problema de control estocástico sensible al riesgo para un horizonte de tiempo suficientemente grande. De hecho, en [12] se plantea una relación entre los dos problemas anteriores, en el sentido que el problema se resuelve como un problema de optimización dual. Además, se menciona que bajo un modelo Gaussiano lineal multidi-

mensional se pueden obtener soluciones explícitas para el problema primal.

Propuesta para mejorar el modelo

Es otras palabras, lo que sugerimos para mejorar el modelo de optimización de portafolios es considerar el problema de controlar la probabilidad de estar por debajo de cierto nivel de riesgo. Para minimizar tales probabilidades y obtener un portafolio óptimo (o casi óptimo) relacionamos el problema de optimización de portafolio con el criterio de sensibilidad al riesgo y con ayuda al material expuesto en esta tesis trataremos de plantear el problema.

Del Capítulo 2 y 3 sabemos que el problema se basa en maximizar la utilidad esperada del capital final con la función de utilidad HARA

$$\text{máx} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{1-A} (W_T^\pi)^{1-A} \right] \right\}, \quad (3.6.2)$$

donde W_t^π es el proceso de capital usando la estrategia π y el máximo es tomado sobre una clase de estrategias admisibles. Es conveniente reemplazar (3.6.2) por

$$\text{máx} \left\{ \mathbb{E} \left[(W_T^\pi)^{1-A} \right] \right\}, \quad (1-A) > 0 \quad (3.6.3)$$

donde el parámetro $1-A$ vive en $(0, 1)$ y para $1-A = 0$, $\frac{1}{(1-A)} (W_T^\pi)^{1-A}$ es interpretado como $\log W_T^\pi$, la cual es una función de utilidad *Kelly*. Cuando la utilidad HARA es empleada, el problema puede ser reformulado como un problema de control sensible al riesgo, donde $(1-A)$ juega el rol del parámetro sensible al riesgo. Entonces el método de la teoría de control estocástico puede ser aplicado al problema de optimización de portafolio. En particular, trataríamos de aplicar la programación dinámica para resolver el problema, que como sabemos, esta aproximación es muy usual en modelos a tiempo discreto, pero en tiempo continuo necesitamos resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

De manera análoga a los problemas anteriores, consideramos que en el mercado financiero tenemos una cuenta bancaria con precio B_t , un activo con precio S_t , cuyas dinámicas están dadas por

$$dB_t = rB_t dt, \quad (3.6.4)$$

$$dS_t = S_t((\mu + r)dt + \sigma dZ_t), \quad (3.6.5)$$

donde Z_t es un movimiento Browniano estándar definido sobre una filtración del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Una estrategia óptima de forma cerrada se puede obtener resolviendo la ecuación de HJB. El problema de *oportunidad por arriba* es considerar

$$\max \left\{ \mathbb{P} \left[\frac{1}{T} \log W_T^\pi \geq c \right] \right\}, \quad (1 - A) > 0 \quad (3.6.6)$$

para una T grande donde la maximización es tomada por π en una clase de estrategias admisibles. Más generalmente

$$\max \left\{ \mathbb{P} \left[\frac{1}{T} \log \frac{W_T^\pi}{I_T} \geq c \right] \right\}, \quad (1 - A) > 0 \quad (3.6.7)$$

donde I_T es un proceso de cota de referencia. Por simplicidad, tomemos $I_t = 1$. La maximización de la probabilidad de oportunidad a la alza no es un problema de optimización convencional y en general es difícil de tratar. Algunos autores proponen desarrollar una teoría matemática para la probabilidad de reducir el riesgo al mínimo,

$$\min \left\{ \mathbb{P} \left[\frac{1}{T} \log W_T^\pi \geq k \right] \right\}, \quad (1 - A) > 0 \quad (3.6.8)$$

o más generalmente,

$$\min \left\{ \mathbb{P} \left[\frac{1}{T} \log \frac{W_T^\pi}{I_T} \geq k \right] \right\}, \quad (1 - A) > 0 \quad (3.6.9)$$

El problema es minimizar (3.6.9) y obtener un portafolio óptimo (o casi óptimo), donde k es considerada tal que el evento tiene probabilidades pequeñas de ocurrir.

Aunque agregar condiciones de control de caídas nos hace pensar que el problema es más realista, es muy importante tener en cuenta que la adaptación a un nuevo sistema no es fácil, sobre todo cuando los cambios a efectuar no son únicamente del tipo reemplazo. Si antes el objetivo era la maximización de la utilidad esperada, ahora este objetivo de beneficio ha sido suplantado por la probabilidad de no estar por debajo de cierta tasa.

Lista de abreviaturas y símbolos

$C^k(\mathcal{R})$	Conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, k diferenciables con $f^{(k)}$ continua, $k \geq 0$.
\mathcal{M}	Modelo de mercado financiero.
σ^2	Varianza.
μ	Media.
$W_t^{w,\pi}$	Capital asociado a una estrategia de inversión π al tiempo t .
$\tilde{W}_t^{w,\pi}$	Capital descontado asociado a una estrategia de inversión π al tiempo t .
S_t	Precio de un activo al tiempo t .
π_t	Cantidad invertida en el activo.
r	Tasa de rendimiento.
γ_t	Fracción del capital invertida en el activo.
Z_t	Movimiento Browniano estándar.
G_t^π	Ganancia asociada al capital descontado al tiempo t .
$\inf_{\mathcal{A}}$	Ínfimo de un subconjunto \mathcal{A} .
$\sup_{\mathcal{A}}$	Supremo de un subconjunto \mathcal{A} .

$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana en \mathbb{R}^d .
$\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$	Precio de mercado al riesgo.
ξ	Tasa de crecimiento.
M_t^π	Máximo del capital hasta la fecha.
$1 - \frac{W_t^{w,\pi}}{M_t^\pi}$	Caída.
$U(x)$	Función de utilidad.
$\tilde{V}(x)$	Función de valor.
c.s.	Casi seguramente.
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman.
MVHC	Máximo valor histórico del capital.

Bibliografía

- [1] Bertsekas D., Tsitsiklis J. *Dynamic Programming and Optimal Control*, Vols. I y II, Athena Scientific Press, Belmont, MA, 1995.
- [2] Bielecki T, Hernández-Hernández D., Pliska S., *Risk Sensitive Control of Finite State Markov Chains in Discrete Time, with Applications to Portfolio Management*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 50, 167-188, 1999.
- [3] Black F., Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3 pp. 637-654, 1973.
- [4] Cepeda E., *Consumer Portfolio: Merton Problem*, Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR 8050, Université Paris-Est. 61, París, Francia.
- [5] Chapados N., *Portfolio Choise Problems. An introductory Survey of single and Multiperiod Models Processes*, Springer, Nueva York, 2011.
- [6] Fleming W., Hernández-Hernández D., *An optimal consumption model with stochastic volatility*, Finance and Stochastics 7, 245–262, Springer-Verlag, 2003.
- [7] Fleming W., McEneaney., *Risk Sensitive Control on an Infinite Time Horizon*, SIAM J. Control Optim. 33 (1995), 18881-1915.
- [8] Davis M.H.A., Norman A.R., *Portfolio Selection with transaction Costs*, Math. Oper. Res. 15, 676-715 (1990).
- [9] Fleming W., Rishel R., *Deterministic and Stochastic Optimal Control 3th edition*, Springer-Verlag, 1986.
- [10] Fleming W., Sheu S., *Optimal Long Term Growth Rate of Expected Utility of Wealth*, Ann. Appl. Probab. 9, 871-903, 1999.

-
- [11] Föllmer H., Schied A., *Stochastic finance: an introduction to discrete time*, Gruyter Studies In Mathematics 27, Berlin, 2005.
- [12] Hata H., Nagai H., Sheu S., *Asymptotics of the Probability Minimizing a "Down-SideRisk*, The Annals of Applied Probability, Vol. 20, No. 1, 52-89, 2010.
- [13] Hernández-Hernández D, López-Mimbela J.A., Quezada R., *Modelos Estocásticos II*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2001.
- [14] Hernández-Lerma O., Lasserre J., *Discrete-time Markov Control Processes*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
- [15] Hull J., *Options, Futures and Other Derivates*, 8th edition, Univerity of Toronto, 2012.
- [16] Karatzas I., Shreve S., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2th edition, Springer Verlag, Nueva York, 1991.
- [17] Karatzas I., *Lectures on the Mathematics of Finance*, Centre de Recherches Mathématiques Monograph Series, American Mathematical Society, USA, 1997.
- [18] Klebaner F., *Introduction to Stochastic Calculus With Applications 2nd edition*, Imperial College Press, Australia 2005.
- [19] Markowitz H., *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7:77-091, 1952.
- [20] Merton R., *Theory of Rational Option Pricing*, The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, No. 1 pp. 141-183, 1973.
- [21] Merton R., *Continuous-Time Finance*, Wiley-Blackwell, 1992.
- [22] Pham H., *A Large deviations Approach to Optimal Long Term Investment*, Finance Stochastics 7 169–195, 2003.
- [23] Pham H., *A Risk-sensitive Control Dual Approach to a Large Deviations Control Problem*, Systems Control Lett. 49 295–309, 2003.
- [24] Pham H., *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, volume 61 of Mathématiques et Applications, Springer-Verlag, 2007.
- [25] Rogers L.C., *Optimal Investment*, Springer, Nueva York, 2010.
- [26] Shreve S., *Stochastic Calculus and Finance*, Reverté, Carnegie Mellon University, 1997.

-
- [27] Shreve S., *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer Finance, Carnegie Mellon University, 2000.
- [28] Shreve S., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer Finance, Carnegie Mellon University, 2000.
- [29] Touzi N., *Stochastic Control and Application to Finance*, Ecole Polytechnique Paris Département de Mathématiques Appliquées, 2012.
- [30] Zhou Z., Grossman S., *Optimal Investment Strategies for Controlling Draw-downs*, Mathematical Finance, 1993.

